Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Diplomová práce

NIM a matematika

Vypracovala: Mgr. et Bc. Věra Němcová

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.

České Budějovice 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma *NIM a matematika* jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 23.4.2021 …..…………………………

Věra Němcová

Anotace

Diplomová práce se zabývá kombinatorickou hrou NIM. Práce se skládá ze dvou částí – teoretické a praktické. Část teoretická se nejprve věnuje Sprague-Grundyově funkci (která představuje obecný úvod do teorie her) a analýze několika tzv. „substaction games“ (her s odebíráním objektů). Pak následuje samotný NIM: pravidla hry, různé možnosti analýzy, vlastnosti, historie, jeho různé varianty a především nalezení vítězné strategie. U vítězné strategie je nezbytné soustředit se také znalost binární soustavy a NIM-součtu. Praktická část následně obsahuje rozbor několika odehraných her s žáky a snaží se zjistit, zda jsou schopni intuitivně objevit některé části vítězné strategie.

Klíčová slova: NIM, Sprague-Grundyova funkce, binární soustava, NIM-součet, vítězná strategie

Annotation

The diploma thesis deals with the combinatorial game NIM. The work is divided into two parts - theoretical and practical. The theoretical part submits the Sprague-Grundy theorem (which is a general introduction to game theory) and the analysis of several substraction games. Then follows the NIM: the rules of the game, various analysis options, features, history, variants and mainly finding the winning strategy. It´s necessary to know binary system and NIM-sum. The practical part contains an analysis of several games played with students and wants to find out if they are able to intuitively discover some parts of the winning strategy.,

Key words: NIM, Sprague-Grundy´s theorem, binary system, NIM-sum, winning strategy

Poděkování

Ráda bych tímto poděkovala Prof. RNDr. Pavlu Tlustému, CSc. za čas, který mé práci věnoval a za podnětné rady a připomínky, které mi pomohly při psaní práce. Dále bych chtěla poděkovat Mgr. Jitce Vysokomýtské, že mi umožnila i v této složité době výzkum provést a žákům 6. B Základní školy T. G. Masaryka v Českém Krumlově, že se výzkumu zúčastnili. A nakonec bych chtěla poděkovat členům své rodiny za jejich trpělivost a podporu, protože bez jejich pomoci by nebylo možné práci vůbec napsat.

Obsah

Obsah

Úvod

Hry jsou spojené s lidskou civilizací odedávna, jsou nedílnou součástí každé kultury a jedním z nejstarších způsobů sociální interakce. Plní funkci zábavy, učení ale také rozvíjejí myšlení, uvažování, logiku a další kognitivní složky. Nejstarší dochované záznamy a zápisy her pocházejí přibližně 3500 let před naším letopočtem ze Starověkého Egypta.

Hra plnila a plní ve společnosti a kultuře celou řadu funkcí, ale s rozvojem moderních věd se také na ni začalo pohlížet také z jiného pohledu – z pohledu „zvenku“. Snaha objevit mechanismy proč hra funguje tak, jak funguje a především snaha zajistit si pomocí analýzy v dané hře vítězství, vedla k vytvoření celé řady studií zabývajících se hrami právě z pohledu teorie.

Existuje nepřeberné množství her fungujících na různých principech, mechanismech a s různými pravidly. U některých je jejich kompletní rozbor a uchopení podstaty pro vlastní výhru nemožné. Ovšem existuje celá řada her, které lze rozložit na základní stavební kameny a zajistit si pomocí určitého mechanismu vítězství. A mezi takovéto hry patří většina kombinatorických her. A právě jednou kombinatorickou hrou se budeme zabývat v této práci, bude se jednat o hru NIM.

NIM nebo také „Odebírání sirek“ je (jak již bylo řečeno) logická hra pro dva hráč a existuje její kompletní popsání a matematický rozbor včetně odhalení algoritmu tzv. vítězné strategie, tedy jak při postupovat v jednotlivých tazích, abychom dosáhli vítězství.

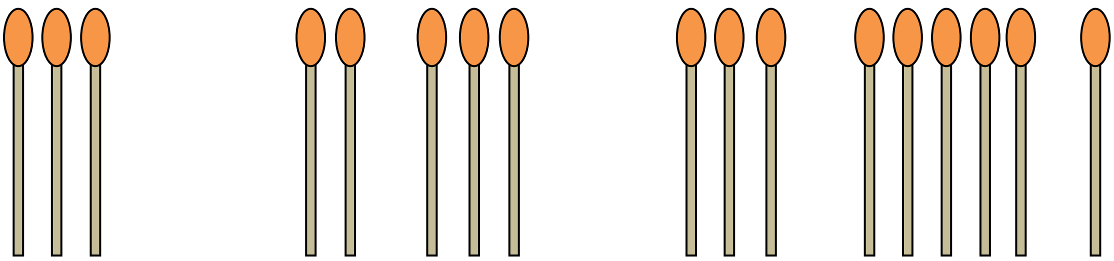
Tato práce se tedy bude zabývat hrou NIM a to z pohledu teorie i praxe. V první (teoretické) části práce se budeme věnovat tomu, jak vlastní hra vypadá a probíhá, jaká je její historie. Jak se NIM hraje, jaké jsou možné tahy, zda existují nějaké významné pozice ve hře. Hru rozebereme na základě různých metod a popíšeme fungování vítězné strategie. Také se podíváme na některé varianty hry. V teoretické části se také budeme krátce věnovat Sprague-Grundyově funkci, která nahlíží na kombinatorické hry z obecného pohledu a pomocí Sprague-Grundyových hodnot dokáže říci, zda konkrétní pozic v libovolné hře povede k vítězství či nikoli. Část o Sprague-Grundyově funkci je zařazená nejen jako teoretický úvod pro hru NIM, ale také proto, že právě sama funguje na jedné konkrétní podobě NIMu.

V druhé (praktické) části práce se pak podíváme na NIM v praxi. Provedeme kompletní rozbor NIM (3, 4, 5), kde na základě mechanismu vítězné strategie objasníme všechny tahy ve hře a určíme významné pozice. A podle tohoto rozboru pak budeme hledat nalezené významné pozice u skutečně odehraných her NIMu s žáky základní školy.

Teoretická část - NIM

1 Obecné zásady NIMu

Při standardní hře je dán konečný počet pozic a objektů, tzn. že hráči před započetím samotné hry vědí, na kolik míst (hromádek) jsou objekty (sirky) rozděleny a jaký je jejich počet. Při čemž počet hromádek může být neomezený stejně jako počet sirek, vždy však musí být alespoň jedna hromádka a jedna sirka. Vyjádřeno matematicky uvažujme k hromádek sirek, kdy v i-té hromádce je $n_i \geq 1$ sirek, $i = 1, \ldots, k$. Hru NIM s k hromádkami o $n_1, \ldots, n_k$ sirkách budeme značit NIM $(n_1, \ldots, n_k)$.



NIM (3) NIM (2, 3) NIM (3, 5, 1)

Obrázek 1: Příklady NIMu

Stejně tak je při standardní hře vyloučena možnost náhodných tahů (jako je u kostek házení, u karet míchání). Hráč, který zjistil, že již nemůže dál hrát, hru prohrává.[1] Jedná se tedy o ***hru s dokonalou informací*** (každý hráč zná pravidla hry, v každém okamžiku má informace o tazích, které již proběhly, včetně tahů iniciačních), ***splňující podmínku konce*** (každá hra končí, neexistuje v ní nekonečná linie tahů, není možná ani remíza, vždy se po určitém počtu tahů jeden hráč ocitne v pozici, ze které již žádný tah není možné provést) a ***podmínku normální hry*** (hráč, který již nemá možnost žádného tahu, prohrává a hra končí). V libovolném bodě hry je v každé pozici hráče sada pohybů, které smí provádět, což by bylo definováno jako $AP(A, P) = (\{\ \}, \{\ \})$, kdy ve složených závorkách by byl uveden počet možných tahů.

[1] Na základě těchto obecných zásad je zřejmé, že se nejedná o hazardní hru a je vyloučen společný původ s hrou FanTan, viz níže.

NIM je také příkladem ***nestranné hry*** – tzn. v daném okamžiku při hře, má každý hráč přesně stejnou sadu pohybů. Ukažme si nestrannost hry na následujícím příkladu: Mějme dané hromádky o určitých počtech sirek a dva hráče Annu (A) a Bedřicha (B). A a B se střídají a odebírají z hromádek sirky. Nestrannost hry spočívá v tom, že v jakékoli konfiguraci hromádek a počtů sirek v nich existují tahy, které může provést A. Ovšem kdyby v tu chvíli byl na tahu B, mohl by provést úplně ty samé tahy jako A.[2] Jediným rozdílem mezi hráči je tedy to, že jeden odebírá jako první.

Než se budeme věnovat detailně hře NIM (a také nalezení vítězné strategii pro NIM a různým variacím hry), pokusíme se podívat obecně na možnosti nalezení výherní strategie u nestranné hry pomocí algoritmu Sprague-Grundyova sekvence. A to včetně její aplikace při různých podobách ***substractions games***[3]. Podoby her budou *odebírání čtvercových čísel*, *odebírání alikvotních částí*, *odebírání pravých dělitelů*, o*debírání prvočísel*.

Všechny tyto podoby hry jsou v základních principech shodné s hrou NIM. Jedná se tedy o hru pro dva hráče, kteří se pravidelně střídají v tazích a odebírají určitý kladný počet objektů z hromádky, jejíž hodnota (velikost, množství objektů) je určena před zahájením hry[4]. Všechny hry jsou nestranné, s dokonalou informací, splňují podmínku normality a konečnosti.

[2] Pro porovnání – hra, která není nestranná, je např. Dáma, jelikož každý hráč má jinou barvu figurek. Když by tedy A udělala jednoduchý pohyb černou figurkou, B i kdyby byl na řadě, nemohl by udělat stejný, jelikož hraje bílými a nikdy není v jeho možnostech provést tah černou.

[3] Substraction games neboli „odebírací hry“ – jak již název napovídá – postupuje od daného množství objektů k žádnému a hráč, který nemá možnost tahu, prohrává. Ale existují i hry na podobném principu, pouze výchozí situací je prázdná hrací deska a hráči přidávají objekty. Hra potom končí v okamžiku, kdy jeden z hráčů dosáhne určeného počtu nebo stavu objektů. Tento ekvivalent se nazývá „battle of numbers“.

[4] Což je rozdíl proti NIMu, v těchto podobách hry je vždy výchozí situace pouze s jednou hromádkou. V NIMu naproti tomu není nijak omezen počet hromádek sirek ve výchozí pozici.

2 Sprague-Grundyova funkce

Sprague-Grundyova funkce nahlíží na konečné, nestranné kombinatorické hry jako na dvojice (X, N), kde X je množina všech pozic a N je funkce, která pozicím přiřazuje následníky (všechny možné tahy).

2.1 Sprague-Grundyova věta

Sprague-Grundyova věta v kombinatorické teorii her (dále CTG) říká, že každá nestranná hra dle pravidel běžné konvenční hry je ekvivalentní ke hře NIM s jednou hromádkou objektů nebo k nekonečné generalizaci NIMu. Každou nestrannou hru si můžeme tedy představit jako určité přirozené číslo, které odpovídá hodnotě jednohromádkového NIMu, případně jako určité pořadové číslo v nekonečné generalizaci NIMu.

Pro Sprague-Grundyovu větu proto platí, že při nestranné hře pro dva hráče tedy uvažujeme konkrétní stav hry v a chceme, aby z něho byl dosažitelný stav v_i, kde $i \in \{1, 2, \dots, k\}, k \geq 0$. Stavu v_i můžeme přiřadit ekvivalentní hru NIM s jednou hromádkou předmětů o velikosti x, kde číslo x je nazýváno Grundyova hodnota nebo také NIM hodnota. Číslo x lze navíc nalézt touto rekurzivní cestou: $x = mex\{x_1, \dots, x_i\}$, kde x_i je Grundyova hodnota pro stav v_i a funkce *mex* (minimum excludant) je nejmenší nezáporné celé číslo, které v dané sadě stavů nebylo.

Pro ekvivalentní vyjádření nestranné hry CTG také používá výraz ***nimber.*** Hodnota nimber v algebraickém systému odpovídá ekvivalentní hodnotě NIMu, kdy při hře máme pouze jednu hromádku objektů. Pokud při hře máme od počátku jednu hromádku, tak nimber je přímo ekvivalentní s hodnotou objektů v této pozici. Pokud však počáteční pozice NIMu sestává z více hromádek, tak pro určení nimber je nezbytné nejprve různými kombinacemi, přemisťováním a slučováním dospět do jedno-hromádkové formy. Nimber se v CTG obecně značí $*n$ a odpovídá tedy přesně n objektům nacházejícím se přesně v jedné hromádce. Jako ***nimbers*** jsou v CTG nazývána tzv. Grundyova čísla, jež můžeme definovat jako hodnoty objektů v hromádkách NIMu. Formálně jsou tedy nimbers v CTG indukčně definovány tímto způsobem:

$$*0 = \{\ \}, *1 = \{*0\}, *2 = \{*0,\ *1\} \dots \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{0},\ *(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}) = *\boldsymbol{n} \cup \{*\boldsymbol{n}\}.$$

Slovo nimber je odvozeno od NIM a platí pro hru, jejíž pozice jsou indexovány přirozenými čísly. Nimbers lze použít k popsání všech pozic u jakékoli nestranné, konečné hry.[5] Nimbers je tedy sekvence jednotlivých nimber pro danou konkrétní hru a dle CTG se nazývá NIM-sekvence nebo také Sprague-Grundyova sekvence.

2.2 Sprague-Grundyova sekvence

Nechť G je hra pro dva hráče, kdy oba střídavě odebírají kladný počet objektů dle předem stanovených pravidel. Sprague-Grundyova sekvence $g(n)$ nezáporných čísel je definována takto:

1) $g(n) = 0$ pro všechna n, u kterých není žádný možný přesun do jiné pozice. Zejména pak pro $g(0) = 0$.

2) Předpokládejme, že z pozice n je možný tah na libovolnou pozici $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (kde $m_1, m_2, \ldots, m_k < n$). Pak $g(0)$ je nejmenší nezáporné celé číslo odlišné od $g(m_1)$, $g(m_2), \ldots, g(m_k)$.

Věta 1: Hráč, který si zajistí pozici n, pro kterou platí $g(n) = 0$, má vítěznou strategii.

Sprague-Grundyova sekvence pro triviální deskovou hru

Jestliže G je hra, při níž hráči mohou odebírat libovolný kladný počet objektů, pak je Sprague-Grundyovou sekvencí sekvence přirozených čísel

$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

Sprague-Grundyova sekvence pro hru, kde se odebírá ne více než d objektů

Pokud G je hra, při níž se odebírá počet objektů $< d$, pak Sprague-Grundyova sekvence je periodická $0, 1, 2, \ldots, d-1$. Hodnoty n, pro které platí, že $g(n) = 0$, jsou přesnými násobky d.

[5] Sprague-Grundyova věta tedy de facto říká, že každá nestranná, konečná hra může být spojena s jediným nimber.

2.2.1 Odebírání čtvercových čísel

Z výchozí situace hráči střídavě odebírají hodnotu objektů odpovídající čtvercových číslům. Pro nalezení vítězné strategie potřebujeme najít Sprague-Grundyovu sekvenci a zjistit, pro které tahy bude $g(n) = 0$.[6]

Platí $\boldsymbol{g(0) = 0}$, protože není-li žádný objekt, není možný ani žádný tah. Pokud tedy hráč hraje tak, že po ukončení svého tahu je v pozici 0, tak vyhrál, což odpovídá poslednímu tahu, v němž byl odstraněn/y zbylý objekt/objekty.

Je-li hráč v takové pozici, že po jeho tahu zůstal pouze jeden objekt, tak prohrává, protože protihráč už má pouze jednu možnost tahu. Proto $\boldsymbol{g(1) = 1.}$

V pozici s počtem objektů 2 je možné táhnout pouze odebráním jednoho objektu. Tím hráč tah ukončuje v pozici s jedním zbývajícím objektem a vítězí. Pro číslo 2 tedy platí, že $\boldsymbol{g(2) = 0}$.

Mějme číslo 3. Jelikož je možné odebírat pouze čtvercová čísla, i v tomto případě je možnost pouze jednoho tahu – odebrání jednoho objektu. Pozice po ukončení hráčova tahu je tedy 2 a $\boldsymbol{g(3) = 1.}$

U určení g pro číslo 4 už jsou dva možné tahy – odebrání čtvercového čísla 1×1 nebo 2×2. Podle podmínek pro zjištění hodnoty Sprague-Grundyovy sekvence tedy zapíšeme možnosti po odečtení čtvercových čísel a najdeme hodnoty g.

$4 \rightarrow 3, 0 \rightarrow g(3) = 1$ a $g(0) = 0$

Hodnota g původního čísla je nejmenší nezáporné celé číslo, které není hodnotou g dílčích čísel a zároveň je menší než původní číslo.

$4 \rightarrow 3, 0 \rightarrow g(3) = 1$ a $g(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g(4) = 2}$

Pro číslo pět tedy bude platit

$5 \rightarrow 4, 1 \rightarrow g(4) = 2$ a $g(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g(5) = 0}$

Hodnoty Sprague-Grundovy sekvence pro čísla 1-100 jsou uvedeny v Tabulkách 1 a 2.

[6] Tento postup pro zjištění hodnoty $\boldsymbol{g}$ bude platný pro všechny následující hry, podrobněji ho proto rozebereme pouze v tomto případě a dále již budeme uvádět určité nezbytné dílčí výsledky a celkové přehledy hodnot.

$g(0) = 0$ $\qquad$ $6 \to 5, 2 \Rightarrow g(6) = 1$

$g(1) = 1$ $\qquad$ $7 \to 6, 3 \Rightarrow g(7) = 0$

$g(2) = 0$ $\qquad$ $8 \to 7, 4 \Rightarrow g(8) = 1$

$g(3) = 1$ $\qquad$ $9 \to 8, 5, 0 \Rightarrow g(9) = 2$

$g(4) = 2$ $\qquad$ $10 \to 9, 6, 1 \Rightarrow g(10) = 0$

$g(5) = 0$

Tabulka 1: Odebírání čtvercových čísel, S-G sekvence hodnoty čísel 1-10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	0	1	0	1	2	0
1	0	1	2	0	1	0	1	2	0
1	0	1	2	3	2	3	4	5	3
2	3	4	0	1	2	3	2	0	1
2	3	2	0	1	2	3	2	3	4
5	0	1	3	4	5	0	1	3	4
5	0	1	3	0	1	0	1	2	4
2	3	4	5	0	1	6	3	2	4
2	6	4	5	0	1	6	4	2	4

Tabulka 2: Odebírání čtvercových čísel, S-G sekvence hodnoty čísel 1-100

Každou pozici s hodnotami objektů 0, 1, …, *n* lze označit jako vyhrávající nebo prohrávající.

a) Číslo 0 je vždy vyhrávající.

b) Číslo (*n* + 1) je vyhrávající tehdy, pokud po odebrání kladného čtvercového čísla zůstanou pouze čísla prohrávající. Př. *n* = 11, (*n* + 1) = 12, 12 → 11, 3, 8.

Čísla 11, 3 a 8 jsou podle Tabulky 3 opravdu všechna prohrávající, pak z toho plyne, že 12 je vyhrávající číslo.

c) Číslo (n + 1) je prohrávající pokud platí, že po odebrání kladného čtvercového čísla získáme alespoň jedno číslo vyhrávající. Př. n = 13, (n + 1) = 14, 14 → 13, 10, 5. Čísla 10 a 5 jsou čísla vyhrávající, což znamená, že 14 je prohrávající číslo.

0	2	5	7	10	12	15
17	20	22	34	39	44	52
57	62	65	67	72	85	95

Tabulka 3: Odebírání čtvercových čísel - vyhrávající pozice 0-100

Spraque-Grundyovu sekvenci lze také vypočítat pomocí počítačového algoritmu „divide and conquer“ až do libovolné hodnoty jako $\boldsymbol{n\ log^2\ n}$**.**

Vyhrávajících čísel je nekonečně mnoho, ale jejich počet musí být do určité prahové hodnoty alespoň úměrný $\sqrt[2]{n}$, protože jinak by jich nebylo dost na to, aby mohla pokrýt všechny možné výherní tahy z pozic čísel prohrávajících.

Vyhrávající čísla nejčastěji končí na číslice 0, 2, 4, 5, 7 a 9, pokud se objeví jiná číslice, je to poměrně neobvyklé. Platí to především pro sudá čísla končící na 6 → ze 180 000 vyhrávajících čísel, pouze jedno končí na 6 (11356).

Žádná dvě vyhrávající čísla se nemohou lišit o čtvercové číslo, protože pokud by to tak bylo, nemohl by fungovat rozklad do dvou menších prohrávajících čísel. Přirozená hustota vyhrávajících čísel je nulová a to podle Furstenberg-Sarközyho věty. Tato věta je výsledkem aditivní teorie čísel na množině čísel, jež se neliší o čtvercové číslo. Znění Furstenberg-Sarközyho věty.

(Věta 2): ***Je-li S množina přirozených čísel, pro kterou platí, že žádná dvě čísla z S se neliší čtvercovým číslem, pak je přirozená hustota množiny S rovna nule.*** Ekvivalentně: Nechť $\delta > 0$ a předpokládáme, že N je dostatečně velké v závislosti na δ.

Potom každá podmnožina A z množiny N, pro $[N] := \{1, 2, \dots, N\}$, hustoty $\frac{|A|}{N}$ alespoň hodnoty δ obsahuje alespoň jednu dvojici čísel $(n, n + r^2)$, kdy n, r jsou některá přirozená čísla a platí, že $r^2 \neq 0$.

<u>Příklad 1 (hra s odebíráním čtverců):</u> Dva hráči – Anna a Bedřich – začínají hrát se 12 sirkami. Může Anna vyhrát, když hraje jako první?

Aby měl hráč vítězství zaručené, je jeho snahou táhnout tak, aby pro pozici po ukončení tahu byla hodnota Sprague-Grundyovy sekvence $g(n) = 0$. Pravidlem hry je odebírat pouze čtvercová čísla, Anna tedy může vzít pouze čísla 9, 4 nebo 1.

$$12 - 3 \times 3 = 3 \qquad 12 - 2 \times 2 = 8 \qquad 12 - 1 \times 1 = 11$$

Jak můžeme vidět, po prvním tahu nenastala ani jedna pozice, pro niž by platilo, $g(0) = 0$. Při hodnotě 3 zvítězí Bedřich. Protože je zde pouze jedna možnost tahu na číslo dvě a následně na číslo jedna. Možnost odebrání devíti sirek pro Annu končí prohrou.

Po odebrání čtyř sirek hraje Bedřich s pozicí na čísle 8, kde jsou dvě možnosti tahu – odebrat čtyři nebo jednu sirku.

$$8 - 2 \times 2 = 4 \qquad 8 - 1 \times 1 = 7$$

Pokud Bedřich odebere 4 sirky, zůstane po jeho tahu číslo 4. Dále ve čtyřech tazích opět vyhraje, protože následuje odebírání po jedné. Pokud by na počátku nebyly odebrány čtyři sirky ale pouze jedna sirka, dostává se Bedřich přímo do pozice s $g(7) = 0$. Anna má následně dvě možnosti – odebrat čtyři nebo jednu sirku.

$$7 - 2 \times 2 = 3 \qquad 7 - 1 \times 1 = 6$$

Ani v jednom případě se ale nedostane do vyhrávající pozice, protože po odebrání sirek zbydou pozice 3 a 6. Pokud by nastala možnost s číslem 3, Bedřich odebírá na pozici 2, kde opět platí $g(2) = 0$ a vítězí. Pokud by nastala možnost s číslem šest, jsou opět dvě možnosti tahu, a to odebrat na 2 nebo 5. Obě pozice Bedřichovi zajišťují vítězství, protože $g(5) = 0$ a $g(2) = 0$. Takže ani počáteční Annino odebrání sirek na hodnotu osm ji vítězství nepřinese.

Poslední možností prvního tahu je odebrání jedné sirky, čímž zůstává na Bedřicha číslo 11. Opět jsou možnosti odebrání sirek v devíti, čtyřech nebo jednom kusu.

$$11 - 3 \times 3 = 2 \qquad 11 - 2 \times 2 = \ 7 \qquad 11 - 1 \times 1 = 10$$

Jak je vidět, ať udělá Bedřich jakýkoli tah, nemůže prohrát, protože hodnota g je pro všechna tři čísla rovna 0.

Anna jako první hráč tedy nikdy nemůže vyhrát, číslo 12 je totiž vyhrávajícím číslem. Což bychom si ověřili nalezením Sprague-Grundyovy sekvence takto: 12 → 3, 8, 11 → $g(3) = 2$, $g(8) = 1$ a $g(11) = 1$. Nejmenší nezáporné číslo nepatřící žádné dílčí hodnotě g je 0.

Platí tedy fakt, že pokud je na počátku hry vyhrávající pozice, první hráč nemá šanci na vítězství.

2.2.2 Odebírání alikvotních částí

U hry, jejímž principem je odebírání alikvotních částí celku, dva hráči střídavě odebírají kladná celá čísla objektů. Alikvotními částmi daného čísla jsou jeho dělitelé s výjimkou čísla samotného. Vítězem se stává hráč, který jako poslední může provést tah a odebrat nějakou alikvotní část z celku, který zbyl po ukončení protihráčova tahu. Jediné číslo, které nemá žádné alikvotní části, je číslo ***jedna***. Tzn. že hráč, kterému zbude po tahu jeho protihráče jedna sirka, tak prohrává.

Stejně jako u odebírání čtverců bychom při odebírání alikvotních částí hodnoty Sprague-Grundyovy sekvence postupně zjišťovali jako: 4 → dělitelé 1, 2 → po odečtení zůstanou 3, 2 → $g(3) = 0$, $g(2) = 1$ $\quad \Rightarrow \quad$ $\boldsymbol{g(4) = 2}$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	2	0	1	0	3	0	1
0	2	0	1	0	4	0	1	0	2
0	1	0	3	0	1	0	2	0	1
0	5	0	1	0	2	0	1	0	3
0	1	0	2	0	1	0	4	0	1
0	2	0	1	0	3	0	1	0	2
0	1	0	6	0	1	0	2	0	1
0	3	0	1	0	2	0	1	0	4
0	1	0	2	0	1	0	3	0	1
0	2	0	1	0	5	0	1	0	2

Tabulka 4: Odebírání alikvotních částí, S-G sekvence - hodnoty pro čísla 1-100

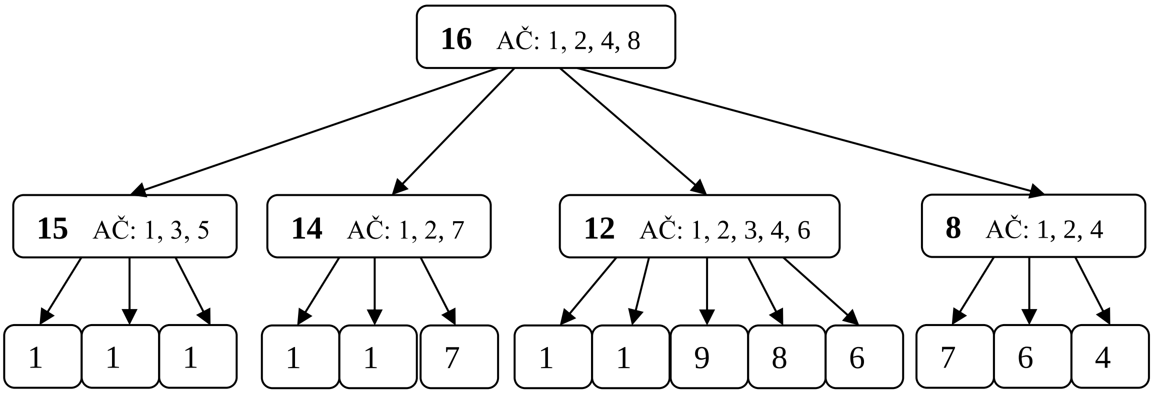
0	1	3	5	7	9	11	13	15	17
19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
39	41	43	45	47	49	51	53	55	57
59	61	63	65	67	69	71	73	75	77
79	81	83	85	87	89	91	93	95	97
99	101	103	105	107	109	111			

Tabulka 5: Odebírání alikvotních částí - vyhrávající pozice 0-111

Jak je vidět z Tabulky 5, vítěznými pozicemi pro hru s odebíráním alikvotních částí jsou lichá čísla. Pro výherní strategii je tento typ hry pravděpodobně nejsnazší. Protože s možností odečítat jedničku a s ohledem na to, že vítězné pozice jsou lichá čísla, je mechanismus hry lehce odhalitelný.

Příklad 2: Mějme číslo 16, hráče Annu a Bedřicha. Bedřich hraje jako první, může vyhrát?

Bedřich může odebrat počty sirek – 1, 2, 4 a 8. Anna tedy bude hrát s pozicemi 15, 14, 12 nebo 8.



Obrázek 2: Odebírání alikvotních částí - schéma pro číslo 16

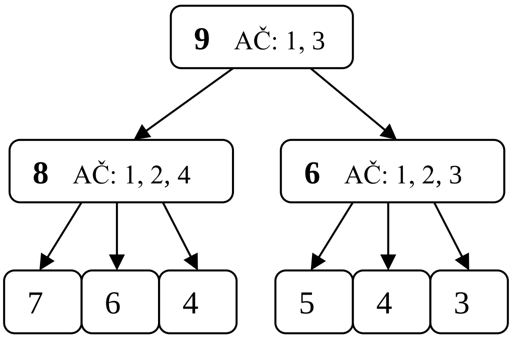
Jak jsme ukázali výše, vítězné pozice jsou lichá čísla. Cílem hráče je odebírat tak, aby po konci jeho tahu zůstala na stole pozice se sudým počtem sirek. U čísel 14, 12 a 8 je odebráním jedné sirky nasnadě dostat se do pozice lichého čísla, kde má další tahy ve svých rukách, protože po konci svého tahu je ve vyhrávající pozici. Ukažme si to na čísle 14 $\Rightarrow$ $14 - 1 = 13$. Třináctka je prvočíslo, a tedy jedinou alikvotní část, kterou je možné odebrat je číslo 1, čímž Bedřich končí tah na pozici sudého čísla. Obdobně bude tento mechanismus platit i pro čísla 12 a 8. Anna odebráním jedné sirky snadno skončí na pozici lichého čísla, a takto bude odebírat až do svého vítězství.

U čísla 15 musí Anna táhnout buď na číslo 14, 12 nebo 10. Jelikož se jedná o sudá čísla, je vidět, že ani jedna pozice není vítězná. V dalším postupu hry tedy záleží na Bedřichově tahu. Vezměme například tah na číslo 14. Alikvotní části odebratelné ze 14 jsou hodnoty 1, 2 a 7, čímž by na Annu připadly pozice 13, 12 a 7. U pozic 13 a 7 půjde o stejný princip jako výše, pokud bude Bedřich odebírat sirky tak, aby po jeho tahu vždy zůstal lichý počet sirek, má jistě vítězství. Pokud by odebíral na číslo 12, nemusí hru dovést do vítězného konce a dává možnost Anně, která převezme strategii odebírání na liché počty sirek.

U hry se šestnácti sirkami tedy má možnost na výhru i Bedřich z úvodní pozice, ta totiž není vyhrávající, a tím ani vítězství není předem dané pro začínajícího hráče.

Příklad 3: Mějme číslo 9, hráče Annu a Bedřicha. Anna hraje jako první, může vyhrát?

Anna může ve svém tahu odebrat jednu nebo tři sirky, čímž Bedřichovi připraví pozice 8 nebo 6.



Obrázek 3: Odebírání alikvotních částí - schéma pro číslo 9

U čísla 8 jsou možné tahy na hodnoty 7, 6 a 4 u čísla šest na hodnoty 5, 4, 3. Lichá čísla jsou vyhrávající pozice, cílem Bedřicha je tedy nechat Annu na lichém počtu sirek. Bude táhnout na 7, 5 nebo 3. Anna může u čísla 7 táhnout pouze na hodnotu 6, u čísla 5 na 4 a u čísla 3 na 2. V případě čísla dvě je Bedřich vítěz. U hodnot 6 a 4 opět odebere na liché číslo – potom zůstávají Anně pozice 5 a 3 a možnosti tahů na 4 nebo 2. Čímž vidíme, že Bedřich je vítězem.

Na příkladech je tedy ukázáno, že pokud je výchozí pozice hry vyhrávající, tak první hráč nemá šanci vyhrát. Ovšem pokud je počáteční pozice prohrávající, mohou vyhrát oba hráči a záleží na herní strategii.

2.2.3 Odebírání pravých dělitelů

U této alternativy hry platí stejná pravidla jako u hry s odebíráním alikvotních částí – hráči střídavě odebírají kladný počet sirek. Počty sirek, které lze během jednoho tahu odebrat, musí odpovídat hodnotám pravých dělitelů čísla n. Není možné tedy odebrat hodnotu rovnou samotnému číslu n a hodnotu 1. (Dělíme-li číslo samo sebou je výsledkem jednička a dělíme-li jedničkou, je výsledek číslo samo. Nemůžeme tedy pro naši hru ani samotné číslo n ani číslo 1 řadit mezi pravé dělitele čísla n).

Hodnoty Sprague-Grundyovy sekvence bychom určili stejným postupem jako v předchozím případě, ale tentokrát navíc nebudeme odečítat hodnotu 1.

Prvním číslem, u kterého nebude hodnota g rovna nule, je číslo 4, pak bude platit:

4 → dělitel 2 → po odečtení zůstane 2 → $g(2) = 0$ ⇒ $\boldsymbol{g(4) = 1.}$

Číslo 5 je prvočíslem, čímž bude $\boldsymbol{g(5) = 0.}$

Pro číslo 6 pak zjistíme hodnotu g jako: $6 \to 2,\ 3 \ \to 3,\ 4 \to \ g(3) = 0,\ \ g(4) = 1$ $\Rightarrow \quad \boldsymbol{g(6) = 2.}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	1	0	2	0	0	0	1
0	3	0	1	0	2	0	1	0	3
0	1	0	4	0	1	0	2	0	1
0	0	0	1	0	2	0	1	0	4
0	1	0	2	0	1	0	3	0	1
0	2	0	1	0	4	0	1	0	2
0	1	0	5	0	1	0	2	0	1
0	4	0	1	0	2	0	1	0	3
0	1	0	2	0	1	0	4	0	1
0	2	0	1	0	6	0	1	0	2

Tabulka 6: Odebírání pravých dělitelů, S-G sekvence - hodnoty čísel 1-100

0	1	2	3	5	7	8	9	11
13	15	17	19	21	23	25	27	29
31	32	33	35	37	39	41	43	45
47	49	51	53	55	57	59	61	63
35	37	39	71	73	75	77	79	81
83	85	87	89	91	93	95	97	99

Tabulka 7: Odebírání pravých dělitelů - vyhrávající pozice 1-100

Přehled vyhrávajících pozic při odebírání pravých dělitelů (Tabulka 7) je téměř shodný s přehledem vyhrávajících pozic u odebírání alikvotních částí. Mezi prvními pěti sty vítězných pozic najdeme ovšem i tři neočekávaná čísla – a to sudá čísla 2, 32 a 128.

2.2.4 Odebírání prvočísel

Poslední alternativou je hra, při níž dva hráči střídavě odebírají kladný počet sirek, který odpovídá hodnotě prvočísel. Sprague-Grundyovu sekvenci určujeme stejným mechanismem jako v předchozích případech.

Hodnota g pro číslo 7 bude tedy:

7 $\rightarrow$ prvočísla 2, 3, 5 $\rightarrow$ po odečtení zůstanou 5, 4, 2 $\rightarrow$ $g(5) = 2$, $g(4) = 1$, $g(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g(7) = 3.}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	1	2	2	3	3	4	0
0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
5	6	6	7	7	0	4	1	5	2
6	3	4	7	0	0	1	1	2	2
3	3	4	8	5	7	6	8	9	0
4	1	5	2	6	0	4	1	5	2
6	3	4	7	5	8	4	10	5	7
6	8	4	7	5	8	6	10	9	7
4	8	5	10	6	0	4	1	5	2
6	0	4	1	5	2	6	3	4	7

Tabulka 8: Odebírání prvočísel, S-G sekvence - hodnoty pro čísla 1-100

0	1	2
10	11	26
35	36	50
56	86	92

Tabulka 9: Odebírání prvočísel - vyhrávající pozice 1-100

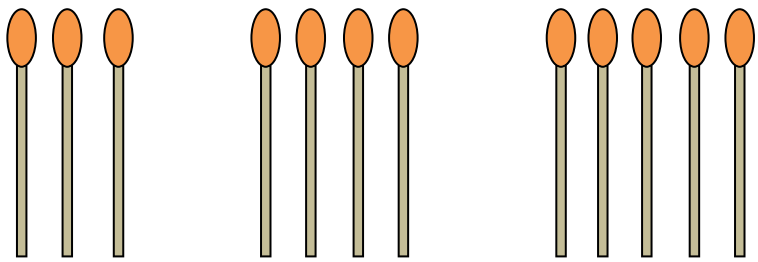
Před řešením konkrétních her může být užitečné prostudování nejprve tabulky Sprague-Grundyových hodnot a hledat v ní určité vzory. Protože u mnohých her, u kterých je teoretická analýza značně obtížná, mohou být hodnoty g periodické nebo snadno srozumitelné. Ve většině případů je nalezený vzor a z něho odvozený vzorec pravdivý. Ale naopak i u velmi jednoduchých her mohou být hodnoty g bez jasných zákonitostí, či je otázka, zda nějaký systém vůbec existuje.

3 Hra NIM

Nyní se zaměříme již konkrétně na samotnou hru NIM. Zopakujme, že NIM je kombinatorická hra, kdy se dva hráči postupně střídají a odebírají objekty (sirky) z předem daných pozic (hromádek). Vyhrává ten hráč, který vezme poslední objekt.

Pravidla NIMu

- Hráči se střídají a postupně odebírají objekty (my budeme dále používat sirky, ale hra může být hrána s čímkoli) z daných hromádek.[7] (V našem zakresleném případě máme tedy tři hromádky se třemi, čtyřmi a pěti sirkami, NIM (3, 4, 5))



Obrázek 4: NIM (3, 4, 5)

- Z každé hromádky je možné odebírat tak dlouho, dokud je na ní alespoň jedna sirka.
- Při jednom tahu je možné odebrat libovolný počet sirek (klidně i všechny), vždy však alespoň jednu. To znamená, že z první hromádky sirek je možné odebrat jednu, dvě i tři sirky, obdobně i u ostatních hromádek. Situace po jednom tahu může tedy vypadat 2-4-5, 1-4-5, 4-5, 3-3-5, 3-2-5, 3-1-5, 3-5, 3-4-4, 3-4-3, 3-4-2, 3-4-2, 3-4-1, 3-4.
- Při jednom tahu je možné odebrat sirky pouze z jedné hromádky. Odebereme-li sirky z levé hromádky, nemůžeme již odebrat z hromádky uprostřed nebo vpravo. Z úvodní situace 3-4-5 jsou tedy přípustné tahy např. 1-4-5, 3-4 atd. a nepřípustné tahy jsou např. 1-4-1, 3-2-2 atd.
- Hráč, který vezme poslední sirku, vyhrává.

[7] Asi nejznámější podobou hry jsou tři hromádky se sirkami o hodnotách 3, 4 a 5 = NIM (3, 4, 5).

4 Historie NIMu

Hru NIM jako první pod tímto názvem uvedl harvardský matematik Charles Leonard Bouton (1869-1922) a to v článku s názvem *„Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory“* publikovaném roku 1901v časopise *The Annals of Matematics*. [2]

Předpoklad, že Bouton NIM stvořil, není relevantní. S velkou pravděpodobností existoval již dříve, i když možná v poněkud jiné podobě. Díky jednoduchosti své podstaty a faktu, že ke hraní není třeba žádného speciálního vybavení (jako například šachovnice), je nasnadě, že byla hra šířená bez písemného zápisu. Což změnil až Bouton, který hru kompletně matematicky popsal, včetně vítězné strategie a de facto hru jako NIM pojmenoval, i když o původu slova NIM se vedlo mnoho polemik stejně jako o původu hry samotné.

Díky své jednoduché struktuře a nutné strategické jemnosti tahů býval původ NIMu často spojován s hrou FanTan, která mohla vzniknout během třetího nebo čtvrtého století našeho letopočtu na území starověké Číny za vlády Severní a Jižní dynastie. Na rozdíl od NIMu, který se do světa hazardních her snad nikdy nedostal, se Fan-Tan stále drží v některých kasinech Macaa, i když již nedosahuje takové obliby jako v době devatenáctého století nebo v porovnání s jinými tradičními hrami Číny jako Mah Jong a Pai Gow.

