

Numerické modelování interakce proudění a pružného tělesa v lidském vokálním traktu

Diplomová práce

Studijní program: N3901 – Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: 3901T055 – Aplikované vědy v inženýrství

Autor práce: **Bc. Petra Tisovská**
Vedoucí práce: doc. Ing. Petr Šidlof, Ph.D.





TECHNICAL UNIVERSITY OF LIBEREC
Faculty of Mechatronics, Informatics
and Interdisciplinary Studies ■

Numerical modeling of fluid-structure interaction in human vocal tract

Master thesis

Study programme: N3901 – Applied Science in Technology
Study branch: 3901T055 – Applied Science in Technology
Author: **Bc. Petra Tisovská**
Supervisor: doc. Ing. Petr Šidlof, Ph.D.



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Petra Tisovská**
Osobní číslo: **M16000155**
Studijní program: **N3901 Aplikované vědy v inženýrství**
Studijní obor: **Aplikované vědy v inženýrství**
Název tématu: **Numerické modelování interakce proudění a pružného tělesa v lidském vokálním traktu**
Zadávací katedra: **Ústav nových technologií a aplikované informatiky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Seznamte se s problematikou proudění v lidské dýchací soustavě a vokálním traktu. Nastudujte základy teorie interakce proudění s pružnými tělesy, řešení dynamiky mechanických soustav se soustředěnými parametry a numerických metod pro řešení nestlačitelného proudění vazkých tekutin.
2. Nastudujte vybrané pokročilejší koncepty práce s knihovnou OpenFOAM, včetně jednoduchých modifikací kódů v C++ (například implementace vlastních specifických okrajových podmínek).
3. Realizujte numerickou simulaci obtékání modelu kmitajícího tělesa. Pro testy použijte 2D model, funkční simulaci poté spusťte ve 3D paralelně na výpočetním clusteru.

Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Rozsah pracovní zprávy: **40 - 60 stran**
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**
Seznam odborné literatury:

- [1] Titze I. R. (1994), Principles of Voice Production, Prentice Hall.
- [2] Dowel E.H. (1978), A modern course in aeroelasticity, Kluwer Academic Publishers, London
- [3] Šidlof P., Zörner S., Hüppe A. (2015), A hybrid approach to computational aeroacoustics of human voice production, Biomechanics and Modeling in Mechanobiology 14(3), pp. 473-488, DOI 10.1007/s10237-014-0617-1.
- [4] Khalili M., Larsson M., Müller B. (2016), Interaction between a simplified soft palate and compressible viscous flow, Journal of Fluids and Structures 67, pp. 85-105, DOI 10.1016/j.jfluidstructs.2016.09.001.

Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Petr Šidlof, Ph.D.**
Ústav nových technologií a aplikované informatiky

Datum zadání diplomové práce: **19. října 2017**
Termín odevzdání diplomové práce: **14. května 2018**

prof. Ing. Zdeněk Plíva, Ph.D.
děkan



Ing. Josef Novák, Ph.D.
vedoucí ústavu

V Liberci dne 19. října 2017

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé diplomové práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum: 14. 5. 2018

Podpis: Tisovská

Poděkování

Ráda bych zde poděkovala vedoucímu práce doc. Ing. Petru Šidlofovi, Ph.D. za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích. Děkuji rodičům za jejich podporu a trpělivost.

Abstrakt

Interakce proudění a pružného tělesa v lidském vokálním traktu je komplexní a složitý problém. V této práci je proudění popsáno nestlačitelnými Navier-Stokesovými rovnicemi. Diskretizace je provedena metodou konečných objemů v programu OpenFOAM. Dále je nastíněn princip časové a prostorové diskretizace, stejně jako použité okrajové podmínky a metody pro řešení lineárních algebraických rovnic.

Model hlasivek je matematicky popsán diferenciálními rovnicemi a jejich řešení je implementováno v programu Matlab Simulink, který zde slouží pro ověření schopnosti řešiče pimpleDyMFoam pracovat s tělesem se dvěma stupni volnosti. Programový kód řešiče je popsán a okomentován.

Numerické simulace jsou provedeny ve 2D a 3D. Ve 2D jsou zkoumány možnosti deformace sítě, jsou zkoumány možnosti a analýza vlivu počtu elementů sítě na výsledný pohyb tělesa a je nalezena hranice stability systému – kritická rychlost proudění, kdy těleso kmitá s neklesající amplitudou. Ve 3D je simulován případ se stejnými počátečními podmínkami jako pro dvě dimenze. Tyto případy jsou zde porovnány.

Klíčová slova:

Výpočetní mechanika tekutin (CFD), interakce proudění a pružných těles, aeroelastická nestabilita, OpenFoam

Abstract

Fluid-structure interaction in the human vocal tract is a complex and complicated problem. In this master thesis flow is described by incompressible Navier-Stokes equations. Discretization is accomplished by finite volume method in program OpenFOAM. Furthermore, the principle of time and space discretization is given as well as the boundary conditions and methods for the solution of the linear algebraic equation.

Model of the human vocal tract is mathematically described by differential equations and the solution is implemented in Matlab Simulink to verify the ability of pimpleDyMfoam to work with the body with two degrees of freedom. The program code of the solver is described and commented.

Numerical simulations are realized in 2D and 3D. The possibilities of deformation of the mesh are investigated as well as the influence of a number of elements to the body movement and the stability boundary of the aeroelastic system – critical flow velocity, where the body starts to oscillate with increasing amplitudes – is found in 2D. A 3D case is computed and compared to the 2D case with identical boundary and initial conditions.

Keywords:

Computation Fluid Dynamics (CFD), fluid-structure interaction, aeroelastic instability, OpenFOAM

Obsah

Seznam obrázků	10
Seznam tabulek	11
Seznam symbolů	12
Seznam zkratek	13
1 Úvod	14
2 Matematický popis dynamického chování hlasivek	18
2.1 Dynamické rovnice pro náhradní systémy	18
2.1.1 Deska na torzní a lineární pružině	19
2.1.2 Deska na dvou pružinách	21
2.2 Určení konstant tuhosti a tlumení	24
2.2.1 Výpočet konstant matice tuhosti \mathbb{K}	24
2.2.2 Výpočet konstant matice tlumení \mathbb{B}	25
2.3 Interakce proudění s pohybem hlasivky	25
3 Metoda konečných objemů pro řešení nestlačitelného proudění vazkých tekutin	27
3.1 Aproximace objemového integrálu	29
3.2 Aproximace plošného integrálu	29
3.3 Časová diskretizace	31
3.4 Okrajové podmínky	32

3.4.1	Dirichletova podmínka (fixedValue)	33
3.4.2	Neumannova podmínka (zeroGradient)	33
3.4.3	Podmínka pro stěny (noSlip, movingWall)	33
3.4.4	Podmínka pro výstup z oblasti (inletOutlet)	34
3.5	Metody řešení lineárních algebraických rovnic	34
3.5.1	Kritéria konvergence	35
3.5.2	Kritéria stability	36
4	Práce s knihovnou OpenFOAM	37
4.1	Popis zdrojového kódu řešiče	37
4.2	Nastavení metody konečných objemů	38
5	Numerická simulace obtékání modelu kmitajícího tělesa	40
5.1	Ověření řešiče pro dynamiku tuhých těles v OpenFOAM	40
5.1.1	Deska na lineární a torzní pružině	40
5.1.2	Deska na dvou pružinách	43
5.2	Interakce proudění s pružně uloženou hlasivkou	45
5.2.1	Deformace sítě	45
5.2.2	Fyzikální parametry modelu	47
5.2.3	Analýza vlivu počtu elementů sítě na výpočet kmitů	47
5.2.4	Hranice aeroelastické nestability systému – 2D model	48
5.2.5	Vývoj rychlostního a tlakového pole pro 2D simulaci	52
5.2.6	Paralelizace numerické simulace	54
5.2.7	3D simulace	55
	Závěr	58
	Literatura	60
	A Komentovaný zdrojový kód řešiče pimpleDyMFoam	62
	B Obsah příloženého CD	66

Seznam obrázků

1.1	Nejčastěji používané modely pro náhradu pružné tkáně (obrázky jsou převzaty z [1])	15
1.2	Děje probíhající při vzniku lidského hlasu a jejich vzájemná interakce	17
2.1	Zjednodušené schéma řezu hrtanem zobrazující tvar hlasivky	19
2.2	Geometrie tělesa ukotveného v těžišti dvěma pružinami	20
2.3	Geometrie tělesa uloženého na dvou pružinách se dvěma stupni volnosti	22
2.4	Geometrie tělesa představující hlasivku (detail z obrázku 2.1)	23
3.1	Kontrolní objem ve 2D a jeho značení pro diskretizaci oblasti	29
3.2	Princip interpolace toku přes hranici e metodou centrálních diferencí	30
3.3	Geometrie oblasti hlasivek a označení hranic	32
4.1	Objekty se kterými pracuje třída <code>fvMesh</code> (převzato z [2])	38
5.1	Simulační schéma pohybových rovnic (2.6) a (2.7) vytvořené metodou snižování řádu derivace v programu Matlab Simulink	41
5.2	Vývoj výchylky těžiště w pro těleso se dvěma stupni volnosti, schéma viz obrázek 2.2	42
5.3	Vývoj úhlu α , který svírá těleso s osou x , schéma viz obrázek 2.2	42
5.4	Simulační schéma pohybových rovnic (2.17) a (2.18) vytvořené v programu Matlab Simulink	44
5.5	Vývoj výchylky upevnění pružiny w_1 pro těleso se dvěma stupni volnosti, schéma viz obrázek 2.3	44
5.6	Vývoj výchylky upevnění pružiny w_2 pro těleso se dvěma stupni volnosti, schéma viz obrázek 2.3	45

5.7	Geometrie a nedeformovaná síť pro testovací případ. Pohyblivou částí hranice oblasti je kruhový oblouk.	46
5.8	Deformovaná síť	46
5.9	Vyznačená outer distance pro pohybující se hlasivku	47
5.10	Výchylka těžiště w při vstupní rychlosti $u_x = 1$ m/s pro síť s různým počtem elementů	48
5.11	Vývoj kmitů hlasivky s rychlostí na vstupu $u_x = 0$ m/s a počátečním nakloněním $\alpha_0 = 5^\circ$ a k nim příslušná spektra	49
5.12	Vývoj kmitů hlasivky s rychlostí na vstupu $u_x = 0,5$ m/s a počátečním nakloněním $\alpha_0 = 5^\circ$ a k nim příslušná spektra	50
5.13	Vývoj kmitů hlasivky s rychlostí na vstupu $u_x = 1,4$ m/s a počátečním nakloněním $\alpha_0 = 5^\circ$ a k nim příslušná spektra	51
5.14	Vývoj kmitů hlasivky s rychlostí na vstupu $u_x = 1,9$ m/s a počátečním nakloněním $\alpha_0 = 0^\circ$	52
5.15	Vývoj rychlostního a tlakového pole pro vstupní rychlost do oblasti $u_x = 0,5$ m/s a počáteční náklon hlasivky $\alpha_0 = 5^\circ$	53
5.16	Vliv počtu procesorů na čas numerické simulace	54
5.17	Vývoj kmitů hlasivky s rychlostí na vstupu $u_x = 0,5$ m/s a počátečním nakloněním $\alpha_0 = 5^\circ$ ve 3D	55
5.18	Vývoj rychlostního a tlakového pole pro vstupní rychlost do oblasti $u_x = 0,5$ m/s a počáteční náklon hlasivky $\alpha_0 = 5^\circ$ ve 3D	57

Seznam tabulek

2.1	Vlastní frekvence a pološířky rezonanční křivky pro organickou tkáň hlasivek (převzato z [3])	24
5.1	Konstanty tělesa ukotveného na 2 pružinách v těžišti se dvěma stupni volnosti (schéma ukotvení tělesa viz obrázek 2.2)	41
5.2	Konstanty desky ukotvené na 2 pružinách v ose y se dvěma stupni volnosti (schéma ukotvení tělesa viz 2.3)	43
5.3	Fyzikální hodnoty parametrů hlasivky	47
5.4	Počet elementů sítí	48

Seznam symbolů

α	[rad]	úhel náklonu hlasivky
Γ, S		hranice oblasti
Δf	[Hz]	pološířka rezonanční křivky
Δt	[s]	časový krok
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$		koeficienty proporcionálního tlumení
μ	[Pa s]	dynamická viskozita
ρ	[kg/m ³]	hustota
Φ	[m ³ /s]	tok na hranici
B_A	[N s m/rad]	tlumení torzní pružiny
B_L	[N s /m]	tlumení lineární pružiny
\mathbb{B}		matice tlumení
c	[m/s]	rychlost zvuku
C	[Nm/rad]	tuhost axiální pružiny
E_k	[J]	kinetická energie
E_p	[J]	potenciální energie
f	[Hz]	frekvence
F	[N]	aerodynamická síla
g	[m]	pološířka hlasivkové štěrbiny
I	[kgm ²]	moment setrvačnosti
K_1, K_2	[N/m]	tuhosti lineárních pružin
\mathbb{K}		matice tuhosti
l	[m]	vzdálenost ukotvení pružiny od těžiště
L	[m]	délka hlasivky
m	[kg]	hmotnost hlasivky
M	[Nm]	moment aerodynamických sil
\mathbb{M}		matice hmotnosti
\mathbf{n}		vektor vnější normály
p	[Pa]	tlak
R		disipativní člen
t	[s]	čas
T		těžiště
\mathbb{T}		tenzor napětí
U	[m/s]	rychlost proudění
u_x	[m/s]	rychlost na vstupu do výpočtové oblasti
V		kontrolní objem
w	[m]	výchylka
\mathbf{w}		vektor zobecněných souřadnic

Seznam zkratek

CFD Computational fluid dynamics

MKO Metoda konečných objemů

MPI Message Passing Interface

OpenMP Open Multiprocessing

PDE Parciální diferenciální rovnice

TDMA Tridiagonal Matrix Algorithm

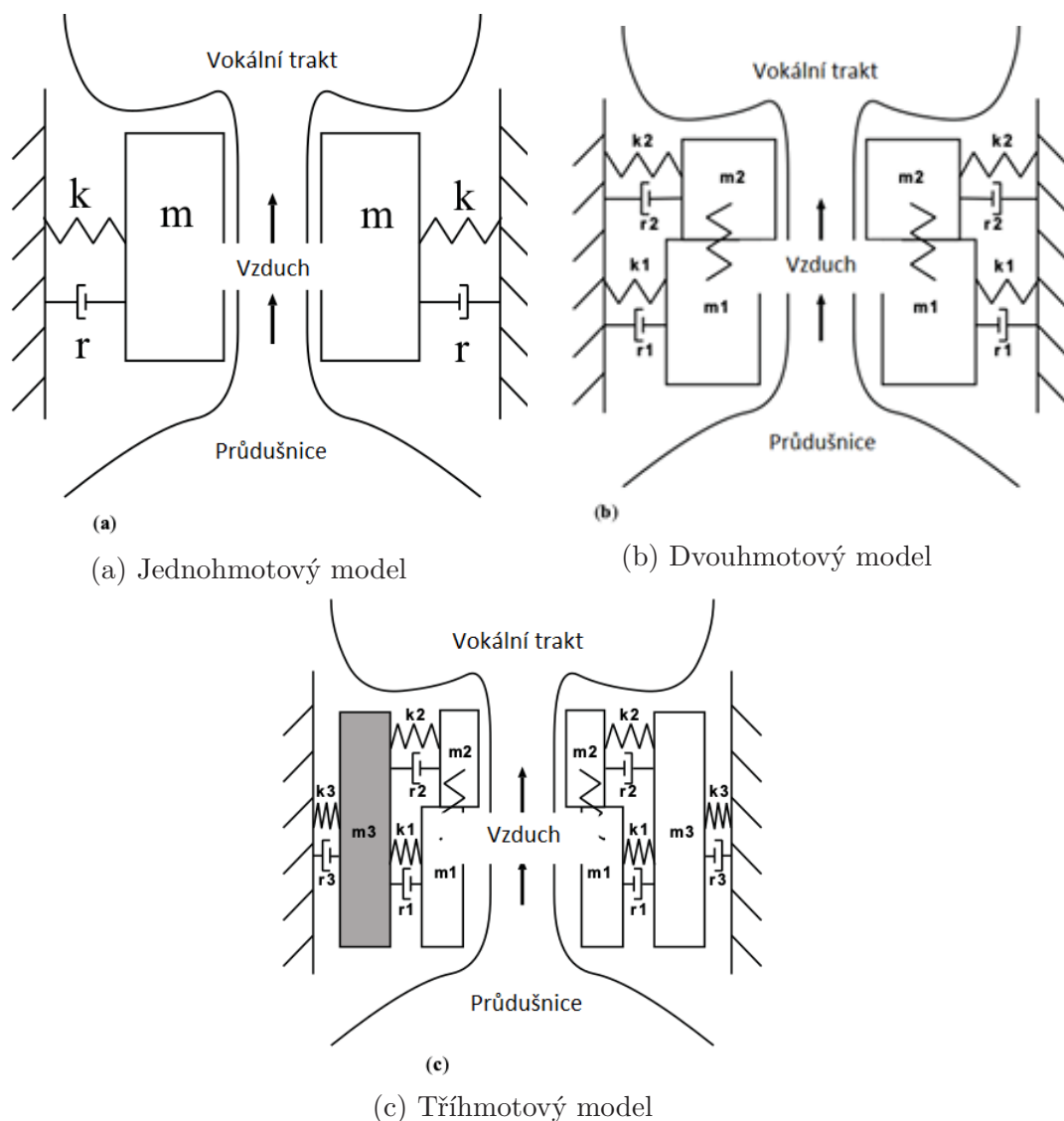
1 Úvod

Lidský vokální trakt je komplexní systém, kde dochází k interakci proudění vzduchu hrtanem, pružných tkání hlasivek a zvukových vln. Kvůli špatnému rozlišení a rizikům spojených s nadměrným ozářením při použití lékařských metod (např. MRI, RTG) zatím nebylo možné pořádit časový záznam pohybů vnitřní struktury deformovatelných vnitřních tkání. Výzkum tohoto důležitého hlasového ústrojí se tedy mimo jiné ubírá směrem matematických modelů a numerických schémat, jejichž výstupy je možné ověřit pomocí pozorovatelných výsledků, jako jsou: frekvence fonace, mezní fonační tlak, vyzařovaný akustický tlak, proudění vzduchu a jiné. Srovnáním různých přístupů k tomuto problému se zabývá Fariborz Alipour a kolektiv autorů ve svém článku [1].

Pohyb pružné tkáně hlasivek lze nahradit zjednodušenými mechanickými modely se soustředěnými parametry. Nejčastěji je to jednohmotový, dvouhmotový a tříhmotový systém. Tato nahrazení jsou schématicky znázorněna na obrázku 1.1. V případě jednohmotového systému je elastická tkáň nahrazena tuhým tělesem o definované hmotnosti a rozměrech, které je pružně uloženo. V závislosti na počtu hmot v modelu lze reprodukovat jednoduché nízko-dimenzionální samobuzené oscilace nebo komplexní vibrace s mnoha oscilačními módy. Jednohmotový systém je prezentován v článku Flanagan a Landgraf [4], kde vzduch proudící z plic nevyvolá samobuzenou oscilaci náhradní hmoty. Důvodem je přílišné zjednodušení modelu.

