Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

# Vybrané problémy z planimetrie

Vypracoval: Míková Lucie
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.
České Budějovice 2017

**Prohlášení**

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma *Vybrané problémy z planimetrie* jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ........................ ................................................

**Anotace:**

Tato práce je zaměřena na *Vybrané problémy z planimetrie*. Cílem práce je seznámit čtenáře nejen s planimetrickými problémy, jejich verifikací (ověřením) vytvořenou v dynamickém matematickém programu GeoGebra a jejich klasickým důkazem, ale také seznámení s životem autora, kterému je daný problém přisuzován, respektive je po něm pojmenován. Práce je doplněna o obrázky, které slouží k lepšímu pochopení a porozumění problému a verifikaci. Tuto práci lze použít jako doplnění učiva na středních školách, kde využitím programu GeoGebra a následné verifikace může dojít k lepšímu pochopení daného tématu.

**Annotation:**

This diploma thesis is focused on *Selected problems in planimetry*. The aim of this diploma thesis is description not only planimetric problems and their verification in a dynamic mathematical program GeoGebra, but also presentation of the author after whom it is called. The thesis is illustrated with pictures, which can help the reader to understand the problem and verification. This thesis can be used as a supplement the curriculum in secondary schools, where using dynamic program GeoGebra and subsequent verification may reach a better understanding of the topic.

**Poděkování:**

Tímto bych chtěla poděkovat svému vedoucímu diplomové práce prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., za odborné vedení, nápady, cenné rady a čas, který mi věnoval při sepisování mé práce. Mé poděkování také patří mé rodině za jejich vytrvalou podporu nejen při psaní diplomové práce, ale během celého mého vysokoškolského studia.

# Obsah

# 1 ÚVOD

Planimetrie je důležitou součástí matematiky, která se zabývá vztahy geometrických útvarů v rovině. A právě tyto vztahy se staly tématem mé diplomové práce. Člověk okolo sebe může neustále vidět mnoho geometrických útvarů, ale významní matematikové, ba i „ne-matematikové“ jako byl například Pierre de Fermat, pro kterého matematika byla jen koníčkem, dali běžným a jednoduchým geometrickým útvarům další rozměr a přišli na zajímavé zákonitosti. S několika z nich Vás touto cestou chci seznámit a to pomocí verifikace, tedy ověřování správnosti daného problému, a ukázat v dynamickém matematickém programu GeoGebra.

Tyto planimetrické problémy nebyly předem určené, ale mým cílem bylo vybrat takové, které by mohly být užitečné nebo zajímavé i pro ty, kteří nemají matematiku rádi. U každého problému začínám se stručným popisem života autora. Tito lidé jsou totiž velmi fascinující bytosti, které se k matematice občas dostali úplnou náhodou, a myslím si, že není od věci se dozvědět, co dalšího dokázali, jakými dalšími vědními obory se zabývali nebo v jakých sociálních poměrech vyrůstali. Proto je na začátku každého problému zmínka o autorovi. Dalším bodem je samozřejmě formulace daného problému, který je doplněn mnou vytvořenými obrázky z programu GeoGebra. Dále následuje verifikace problému v již několikrát zmiňovaném programu GeoGebra doplněna o slovní výklad toho, jak verifikace probíhá. A v závěru každého problému nesmí chybět klasický matematický důkaz, který předešlou verifikaci v matematickém programu potvrzuje.

Po úvodní kapitole se tato diplomová práce zabývá historií planimetrie, která sahá již do staletí před naším letopočtem, neboť v této době byli lidé fascinováni geometrickými útvary a samozřejmě jejich vlastnosti využívali při zaměřování budov a podobně. V této kapitole najdeme jména prvních filosofů-matematiků, kteří se považují za průkopníky nejen planimetrie. Jejich myšlenky byly často tak jedinečné a geniální, že nebyly překonány dodnes a často se podle nich učilo celá staletí.