Spojitost se hrou FanTan však později vyvrátil Alan Ross[8] to na základě jazykové analýzy čínských jmen, což bylo v květnu 1953 dokonce uveřejněno jako krátká poznámka v *Matematical gazette*. Významnou roli pro odmítnutí propojení obou her hrálo také hazardní založení FanTanu. Alan Ross však přišel s jiným vysvětlením původu slova NIM, a to na základě Boutonových studijních letech strávených v Lipsku, když uvedl, že NIM je imperativ od německého slovesa *nehmen* = vzít. Při hře evidentně velmi často padalo slovo „nimm“ neboli „vezmi“ a Boutonovi se tato spojitost s hrou promítla také do jejího názvu.

[8] anglický básník, spisovatel a novinář původem z Indie, 1922 – 2001

O osm let později bylo navrženo spojit hru NIM s hrou Mancala, kdy se jedná o deskovou hru podobnou šachům. Mancala je podle H. Murrayho[9] arabského nebo egyptského původu a NIM je jakousi její odvozenou podobou v Evropě a Americe.

Nicméně původ hry zůstává neobjasněn a pohybuje se pouze na úrovni předpokladů a spekulací. Co je ovšem zcela nezpochybnitelné, je Boutonovo kompletní matematické popsání hry a stanovení vítězné strategie pro jakoukoli variantu hry NIM v jakékoli hrané partii.

[9] Harold James Ruthven Murray, anglický pedagog a šachový historik, 1868 – 1956

5 Jak hrát NIM

Příklad 4: Anna a Bedřich hrají NIM s dvěma hromádkami po dvou sirkách (tedy zápis NIM (2, 2)). Bedřich hraje jako první, může vyhrát?[10]

5.1 Teoretický rozbor NIM (2, 2)

Nejprve se nad hrou zkusíme pouze zamyslet. Jaké jsou možnosti pro první tah? Hráč, který začíná, může odebrat buď jednu sirku nebo dvě sirky.

a) Odebrání dvou sirek

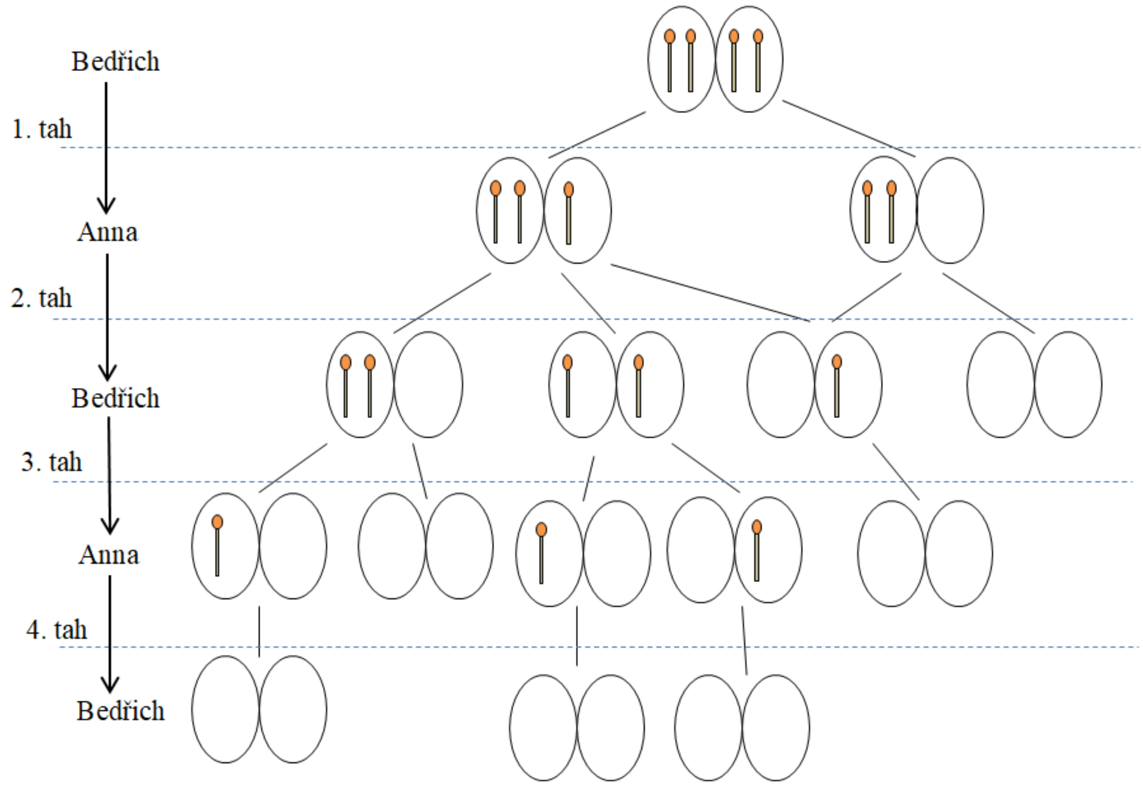
Pokud první hráč odebere dvě sirky, nastane pozice 2-0, druhý hráč odebere také dvě a vyhrává.

b) Odebrání jedné sirky

Pokud první hráč odebere jednu sirku, dostává spoluhráče do pozice 1-2, druhý má celkem tři možnosti tahu, pouze jedna mu zajistí vítězství. Aby vyhrál, musí odebrat sirku z hromádky, kde zbyly dvě sirky, aby nastala pozice 1-1. Protože potom donutí protihráče odebrat jednu sirku z jedné nebo druhé hromádky a vyhrál. V případě, že odebere jednu sirku do pozice 0-2 nebo obdobně dvě sirky do pozice 1-0, vítězí protihráč.[11]

[10] Pro modelový příklad je použit NIM (2, 2), protože pro dohrání celé hry je třeba relativně malý počet možných postupů. Všechny další varianty by se daly řešit obdobně.
[11] Pozice 2-0 a 0-2 jsou shodné stejně jako pozice 1-2 a 2-1, a tudíž i řešení jsou shodná.

5.2 Schematický rozbor NIM (2, 2)



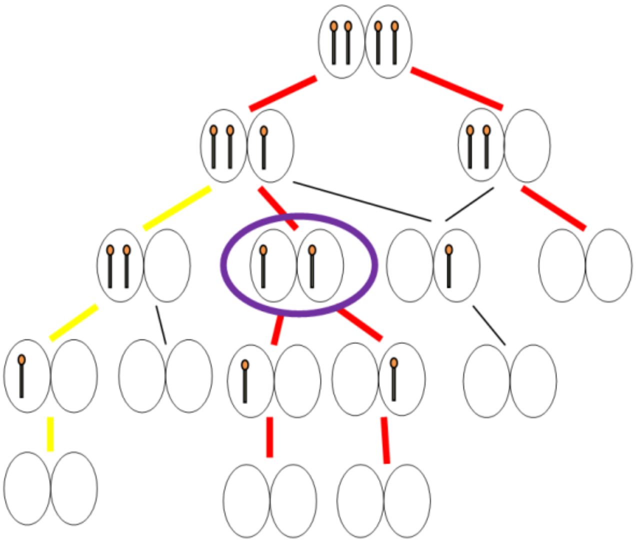
Obrázek 5: Schematický rozbor NIM (2, 2)

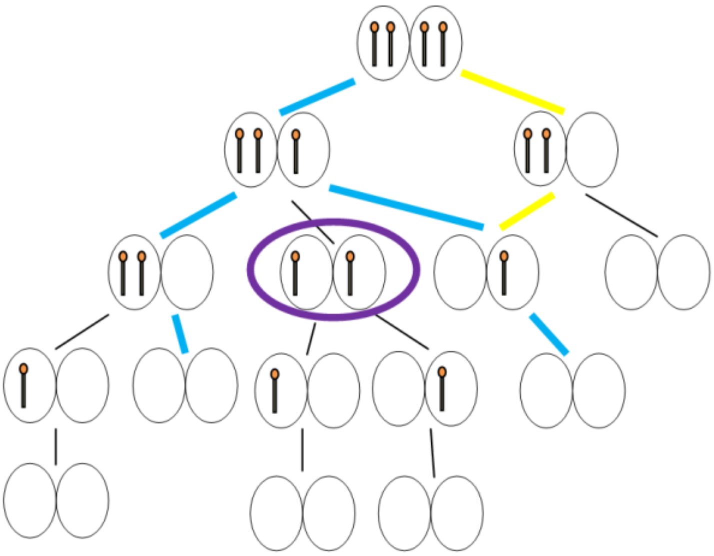
Na Obrázku 5 jsou graficky uvedeny možnosti jednotlivých tahů během hry NIM (2, 2), ke kterým jsme dospěli úvahou.

Po prvním tahu tedy může nastat pozice 2-1 nebo 2-0[12]. Pokud Bedřich odebere sirky do pozice 2-0, je Anna vítěz již ve druhém tahu, když samozřejmě neudělá chybu a nevezme pouze jednu sirku. Pozice 2-1 vede na tři možnosti tahů: 2-0, 1-1, 1-0. Jediná vítězná možnost je pozice 1-1, v té totiž Bedřichovi nezbývá nic jiného než vzít jednu sirku a poslední zbude na Annu, čímž vítězí. Bedřich by byl vítěz v případě Annina tahu na pozici 2-0 nebo 1-0. Protože pak by zůstala jen jedna hromádka, kterou Bedřich odebere a vítězí. Je tedy vidět, že Bedřich může vyhrát pouze tehdy, udělá-li Anna chybu, v opačném případě je poražen. Vidíme, že v případě NIM (2, 2) záleží na pořadí hráčů a bude to tak obecně pro každou hru NIM.

[12] Jedná se o jednu „stranu“ schématu. Protože by samozřejmě mohla nastat také situace 1-2 nebo 0-2. V těchto případech se však jedná o symetrické zobrazení a jednotlivé možnosti tahů by byly stejné, pouze zrcadlově obrácené, proto je ve schématu uvedena pouze jedna polovina.

Červená barva na Obrázku 6 označuje sérii tahů, kdy se stane vítězem Anna jako druhý hráč v pořadí. Celkově jsou tedy dvě možnosti, které zajistí její vítězství. A to Bedřichův tah na pozici 2-0, případně pozice 1-1 (fialová barva), do které postaví Anna svým tahem Bedřicha. Ve schématu je naznačen ještě jeden vítězný postup pro Annu (žlutá barva), který by ovšem nastal s velkou pravděpodobností pouze na teoretické úrovni.


Obrázek 6: NIM (2, 2) - vítězné tahy Anny


Obrázek 7: NIM (2, 2) - vítězné tahy Bedřicha

Modrá barva naznačuje možnost výhry pro Bedřicha jakožto začínajícího hráče. Všechny výherní možnosti jsou pro něj ve chvíli, kdy je na nesymetrické pozici. Protože když se dostane na pozici 1-1 (fialová barva), již nemá možnost výhry ani v případě, že by Anna udělala chybu.[13]

Z grafických rozborů je tedy zřejmé, že pro výhru hraje významnou roli pozice hráče po jednotlivých tazích. Podstatná je také podoba výchozí pozice – tedy kolik je na začátku hry hromádek a kolik sirek v jednotlivých hromádkách. Je zřejmé, že výchozí pozice determinuje možnost výhry nebo prohry, ale o tom níže.

[13] Žlutá barva opět naznačuje pouze teoretickou možnost výhry, protože nepředpokládáme, že by Anna v pozici 2-0, kdy je na tahu, odebrala pouze jednu sirku.

5.3 Rozbor NIM (2, 2) pomocí grafu

Definice: Obecný graf je uspořádaná trojice $G = (V, E, f)$, kde

- V je množina uzlů (také vrcholů), zpravidla neprázdná a konečná,
- E je množina hran, zpravidla konečná,
- f je incidenční zobrazení f: $E \to V^2$, které přiřazuje každé hraně $h \in E$ uspořádanou dvojici uzlů $(x, y) \in V^2$.

Definice: Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný graf. Množinou $W \subseteq V$ (tedy podmnožinu množiny vrcholů) nazveme jádrem grafu G, jestliže platí následující dvě podmínky:

1. Je-li $(u_0, u_1) \in E$ a $u_0 \in W$, pak $u_1 \notin W$.
2. Jestliže $u_0 \notin W$, pak existuje $u_1 \in W$ takové, že $(u_0, u_1) \in E$.

Podmínky vyjádřené bez matematické symboliky:

1. Máme-li hranu vycházející z vrcholu, který je v jádru grafu, pak vrchol, do kterého daná hrana směřuje, v jádru grafu není.
2. Pokud nějaký vrchol u_0 v jádru není, potom existuje vrchol, který v jádru je, a do kterého vede hrana z u (z každého vrcholu, který není v jádru, vede hrana do nějakého vrcholu v jádru).

Definice: Graf H je podgrafem grafu G, jestliže $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$.

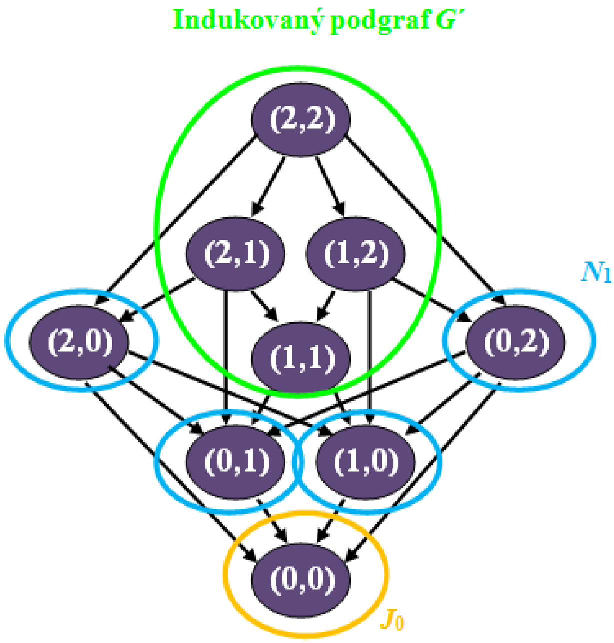
Graf H je indukovaným podgrafem grafu G, jestliže $V(H) \subseteq V(G)$ a

$$E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$$

Při hledání jádra grafu G (Obrázek 8) budeme postupovat v několika krocích. V prvním kroku začneme od vrcholu (0,0), a to proto, že se jedná o vrchol, který není počátečním vrcholem žádné hrany, označíme ho J_0 a bude to počátek jádra, které hledáme. Množinu vrcholů, ze kterých směřují hrany do J_0 označíme N_1. Množina N_1 ovšem do jádra grafů nepatří.

V dalším kroku následuje kontrola, zda $G \setminus (J_0 \cup N_1)$ je prázdná množina. V našem grafu však ještě stále zbývají vrcholy (2,2), (2,1), (1,2) a (1,1). Proto ve třetím kroku množinu těchto vrcholů (včetně hran) nazveme indukovaným grafem G' ke grafu G.

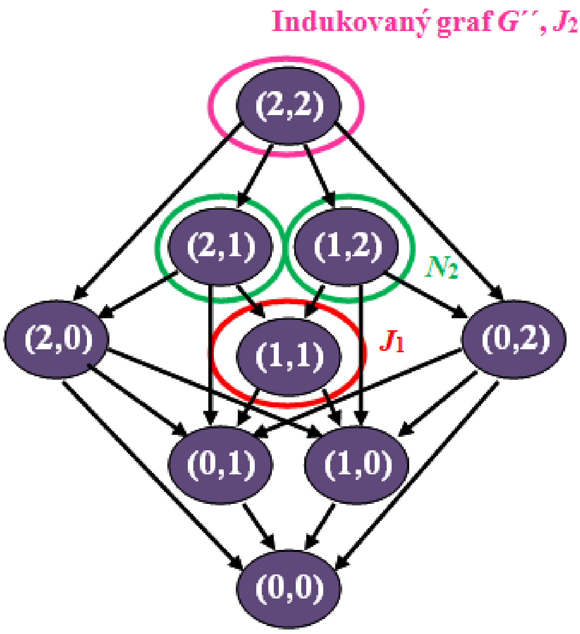
Dále postupujeme stejně jako v předchozím případě. Začínáme od vrcholu, ze kterého nevedou žádné hrany. Jedná se o vrchol (1,1), který nazveme J_1 a který je další částí jádra grafu (Obrázek 9).



Obrázek 8: Hledání jádra grafu 1

V další fázi postupujeme po hranách z J_1 do vrcholů, z nichž hrany vycházejí a které nazveme množinou N_2. Tato množina do jádra grafu opět nepatří.

Následovat bude kontrola, zda $G' \setminus (J_1 \cup N_2)$ je prázdná množina. Vidíme, že tomu tak není a v grafu zbývá ještě vrchol (2,2), pokračujeme tedy dále a opět zavedeme indukovaný graf G''. Jelikož už z vrcholu (2,2) nevedou žádné další hrany, označíme ho J_2 a zároveň jádrem indukovaného grafu G''. Díky malému množství možných jednotlivých kroků u NIM (2, 2) je jádro grafu G nalezeno již po třech cyklech hledání množin dvojic „počátečních a koncových vrcholů". U složitějších počátečních pozic by potom samozřejmě bylo daleko více hran i vrcholů. Postup by byl obdobný, vždy by se našla množina vrcholů jádra, s jádrem spojená



Obrázek 9: Hledání jádra grafu 2

množina vrcholů nepatřících do jádra a zbylé části grafu by se začlenily do indukovaného grafu. Výsledné jádro je tedy sjednocením všech dílčích množin jader.

Pro náš modelový příklad je tedy jádro G rovno sjednocení jednotlivých množin jader => **jádro $\boldsymbol{G = J_0 \cup J_1 \cup J_2}$**, tzn. pozice 0-0, 1-1 a 2-2. Je tedy zřejmé, že právě tyto pozice mají značný vliv na to, zda hráč, který se v nich nachází, má šanci na výhru či nikoli.

5.4 Pozice

Teoretickou úvahou, schematickým zobrazením i pomocí nalezení jádra grafu, jsme zjistili, že existuje propojení mezi potenciální výhrou a pozicí ve hře. V případě NIM (2, 2) byla nejvýznamnější pozice 1-1. Jedná se o pozici symetrickou, v níž hráč nemá možnost výhry, protože musí vzít jednu sirku a na druhého vyjde sirka poslední. Ale po prozkoumání všech možností jsme dospěli k závěru, že v dané hře Bedřich jako začínající hráč má šanci na výhru pouze v případě, že Anna udělá chybu. Můžeme tedy říct, že ani v pozici 2-2 nemůže Bedřich ovlivnit své vítězství. Obě pozice jsou symetrické a nevedou k vítězství.

Rozšíříme-li pohled a podíváme se na pozici 3-3, zjistíme, že ani tato pozice nevede k vítězství pro začínajícího hráče. Ať udělá jakýkoli tah, jeho protihráč udělá tah stejný a postupně se nevyhnutelně dostane opět na pozici 1-1, o které již víme, že nevede k vítězství. Stejně tak, když bychom vzali jakoukoli symetrickou pozici 5-5, 2-2-4-4, 3-3-4-4-5-5, druhému hráči v pořadí vždy stačí „okopírovat" tah a vyhraje (tento mechanismus můžeme také nazvat jako „zrcadlové tahy").

Bedřich na počátku z pozice 2-2 nemohl vyhrát a byl tedy v pozici ***prohrávající.*** Symetrické pozice obecně se tedy nazývají pozice prohrávající. A chce-li hráč v partii zvítězit, snaží se docílit toho, aby po jeho tahu protihráč zůstal v pozici prohrávající. Na druhé straně Anna, pokud hrála bezchybně, se ocitla na pozicích 2-1, 2-0, 1-0, které vedly k výhře. Nesymetrické pozice se tedy nazývají pozicemi ***vyhrávajícími.***

Otázka pozice je stěžejní pro obecnou vítěznou strategii, jak ji popsal Bouton. Ten pozice dělí na bezpečné a nebezpečné pozice (viz níže).

Obecně se tedy dá říci, že každou partii NIMu lze popsat pomocí směrovaného acyklického grafu, kdy vrcholy jsou jednotlivé pozice hry a hrany jsou tahy (pohyby). Vrchol bez odchozích hran je prohrávající pozicí a hráč, který musí provést tah z tohoto vrcholu, prohrává hru. Vyhrávající pozice jsou ty, ze kterých existuje alespoň přechod do prohrávající pozice, naopak pokud z pozice neexistuje žádný přechod do vyhrávající pozice, jedná se o pozici prohrávající. Pokud z nějaké pozice vedou všechny přechody pouze do vyhrávajících pozic, pak je tato pozice prohrávající.

6 Vítězná strategie – úvod

U hry NIM (a obdobných her) je typickou vlastností existence vítězné strategie. Znalost mechanismu hry, který když bude hráč přesně dodržovat, zajistí, že nemůže prohrát. Aplikací vítězné strategie je zajištěno vítězství znalého hráče a prohra možná pouze v případě jeho vlastní chyby. Pro naše účely však operujme s racionalitou hráčů a možnost chyby nebude dále brát v úvahu. Ovšem hráč musí mít šanci vítěznou strategii aplikovat. Jak jsme si již ukázali, je spojení mezi výhrou hry a pozicí ve hře (o tom níže).

Strategii tedy chápeme jako soubor konkrétních rozhodnutí, jaké tahy uplatnit v jednotlivých pozicích hry. Strategie je funkce, která každé možné pozici *p* přiřadí tah hráče.

Věta 3: V konečné hře nepřipouštějící remízu má právě jeden hráč vyhrávající strategii.

Důkaz: Z podstaty vyhrávajících a prohrávajících pozic vyplývá, že pokud je počáteční pozice vyhrávající, tak hráč svým tahem může dostat svého protihráče do pozice prohrávající. Tím druhý hráč musí provést takový tah, že jím dostane prvního hráče opět do vyhrávající pozice. Jelikož se jedná i konečnou hru, tak opakováním tohoto postupu musí první hráč vyhrát, má tedy vítěznou strategii. Pokud je výchozí pozice prohrávající, tak všechny možné tahy z ní vedou do pozic vyhrávajících, čímž si oba hráči vymění pomyslná místa v předcházející úvaze. Vítězná strategie je tentokrát u druhého hráče.

Úvahy předchozího důkazu nám přinášejí dvě poznání. Že vítězná strategie existuje a dává nám návod, jak ji nalézt. Podstatou je poznat a rozdělit pozice na vyhrávající a prohrávající. Tady ovšem nastává problém. Teoreticky lze všechny pozice každé hry rozdělit na vyhrávající a prohrávající, ale prakticky je to ve většině případů neproveditelné. Různých možností u konkrétní hry může být nepřeberné množství a není v hráčových silách se všemi probrat a zvážit je.

U tzv. substaction games („hry, v nichž odebíráme“) hra začíná daným kladným celým číslem N, kdy dva hráči střídavě odebírají kladné množství objektů menší, než dané kladné celé číslo $d < N$. Hráč, který se dostane na číslo 0, hru prohrává.

Věta 4: Hráč, který se dostane na čísla odpovídající násobkům čísla d, má vítěznou strategii.

Při základním rozboru postupu hry NIM (2, 2) jsme použili úvahu, schéma i teorii grafu pro obecné zhodnocení možností hry a nastínění určitých principů vedoucí k celkovému poznání. Obě metody by se daly použít i pro získání vítězné strategie pro libovolnou hru, ale se zvyšujícím se počtem hromádek a počtů sirek narůstá i počet možných tahů a řešení pomocí schématu nebo grafu by bylo již značně složité. Dále se tedy budeme věnovat jinému způsobu objevení tahů, vyhovujícím vítězné strategii. Mechanismu, který uvedl Bouton v roce 1901, a to pomocí převedení konkrétní situace do binární soustavy a užití NIM-součtu.

6.1 Binární soustava

Každé číslo N (přirozené, kladné), můžeme obecně zapsat ve tvaru:

$$N = n_k \cdot z^k + n_{k-1} \cdot z^{k-1} + \ldots + n_2 \cdot z^2 + n_1 \cdot z^1 + n_0 \cdot z^0$$

neboli

$$\sum_{i=0}^{k} n_i \cdot z^i$$

kde:

- n_i označuje cifru příslušné soustavy, $n \in \{0;\ z-1\}$
- i je řád dané cifry,
- k je počet řádových míst,
- z je základ soustavy

Číslo se však běžně píše ve zkráceném tvaru $N = (n_k\, n_{k-1} \ldots\, n_1\, n_0)_z$.

V běžném životě užíváme nejčastěji soustavu desítkovou a čísla zapisujeme pomocí násobků čísla deset, což si vlastně ani neuvědomujeme. Pro zápis tedy neužíváme zápis hodnoty z = 10. Např. číslo 17258 zapsané s násobky čísla deset pomocí mocnin bude vypadat takto:

$$1 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0.$$

Binárním zápisem čísla nazveme konečnou posloupnost n_k, n_{k-1}, …, n_1, n_0, (kde $n_i \in \{0,1\}$ pro $i = 0, \dots, k$), takovou, že pro převedení do desítkové soustavy platí:

$$N = n_k \cdot 2^k + n_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 2 + n_0 \cdot 1.$$

Pro dvojkovou soustavu platí stejná pravidla o rozvinutém zápisu čísla, ale místo číslic 1 – 9 pro hodnoty jednotlivých řádů se používají pouze číslice 1 a 0. A pro zápis řádů používáme mocniny čísla dvě (2, 4, 8, 16, 32…). Číslo $(11001)_2$ by tedy rozvinutým zápisem s násobky čísla 2 bylo zaznamenáno jako:

$$1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1.$$

Pomocí mocnin místo násobků by zápis čísla $(11001)_2$ vypadal následovně:

$$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

10	2	10	2	10	2	10	2	10	2
1	1	11	1011	21	10101	31	11111	41	101001
2	10	12	1100	22	10110	32	100000	42	101010
3	11	13	1101	23	10111	33	100001	43	101011
4	100	14	1110	24	11000	34	100010	44	101100
5	101	15	1111	25	11001	35	100011	45	101101
6	112	16	10000	26	11010	36	100100	46	101110
7	111	17	10001	27	11011	37	100101	47	101111
8	1000	18	10010	28	11100	38	100110	48	110000
9	1001	19	10011	29	11101	39	100111	49	110001
10	1010	20	10100	30	11110	40	101000	50	110010

Tabulka 10: Čísla 1-50 vyjádřená v binární soustavě

6.2 NIM-součet

Než se podíváme na mechanismus hry vedoucí k vítězství, představíme si ještě jeden pojem nezbytný ke správné aplikaci vítězní strategie, a to NIM-součet. Je nasnadě, že bude souviset s binární soustavou zmiňovanou výše.

NIM-součet dvou nezáporných celých čísel, je jejich součet v binární soustavě bez přenášení řádů.

Příklad NIM-součtu: $1_2 \otimes 101_2 = 100_2$ $1101_2 \otimes 110_2 = 1000_2$

Pro větší přehlednost a také pro následující použití NIM-součtu ve vítězné strategii budeme NIM-součet počítat pod sebou:

$$\begin{array}{r} \mathbf{00}1_2 \\ \otimes\ 101_2 \\ \hline 100_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1101_2 \\ \otimes\ \ \mathbf{0}110_2 \\ \hline 1000_2 \end{array}$$

Sčítáme-li čísla, která nemají stejný počet řádů, doplníme prázdná místa nulami. NIM-součet se také značí jako ***XOR***.

XOR neboli exkluzivní disjunkce je logická operace, pro niž platí, že její hodnota je pravdou, právě když každá vstupní hodnota nabývá unikátní hodnotu v porovnání s ostatními vstupy. (Což platí, když je jeden nepravdivý a druhý pravdivý, pokud budou oba vstupy stejné, pak bude hodnota XOR nepravda). V logice a matematice vyjadřuje XOR „buď …, nebo…“. (Hráč je buď na tahu, nebo není.)

XOR bývá také nazýván jako bitová nonekvivalence, tento název však platí pouze pro dvě proměnné dvouhodnotové logiky. Výstup je hodnoty jedna, je-li jeden ze vstupů jako jediný pravdivý. XOR součet je tedy stejný jako sčítání modulo 2. (Tabulka 11)

0 XOR 0 = 0

0 XOR 1 = 1

1 XOR 0 = 1

1 XOR 1 = 0

Tabulka 11: XOR

Alternativně také můžeme XOR vyjádřit jako

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \wedge \neg(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \quad \text{příp.} \quad \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\boldsymbol{a} \wedge \neg\boldsymbol{b}) \vee (\neg\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$$

Ukázka rozdílu mezi klasickým součtem binárních čísel a součtem XOR:

Klasický součet binárních čísel	***XOR součet binárních čísel***
110_2	110_2
$+\ 101_2$	$\otimes 101_2$
1011_2	011_2

Pro NIM-součet libovolných tří nezáporných celých čísel a, b, c platí:

1) Komutativita

$$\boldsymbol{a} \otimes (\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \otimes \boldsymbol{c}$$

2) Asociativita

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a}$$

3) Distribuční zákon

$$\boldsymbol{c} \wedge (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a}) \otimes (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b})$$

4) Neutrálním prvkem je 0

$$\boldsymbol{0} \otimes \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

$$\begin{array}{c} 1\,0\,1\,0\,1_2 \\ 0\,0\,0\,0\,0_2 \\ \hline 1\,0\,1\,0\,1_2 \end{array}$$

5) Opačným prvkem je číslo samo

Pro každé nezáporné celé číslo $\boldsymbol{a}$ platí: $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{array}{c} 1\,0\,1\,0\,1_2 \\ 1\,0\,1\,0\,1_2 \\ \hline 0\,0\,0\,0\,0_2 \end{array}$$

6) jednoznačnost opačného prvku

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,0\,1_2 \\ 1\,0\,1\,0\,1_2 \\ \hline 0\,0\,0\,0\,0_2 \end{array}$$

7) pravidlo krácení

Pokud pro nezáporná celá čísla *a, b, c* platí rovnost $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{c}$***, pak nutně b = c.***

Důkaz: K oběma stranám rovnice přičteme $a \to a \otimes a \otimes b = a \otimes a \otimes c$

Platí vztahy: $a \otimes a = 0,\ 0 \otimes b = b,\ 0 \otimes c = c \Rightarrow b = c.$

Již víme, co znamená a jak funguje XOR součet, ukázali jsme si vlastnosti NIM-součtu a také demonstrovali jeho užití při sčítání dvou čísel. Při samotné hře NIM ovšem budeme hrát s více hromádkami sirek, takže buď postupně sečteme čísla po dvojicích, nebo můžeme provést NIM-součet pro více čísel najednou v těchto třech krocích.

1) Čísla v konkrétním tahu hry si převedeme do dvojkové soustavy.

2) Zapíšeme pod sebe odpovídající řády (případně doplníme prázdná místa nulami).

3) Sečteme počty jedniček v daném sloupci. Pokud jich je lichý počet, do výsledku zapisujeme 1, pokud je jedniček počet sudý zapisujeme 0.

Příklad 6: Jaký bude NIM-součet čísel 5, 2, 13 a 7?

$5 = 101_2$, $2 = 10_2$, $13 = 1101_2$, $7 = 111_2$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0_2 \\ 1 & 1 & 0 & 1_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1_2 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1_2 \end{array}$$

Lichý počet jedniček

Obecně tedy budeme NIM-součet zapisovat jako:

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a_1 a_2} \dots \boldsymbol{a_n}) \otimes (\boldsymbol{b_1 b_2} \dots \boldsymbol{b_n}) = (\boldsymbol{a_1} \otimes \boldsymbol{b_2})\,(\boldsymbol{a_2} \oplus \boldsymbol{b_2}) \dots (\boldsymbol{a_n} \otimes \boldsymbol{b_n})$$

⊗	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15		
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15			
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15				
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15					
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15						
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15							
8	8	9	10	11	12	13	14	15								
9	9	8	11	10	13	12	15									
10	10	11	8	9	14	15										
11	11	10	9	8	15											
12	12	13	14	15												
13	13	12	15													
14	14	15														
15	15															

Tabulka 12: NIM-součet pro dvojice čísel z intervalu 1-15

Tabulka 12 vyjadřuje NIM-součet pro dvojice čísel z intervalu 1-15. Druhá polovina tabulky bude symetrická s tou první, protože (jak již bylo zmíněno) u NIM-součtu platí komutativita.

6.3 Bezpečná a nebezpečná pozice (kombinace)

Bezpečná pozice je taková pozice, pro kterou platí, že NIM-součet počtu objektů ve všech hromádkách je roven nule.

Pro zjištění bezpečné pozice tedy zapíšeme počty objektů z každé hromádky v binární soustavě a čísla umístíme vodorovně pod sebe, aby sobě odpovídající řády byly ve svislých sloupcích. Pokud je pak součet každého sloupce 2 nebo 0 (je kongruentní s 0 mod 2), tak tato pozice je bezpečná. Pokud je alespoň v jednom sloupci součet různý od nuly, jedná se o pozici nebezpečnou.

Příklad 7: Jsou dány dvě pozice **9, 5, 12** a **13, 14, 15**, jedná se o pozice bezpečné nebo nebezpečné?

1001_2	1100_2
0101_2	1101_2
1100_2	1110_2
0000_2	0010_2

Pozice čísel 9, 5, 12 je pozicí bezpečnou, protože NIM-součet těchto čísel je roven nule. Naproti tomu pozice s čísly 12, 13, 14 je pozice nebezpečná, protože NIM-součet je od nuly různý.

Bezpečné pozice pro NIM se třemi a čtyřmi hromádkami o nejvíce *n* sirkách jsou uvedeny v Tabulkách 13 a 14.

1-2-3	2-4-6	3-4-7	4-8-12	5-8-13	6-8-14	7-8-15
1-4-5	2-5-7	3-5-6	4-9-13	5-9-12	6-9-15	7-9-14
1-6-7	2-8-10	3-8-11	4-10-14	5-10-15	6-10-12	7-10-13
1-8-9	2-9-11	3-9-10	4-11-15	5-11-14	6-11-13	7-11-12
1-10-11	2-12-14	3-12-15				
1-12-13	2-13-15	3-13-14				
1-14-15						

Tabulka 13: Bezpečné pozice pro tři hromádky o nejvíce 16 sirkách

1-1-2-2	1-3-4-6
1-1-3-3	1-2-5-6
1-1-4-4	1-2-4-7
1-1-5-5	

Tabulka 14: Bezpečné pozice pro čtyři hromádky o nejvíce 8 sirkách

Známe-li počty sirek u dvou hromádek ze tří (nebo řečeno obecně u všech kromě jedné), můžeme jednoznačně dopočítat počet sirek ve zbývající hromádce tak, aby jednalo o vítěznou pozici, tzn. tak, aby NIM-součet byl nulový.

Příklad 8: Jaký musí být počet sirek ve třetí hromádce, je-li dáno: $a = 9, b = 2$ a NIM-součet všech hromádek je roven nule?

Převedeme čísla do binární soustavy, korektně zapíšeme pod sebe: $9 = 1001_2$, $2 = 10_2$

1001_2		1001_2
0010_2		0010_2
_____	$\longrightarrow$	$\underline{1011_2}$
0000_2		0000_2

Aby byl NIM-součet nulový, počet sirek v poslední hromádce musí být $1011_2 = 11$.

7 Jak na vítězství v NIMu?

Věta 5: Jestliže první hráč zanechá po svém tahu bezpečnou pozici, druhý hráč po svém tahu nechá vždy pozici nebezpečnou a to ať bude táhnout jakkoli.

Důkaz: Pokud první hráč zanechal pozici bezpečnou, znamená to, že NIM-součet konkrétní pozice je roven nule. Druhý hráč musí z nějaké hromádky ležící na stole ubrat nějaké množství sirek. Ale ať si vybere libovolnou z nich a odebere z ní libovolný počet sirek, zbylé zůstanou nezměněné. Výše bylo zmíněno, že pokud známe hodnoty objektů všech hromádek kromě jedné, dokážeme její hodnotu určit jednoznačně, a to tak, aby NIM-součet byl opět nulový. První hráč zanechal hromádky a počty sirek v nich právě v nulovém NIM-součtu a druhý hráč musí nějak táhnout. I když odebere pouze jednu sirku, zruší nulový součet. A dvě bezpečné pozice, které by se lišily v jedné hromádce, neexistují. Z toho plyne, že druhý hráč opravdu nemá šanci nechat po svém tahu pozici bezpečnou.

Formální vyjádření

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ – velikosti hromádek po tahu prvního hráče

$b_1, b_2, \ldots, b_k$ – analogické velikosti hromádek po tahu druhého hráče

$s = a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_k$ – NIM-součet a

$\mathrm{t} = b_1 \otimes b_2 \otimes \ldots \otimes b_k$ – NIM-součet b

Předpokládejme, že druhý hráč odebere sirky z j-té hromádky. Potom bude platit $a_i = b_i$ pro $i \neq j$ a $a_i > b_i$.

$$t = 0 \otimes t$$

$$t = s \otimes s \otimes t$$

$$t = s \otimes \left(a_1 \otimes \ldots \otimes a_j\right) \otimes (b_1 \otimes \ldots \otimes b_j)$$

$$t = s \otimes (a_1 \otimes b_1) \otimes \ldots \otimes (a_j \otimes b_j)$$

$$t = s \otimes 0 \otimes \ldots \otimes \left(a_j \otimes b_j\right) \otimes \ldots \otimes 0$$

$$t = s \otimes a_j \otimes b_j$$

První hráč zanechal bezpečnou pozici, tzn. $s = 0 \Longrightarrow t = a_j \otimes b_j$, jelikož ale $a_j \neq b_j$, tak ani $t \neq 0$.

Boutonova věta (Věta 6): Ve hře NIM s n hromádkami je pozice (x_1, x_2, …, x_n) prohrávající právě tehdy, když je NIM-součet velikostí jednotlivých hromádek nulový, čili $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$.

Důkaz: Symbolem $\mathcal{P}$ si označíme množinu všech pozic, pro které platí, že NIM-součet je roven nule a symbolem $\mathcal{V}$ množinu pozic, jež jsou nulové v NIM-součtu.

Při hře NIM je pouze jediná koncová pozice 0-0…0-0, která je pozicí prohrávající. Pro NIM-součet koncové pozice platí: $0 \otimes 0 \otimes \ldots \otimes 0 = 0$. Což je v souladu s Boutonovou větou. U nekoncových pozic musíme ověřit, že platí charakteristiky prohrávajících a vyhrávajících pozic.

1) Z každé pozice z množiny $\mathcal{P}$ vedou přípustné tahy pouze do pozic z množiny $\mathcal{V}$ (charakteristika prohrávající pozice).

Uvažujeme pozici (a_1, a_2, …, a_n) z množiny $\mathcal{P}$. Během svého tahu si hráč vybere jednu z hromádek a odebere z ní počet objektů na a'. Budeme předpokládat, že odebral sirky z první hromádky (v opačném případě stačí hromádky přeskládat či přečíslovat) a odebral alespoň jednu sirku (dle pravidel NIMu) $\Longrightarrow a' < a_1$. Pokud by pozice (a', a_2, …, a_n) po provedeném tahu také patřila do množiny $\mathcal{P}$, platilo by:

$$a' \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n = 0 = a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n$$

A dle pravidla krácení by bylo $a' = a_1$. Což je ovšem spor, a tudíž musí platit $a' \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n \neq 0$. Libovolný tah z jakékoli pozice v množině $\mathcal{P}$ tedy vede vždy do pozice v množině $\mathcal{V}$.

2) Z každé pozice z množiny $\mathcal{V}$ existuje alespoň jeden tah do nějaké pozice z množiny $\mathcal{P}$ (charakteristika pro vyhrávající pozici).

Mějme pozici (a_1, a_2, ..., a_n) z množiny $\mathcal{V}$. Čísla a_1 až a_n převedeme do binární soustavy a zapíšeme pod sebe tak, aby sobě odpovídající řády byly ve svislých sloupcích. Jelikož se jedná o vyhrávající pozici, tak Nim-součet je roven nule, a tudíž existuje alespoň jeden sloupec, který obsahuje lichý počet jedniček. Pokud je takovýchto sloupců více, bude nás zajímat ten, který je nejvíce vlevo (odpovídá nejvyšší mocnině dvojky). Ve vybraném sloupci u jednoho z čísel změníme jedničku na nulu, tak abychom získali sudý počet jedniček. Číslo jsme tím jistě zmenšili, protože přechodem $1 \longrightarrow 0$ jsme zmenšili mocninu dvojky. Jde tedy o platný tah (odebrali jsme z libovolného sloupce počet objektů větší než nula). A jelikož NIM-součet je nenulový, jedná se o tah do množiny $\mathcal{P}$.