Velmi často používaný je pak dvouhmotový systém. Ve své práci ho představili například Stevens [5], Steinecke a Herzel [6]. Na rozdíl od jednohmotového modelu se zde objevuje samobuzené kmitání nahrazené tkáně v závislosti na proudění. Podstatnou nevýhodou dvouhmotového modelu je fyziologická nekorelace tuhosti pružiny se svalovou kontrakcí. Z tohoto důvodu Story a Titze [7] vytvořili tříhmotový systém. Ve svém dalším článku [8] úspěšně nastavili parametry pro simulace, která zreprodukovala výsledky uvedené v Hiranově článku [9].

Výjimkou nejsou ani vícehmotové systémy, například Titze [10], [11] sestavil šestnáctihmotový model, který je schopný simulovat vyšší módy vibrací. Model sestává z osmi vzájemně se ovlivňujících podélných částí, každá tato část se dělí na dvě



Obrázek 1.1: Nejčastěji používané modely pro náhradu pružné tkáně (obrázky jsou převzaté z [1])

hmoty. Tento model umožňuje zachytit dvourozměrné trajektorie hlasivky.

Modely s malým počtem hmotnostních dělení se vyznačují svou jednoduchostí a jsou schopny zachytit podstatu vibračních mechanismů z komplexní oscilace hlasivek. Modely jsou limitované v geometrických detailech a mají omezený počet oscilačních módů. Lze je použít pro simulaci nelineární dynamiky. Na druhé straně modely s vysokým počtem hmotnostních dělení mají výrazně vyšší složitost a jsou schopny popsat anatomické a fyziologické struktury výrazně lépe. Produkují hlavní

oscilační módy a mnoho dalších, které jsou ve skutečnosti generovány hlasivkami. Jejich nevýhodou je ovšem mnoho parametrů, které je velmi těžké určit.

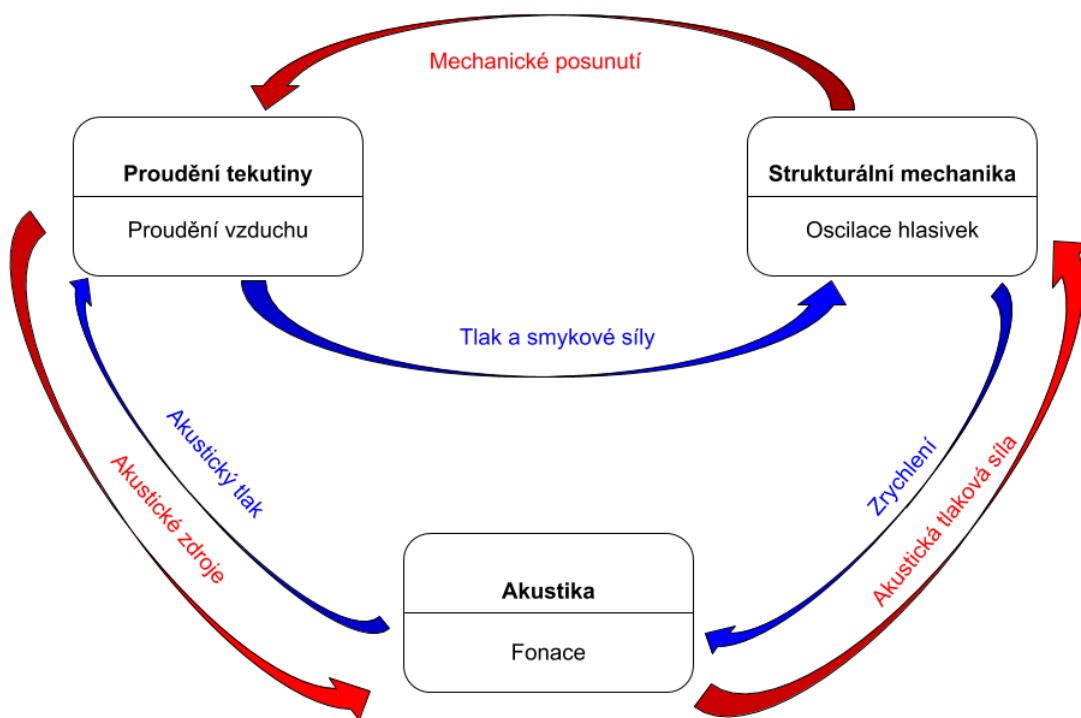
Pro modelování proudění se u vícehmotnostních i málohmotnostních systémů používá Bernoulliho rovnice, Navier-Stokesovy rovnice, nebo Eulerovy rovnice. Jako příklad použití Navier-Stokesových rovnic pro model s nízkým počtem hmotnostních dělení je uveden článek Tao a Jiang [12]. Často je předpokládán model proudění nestlačitelné tekutiny. Při fázi zavírání štěrbiny mezi hlasivkami však dochází k odtrhávání proudění. Přesné nalezení bodu, kde dochází k odtržení proudění je klíčové pro obdržení správných výsledků. Tento přístup použil například Pelorson [13], v jehož modelu se tento bod pohybuje. Model je založený na teorii mezní vrstvy.

Druhý způsob modelování je založen na parciálních diferenciálních rovnicích (PDE). Jedná se o řešení vzájemně provázaných parciálních diferenciálních rovnic pro proudění, strukturální mechaniku hlasivek a akustických dějů, jejichž vzájemná provázanost je zobrazena na obrázku 1.2. Tato metoda je velmi výpočetně náročná. První PDE model byl představen v článku [14]. Jednalo se o dvoudimenzionální problém diskretizovaný metodou konečných prvků. Výpočet sil vzniklých prouděním byl založen na Bernoulliho rovnici. Jako další příklad uvádím článek [15], kde pro 2D simulaci byly vzaty v úvahu všechny jevy: proudění, akustika, strukturální mechanika a jejich vzájemná interakce.

Velkým problémem při modelování samobuzených oscilací při fonaci je kontakt hlasivek. U standardních metod pro diskretizaci oblasti (MKP a MKO) může dojít k tomu, že v oblasti po pohybu hlasivek vzniknou elementy s nulovým rozměrem. Tao a kolektiv autorů [16] využívají pro tento problém Rozšířenou Lagrangeovu metodu v jejich samooscilující 3D simulaci poloviční oblasti.

Další metodou, která se věnuje problému kontaktu hlasivek, je penalizační metoda, její autor je Belytschko [17]. Tuto metodu dále použil Mittal [18], který byl schopen ve 2D rozšířit simulovanou oblast o ústní dutinu a okolí, kde je zvuk měřen mikrofonom. Mittal a kolektiv dále pokračovali ve své práci a rozšířili oblast do třetího rozměru, článek [19]. Mittal použil metodu vnořené hranice.

V budoucnu budou ověřené matematické modely použity pro plánování operací, diagnostikování a rehabilitace přizpůsobené na míru konkrétnímu problému pacientovi.



Obrázek 1.2: Děje probíhající při vzniku lidského hlasu a jejich vzájemná interakce

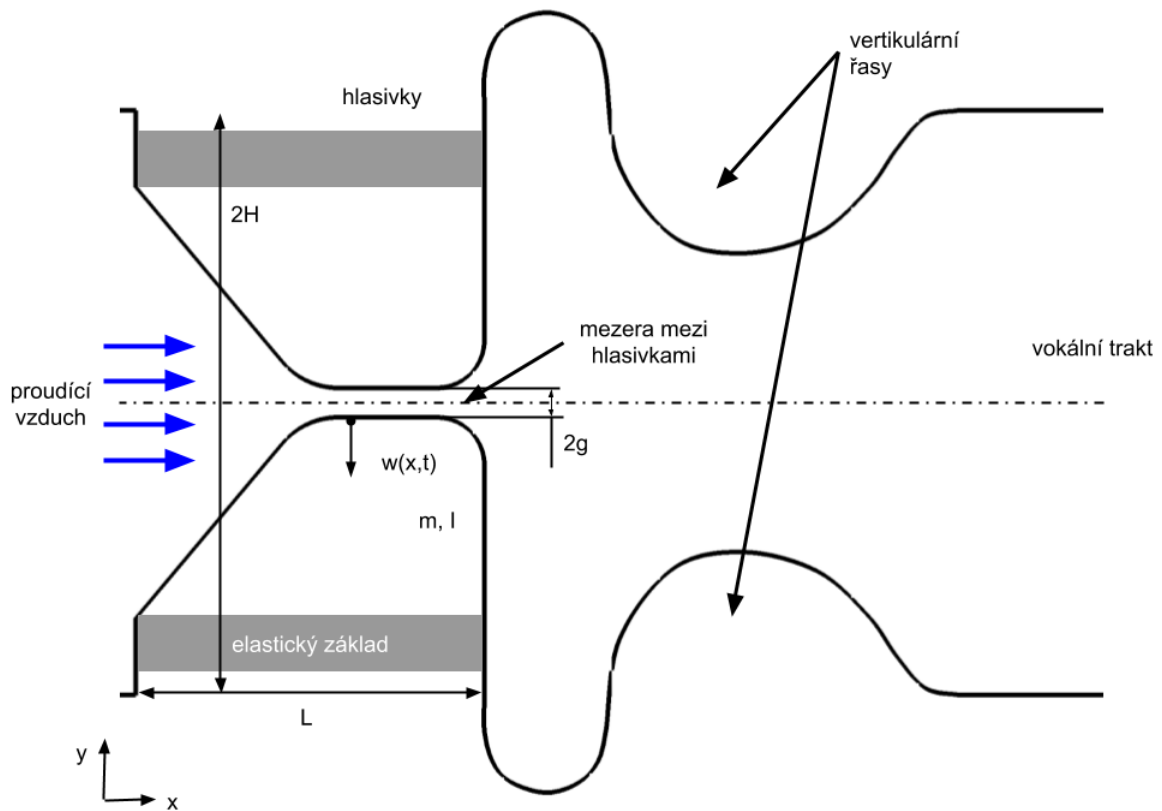
2 Matematický popis dynamického chování hlasivek

Hlasivky jsou pružná struktura kmitající vlivem proudícího vzduchu, svaly provádějí počáteční nastavení tkání a geometrie štěrbiny. Pohyb hlasivek lze popsat soustavou diferenciálních rovnic. Jejich složitost a počet závisí na míře zjednodušení a modelu, který je pro tento popis zvolen.

Řez zjednodušenými hlasivkami je zobrazen na obrázku 2.1. Z obrázku je patrné, že geometrie je symetrická, místo symetrie je v obrázku vyznačeno osou. Nahrazena a matematicky popsána pohybovými rovnicemi bude pouze část vykreslené oblasti. Jedná se o část, která osciluje a na obrázku je vyznačena symbolem L , který značí délku. Tato část má dále definovanou hmotnost m a moment setrvačnosti I . Výchylka je značena $w(x, t)$ a je funkcí času t a polohy x . Označení $2g$ je pro nejmenší vzdálenost mezi hlasivkami v klidu (vzhledem k symetrii je vzdálenost měřena pouze k ose symetrie g), její velikost se během simulace mění v závislosti na pohybu hlasivek. H je označení pro největší rozměr štěrbiny mezi hlasivkou a osou symetrie.

2.1 Dynamické rovnice pro náhradní systémy

Pro jednoduchost je modelován pouze pohyb jedné hlasivky, druhá hlasivka je nehybná. Tato situace odpovídá případu unilaterální paralýzy hlasivek. Dynamický pohyb tělesa je v této diplomové práci řešen pomocí modulu implementovaného do balíku OpenFOAM a nazvaného sixDoFRigidBodyMotion. V této kapitole je představen matematický popis dynamického chování dvou dynamických systémů, které lze použít pro modelování pohybu hlasivky: desky uložené na dvou pružinách a desky na torzní a lineární pružině. Druhý způsob uložení desky (podkapitola 2.1.2) je shodný s uložení hlasivky v simulacích. Pohybové rovnice jsou následně v kapitole 5 odsimulovány v programu Matlab Simulink a porovnány s výsledky z OpenFOAMu pro stejné nastavení systému.



Obrázek 2.1: Zjednodušené schéma řezu hrtanem zobrazující tvar hlasivky

2.1.1 Deska na torzní a lineární pružině

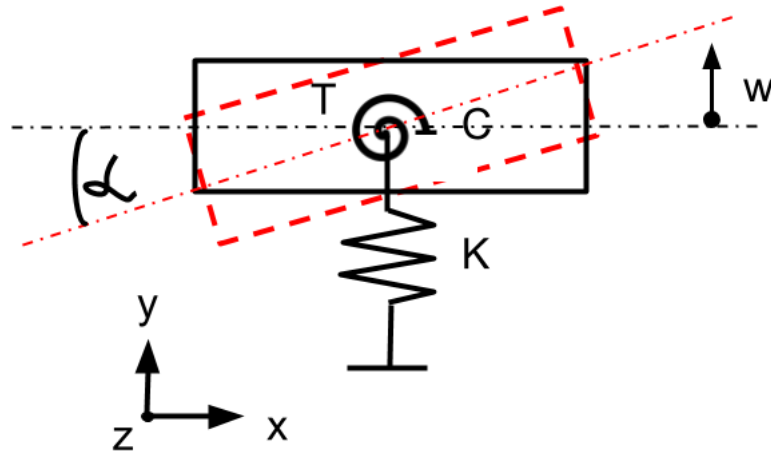
Prvním modelem je těleso ukotvené na lineární a torzní pružině, jak je nakresleno na obrázku 2.2. T značí těžiště, ve kterém jsou obě pružiny ukotveny. K je tuhost lineární pružiny a C je tuhost torzní pružiny vyvolávající moment ve směru osy z . Těleso má dva stupně volnosti, je mu dovolen pohyb ve směru osy y a rotace kolem osy z .

Pohybové rovnice pro tento systém jsou získány použitím Lagrangeových rovnic II. druhu. Vektor zobecněných souřadnic je definován jako

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

kde α značí natočení v čase t a $w(t)$ je výchylka, viz obrázek 2.2. Rovnice pro získání pohybových rovnic je

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{w}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial w_i} = - \frac{\partial E_p}{\partial w_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{w}_i}, \quad (2.2)$$



Obrázek 2.2: Geometrie tělesa ukotveného v těžišti dvěma pružinami

kde index i značí složky zobecněného vektoru souřadnic \mathbf{w} (v tomto případě je $i = \{1, 2\}$). E_k je symbol pro kinetickou energii a E_p značí potenciální energii, R je disipativní člen. V případě tohoto systému jsou kinetická energie E_k a potenciální energie E_p vyjádřeny jako

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{w}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 \quad (2.3)$$

a

$$E_p = mgw + \frac{1}{2}Kw^2 + \frac{1}{2}C\alpha^2. \quad (2.4)$$

Reálná tkáň hlasivek není čistě elastická a má vnitřní tlumení, které je do modelu přidáno ve formě disipativního členu R :

$$R = \frac{1}{2}B_L\dot{w}^2 + \frac{1}{2}B_A\dot{\alpha}^2, \quad (2.5)$$

kde B_L a B_A jsou tlumící konstanty lineární a axiální pružiny.

Po dosazení rovnic (2.3) a (2.4) do rovnice (2.2) jsou získány pohybové rovnice:

$$\ddot{w} = -g - \frac{K}{m}w - \frac{B_L}{m}\dot{w} \quad (2.6)$$

a

$$\ddot{\alpha} = -\frac{C}{I}\alpha - \frac{B_A}{I}\dot{\alpha}. \quad (2.7)$$

Pro sestavení maticového tvaru rovnic je třeba zavést vektor pravých stran: $\mathbf{F}^T = (F_1(t), F_2(t))$. Matice hmotnosti \mathbb{M} a tuhosti \mathbb{K} pro soustavu bez působení gravitační síly jsou (z rovnic (2.6) a (2.7)):

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} B_L & 0 \\ 0 & B_A \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Maticový tvar pohybových rovnic je

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbb{B}\dot{\mathbf{w}} + \mathbb{K}\mathbf{w} = -\mathbf{F}, \quad (2.11)$$

kde vektor pravých stran \mathbf{F} reprezentuje působení vnějších sil. Tyto síly mohou být způsobeny různými vlivy: aerodynamické síly (v případě, kdy nedochází ke kontaktu hlasivek) a kontaktní síly v případě zanoření hlasivek do sebe. Obě síly jsou nelineární. Pravá strana rovnice je popsána podrobněji v podkapitole 2.3.

2.1.2 Deska na dvou pružinách

Model desky na dvou pružinách je zjednodušeným modelem hlasivek. Těleso představující hlasivku je ukotveno na dvou pružinách ve vzdálenosti l_1 a l_2 od těžiště T . Geometrie problému je znázorněna na obrázku 2.3.