Tato práce je z velké části tvořena verifikací, respektive ověřováním vlastností vybraných problémů, tudíž se třetí kapitola zabývá tím, jak je verifikace v celé práci chápána. Důležité je zdůraznit, že verifikace není považována za důkaz, protože může existovat jediná možnost, pro kterou určitá vlastnost neplatí, a pak je verifikace neplatná. To znamená, že verifikací nelze prozkoumat úplně každou situaci, která může nastat, a proto ji nemůžeme považovat za důkaz. Ověření každého planimetrického problému je provedeno v dynamickém matematickém programu GeoGebra a v této práci podrobněji popsána. V této kapitole je také uveden příklad verifikace, pro který jsem vybrala Pythagorovu větu.

V dalších deseti kapitolách jsou rozebrány vybrané problémy z planimetrie, kam jsem zařadila Menelaovu větu, Pappovu větu, Pascalovu větu, Brianchonovu větu, Fermatův bod, Routhovu větu, Cevovu větu, Feynmanův trojúhelník, Desarguovu větu a na závěr Napoleonovu větu. Každá tato kapitola začíná seznámení se s autorem, respektive s člověkem, po kterém je věta pojmenována z různých důvodů (například u Napoleonovy věty je pravděpodobné, že tuto větu vůbec neznal, takže ji nemohl ani dokázat, a přesto po něm byla pojmenována). V této části je stručně popsán jejich život a jejich příspěvek matematice a jiným vědeckým i nevědeckým oblastem. Další část každé této kapitoly náleží formulaci problému, který je pro lepší představu doplněn obrázkem. Další podkapitola je věnována verifikaci v programu GeoGebra, která je opět doplněna obrázky a samozřejmě podrobnějším popisem, jak dospět k ověření a zda byla verifikace úspěšná. Nakonec je vždy uveden důkaz buď klasický, nebo důkaz beze slov. Výjimkou je Fermatův bod, kde lze verifikaci považovat za důkaz a Brianchonova věta, která má stejný důkaz jako Pascalova věta.

Důkazem jsou všechny kapitoly uzavřeny kromě jedné – Pascalova věta. Po jejím důkazu je totiž ještě uvedeno využití Pascalovy věty (generování bodů kuželosečky), neboť jsme usoudili, že tato věta je do praxe opravdu užitečná, proto je zde uveden i popis toho, jak vytvoříme nový bod kuželosečky.

Celá tato práce je ukončena závěrem, kde jsou stručně sepsány cíle diplomové práce, a poté následuje seznam použité literatury a seznam obrázků, které se v práci vyskytují.

# 2 Historie planimetrie

Planimetrie. Jeden z nejstarších objektů zájmu matematiků a filosofů starověkého Egypta, kde se již začínali zabývat zeměměřičskými úlohami. Jako jednoho ze zakladatelů planimetrie můžeme považovat Thaléta z Milétu (asi přelom 7. až 6. století př. n. l.), který byl nejen významným předsokratovským filosofem, ale i prvním řeckým matematikem a astronomem. Mezi průkopníky planimetrie bych ho zařadila kvůli jeho nejvýznamnějšímu objevu, dodnes v matematice využívanému: *Thaletova věta*, která nám říká, že *„Všechny obvodové úhly sestrojené nad průměrem kružnice jsou pravé."* Thalés je mimo jiné jedním z filosofů, který byl Řeky považován na jednoho ze *Sedmi mudrců*[1] [7].

Dalším významným matematikem byl Pythagoras ze Samu, který se narodil kolem roku 570 př. n. l. Proslavil se dnes asi nejznámější matematickou větou: *„Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců sestrojených nad jeho odvěsnami."* Tuto větu však znali již v Mezopotámii, ale přisuzuje se Pythagorovi, neboť byl prvním, kdo ji dokázal. Pythagoras se zasadil o důkazy a pojmenoval mnoho vlastností trojúhelníku (jako například že *„Součet úhlů v obecném trojúhelníku se rovná dvěma pravým úhlům, tedy 180°.")*, které byly pro další zkoumání planimetrie důležité.