Počet možných tahů z vyhrávající pozice do nějaké pozice prohrávající je shodný s počtem jedniček ve sloupci nejvíce vlevo, který je obsahuje lichý počet jedniček. Z vítězné pozice tedy vede vždy lichý počet vítězných tahů.

Věta 7: Pokud druhý hráč zanechal po svém tahu nebezpečnou pozici, první hráč opět může svým tahem dosáhnout pozice bezpečné.

Důkaz: Po hráčově tahu zůstala pozice nebezpečná, tedy její NIM-součet je nenulový. Pokud tedy převedeme počty sirek do binární soustavy a zapíšeme odpovídajícím způsobem pod sebe, alespoň v jednom sloupci bude lichý počet jedniček. Pokud jich je víc, vybereme ten nejvíc vlevo. Určíme si z nich jedno číslo a změníme u něj jedničku na nulu, tím jsme určili hromádku, ze které budeme odebírat. Známe-li počty objektů ve všech hromádkách kromě jedné, kdy dokážeme nulový NIM-součet určit jednoznačně, čímž zjistíme počet kamenů, který musíme odebrat. Tah je přípustný, protože jsme změnili hodnotu mocniny dvojky, čímž jsme jistě číslo zmenšily.

a_1, a_2, ..., a_k – velikosti hromádek po tahu prvního hráče

b_1, b_2, ..., b_k – analogické velikosti hromádek po tahu druhého hráče

$s = a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_k$ – NIM-součet a

t = $b_1 \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_k$ – NIM-součet b

$s \neq 0$ (jde o bezpečnou pozici) a chce dosáhnout aby, $t = 0$.

$d \coloneqq \max\{i, s_i = 1\}$, kde $s = s_m s_{m-1} \dots s_0$, stanovíme pevně j tak, že $a_j^d = 1$, kde $a_j = a_j^m a_j^{m-1} \dots a_j^0$. Čímž je určená hromádka, z níž bude při tahu odebíráno.

Počet odebíraných sirek zjistíme tak, že položíme $b_j \coloneqq a_j \otimes s$, pak hledané číslo je $a_j - b_j$. Protože $a_j > b_j$ je povolený tah získali jsme bezpečnou pozici, protože platí:

$$t = s \otimes a_j \otimes b_j$$

$$t = s \otimes a_j \otimes (s \otimes a_j)$$

$$t = 0$$

8 Vítězná strategie obecně

Pro vítězství v libovolné partii NIMu stačí, aby hráč po svém tahu zanechal na stole bezpečnou pozici, tj. aby NIM-součet sirek v hromádkách dané hry byl roven nule. Během každého kola klesá počet sirek (dle pravidel hry) a dříve či později dojde hra do pozice 0-0-0…0, která je konečná. Pokud tedy první hráč začíná hru v bezpečné pozici, tzn. s nulovým NIM-součtem, tak zvítězí druhý hráč. Pokud je počáteční pozice prvního hráče nenulová, tak vyhrává on a druhý hráč prohrává.

Předpokládejme, že počet objektů v každé hromádce byl před začátkem hry určen náhodou, ukažme si, jak vypočítat šance na bezpečné (vyhrávající) pozice.

Pokud jsou na počátku hry 3 hromádky (tzn. že každá hromádka obsahuje méně než 2^n objektů a žádná není prázdná), pak všechny možné hodnoty všech hromádek zjistíme jako:

$$\frac{2^{n-1}(2^{2n}-1)}{3}$$

Počet bezpečných pozic vypočítáme jako:

$$\frac{(2^{n-1}-1)(2^{2n}-1)}{3}$$

Šance, že bezpečná pozice bude na počátku hry rozdána jako výchozí pozice, a zvítězí tedy druhý hráč, vypočteme jako:

$$\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}(2^n+1)}$$

9 Vítězná strategie v praxi

Dva hráči chtějí hrát NIM. Před začátkem hry leží na stole sirky v podobě NIM (8, 12, 3, 9). Který hráč vyhraje? Jaký bude první tah hry?

1) Nejprve převedeme čísla do binární soustavy a uspořádáme je do odpovídajících sloupců. $8 = 1000_2$, $12 = 1100_2$, $3 = 0011_2$, $9 = 1001_2$

$$\begin{array}{r} 1000_2 \\ \otimes 1100_2 \\ \otimes 0011_2 \\ \otimes 1001_2 \\ \hline 1110_2 \end{array}$$

2) NIM-součet je nenulový, jedná se proto o vyhrávající pozici. Aby první hráč, který začíná hru, vyhrál, musí aplikovat vítěznou strategii. Takže je jeho cílem odebrat z nějaké hromádky takový počet sirek, aby po ukončení tahu zůstala pozici prohrávající – s NIM-součtem rovným nule.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0_2 \\ 1 & 1 & 0 & 0_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1_2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0_2 \end{array}$$

3) Najdeme sloupce, ve kterých je počet jedniček lichý. Vidíme, že v našem případě jsou tři. Vezmeme tedy ten, který je nejvíce vlevo. Tento sloupec volíme z toho důvodu, že podstatou hry je odebrat sirky a tudíž snížit jejich počty. Kdybychom vzali jiný sloupec, mohlo by nalezení nulového NIM-součtu vést na číslo vyšší, což ale odporuje pravidlům a mechanismu hry.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0_2 \\ 1 & 1 & 0 & 0_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1_2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0_2 \end{array}$$

4) Určíme si jeden řádek, ve kterém změníme jedničku z vybraného sloupečku na nulu. Pro větší názornost vezmeme hned první řádek.

$$\begin{array}{cccc}
\mathbf{0} & _ & _ & _{}_2 \\
1 & 1 & 0 & 0_2 \\
0 & 0 & 1 & 1_2 \\
1 & 0 & 0 & 1_2 \\
\hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0_2}
\end{array}$$

5) Potřebujeme, aby celkový NIM-součet byl roven nule. Musíme tedy doplnit do prvního řádku jedničky a nuly tak, aby v součtu byla nula a aby v každém sloupečku byl sudý počet jedniček.

$$\begin{array}{cccc}
0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0_2} \\
1 & 1 & 0 & 0_2 \\
0 & 0 & 1 & 1_2 \\
1 & 0 & 0 & 1_2 \\
\hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0_2}
\end{array}$$

6) První řádek jsme doplnili tak, aby NIM-součet byl roven nule. Zjistili jsme, že v prvním řádku musí být číslo $0110_2 = 6$. Musíme tedy z první hromádky odebrat rozdíl mezi čísly 8 a 6 tedy 2 sirky.

$$\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0_2 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0_2} \\
0 & 0 & 1 & 1_2 \\
1 & 0 & 0 & 1_2 \\
\hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0_2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0_2 \\
1 & 1 & 0 & 0_2 \\
0 & 0 & 1 & 1_2 \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1_2} \\
\hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0_2}
\end{array}$$

7) Z vyhrávající pozice vede takový počet vítězných tahů, taký je počet sloupečků s lichým počtem jedniček. V našem případě tedy budou tři možné tahy, aby byl výsledný NIM-součet nulový. Druhou a třetí možností je odebrat z druhé hromádky deset sirek a ze čtvrté hromádky dvě sirky.

NIM (8, 12, 3, 9) vyhraje první hráč, protože svůj tah začíná ve vyhrávající pozici. Má tři možnosti vítězných tahů – odebrat 2 sirky z první hromádky, deset sirek ze druhé hromádky, a nebo dvě sirky ze třetí hromádky.

10 Varianty NIMu

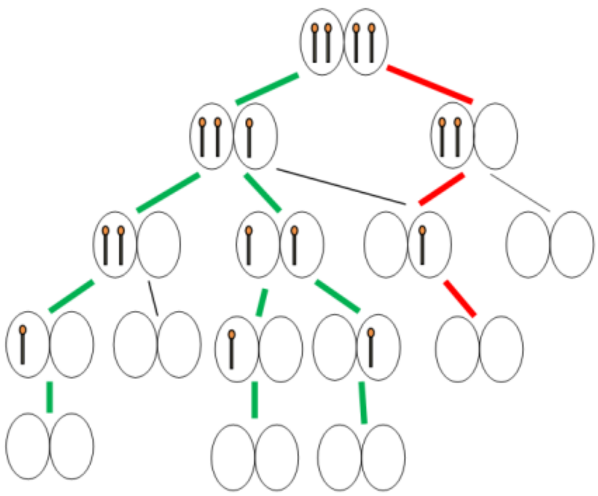
Jak tedy postupovat pro nalezení vítězné strategie u klasického NIMu s *m* hromádkami o *n* sirkách jsme si rozebrali výše. Dokážeme již aplikovat NIM-součet a pracovat s ním, najít bezpečné pozice a určit tahy pro výhru. Nyní si ukážeme některé varianty NIMu, které mají jinou podobu než *m* hromádek o *n* sirkách a také jiná pravidla v rámci možných tahů.

10.1 Misère NIM

Misère NIM případně také betlový NIM či betl NIM se liší od klasického NIMu tím, že cílem je poslední kámen nevzít a donutit k tomu svého protihráč. Můžeme mít v základní pozici libovolný počet hromádek s libovolnými počty sirek a hrajeme stejně jako klasický NIM. A jak tedy vyhrajeme betlovou NIM hru? Vítězná strategie funguje stejně jako v případě klasického NIMu a to až do chvíle, kdy pouze na jedné hromádce zůstává více než jedna sirka např. 1-3-1 a 1-2-1-1. V klasickém NIMu bychom odebrali na pozice 1-1 a 1-1-1-1, tedy tak, aby zůstal sudý počet hromádek. V Misère NIMu budeme postupovat opačně, stačí odebrat tak, aby zůstal lichý počet hromádek (tedy aby NIM-součet byl různý od nuly), v našem případě tedy odebereme na 1-1-1 a 1-1-1.

Obecně tedy platí, že pro výhru nesmí hráč nikdy po svém tahu zanechat hru v pozici 1-1-*n* a 1-*n*-0, kdy $n > 1$.

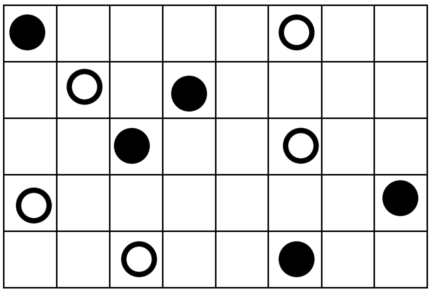
Na Obrázku 10 jsou zeleně vyznačené vítězné tahy pro prvního hráče, červeně vítězné tahy pro druhého hráče.



Obrázek 10: Misère NIM - schéma

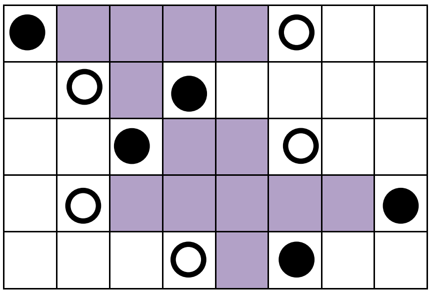
10.2 Northcottův NIM

Northcottův NIM je modifikací klasického NIMu, ale hraje se na čtvercové hrací ploše (obvykle na šachovnici 8×8 polí) či na obdélníkové hrací ploše ($m \times n$, $m \neq n \wedge m, n > 1$). Kdy na každém řádku je umístěn jeden kámen každé barvy.


Obrázek 11: Northcottův NIM - počáteční stav hry

Dva hráči se při hře střídají a posunují kameny své barvy. V jednom tahu může hráč táhnout v jedné řadě o libovolný počet polí, nesmí však nikdy přeskočit soupeřův kámen ani zůstat stát na něm. Stejně tak nesmí opustit hrací plochu. Hráč, který nemůže táhnout žádným svým kamenem, prohrává.

Jedná se o modifikaci klasického NIMu, kdy jednotlivým hromádkám sirek odpovídá počet volných polí mezi kameny v jednotlivých řádcích. Proto pro určení vítězné strategie bude stačit opět aplikovat NIM-součet.

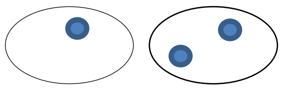

Obrázek 12: Northcottův NIM - kde najít klasický NIM

$4 \otimes 1 \otimes 2 \otimes 5 \otimes 1 = 3$

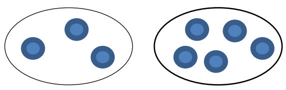
Pro tah do vyhrávající pozice tedy posuneme kameny v druhém nebo pátém řádku na mezeru dvou polí případně ve čtvrtém řádku na mezeru šesti polí.

10.3 Wythoffův NIM

Wythoffův Nim je modifikací NIMu, kdy dva hráči střídavě odebírají kladný počet kuliček právě ze dvou hromádek. A to tak, že v jednom tahu je možné vzít libovolný počet kuliček (klidně i všechny) z jedné hromádky, případně z obou hromádek, tehdy ale počet odebraných kuliček musí být z obou hromádek stejný. Vyhrává hráč, který odebere poslední kuličku.


Obrázek 13: Wythoffův Nim - pozice 1-2

Budeme-li mít tedy například dvojici čísel (1, 2), tak je zřejmé, že hráč, který tuto pozici zanechá po svém tahu, vyhraje bez ohledu na tah svého protihráče. Ten totiž může odebrat po jedné kuličce z obou hromádek, jednu kuličku z levé hromádky nebo dvě kuličky z pravé hromádky. Tuto pozici můžeme tedy označit za bezpečnou.



Obrázek 14:Wythoffův Nim - pozice 3-5

Za další bezpečnou pozici bychom mohli označit čísla (3, 5). Možnosti tahu jsou odebrání jedné, dvou nebo tří kuliček z obou hromádek nebo libovolného počtu kuliček z jedné z hromádek, což ale vždy vede na pozici s jednou prázdnou hromádkou či na možnost odebrat na pozici (1, 2).

Řadu výherních pozic počínaje dvojicí $(a_1,\ b_1) = (1,\ 2)$, lze pomocí $(a_k,\ b_k)$ zapsat jako:

$$a_k \coloneqq min\{c : c > a_i, b_i, i < k\}$$

$$b_k \coloneqq a_k + k$$

Za bezpečné tedy považujeme tzv. Wythoffovy dvojice: (1, 2), (3, 5), (4, 7), (8, 13), (9, 15), (11, 18), (12, 20), (14, 23), (16, 26), (17, 28), (19, 31), (21, 34), (22, 36), (24, 39), (25, 41), (27, 44), (29, 47) … až každá *n*-tá dvojice, která vyhovuje vzoru:

$$(\lfloor n\varphi \rfloor, \lfloor n\varphi^2 \rfloor),$$

kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla *x* a $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ je hodnota zlatého řezu.

10.4 Shannonův NIM

Shannonův NIM představuje variantu klasického NIMu, kdy se hráči pravidelně střídají a v jednom tahu odebírají pouze z jedné hromádky sirek, ovšem počet odebíraných sirek může být pouze jedna nebo prvočíslo.

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1_2 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1_2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0_2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0_2 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 0 & 0_2
\end{array}$$

Pro vítězství v Shannonově NIMu použijeme opět NIM-součet. V klasickém NIMu musí být ve všech sloupcích sudé počty jedniček, aby pozice byla bezpečná, ale u Shannonova NIMu nás budou zajímat pouze poslední dva sloupce, které musí obsahovat sudý počet jedniček. Mějme tedy pozici **17-13-2-18**, po převedení do binární soustavy a provedení NIM-součtu je zřejmé, že pro klasický NIM tato pozice bezpečná není, pro Shannonův ano, protože NIM-součet posledních dvou sloupců je roven nule.

10.5 Mooreův NIM

Označovaný jako NIM_k je modifikace klasického NIMu, kdy je před každou hrou pevně dané libovolné přirozené číslo *k*. Dva hráči pak střídavě odebírají z libovolného počtu *n* hromádek sirky a vítězí ten, který bere jako poslední. V jednom tahu je možné odebrat až z *k* hromádek libovolný počet sirek, celkem vždy však alespoň jednu. Je tedy na každém hráči, jestli vezme jednu sirku z jedné hromádky, nebo všechny sirky z až *k* hromádek, jestli z každé z *k* hromádek vezme stejný počet nebo nic.

Vzhledem k možnosti odebírat z *k* hromádek je zřejmé, že v okamžiku, kdy bude počet hromádek *k* nebo menší, hráč vezme všechny zbylé sirky a vyhrává. Při hře bude cílem hráče odebírat tak, aby na jeho tah zbylo právě *k* hromádek nebo méně. Do toho okamžiku je však nutné nalézt bezpečné pozice.

Jak najít bezpečné pozice pro vítěznou strategii? Vezmeme libovolné *n* hromádek o $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sirkách a každou hromádku vyjádříme ve dvojkové soustavě

$$x_i = x_i^0 + x_i^1 \cdot 2^1 + x_i^2 \cdot 2^2 + x_i^3 \cdot 2^3 + x_i^4 \cdot 2^4 + \cdots$$

a jako u klasického NIMu si binární vyjádření hodnot zapíšeme pod sebe a provedeme NIM-součet. Naším cílem však bude najít takový výsledný NIM-součet, v němž součty jedniček v jednotlivých sloupcích budou dělitelné číslem $k + 1$. Vyjádřeno formálně:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^j \equiv 0 \mod (k+1), \quad j = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Nejprve si to ukažme na pozici 15-8-3-1 při NIM_1 (což je klasický NIM, v NIM-součtu však tentokrát nepoužijeme vyjádření jedniček a nul na základě XOR součtu, ale pouze počty jedniček v jednotlivých sloupcích).

$k = 1$	$1\ 1\ 1\ 1_2$	$1\ 1\ 1\ 1_2$	$1\ \mathbf{0}\ 1\ 1_2$	$1\ 0\ 1\ \mathbf{0}_2$	$1\ 0\ 1\ 0_2$
$k + 1 = 2$	$1\ 0\ 0\ 0_2$	$1\ 0\ 0\ 0_2$	$1\ \mathbf{0}\ 0\ 0_2$	$1\ 0\ 0\ \mathbf{0}_2$	$1\ 0\ 0\ 0_2$
	$0\ 0\ 1\ 1_2$	$0\ 0\ 1\ 1_2$	$0\ \mathbf{0}\ 1\ 1_2$	$0\ 0\ 1\ \mathbf{1}_2$	$0\ 0\ 1\ 1_2$
	$0\ 0\ 0\ 1_2$	$0\ 0\ 0\ 1_2$	$0\ \mathbf{0}\ 0\ 1_2$	$0\ 0\ 0\ \mathbf{1}_2$	$0\ 0\ 0\ 1_2$
	$2\ 1\ 2\ 3$	$2\ 1\ 2\ 3$	$2\ \mathbf{0}\ 2\ 3$	$2\ 0\ 2\ \mathbf{2}$	$2\ 0\ 2\ 2$

Obrázek 15: Mooreův NIM pro k = 1

Na Obrázku 15 vidíme, že počet jedniček je sudý v prvním a třetím sloupci, proto s nimi dál pracovat nebudeme. Jelikož podstatou hry je sirky odebírat a nikoli přidávat, musíme začít upravovat jako první sloupec ten nejvíce vlevo. Potřebujeme najít číslo dělitelné dvěma, v našem případě je tedy jediná možnost, jedničku prvního řádku změnit na nulu. Pravidlem NIMu_1je to, že smíme brát pouze z jedné hromádky, proto se dále můžeme soustředit pouze na další změny v prvním řádku binárního zápisu. Zbývá vyřešit čtvrtý sloupec, změníme tedy také jedničku na nulu. Tah do bezpečné pozice z pozice 15-8-3-1 je odebráním pěti sirek z první hromádky na pozici 10-8-3-1.

Nyní vyzkoušíme aplikovat stejný princip vyhledání bezpečné pozice při tahu z pozice 15-8-3-1 při hře NIM_3.

$k = 3$	$1\ 1\ 1\ 1_2$	$\mathbf{0}\ 1\ 1\ 1_2$	$1\ \mathbf{0}\ 1\ 1_2$	$0\ 0\ \mathbf{0}\ 0_2$	$0\ 0\ 0\ \mathbf{1}_2$
$k + 1 = 4$	$1\ 0\ 0\ 0_2$	$\mathbf{0}\ 0\ 0\ 0_2$	$1\ \mathbf{0}\ 0\ 0_2$	$0\ 0\ \mathbf{0}\ 0_2$	$0\ 0\ 0\ \mathbf{1}_2$
	$0\ 0\ 1\ 1_2$	$\mathbf{0}\ 0\ 1\ 1_2$	$0\ \mathbf{0}\ 1\ 1_2$	$0\ 0\ \mathbf{0}\ 1_2$	$0\ 0\ 0\ \mathbf{1}_2$
	$0\ 0\ 0\ 1_2$	$\mathbf{0}\ 0\ 0\ 1_2$	$0\ \mathbf{0}\ 0\ 1_2$	$0\ 0\ \mathbf{0}\ 1_2$	$0\ 0\ 0\ \mathbf{1}_2$
	$2\ 1\ 2\ 3$	$\mathbf{0}\ 1\ 2\ 3$	$2\ \mathbf{0}\ 2\ 3$	$2\ 0\ \mathbf{0}\ 2$	$0\ 0\ 0\ \mathbf{4}$

Obrázek 16: Mooreův NIM pro *k* = 3

Z Obrázku 16 vyplývá, že po binárním zápisu počet jedniček v žádném sloupci není dělitelný čtyřmi. Bude tedy nutné postupně upravit všechny sloupce, začneme tím nejvíce zleva. Jelikož můžeme odebírat pouze ze tří hromádek, musíme do prvního sloupce dosadit samé nuly. Stejně tak tomu bude také ve druhém a třetím sloupci. U čtvrtého sloupce naopak změníme nulu v druhém řádku na jedničku. Z 15-8-3-1 bude tah do bezpečné pozice odebrání 14 sirek z první hromádky, 7 sirek z druhé hromádky a 2 sirky ze třetí hromádky – bezpečnou pozicí je tedy 1-1-1-1. Další hráč v pořadí totiž může odebrat maximálně tři hromádky a ať bude táhnout jakkoli, vítězí hráč před ním.

10.6 Maticový NIM

Jinak nazývaný také Matrix NIM či NIM^n se hraje na čtvercovém či obdélníkovém hracím poli o n sloupcích a m řádcích, kdy jsou na jednotlivých polích umístěné hromádky mincí. Hráči se pravidelně střídají a odebírají tak, že buď vezmou libovolné nenulové množství mincí z libovolného počtu hromádek umístěných v téže řadě, nebo tak, že alespoň jeden sloupec zůstane nezměněný (odeberou tedy z (n – 1) sloupců).

Bezpečnou pozici získáme, pokud splňuje dvě podmínky:

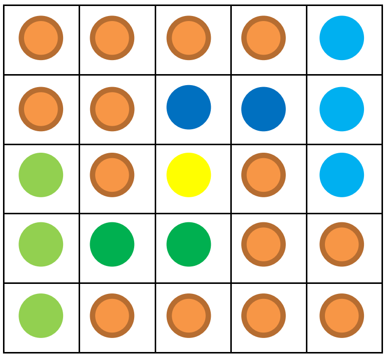
- pro každý sloupec existují jiný se stejným počtem mincí
- vezmeme-li nejmenší hromádku mincí z každého řádku, jejich NIM-součet je nulový dle pravidel klasického NIMu

10.7 TacTix

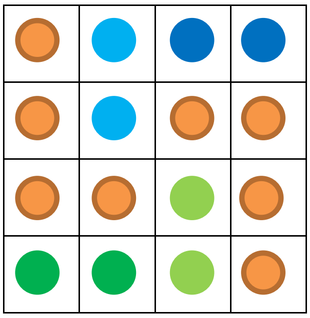
Je variantou NIMu, která se hraje na čtvercovém či obdélníkovém hracím poli o m řádcích a n sloupcích, kdy na každém políčku leží právě jeden kámen. Hráči střídavě odebírají libovolný počet kamenů z jedné řádky nebo jednoho sloupce, kameny však spolu musí sousedit, je-li tedy odebrán třetí kámen v pořadí, tak druhý a čtvrtý již najednou vzít nelze.

Dříve se hrávalo spíše na čtverci 6 × 6 polí, ale rozměry m a n mohou být libovolné. V současnosti je nejznámější verzí TacTixu čtverec 4 × 4 pole, jde v podstatě o dvojrozměrnou podobu klasického NIMu. Existuje i verze TacTex, která se hraje na hrací desce šestiúhelníkového tvaru.

Stejně jako klasický NIM se TacTix hraje ve formě Misère (hráč s posledním tahem prohrává) i Non Misère (hráč s posledním tahem vyhrává). Pro betlový TacTix je vítězná strategie neobjevená. Pro klasickou herní konvenci platí strategie, že pokud je hrací pole $n \times n$ a n je liché číslo, zvítězí první hráč. Ve svém prvním tahu odebere středové políčko a následně bude odebírat středově souměrné tahy jako jeho soupeř. Vezme-li tedy druhý hráč pravý horní kámen, vezme druhý hráč levý spodní atd. Pokud bude n sudé číslo, zvítězí tentokrát druhý hráč a to opět zrcadlovými tahy protihráče. (Obrázek 17)



Vítězství prvního hráče



Vítězství druhého hráče

Obrázek 17: TacTix - výherní strategie

10.8 Další varianty NIMu

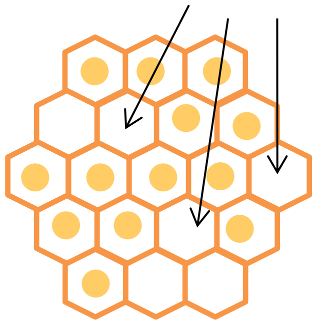
Všechny následující varianty uvádíme pro ilustraci toho, jak pestrá může být paleta možných variant NIMu. Některé nuance mohou být tak jemné, že různé verze hry se liší třeba pouze povoleným počtem odebíraných předmětů, proto rozhodně nebude vyčerpána celá škála možností. To de facto ani není možné, protože v podstatě se dá říci, že každí dva hráči si mohou vytvořit svou vlastní variantu NIMu dle úmluvy pro jednu konkrétní hru. Všechny dále zmiňované varianty budou uvedeny pouze s popisem základního postavení herních předmětů a pravidel konkrétní hry, nebudeme u nich rozebírat, jak získat tahy v rámci vítězné strategie a dosáhnout výhry.

10.8.1 Laskerův NIM

Při této variantě NIMu se hráči pravidelně střídají a odebírají libovolný nenulový počet sirek s libovolného množství hromádek, navíc však hráč, který je na tahu, může místo odebrání sirek rozdělit jednu libovolnou hromádku na dvě neprázdné části.

10.8.2 NIM 19

Při hře *NIM 19* se bude hrát s 19 mincemi rozmístěnými na hrací desce tvaru šestiúhelníku, kdy jsou zaplněna všechna pole. Hráči se střídají a odebírají buď jednu minci, dvě sousedící mince, a nebo tři mince tvořící trojúhelník. (Obrázek 18)



Obrázek 18: NIM 19

10.8.3 Sulucrus

Hráči se střídají a z jedné hromádky s alespoň 22 kameny odebírají kladné počty kamenů tak, že první hráč smí odebrat 1, 3 nebo 6 kusů a druhý hráč 2, 4 nebo 5 kusů.

10.8.4 Peggy NIM

Hráči střídavě odebírají z hromádek kladné počty kamenů. V jednom tahu je možné odebrat z jedné hromádky, buď sudý počet kamenů (ale ne všechny), nebo lichý počet kamenů (a až celou hromádku).

10.8.5 NIM 21

Hraje s 21 sirkami nijak nerozdělenými do jednotlivých hromádek, hráči se střídají a odebírají jednu, dvě nebo tři sirky. Vítězí ten, kdo vezme poslední sirku.

NIM 21 můžeme zobecnit na libovolný počet sirek v počáteční pozici hry a libovolné hodnoty, které je možné v jednotlivých tazích odebírat např. prvočísla, čísla 1 až n čísel pro $n > 0$, čtvercová čísla, *Půlený NIM* – kdy je možné odebrat nejvýše polovinu všech sirek, *Proporcionální NIM* – odebírají se takové k počty sirky, pro které platí: $\frac{n}{2} + 1 > k$ atd. (Některé z těchto možných obměn her jsme si ukázali výše při popisu Sprague-Grundyovy sekvence).

10.8.6 Fibonacci NIM

Varianta NIMu hraná s jednou hromádkou sirek libovolného počtu, kdy první hráč může odebrat jakýkoli lichý počet sirek (ne celou hromádku). V každém dalším tahu je možné odstranit maximálně dvojnásobek počtu sirek, které provedl hráč v předchozím tahu. Př.: První hráč vezme z hromádky jednapadesáti sirek přesně 9 sirek, druhý hráč tedy může vzít 1 – 18 sirek a rozhodne se vzít 4 sirky. První hráč v dalším tahu smí vzít 1 – 8 sirek.

10.8.7 Nebonacci NIM

Obdobně jakou Fibonacciho NIMu hráči střídavě odebírají z jedné libovolně velké hromádky sirek, tentokrát však hráč ve svém tahu může odebrat až trojnásobek počtu sirek z předchozího tahu.

10.8.8 Multibonacci NIM

Multibonacci NIM je zobecnění Fibonacciho NIMu, kdy se odebírá n-násobek předchozího tahu. Hráči jsou ve střídavých tazích omezeni horní hranicí $F(n)$ možných odebraných sirek a hodnota $F(n)$ při tom nemusí být omezena pouze na hodnoty lineární funkce.

10.8.9 Poker NIM

Hraje s libovolným počtem žetonů rozdělených do libovolného počtu hromádek jako v klasickém NIMu, navíc však mají oba hráči na začátku v kapse ještě stejný počet náhradních žetonů. Hráči se střídají ve hře a ve svém tahu, buď odebírají z hromádek nenulový počet žetonů (dle pravidel klasického NIMu), nebo mohou odebrat nenulový počet žetonů z jedné hromádky a navíc přidat nenulový počet žetonů na jinou hromádku.

10.8.10 Dvojrozměrný NIM

Tato varianta NIMu se hraje na čtvercové síti, ve které je rozmístěný konečný kladný počet mincí, kdy na jednotlivých polích může být jedna mince nebo i více mincí. V první variaci hráč při svém tahu může posunout jednu minci ve stejném řádku směrem doleva, případně na políčko v nižším řádku. V druhé variaci je možné navíc posunovat celou hromádkou po políčkách doleva a dolů, a dokonce mince z hromádek odebírat.

10.9 NIMin

NIMin, NIM incogito nebo také utajený NIM či NIM v převleku, to všechno jsou názvy her, které na první pohled nemají s klasickým NIMem nic společného. Pokud však zvážíme podobu hry, možné pozice a především povolené tahy, dokážeme nalézt zákonitosti pro vítěznou strategii, a to právě na základě klasického NIMu. Použijeme-li NIM-součet, pravidla, znalost podoby bezpečných pozic, zkrátka všechny dostupné mechanismy, dokážeme v každém utajeném NIMu najít vítězné tahy dle Boutonovy výherní strategie.

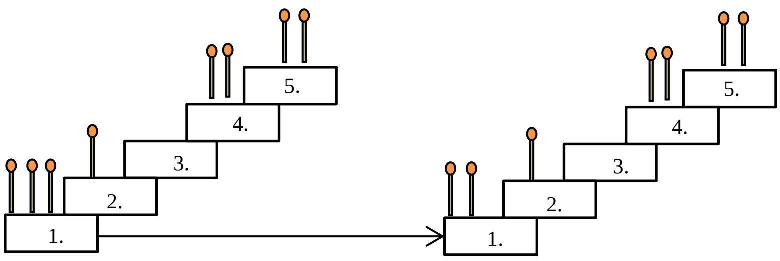
U všech NIMin verzí bude popsána samotná hra a to, jak ji převést na NIM, protože s tou formou hry již umíme pracovat. Pokud bude další postup herní strategie ekvivalentní s klasickým NIMem, nebudeme ho dále rozebírat.

10.9.1 Schody

Mějme n schodů a na nich položeno konečné kladné množství k sirek, které jsou rozmístěné tak, že na jednom schodu může ležet jedna nebo více sirek, nebo tam nemusí být žádná. V každém tahu si hráč určí libovolný schod a z něj posune libovolné množství sirek (nejméně jednu, nejvíce všechny) o jeden schod níže. Se sirkami, které se ocitnou na podlaze pod prvním schodem, se již dále nehraje. Hráči se pravidelně střídají a hráč, který posune poslední sirku na podlahu, vyhrál.

Potřebujeme tedy v dané hře někde objevit NIM, hledáme proto nějakou pozici $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, u níž můžeme využít NIM-součet a zajistit si tahy k vítězství. V případě Schodů najdeme NIM ukrytý v počtech sirek na lichých schodech. Bezpečná pozice bude tedy vycházet z počtu sirek na $x_1, x_3, \ldots, x_k$ schodech (a bude platit: $k = n$ pokud je n liché číslo, $k = n - 1$, pokud je n sudé číslo) a bude odpovídat nulovému NIM-součtu klasického NIMu, kdy hromádky sirek na lichých schodech odpovídají hromádkám klasického NIMu.

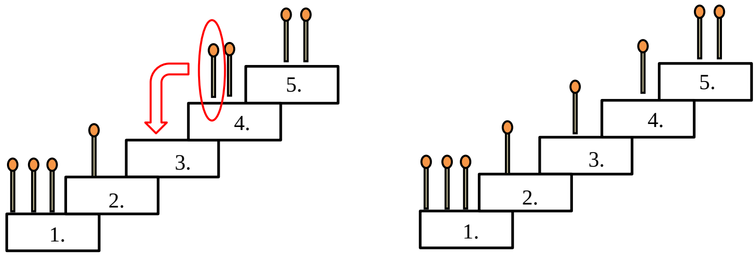
Pokud tedy bude mít počáteční pozice Schodů tvar 3-1-0-2-2 a povolené tahy jsou pohyby vždy o jeden schod níže, tak po aplikaci NIM-součtu objevíme, že vyhrávající pozicí bude pozice 2-1-0-2-2, odebereme tedy jednu sirku z prvního schodu. (Obrázek 19)



Obrázek 19: Schody - bezpečná pozice, 1

Jelikož se však nejedná o klasický NIM, v určitých okamžicích hry je možné hodnoty hromádek i zvětšovat, tak bude existovat také vítězná pozice se zapojením všech tří lichých schodů. Jak bylo zmíněno výše, pokud známe dvě čísla a výslednou hodnotu NIM-součtu, tak třetí číslo dokážeme určit jednoznačně. Druhým možným tahem do vítězné pozice bude přendání jedné sirky ze čtvrtého schodu na třetí **3**-1-**1**-1-**2.** Pro výhru je tedy podstatné udržovat počty sirek na lichých hromádkách v nulovém NIM-součtu, dodržovat symetrické pozice a další bezpečné pozice klasického NIMu. (Obrázek 20)

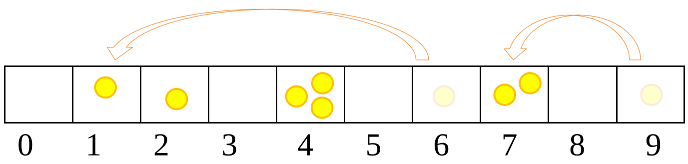
$$\begin{array}{cc} 1 & 1_2 \\ - & - \\ 1 & 0_2 \\ \hline 0 & 0_2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} 1 & 1_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1_2} \\ 1 & 0_2 \\ \hline 0 & 0_2 \end{array}$$



Obrázek 20: Schody - bezpečná pozice, 2

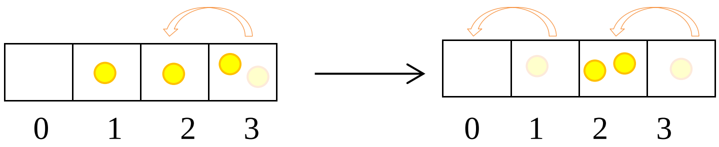
10.9.2 Nimble

Nimble je další NIMin hrou, jedná se o obdobu *Schodů*. Mějme očíslovanou konečnou řadu polí 0, 1, 2, …, *n*, na kterých je rozmístěný konečný kladný počet mincí tak, že v každém poli je buď jedna mince, více mincí nebo žádná mince. Hráči se pravidelně střídají, v každém tahu si zvolí právě jednu minci a přesunou ji na libovolné pole směrem vlevo od původního pole. (Obrázek 21) Mince ležící „v cestě“ je možné přeskočit a také pokládat na sebe. Jakmile je mince na poli 0, již se s ní dál nehraje. Hra končí v okamžiku, kdy jsou všechny mince na nulovém poli.



Obrázek 21: Nimble - možné tahy

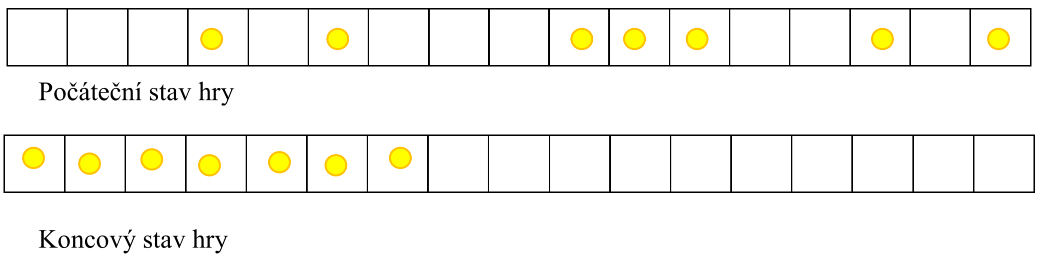
NIM v této hře budeme hledat v počtech mincí na jednotlivých polích. Leží-li na poli s číslem jedna, určíme si ji jako hromádku NIMu s jednou sirkou, pole se čtyřkou bude hromádkami se čtyřmi mincemi atd. Pokud na poli leží více mincí, zapíšeme si každou minci jako samostatnou hromádku, protože v klasickém NIMu může být v jedné pozici více hromádek stejné hodnoty. Mějme tedy Nimble 1-3-3, kdy na prvním poli budeme mít jednu minci a na třetím poli dvě mince. Abychom zjistili, jaká je bezpečná pozice, provedeme NIM-součet a zjistíme, že bude roven nule pro pozici 1-2-3 v klasickém NIMu. (Obrázek 22) Pro výherní strategii bude stačit dodržovat nadále zrcadlové tahy a držet symetrické pozice 2-2, 1-1 atd.



Obrázek 22: Nimble - bezpečná pozice

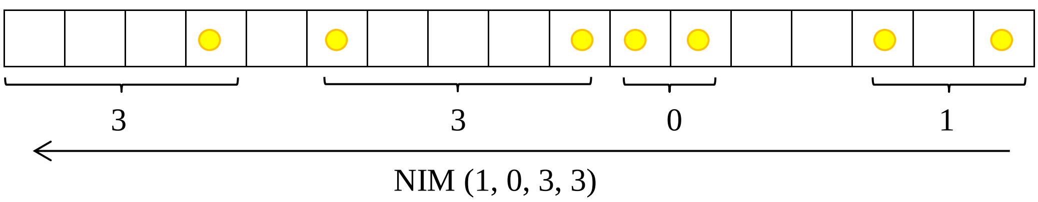
10.9.3 Mince na pásu

Mince na pásu jsou hrou, která se stejně jako *Nimble* hraje na konečném pásu polí, na němž je rozmístěný konečný kladný počet mincí. Tentokrát však na každém poli smí ležet buď jedna nebo žádná mince. Hráči se pravidelně střídají a přesunují mince směrem k levému kraji, a to tak, že smí vzít v jednom tahu právě jednu minci a přesunout ji o libovolný počet polí směrem vlevo, ale při tom nesmí žádnou jinou minci přeskočit ani umístit na stejné pole, kde již mince leží. Hra končí ve chvíli, kdy jsou všechny mince ze hry seřazeny vedle sebe od začátku pásu bez vynechaného pole. Bude-li tedy hra mít rozmístěno na pásu libovolně 7 mincí, na konci budou všechny mince seřazeny na polích 1-7. (Obrázek 23)



Obrázek 23: Mince na pásu - podoba hry

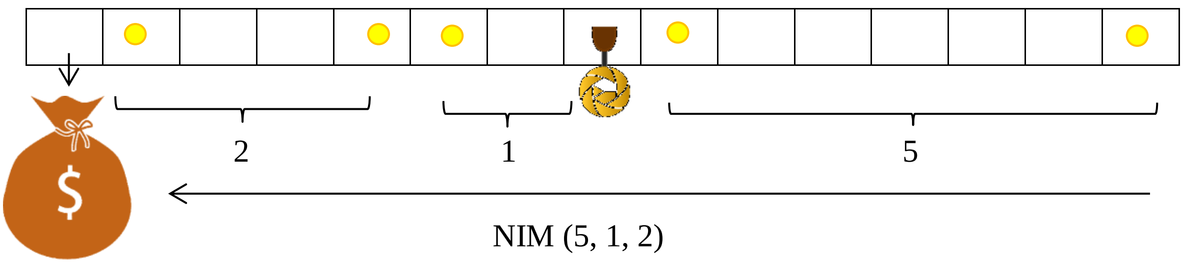
Jak tedy vyhrát Mince na pásu? Opět pomocí nulového NIM-součtu. Stačí, když si mezery mezi jednotlivými mincemi představíme jako jednotlivé hromádky klasického NIMu.