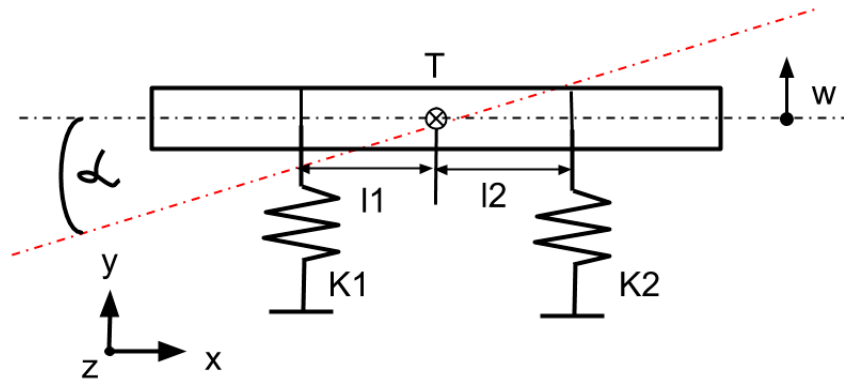
Těleso má dva stupně volnosti. Je sledován pohyb těžiště v ose y a náklon vůči ose x . Vektor zobecněných souřadnic \mathbf{w} je definován stejně jako v předchozím případě:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Pokud $\alpha \neq 0$, dojde k nesymetrické změně délky pružin vyvolané natočením desky. Pro účely analytického odvození pohybových rovnic se předpokládá pohyb pružin pouze v ose y . V reálném případě by z tohoto předpokladu vyplývalo, že deska bude z pružného materiálu a ukotvení pružin na desce bude upevněno ve vedení s jedním stupněm volnosti. Natažení pružin w_1 a w_2 pak lze popsat vztahy

$$w_1 = w - l_1 \cdot \sin(\alpha), \quad (2.13)$$

$$w_2 = w + l_2 \cdot \sin(\alpha). \quad (2.14)$$



Obrázek 2.3: Geometrie tělesa uloženého na dvou pružinách se dvěma stupni volnosti

Kinetická a potenciální energie jsou pak dány:

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{w}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 \quad (2.15)$$

a

$$E_p = mgw + \frac{1}{2}K_1(w - l_1 \cdot \sin(\alpha))^2 + \frac{1}{2}K_2(w + l_2 \cdot \sin(\alpha))^2 \quad (2.16)$$

Po dosazení do rovnice (2.2) mají získané pohybové rovnice soustavy tvar:

$$\ddot{w} = \frac{1}{m} \left(-mg - K_1(w - l_1 \cdot \sin(\alpha)) - K_2(w + l_2 \cdot \sin(\alpha)) \right) \quad (2.17)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{I} \left(K_1(w - l_1 \cdot \sin(\alpha))l_1 \cdot \cos(\alpha) - K_2(w + l_2 \sin(\alpha))l_2 \cdot \cos(\alpha) \right). \quad (2.18)$$

Pro následující podkapitulu 2.2 je nezbytné zapsat rovnice v maticovém tvaru. Předpokládaný náklon desky není větší než 5° . Dle Taylorova rozvoje funkce \sin a \cos lze pro malé úhly aproximovat jejich hodnotu následovně:

$$\sin(\alpha) \approx \alpha, \quad (2.19)$$

$$\cos(\alpha) \approx 1. \quad (2.20)$$

Po dosazení aproximace goniometrických funkcí do pohybových rovnic (2.17) a (2.18) a zanedbání působení gravitace jsou obdrženy zjednodušené pohybové rovnice:

$$m \cdot \ddot{w} = -K_1(w - l_1 \cdot \alpha) - K_2(w + l_2 \cdot \alpha), \quad (2.21)$$

$$I \cdot \ddot{\alpha} = K_1 \cdot l_1(w - l_1 \cdot \alpha) - K_2 \cdot l_2(w + l_2 \alpha). \quad (2.22)$$

Maticový zápis pohybových rovnic je

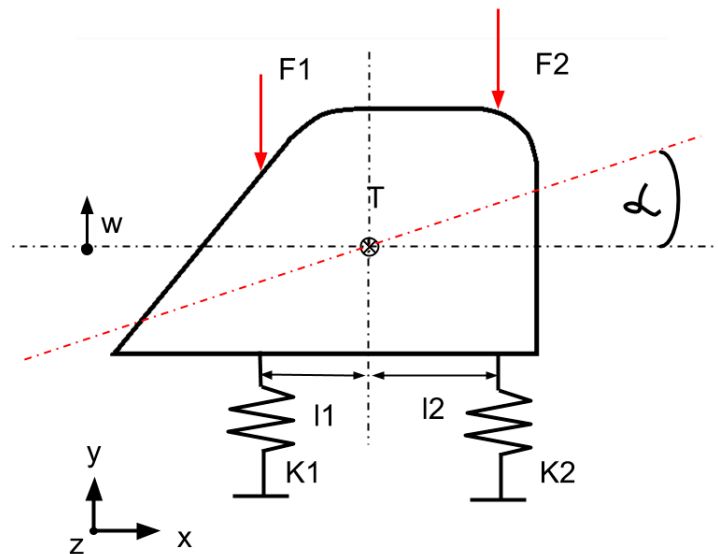
$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbb{K}\mathbf{w} = 0, \quad (2.23)$$

Matice hmotnosti \mathbb{M} a tuhosti \mathbb{K} jsou:

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 & -K_1 \cdot l_1 + K_2 \cdot l_2 \\ -K_1 \cdot l_1 + K_2 \cdot l_2 & K_1 \cdot l_1^2 + K_2 \cdot l_2^2 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Simulovaný model hlasivky je zobrazen na obrázku 2.4. V principu odvození rovnic



Obrázek 2.4: Geometrie tělesa představující hlasivku (detail z obrázku 2.1)

se model hlasivky neliší od odvození provedeného pro desku na dvou pružinách. V následujících úvahách budou tedy použity pohybové rovnice odvozené pro desku na dvou pružinách (viz. podkapitola 2.1.2), konkrétně rovnice aproximované pro malé úhly $\alpha < 5^\circ$ (rovnice (2.23)).

2.2 Určení konstant tuhosti a tlumení

Pro model hlasivky nejsou známy koeficienty matice tuhosti \mathbb{K} a tlumení \mathbb{B} . Tyto konstanty lze odvodit z vlastních frekvencí změřených ex vivo na skutečných lidských hrtanech. Výsledky publikoval Horáček [3]. Vlastní frekvence jsou uvedeny v tabulce 2.1.

Tabulka 2.1: Vlastní frekvence a pološířky rezonanční křivky pro organickou tkáň hlasivek (převzato z [3])

Veličina	Značka	Hodnota [Hz]
Vlastní frekvence	f_1	100
	f_2	160
Pološířka rezonanční křivky	Δf_1	23
	Δf_2	29

2.2.1 Výpočet konstant matice tuhosti \mathbb{K}

V případě pohybové rovnice bez tlumení (2.23) je očekáváno harmonické řešení ve tvaru:

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{W}e^{jst}, \quad (2.26)$$

kde j je imaginární konstanta a s nabývá hodnot

$$s = \omega_1 \quad (2.27)$$

nebo

$$s = \omega_2, \quad (2.28)$$

kde ω_i značí úhlovou frekvenci příslušnou vlastní frekvenci f_i dle vztahu $\omega_i = 2\pi f_i$. Index i nabývá pro tento případ hodnot $i = \{1, 2\}$. Po dosazení řešení do rovnice má soustava tvar

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbb{K}\mathbf{w} = (\mathbb{K} - \mathbf{s}^2\mathbb{M})\mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (2.29)$$

Rovnice má netriviální řešení, pokud je splněna podmínka

$$\det(\mathbb{K} - \mathbf{s}^2\mathbb{M}) = 0. \quad (2.30)$$

Po dosazení(2.24), (2.25) lze tuhosti K_1 a K_2 vypočítat jako řešení rovnice:

$$\det \begin{pmatrix} -m \cdot \omega_1 + K_1 + K_2 & -K_1 \cdot l_1 + K_2 \cdot l_2 \\ -K_1 \cdot l_1 + K_2 \cdot l_2 & K_1 \cdot l_1^2 + K_2 \cdot l_2^2 - I \cdot \omega_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.31)$$

Výsledná hodnota tuhostí je : $K_1 = 140,69 \text{ N/m}$ a $K_2 = 55,07 \text{ N/m}$.

2.2.2 Výpočet konstant matice tlumení \mathbb{B}

Tkáň reálných hlasivek není dokonale elastická a vykazuje nezanedbatelné vnitřní tlumení. Toto tlumení je obtížné identifikovat. V praxi lze použít model proporcionálního tlumení [3] a matici tlumení aproximovat vztahem

$$\mathbb{B} = \varepsilon_1 \mathbb{M} + \varepsilon_2 \mathbb{K}, \quad (2.32)$$

kde koeficienty proporcionálního tlumení se určí z naměřených vlastních frekvencí a pološířek rezonančních křivek jako

$$\varepsilon_1 = 2\pi \cdot \frac{\Delta f_1 f_2^2 - \Delta f_2 f_1^2}{f_2^2 - f_1^2} \quad (2.33)$$

a

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\Delta f_1 - \Delta f_2}{f_1^2 - f_2^2}. \quad (2.34)$$

Koeficienty útlumu jsou dány prvky na diagonále matice \mathbb{B} , $b_1 = b_{11}$ a $b_2 = b_{22}$, kde tlumič s hodnotou $b_1 = 0,047308 \text{ kg/s}$ je lineární. Tlumič b_2 je torzní a má hodnotu $b_2 = 1,7432 \cdot 10^{-7} \text{ Ns}$. Oba tlumiče jsou umístěny v těžišti T .

2.3 Interakce proudění s pohybem hlasivky

V pohybové rovnici (2.11) vektor pravých stran \mathbf{F} reprezentuje síly vyvolané prouděním okolní tekutiny působící na tuhé těleso. Na obrázku 2.4 jsou zobrazeny síly F_1 a F_2 , s jejichž pomocí je definována výsledná síla F a celkový moment M vůči těžišti T :

$$F = F_1 + F_2, \quad (2.35)$$

$$M = F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2. \quad (2.36)$$

Sílu F lze vyjádřit jako plošný integrál

$$F = \int_{\Gamma_{VF}} \tau_2 d\sigma = \int_{\Gamma_{VF}} \sum_{j=1}^2 \mathbb{T}_{2j} n_j d\sigma, \quad (2.37)$$

kde τ je vektor napětí definovaný jako $\tau = \mathbb{T} \cdot n$ a Γ_{VF} je označení používané pro hranici a n je normálový vektor. Tenzor napětí \mathbb{T} je

$$\mathbb{T}_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.38)$$

kde δ_{ij} je Krokeckerovo delta, p je tlak a μ je dynamická viskozita tekutiny. Moment M je dán:

$$M = \int_{\Gamma_{VF}} \sum_{j,k=1}^2 \epsilon_{3jk} \tau_j x_k d\sigma = \int_{\Gamma_{VF}} \sum_{j,k,l=1}^2 \epsilon_{3jk} \mathbb{T}_{jl} n_l x_k d\sigma = \int_{\Gamma_{VF}} \sum_{l=1}^2 (\mathbb{T}_{1l} n_l x_2 - \mathbb{T}_{2l} n_l x_1) d\sigma, \quad (2.39)$$

kde ϵ je Levi-Civitův symbol.

3 Metoda konečných objemů pro řešení nestlačitelného proudění vazkých tekutin

Proudění tekutin je popsáno systémem rovnic zahrnujícím zákon zachování hybnosti (3.1) a hmotnosti (3.2). Těmto rovnicím se také říká Navier-Stokesovy a pro účely této diplomové práce jsou uvedeny pro nestlačitelnou Newtonovskou tekutinu:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \rho \mathbf{u}) = -\nabla p, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.2)$$

kde \mathbf{u} je vektor rychlosti, ρ je hustota, ν je kinematická viskozita a p je tlak.

Systém zákonů zachování je nelineární a vzájemně provázaný, což ho dělá velmi náročným na řešení. Získání analytického řešení je možné ve velmi málo případech, příkladem je laminární proudění v jednoduché výpočetní oblasti – jako třeba proudění v trubce či mezi paralelními stěnami. Tyto případy jsou důležité pro ověření platnosti výše zmíněných zákonů a ověření správnosti numerického řešení, ovšem pro běžné inženýrské problémy je analytický výpočet nepoužitelný.

Vzhledem ke složitosti rovnic jsou často některé jejich části zanedbány či zjednodušeny, čímž je do řešení vnesena chyba. Na druhé straně tato zjednodušení výrazně snižují čas potřebný k řešení daného problému. Jedno z nejčastěji používaných zjednodušení je uvažování tzv. Newtonovské tekutiny, která splňuje rovnici

$$\tau = \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (3.3)$$

kde τ je tečné napětí. Dynamická viskozita μ je definována jako $\mu = \nu \rho$.

Kapaliny lze často považovat za nestlačitelné, hustota ρ je konstanta. Za určitých podmínek lze tuto vlastnost uvažovat i u plynů. Kritériem stlačitelnosti plynů se stalo Machovo číslo

$$Ma = \frac{u}{c}, \quad (3.4)$$

kde c je rychlost zvuku. Proudění plynu lze považovat za nestlačitelné zhruba do hodnoty Machova čísla $Ma = 0,3$. Výše uvedená zjednodušení (Newtonův zákon viskozity (3.3) a předpoklad nestlačitelného proudění) jsou v rovnicích (3.1) a (3.2) již obsažené.

Dalším příkladem zjednodušení může být Eulerův systém, který je vhodný pro popis stlačitelného proudění dosahujícího vysokého Machova čísla. Potenciální proudění je jedním z nejjednodušších druhů proudění, pro které je předpokládána nulová viskozita a nulová vířivost $\text{rot } \mathbf{u} = 0$.

Obecně je postup při získávání řešení pomocí Metody konečných objemů (MKO) následující:

1. Rozdělení oblasti na kontrolní objemy, neboli vytvoření sítě.
2. Integrace rovnic přes kontrolní objem (rovnice (3.5), (3.6)).
3. Převedení objemových integrálů s divergencí na plošné integrály (3.7).
4. Aproximace plošných integrálů pomocí numerických toků.
5. Převedení na soustavu lineárních rovnic a její numerické řešení.

V této práci je diskutována cell-centered formulace metody konečných objemů, která je implementována v programu OpenFOAM. Více o této metodě lze nalézt v knize Ferziger [20].

Navier-Stokesovy rovnice v integrálním tvaru mají podobu:

$$\int_V \left(\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \rho \mathbf{u}) \right) dV = - \int_V (\nabla p) dV, \quad (3.5)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV = 0, \quad (3.6)$$

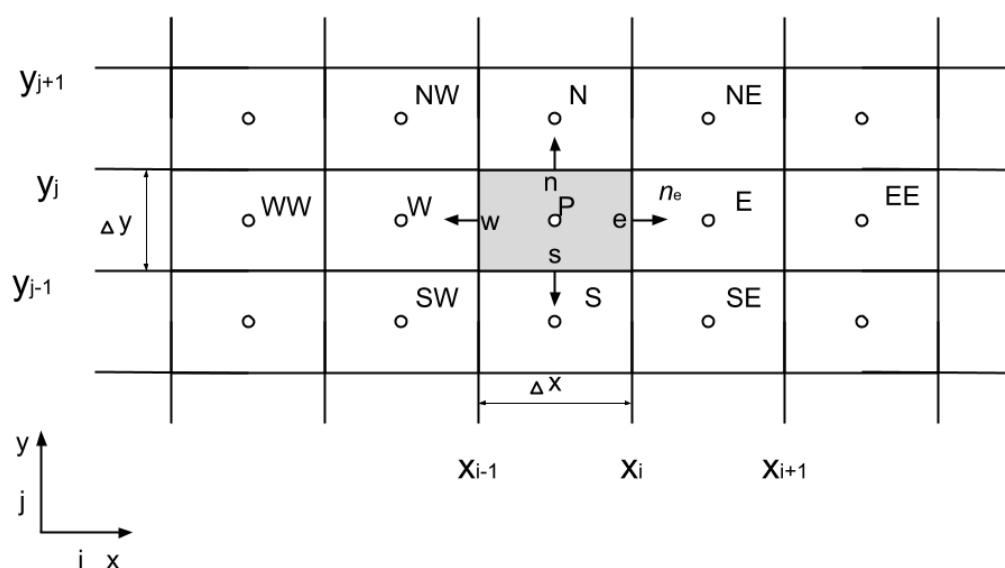
a po použití Greenovy věty:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \mathbf{u}) dV + \underbrace{\int_S \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) dS}_{\text{konvektivní člen}} - \underbrace{\int_S (\nu \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{u}) dS}_{\text{difusivní člen}} = - \int_V \nabla p dV, \quad (3.7)$$

kde V značí kontrolní objem, S je jeho hranice a \mathbf{n} je normálový vektor.

3.1 Aproximace objemového integrálu

Značení použité pro aproximaci integrálů je zobrazeno na obrázku 3.1. Velká písmena jsou těžiště buněk, malá písmena pak pojmenovávají stěny v příslušné světové straně diskutované buňky. Každá stěna má normálový vektor, jehož jméno je na obrázku naznačeno pouze pro východní stěnu \mathbf{n}_e . Jedná se o běžně používané značení pro MKO na strukturovaných sítích.



Obrázek 3.1: Kontrolní objem ve 2D a jeho značení pro diskretizaci oblasti

K aproximaci objemového integrálu na levé straně rovnice (3.7) lze použít více přístupů. Jeden z těchto méně komplikovaných je nahrazení integrálu hodnotou ve středu buňky násobenou objemem buňky:

$$Q_P = \int_V q \, dV \approx q_P \cdot V_P, \quad (3.8)$$

kde hodnota q_P je hodnota funkce q ve středu buňky P . Funkce q zde substituuje členy v objemovém integrálu. Není nutná žádná interpolace.

3.2 Aproximace plošného integrálu

Integrál přes hranici kontrolního objemu je rozdělen na součet integrálů přes každou z hran elementu, ve 2D je $k = \{1, 2, 3, 4\}$ pro obdélníkové elementy a ve 3D je

$k = \{1, 2, \dots, 6\}$ pro kvádry. V závislosti na typu elementu se velikost k_{max} může lišit.

$$\int_S f dS = \sum_k \int_{S_k} f dS \quad (3.9)$$

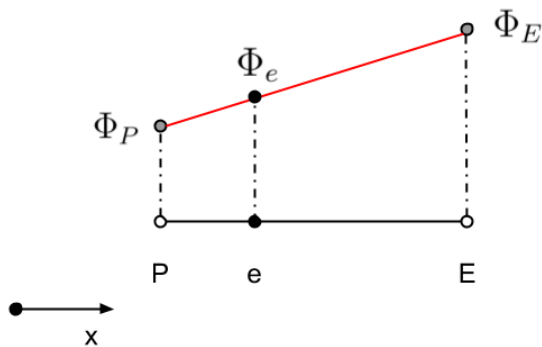
Hodnota funkce f , která v tomto případě substituuje konvektivní či difúzní člen, není známa v celé buňce, ale pouze v těžišti elementu P a v těžišti sousedních elementů. Proto je nutné zavést interpolaci. V knihovně OpenFOAM je na výběr z několika interpolačních schémat, jejichž použití lze vybrat v souboru `system/fvSchemes`. Schéma 1. řádu se jmenuje `Upwind` a v OpenFOAM ho lze použít zadáním hesla `Gauss upwind`.

Upwind aproximuje hodnotu integrované veličiny na hranici mezi řešenou buňkou a její pravou sousedkou dle směru toku:

$$\Phi_e = \begin{cases} \Phi_P \text{ pokud } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_e > 0 \\ \Phi_E \text{ pokud } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_e < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Tato operace je posléze provedena pro všechny zbývající toky a jejich příslušné hranice. Nespornou výhodou schématu je jednoduchost a fakt, že nikdy nemůže vzniknout numerická oscilace řešení. Nevýhodou je vznik numerické chyby v přibližném řešení (tzv. numerická difuze).

Centrální diference vede na schéma 2. řádu. Hodnoty v bodě P a E jsou proloženy přímkou a hodnota Φ_e je vypočtena lineární interpolací, jak je znázorněno na obrázku 3.2. Toto schéma je nestabilní pro proudění s dominantní konvekcí. V knihovně OpenFOAM ho lze najít pod označením `Gauss linear`.



Obrázek 3.2: Princip interpolace toku přes hranici e metodou centrálních diferencí

Další používané schéma se nazývá `Quadratic upwind`. Hodnoty toku mezi P a E se v tomto případě neaproximují přímkou, ale parabolou. Aby bylo možné parabolu popsat, je potřeba třetí bod. V případě aproximování Φ_e je vybrán bod W . Další

schémata jsou například TVD schéma (total variation diminishing schemes) nebo NVD schéma (normalized variable diagram), podrobnější popis těchto schémat lze najít v knize Versteeg a Malalasekera [21]. Konečná volba aproximace závisí na požadovaném řádu schématu a na Reynoldsově čísle pro daný případ. Pokud je Re vysoké, je dominantním jevem konvekce a použití některých schémat (např. centrální diference) může vést k nestabilitě řešení.

3.3 Časová diskretizace

Po provedení prostorové diskretizace je třeba zvolit vhodné schéma pro časovou diskretizaci. Schémata se dělí na implicitní a explicitní. Pro explicitní schémata musí být splněna Courantova podmínka (viz. kapitola 3.5.2).