Důležité je také zmínit, že studoval pravidelné mnohoúhelníky, kde ho zajímal zejména pětiúhelník, který se dokonce dostal do znaku pythagorejců. Pro ně byl zajímavý tím, že je zde vyobrazen zlatý řez v souvislosti s pěticípou hvězdou – pokud spojíme vrcholy pravidelného pětiúhelníku, pak dostaneme pěticípou hvězdu, která ve svém středu vytvoří další pětiúhelník – tento úkon můžeme opakovat do nekonečna a poměr menší úsečky a větší úsečky je vždy roven zlatému řezu. Tento poměr v pětiúhelníku můžeme také najít mezi úhlopříčkou a stěnou daného pětiúhelníku [11].

---

[1] (řecky *„hoi hepta sofoi"*), což podle antické tradice je sedm myslitelů a učenců ze 7. a 6. stol. př. n. l., kteří svou životní moudrost vložili do pár stručných vět, které se tradují dodnes a od kterých nejčastěji datujeme počátky řecké filosofie. Mezi tyto myslitele nejčastěji řadíme: Solón, Periandros, Kleobúlos, Pittakos, Biás, Cheilón, Anacharsis, Epimenidés a již zmiňovaný Thalés z Milétu.

V této době se všeobecně všechny vědy prolínaly a to zejména matematika s filosofií. Za filosofa-matematika můžeme označit Platóna, který svou tzv. *živlovou teorii* založil na geometrickém postavení čtyř živlů, kde hledá jejich společný základ, respektive hledá geometrické místo bodu [8].

Další důležitou osobou je Euklides, slavný alexandrijský matematik, který žil ve 3. století př. n. l., o jehož životě mnoho nevíme. Ale i přesto se jedná o velmi významnou osobnost, neboť dokázal všechny dosavadní poznatky matematiky shrnout do jednoho díla. Díla o 13 svazcích – ***Základy*** (*Stoicheia*) – které bylo doplněno o jeho vlastní objevy. V úvodu každého svazku můžeme najít definice a základní pojmy. Tyto definice jsou často postaveny na názorné představě (např.: *Bod jest, co nemá dílu. Čára je délka bez šířky., Hranicemi čáry jsou body., Přímka jest čára, která svými body táhne se rovně.,* apod. [12]). Druhá kniha rozvíjí planimetrii z geometrie a dále o planimetrii pojednává ve třetím svazku. Původní rukopis *Základů* přímo od Eukleida se bohužel nedochoval a nejstarší rukopis z 9. století je uložen ve Vatikánské knihovně. Jedná se o druhou (po Bibli) nejvydávanější knihou na světě, neboť donedávna byla stále používána jako učebnice na mnoha školách a to bez zásadních úprav [13].

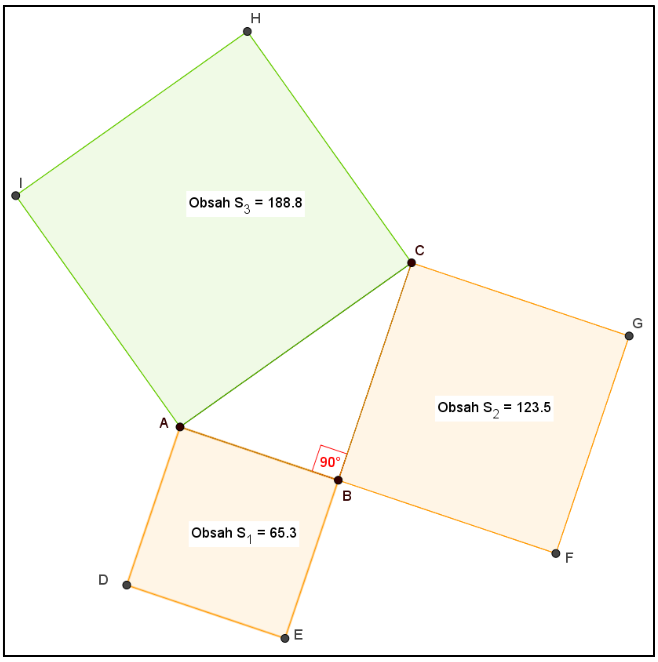
Tito, a ještě mnozí další, se planimetrií zabývali a posunuli ji zase o další kus dál. S některými se ještě v průběhu této práce seznámíme, neboť se jejich objevenými zákonitostmi a důkazy v rámci planimetrických problémů budeme dále zabývat.