Obrázek 24: Mince na pásu - nalezení NIMu, modelový příklad

Vždy začneme počítat mezery zprava doleva a mezi to mezi první a druhou mincí, třetí a čtvrtou, pátou a šestou atd. Pokud je mincí lichý počet, jako poslední započítáme mezeru mezi mincí úplně vlevo a koncem pásu. Počty polí mezi mincemi zapíšeme jako klasický NIM, v našem modelovém případě tedy budeme mít počáteční pozici 1-0-3-3. (Obrázek 24) Dále již budeme postupovat jako u klasického NIMu, najdeme nulový součet a posuneme konkrétní minci směrem doleva. U Mincí platí stejný mechanismus jako u hry *Schody*, do určitého okamžiku je možné mezery zvětšovat, pro výhru budeme tyto tahy vyrovnávat opětovným zmenšováním a ve chvíli, kdy již není možné mezery zvětšovat, budou platit pravidla pro vyhledávání bezpečné pozice jako u klasického NIMu. U našeho modelového příkladu jsou tedy možné tahy na bezpečné pozice 0-3-3, 1-2-3 nebo 1-3-2.

10.9.4 Stepinova hra



Obrázek 25: Stepinova hra

Stepinova hra (Obrázek 25) je obdobou *Mincí na pásu*, také se hraje na konečném pásu polí, na němž je rozmístěný konečný kladný počet mincí. Mezi mincemi je však navíc položena zlatá medaile. Mince se posunují směrem doleva, nesmějí se přeskakovat ani umisťovat na sebe a ve chvíli, kdy je mince na políčku úplně vlevo, tak spadne do připraveného měšce. Hráči střídavě posunují mince i medaili a vítězí ten, který medaili dostane do měšce. Nalezení NIMu je shodné s *Mincemi na pásu,* opět nás budou zajímat mezery mezi dvojicemi objektů (první a druhý, třetí a čtvrtý atd., medaile se počítá jako mince). Pokud je objektů lichý počet, započítáme také mezeru mezi poslední mincí a polem s měšcem. Na obrázku je tedy vlastně NIM s počáteční pozicí 5-1-2.

10.9.5 Želvy

Obrázek 26: Želvy - počáteční pozice hry

Mějme v řadě za sebou kladné *n* želv, kdy některé leží a některé stojí (Obrázek 26). Hráči se střídají a želvy otáčejí. V jednom tahu si hráč vybere jednu želvu, která leží na zádech, otočí ji na nohy a pokud chce, ještě může otočit libovolnou želvu nalevo od té první, u které je jedno, jestli stojí nebo leží. Pokud budeme mít tedy například želvy jako na Obrázku 26 a první hráč otočí čtvrtou želvu zleva, může (ale nemusí) otočit i první, druhou nebo třetí želvu. Hra končí ve chvíli, kdy všechny želvy stojí a vítězí hráč, který otočil poslední želvu.

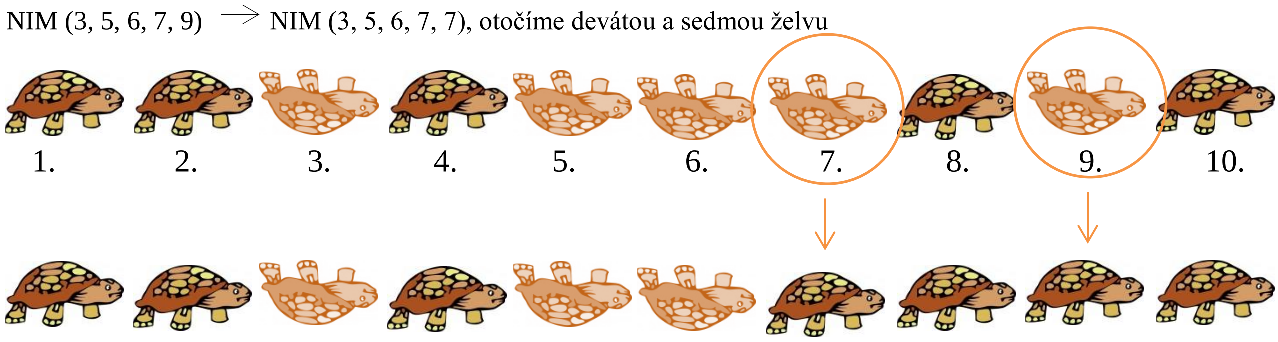
A kde je v této hře schovaný NIM? V želvách, které jsou otočené na zádech. Místo želvy na *n*-tém místě v řadě, je možné si představit hromádku NIMu o *n* sirkách. Želvy ležící na zádech na Obrázku 26 tedy tvoří NIM (3, 5, 6, 7, 9).

Po provedení NIM-součtu zjistíme, že je nenulový a pro tah do bezpečné pozice musíme z poslední hromádky odebrat dvě sirky, tzn. abychom dostali pozici 3-5-6-7-7. V řadě však stojí na každém místě právě jedna želva, nemůžeme mít dvě želvy, které by značily dvě hromádky o sedmi sirkách, protože sedmé místo v řadě je jen jedno.

V NIMu však platí pravidlo, že máme-li dvě hromádky o stejném počtu sirek, tak se hra nezmění, NIM-součet dvou stejných čísel je roven nule a jedná se tedy o bezpečnou pozici. Představme si to i tak, že pokud máme např. pozici 2-2, jeden hráč odebere na pozici 2-1, tak druhý tahem vezme také jednu sirku z druhé hromádky na pozici 1-1, čímž se sice zmenší počty sirek v obou hromádkách, ale zbytek hry to neovlivní. A právě této vlastnosti využijeme při otáčení želv.

V klasickém NIMu tedy používáme strategii „hromádku o velikosti ***v*** zmenšíme na hromádku o velikosti ***m***“, u želv ji budeme aplikovat jako „želvu na ***v***-té pozici otočíme na nohy a želvu na ***m***-té pozici převrátíme do opačné polohy, bez ohledu na to, zda byla původně nahoře nohama nebo krunýřem“. (Obrázek 27)

NIM (3, 5, 6, 7, 9) → NIM (3, 5, 6, 7, 7), otočíme devátou a sedmou želvu

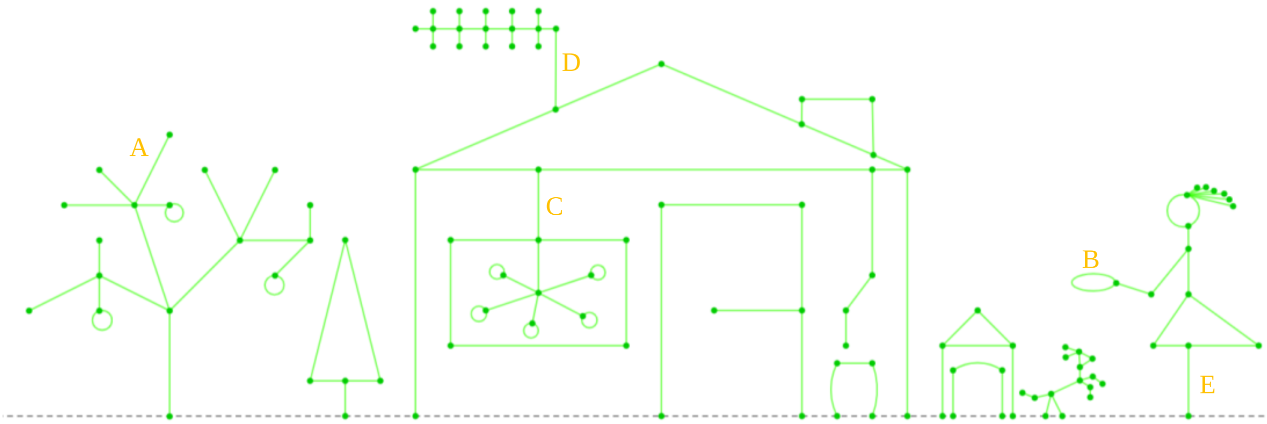


NIM (3, 5, 6) – což je bezpečná pozice dle Boutona

Obrázek 27: Želvy - bezpečná pozice

10.9.6 Green Hackenbush

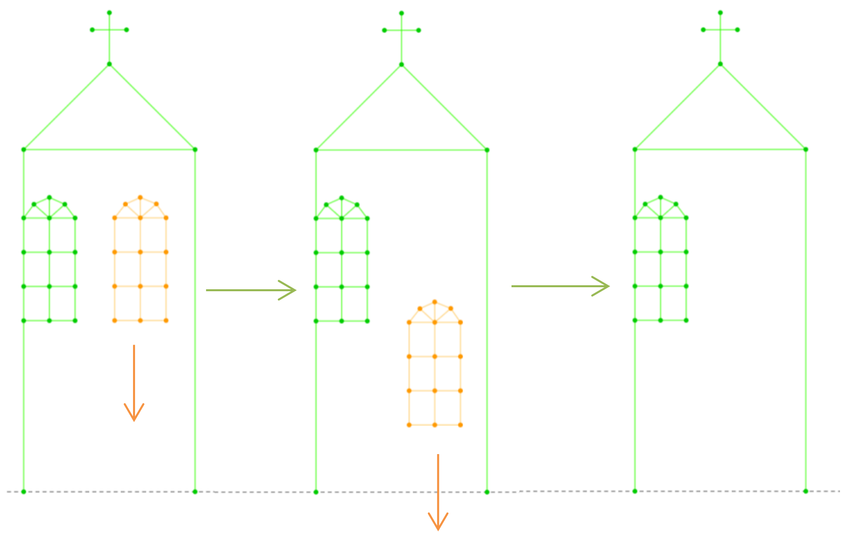
Green Hackenbush je hra, která se (na rozdíl od všech předchozích her a to klasických variant i NIMin her) nehraje se sirkami, mincemi, žetony, kameny ani s žádnými jinými předměty, ale se speciálními obrázky. (Obrázek 28) Každý obrázek hry Hackenbusch se skládá z konečného počtu barevných úseček, které jsou vzájemně spojeny uzly a všechny jsou nějakou cestou propojeny se speciálním bodem – kořenem. Jedná se – jinými slovy řečeno – o neorientovaný zakořeněný graf, ve kterém všechny hrany a uzly tvoří řetězce k jedinému vrcholu nazývanému kořen nebo země. Kořen (nebo země) je na obrázcích reprezentován čárkovanou čárou a i když se jedná o přímku, je nutné zem chápat jako jediný bod.



Obrázek 28: Green Hackenbush - modelový obrázek

10.9.6.1 Podoba obrázku vhodného ke Green Hackenbush

Každá hrana buď musí spojovat dva uzly, nebo tvoří smyčku kolem jednoho uzlu (Obrázek 28: žárovky na lustru). Uzly mohou být spojeny i více hranami (Obrázek 28: střecha), a proto v jednom obrázku může od jednoho uzlu existovat více cest k zemi. Základním pravidlem však je, že každý uzel musí být pomocí hran spojen se zemí, protože pokud by tvar „zůstal viset ve vzduchu“, můžeme to interpretovat tak, že zafunguje princip gravitace a celý objekt zmizí. Zelené okno na obrázku kostela je v pořádku, je připojeno k jedné stěně a tím nepřímo také k zemi. Na druhou stranu oranžové okno kostela není přichyceno k žádnému pevnému bodu, a proto by „spadlo“ a z obrázku zmizelo. (Obrázek 29)



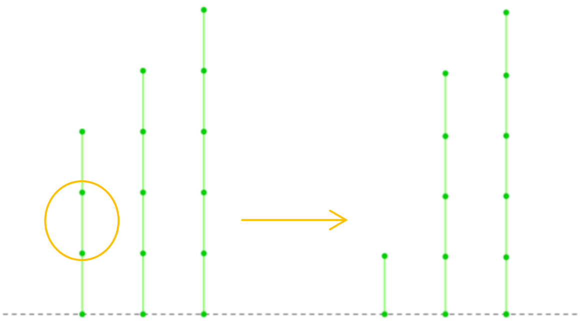
Obrázek 29: Green Hackenbush - vhodný obrázek

10.9.6.2 Pravidla Green Hackenbush

A v čem spočívá samotná hra? Hráči se střídají a v každém tahu postupně odstřihávají (umazávají, hackují, odstraňují…) nějaký segment grafu. Pokud se jedná o koncovou úsečku (v modelovém obrázku hrany označené písmeny A a B), zmizí pouze ona odstraňovaná hrana. Pokud však hráč odstřihne segment uvnitř řetězce, zmizí všechny části, které se „ocitnou ve vzduchu“, stejně jako tomu bylo u oranžového okna kostela. Pokud se z Modelového obrázku (Obrázek 28) odstřihne hrana C, zmizí celé okno včetně lustru, pokud se odstřihne hrana D, zmizí celá anténa a pokud by byla odstraněna hrana E, zmizí celá panenka. Vyhrává hráč, který odstraní poslední část obrázku.

Takto popsaná hra se nazývá Green Hackenbush, existují však ještě dvě varianty: Red-Blue Hackenbusch a Red-Blue-Green Hackenbusch. Obě varianty mají stejná pravidla týkající se podoby obrázků, ale každý obrázek se navíc skládá z úseček různých barev. U RBH každá barva připadá jednomu hráč a pouze úsečky své barvy může hráč odstraňovat. RBGH je složený z úseček tří barev. Modré a červené hrany patří jednomu nebo druhé hráči a zelené jsou neutrální. Hráč tedy ve svém tahu může odstřihnout hranu své barvy nebo hranu barvy zelené. Jelikož však pouze Green Hackenbush je nestrannou hrou a je jedinou variantou převoditelnou na NIM, budeme se dále zabývat pouze variantou GH. Než se však podíváme, jak NIM v obrázku najít, podíváme se na tzv. Bambusové stonky, které slouží jako úvod do hry GH a je to jeho jednoduchá verze, pro niž platí stejná pravidla jako pro následující složitější obrázky.

Bambusový stonek s n segmenty je příkladem lineárního grafu s n hranami spojeného s jedním koncovým uzlem (se zemí). Tah spočívá v tom, že odstřihneme libovolnou hranu a všechny hrany nad ní tím zmizí také. Hra následně končí ve chvíli, kdy jeden z hráčů odstraní poslední segment a vítězí. Každý stonek složený z n segmentů můžeme zmenšit na jakýkoli menší počet segmentů hodnot od $n-1$ do 0. Čímž je jeden stonek ekvivalentní s hromádkou NIMu. A hru budeme hrát podle strategie klasického NIMu. Levou část Obrázku 30 tedy můžeme vnímat jako ekvivalentní ke hře NIM (3, 4, 5). Pak již budeme postupovat stejně jako u NIMu, provedeme NIM-součet. U levé části lesa nám vyjde nenulový a potřebujeme odstřihnout hrany tak, aby po tahu zbyla bezpečná nulová pozice. Odstřihneme tedy druhý segment levého bambusového stonku, čímž zmizí i vrchní segment a zůstane pouze jeden, což již odpovídá nulovému NIM-součtu.



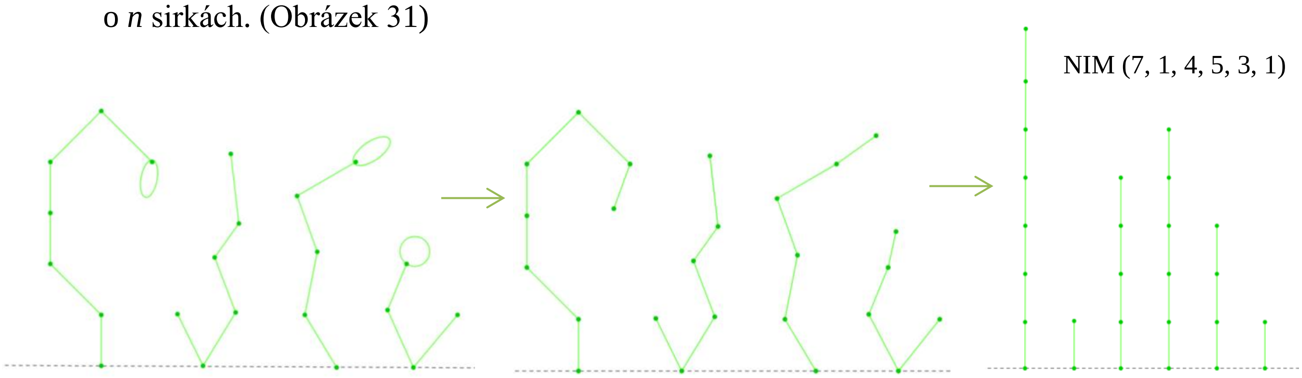
Obrázek 30: Green Hackenbush - les bambusových stonků

10.9.6.3 Úprava obrázku

Na bambusových stoncích jsme si ukázali, jak bude fungovat uplatnění NIMu u Green Hackenbush. Ale hrací obrázky nebudou složeny jen z bambusových stonků, jelikož jejich řešení je již jednoduchou záležitostí, bude hrací tendencí obrázky transformovat právě do této podoby. To ovšem bude muset být provedeno podle jistých pravidel. Řetězce totiž mohou být větvené do stromů, zacyklené i kombinované z větví a cyklů. Podívejme se tedy, jak obrázek převést na NIM.

10.9.6.3.1 Řetězce bez cyklů i větví

Tyto řetězce jsou v podstatě bambusové stonky. Smyčky na koncích řetězců být mohou, nejedná se totiž o žádný cyklus, ale pouze o jiné vyjádření hrany spojené dvěma uzly, které splývají v jeden bod, každou smyčku můžeme nahradit jedním segmentem. Problémem není ani spojení dvou stonků na zemi. Již jsme zmínili, že zem je nutné chápat jako jediný bod a de facto by tak všechny částí mohly být spojené do jednoho kořene. Obrázek bez cyklení tedy převedeme na NIM tak, že spočítáme hrany každé jednotlivé části. *M*-tá část o *n* segmentech bude odpovídat jedné *m*-té hromádce NIMu o *n* sirkách. (Obrázek 31)

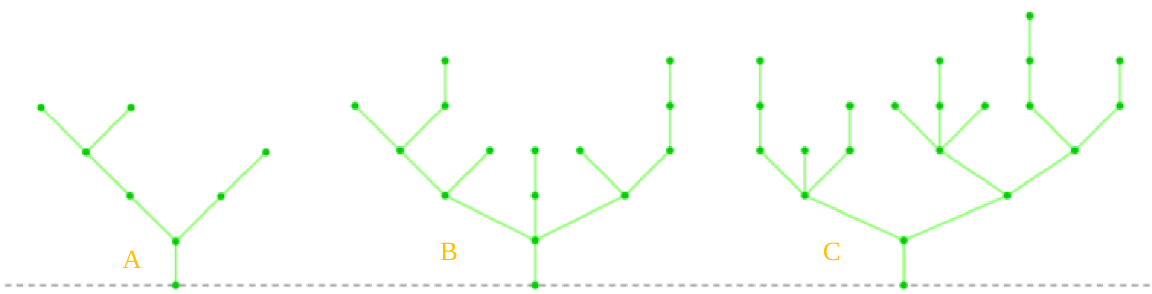


Obrázek 31: Green Hackenbush - bez cyklů a bez větvení, převedení na NIM

10.9.6.3.2 Řetězce s větvením – STROMY

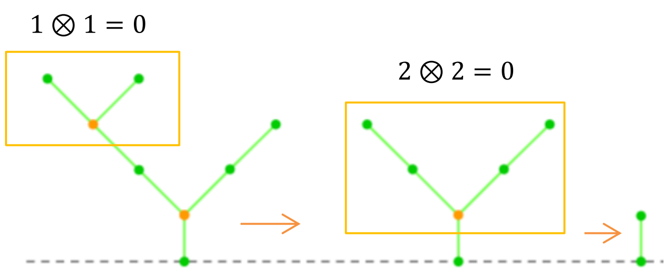
Zakořeněný strom je graf s jedním speciálním vrcholem (kořenem) a platí, že z každého koncového vrcholu vede jedinečná cesta k zemi. Tah spočívá v tom odstranit určitou hranu a vše, co je nad ní také zmizí. Každý strom odpovídá ekvivalentní hromádce NIMu, ale vzhledem k větvení je obtížnější nalézt její hodnotu. Aby bylo možné strom převést na bambusový stonek, využijeme tzv. Colon principle, který říká:

Větve, které se spojují v jednom uzlu, je možné nahradit jedinou větví (stonkem), jejíž velikost odpovídá NIM-součtu původních větví.



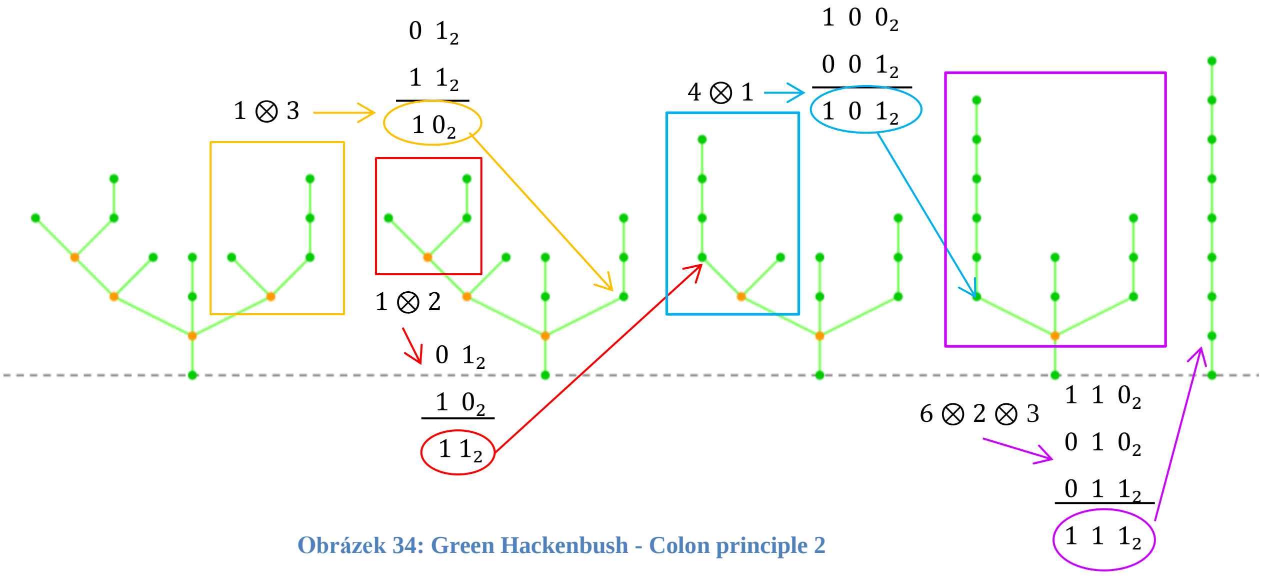
Obrázek 32: Green Hackenbush - Les větvených stromů

Začneme nejjednodušším stromem A z Obrázku 32, na němž si ukážeme aplikaci Colon principle. (Obrázek 33) Při převádění je nutné postupovat vždy od nejvyšších segmentů stromu. Označíme si všechny větvící body, vybere jeden nejvzdálenější a pro větve, které se v něm spojují, provedeme NIM-součet. Podle toho, jaká hodnota Nim-součtu vyjde, tak stejně dlouhým bambusovým stonkem pak nahradíme větve. Na obrázku A tedy vezmeme větvící bod vlevo nahoře. NIM-součet dvou stejných čísel je roven nule, proto nebudeme zakreslovat nic. Přejdeme k dalšímu větvícímu bodu, zopakujeme celý postup a zjistíme, že se jedná opět o NIM-součet rovný nule, proto i celé toto větvení nebudeme brát v úvahu, libovolné větvení ve tvaru písmene Y bude mít vždy nulový NIM-součet. Celý strom A můžeme tedy nahradit ekvivalentní hromádkou NIMu s hodnotou 1.



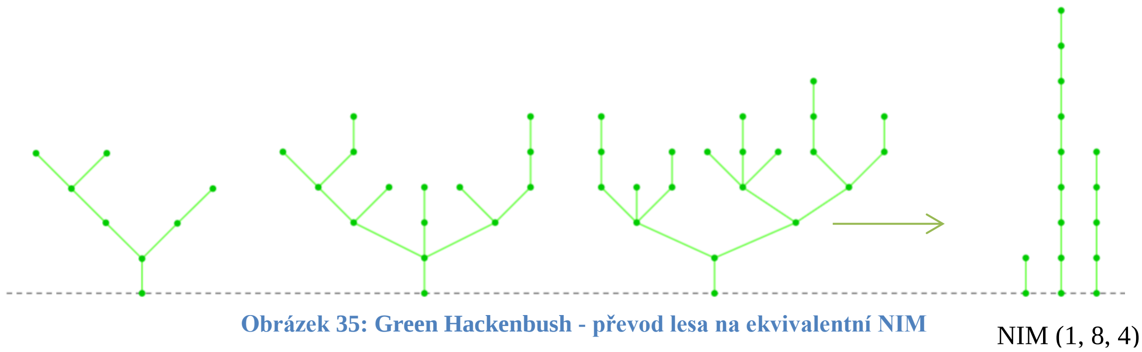
Obrázek 33: Green Hackenbush - Colon principle 1

Pro názornou ukázku *Colon principle* byl strom A příliš jednoduchý, protože sestával pouze ze symetrických větvení. Podívejme se tedy na úpravy stromu B. (Obrázek 34) Opět si vyznačíme větvící body a začneme například tím úplně vpravo. Spojují se v něm větve o velikostech 1 a 3, jejich NIM-součet je 2, proto původní dvě větve nahradíme stonkem se dvěma segmenty. Tento postup budeme opakovat tak dlouho, dokud všechny větvící body neodstraníme a ze stromu zbyde jeden bambusový stonek. V případě stromu B bude jeho velikost 8 segmentů.



Obrázek 34: Green Hackenbush - Colon principle 2

Ve chvíli, kdy převedeme stromy na NIM, pro výhru užijeme vítěznou strategii dle Boutona, pomocí NIM-součtu určíme bezpečnou pozici. Jelikož máme (Obrázek 35) po úpravách NIM (1, 8, 4), což je prohrávající pozice, musíme odebrat na pozici s nulovým součtem 1-5-4, tedy z prostřední hromádky 3 hrany.

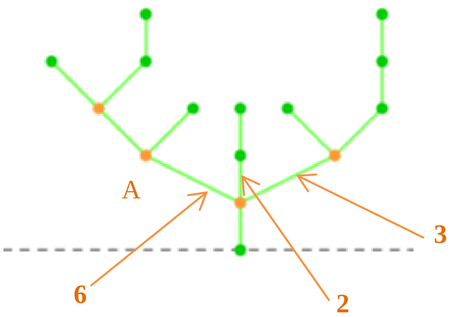


Obrázek 35: Green Hackenbush - převod lesa na ekvivalentní NIM

Ovšem nastane problém, kdy máme z *m*-té hromádky odebrat *n* sirek. Protože stromy máme sice převedené na ekvivalentní hromádky NIMu, ale odstřihovat musíme z původního obrázku, převedení slouží k odhalení tahů pro výhru.

Budeme tedy dále znovu pracovat s původním prostředním stromem. Zjistili jsme, že tento strom má v nejspodnějším větvícím bodě hodnotu 7, my však potřebujeme, aby měl pouze hodnotu 4. Musíme zjistit, které větve odstřihnout, aby jejich NIM-součet byl 4 a spolu s „kmenem“ pod větvícím bodem nám dal hodnotu NIM-součtu rovnu 5.

Podle postupného převádění víme, že levá větev má hodnotu 6, prostřední 2 a pravá 3 hrany a my musíme jednu z nich nějak změnit. Provedeme tedy postupně NIM-součty a budeme hledat změny, tak aby výsledek byl požadované hodnoty 4. Jelikož $6 \otimes 2 = 4$, jako první možnost je odstřižení celé pravé větve. Druhou možností jak táhnout, je odstřižení jednoho segmentu z prostřední větve, protože platí, že $6 \otimes 1 \otimes 3 = 4$.



Obrázek 36: Green Hackenbush - vítězné tahy

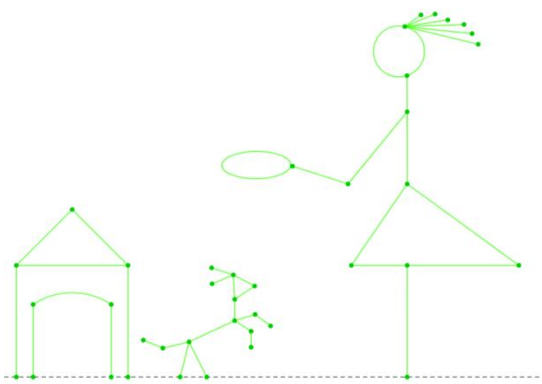
$$\begin{array}{ccc} 1\ 1\ 0_1 & & \mathbf{1\ 1\ 0_2} \\ 0\ 1\ 0_2 & \rightarrow & 0\ 0\ 1_2 \\ 0\ 1\ 1_2 & & \mathbf{0\ 1\ 1_2} \\ \hline 1\ 1\ 1_2 & & \mathbf{1\ 0\ 0_2} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \mathbf{1\ 1\ 0_1} & 1\ 0\ 1_1 \\ \mathbf{0\ 1\ 0_2} & \mathbf{0\ 1\ 0_2} \\ 0\ 0\ 0_2 & \mathbf{0\ 1\ 1_2} \\ \hline \mathbf{1\ 0\ 0_2} & \mathbf{1\ 0\ 0_2} \end{array}$$

Poslední možností je úprava levé větve. A i když dle v klasickém NIMu není možné hromádky zvětšovat, tak u Green Hackenbush je možné NIM-součet zvětšit a to paradoxně právě odebráním segmentů. Platí, že $5 \otimes 2 \otimes 3 = 4$ a zároveň platí, že $1 \otimes 2 = 3$. Třetí možnou úpravou je tedy odstřižení jednoduché hrany v bodě A. (Obrázek 36)

10.9.6.3.3 Řetězce s cykly

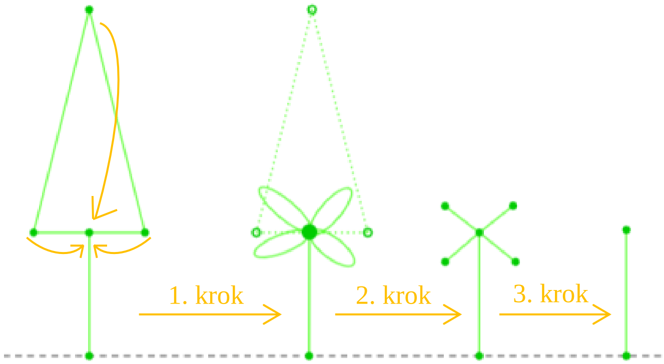
Třetím typem řetězců jsou řetězce obsahující cykly (uzly jsou spojeny více hranami), které na Obrázku 37 představují: střecha na psí boudě, hlava psa, dívčina sukně a hlava. Talíř, který drží dívka v ruce je pouze smyčka nikoli cyklus. My tedy budeme chtít cykly nahradit opět stromy (a následně bambusovými stonky), u kterých již



Obrázek 37: Green Hackenbush - řetězce s cykly

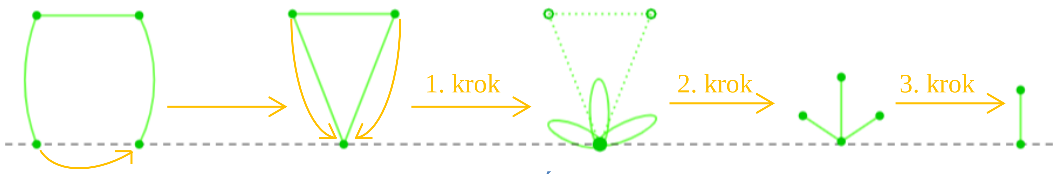
dokážeme jednoznačně určit hodnotu ekvivalentních hromádek NIMu. Abychom cykly nahradili větvemi stromu, budeme používat ***Fusion principle***, jenž říká: *Provedeme-li s vrcholy kteréhokoli cyklu fúzi, Sprague-Grundyova hodnota grafu se tím nezmění.* Díky tomuto principu můžeme cykly změnit na stromy, které již umíme upravit. A jak se tedy vypořádat s cykly? Budeme to demonstrovat na Obrázku 38, který představuje smrk z Modelového obrázku (Obrázek 28) z úvodu Green Hackenbush.

V prvním kroku u cyklu, který chceme odstranit, spojíme všechny body do jednoho, hrany mezi body se ohnou a my je nahradíme smyčkami, čímž nám vznikne jakási květina. V druhém kroku pak každý lístek nahradíme hranou, kdy se společný bod stane větvícím bodem a lístky květiny budou větvemi stromu. Třetím krokem bude úprava stromu do podoby bambusového stonku, kterýžto mechanismus již známe.



Obrázek 38: Úprava cyklu 1

Na Obrázku 39 je ilustrována úprava sudu z Modelového obrázku (Obrázek 28). Jak je vidět, původní sud je se zemí spojen dvěma body, mohlo by se etedy zdát, že se nejedná o cyklus, ale jak již bylo zmíněno výše, zemi je třeba chápat jako jediný bod. Proto než přejdem k prvnímu kroku úpravy cyklu, nejprve u sudu spojíme volné vrcholy dotýkající se země v jeden, čímž nám vznikne trojúhelník postavený na jeden vrchol. Další postup bude stejný jako u smrku na Obrázku 38.

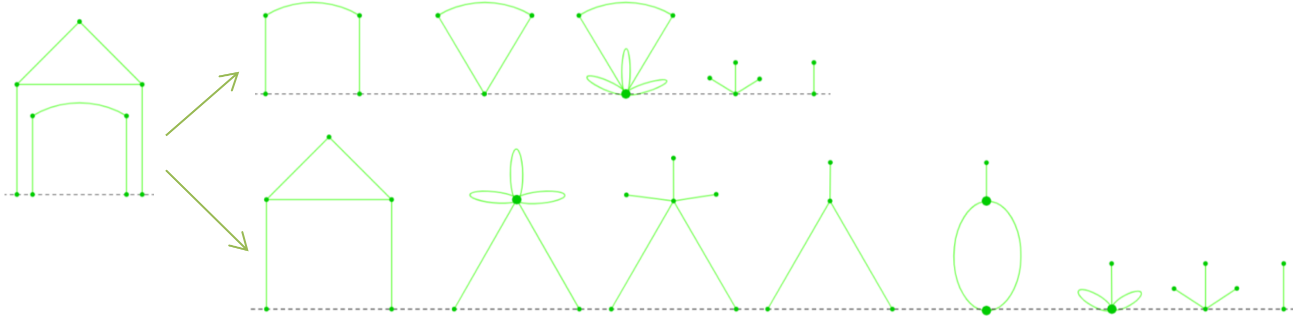


Obrázek 39: Úprava cyklu 2

Obecně lze tedy říci, že cyklus se sudým počtem hran můžeme nahradit pouze jediným vrcholem, protože hodnota NIM-součtu sudého počtu stejných čísel je nulová a tím sčítané hrany mizí. Cyklus s lichým počtem hran se nahradí jedním segmentem, protože NIM-součet lichého počtu stejných čísel bude roven hodnotě sčítaného čísla.

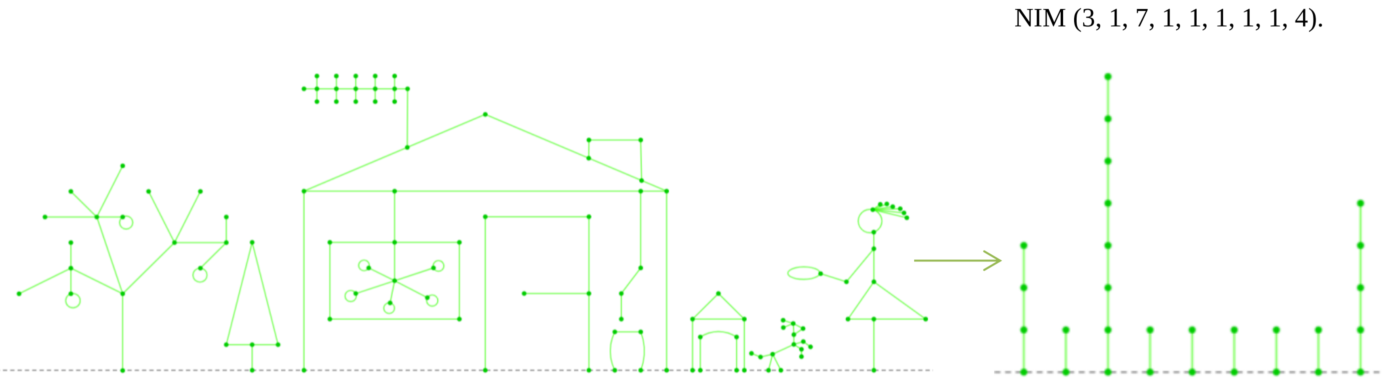
10.9.6.3.4 Obrázky s více dotyky země

Jako poslední se podívejme na obrázky, které dle logických souvislostí patří k sobě (všechny části domu). Na základě obecných konvencí více dílů patří k sobě, ale v rámci Green Hackenbush musíme vnímat každou část jako samostatnou jednotku, jako samostatný bambusový stonek, strom nebo cyklus, a to proto, aby bylo možné jednoznačně určit hodnoty ekvivalentních hromádek NIMu. Ukažme si to na příkladu psí boudy z Modelového obrázku (Obrázek 40). Na první pohled jde o jediný obrázek, my ho však musíme analyzovat ve dvou částech – část vstupu a část obrysu se střechou.



Obrázek 40: Obrázek s více dotyky země - převedení

Na závěr se tedy vraťme k Modelovému obrázku pro Green Hackenbush, když aplikujeme všechny úpravy, dostaneme NIM (3, 1, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 4). (Obrázek 41)



Obrázek 41: Převedený Modelový obrázek

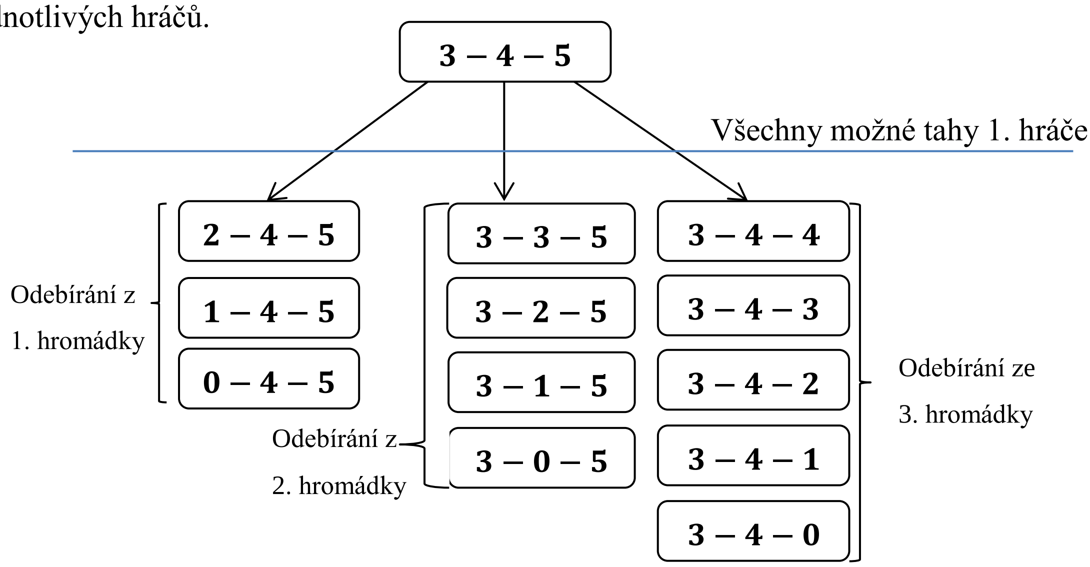
Praktická část – NIM (3, 4, 5)

Následující části práce se budou zabývat konkrétní podobou hry NIM a to NIM (3,4,5). Tuto hru jsme sehráli s žáky šestého ročníku ZŠ (podrobnosti výzkumu budou uvedeny níže) a jednotlivé hry byly zaznamenány. Nejprve hru teoreticky rozebereme z pohledu vítězné strategie, určíme všechny možnosti tahů a potom na základě prakticky odehraných her zkusíme zjistit, zda se u některých žáků objevuje tendence k intuitivnímu užívání mechanismů vítězné strategie.