Jako příklad explicitního schématu je uvedeno dopředné Eulerovo schéma. Tato aproximace je 1. řádu. Pro získání řešení na nové časové úrovni t_{n+1} je nezbytné znát všechny neznámé získané prostorovou diskretizací v čase t_n . Tato metoda je výhodná pro svou rychlost výpočtu a minimální paměťové nároky. Často se používá jako start pro metody vyššího řádu, kde je potřeba získat $m - 1$ časových kroků ke spuštění metody m -tého řádu. Další případ explicitní metody je velmi populární metoda Runge-Kutta 4. řádu.

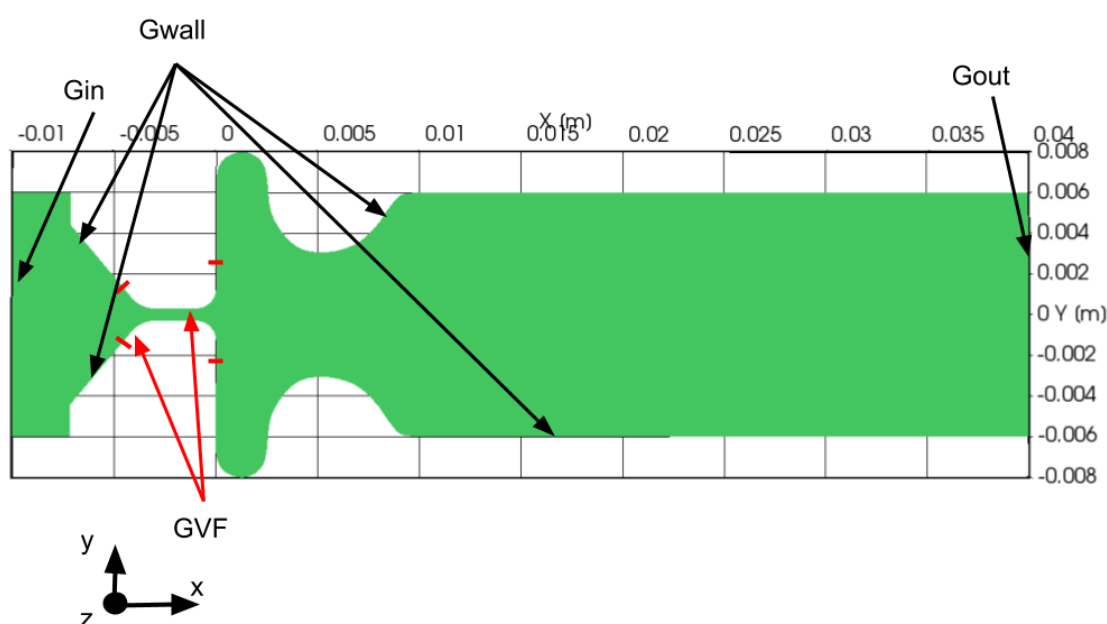
Implicitní schémata jsou použita, pokud je stabilita hlavním požadavkem. Dále je možné pro tyto metody použít výrazněji delší časový krok než pro ten samý případ řešený explicitním schématem. Je požadováno řádově více operační paměti. Jedním z příkladů implicitní metody je zpětná Eulerova metoda. Jedná se o schéma 1. řádu. Toky a zdrojové členy jsou aproximovány pomocí neznámých hodnot veličiny v nové časové úrovni. Výsledkem je tedy systém algebraických rovnic. V knihovně OpenFOAM se toto schéma vybere v souboru `system/fvSchemes` pod položkou `ddtSchemes` příkazem `Euler`.

Implicitním schématem 2. řádu je například Crank-Nicholsonovo schéma. Toto schéma nepotřebuje o moc více výpočetních operací než zpětný Euler 1. řádu. Ovšem dle Von Neumannovy analýzy stability nelze zaručit omezenost řešení. V OpenFOAM ho lze vybrat příkazem: `CrankNicholson`. Posledním příkladem je BDF2, dvoukrokové schéma 2. řádu, tedy je nutné ukládat výsledky v další časové úrovni, také nezaručuje omezenost řešení a v programu OpenFOAM ho lze vybrat jako: `backward`.

3.4 Okrajové podmínky

Na každém kontrolním objemu jsou počítány diskretizované Navier-Stokesovy rovnice. V případě plošného integrálu musí být známé toky skrz hranice. Tyto hodnoty jsou získány interpolací v případě buňky, která není hraniční. Pro takovou buňku musí být předem definované okrajové podmínky.

V této podkapitole je uvedeno, jak jsou okrajové podmínky definovány v programu OpenFOAM. Ze široké škály existujících okrajových podmínek jsou uvedeny pouze ty, které jsou použité při numerických simulacích provedených v rámci této diplomové práce. Jednoduché schéma oblasti s popisem hranic je uvedeno na obrázku 3.3.



Obrázek 3.3: Geometrie oblasti hlasivek a označení hranic

Oblast je rozdělena na následující hranice:

- Gin: zde je předepsána konstantní rychlost proudění
- Gout: výstup z oblasti
- GVF: stěna pohybující se hlasivky
- Gwall: nepohyblivá stěna
- empty: podmínka používaná ve 2D simulacích pro třetí rozměr

3.4.1 Dirichletova podmínka (fixedValue)

Podmínka byla uplatněna na Γ_{in} pro rychlost \mathbf{u} a Γ_{out} pro tlak p .

Jedná se o podmínku 1. druhu, tzv. Dirichletovu. Podmínka slouží k předepsání hodnoty na hranici oblasti, pro kterou je použita. Hodnota na stěně příslušné hranice je dána:

$$\Phi_{ref} = \Phi_f, \quad (3.11)$$

kde Φ_f je hodnota na stěně elementu a Φ_{ref} je referenční hodnota dána podmínkou. Na Γ_{in} byla předepsána konstantní rychlost U . Na Γ_{out} byla pro tlak p předepsána nulová hodnota.

3.4.2 Neumannova podmínka (zeroGradient)

Podmínka byla uplatněna na Γ_{in} , Γ_{wall} pro tlak p .

Jedná se o okrajovou podmínku 2. druhu, tzv. Neumannovu. Tato podmínka předepisuje nulový tok hranicí, pro kterou je specifikována. Jedná se o speciální druh obecnější podmínky fixního gradientu (fixedGradient), která je dána vztahem:

$$\Phi_f = \Phi_P + \Delta \nabla \Phi_{ref}, \quad (3.12)$$

kde Φ_f je hodnota na stěně elementu, Φ_P je hodnota buňky v těžišti, $\nabla \Phi_{ref}$ je referenční hodnota gradientu a Δ je vzdálenost mezi stěnou a těžištěm první buňky.

3.4.3 Podmínka pro stěny (noSlip, movingWall)

Podmínka noSlip byla uplatněna na Γ_{wall} pro U .

Tato podmínka se využívá pro rychlost proudění U . V důsledku viskozity ve velmi malé vzdálenosti u stěny má proudící tekutina stejnou rychlost jako stěna:

$$u_{wall} = u_{fluid}. \quad (3.13)$$

Pokud se jedná o simulaci se stacionárními stěnami, je rychlost tekutiny $u_{fluid} = (0, 0, 0)$. V případě simulace s pohybujícím se tělesem je na stěně tělesa předepsána rychlost pohybu tělesa v daném okamžiku, podmínka movingWall.

3.4.4 Podmínka pro výstup z oblasti (inletOutlet)

Podmínka byla uplatněna na Γ_{out} pro U , kde nastaví hodnotu specifikovanou uživatelem pro zpětný tok (backflow) a hodnotu zeroGradient pro odtok. Zpětný tok je v případě, že skalární součin rychlosti s vnější normálou $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$, odtok je definován jako $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0$.

3.5 Metody řešení lineárních algebraických rovnic

Výsledkem diskretizace Navier-Stokesových rovnic (3.1), (3.2) metodou konečných objemů je v případě implicitního časového schématu soustava algebraických rovnic. Matice vygenerované metodou konečných objemů jsou řídké. Nenulové prvky většinou leží kolem diagonály, v závislosti na způsobu diskretizace oblasti, zejména pak očíslování buněk.

Řešiče lineárních systémů se dělí na přímé a iterační. Přímé řešiče jsou spolehlivé a umožňují v konečném počtu kroků vypočítat přesné řešení lineárního systému. Jejich nevýhodou je však výpočetní a paměťová náročnost a proto nejsou vhodné pro velké systémy rovnic. Nejjednodušší přímou metodou je Gaussova eliminace, která má velmi přímočarý postup. Tato metoda je velmi jednoduchá, ovšem už první operací vznikne z řídké matice plná.

Další metoda se nazývá LU faktorizace. Jedná se o rozdělení matice na součin matic, z nichž jedna má formu horní trojúhelníkové a druhá dolní trojúhelníkové matice. Jako poslední příklad metody je zde uvedena speciální metoda pro tridiagonální matice: Tridiagonal Matrix Algorithm (TDMA). Oproti Gaussově eliminaci je však značně jednodušší. Gaussova eliminace má složitost $O(n^3)$, TDMA má složitost pouze $O(n)$.

Iterativní řešiče se vyznačují tím, že se snaží s každým krokem zpřesnit řešení a jsou schopny poskytnout řešení pro mnoho rovnic s přijatelnou přesností. Nejjednodušší metodou je Jacobiho metoda, která se prakticky nevyužívá a slouží pouze k pedagogickým účelům. Na základě této metody vznikla metoda Gauss-Seidelova. S využitím principu LU faktorizace vznikla metoda Stonova. Existuje celá řada dalších iteračních metod, které jsou postavené na základě relaxačního parametru zrychlující konvergenci, nebo na základě Krylovovské metody. Více o těchto metodách lze nalézt v knize [20].

Zvláštní skupinou iteračních metod jsou tzv. Multigridy, neboli Víceúrovňové metody. Základní motivací je zrychlit konvergenci iterační metody pro velké problémy. Běžné iterační metody vyhlazují rychle vysokofrekvenční chyby, ale pomalu tlumí ty nízkofrekvenční. Proto je použito několik různě velkých sítí (matic). Na hrubé

síti se rychle odstraní nízkofrekvenční chyby a výsledek se interpoluje na síť podrobnější. Existuje cyklů více, jako příklad je zde uveden základní V-cyklus:

- Řešení je prováděno na jemné síti pro vyhlazení vysokofrekvenčních chyb.
- Dojde k restrikci na síť hrubou.
- Řešení je prováděno na hrubé síti pro vyhlazení nízkofrekvenčních chyb.
- Dojde k interpolaci zpět na jemnou síť.
- Proveďte se konečný výpočet pro dosažení požadované přesnosti řešení.

Víceúrovňové metody se dělí dle úrovně, na nichž jsou použity: algebraické a geometrické. Jak název napovídá, algebraické jsou pro úroveň matic. Jejich největší výhodou je univerzálnost. Pro použití této metody není nutné znát geometrii problému a znovu problém diskretizovat. Geometrická metoda pracuje na úrovni sítě a je nejvhodnější pro strukturované sítě, na kterých pracuje lépe než algebraická metoda použitá pro stejný problém. Její nevýhodou je nutnost přizpůsobit metodu individuálně pro každý problém.

Obvykle se používá Gauss-Seidelův algoritmus nebo Stonova metoda jako iterační řešič. V některých případech lze pro hrubou síť použít i přímý řešič. Dle potřeby je možné použít různý počet sítí o různém počtu elementů.

3.5.1 Kritéria konvergence

V případě iteračních metod je nutné nastavit mez, kdy se má metoda spokojit s výsledkem a již ho dále nezdokonalovat. Je běžnou praxí nastavit rozdílné meze pro průběžné výsledky a pro výsledek konečný. Nejpoužívanějším kritériem konvergence je reziduál, který je mírou odchylky aktuální iterace od skutečného řešení. Diskretizovaná rovnice pro element P má tvar

$$a_P f_P^n = - \sum_N a_N f_N^n + R_P. \quad (3.14)$$

Funkce f zde substituuje diskretizovanou veličinu. Koeficienty a_P obsahují příspěvky z časové derivace, konvektivního a difuzivního členu a zdrojového členu. Koeficienty a_N jsou příspěvky sousedních buněk a N je sčítací index a sčítá se přes všechny sousední buňky. Poslední člen R_P je součtem všech členů, které lze počítat z minulého časového kroku.

Při k -té iteraci řešiče rovnice (3.14) neplatí a rozdíl pravé a levé strany je definován jako lokální reziduál:

$$F_P^{f,k} = \left| - \sum_N a_N f_N^n + R_P - a_P f_P^n \right|. \quad (3.15)$$

Residuál přes celou oblast se nazývá globální a je dán vztahem:

$$G^{f,k} = \sum_P F_P^{f,k}. \quad (3.16)$$

Velice časté je globální residuál normalizovat, aby byly výsledky snáze porovnatelné s jinými případy. Normalizovaný residuál popisuje následující rovnice:

$$H^{f,k} = \frac{G^{f,k}}{G^{f,0}}, \quad (3.17)$$

kde $G^{f,0}$ je globální residuál v první iteraci.

OpenFOAM vypisuje residuál pro každou iteraci. Jedná se o residuál hybnosti $\mathbf{u} = \{\rho u_x, \rho u_y, \rho u_z\}$ a tlaku p . Metoda konverguje, pokud jde residuál limitně k nule.

3.5.2 Kritéria stability

Numerická metoda je stabilní, pokud nezvětšuje chyby, které se objevují v průběhu řešení. V případě proudění a použití explicitního schématu je nutnou podmínkou Courantova podmínka v 1D případě:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u}, \quad (3.18)$$

kde Δt je časový krok, Δx rozměr elementu sítě a u je rychlost proudění. Tato podmínka musí být splněna pro celou oblast a proto se časový krok volí na základě nejvyšší rychlosti proudění a nejmenšího rozměru elementu sítě ve směru příslušné rychlosti proudění. Implicitní schéma je stabilní bezpodmínečně.

4 Práce s knihovnou OpenFOAM

OpenFOAM je opensource balík knihoven. Nespornou výhodou tohoto konceptu oproti komerčním software je to, že program je ke stažení a nainstalování zdarma. Další bezkonkurenční výhodou je možnost nahlížení a upravování zdrojových kódů všech knihoven, které OpenFOAM obsahuje, z čehož může pro zkušeného uživatele znalého programování vyplynout možnost naimplementovat si vlastní řešič nebo okrajovou podmínku. Všechny zdrojové kódy jsou psány v objektově orientovaném C++. Velkou nevýhodou je rozsáhlost zdrojových kódů a jejich špatná dokumentace. Navíc orientaci v kódu dále ztěžuje hojné využívání přetížených operátorů. Tento program je distribuován primárně pro operační systém Linux, který je také ke stažení zdarma.

Program nedisponuje grafickým prostředím a veškeré nastavení probíhá v textových souborech, které mají přesně definovanou strukturu a položky, které musí obsahovat.

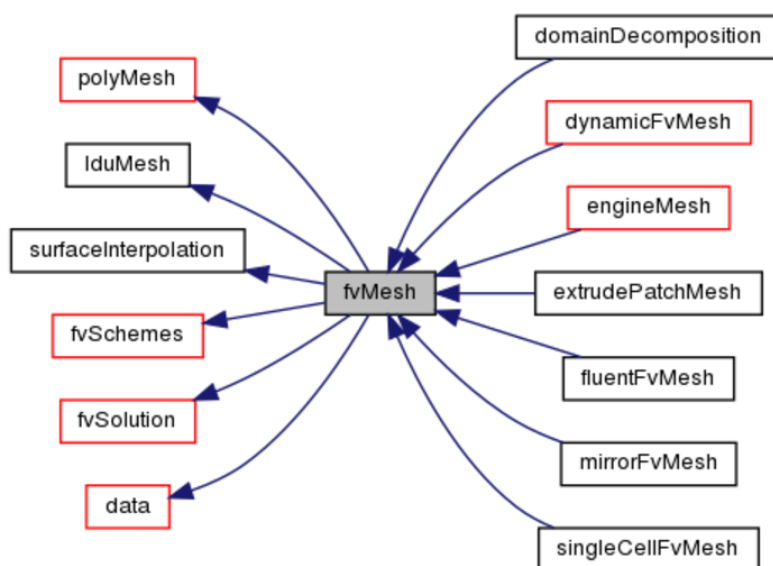
4.1 Popis zdrojového kódu řešiče

V OpenFOAMu existuje mnoho různých řešičů, všechny jsou umístěny ve složce s cestou: `$FOAM_APPBIN` ve složkách pojmenovaných stejně jako jejich spouštěcí příkaz. Každá složka má stejnou strukturu, která obsahuje jeden soubor se zdrojovým kódem, který má stejný název jako složka a příponu ".C". Dále lze ve složce nalézt hlavičkové soubory s příponou ".H" a složku `Make`, ve které jsou informace pro kompilátor spouštěný příkazem `wmake`.

Zdrojové kódy v OpenFOAMu jsou velice rozsáhlé a kombinují mnoho tříd. Pro lepší orientaci byla vyvinuta dokumentace v prostředí Doxygen, která usnadňuje první seznámení se s třídou díky grafickému prostředí a hyperlinkům na další použité prvky. Běžně se také používá jako referenční zdroj informací.

Jako příklad je uvedena třída starající se o síť `fvMesh.H`. Tato třída je součástí každého řešiče, který je součástí balíku OpenFOAM a je založen na MKO.

Třída `fvMesh.H` je potomkem a zároveň rodičem. Tyto vztahy jsou přehledně uvedeny pro tuto třídu na [2] a zobrazeny na obrázku 4.1. Šipky vedoucí k `fv-`



Obrázek 4.1: Objekty se kterými pracuje třída `fvMesh` (převzato z [2])

`Mesh` značí potomky třídy a z konceptu programování v C++ vyplývá, že po této třídě dědí. Šipky směřující z políčka `fvMesh` značí objekty, se kterými třída pracuje. Červeně orámované položky oznamují, že strom dědičnosti nekončí u třídy `fvMesh`. Dále jsou na webové stránce (viz [2]) uvedeny konstruktory, programový kód a všechny funkce, kterými daná třída disponuje. Pokud funkce používá funkci jiné třídy, na její název lze kliknout a zjistit více informací.

V příloze A je zdrojový kód řešiče použitého pro simulace v této diplomové práci `pimpleDyMFoam`. Kód je převzat z instalace OpenFOAM 5.0 a doplněn o komentáře vysvětlující základní funkce použitých komponent.

4.2 Nastavení metody konečných objemů

Balík OpenFOAM je založen na cell-centered metodě konečných objemů, která je popsána v kapitole 3. V rámci této práce je MKO popsána pro strukturované sítě, které jsou v technické praxi použitelné pouze pro jednoduché geometrie. OpenFOAM umí pracovat s nestrukturovanými polyhedrálními sítěmi a MKO je zde implementována 2. řádu.

Nastavování numerických metod se provádí ve složce s názvem `system`. Nastavení diskretizace Navier-Stokesových rovnic v čase a prostoru je provedeno v souboru

`fvSchemes`. Soubor `fvSolution` obsahuje pokyny pro lineární řešení soustavy rovnic a neortogonální korektory.