11 Rozbor NIM (3, 4, 5)

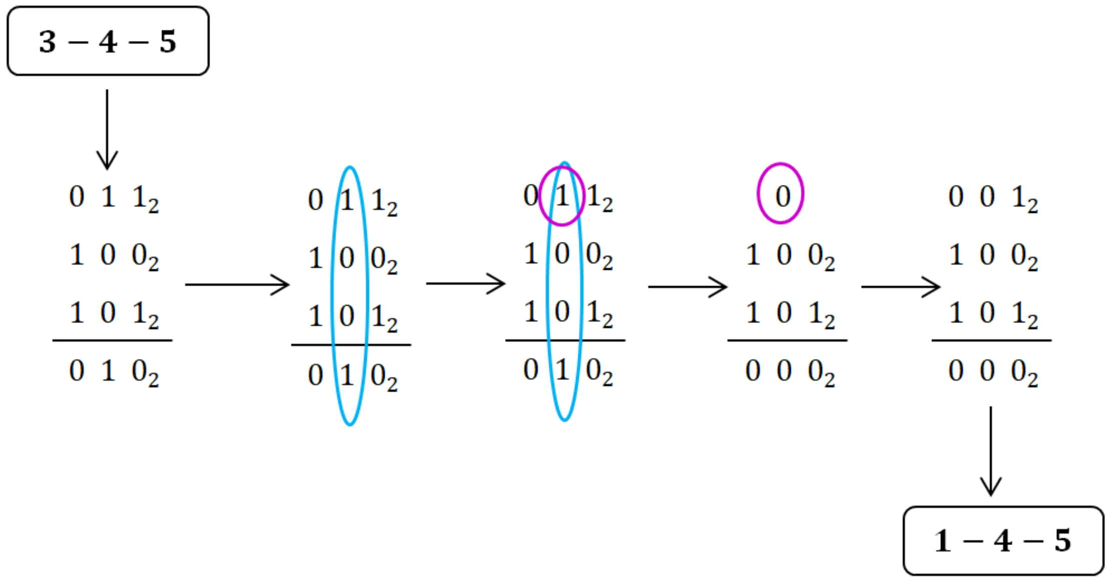
Pro potřeby výzkumu jsme zvolili podobu NIM (3, 4, 5) a to z několika důvodů. Nejenže je tato verze je asi nejznámější podobou hry NIM, ale také proto, že pro zjištění vítězné strategie je zapotřebí odhalení poměrně malého počtu bezpečných pozic. Nejvýznamnějším důvodem je však fakt, že počáteční pozice je pozicí prohrávající a není tudíž předem dané vítězství prvního nebo druhého hráče. Protože i když ve výzkumu a praktickém využití nepředpokládáme hráčskou znalost mechanismu vítězné strategie, bylo hlavní myšlenkou nechat otevřenou možnost výhry pro prvního i druhého hráče. V neposlední řadě je také podstatný celkový počet tahů. Tuto variantu NIMu lze dohrát v nejméně třech tazích a nejvýše ve dvanácti tazích. Tento malý počet tahů je významný pro další analýzu, ale je zároveň poměrně snadný pro záznam hry.

Mějme tedy NIM (3, 4, 5) a pokusme se ho rozebrat podle možných tahů jednotlivých hráčů.



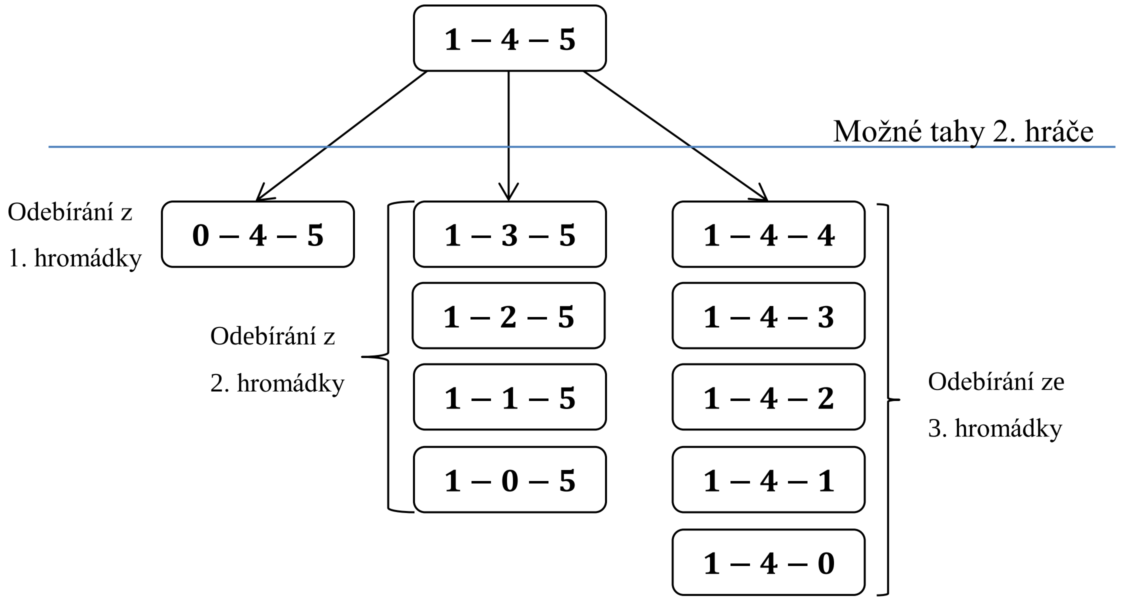
Obrázek 42: Všechny možné tahy NIM (3, 4, 5) – první hráč

Obrázek 42 ukazuje, že první hráč má dvanáct možných tahů. Cílem hry je vyhrát, proto se budeme dále soustředit na bezpečné pozice pro vítěznou strategii. Potřebujeme tedy najít ty pozice, jejichž NIM-součet bude roven nule. Jak postupovat jsme ukázali výše a nyní tento mechanismus aplikujeme na NIM (3, 4, 5). (Obrázek 43)



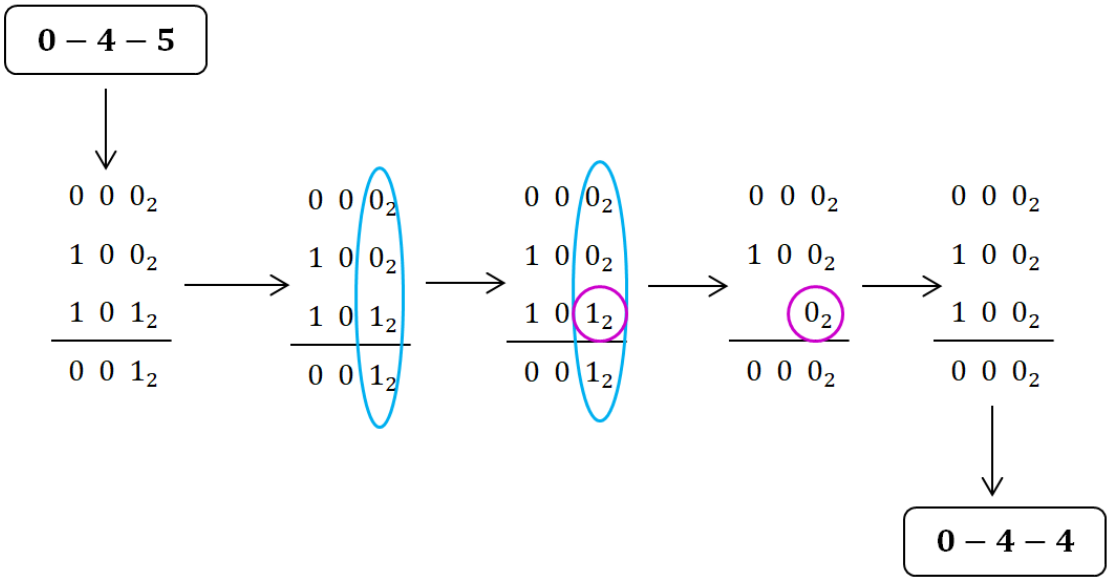
Obrázek 43: Bezpečná pozice 1-4-5

Zjistili jsme, že v dané hře je pouze jedna možnost bezpečné pozice, tedy že NIM-součet roven nule je u pozice 1-4-5. Jelikož chceme zjistit, jak vyhrát, předpokládejme tedy, že první hráč odebral právě tímto způsobem. Obrázek 44 ukazuje, jaké jsou všechny možné tahy pro druhého hráče.



Obrázek 44: Všechny možné tahy – druhý hráč

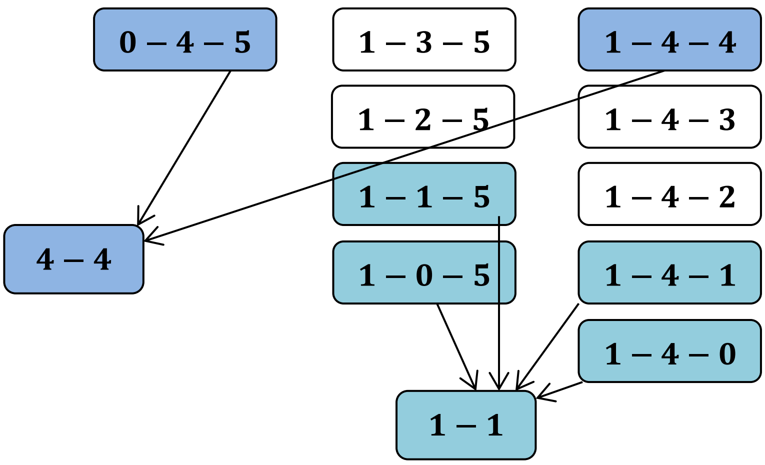
Jak plyne z charakteristiky bezpečné pozice, tahy druhého hráče vedou tedy vždy do pozic nebezpečných. Abychom dodrželi trend vítězné strategie, budeme dále uvažovat o tazích vedoucích opět do bezpečných pozic, všechny ostatní možnosti zanedbáme. Vezmeme libovolný možný tah a opět zjistíme, jak získat bezpečnou pozici.



Obrázek 45: Bezpečná pozice 4-4

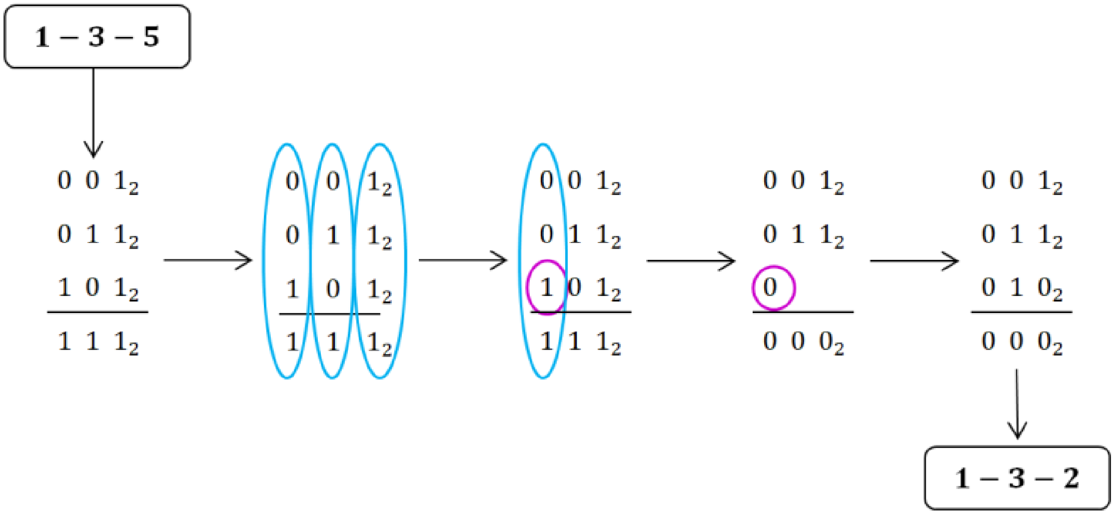
Z Obrázku 45 je patrné, že bezpečnou pozicí, kterou jsme získali po aplikaci nulového NIM-součtu, je pozice symetrická. Již výše jsme ukázali, že symetrické pozice jsou opravdu pozicemi vyhrávajícími, první hráč po odebrání na symetrickou pozici vyhraje tzv. zrcadlovými tahy, což znamená, že bude kopírovat tahy svého protihráče. V následujících schématech tedy již nebudeme uvádět další tahy ze symetrických pozic, protože bychom dospěli pokaždé ke stejnému výsledku – odebrání do symetrické pozice dle hodnot prvního odebrání.

Podíváme-li se na Obrázek 46, vidíme, že u šesti tahů (z celkem deseti možných) bude první hráč odebírat do symetrických pozic formy 1-1 nebo 4-4.



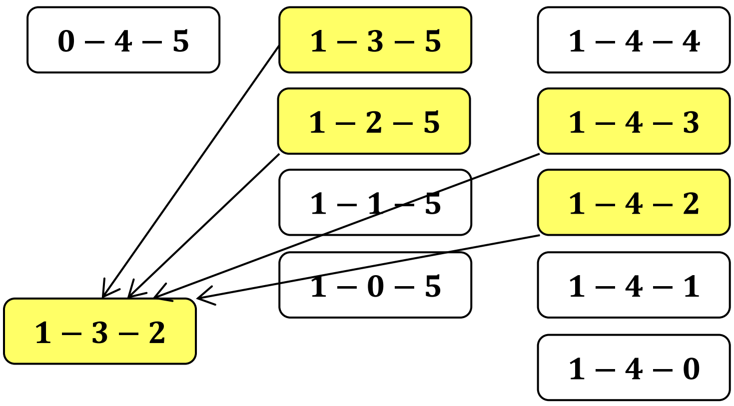
Obrázek 46: Tahy do symetrických pozic

Zbývá tedy najít bezpečnou pozici pro zbylé čtyři možné tahy. Budeme postupovat jako výše. Vezmeme libovolný tah a pomocí nulového NIM-součtu určíme bezpečnou pozici. (Obrázek 47)



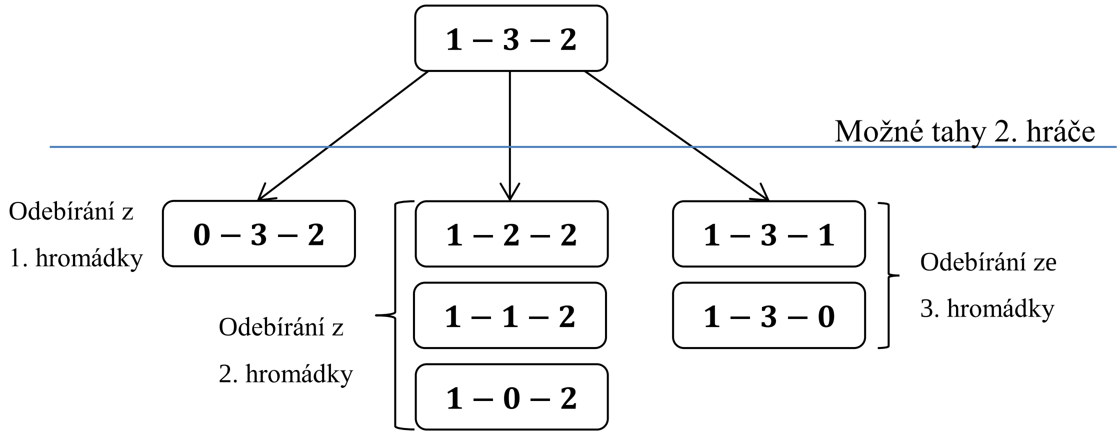
Obrázek 47: Bezpečná pozice 1-3-2

Bezpečná pozice 1-3-2 je bezpečnou pozicí pro všechny zbylé tahy, protože jak je vidět na Obrázku 48, ze všech číselných kombinací, lze vždy vytvořit právě tuto pozici. Máme tedy nalezené bezpečné pozice ze všech tahů.



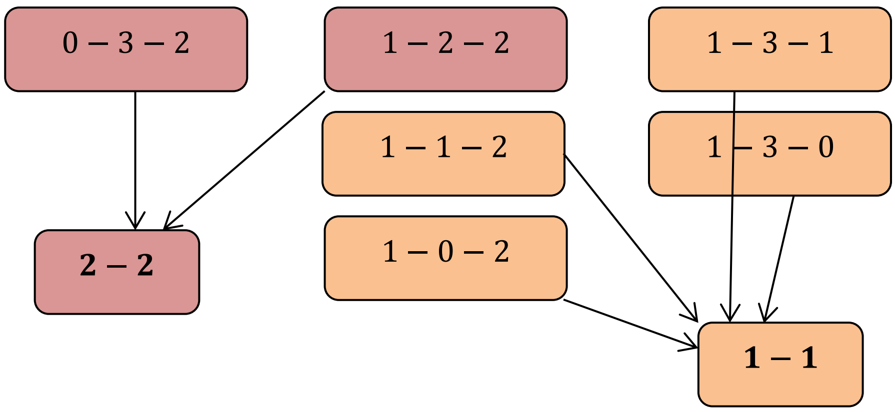
Obrázek 48:Tahy do bezpečné pozice 1-3-2

Tahy prvního hráče jsme tedy určili ze všech výchozích pozic tak, aby odpovídaly vítězné strategii. Opět budeme předpokládat, že první hráč bude skutečně odebírat nalezenými způsoby. Postoupíme-li ve hře dále, zobrazíme všechny další možné tahy druhého hráče, které budou opět do nebezpečných pozic a jsou zobrazeny na Obrázku 48.



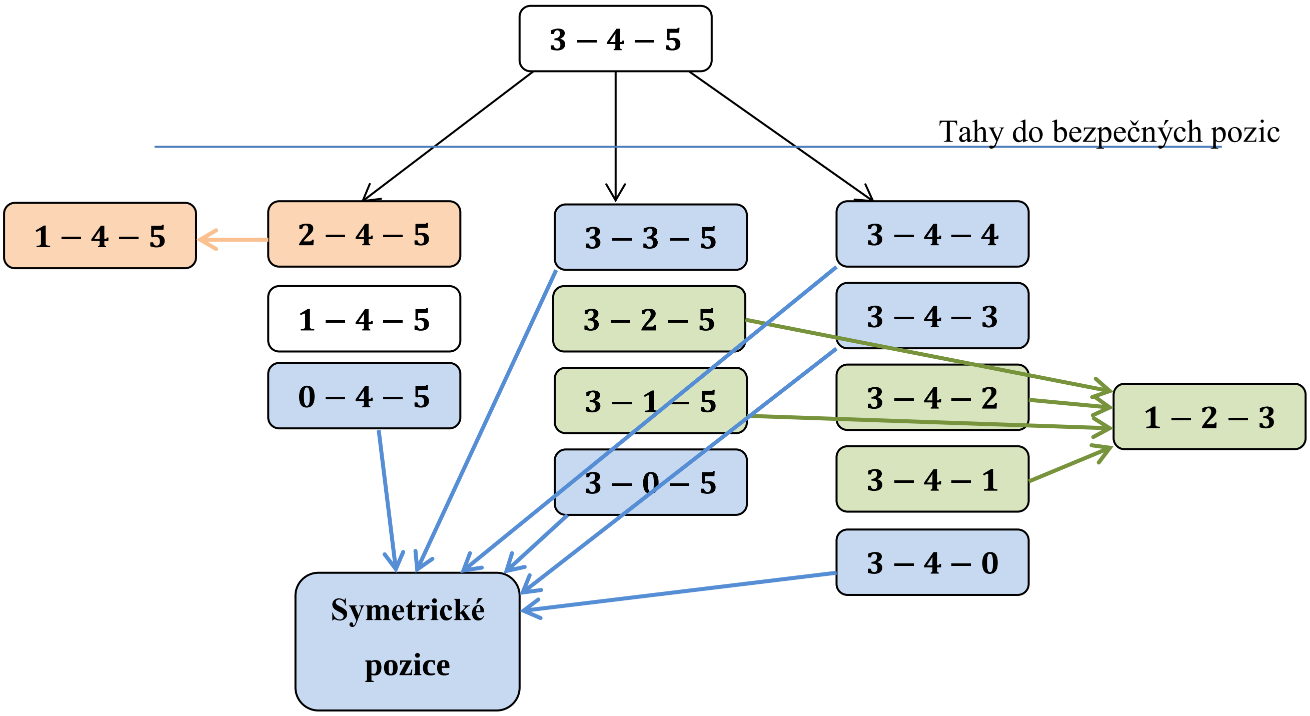
Obrázek 49: Možné tahy druhého hráče z pozice 1-3-2

Obrázek 49 předkládá všechny možné tahy druhého hráče v tomto tahu hry. V další analýze musíme opět zjistit, jak musí hrát první hráč, chce-li vyhrát. Podíváme-li se však, jaké pozice zůstaly ve hře, vidíme, že již nemusíme provádět další Nim-součet. Všechny pozice sestávají již pouze ze dvou hromádek sirek a v tom případě bezpečnou pozici obsadíme odebráním na pozici symetrickou nebo ze tří hromádek tvořených ovšem pouze dvěma vzájemně různými počty sirek 1-2-2, 1-1-2 a 1-3-1. I tyto pozice v rámci vítězné strategie směřují na symetrickou pozici. (Obrázek 50)



Obrázek 50: Tahy do symetrických pozic 2-2, 1-1

Pokud tedy shrneme všechna předchozí schémata, tak v průběhu celé hry jsou podstatné symetrické pozice a pozice 1-4-5, 1-3-2. (Obrázek 51) U vyhodnocení výzkumu tedy budeme tyto pozice vyhledávat a sledovat.



Obrázek 51: Tahy do bezpečných pozic

12 Výzkum

V poslední části práce se podíváme na NIM (3, 4, 5) z praktického hlediska. Bylo odehráno několik partií hry s žáky ZŠ a nyní se je pokusíme analyzovat z pohledu vítězné strategie.

12.1 Cíl výzkumu

Cílem výzkumu je zjistit, zda se u žáků projevuje tendence k využívání vítězné strategie, lépe řečeno tendence k objevení a užívání některých bezpečných pozic. Z kompletního rozboru všech možných pozic NIMu (3, 4, 5) vyplývá, že v celé hře existuje celkem 6 výherních pozic – dvě nesymetrické (1-4-5 a 1-2-3) a čtyři symetrické (1-1, 2-2, 3-3 a 4-4).

Jelikož k pozicím 1-4-5 a 1-2-3 lze bezpečně dospět díky Nim-součtu, nepředpokládá se, že by se u žáků objevovala tendence těchto pozic užívat. Protože – jak již bylo ukázáno výše – NIM-součet je možné určit pouze na základě znalosti dvojkové soustavy a tato učební látka nespadá do kurikula šestého ročníku, v němž byl výzkum proveden. Možností, jak určit právě tyto konkrétní nesymetrické pozice jako pozice bezpečné (a tudíž i výherní) bez znalosti vyjádření čísel v binární soustavě, je její odhalení na základě většího počtu odehraných her. Jelikož však počet odehraných partií není zase natolik obsáhlý, není tedy intuitivní objevení těchto pozic a jejich následná správná aplikace do mechanismu vítězné strategie příliš pravděpodobná.

U symetrických pozic však předpokládáme opačný trend, tedy že i na základě poměrně malého množství (klidně i jediné) odehraných partií by někteří žáci mohli objevit důležitost symetrických pozic a zajistit si tak vítězství. Ve hře je možné odebírat na pozice 4-4, 3-3, 2-2 a 1-1 a za nejzásadnější považujeme pozici 1-1. Protože pokud se někde objeví takové tahy, aby po jejich konci zůstala na stole pozice 1-1, je pravděpodobné, že žák chápe důležitost symetrické pozice 1-1. U pozic 2-2, 3-3 a 4-4 již předpokládáme výskyt méně frekventovaný, přestože se jedná o pozice symetrické, ale predikujeme, že jakmile se jedná o čísla větší než jedna, nastává pro žáky obtížnější uvažování, přece jen se se hrou NIM poprvé setkali až při výzkumu a mechanismus zrcadlových (tzv. „okopírovaných“) tahů je v rámci rozsahu odehraných her při výzkumu pro žáky obtížněji odhalitelný než odebírat přímo do pozice 1-1.

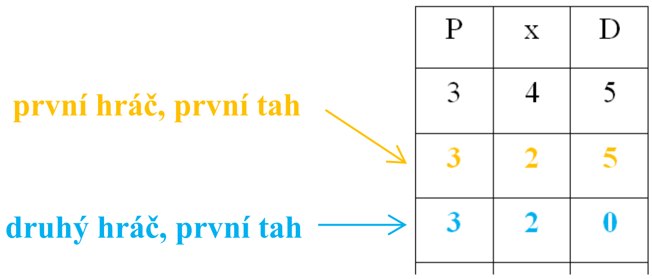
12.2 Záznam partií

Aby bylo možné odehrané partie analyzovat bylo nezbytné je důkladně zaznamenat. Jelikož celý NIM (3, 4, 5) lze odehrát nejméně ve třech a nejvíce ve dvanácti tazích, byla vytvořena záznamová tabulka o třech sloupcích a čtrnácti řádcích. Kdy první řádek označuje dvojici hráčů a začínající hráč se zapisuje vlevo od písmena x. Druhý řádek označuje jednotlivé hromádky sirek a zbylých dvanáct řádků odpovídá případným dvanácti tahům hry. Liché řádky pak patří tahům začínajícího hráče a sudé řádky odpovídají tahům druhého hráče. Dále byly navrhnuty dva možné způsoby zápisu jednotlivých tahů.

	x	
3	4	5

Tabulka 15: Záznamová tabulka

První způsob byl takový, že do odpovídajícího řádku se zapíše stav sirek po ukončení tahu. Pokud tedy hráč v prvním tahu odebere dvě sirky z prostřední hromádky čtyř sirek, do tabulky se do druhého prvního prázdného řádku zapíše pozice 3-2-5. V druhém tahu odebere hráč pět sirek z pravé hromádky pěti sirek a zapíše se do dalšího prázdného řádku 3-2-0. (Obrázek 52)



Obrázek 52: První způsob záznamu partie

Druhý možný způsob záznamu hry vypadá následovně. Pokud hráč v prvním tahu odebere z levé hromádky tří sirek všechny sirky, do prvního volného řádku do sloupce pod číslem tři zapíše číslici tři. Druhý hráč ve svém prvním tahu vezme jednu sirku z pravé hromádky pěti sirek, pak do dalšího prázdného řádku napíše číslici dvě tak, aby byla umístěna do sloupce pod číslem čtyři. Další tah prvního hráče bude odebrání tří sirek z prostřední hromádky čtyř sirek, pak do třetího volného řádku do prostředního sloupce bude zapsána číslice 3. (Obrázek 53)

	P	x	D
	3	4	5
první hráč, první tah →	3		
druhý hráč, první tah →			1
první hráč, druhý tah →		3	

Obrázek 53: Druhý způsob záznamu partie

12.3 Jak výzkum probíhal

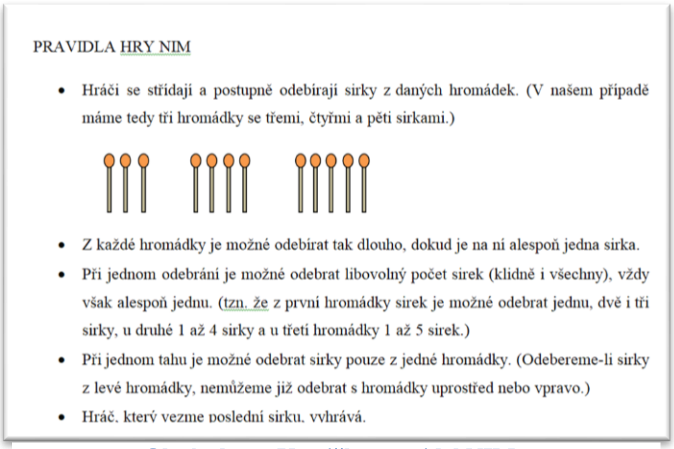
Výzkum se uskutečnil v prosinci 2020 v posledním předvánočním týdnu ve třídě 6. B Základní školy T. G. Masaryka. Původně jsme chtěli výzkum provést ve více ročnících ZŠ s žáky různých věkových skupin a vědomostních znalostí. Vzhledem k epidemiologické situaci a omezené docházce žáků do škol byl nakonec výzkum proveden pouze v šestém ročníku. Ale alespoň se podařilo ho uskutečnit. Paní učitelka J. V. nám umožnila přístup do dvou vyučovacích, jejichž obsah jsme věnovali právě odehrání NIMu.

Na úvod jsme žáky seznámili s tím, co budou konat. Aby byla udržena jejich pozornost, pojali jsme výzkum jako turnaj, kdy se vítězem stane ten žák, který bude mít nejvíc vítězství z odehraných partií. Pokud by nastala rovnost počtu vítězných partií, odehrála by se ještě jedna série her, kdy by zůstal pouze jeden celkový vítěz

Jelikož jsme předpokládali, že hrát hru a zároveň zapisovat její průběh by mohlo být obtížné, rozdělili jsme žáky do skupin po 3-4 hráčích, kdy vždy dva hrají partii a jeden (případně dva) zapisuje její průběh. Ukázalo se, že tento krok byl velmi prozíravý, protože i když se zápisu hry věnoval vždy nehrající žák, i tak nastávalo značné množství obtíží. Ve třídě bylo v okamžiku výzkumu přítomno 23 žáků, po rozdělení vzniklo pět skupin po 3 hráčích a 2 skupiny po čtyřech hráčích. Jedna čtyřčlenná skupina se utvořila z žáků, kteří „zbyli“[14] a s touto skupinou zůstala hrát paní

[14] Nejednalo se o žáky vyloučené z kolektivu či jinak znevýhodněné, ale jelikož se výzkum odehrával v prosinci a třída de facto teprve v září vznikla, protože žáci byly složení z původní kmenové třídy a žáků

učitelka J. V. Tedy nikoli že by se přímo zapojila do jednotlivých partií, ale zastávala podporu při zápisech jednotlivých her.[15]


PRAVIDLA HRY NIM

- Hráči se střídají a postupně odebírají sirky z daných hromádek. (V našem případě máme tedy tři hromádky se třemi, čtyřmi a pěti sirkami.)
- Z každé hromádky je možné odebírat tak dlouho, dokud je na ní alespoň jedna sirka.
- Při jednom odebrání je možné odebrat libovolný počet sirek (klidně i všechny), vždy však alespoň jednu. (tzn. že z první hromádky sirek je možné odebrat jednu, dvě i tři sirky, u druhé 1 až 4 sirky a u třetí hromádky 1 až 5 sirek.)
- Při jednom tahu je možné odebrat sirky pouze z jedné hromádky. (Odebereme-li sirky z levé hromádky, nemůžeme již odebrat s hromádky uprostřed nebo vpravo.)
- Hráč, který vezme poslední sirku, vyhrává.

Obrázek 54: Kartička pravidel NIMu

Po rozdělení do skupin jsme si s žáky vysvětlili pravidla, která byla napsána na tabuli a také ještě každá skupina dostala dva výtisky kartiček s pravidly (Obrázek 54), aby je měli při ruce a mohli dle potřeby kdykoli nahlédnout.

Abychom se ujistili, že všichni žáci chápou hru, herní systém a především záznam jednotlivých partií, odehráli jsme modelově dvě partie na tabuli. Nakreslili jsme si na tabuli základní pozici 3-4-5 a počty odebíraných sirek v jednotlivých tazích jsme postupně umazávali houbou a zaznamenávali do záznamové tabulky překreslené na tabuli. Předložili jsme žákům oba možné způsoby záznamu hry a nechali na nich, který si zvolí a budou využívat.

Jelikož jsme NIM žákům prezentovali jak „Odebírání sirek“ (což je nejznámější podobou hry) použili jsme sirky také při hře. Upozornili jsme žáky na opatrnost při manipulaci s nimi. Ale všechno proběhlo bez problémů a počet sirek rozdaný pře zahájením her se nám zase na konci vrátil.

Po poučení o bezpečnosti bylo každé skupince rozdáno 12 sirek a následovalo několik cvičných partií, kdy si žáci zatím bez zápisu zkoušeli odehrát NIM, aby se seznámili se hrou a zjistili, zda chápou pravidla. V této fázi nenastaly žádné obtíže.

Poslední částí výzkumu bylo odehrání několika partií již se zápisem průběhu hry do záznamových tabulek.

z dalších spádových škol, nebyly ještě plně vybudovány vztahy mezi žáky. Na jejichž budování se také podepsala pandemická situace a střídavá přítomnost ve škole.

[15] Také proto záznamy této jediné skupiny jsou kompletní a obsahují všechny odehrané partie.

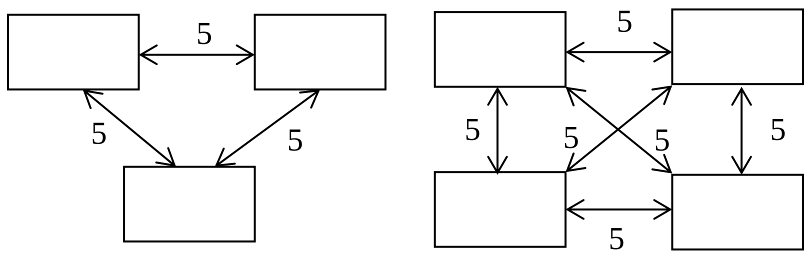
12.4 Herní systém

Jak již bylo zmíněno výše, pro udržení žákovské motivace byl NIM hrán formou turnaje a hledal se hráč s nejvyšším počtem vítězných her. Výsledek všech her se zjišťoval jako globální údaj, ale jinak každá skupina působila jako samostatná jednotka.

Skupiny byly složené ze tří nebo čtyř hráčů, v jednom však okamžiku hrála pouze jedna dvojice a třetí hráč měl funkci zapisovače průběhu hry. (U čtyřčlenné skupiny byli zapisovači dva.) Při přípravě materiálů jsme předpokládali, že kdyby dvojice měla hrát a zapisovat tahy v jenom okamžiku, mohlo by to být pro žáky obtížné. A při cvičných partiích se tento predikát potvrdil, někteří žáci vyzkoušeli provádění obou činností najednou, ale posléze sami usoudili, že je to nad jejich síly.

V každé skupině se hrající dvojice a zapisovač střídali a na základě turnajového systému "každý s každým" měla každá dvojice odehrát pět partií, kdy dvakrát začínal jeden hráč, dvakrát druhý hráč a pátou hru začínal ten, jenž vyhrál „kámen, nůžky, papír". Rovné počty partií určující hráči začínat hru z prvního nebo druhého místa jsme zavedli z důvodu, aby každý hráč byl v pozici začínajícího i druhého hráč. A aby vzhledem k turnajové formě bylo možné určit vítěze v každé dvojici (i když pro globální výsledek určení dílčích vítězů důležitost nemělo), byla přidána ještě pátá hra. Což bylo pro zajištění větší atraktivity pro žáky, protože soutěživost je přirozenou vlastností a udržovala žáky v pracovním napětí tak, aby opravdu poctivě odehráli všechny potřebné partie a důsledně je zaznamenávali. Vítěze jednotlivých skupin a ani celkového vítěze do výzkumu nebudeme uvažovat, vzhledem k našim cílům to není nezbytné.

Pro snazší orientaci v již odehraných partiích – především u čtyřčlenných skupin – měla každá skupina k dispozici předpřipravené schéma. (Obrázek 55) Do prázdných rámečků každý hráč vyplnil jméno (či inicály, přezdívku nebo jiný identifikační prvek) a schéma je následně navádělo, jak utvořit dvojice tak, aby hráli všichni všechny potřebné partie.



Obrázek 55: Pomocné schéma pro hru ve skupinách

Je zřejmé, že skupina se třemi hráči by měla mít všechny hry teoreticky splněné dříve než skupina čtyřčlenná. Proto byla dána možnost, že pokud mají všechny dvojice v dané skupině odehrané a zapsané všechny požadované partie, mohou hrát i další hry. Vždy ale v násobcích sudých čísel, proto aby zůstala zachována možnost určit vítěze v každé skupině. Pokud tedy měla tříčlenná skupina odehráno kompletně všech 15 partií, mohli hráči pokračovat dále, ale museli v každé dvojici odehrát 2, 4, 6, 8 atd. her. Čtyřčlenná skupina musela odehrát partií 30 her, ale i ona měla samozřejmě také otevřenou možnost hraní partií navíc.

V přecházejícím oddíle jsme vyložili dva způsoby, jak zaznamenávat tahy v každé partii. Oba způsoby jsme následně při ukázce modelové hry na počátku výzkumu žákům ukázali, vysvětlili jejich fungování a nechali na jejich volbě, který způsob budou používat. První způsob se zaznamenáváním konkrétních pozic jsme považovali za jednodušší, ale k našemu poměrně značnému překvapení všechny skupiny zvolily způsob druhý se zapisováním počtu odebraných sirek.

V tomto okamžiku bylo zajímavé sledovat, jak si některé skupiny vytvořily nápovědu pro snazší orientaci při zápisu tahů. Jedna skupina si na hrací plochu pod odpovídající hromádky napsala číslice 3, 4 a 5, čímž v průběhu hry neztratila přehled, do kterého sloupce mají zapisovat úbytky. Druhá skupina si označila hrací plochu pod hromádkou se třemi sirkami červenou barvou, hromádku se čtyřmi sirkami modrou barvou a hromádku s pěti sirkami barvou černou a nad sloupce s odpovídajícími čísly v záznamových tabulkách odpovídajícími barvami. Třetí skupina si nápovědu utvořila tak, že zapisovač měl ruku položenou u hromádky s původně pěti sirkami a hráči mu sami hlásili počty odebraných sirek v jednotlivých tazích a to tak, že vždy řekli číslo 3, 4 nebo 5 podle konkrétní hromádky a hodnotu odebraných sirek př. tři-dva, pět-pět, čtyři-tři atd. Je zajímavým faktem, že i když během her hráči často ztráceli orientaci, kolik bylo původně v kterém sloupečku sirek, žádná skupina nezměnila systém záznamu hry a to ani přes upozornění na tuto možnost.

12.5 Analýza

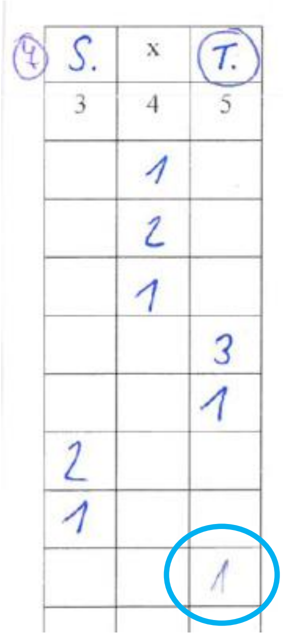
Po provedení výzkumu bylo nezbytné provést analýzu všech zaznamenaných her, aby bylo možné celý výzkum vyhodnotit. Dle nastaveného hracího systému v jednotlivých herních skupinách byla četnost materiálové základny rovna 135 odehraným hrám. Protože i když byla žákům dána možnost hrát více partií, nepředpokládali jsme, že by ji využili.

12.5.1 Vyřazení nepoužitelných záznamů

V první řadě bylo nutné projít všechny záznamy her a vyřadit ty bez korektního záznamu, protože jsme nepředpokládali, že by bylo možné použít všechen získaný materiál. Během výzkumu pracovaly (téměř všechny) skupiny samostatně pouze s občasnou radou a pomocí a chyby tedy byly očekávaným jevem.

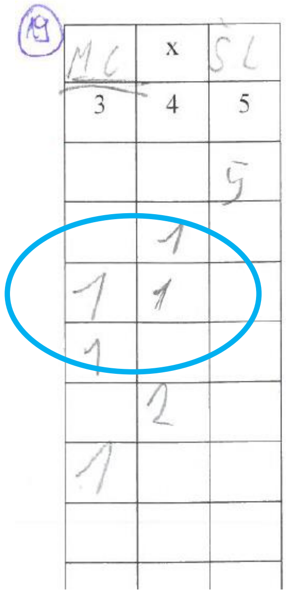
Pro další účely byly samozřejmě ponechány záznamy, které byly kompletně a správně zapsány. Vyřazeny byly záznamy, v nichž byly v celkovém součtu zapsány všechny tahy (součet odebraných sirek byl dvanáct) ovšem ve špatných sloupcích a nebylo možné rozeznat, ze které hromádky bylo ve kterém tahu odebíráno. Vyřadit bylo třeba i záznamy, v nichž bylo ve výsledném součtu zapsáno více než dvanáct odebíraných sirek. Dalšími vyřazenými záznamy byly ty nekompletní, u nichž opět nebylo možné jasně určit konkrétní tahy.

Na druhou stranu se objevilo značné množství záznamů, kde sice některé zápisy chyběly, ale bylo stoprocentně jasné, jaké tahy v nich měli být provedeny. Mezi takovéto nedostatečné záznamy patří vynechání zápisu některého tahu (ve většině případů toho posledního). Tyto tahy jsme do záznamů doplnili zpětně bez porušení výpovědní hodnoty daného zápisu, protože je nepravděpodobné, že by hráč ukončil hru s jednou sirkou ležící na hrací ploše, protože to je v rozporu s pravidly NIMu. (Obrázek 56)



Obrázek 56: Doplnění záznamu chybějícího tahu

Jako použitelné byly ponechány i záznamy, u nichž byla v jednom řádku zapsána dvě stejná čísla. Již bylo zmíněno výše, že pokud budeme odebírat tzv. zrcadlové tahy, tak se sice hodnota hromádek změní dle odebraného počtu sirek, ale stav ve hře zůstane stále stejný. Na Obrázku 57 je příklad takovéto situace. Je zřejmé, že pokud první hráč odebral sirku z levé hromádky tří sirek, druhý hráč odebral také jednu sirku tentokrát ale z prostřední hromádky, tak výsledek byl stejný i pokud první hráč odebral sirku nejprve z prostředního sloupečku. Pozice po tomto dvojtahu je v obou případech 2-2.



Obrázek 57: Dva tahy v jednom řádku

12.5.2 Počet platných záznamů

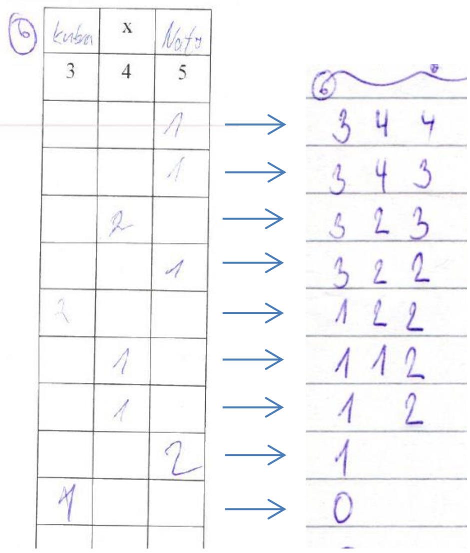
Skupiny po třech hráčích (Skupiny 1-5) měly odevzdat patnáct záznamů partií a čtyřčlenné skupiny (Skupiny 6 a 7) po třiceti záznamech partií, po pěti hrách od každé dvojice. Jednotlivé skupiny však odevzdaly následující počty záznamů: Skupina 1 = 9, Skupina 2 = 8, Skupina 3 = 11, Skupina 4 = 16, Skupina 5 = 21, Skupina 6 = 22 a Skupina 7 = 30. Z těchto záznamů vyplývá, že jedině sedmá skupina pořídila kompletní záznam všech 30 her přesně dle stanoveného herního záznamu. Bylo to z toho důvodu, že s touto skupinou byla po celou dobu hry paní učitelka J. V. a pomohla se záznamy her. Ostatní skupiny pracovaly převážnou část času samostatně, proto jsou u Skupin 1, 2 a 3 počty záznamů nižší než by měly být. Paradoxem jsou Skupiny 4 a 5, které odevzdaly (navzdory našemu původnímu očekávání) více záznamů, než dle herního systému měly. Využily nabízené možnosti odehrání více her.

Je nutno zmínit, že celkové počty platných záznamů odehraných her jsou mírně zkreslující, díváme-li se na ně pouze z pohledu sumarizace. Říkají, že pouze Skupiny 4 a 5 se pustili do nadstavbových her. Při procházení jednotlivých partií je však jasné, že tomu tak není. Hráči ve všech skupinách (kromě sedmé) odehráli více než pět her na jednu dvojici. Ale míra vyřazených záznamů je u některých skupin natolik vysoká, že celkový počet použitelných her je pod hodnotou patnácti. Problém tkvěl v tom, že nutnost vyřadit špatné záznamy kooperuje se schopností správného zápisu. Hráč bezproblémově odehrál více než pět kol NIMu, ale sám měl v roli zapisovače natolik velké potíže, že záznamy her u dvojic, jimž zapisoval, byly někdy kompletně vyřazeny. Je to výsledek paradoxu, o němž jsme se již zmiňovali, totiž, že si všichni hráči vybrali obtížnější způsob záznamu partií. Jelikož však cílem výzkumu není (a ani nebylo) zjistit vítěze turnaje, nemá tento fakt vliv na další analýzu. Nicméně nám přišlo důležité se o něm zmínit.

Dle turnajového systému jsme očekávali celkem 135 zápisů partií. Po vyřazení neplatných záznamů nám jich zbylo k analýze 121. Takže i když míra vyřazení neplatných zápisů je vysoká, díky iniciativě hráčů se počet těch analyzovatelných nepříliš odchýlil a původní představy. Všechny záznamy jsou vyobrazeny v Přílohách 1-15.

12.5.3 Korekce zápisů

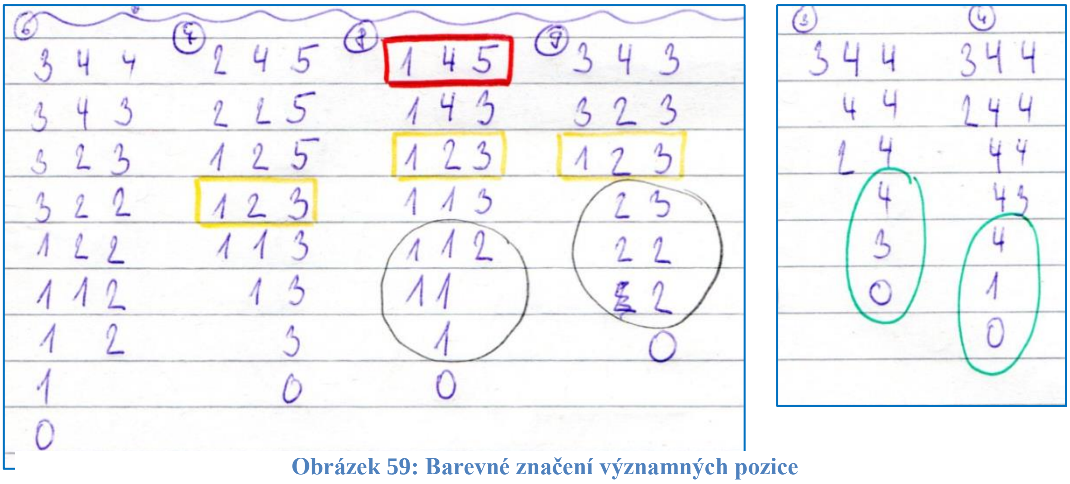
Jelikož si žáci určili způsob záznamu pouze s počty odebraných sirek z konkrétních sloupců, bylo pro analýzu prospěšné převést je do druhého způsobu zápisu, tedy do podoby vyjadřující pozice po jednotlivých tazích. V této podobě bylo následné hledání významných pozic přehledné a jednoznačné. Převedené záznamy jsou na Obrázku 58 a v Přílohách 16-23.



Obrázek 58: Korekce záznamu partie

12.6 Vlastní analýza

Abychom mohli naplnit stanovený cíl a odhalit, zda se u žáků objevuje tendence intuitivně odhalit některé významné pozice a využít je pro výhru, museli jsme nejprve projít všechny zaznamenané partie a u každé hledat významné pozice. Pro rychlejší a jednodušší orientaci jsou červenou barvou označeny bezpečné pozice 1-4-5, žlutou barvou bezpečné pozice 1-2-3 a šedým kroužkem tendence k užití symetrických pozic. Jelikož nás však zajímá celý mechanismus hry, ještě jsme přidali zelenou barvu, která značí tahy zcela odporující požadavkům vítězné strategie. Jedná se o tahy, při nichž hráči odebírají z jedné hromádky vícekrát po sobě, i když dle pravidel by mohli odebrat celou zbývající hromádku jedním tahem. (Obrázek 59) Aby byla analýza přehledná, byla provedena v jednotlivých skupinách.



Obrázek 59: Barevné značení významných pozice

12.6.1 Skupina 1

První skupina (Přílohy 1- 2, 16) sestávala ze tří hráčů a výsledný počet platných záznamů byl deset. Ve skupině se projevuje tendence spíše k delším partiím s odebíráním menších počtů sirek, pouze jedna partie byla ukončena v pěti tazích, všechny ostatní byly v rozmezí šest až devět tahů. Dvakrát se vyskytuje první tah do bezpečné pozice 1-4-5. Bezpečnou pozici 1-2-3 najdeme cekem ve čtyřech partiích. Ve dvou případech jsou obě vyhrávající pozice ve dvou po sobě jdoucích tazích jednoho hráče. Tendence ke hře v symetrických tazích se objevuje celkem šestkrát.

12.6.2 Skupina 2

Skupina dvě (Přílohy 2-3, 17) byla tříčlenná a použitelně zaznamenala celkem osm her. Tah do bezpečné pozice 1-4-5 se objevuje pouze jednou, stejně jako tah do bezpečné pozice 1-2-3 a obě pozice pocházejí z odlišných záznamů. Partie jsou rozsahově v rozmezí čtyř až deseti tahů. Správně využití symetrických pozic je ve třech případech, ale na druhou stranu se zde vyskytují také dva záznamy zelenou barvou.

12.6.3 Skupina 3

U třetí skupiny (Přílohy 3-4, 18) složené ze tří hráčů bylo analyzováno 11 korektně zaznamenaných partií. Opět je vidět snaha spíše o delší hry s tahy o menších počtech odebíraných sirek, pouze jedna hra byla odehrána v pěti tazích, ostatní byly v rozsahu 6 až 11 tahů. Bezpečnou pozici 1-4-5 najdeme ve čtyřech případech, bezpečná pozice 1-2-3 se vyskytuje třikrát a obě najednou byly použity v rámci jedné partie dvakrát. Jednou provedl oba tahy první hráč, ve druhém případě si tahy do bezpečných pozic rozdělili oba hráči. Symetrické pozice a jejich správné využití se objevilo u devíti her.

12.6.4 Skupina 4

Skupina čtyři (Přílohy 4-6, 19) byla tříčlenná s celkem šestnácti platnými záznamy a her projevující tendenci k delším partiím. Ovšem zde najdeme pouze jediný tah do bezpečné pozice 1-4-5. Šestkrát se dala objevit správně využití symetrie pozic, jedna hra byla bez jakékoli bezpečné pozice a ve všech zbylých deseti partiích se objevuje zelená barva odporující výhernímu mechanismu.

12.6.5 Skupina 5

Poslední tříčlenná skupina (Přílohy 6-8, 20) s celkem jednadvaceti použitelnými záznamy partií. U této skupiny se projevuje tendence ke kratším hrám, ve třech případech byla partie dokonce odehrána pouze ve třech tazích a osmi-tahová (nejdelší) partie byla zaznamenána pouze jedna. U této skupiny se projevuje ještě jedna zvláštní tendence. Ze všech jednadvaceti partií s celkem 106 tahy se pouze dvakrát objevuje pozice, v níž by byly tři hromádky sirek. Jen dvě partie tedy hráči nezačali odebráním všech sirek z jedné z hromádek. Ze dvou tří-hromádkových pozic byl jeden tah do bezpečné pozice 1-4-5. Zelená barva se objevuje u tří záznamů. Naproti tomu práci se symetrickými pozicemi najdeme u třinácti partií.

12.6.6 Skupina 6

Šestá skupina (Přílohy 9-11, 21) je skupinou čtyřčlennou a platných záznamů pořídila dvacet dva. Hry jsou kratšího až středního rozsahu, žádná nepřekročí hodnotu sedmi tahů, ale objevuje i jedna partie ukončená třetím tahem. Ve dvou odlišných partiích narazíme na jednu bezpečnou pozici 1-4-5 a jednu 1-2-3. Zelený zápis objevíme jeden a použití symetrických pozic celkem u jedenácti her.

12.6.7 Skupina 7

Druhá čtyřčlenná skupina (Přílohy 11-15, 22-23) s kompletním korektním zápisem všech třiceti předpokládaných her. Délky partií jsou od čtyř do devíti tahů.

Bezpečných pozic 1-4-5 nalezneme celkem osm, z toho šestkrát v rámci prvního tahu prvního hráče, ale dvakrát také jako první tah druhého hráč. Bezpečných pozic 1-2-3 je mezi partiemi sedmé skupiny celkem šest. Třikrát se vyskytují samostatně v různých hrách a třikrát současně v té samé hře s pozicí 1-4-5 a v rámci tahů jednoho hráče, kdy dvakrát jde o výskyt v prvním a třetím tahu a jednou výskyt v prvním a pátém tahu. Zelenou barvu najdeme ve dvou případech. Využívání symetrických pozic pak u celkem osmnácti partií.

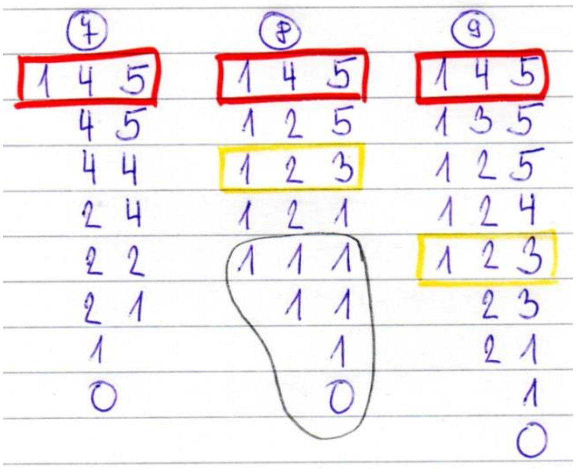
12.7 Vyhodnocení

Celkem jsme tedy analyzovali 121 partií NIMu, při nichž bylo dohromady učiněno 757 tahů (od počátečního do posledního vítězného). Tahů do pozic se třemi hromádkami hráči provedli celkem 181, tahů do pozic se dvěma hromádkami bylo 318 a tahů do jednohromádkových pozic bylo zahráno celkem 137.

12.7.1 Bezpečné pozice 1-4-5 a 1-2-3

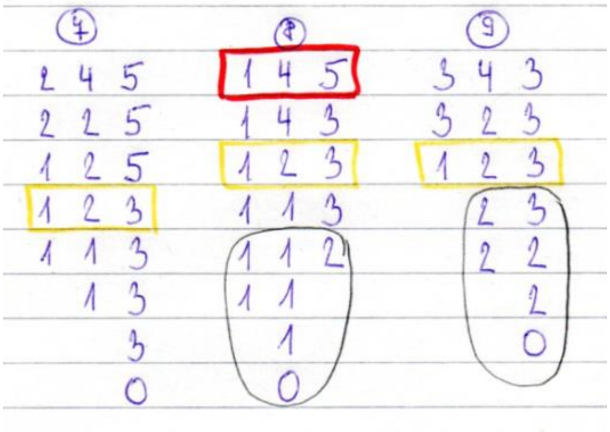
Ve všech partiích se objevilo celkem osmnáct tahů do bezpečné pozice 1-4-5 a patnáct tahů do bezpečné pozice 1-2-3. Je zřejmé, že frekvence těchto tahů není nijak vysoká, ale to odpovídá našemu předpokladu.

Pozice 1-4-5 se objevuje jako první tah u šestnácti her z osmnácti a celkově lze říci, že se vyskytuje ojediněle bez souvislosti s jiným užitím dané pozice, jedinou výjimkou jsou hry 7-9 ve Skupině 7. (Obrázek 60) Hru sedm začínal hráč *T* a táhl právě do pozice 1-4-5, celkově hru však prohrál. Následně začínal hru druhý hráč a jeho první tah byl stejný – do pozice 1-4-5 – ale svou hru také prohrál. Následovala třetí hra v řadě, kdy opět první tah vedl do pozice 1-4-5, tuto hru již začínající hráč vyhrál. Jelikož však v další hře, kterou hrál, provedl první tah zcela jinak, nelze tedy říci, že by toto opakování pozice bylo záměrné.



Obrázek 60: Ukázka bezpečné pozice 1-4-5

Pozice 1-2-3 byla ještě o něco méně častá než pozice 1-4-5. Obdobně se objevovala separátně bez souvislostí s jinými tahy do této pozice. Výjimku tvoří hry 7-9 u Skupiny 1 (Obrázek 61), kde se pozice objevuje třikrát za sebou. Poprvé ji užila hráčka *N*, ale svou hru nakonec prohrála. Další dva výskyty jsou u hráče *K*, který však jednu hru vyhrál a jednu prohrál. Ani tady nemůžeme bezpečně říct, že užití této pozice bylo promyšlené a záměrné. I když by se dalo (velmi zjednodušeně) říci, že by do této pozice mohli hráči směřovat díky její podobě postupné řady čísel 1, 2 a 3, není tomu tak. Svůj vliv na to zajisté má to, že zápis partií je v podobě číslic, ovšem při hře hrajeme se sirkami, kdy jejich počty nevnímáme primárně jako čísla.

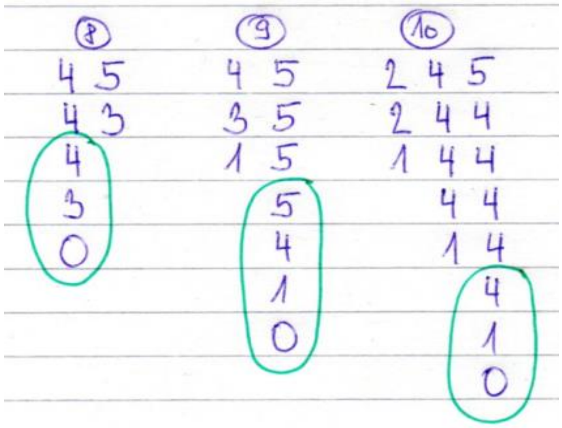


Obrázek 61: Ukázka bezpečné pozice 1-2-3

I když užití bezpečných pozic 1-4-5 a 1-2-3 bylo ojedinělé a náhodné, jednotlivé pozice byly užívány bez souvislostí s jinými výskyty, zůstává zajímavým faktem to, že v celých sedmi případech se v jedné partii objevily obě bezpečné pozice najednou. A ve třech případech hráč, který užil obě pozice, nakonec v dané partii zvítězil. Z našeho zkoumaného vzorku není možné tuto případnou souvislost dále prozkoumat, nicméně i tak zůstává tento poznatek poznatkem zajímavým.

12.7.2 Tahy odporující vítězné strategii

Než se pustíme do hodnocení symetrických pozic, zastavme se ještě na chvíli u fenoménu tahů prováděných do pozic zcela odporujícím mechanismu vítězné strategie. Jedná se o tahy označené v analýze zápisů zelenou barvou. V těchto tazích je hráč v situaci, kdy před ním na hrací ploše zůstává jediná hromádka sirek. Kdy jejich počet může odpovídat původní hodnotě hromádky, nebo v ní mohou být například pouze dvě poslední sirky. Vítězná strategie v takovouto chvíli velí odebrat celou zbývající hromádku najednou a hru ukončit. V případech značených zelenou barvou však hráč nevezme celou hromádku, ale pouze její část. Na Obrázku 62 jsou ukázány tři příklady těchto tahů (u stejných dvou hráček v jedné skupině). U partií 8 a 10 je takovéto odebrání uskutečněno ve dvou tazích, kdy je z hromádky o čtyřech sirkách je odebrána jedna sirka nebo tři sirky. U partie číslo devět proběhnou dokonce tři tahy, než je hra ukončena. I když byla pravidla důkladně vysvětlena názorně demonstrována, každá skupina je měla vytištěna před sebou a byla během her opakována, hráčka *Ma* je nejspíš nedokázala plně uchopit přímo ve hře, protože všechny předložené hry prohrála. U partií 8 a 10 byla prohra pouze její vinou, protože neodebrala celou hromádku a nechala protihráčku *Ma* zvítězit. Ovšem u hry 9, měla hráčka *Ma* případnou výhru ve svých rukách, její protihráčka udělala stejnou chybu a zanechala jedinou hromádku. *Ma* ale ani tak nevyhrála, protože opět pouze ubrala. I když pro celkové cíle výzkumu nehodnotíme dílčí výsledky jednotlivých skupin, nelze si nevšimnout, že hry s označením zelenou barvou se vyskytují ojediněle s výjimkou Skupiny 4, kde jsou u více než poloviny odehraných partií.



Obrázek 62: Tahy odporující vítězné strategii

12.7.3 Symetrické pozice

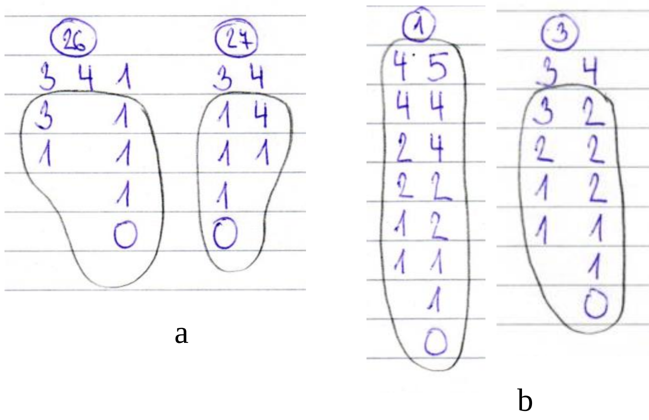
Poslední částí, kterou je třeba vyhodnotit, je výskyt a užívání symetrických pozic. U bezpečných pozic 1-4-5 a 1-2-3 byl náš původní předpoklad, že jejich frekvence nebude příliš častá a potvrdil se. Přibližně každá čtvrtá hra obsahovala, jednu tuto bezpečnou pozici. Vzhledem k tomu, že jsme navíc výše zjistili, že se v několika případech obě pozice vyskytují v jedné partii, frekvence výskytu se ještě sníží. Z celkového pohledu tedy pouze 17% tahů končících v pozici se třemi hromádkami vede do bezpečné pozice.

U symetrických pozic je predikce odlišná. Předpokládáme, že jejich význam užívání bude častější a očekáváme její výskyt přibližně u každé třetí partie. Symetrické pozice (a tudíž i zrcadlové tahy k vítězství) musí u klasického NIMu být při sudém počtu hromádek. V našem konkrétním případě NIM (3, 4, 5) tedy najdeme pozice pouze dvou hromádek sirek. Budeme proto sledovat, zda se vyskytují až v okamžiku, kdy na hrací ploše zůstanou dvě hromádky, nebo pokud je tendence získat symetrickou pozici odebráním ze tří hromádek.

12.7.3.1 Symetrické pozice se dvěma hromádkami

Symetrické pozice při hře už pouze se dvěma hromádkami sirek rozdělíme na dvě dílčí skupiny. Na symetrické pozice vzniklé ve chvíli, kdy jedna hromádka sirek již obsahovala pouze jedinou sirku (označíme si ji *a*) a symetrické pozice s počty většími než jedna v obou hromádkách (označíme si ji *b*). Ukázky příkladů skupiny *a* i *b* jsou na Obrázku 63. Pozice *a* jsme odhalili celkem ve 44 partiích. V pěti případech hráči odebírali sirky z pozice 5-1 → 1-1, šestkrát nastala situace 4-1 → 1-1, sedmnáctkrát byl proveden tah 3-1 → 1-1 a šestnáctkrát bylo odebráno 2-1 → 1-1. Objevily se tudíž všechny možnosti tahu do dvouhromádkové symetrické pozice s jednou hromádkou o hodnotě jedna.

Symetrické pozice vzniklé tahem do pozice se dvěma hromádkami o počtech sirek větších než jedna jsme v záznamech nalezli celkem desetkrát a to v následujících podobách: 2-3 (pět výskytů), 2-4 (dva výskyty), 3-4 (dva výskyty) a 4-5 (jeden výskyt).



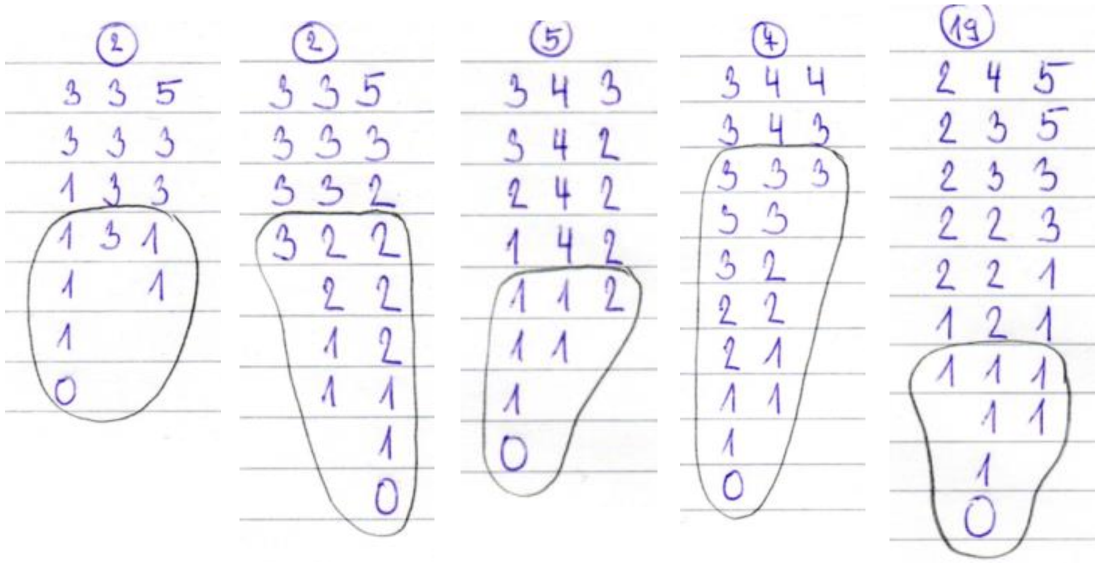
Obrázek 63: Ukázka symetrických pozic dvou hromádek

Celkem 44 symetrických pozic souviselo s jednou hromádkou o hodnotě jedné sirky, a tudíž tyto hry byly následně dohrány ve třech tazích (včetně posledního vítězného). Na druhou stranu symetrické pozice ze dvou hromádek o větších počtech sirek byly dohrány ve třech tazích pouze dvakrát. Šestkrát hra skončila po pěti tazích, jednou po šesti tazích a jednou dokonce po sedmi tazích, tato hra je zobrazená na Obrázku 63b, číslo 1).

12.7.3.2 Symetrické pozice se třemi sirkami

Tah do symetrické pozice se dvěma hromádkami byl poměrně častý a i značně různorodý v povaze jednotlivých tahů, neboť zvláště u pozic s jednou sirkou v jedné hromádce pokryl celé spektrum možných tahů. Naproti tomu tahy do symetrické pozice z počátečního stavu hry se třemi hromádkami se objevily pouze jedenáctkrát.

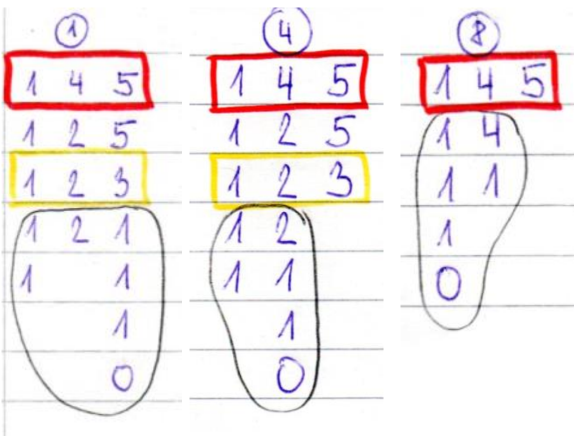
V devíti případech hráči z počáteční pozice 1-1-1, 1-1-2, 1-1-3 a 1-1-5 odebrali tak, aby na stole zůstala pozice 1-1, následovalo vítězství ve dvou tazích. Ale jedenkrát se objevil tah z pozice 2-2-3, který byl ukončen po pěti tazích a jednou tah z pozice 3-3-3, který byl ukončen celkem po sedmi tazích. Ukázky hry s tahy do symetrické pozice ze tří hromádek jsou na Obrázku 64.



Obrázek 64: Ukázka symetrických pozic tří hromádek

12.7.4 Hra dle požadavků vítězné strategie

Neočekávali jsme, že by se u nějakého hráče mohla objevit znalost nebo objevení kompletní vítězné strategie z důvodů uvedených výše. Ale při analýze jsme objevili tři partie, jejichž průběh stoprocentně odpovídal požadavkům vítězné strategie. Jednalo se o hry: 1/Skupina 1, 4/Skupina 3 a 8/Skupina 5. (Obrázek 65) Každá partie náležela jinému hráči, nicméně v rámci svých skupiny měli tito hráči nejvíce výher. K neúplnosti použitelných dat však nemůžeme potvrdit, zda by se při více partiích dokázali zachovat stejně a uvědomit si význam právě pozic 1-4-5 a 1-2-3 i bez znalosti binární soustavy a Nim-součtu.



Obrázek 65: Partie dle vítězné strategie

12.8 Shrnutí

Na základě vyhodnocení provedené analýzy jednotlivých her můžeme říct, že oba naše předpoklady se naplnily. Bezpečná pozice 1-4-5 se sice osmnáctkrát v odehraných partiiích objevila, nicméně žádný z hráčů nedokázal prokazatelně odhalit její význam pro výherní pozici. U bezpečné pozice 1-2-3 je situace obdobná jako u pozice 1-4-5, i když se vyskytuje u patnácti partií, nemůžeme potvrdit její užívání jako záměrné. Nalezli jsme také patnáct partií, v nichž se objevily tahy odporující vítězné strategii.

Druhým předpokladem bylo, že naopak význam symetrické pozice hráči dokáží odhalit a tento předpoklad se potvrdil. Dokonce jsme zjistili, že dohrání partie podle mechanismu zrcadlových tahů se objevuje celkem u 65 her a to je více než polovina všech her. Symetrickou pozici tedy lze nalézt přibližně v každé druhé hře, což je dokonce ještě vyšší hodnota než původně očekávaný výskyt u každé třetí hry. Schopnost aplikace mechanismu symetrických pozic ukazuje také celá škála tahů těmto pozicím odpovídající. Hra ze tří hromádek do symetrické pozice se objevila celkem v jedenácti partiích, ale hra do symetrické pozice ze dvou hromádek se objevila dokonce čtyřiapadesátkrát.

Cílem výzkumu bylo zjistit, zda se u žáků projevuje tendence k využívání vítězné strategie, lépe řečeno tendence k objevení a užívání některých bezpečných pozic. Po provedení výzkumu, jeho analýze a vyhodnocení můžeme říct, že jsme splnili vytyčený cíl. I když byl zkoumaný vzorek poměrně malého rozsahu, přes to se potvrdila tendence užívání části mechanismu vítězné strategie – právě v podobě symetrických pozic.

Závěr

Tato práce se pokusila předestřít ucelený obraz kombinatorické hry NIM. Nejprve jsme však v teoretické části stručně uvedli obecný pohled na kombinatorické hry prostřednictvím Sprague-Grundyovy funkce, při čemž jsme také názorně ukázali její aplikací na několika tzv. „substraction games“. Zařadili jsme ji z toho důvodu, že určení Sprague-Grundyovy nejen slouží jako mechanismus pro určení vítězné strategie kombinatorických her, ale také funguje právě jako ekvivalent jedno-hromádkového NIMu, představuje nám propojení s primárním tématem práce a slouží jako vstup do herního mechanismu NIMu.

Na samotný NIM jsme se následně zaměřili ve třech rovinách. V rovině hry samotné, kde jsme si představili její podobu, pravidla, vlastnosti a historii. Druhou rovinou byla rovina fungování hry, kdy jsme konkrétní hru NIM (2, 2) rozebrali pomocí úvahy, schématu a teorie grafu. Ukázali jsme důležitost podoby pozice ve hře, její rozdělení na pozice bezpečné (vyhrávající), nebezpečné (prohrávající) a jejich propojení s vítězstvím. Poslední rovinou, z níž jsme přistoupili k NIMu, byla rovina vítězné strategie.

Vítězná strategie je soubor konkrétních rozhodnutí užitých v jednotlivých fázích hry. Jak má hráč táhnout, aby si zajistil vítězství (pokud je to povahou hry možné). Pro vítěznou (nebo také Boutonovu) strategii je nezbytná znalost binární soustavy a XORu (což je součet binárních čísel bez přenášení řádů), obě tyto subkapitoly jsme také do práce zařadili, čímž vznikl teoretický podklad pro vyložení samotného mechanismu vítězné strategie. Následně jsme vítěznou strategii kompletně ukázali na konkrétním příkladu hry NIM, protože z tohoto mechanismu jsme vycházeli v dalších částech práce.

Po kompletním rozboru základní hry NIM, tedy hry s *k* hromádkami o *n* počtech sirek, jsme se představili některé další varianty hry. NIM sám o sobě je ve své podstatě hra jednoduchá a velmi variabilní. De facto se dá říci, že co každá hra, to jiná obdoba, záleží pouze na domluvě (a také na fantazii a tvořivosti) hráčů. Při ukázkách některých variant NIMu jsme se zaměřili nejen na hry, u kterých bylo na základě jejich podoby jasné, že se jedná o NIM, ale také na hry, které na první pohled s klasickým NIMem nemají nic společného a jedná se o zcela jinou hru. Takovéto hry se nazývají „NIMin“, ale lze v nich klasický NIM objevit a aplikovat vítěznou strategii pro zajištění výhry.

Po teoretickém pohledu jsme se na NIM podívali také z pohledu praxe. Nejprve jsme NIM (3, 4, 5) kompletně rozebrali a určili všechny možné tahy ve hře použitelné a určili kompletní soubor významných pozic v souladu s vítěznou strategií. Následně jsme NIM (3, 4, 5) odehráli s žáky šestého ročníku základní školy.

Cílem výzkumu bylo zjistit, zda žáci dokáží při hře intuitivně odhalit určité části vítězné strategie, jinak řečeno, zda budou mít tendenci k objevení a užívání některých bezpečných pozic, které v našem případě představovali nesymetrické pozice 1-4-5 a 1-2-3 a symetrické pozice 1-1, 2-2, 3-3 a 4-4. Předpokládali jsme, že užívání nesymetrických pozice nebude nepříliš časté a záměrné. U pozic symetrických bude trend opačný, tedy že jejich význam hráči odhalí a frekvence bude tudíž značná.

Celkem bylo k výzkumu (po kontrole a patřičných úpravách) použito 121 odehraných partií NIMu (3, 4, 5). Tyto hry jsme podrobili kompletní analýze, při níž jsme hledali výše zmiňované bezpečné pozice odpovídající mechanismům vítězné strategie.

Když byly všechny výsledky analýzy vyhodnoceny, zjistili jsme, že v rámci našeho výzkumného vzorku, se oba naše předpoklady potvrdily. U žáků bez předchozí herní zkušenosti s NIMem se neobjevilo záměrné užívání bezpečných pozic 1-4-5 a 1-2-3, ale frekvence symetrických pozic v rámci jednotlivých her byla vysoká. Objevila se u více než poloviny všech odehraných her.

Seznam použité literatury

Knižní zdroje

[1] BARTLETT, Padraic. *A Short Guide to Hackenbush*. Chicago: VIGRE REU, 2006.

[2] BOUTON, Charles L. Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory. *The Annals of Mathematics*. 1901, **3**(1/4). ISSN 0003486X. Dostupné z: doi:10.2307/1967631

[3] EPSTEIN, Richard A. *The Theory of Gambling and Statistical Logic*. 2. Waltham, USA: Elsevier/Academic press, 2013. ISBN 978-0-12-397857-8.

[4] FERGUSON, Thomas S. *GAME THEORY*. Los Angeles. University of California.

[5] GUY, Richard K. *Impartial Games*. Canada, 1995. University of Calgary.

[6] HOLLADAY, John C. Matrix Nim. *The American Mathematical Monthly*. 1958, 65(2). ISSN 00029890. Dostupné z: doi:10.2307/2308886

[7] KUNCOVÁ, Kristýna. *Hra Nim a její varianty*. Praha, 2014. Závěrečná práce. Univerzita Karlova.

[8] Morris P. Introduction to Game Theory, Springer-Verlag, New York, 1994.

[9] ROUGETET, Lisa. *Machines designed to play Nim games*. 2016. Montpellier, France, 2016. ISBN 978-3-319-70307-7.

[10] SKÁLOVÁ, Alena. *Teorie her pro nadané žáky středních škol*. Praha, 2014. Diplomová práce. Univerzita Karlova.

[11] YIU, Paul. *Recreational Mathematics*. Florida, 2003. Atlantic University.

[12] ШЕНЬ, А. *Игры и стратегии с точки зрения математики*. 2. Москва: МЦНМО, 2018. ISBN 978-5-4439-2776-3.