Pro diskretizaci v čase `dtSchemes` bylo vybráno implicitní zpětné Eulerovo schéma (kódové slovo `Euler`), které je popsáno v kapitole 3.3. Členy s gradientem jsou diskretizovány lineární interpolací z těžišť elementů do středů stěn, kódové označení je `Gauss linear`. Funkce schématu je popsána v kapitole 3.2. Diskretizace členů s divergencí je provedena buď lineární interpolací, nebo schématem s názvem `linearUpwind` popsaným ve stejné kapitole jako `Gauss linear`. Difuzní člen je přiblížen lineární aproximací s neortogonálním korektorem.

V souboru `fvSolution` je pro řešení tlaku nastaven geometricko-algebraický multigradní řešič nazvaný `GAMG`, který využívá iterativní řešič `GaussSeidel`, popsáný v kapitole 3.5. Dále je zde zadána požadovaná hodnota residuálu pro průběžné výpočty a pro výpočet finální. Stejný řešič je použit pro pohyb sítě. Pro řešič `PIMPLE` je zde definován počet iterací v jedné smyčce a počet iterací pro neortogonální korektory. Použití neortogonálních korektorů závisí na kvalitě sítě, konkrétně na ortogonálním kritériu.

Na přiloženém CD lze nalézt tyto nastavovací soubory ve složce simulace. Dále každá složka obsahuje soubory definující počáteční a okrajové podmínky a síť.

5 Numerická simulace obtékání modelu kmitajícího tělesa

V této kapitole jsou shrnuty výsledky všech provedených numerických simulací. Jsou zde porovnány výstupy z programu Matlab Simulink s výsledky z OpenFOAMu. Dále jsou zde popsány 2D a 3D simulace interakce proudění s pružně uloženou hlasivkou.

5.1 Ověření řešiče pro dynamiku tuhých těles v OpenFOAM

Matematické modely dynamického chování desky ukotvené na dvou pružinách představené v kapitole 2 jsou zde použity pro ověření správnosti řešiče sixDoFRigidBodyMotion. Výsledky simulací z programu OpenFOAM jsou porovnány se simulacemi dynamických rovnic v programu Matlab Simulink. Matlab je komerční software, pro účely této diplomové práce byla použita studentská verze.

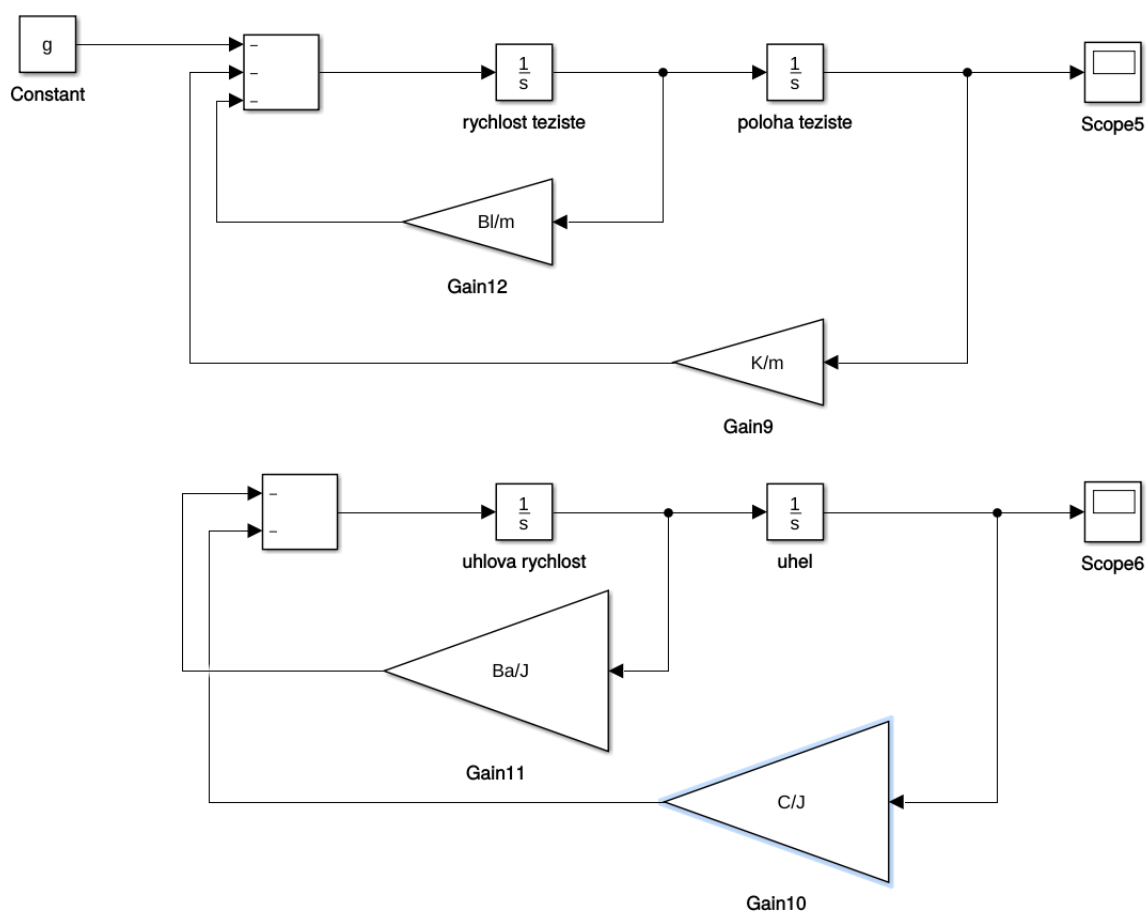
5.1.1 Deska na lineární a torzní pružině

Jako první případ pro porovnání byla vybrána deska upevněná na horizontální a torzní pružině (viz. obrázek 2.2). Proudění okolního vzduchu je na začátku simulace v OpenFOAMu nastaveno na 0 m/s^2 , hustota vzduchu je $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$. Společné parametry modelu jsou uvedeny v tabulce 5.1.

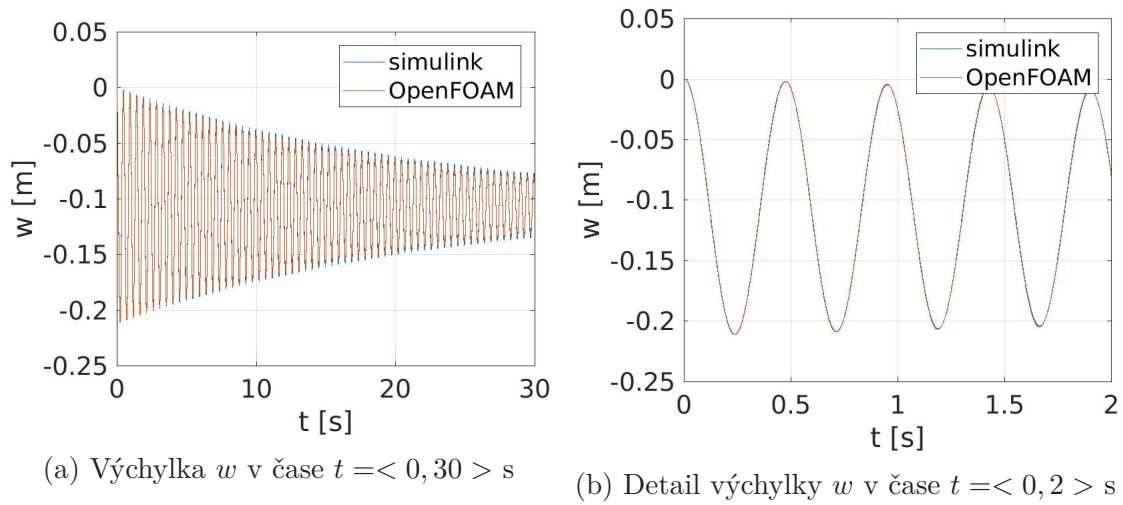
Schéma pro program Matlab Simulink bylo vytvořeno metodou snižování řádu derivace z pohybových rovnic (2.6), (2.7) a je zobrazeno na obrázku 5.1. Počáteční předepnutí pružiny bylo nastaveno na $0,05 \text{ m}$. Počáteční úhlová rychlost $\dot{\alpha}_0$ byla zadána jako $\dot{\alpha}_0 = 2 \text{ rad/s}$. Porovnání výsledků jednotlivých řešičů je zobrazeno níže. Každý obrázek zobrazuje dva řešiče, jak je popsáno v legendě na obrázcích. Na obrázku 5.2a je zobrazena výchylka w . Detail výchylky w je zobrazen na obrázku 5.2b. Náklon tělesa α je vykreslen na obrázku 5.3a, jeho detail je na obrázku 5.3b.

Tabulka 5.1: Konstanty tělesa ukotveného na 2 pružinách v těžišti se dvěma stupni volnosti (schéma ukotvení tělesa viz obrázky 2.2)

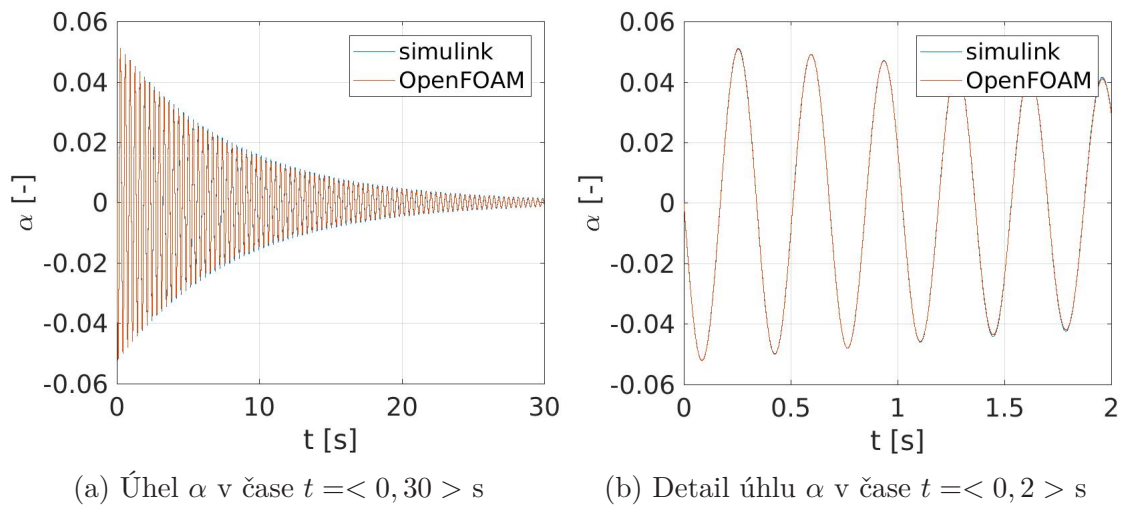
Veličina	Značka	Hodnota
Gravitační konstanta	g	9,81 m/s ²
Tuhost lineární pružiny	K	4000 N/m
Tuhost torzní pružiny	C	700 Nm/rad
Hmotnost	m	22,9 kg
Tlumení lineární pružiny	B_L	2 Ns/m
Tlumení torzní pružiny	B_A	0,5 Nms/rad
Moment setrvačnosti	I	2,0571 kgm ²



Obrázek 5.1: Simulační schéma pohybových rovnic (2.6) a (2.7) vytvořené metodou snižování řádu derivace v programu Matlab Simulink



Obrázek 5.2: Vývoj výchylky těžiště w pro těleso se dvěma stupni volnosti, schéma viz obrázek 2.2



Obrázek 5.3: Vývoj úhlu α , který svírá těleso s osou x , schéma viz obrázek 2.2

Z obrázků je patrné, že se časové průběhy téměř dokonale shodují. Obě metody simulace dávají tedy shodné výsledky a je potvrzené, že řešič `sixDoFRigidBodyMotion` z balíku `OpenFOAM` dává shodné výsledky s analyticky získanými rovnicemi, které byly řešeny numericky pomocí programu `Matlab Simulink`. Tento základní test prověřil schopnost řešiče `sixDoFRigidBodyMotion` správně řešit dynamiku systému se dvěma stupni volnosti a správně implementovat pružiny s definovanou tuhostí a tlumením.

5.1.2 Deska na dvou pružinách

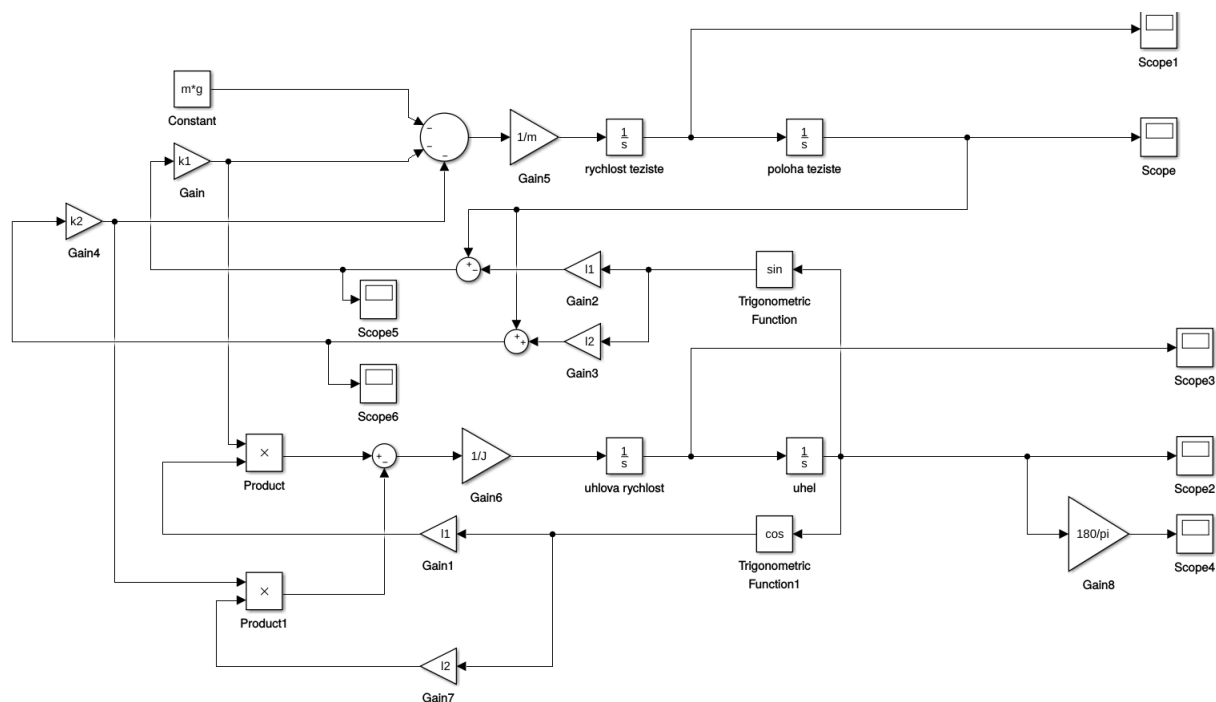
Simulací, která je popsána v odstavci 5.1.1, byl ověřen pohyb se dvěma stupni volnosti, kde se jednotlivé pohyby vzájemně neovlivňují, jak je patrné z rovnic (2.6) a (2.7). Výchylka w nevstupuje do pohybové rovnice pro úhel α a naopak. Jako další model určený k ověření funkčnosti řešiče `sixDoFRigidBodyMotion` byl vytvořen model desky na dvou pružinách, viz obrázek 2.3.

Nastavení řešiče pro proudění proběhlo stejně jako v předchozím případě. Parametry nastavené v obou simulacích jsou vypsány v tabulce 5.2.

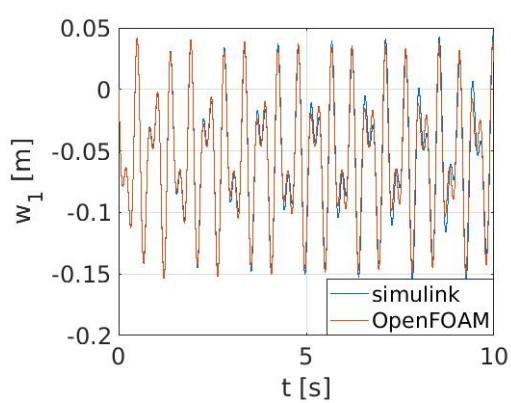
Tabulka 5.2: Konstanty desky ukotvené na 2 pružinách v ose y se dvěma stupni volnosti (schéma ukotvení tělesa viz 2.3)

Veličina	Značka	Hodnota
Gravitační konstanta	g	9,81 m/s ²
Tuhost lineární pružiny	K_1	2000 N/m
	K_2	2000 N/m
Hmotnost	m	22,9 kg
Moment setrvačnosti	I	2,0571 kgm ²
Vzdálenost od těžiště	l_1	0,4975 m
	l_2	0,4975 m

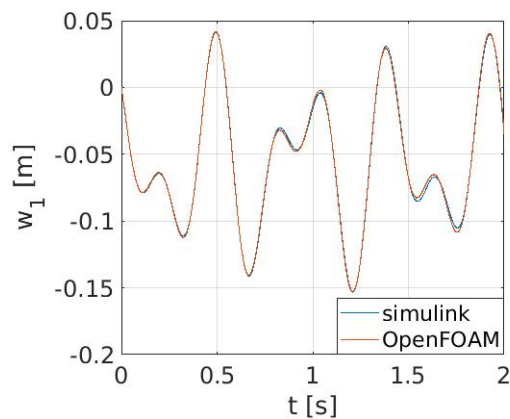
Schéma pro program Matlab Simulink je zobrazeno na obrázku 5.4. Pro porovnání s OpenFOAM je nezbytné převést zobecněné souřadnice y a α na výchylky upevnění pružin w_1 a w_2 , což jsou hodnoty získané z výstupu tohoto programu. Porovnání řešiče `sixDoFRigidBodyMotion` a pohybových rovnic (2.17) a (2.18) simulovaných v programu Matlab Simulink je zobrazeno níže. Výchylka první pružiny w_1 je vykreslena na obrázku 5.5a pro $t = \langle 0, 10 \rangle$ s a na obrázku 5.5b pro $t = \langle 0, 2 \rangle$ s. Výchylka w_2 druhé pružiny je zobrazena na obrázku 5.6a, obrázek 5.6b zachycuje detail průběhu.



Obrázek 5.4: Simulační schéma pohybových rovnic (2.17) a (2.18) vytvořené v programu Matlab Simulink

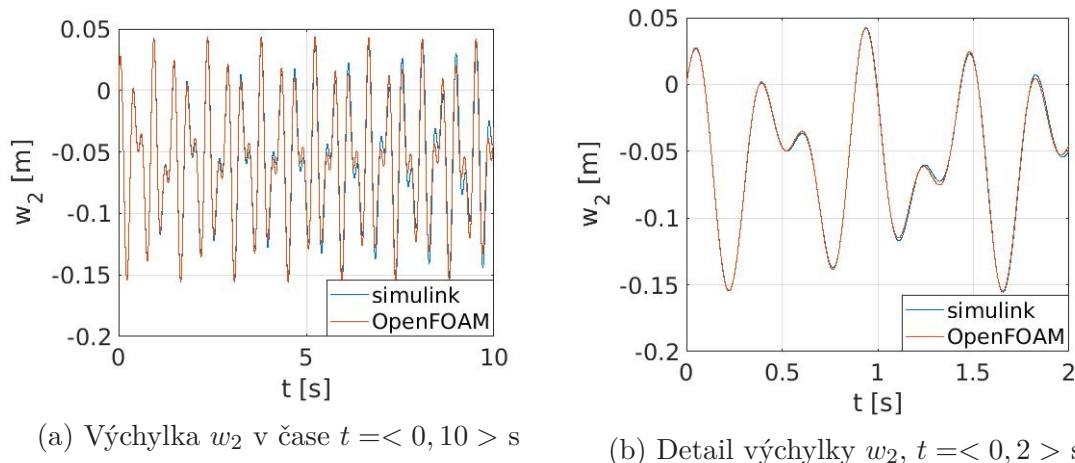


(a) Výchylka w_1 v čase $t = \langle 0, 10 \rangle$ s



(b) Detail výchylky w_1 , $t = \langle 0, 2 \rangle$ s

Obrázek 5.5: Vývoj výchylky upevnění pružiny w_1 pro těleso se dvěma stupni volnosti, schéma viz obrázek 2.3



Obrázek 5.6: Vývoj výchylky upevnění pružiny w_2 pro těleso se dvěma stupni volnosti, schéma viz obrázek 2.3

V případě programu OpenFOAM byla pro proudění zvolena nulová rychlost a hustota kapaliny byla nastavena jako $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$. I v případě nulové rychlosti proudění způsobuje vzduch kolem kmitajícího objektu aerodynamické tlumení, které má za následek mírné odlišnosti v průběhu grafů, protože v analytickém odvození pohybových rovnic toto tlumení není uvažováno. Projev tohoto tlumení je patrný ze všech grafů, kde modrá křivka (Simulink) není totožná s křivkou červenou (OpenFoam). Po srovnání průběhů výchylek w_1 a w_2 je zřejmé, že oba řešiče prokazují velmi dobrou shodu pro obě výchylky i v případě, kdy jsou pohybové rovnice vzájemně provázané.

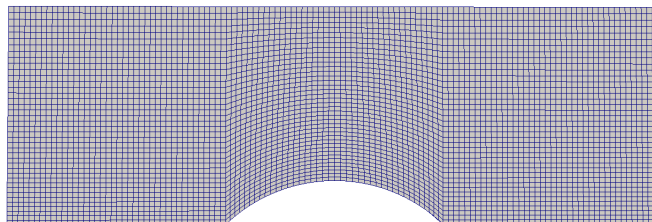
5.2 Interakce proudění s pružně uloženou hlasivkou

Numerické simulace byly rozděleny do několika skupin. V první fázi jsou v této kapitole popsány problémy s deformací sítě a jejich testování. Dále jsou zde uvedeny výsledky 2D simulací a poté je paralelně na výpočetním clusteru spuštěna 3D simulace.

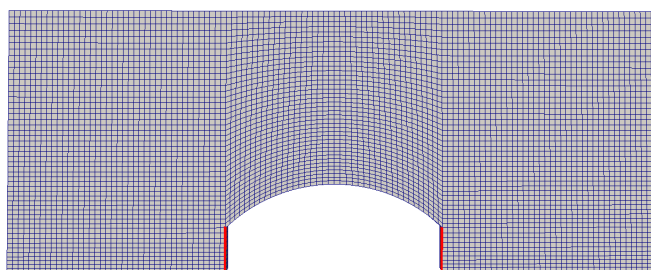
5.2.1 Deformace sítě

Oblast obklopující hlasivku má velmi specifický tvar úzké dovírající se štěrbin, kde dochází k velké deformaci sítě. Tato geometrie může působit problémy při simulaci na dynamické síti. Před simulací vlastního pohybu hlasivky bylo nezbytné odzkoušet možnosti deformace sítě při pohybu hlasivky. V první fázi diplomové

práce vznikla tři velice hrubá přiblížení hlasivkové oblasti zobrazená na obrázcích 5.7 a 5.8, kde dynamická část hranice oblasti má tvar části kružnice.



Obrázek 5.7: Geometrie a nedeformovaná síť pro testovací případ. Pohyblivou částí hranice oblasti je kruhový oblouk.

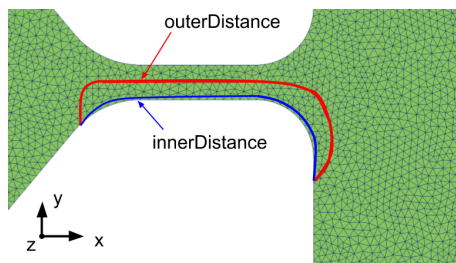


Obrázek 5.8: Deformovaná síť

Testy deformace sítě na geometrii zobrazené na obrázku 5.7 prokázaly, že řešič pro deformaci sítě zvládá pohyb tělesa, které není zcela obklopeno sítí a je spojeno s nehybnou hranicí. Simulace (obr. 5.8) prokázala, že pro deformující se vertikální hranici oblasti, zvýrazněnou červeně, je nejvhodnější okrajová podmínka zeroGradient pro posunutí bodů sítě. Elementy sítě i po deformování měly dostatečnou kvalitu, takže je možné v simulacích pokračovat bez zasahování do programového kódu. Jak se později ukázalo, jediným problémem pro pohyblivou síť je šterbina mezi hlasivkami, kde vlivem zúžení a následném natáčení hlasivky dochází ke zplošťování elementů a z toho vyplývající havárii výpočtu z důvodu špatné kvality elementů.

Pro simulaci pohybu hlasivky byla vybrána geometrie představená v podkapitole 3.4, obr. 3.3, kde jsou popsány i předepsané okrajové podmínky. Řešič pohybu tělesa a sítě kromě parametrů souvisejících s fyzikálním nastavením modelu vyžaduje parametry nazvané inner a outer distance pro nastavení zóny sítě, kde může docházet k deformaci. Jedná se o nastavení inner distance – nehybného okolí a outer – konečná hranice deformační zóny. Jako nejlepší kombinace těchto parametrů byla nalezena innerDistance rovna 0,005 mm a outerDistance s hodnotou 0,5 mm.

Na obrázku 5.9 je červeně zvýrazněna vnější hranice `outerDistance`. Parametr `innerDistance` je vyznačen modrou barvou. Síť, která se nachází mezi `outerDistance` a `innerDistance` se deformuje.



Obrázek 5.9: Vyznačená `outer distance` pro pohybující se hlasivku

5.2.2 Fyzikální parametry modelu

Fyzikální parametry modelu, naladěné pro vlastní frekvence $f_1 = 100$ Hz a $f_2 = 160$ Hz, jsou uvedeny v tabulce 5.3. Výpočet tlumení a tuhosti pružin je uveden v podkapitole 2.2.1 a 2.2.2.

Tabulka 5.3: Fyzikální hodnoty parametrů hlasivky

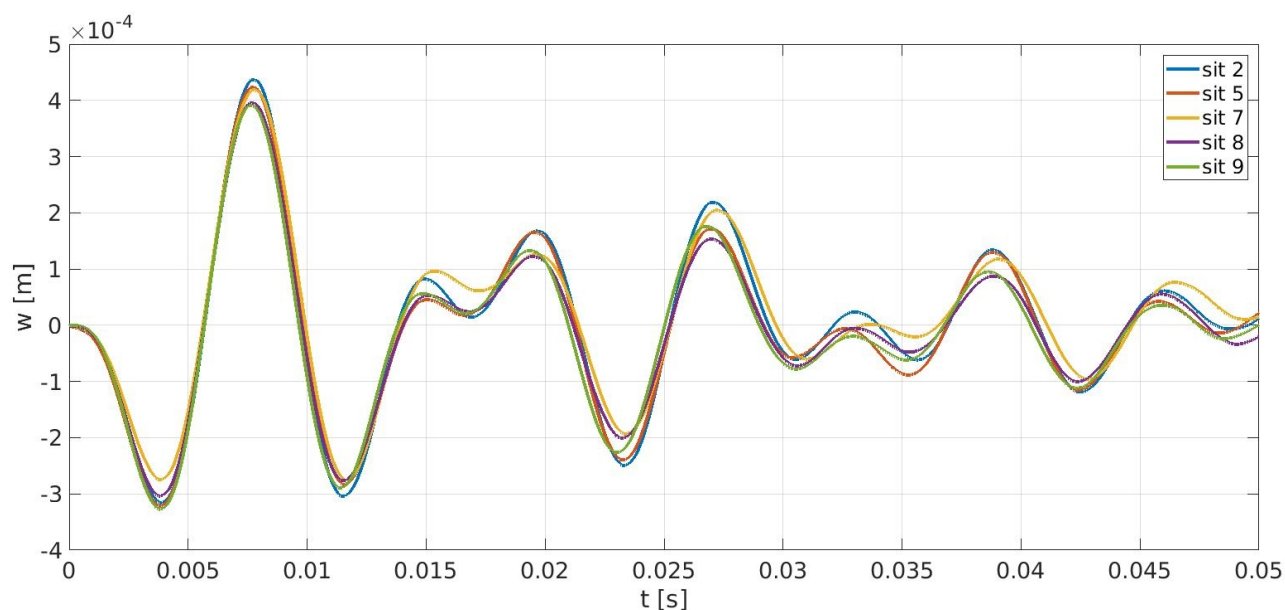
Veličina	Značka	Hodnota
Hmotnost	m	0,000270514 kg
Moment setrvačnosti	I	1,1487e-9 kgm ²
Tuhost lineární pružiny	K_1	140,69 N/m
	K_2	55,07 N/m
Tlumení lineárního pohybu	b_1	0,047308 kg/s
Tlumení rotačního pohybu	b_2	1,7432e-07 Ns
Vzdálenost ukotvení pružiny od těžiště	l_1	0,002 m
	l_2	0,002 m

5.2.3 Analýza vlivu počtu elementů sítě na výpočet kmitů

Pro analýzu vlivu počtu elementů na výpočet kmitání hlasivky bylo použito 5 sítí s rozdílným počtem elementů, viz tabulka 5.4. V tabulce nejsou uvedena geometrická kritéria kvality sítě, protože se vlivem její deformace mění. Výpočetní oblast byla zasítována pomocí trojúhelníkových elementů. Výsledný průběh kmitů těžiště w pro vstupní rychlost $u_x = 1$ m/s je zobrazen na obrázku 5.10.

Tabulka 5.4: Počet elementů sítí

Označení sítě	Počet elementů
Sít č. 5	3 050
Sít č. 7	30 638
Sít č. 2	60 836
Sít č. 8	121 874
Sít č. 9	242 792



Obrázek 5.10: Výchylka těžiště w při vstupní rychlosti $u_x = 1$ m/s pro sítě s různým počtem elementů

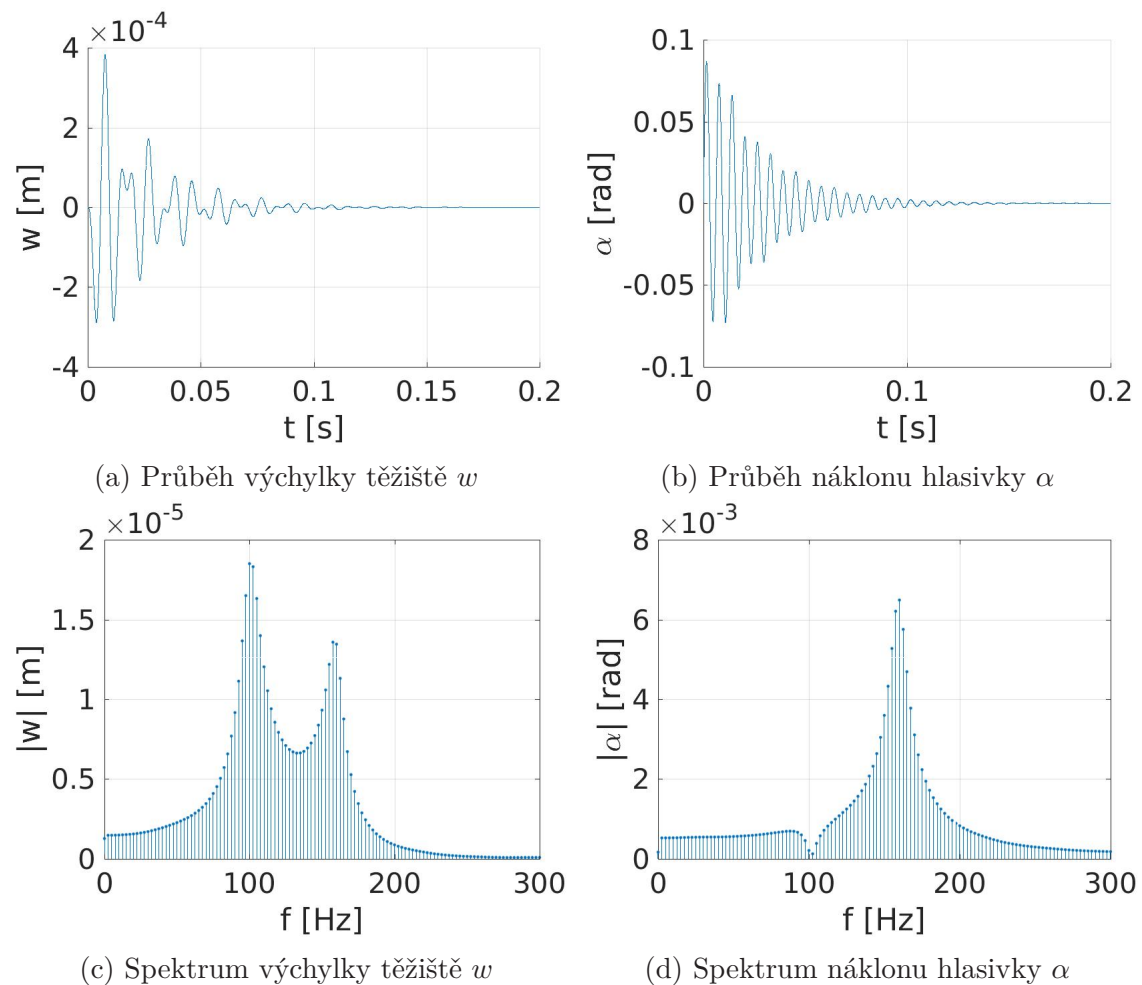
Počet elementů sítě má vliv na proudová pole, která se liší zejména v supraglotické oblasti. Na pohyb hlasivky působí aerodynamické síly, které pro různé případy vycházejí podobně, a tudíž se neliší ani výsledný pohyb hlasivek na různých sítích. Pro 2D simulace byla vybrána síť č. 2 z důvodu přiměřeného počtu elementů vzhledem k rozlišení výsledného proudového pole a výpočetním nárokům. Stejná síť byla následně rozšířena do třetího rozměru.

5.2.4 Hranice aeroelastické nestability systému – 2D model

V této kapitole je představena analýza vlivu velikosti rychlosti proudění na vstupu do oblasti u_x na kmitání hlasivky. Jsou zde uvedeny čtyři případy: nulová, podkritická, kritická a nadkritická rychlost. Pro podkritickou rychlost kmity vli-

vem tlumení zaniknou a výchylky exponenciálně klesají k nule. Pokud nastane případ kritické rychlosti, hlasivka samovolně kmitá a nedochází k útlumu amplitudy kmitů. Pro nadkritickou rychlost amplituda kmitů roste až do bodu neúnosné deformace sítě, kdy havaruje numerický výpočet.

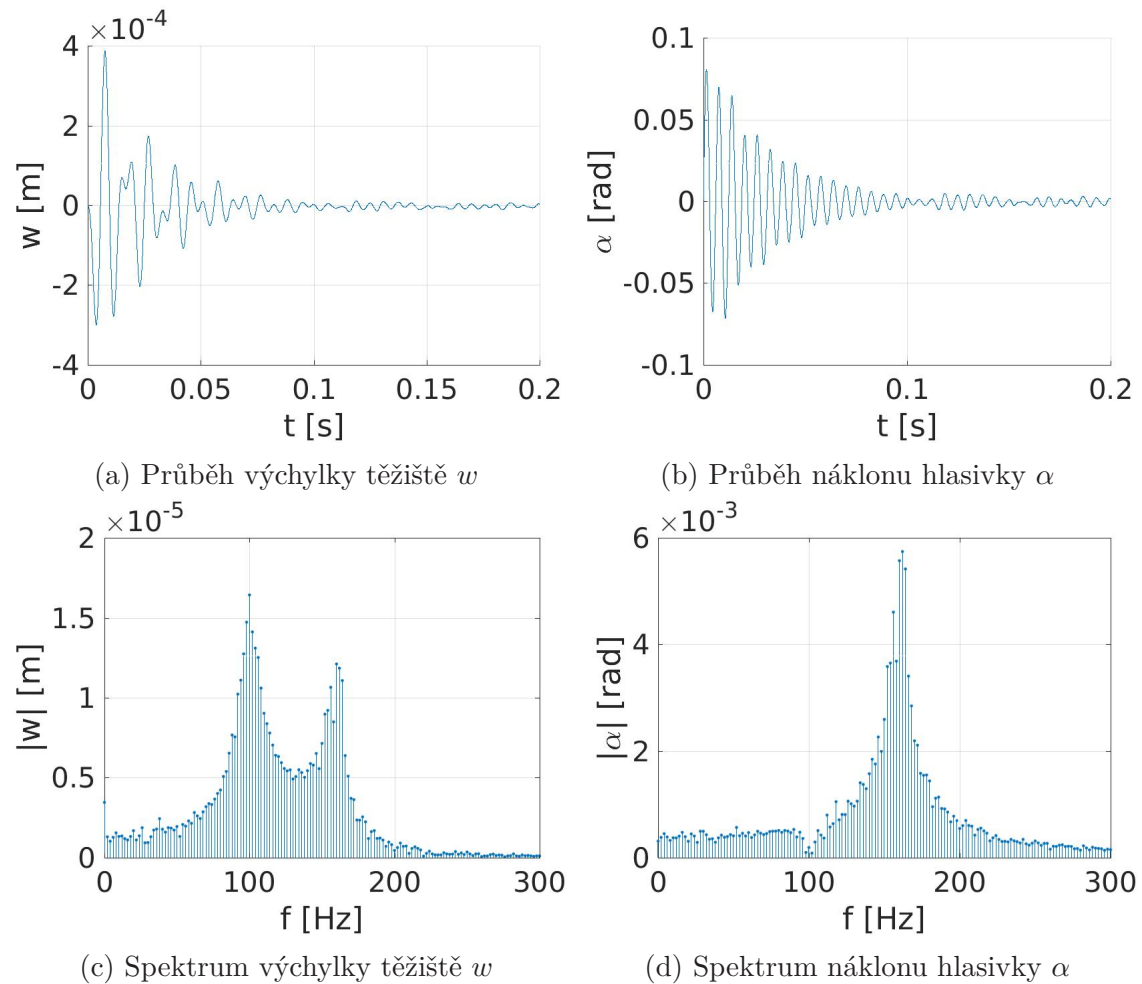
Byla provedena simulace s fyzikálními parametry (tabulka 5.3) na výpočetní síti s 60 836 elementy. Rychlost proudění na vstupu do oblasti je $u_x = 0$ m/s. Byl nastaven počáteční náklon hlasivky $\alpha_0 = 5^\circ$. Na obrázku 5.11 jsou zobrazeny výsledné průběhy výchylky těžiště w a úhlu náklonu α a k nim příslušná spektra.