Elektronické zdroje

[13] BOGOMOLNY, Alexandr. Aliquot Game. *Https://www.cut-the-knot.org/* [online]. 2018 [cit. 2020-11-18]. Dostupné z: https://www.cut-the-knot.org/SimpleGames/Aliquot.shtml

[14] Číselné soustavy. *Https://is.mendelu.cz/eknihovna* [online]. [cit. 2020-10-13]. Dostupné z: https://is.mendelu.cz/eknihovna/opory/zobraz_cast.pl?cast=7779;lang=sk

[15] Fan-Tan. *En.wikipedia.org* [online]. [cit. 2020-09-24]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Fan-Tan

[16] Furstenberg–Sárközy theorem. *Https://en.wikipedia.org/* [online]. 2020 [cit. 2020-11-18]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Furstenberg%E2%80%93S%C3%A1rk%C3%B6zy_theorem

[17] Furstenberg-Sarkozy theorem. *Terrytao.wordpress.com* [online]. 2013 [cit. 2020-11-18]. Dostupné z: https://terrytao.wordpress.com/2013/02/28/a-fourier-free-proof-of-the-furstenberg-sarkozy-theorem/

[18] Hackenbush. *Https://en.wikipedia.org/* [online]. 2020 [cit. 2021-02-10]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Hackenbush#cite_note-3

[19] History of games. *En.wikipedia.org* [online]. 2021 [cit. 2021-03-06]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_games

[20] HLÁSEK, Filip. Jak hrát a neprohrát. *Matematický korespondenční seminář*. 2011

[21] JIROVSKÝ, Lukáš. Hra NIM (odebírání sirek). *Https://teorie-grafu.cz* [online]. MFF UK, Praha, 2010 [cit. 2020-10-03]. Dostupné z: https://teorie-grafu.cz/zakladni-pojmy/matematicka-definice-grafu.php

[22] JIROVSKÝ, Lukáš. Hra NIM(2,2) zakreslená pomocí grafu. In: *Https://teorie-grafu.cz/* [online]. Praha, MFF UK, 2010 [cit. 2020-09-26]. Dostupné z: https://teorie-grafu.cz/vybrane-problemy/nim.php#nim1Menu

[23] JIROVSKÝ, Lukáš. Jádro grafu. *Https://teorie-grafu.cz* [online]. MFF UK, Praha, 2010 [cit. 2020-10-03]. Dostupné z: https://teorie-grafu.cz/zakladni-pojmy/matematicka-definice-grafu.php

[24] JIROVSKÝ, Lukáš. Matematická definice grafu. *Https://teorie-grafu.cz* [online]. MFF UK, Praha, 2010 [cit. 2020-10-03]. Dostupné z: https://teorie-grafu.cz/zakladni-pojmy/matematicka-definice-grafu.php

[25] JIROVSKÝ, Lukáš. Podgraf. *Https://teorie-grafu.cz* [online]. MFF UK, Praha, 2010 [cit. 2020-10-03]. Dostupné z: https://teorie-grafu.cz/zakladni-pojmy/matematicka-definice-grafu.php

[26] Nineteen. *Http://www.di.fc.ul.pt/* [online]. 1999 [cit. 2021-02-10]. Dostupné z: http://www.di.fc.ul.pt/~jpn/gv/nineteen.htm

[27] Sprague-Grundy theorem. Nim. *Cp-algorithms.com* [online]. 2019 [cit. 2020-11-15]. Dostupné z: https://cp-algorithms.com/game_theory/sprague-grundy-nim.html

[28] Sprague–Grundy theorem. *En.wikipedia.org* [online]. [cit. 2020-11-15]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Sprague%E2%80%93Grundy_theorem

[29] Subtract a square. *Https://en.wikipedia.org/* [online]. 2020 [cit. 2020-11-18]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Subtract_a_square

[30] TacTix. *En.wikipedia.org* [online]. 2021 [cit. 2021-02-13]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/TacTix

[31] VOPRAVIL, Václac. Některé nestranné kombinatorické hry pro dva hráče. *Http://www.wopravil.cz/* [online]. 2009 [cit. 2021-01-12]. Dostupné z: http://www.wopravil.cz/cgt_g_impartial.html

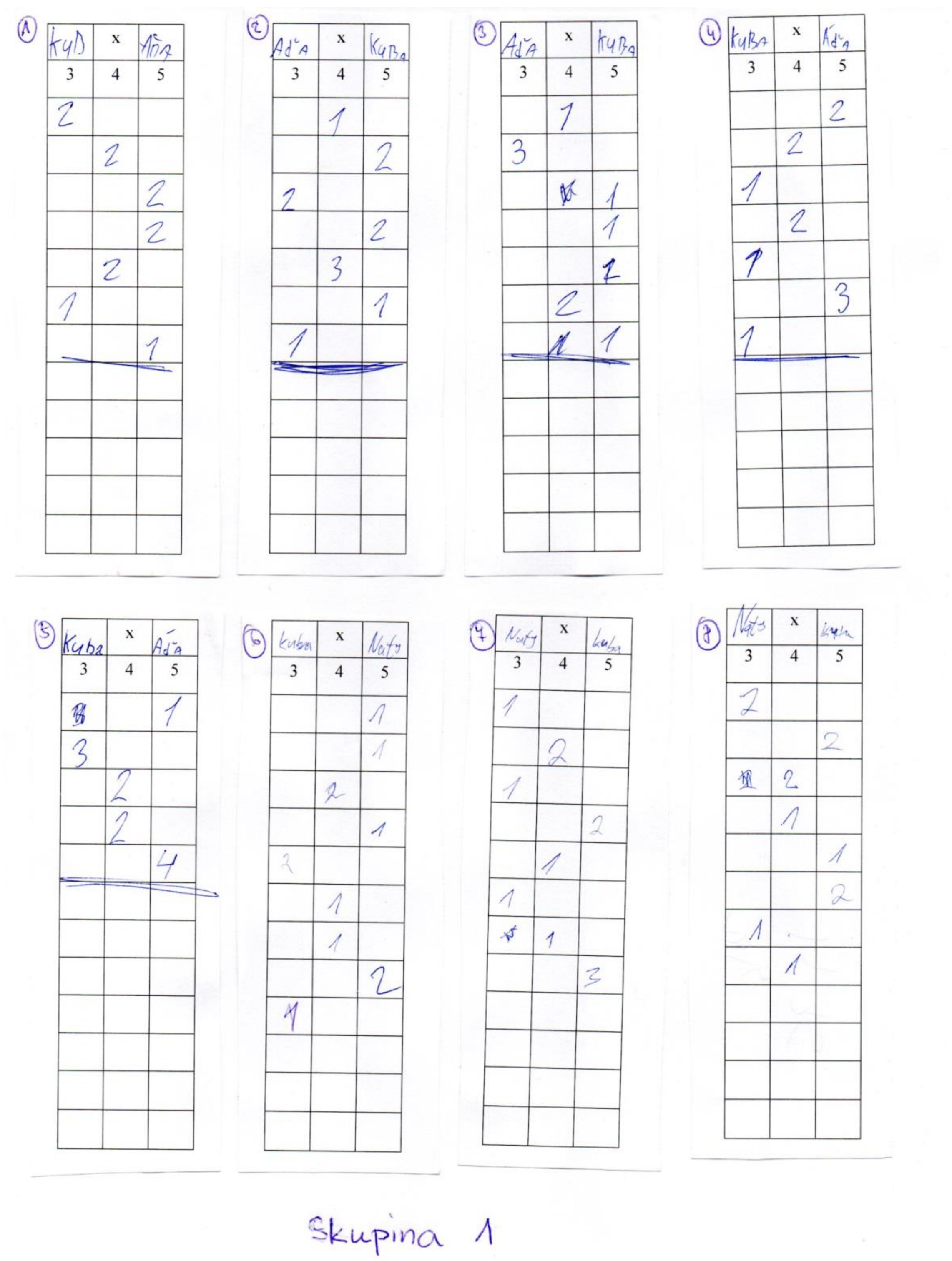
[32] Základní pojmy teorie grafů: Definice grafu. *Https://is.mendelu.cz/eknihovna* [online]. Brno [cit. 2020-10-03]. Dostupné z: https://is.mendelu.cz/eknihovna/opory/zobraz_cast.pl?cast=19937

Seznam tabulek

Seznam obrázků

Seznam příloh

Přílohy



Příloha 1: Záznamové tabulky - Skupina 1

Skupina 1

9

Kuba	x	Naty
3	4	5
		2
	2	
2		
1		
		1
	2	

10

Kuba	x	Naty
3	4	5
[illegible]		2
2		
	1	
1		
		1
		1
	2	
	1	
[illegible]		

1

V.	x	S.
3	4	5
1		
2		
		1
	1	
	1	
	2	
	~~1~~	~~1~~
		2
		1

2

V.	x	S.
3	4	5
	2	
	2	
3		
		5

Skupina 2

3

V.	x	S.
3	4	5
	1	
		1
1		
2		
	1	
	1	
		1
	1	
		3

4

V	x	T
3	4	5
[illegible]		2
3		
		1
	2	
	2	
		2

5

V	x	T
3	4	5
		1
2		
		2
	1	
1		
	2	
	1	
		1
		1

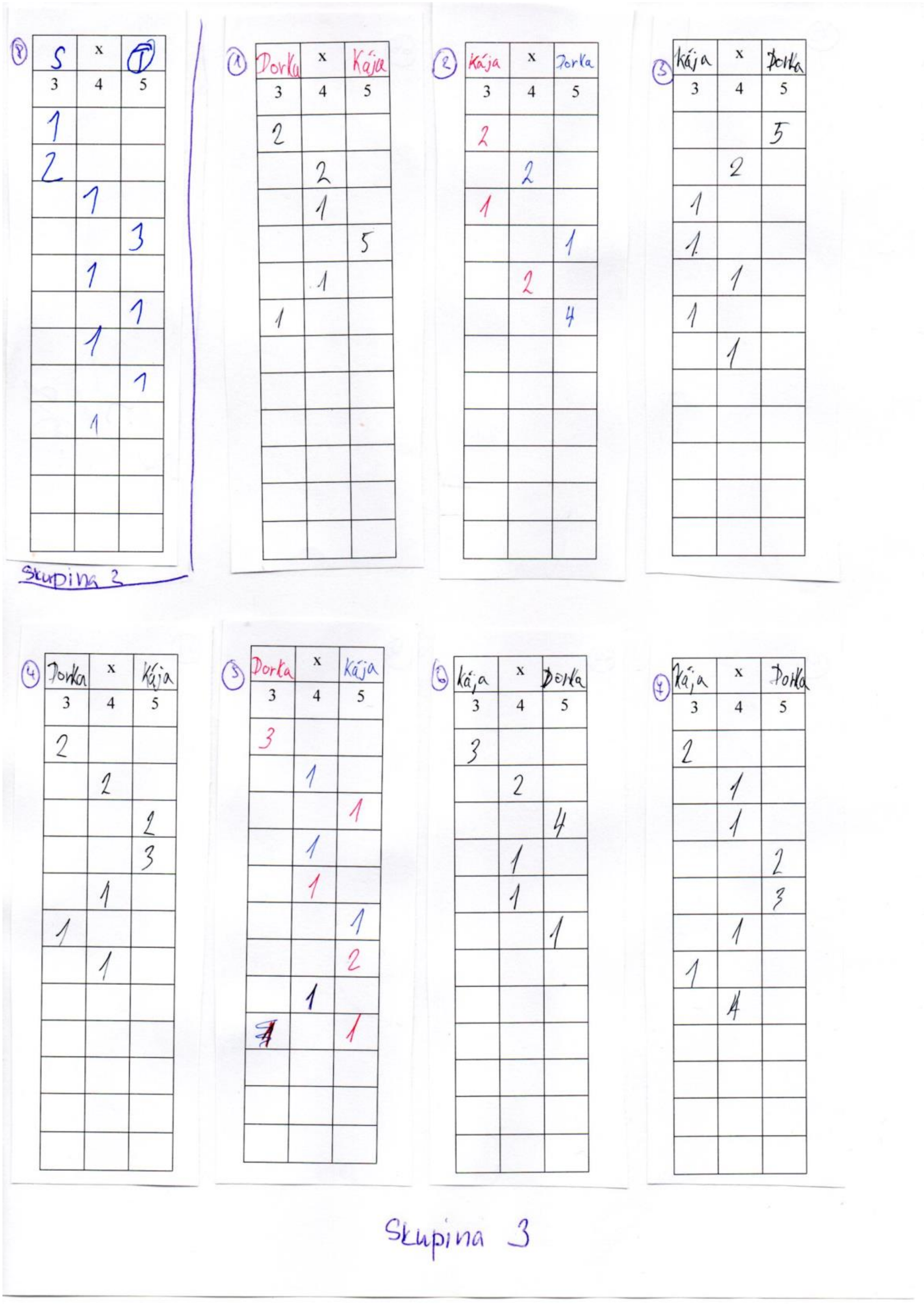
6

T.	x	S.
3	4	5
2		
1		
		1
	2	
		1
	1	
		1
	1 →	
	1 →	
		← 1

7

S.	x	T.
3	4	5
	1	
	2	
	1	
		3
		1
2		
1		
		1

Příloha 2: Záznamové tabulky - Skupina 1, Skupina 2



Příloha 3: Záznamové tabulky - Skupina 2, Skupina 3

8

Simona	x	Dora	
3	4	5	
	2		
		2	
1			
1			
	2	[illegible]	
		[illegible]	2
		[illegible]	1
1	8		

9

Kája	x	Sima
3	4	5
3		
		1
	1	
		1
	1	
	1	
		1
		1
	1	
		1

10

Kája	x	Simona
3	4	5
1	′	
	2	
		5
	1	
1		
	1	
1		

11

Kája	x	Sima
3	4	5
3		
		1
	1	
	3	
		4

Skupina 3

1

KÁŤA	x	MAKY
3	4	5
5		
		1
		2
		2
	1	
	3	

2

MAKY	x	KÁŤA
3	4	5
	1	
		2
	~~3~~	1
	1	
5		
	1	
		1
	1	
		1

3

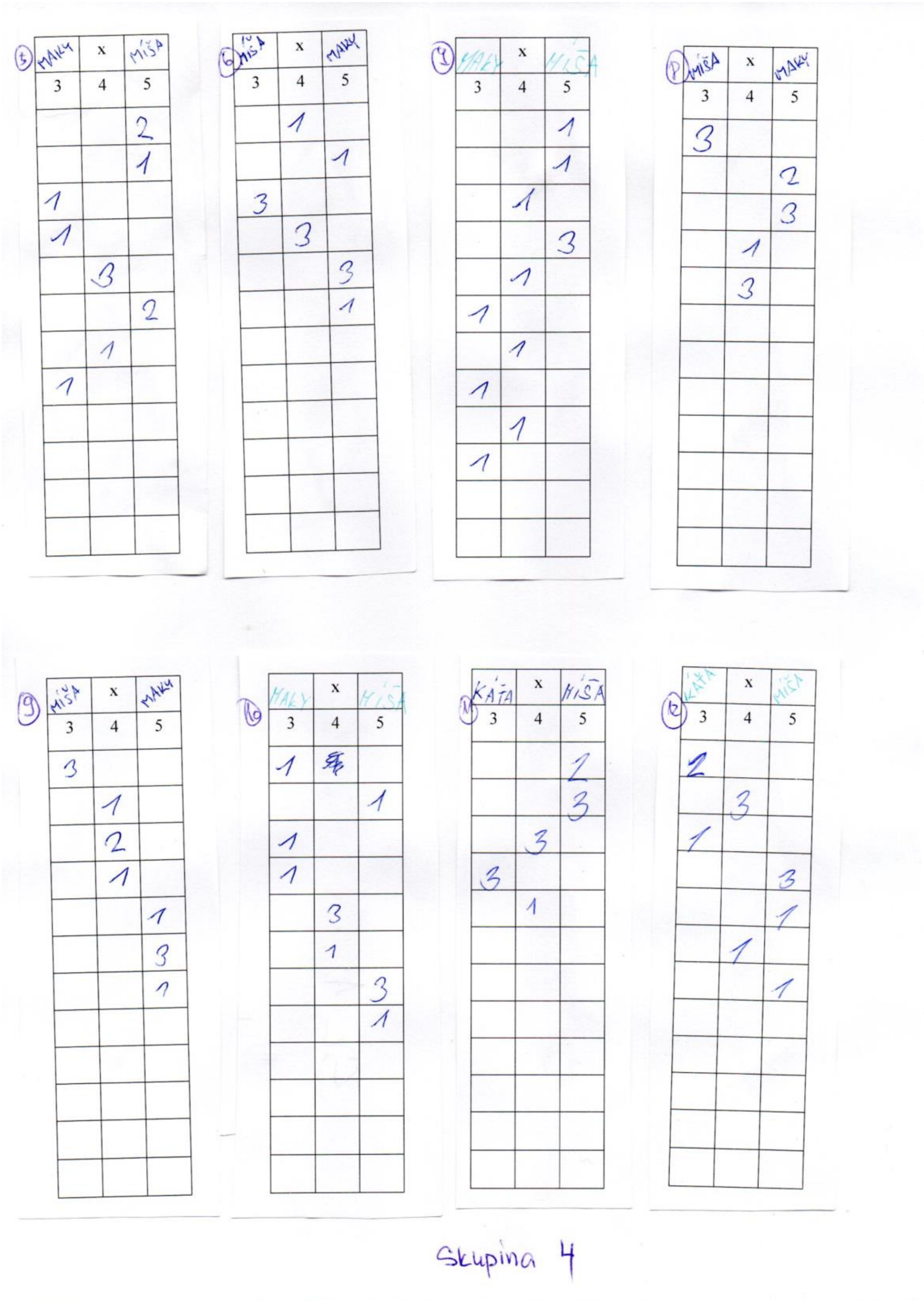
KÁŤA	x	MÍŠA
3	4	5
		1
3		
	2	
	2	
		1
		3

4

MAKY	x	MÍŠA
3	4	5
		1
1		
2		
		1
		3
	3	
	1	

Skupina 4

Příloha 4: Záznamové tabulky - Skupina 3, Skupina 4



3 MAKY	x	MÍŠA
3	4	5
		2
		1
1		
1		
	3	
		2
	1	
1		

6 MÍŠA	x	MAKY
3	4	5
	1	
		1
3		
	3	
		3
		1

7 MAKY	x	MÍŠA
3	4	5
		1
		1
	1	
		3
	1	
1		
	1	
1		
	1	
1		

8 MÍŠA	x	MAKY
3	4	5
3		
		2
		3
	1	
	3	

9 MÍŠA	x	MAKY
3	4	5
3		
	1	
	2	
	1	
		1
		3
		1

10 MAKY	x	MÍŠA
3	4	5
1		
		1
1		
1		
	3	
	1	
		3
		1

11 KAŤA	x	MÍŠA
3	4	5
		2
		3
	3	
3		
	1	

12 KAŤA	x	MÍŠA
3	4	5
2		
	3	
1		
		3
		1
	1	
		1

Skupina 4

Příloha 5: Záznamové tabulky - Skupina 4

13 MÍŠA	x	KÁŤA
3	4	5
		2
3		
		3
	1	
	3	

14 MÍŠA	x	KÁŤA
3	4	5
		3
3		
	2	
		1
	1	
		1
	1	

15 MÍŠA	x	KÁŤA
3	4	5
		3
	1	
	1	
		2
1		
1		
	1	
~~1~~	1	
1		

16 KÁŤA	x	MÍŠA
3	4	5
		2
		3
3		
	2	
	2	

Skupina 4

1 T.B	x	B.R
3	4	5
3		3
		1
[illegible]	2	
		2
	1	
		1
	1	
		1

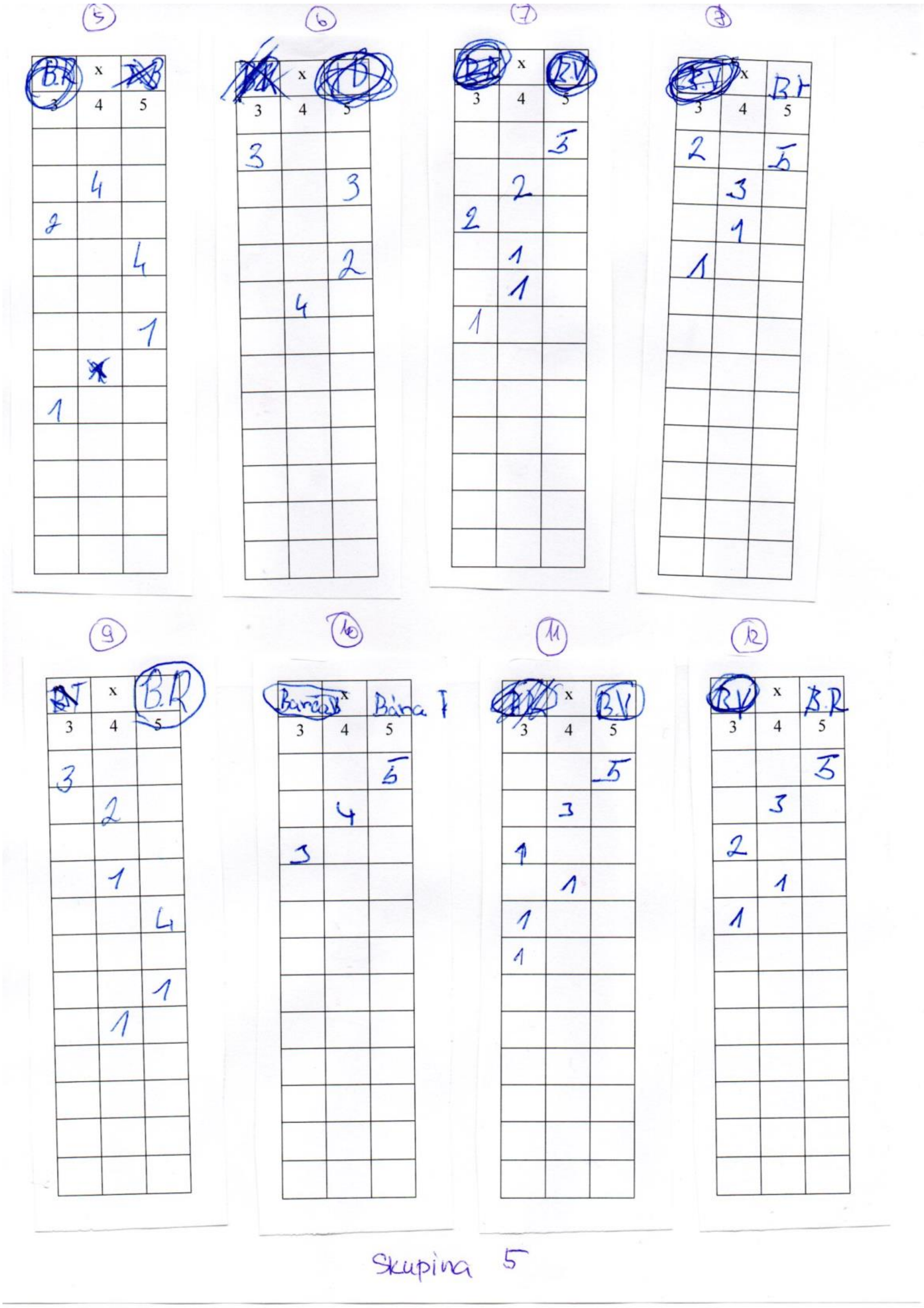
2 T.B	x	B.R
3	4	5
3		[illegible]
		2
		3
	2	
	2	

3 T.B	x	[illegible]
3	4	5
		5
	3	
2		
	1	
1		

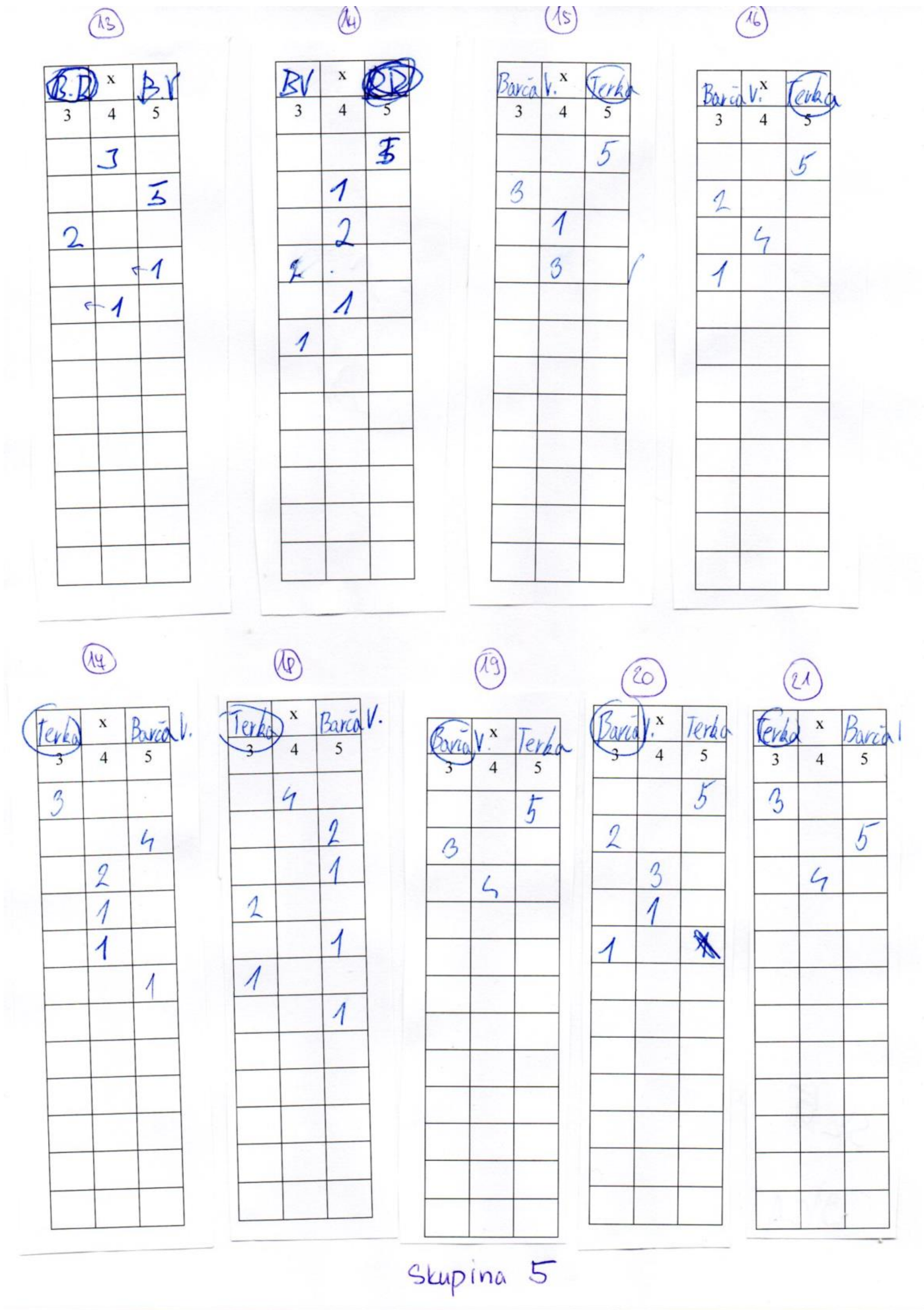
4 B.R	x	T.B
3	4	5
	4	
2		
		4
1		1

Skupina 5

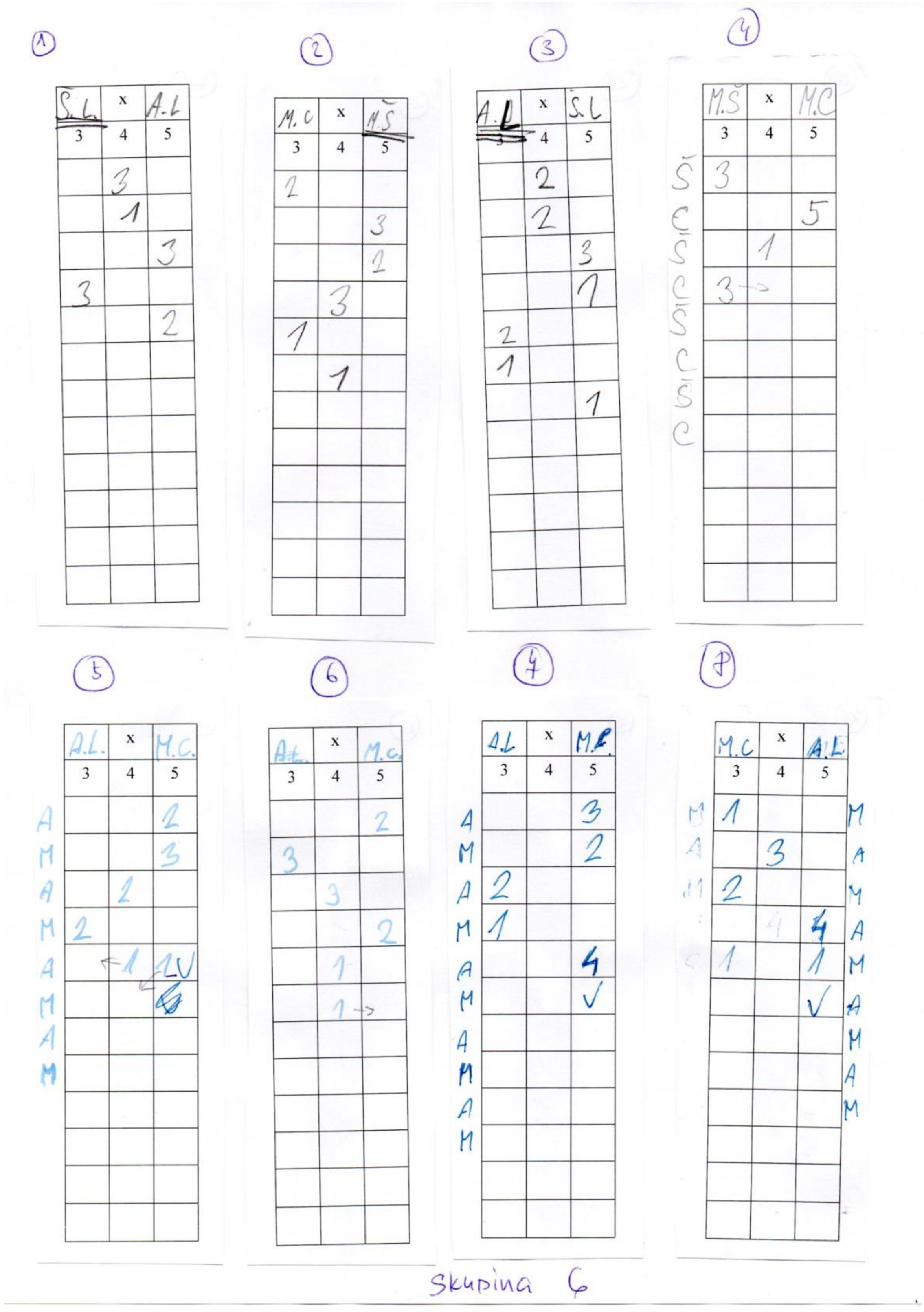
Příloha 6: Záznamové tabulky - Skupina 4, Skupina 5



Příloha 7: Záznamové tabulky - Skupina 5



Příloha 8: Záznamové tabulky - Skupina 5



Příloha 9: Záznamové tabulky - Skupina 6

9

M.Š	x	A.L
3	4	5
		5
1		
2		
	4	

10

A.L	x	M.Š
3	4	5
3		
		5
	4	

11

M.Š	x	A.L
3	4	5
	3	
	1	
		3
3		
	2 → 4	

12

A.L	x	M.Š
3	4	5
		4
		1
	3	
	1	
3		

13

M.Š	x	A.L.
3	4	5
		4
	3	
		1
1	1	
3		

14

A.L	x	M.Š
3	4	5
		3
3		
	3	
		2
	1	

15

Š.L	x	M.Š
3	4	5
		5
2		
	3	
1		
	1	

16

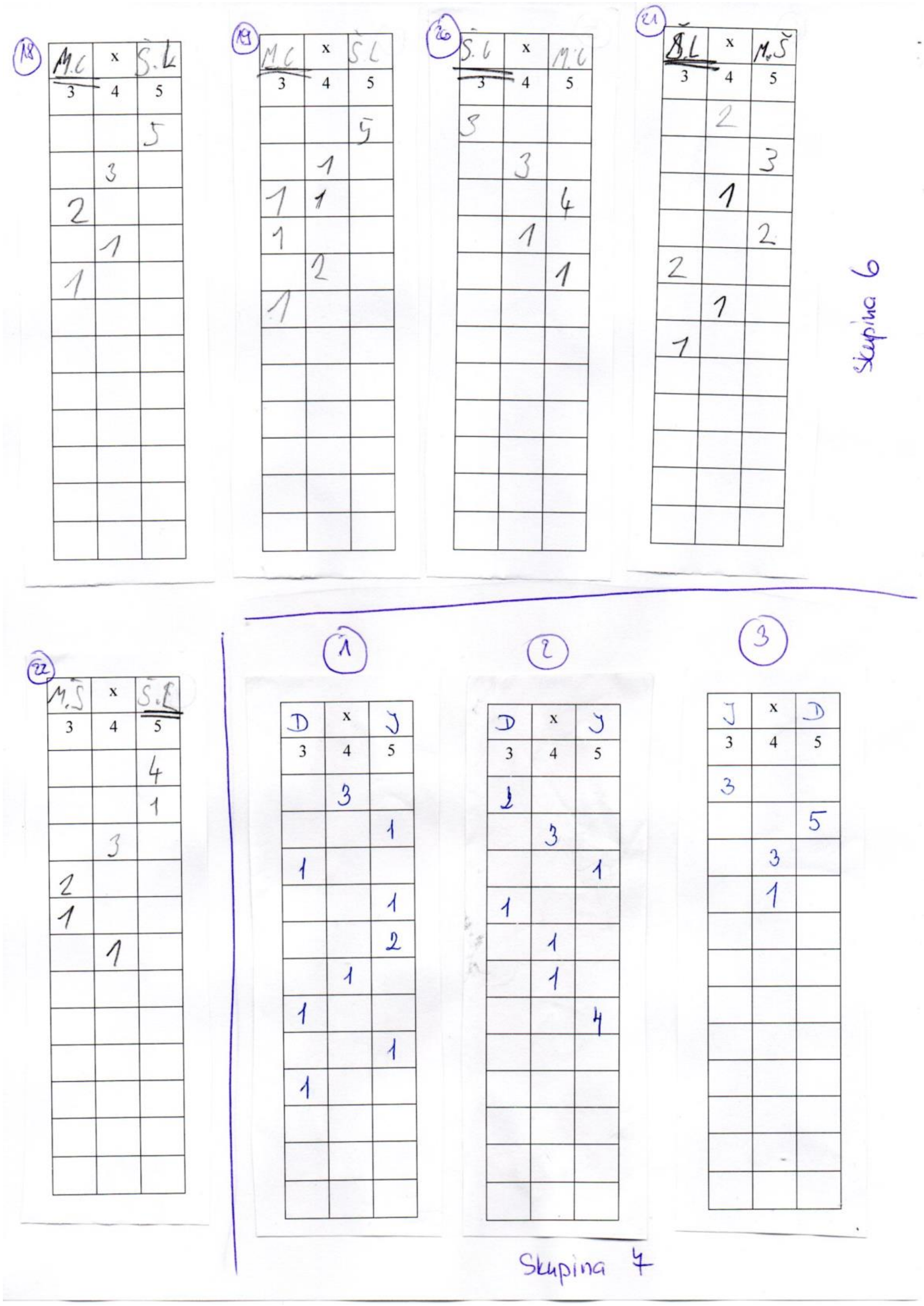
M.Š	x	Š.L
3	4	5
		5
	3	
5		
	1	

17

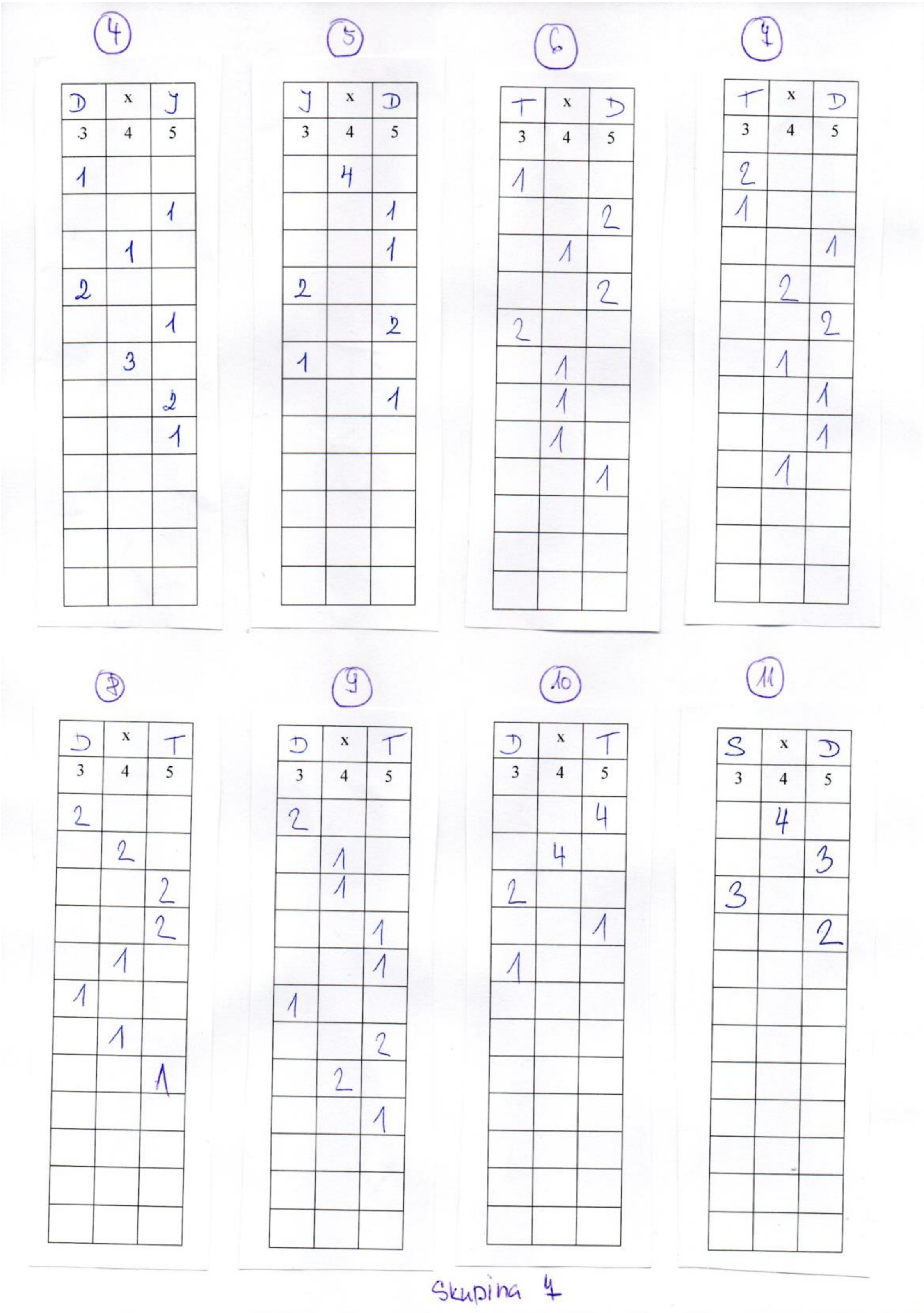
Š.L	x	M.Š
3	4	5
		4
		1
	2	
1		
	1	
1		
	1	
1		