Obrázek 5.11: Vývoj kmitů hlasivky s rychlostí na vstupu $u_x = 0$ m/s a počátečním nakloněním $\alpha_0 = 5^\circ$ a k nim příslušná spektra

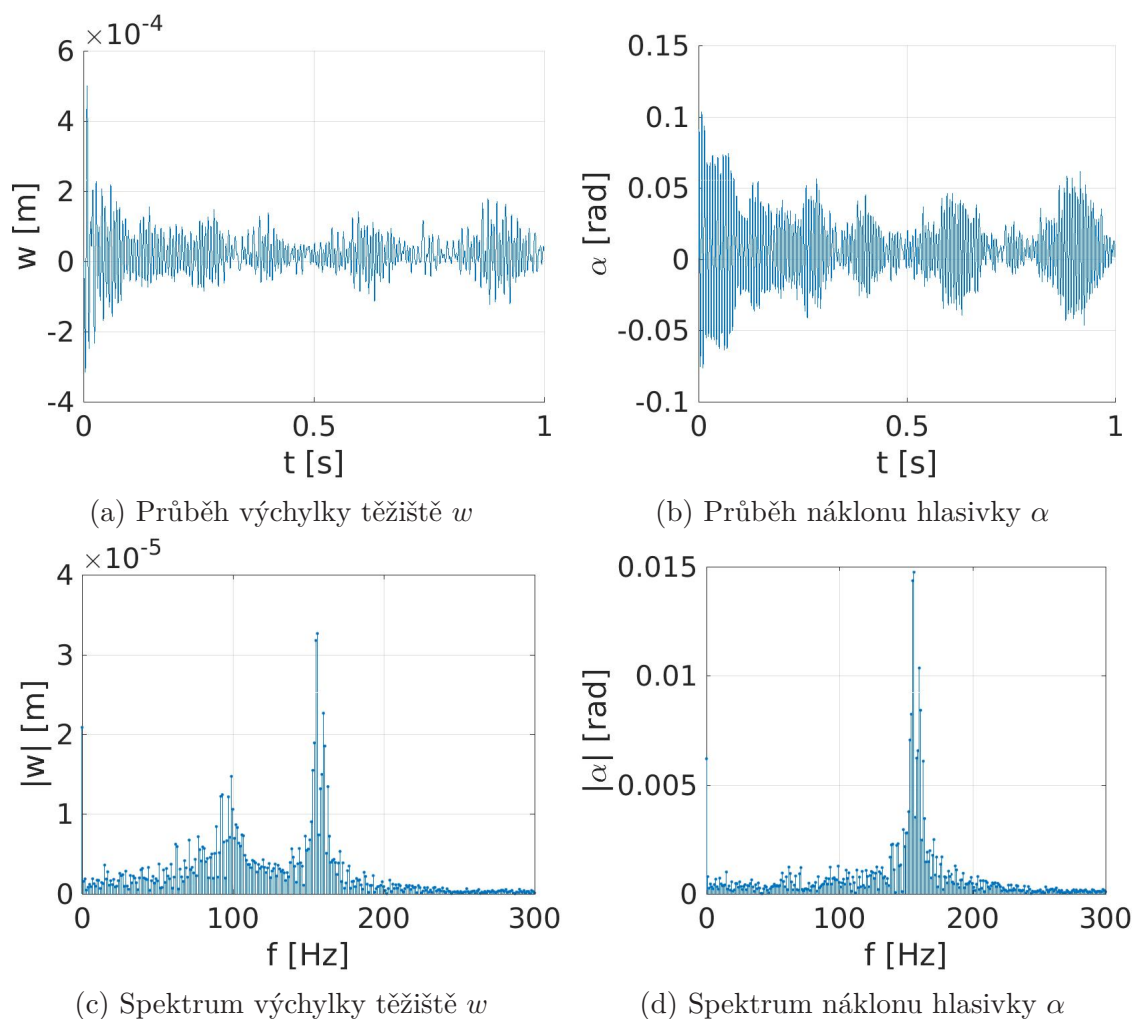
Jako příklad podkritické simulace je vybrána rychlost na vstupu do oblasti $u_x = 0,5$ m/s. Vývoj kmitů je zobrazen na obrázcích 5.12a pro výchylku těžiště w a 5.12b

pro úhel náklonu α , spektrum je zobrazeno na obrázcích 5.12c a 5.12d. V porovnání s případem nulové rychlosti na vstupu do oblasti (obr. 5.11) amplituda kmitů nabývá nepatrně vyšších hodnot a k útlumu dochází pomaleji.



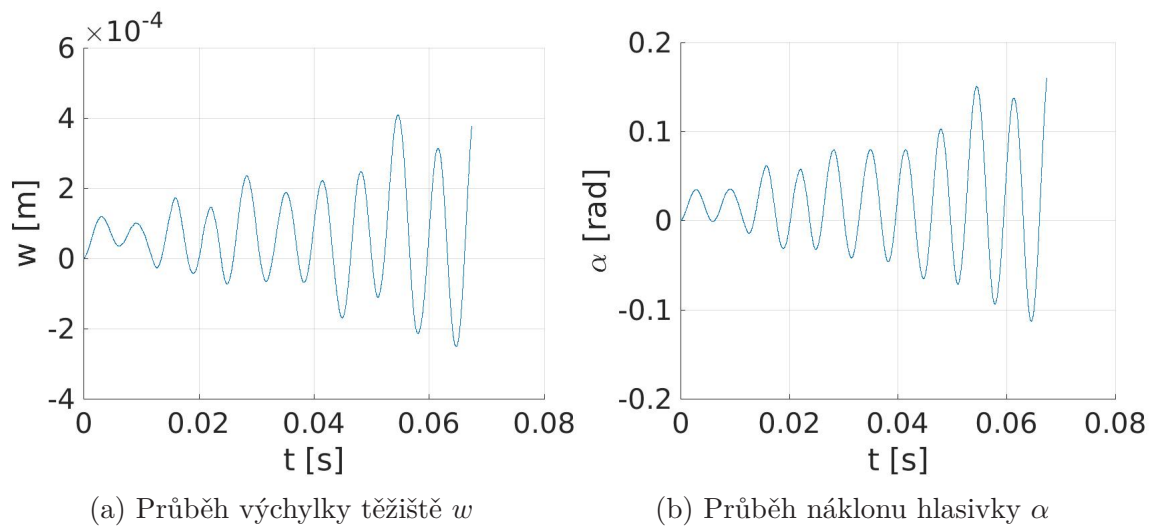
Obrázek 5.12: Vývoj kmitů hlasivky s rychlostí na vstupu $u_x = 0,5$ m/s a počátečním nakloněním $\alpha_0 = 5^\circ$ a k nim příslušná spektra

Pro nalezení kritické rychlosti byly provedeny simulace s rychlostmi na vstupu $u_x = \langle 0,5, 2 \rangle$ m/s s krokem jedné desetiny. Netlumené kmity byly pozorovány už pro rychlost na vstupu oblasti $u_x = 1,4$ m/s, a lze ji tedy prohlásit za kritickou. Grafy jsou zobrazeny na obrázcích 5.13a, 5.13b pro výchylky a 5.13c, 5.13d pro spektrum.



Obrázek 5.13: Vývoj kmitů hlasivky s rychlostí na vstupu $u_x = 1,4$ m/s a počátečním nakloněním $\alpha_0 = 5^\circ$ a k nim příslušná spektra

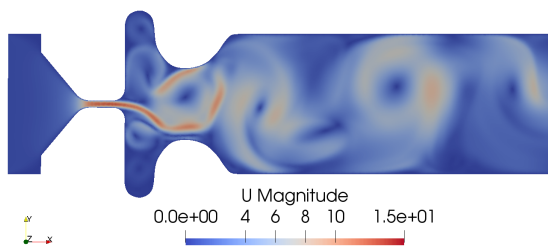
S rostoucí rychlostí na vstupu dochází k většímu rozmazání spektra a posunu vlastních frekvencí. Posledním zde prezentovaným případem je nadkritická rychlost na vstupu $u_x = 1.9$ m/s, kde dochází k vybuzení pohybu hlasivky bez počátečního náklonu, který byl potřeba v předešlých případech. Kmity jsou zobrazeny na obrázku 5.14. Spektra zde uvedena nejsou, protože k jejich výpočtu není k dispozici dostatečný časový úsek. Nárůst amplitudy způsobí kritickou deformaci elementů.



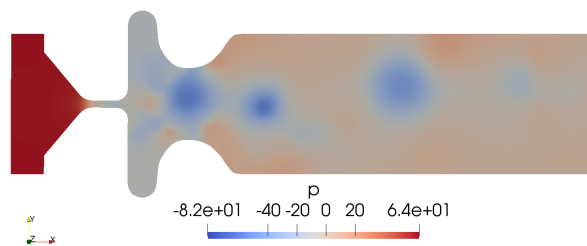
Obrázek 5.14: Vývoj kmitů hlasivky s rychlostí na vstupu $u_x = 1,9$ m/s a počátečním nakloněním $\alpha_0 = 0^\circ$

5.2.5 Vývoj rychlostního a tlakového pole pro 2D simulaci

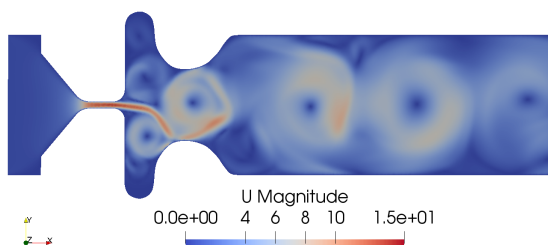
Pro případ vstupní rychlosti do oblasti $u_x = 0,5$ m/s je zde zobrazen vývoj rychlostního a tlakového pole v čase na obrázku 5.15. U rychlostního pole je patrné, že v zúžené části kanálu proudění zrychluje. Na horním zaoblení hlasivky dochází k odtrhávání a vytváří se proud, který se díky interakci s velkými vírovými strukturami v supraglottické oblasti odchyluje od osy kanálu. Koherentní víry se pomalu posouvají k výstupu z oblasti. Na tlakových polích jsou vidět středy vírů jako oblasti nízkého tlaku.



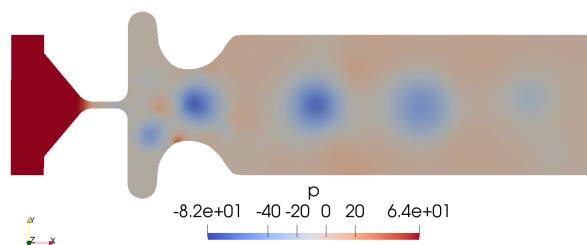
(a) Rychlostní pole pro čas $t = 0.060$ s



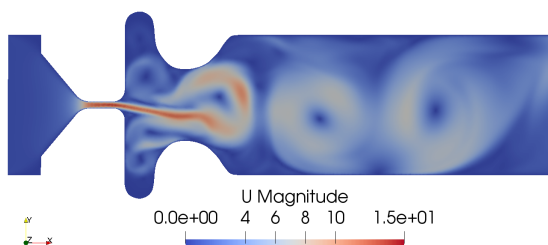
(b) Tlakové pole pro čas $t = 0.060$ s



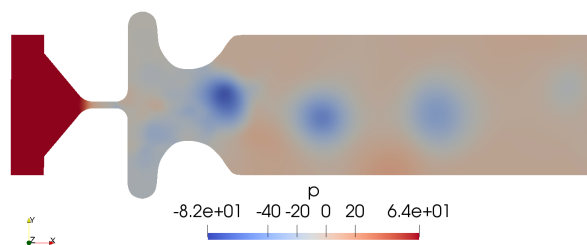
(c) Rychlostní pole pro čas $t = 0.065$ s



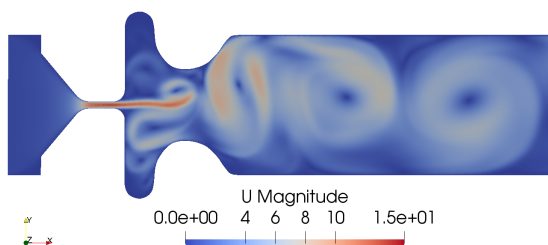
(d) Tlakové pole pro čas $t = 0.065$ s



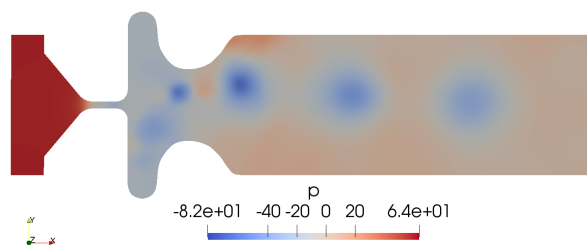
(e) Rychlostní pole pro čas $t = 0.070$ s



(f) Tlakové pole pro čas $t = 0.070$ s



(g) Rychlostní pole pro čas $t = 0.075$ s



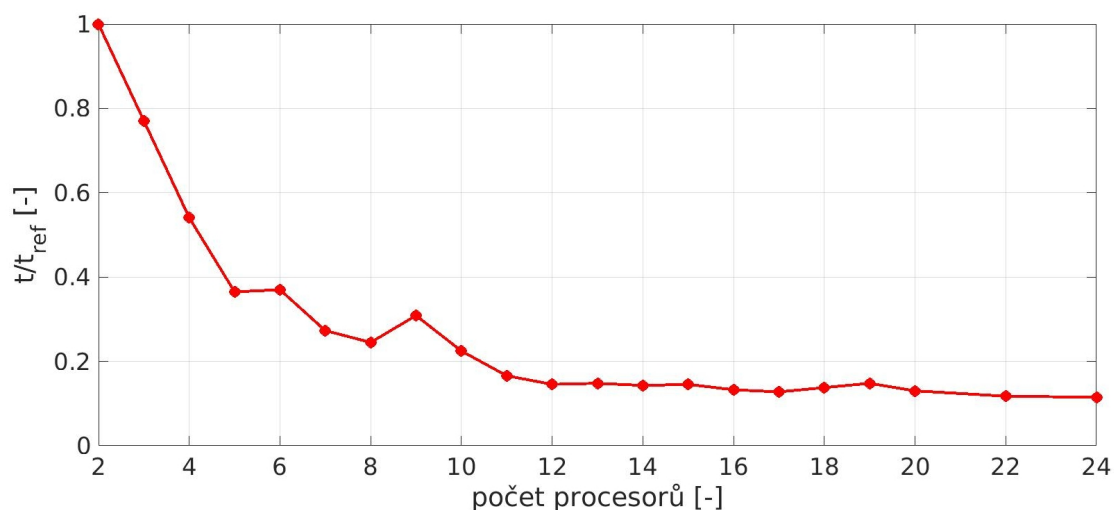
(h) Tlakové pole pro čas $t = 0.075$ s

Obrázek 5.15: Vývoj rychlostního a tlakového pole pro vstupní rychlost do oblasti $u_x = 0,5$ m/s a počáteční náklon hlasivky $\alpha_0 = 5^\circ$

5.2.6 Paralelizace numerické simulace

Paralelizaci výpočtů lze realizovat pomocí dvou základních konceptů: Open Multi-processing (OpenMP) a Message Passing Interface (MPI). OpenMP se vyznačuje komunikací přes sdílenou paměť, a proto ji nelze použít na výpočetních clusterech, ale pouze na vícejádrových architekturách nebo superpočítačích. MPI koncepce využívá pro komunikaci mezi uzly posílání zpráv. Tato komunikace probíhá po síti, kterou jsou jednotlivé uzly propojeny. OpenFOAM využívá MPI. Paralelizace probíhá rozdělením výpočetní oblasti na podoblasti, které jsou přiděleny jednotlivým procesorům. V průběhu výpočtu musí mezi procesory probíhat komunikace, a proto závislost výpočetního času na počtu jader není lineární, ale řídí se tzv. Amdahlovým zákonem.

Graf zrychlení pro simulaci ve 3D je zobrazen na obrázku 5.16. Výpočetní čas každého numerického výpočtu je vydělen referenčním časem pro 2 procesory ($t_{ref} = 392$ min). Pro každou simulaci bylo spočítáno 1 000 časových kroků. Bylo spuštěno 21 úloh pro 2 až 24 procesorů.



Obrázek 5.16: Vliv počtu procesorů na čas numerické simulace

Paralelní simulace byla spuštěna na výpočetním clusteru Charon, jehož hardwarové parametry jsou:

- CPU: 2x 10-core Intel Xeon Silver 4114 CPU (2.2GHz)
- RAM: 12x 8 GB DDR4 2400 ECC Reg dual rank
- disk: 1x SSD 480 GB DC S3610 Series

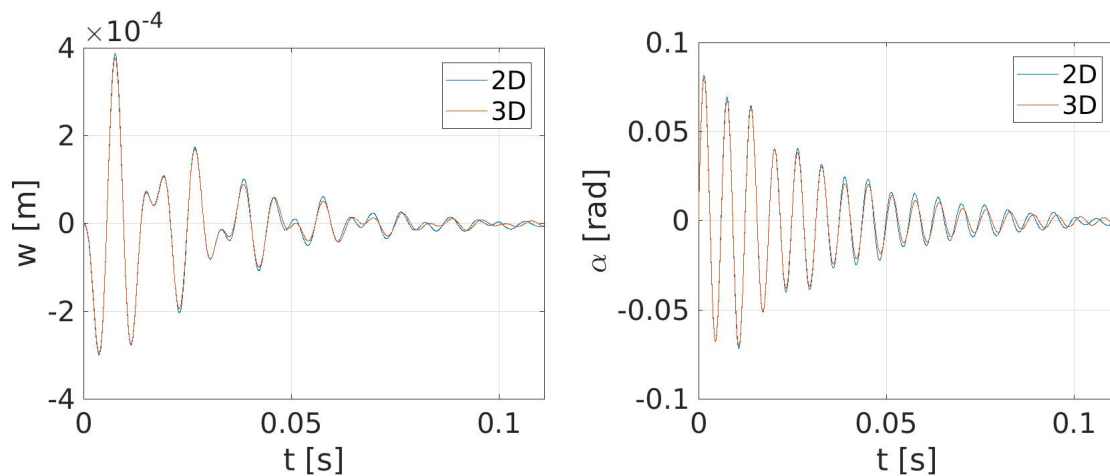
- net: 1 GB ethernet a Omni-Path (InfiniBand od Intelu)

Dělení sítě bylo v OpenFOAM nastaveno pomocí algoritmu `scotch`, který má jediný vstupní parametr počet procesorů. Simulace ve 3D byla počítána na 20 jádrech a celkové zrychlení oproti simulaci na dvou jádrech je zhruba 7,7x. Pro síť, která se skládá z 2 433 440 elementů, je efektivní spustit výpočet na 12 jádrech.

5.2.7 3D simulace

Numerická simulace na 3D síti byla spuštěna na serveru Charon, který vlastní Technická univerzita v Liberci. Server je zapojen ve sdružení výpočetních počítačů Metacentrum. Výpočetní oblast zobrazená na obrázku 3.3 je zde rozšířena do třetí dimenze, což způsobilo zvýšení počtu elementů z 60 386 pro 2D simulaci na 2 433 440 elementů.

Pro 3D simulaci byl vybrán případ se vstupní rychlostí $u_x = 0,5$ m/s a počátečním nakloněním hlasivky $\alpha_0 = 5^\circ$. Simulace se stejnými parametry proběhla i ve 2D a na obrázcích 5.17a a 5.17b je zobrazeno srovnání kmitů těžiště w a úhlu naklonění α .