Skupina 6

Příloha 10: Záznamové tabulky - Skupina 6



Příloha 11: Záznamové tabulky - Skupina 6, Skupina 7



4

D	x	J
3	4	5
1		
		1
	1	
2		
		1
	3	
		2
		1

5

J	x	D
3	4	5
	4	
		1
		1
2		
		2
1		
		1

6

T	x	D
3	4	5
1		
		2
	1	
		2
2		
	1	
	1	
	1	
		1

7

T	x	D
3	4	5
2		
1		
		1
	2	
		2
	1	
		1
		1
	1	

8

D	x	T
3	4	5
2		
	2	
		2
		2
	1	
1		
	1	
		1

9

D	x	T
3	4	5
2		
	1	
	1	
		1
		1
1		
		2
	2	
		1

10

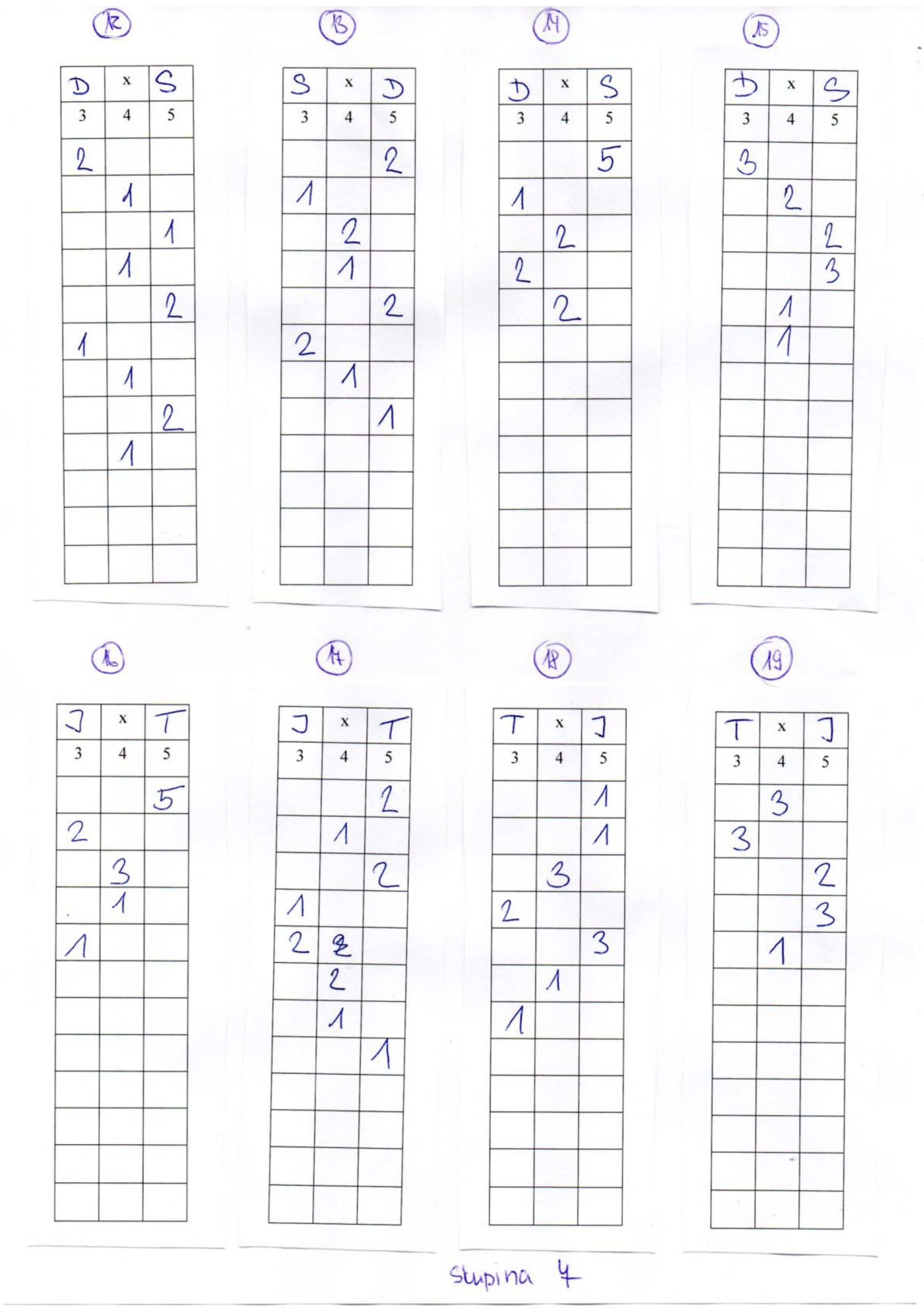
D	x	T
3	4	5
		4
	4	
2		
		1
1		

11

S	x	D
3	4	5
	4	
		3
3		
		2

Skupina 4

Příloha 12: Záznamové tabulky - Skupina 7



12

D	x	S
3	4	5
2		
	1	
		1
	1	
		2
1		
	1	
		2
	1	

13

S	x	D
3	4	5
		2
1		
	2	
	1	
		2
2		
	1	
		1

14

D	x	S
3	4	5
		5
1		
	2	
2		
	2	

15

D	x	S
3	4	5
3		
	2	
		2
		3
	1	
	1	

16

J	x	T
3	4	5
		5
2		
	3	
	1	
1		

17

J	x	T
3	4	5
		2
	1	
		2
1		
2	2	
	2	
	1	
		1

18

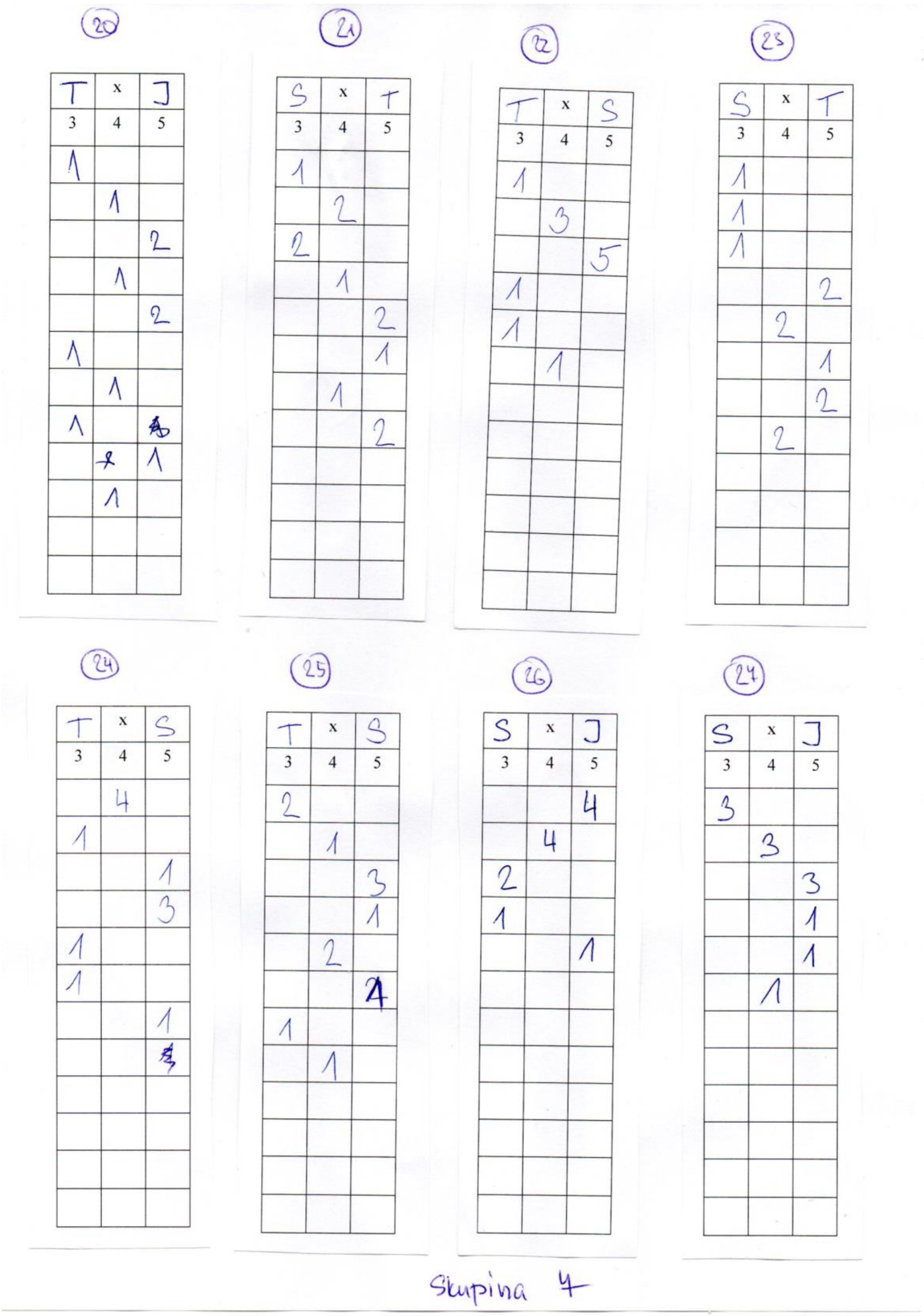
T	x	J
3	4	5
		1
		1
	3	
2		
		3
	1	
1		

19

T	x	J
3	4	5
	3	
3		
		2
		3
	1	

Skupina 4

Příloha 13: Záznamové tabulky - Skupina 7



20

T	x	J
3	4	5
1		
	1	
		2
	1	
		2
1		
	1	
1		[illegible]
	[illegible]	1
	1	

21

S	x	T
3	4	5
1		
	2	
2		
	1	
		2
		1
	1	
		2

22

T	x	S
3	4	5
1		
	3	
		5
1		
1		
	1	

23

S	x	T
3	4	5
1		
1		
1		
		2
	2	
		1
		2
	2	

24

T	x	S
3	4	5
	4	
1		
		1
		3
1		
1		
		1
		[illegible]

25

T	x	S
3	4	5
2		
	1	
		3
		1
	2	
		4
1		
	1	

26

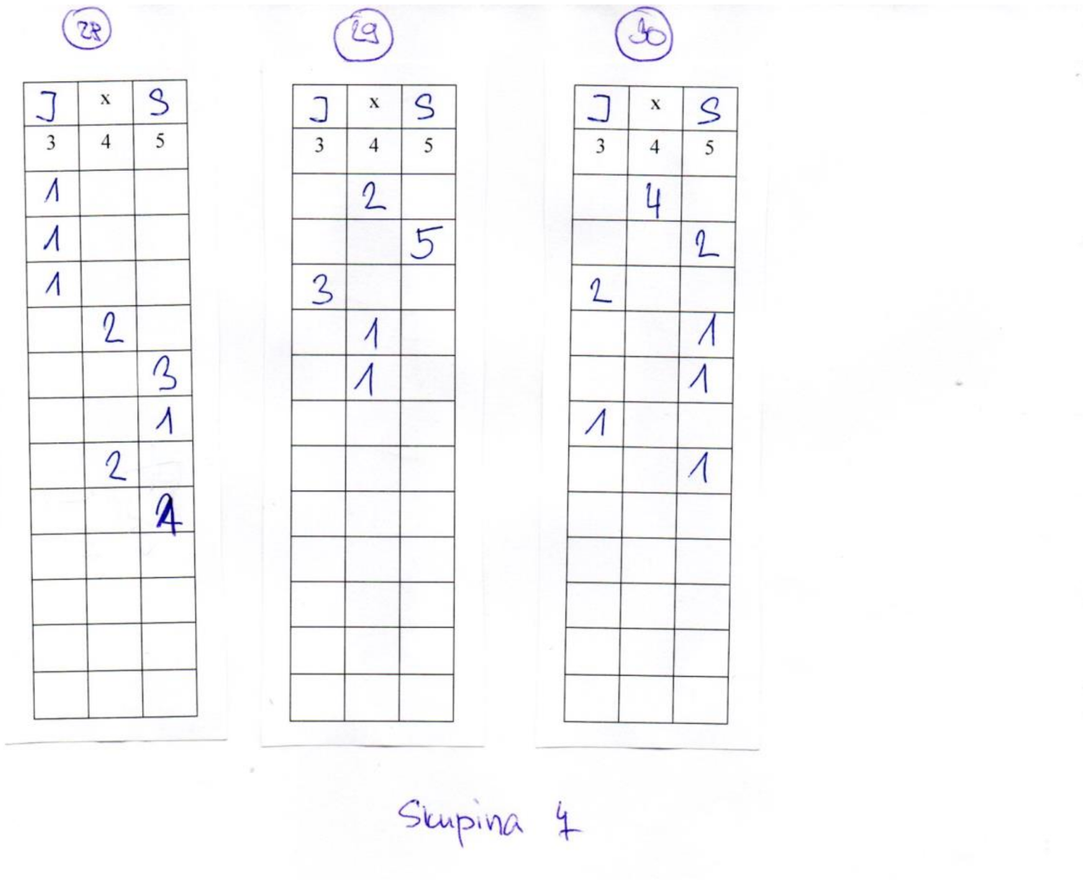
S	x	J
3	4	5
		4
	4	
2		
1		
		1

27

S	x	J
3	4	5
3		
	3	
		3
		1
		1
	1	

Skupina 4

Příloha 14: Záznamové tabulky - Skupina 7



28

J	x	S
3	4	5
1		
1		
1		
	2	
		3
		1
	2	
		1

29

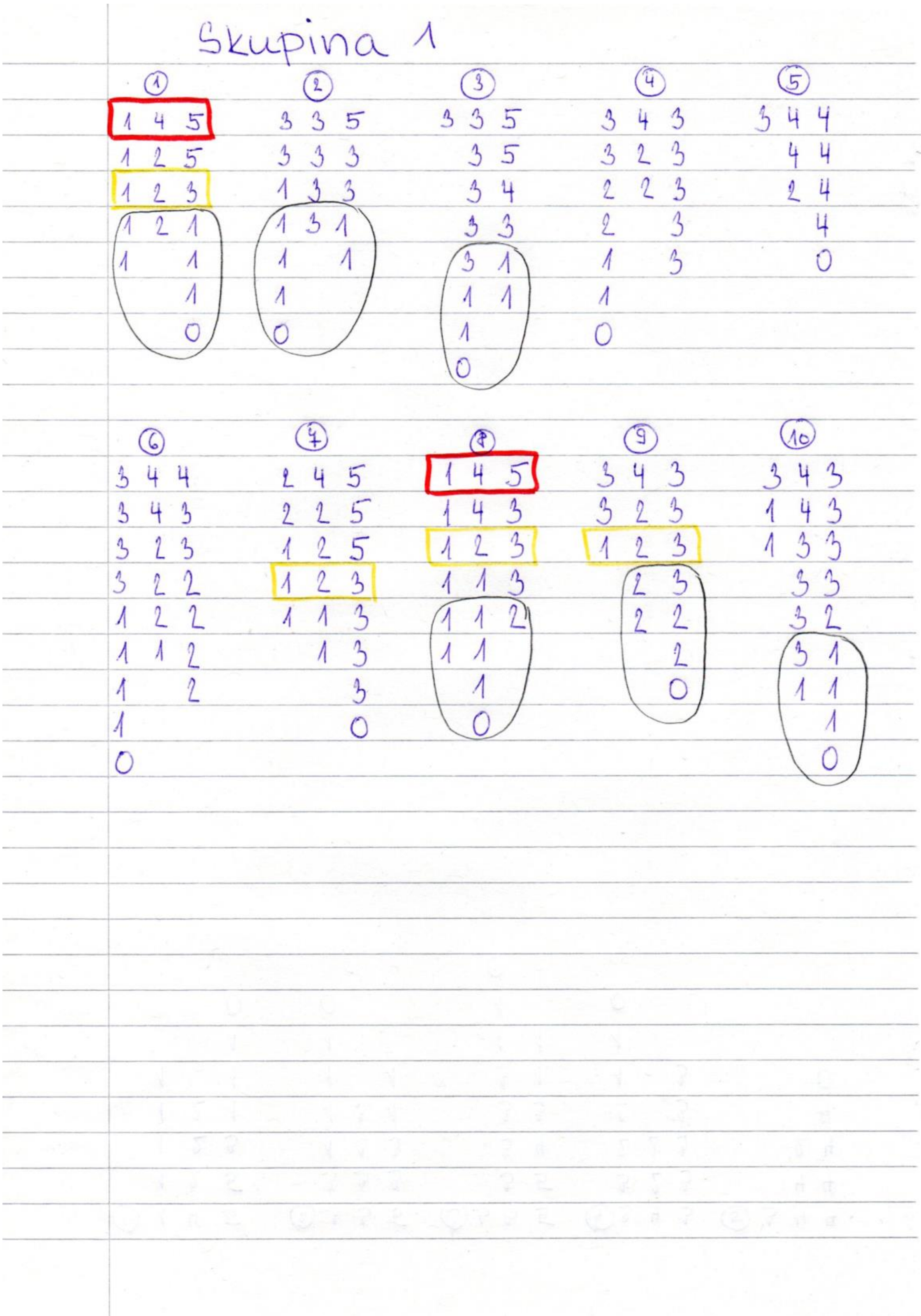
J	x	S
3	4	5
	2	
		5
3		
	1	
	1	

30

J	x	S
3	4	5
	4	
		2
2		
		1
		1
1		
		1

Skupina 7

Příloha 15: Záznamové tabulky - Skupina 7



Skupina 1

①
1 4 5
1 2 5
1 2 3
1 2 1
1 1
1
0

②
3 3 5
3 3 3
1 3 3
1 3 1
1 1
1
0

③
3 3 5
3 5
3 4
3 3
3 1
1 1
1
0

④
3 4 3
3 2 3
2 2 3
2 3
1 3
1
0

⑤
3 4 4
4 4
2 4
4
0

⑥
3 4 4
3 4 3
3 2 3
3 2 2
1 2 2
1 1 2
1 2
1
0

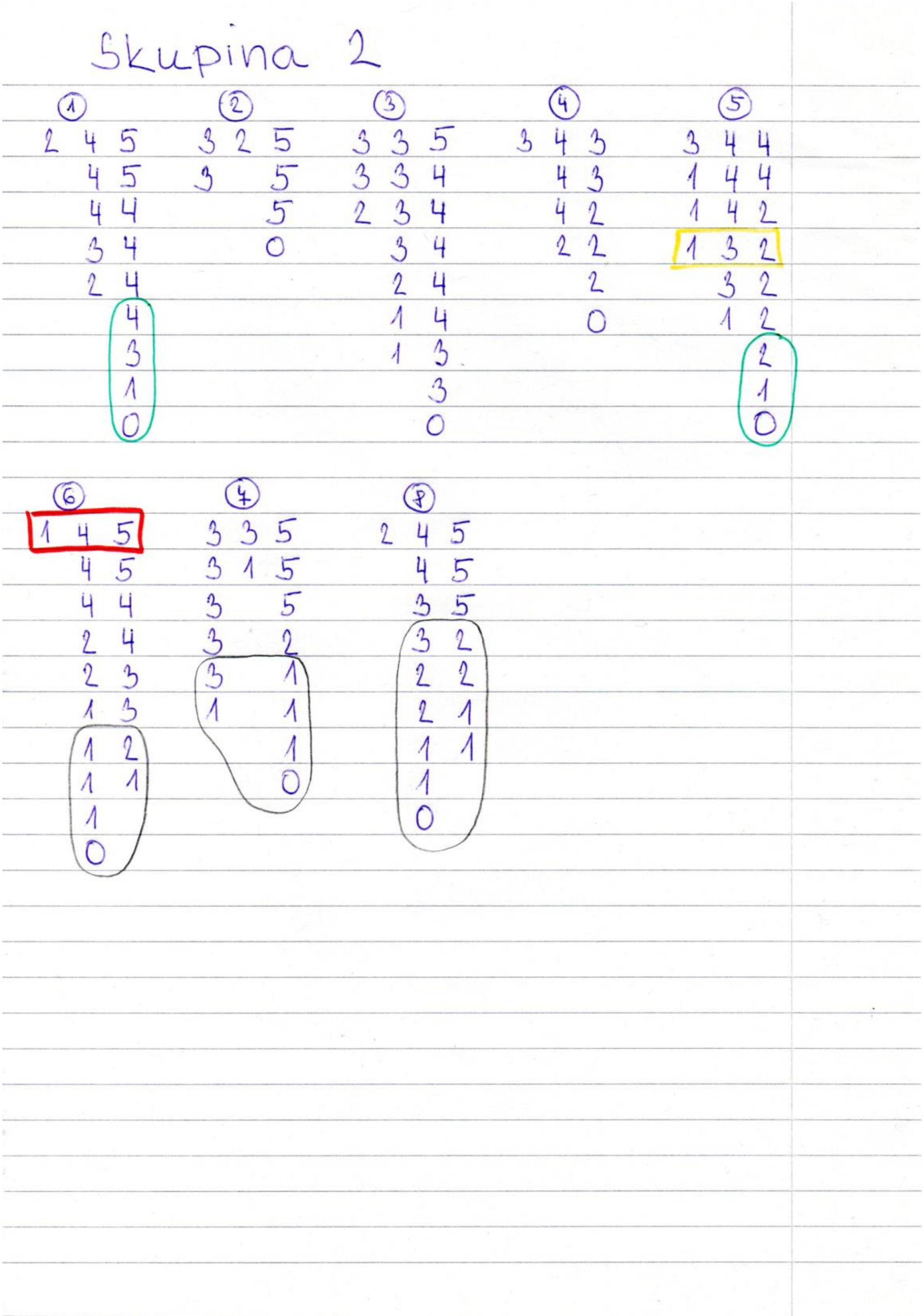
⑦
2 4 5
2 2 5
1 2 5
1 2 3
1 1 3
1 3
3
0

⑧
1 4 5
1 4 3
1 2 3
1 1 3
1 1 2
1 1
1
0

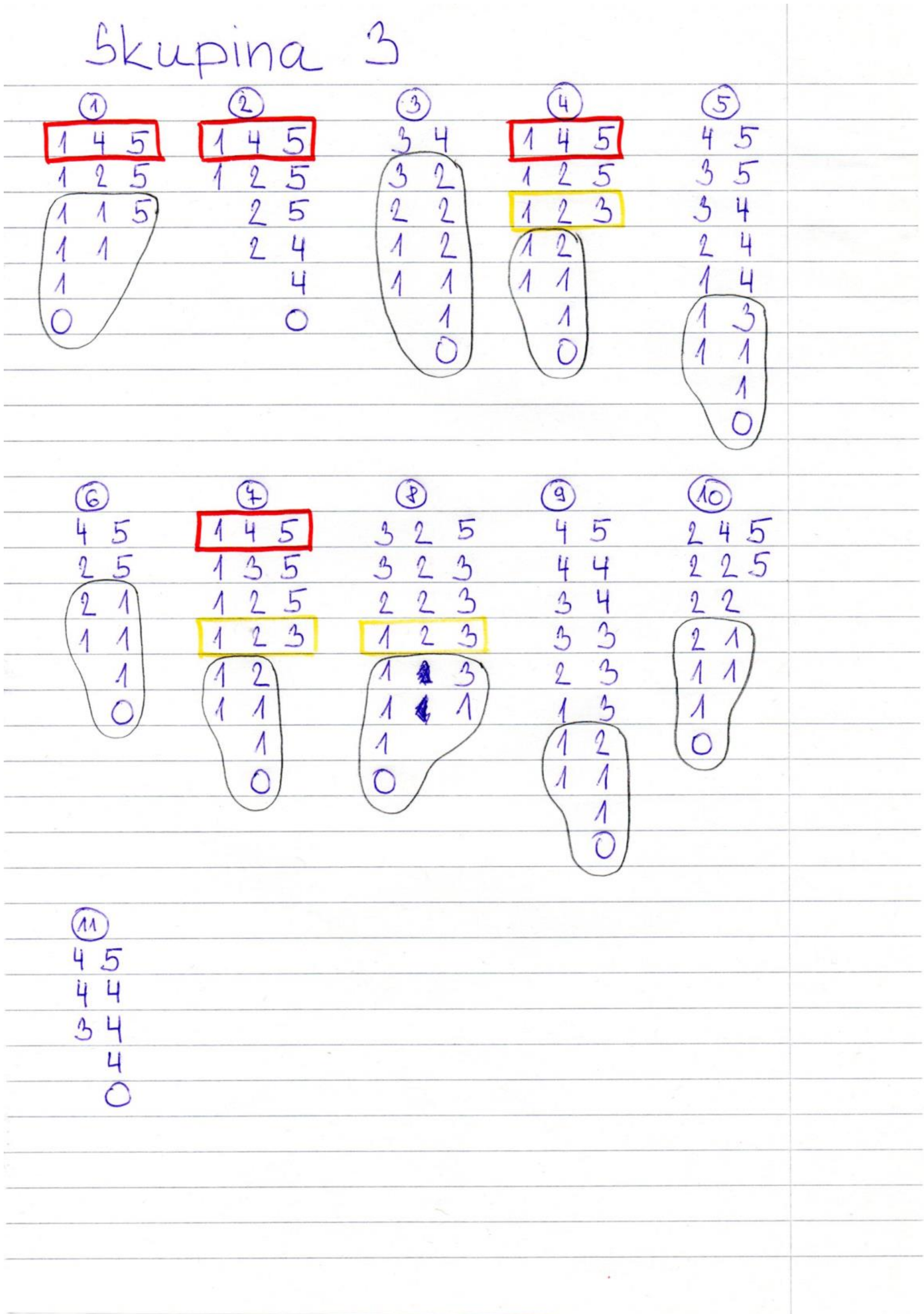
⑨
3 4 3
3 2 3
1 2 3
2 3
2 2
2
0

⑩
3 4 3
1 4 3
1 3 3
3 3
3 2
3 1
1 1
1
0

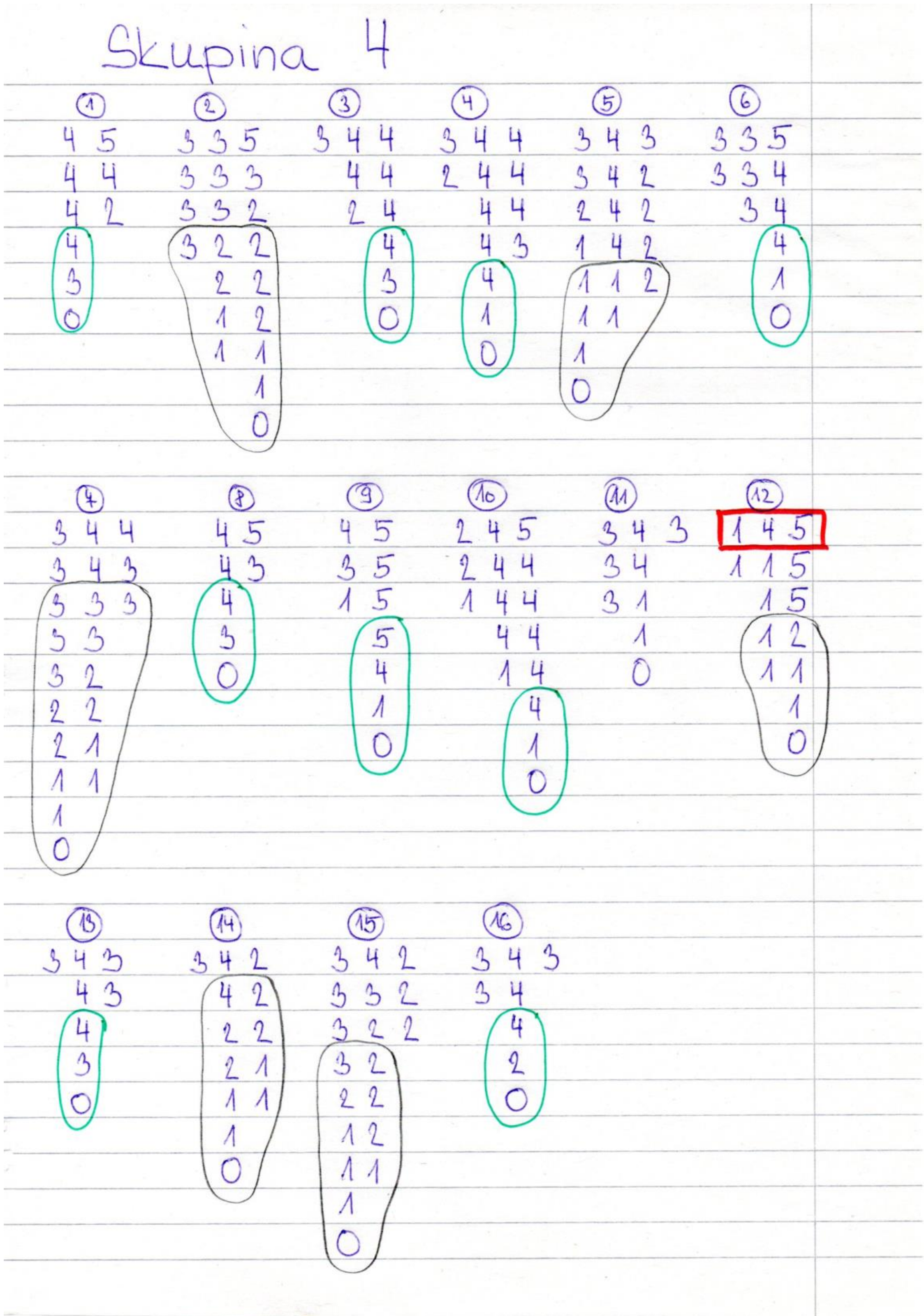
Příloha 16: Analýza Skupina 1



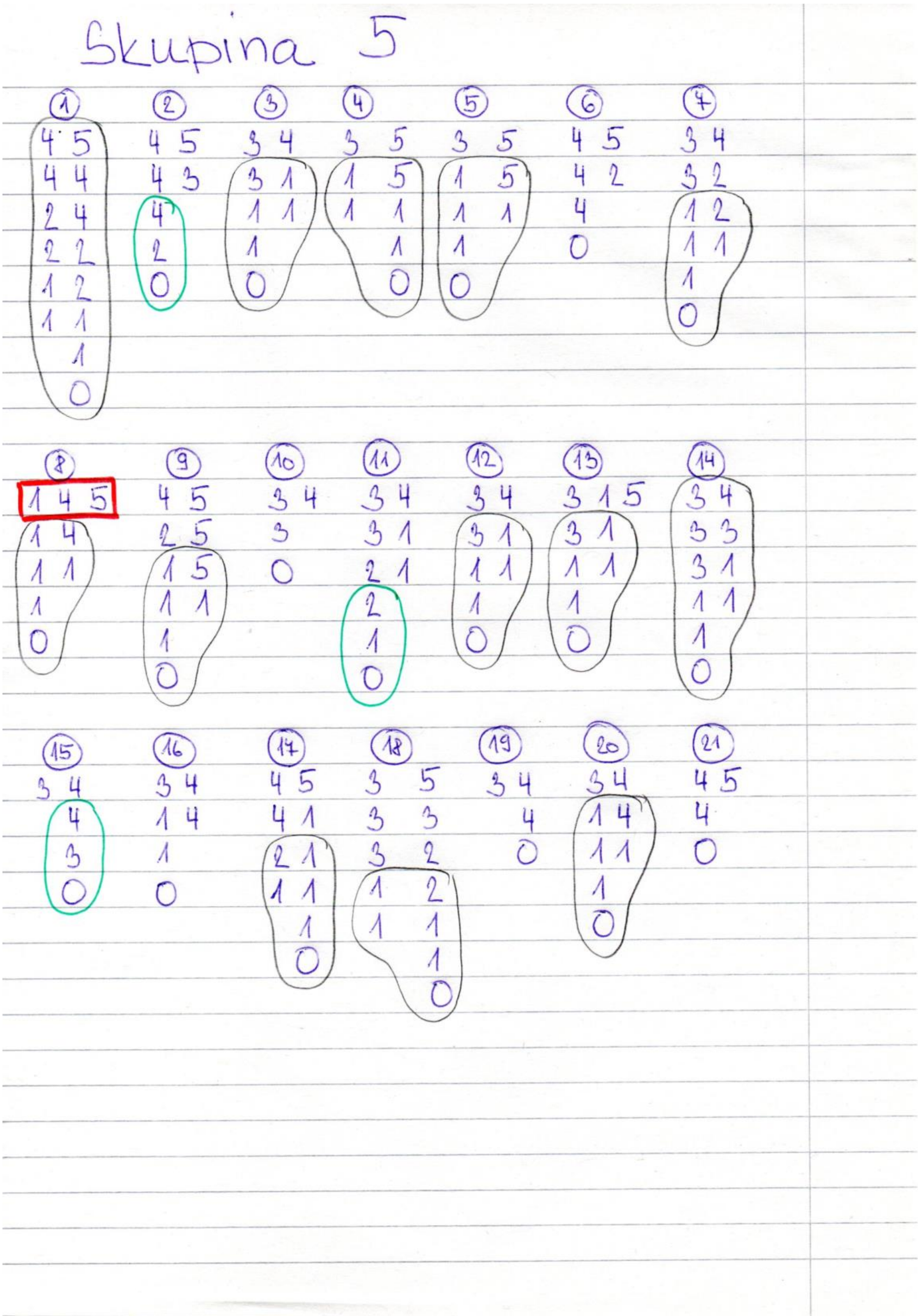
Příloha 17: Analýza Skupina 2



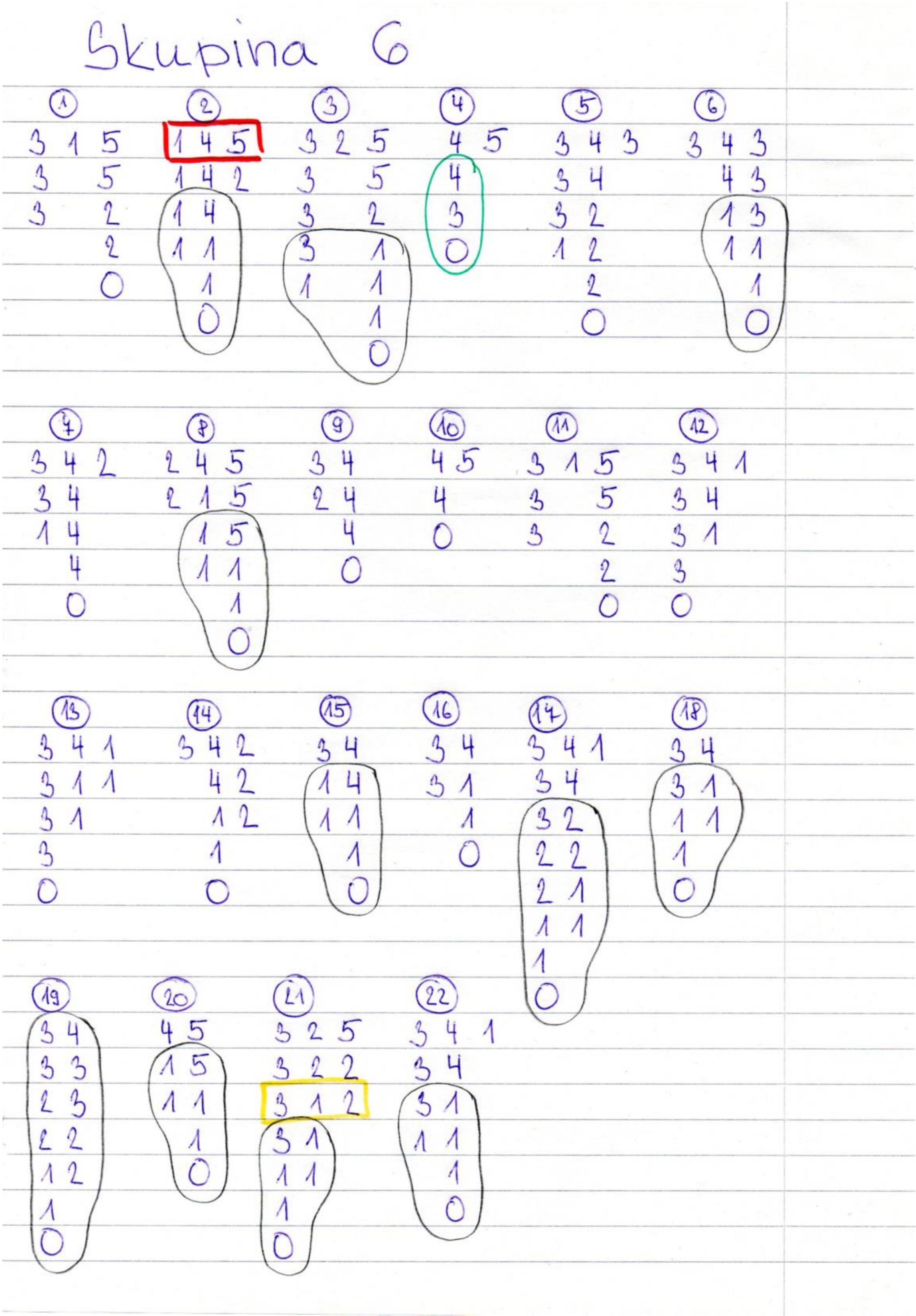
Příloha 18: Analýza Skupina 3



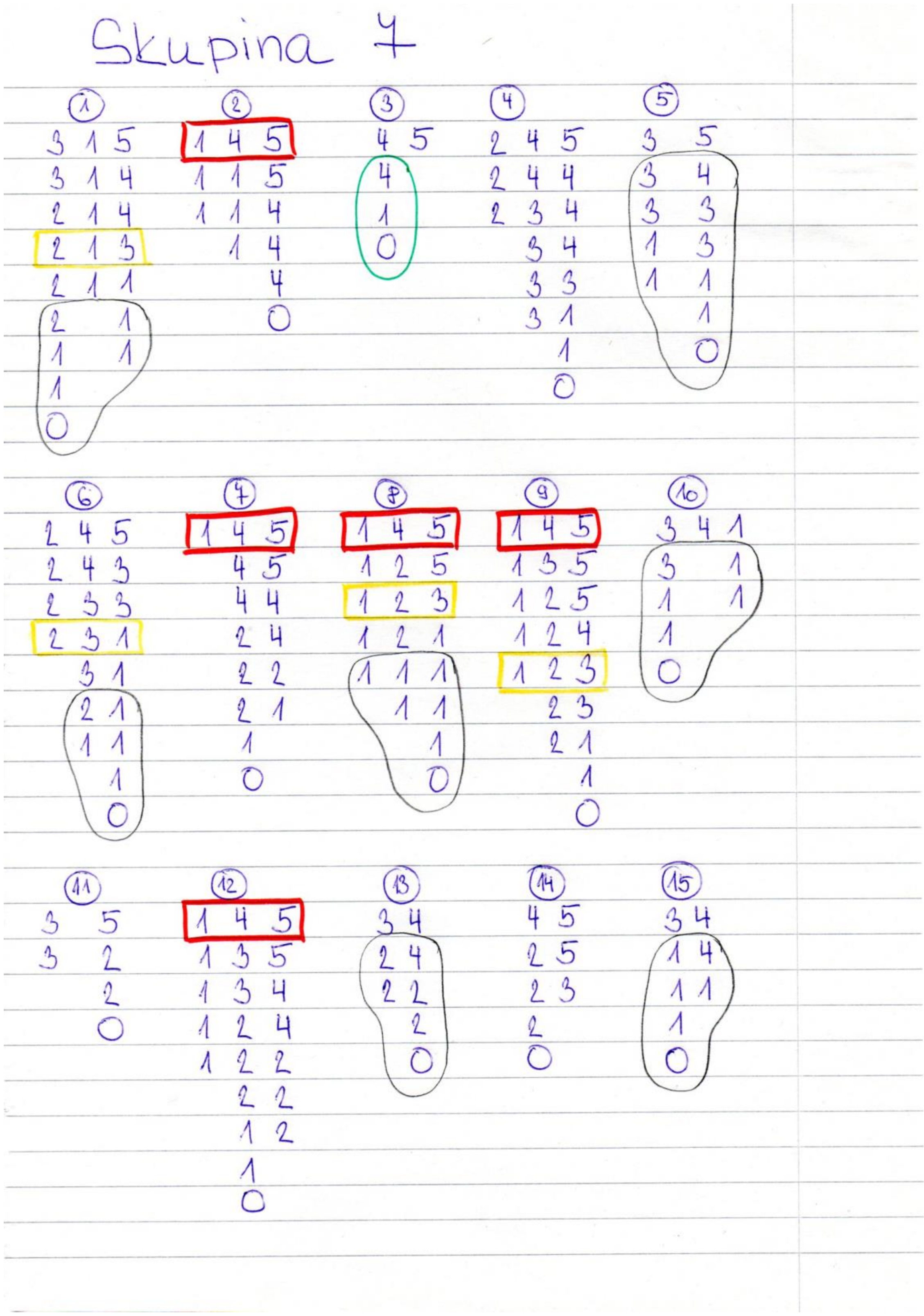
Příloha 19: Analýza Skupina 4



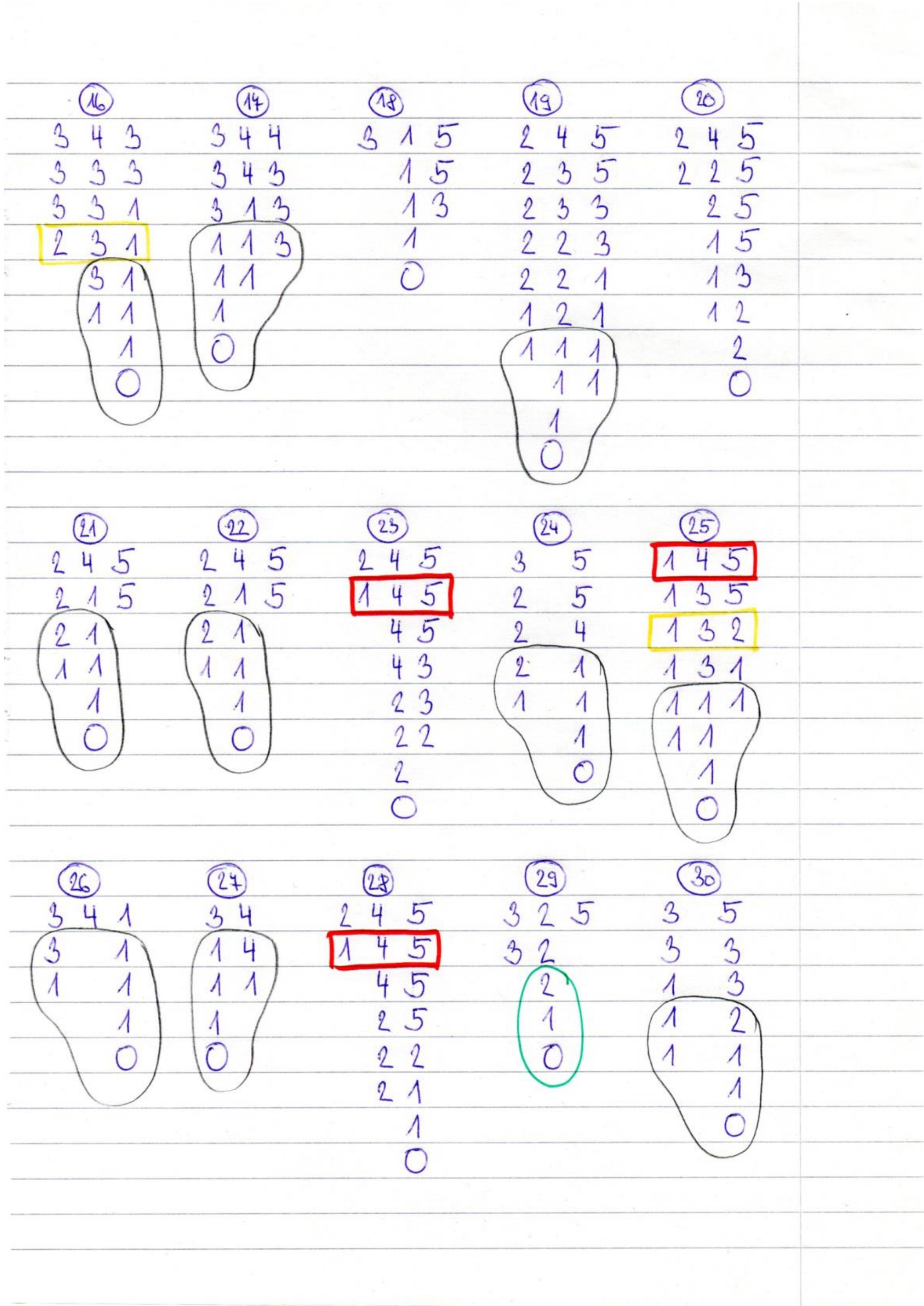
Příloha 20: Analýza Skupina 5



Příloha 21: Analýza Skupina 6



Příloha 22: Analýza Skupina 7



Příloha 23: Analýza Skupina 7