(a) Průběh výchylky těžiště w

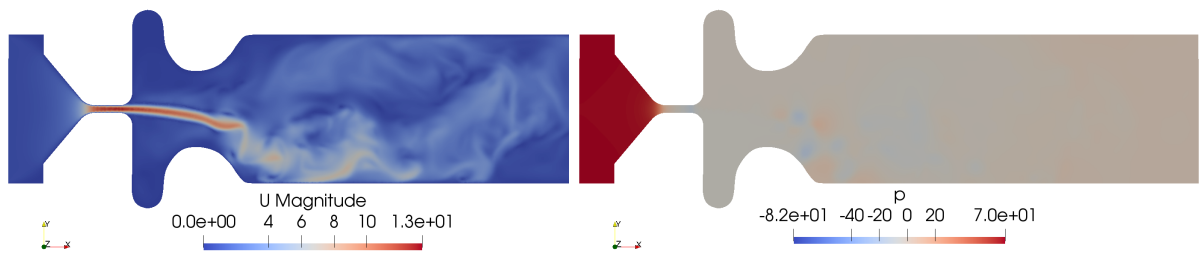
(b) Průběh náklonu hlasivky α

Obrázek 5.17: Vývoj kmitů hlasivky s rychlostí na vstupu $u_x = 0,5$ m/s a počátečním nakloněním $\alpha_0 = 5^\circ$ ve 3D

Z obrázků je patrný rozdíl mezi simulací ve dvou a třech rozměrech, který se projevuje mírnou odlišností v grafech pro výchylky. Tento rozdíl vychází ze simulace proudění, které se výrazně liší pro 2D a 3D případy. Tento fakt dokazují i pole

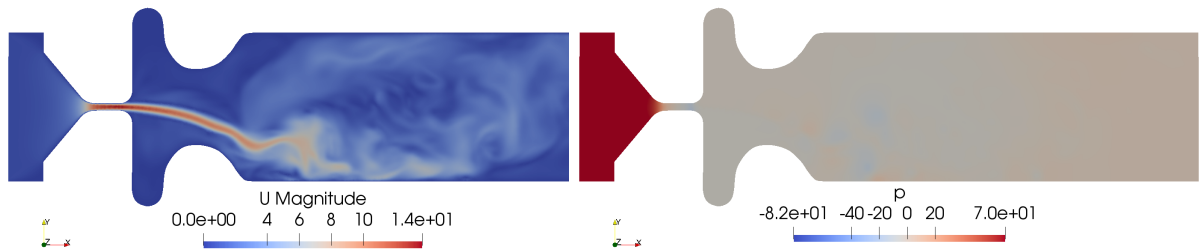
rychlosti a tlaků zobrazená na obrázku 5.18, která jsou vytvořena pro stejný čas jako pole pro 2D případ (obr. 5.15).

Na obrázcích proudového pole je stejně jako ve 2D vidět zrychlování proudu v zúžené části kanálu. Na horním zaoblení hlasivky dochází k jeho odtrhávání. Na rozdíl od 2D simulace zde nevznikají velké víry, které se posouvaly k výstupu z oblasti. Toto je nejdůležitější rozdíl mezi 2D a 3D simulací, ve které víry disipují, mění orientaci a vzájemně interagují samy se sebou a se stěnami. Ve 2D mohou víry mizet pouze disipací díky viskozitě. Na tlakových polích jsou vidět středy vírů.



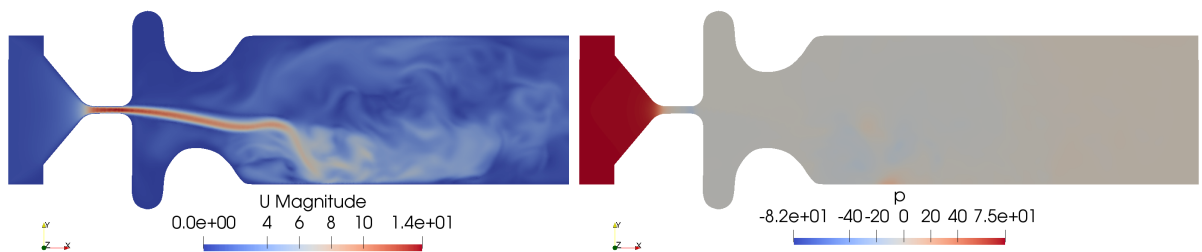
(a) Rychlostní pole pro čas $t = 0.060$ s

(b) Tlakové pole pro čas $t = 0.060$ s



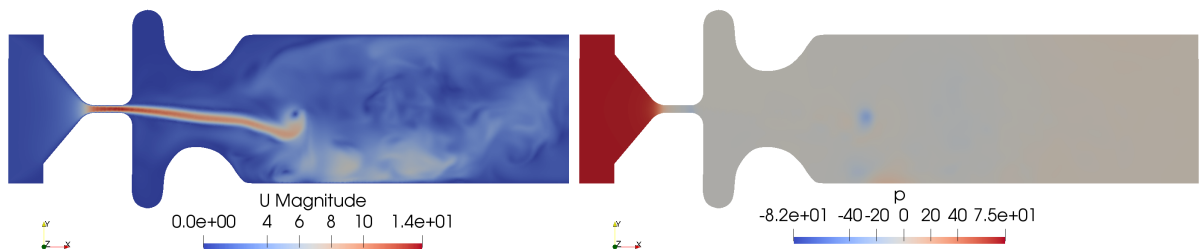
(c) Rychlostní pole pro čas $t = 0.065$ s

(d) Tlakové pole pro čas $t = 0.065$ s



(e) Rychlostní pole pro čas $t = 0.070$ s

(f) Tlakové pole pro čas $t = 0.070$ s



(g) Rychlostní pole pro čas $t = 0.075$ s

(h) Tlakové pole pro čas $t = 0.075$ s

Obrázek 5.18: Vývoj rychlostního a tlakového pole pro vstupní rychlost do oblasti $u_x = 0,5$ m/s a počáteční náklon hlasivky $\alpha_0 = 5^\circ$ ve 3D

Závěr

Tato diplomová práce pojednává o numerickém modelování interakce proudění a pružně uloženého tělesa. Stručný úvod do problematiky proudění v lidském vokálním traktu a přehled přístupů k řešení tohoto komplexního problému je uveden v první kapitole.

Další kapitola se zabývá řešením matematického modelu hasivek z pohledu dynamiky. Jsou zde odvozeny pohybové rovnice pro zjednodušené modely se soustředěnými parametry. Dále jsou zde určeny konstanty pro tuhost a tlumení modelu. Nastíněn je zde i způsob řešení interakce proudění s pohybem hlasivky.

Numerické metody použité při simulacích jsou popsány ve třetí kapitole. K simulacím byl použit open-source balík OpenFOAM, který řeší Navier-Stokesovy rovnice metodou konečných objemů. V této práci byly použity N-S rovnice pro nestlačitelné laminární proudění. Dále je zde popsána časová a prostorová diskretizace, okrajové podmínky a metody řešení lineárních rovnic.

Interakce proudění s pohyblivou tkání hlasivky byla simulována řešičem pimpleDyMFoam, který je schopen počítat pohyb tuhého tělesa v interakci s okolním prouděním. Tento řešič je zde popsán a jeho programový kód v jazyku C++ je okomentován v příloze.

Pátá kapitola je rozdělena na dvě základní části. V prvním kroku byla ověřena funkčnost řešiče pimpleDyMFoam. Pro matematický model se dvěma stupni volnosti byla spuštěna simulace pro volné kmitání tuhého tělesa. Pro tutu simulaci byla nastavena nulová rychlost proudění. Diferenciální rovnice popisující stejný případ byla simulována v programu Matlab Simulink. Výsledky potvrdily schopnost řešiče v OpenFOAM simulovat tělesa s více stupni volnosti.

Pro model hlasivky byly provedeny simulace interakce proudění s pružně uloženým tělesem ve 2D a 3D. V prvních krocích byly řešeny možnosti deformace sítě. Specifický problém pro proudění v lidském vokálním traktu je velmi úzká štěrbi-
na mezi hlasivkami. V této štěrbině dochází k největší deformaci sítě. V reálném případě se hlasivková štěrbi-
na zcela uzavře, což při simulacích v této práci nebylo možné, a je to jedno z možných témat pro další výzkum. Při zmenšování štěrbi-

ny dochází ke zplošťování elementů, následnému nedodržení kritérií kvality sítě a pádu simulace.

Pomocí numerických simulací byla nalezena kritická rychlost proudění, při které dochází ke vzniku netlumených kmitů. Dále byla nalezena rychlost, při které je hlasivka rozkmitána prouděním bez počátečního impulzu. Byla provedena analýza vlivu velikosti sítě na výpočet kmitů. Pro použité sítě v rozměni 3 000 – 200 000 elementů nebyl zaznamenán výrazný rozdíl ve výchylkách.

V poslední části práce je představena 3D simulace, která byla spuštěna na výpočetním clusteru Charon. Průběhy výchylek jsou zde srovnány se stejným případem ve dvou rozměrech. Dále jsou zde zobrazena rychlostní a tlaková pole pro řez oblastí, která jsou také srovnatelná s poli zobrazenými pro 2D případ.

V této diplomové práci byl vyvinut zcela nový numerický model pro interakci proudění a tuhého tělesa se dvěma stupni volnosti pružně uloženého ve stěně kanálu, představujícím jednoduchý model lidské hlasivky. Velkou výzvou do budoucna je řešení dynamické změny sítě pro malé až nulové rozměry hlasivkové šterbiny.

Literatura

- [1] F. Alipour, C. Brücker, D. Cook, A. Gommel, M. Kaltenbacher, W. Mattheus, L. Mongeau, E. Nauman, R. Schwarze, I. Tokuda, and S. Zorner, “Mathematical models and numerical schemes for the simulation of human phonation,” vol. 6, pp. 323–343, 09 2011.
- [2] “OpenFOAM and The OpenFOAM Foundation.” http://openfoam.github.io/Documentation-dev/html/classFoam_1_1fvMesh.html. Accessed: 2018-04-01.
- [3] J. Horáček and J.G. Švec, “Aeroelastic model of vocal-fold-shaped vibrating element for studying the phonation threshold,” *Journal of Fluids and Structures*, vol. 16, no. 7, pp. 931 – 955, 2002.
- [4] J. L. Flanagan and L. L. Landgraf, “Self-oscillating source for vocal-tract synthesizers,” vol. 16, pp. 57 – 64, 04 1968.
- [5] K. N. Stevens, “Physics of laryngeal behavior and larynx modes,” vol. 34, pp. 264–279, 1977.
- [6] I. Steinecke and H. Herzel, “Bifurcations in an asymmetric vocal-fold model,” vol. 97, pp. 1874–84, 04 1995.
- [7] B. Story and I. Titze, “Voice simulation with a body-cover model of the vocal folds,” vol. 97, pp. 1249–60, 03 1995.
- [8] I. Titze and B. Story, “Rules for controlling low-dimensional vocal fold models with muscle activation,” vol. 112, pp. 1064–76, 10 2002.
- [9] M. Hirano, “Morphological structure of the vocal cord as a vibrator and its variations,” vol. 26, pp. 89–94, 02 1974.
- [10] I. Titze, “The human vocal cords: A mathematical model, part i,” vol. 28, pp. 129–170, 01 1973.

- [11] I. Titze, “The human vocal cords: A mathematical model,” vol. 29, pp. 1–21, 02 1974.
- [12] C. Tao , Y. Zhang, D. G. Hottinger, J. J. Jiang , “Asymmetric airflow and vibration induced by the coanda effect in a symmetric model of the vocal folds.,” vol. 122, pp. 2270–8, 04 2007.
- [13] X. Pelorson, A. Hirschberg, R. R. Van Hassel, A. Wijnands, and Y. Aurégan, “Theoretical and experimental study of quasi-steady flow separation within the glottis during phonation. Application to a modified two-mass model.,” *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 96, pp. 3416–3431, 1994.
- [14] F. Alipour, D. Berry, and I. Titze, “A finite-element model of vocal-fold vibration,” vol. 108, pp. 3003–12, 12 2000.
- [15] G. Link, M. Kaltenbacher, M. Breuer, and M. Döllinger, “A 2d finite-element scheme for fluid–solid–acoustic interaction and its application to human phonation,” vol. 198, pp. 3321–3334, 09 2009.
- [16] C. Tao ,J. Jiang, Y. Yhang, “Simulation of vocal fold impact pressures with a self-oscillating finite-element model,” *Acoustical Society of America Journal*, vol. 119, pp. 3987–94, 2006.
- [17] T. Belytschko, W. Liu, and B. Moran, *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Wiley, 2000.
- [18] J. H. Seo and R. Mittal, “A high-order immersed boundary method for acoustic wave scattering and low-mach number flow-induced sound in complex geometries,” vol. 230, pp. 1000–1019, 02 2011.
- [19] Q. Xue, R. Mittal, X. Zheng, and S. Bielamowicz, “Computational modeling of phonatory dynamics in a tubular three-dimensional model of the human larynx,” vol. 132, pp. 1602–13, 09 2012.
- [20] J. Ferziger and M. Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [21] H. Versteeg and W. Malalasekera, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Pearson Education Limited, 2007.

A Komentovaný zdrojový kód řešiče pimpleDyMFoam

Níže je uveden zdrojový kód řešiče pimpleDyMFoam s popisem základních vlastností použitých instrukcí. Hlavičkové soubory nic nevytváří, pouze v sobě definují funkce, které mají níže vypsané vlastnosti a jsou volané vně programu.

```
/*-----*\
=====
\\      /   F i e l d           |   OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
  \\    /   O p e r a t i o n   |
   \\  /   A n d                |   Copyright (C) 2011-2017 OpenFOAM Foundation
    \\ /   M a n i p u l a t i o n |
-----*/
```

License

This file is part of OpenFOAM.

OpenFOAM is free software: you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or (at your option) any later version.

OpenFOAM is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License along with OpenFOAM. If not, see <<http://www.gnu.org/licenses/>>.

Application

pimpleDyMFoam.C

Description

Transient solver for incompressible, turbulent flow of Newtonian fluids on a moving mesh.

Turbulence modelling is generic, i.e. laminar, RAS or LES may be selected.


```

// *-----*/

#include "fvCFD.H" //Souhrn hlavičkových souborů používaných každým řešičem,
//např. Time.H, fvMesh.H, constrainPressure.H a další.
#include "dynamicFvMesh.H" //Třídy pro deformující se sítě.
#include "singlePhaseTransportModel.H" //Jednofázový model založený
//na viskózním modelu.
#include "turbulentTransportModel.H" //Model turbulence (RAS, LES a laminární)
#include "pimpleControl.H" //Řídící třída algoritmu PIMPLE
//poskytuje konvergenční informace a kontroly smyček algoritmu.
#include "CorrectPhi.H" //Korekce veličin pro pohybující se síť.
#include "fvOptions.H" //Načítá nastavení pro konečné objemy
//pracuje se sítěmi a maticemi.

// * * * * * //

int main(int argc, char *argv[])
{
#include "postProcess.H" //Zajišťuje post-processing.
#include "setRootCase.H" //Kontroluje cesty (kořenovou a k souboru).
#include "createTime.H" //Načte informace o časových objektech z controlDict.
#include "createDynamicFvMesh.H" //Vytvoří dynamickou síť.
#include "initContinuityErrs.H" //Nastaví kumulativní chyby
//v kontinuitě (počáteční: Err = 0).
#include "createControls.H" //Objekty pro kontrolu simulace pro:
//Courantovo číslo, tlak, PIMPLE(mesh).
#include "createFields.H" //Inicializace rychlosti, tlaku, modelu turbulence
//a vytvoření toků na hranicích elementů.
#include "createUf.H" //Čtení nebo výpočet interpolované rychlosti
//ve střezech stěn.
#include "createFvOptions.H"
#include "CourantNo.H" //Vypočítá a vypíše maximální a střední hodnotu
//Courantova čísla.
#include "setInitialDeltaT.H" //Nastaví počáteční časový interval
//odpovídající algoritmu pracujícím s hodnotou Courantova čísla
//(nastaveno v setDeltaT), ale pouze pokud je tato hodnota menší
//než implicitně zadaná pro start algoritmu.

turbulence->validate(); //Validuje pole s turbulentními proměnnými
//a v případě potřeby aktualizuje pole odvozená.
// * * * * * //

Info<< "\nStarting time loop\n" << endl; //Výpis do konzole
while (runTime.run())
{
#include "readControls.H" //Načítá kontrolní objekty
#include "CourantNo.H"
#include "setDeltaT.H" //Nastavuje časový krok dle Courantova čísla

```

```

runTime++; //Přetížený operátor inkrementace

Info<< "Time = " << runTime.timeName() << nl << endl;

mesh.update();

// Převeďte tok na relativní vzhledem k rychlosti pohybu sítě
phi = mesh.Sf() & Uf;

if (mesh.changing() && correctPhi)
{
    #include "correctPhi.H"
}

//Z absolutního toku je udělán relativní s přihlédnutím k pohybu sítě.
fvc::makeRelative(phi, U);

if (mesh.changing() && checkMeshCourantNo)
{
    #include "meshCourantNo.H"
}

//PIMPLE: korekční smyčka pro tlak a rychlost
while (pimple.loop())
{
    #include "UEqn.H" //Řešení Navier-Stokesových rovnic

    //Korekční smyčka pro tlak
    while (pimple.correct())
    {
        #include "pEqn.H" //Zjištění hodnoty tlaku
    }

    if (pimple.turbCorr()) //Vrátí true pokud se řeší turbulence.
    {
        laminarTransport.correct();
        turbulence->correct();
    }
}

runTime.write();

Info<< "ExecutionTime = " << runTime.elapsedCpuTime() << " s"
    << " ClockTime = " << runTime.elapsedClockTime() << " s"
    << nl << endl;
}

Info<< "End\n" << endl;

```

```
        return 0;
    }

// ***** //
```

Funkce přetíženého operátoru inkrementace ++ v případě runTime je příliš rozsáhlá na popsání v komentáři přímo v programovém kódu. První funkcí tohoto operátoru je uložení starých hodnot. Pokud je inkrementovaný čas velmi blízko k nule, tak ho na tutu hodnotu nastaví. Dále je zde řešeno paralelní rozesílání signálu. OpenFOAM nabízí více způsobů inkrementace času a všechny jsou tu samozřejmě ošetřeny. Je zde počítán CPU čas. Samozřejmostí je kontrola času pro zapisování a času pro ukončení simulace. Operátor se také stará o limity přesnosti a zjišťuje, zda se časová hodnota díky zaokrouhlovací chybě nezmensšila.

B Obsah přiloženého CD

Přiložené CD obsahuje:

- diplomova_prace_tisovska_2018.pdf
 - text diplomové práce ve formátu pdf
- pimpleDyMFoam.C
 - zdrojový kód řešiče
- simulace
 - 2D
 - * soubory pro spuštění 2D simulace s rychlostí na vstupu $u_x = 0.5$ m/s
 - 3D
 - * soubory pro spuštění 3D simulace s rychlostí na vstupu $u_x = 0.5$ m/s