# 3 Verifikace

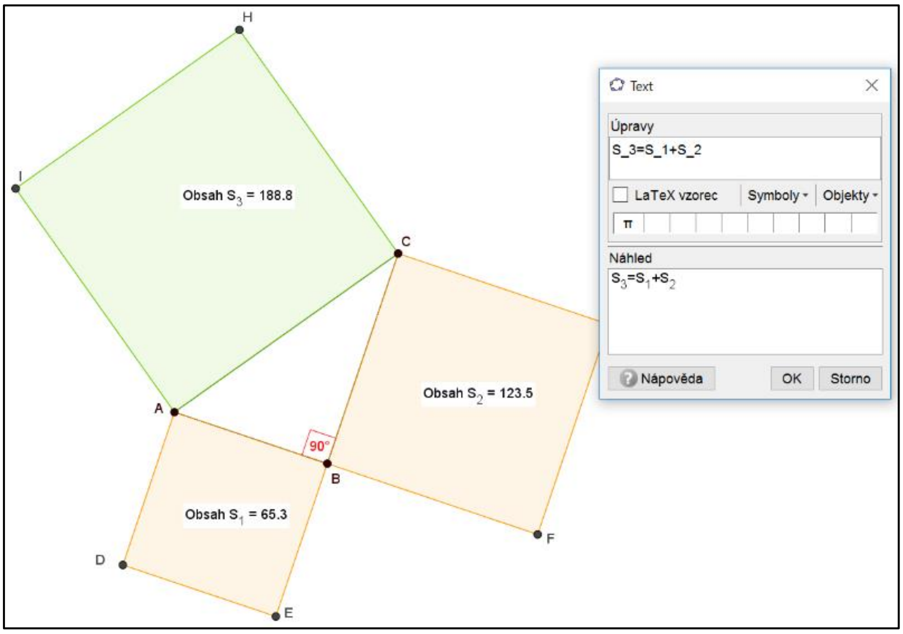
Slovo verifikace pochází z latinského *„verum facere“,* tedy doslovně činit pravdivým, neboli ověřování, kontrola pravdivosti výroku, či hypotézy, avšak je důležité zdůraznit, že verifikace není skutečný důkaz, tedy opravdu slouží pouze k ověření. Ve své diplomové práci budu verifikovat problémy pomocí dynamického geometrického systému – Dynamic geometry software (dále jen DGS) – GeoGebra. Tento program jsem si zvolila zejména pro jeho dostupnost, neboť je volně stažitelný na Internetu, ale také pro jeho jednoduché a intuitivní ovládání. K verifikaci problému využíváme mnoha funkcí, jenž nám tento program nabízí jako například *Množiny bodů*, *Text*, který je vidět pouze za dané podmínky apod.

Verifikaci si můžeme vyzkoušet na jednoduchém planimetrickém problému, například na Pythagorově větě, která zní: *„Obsah čtverce nad přeponou* ***pravoúhlého*** *trojúhelníku je roven obsahů čtverců nad odvěsnami.“* To znamená, že si nejprve zkonstruujeme pravoúhlý trojúhelník – tedy nejprve sestrojíme dva body $A, B$. Poté využijeme funkci *Úhel dané velikosti* a vytvoříme $\sphericalangle ABX = 90°$. Na polopřímce $BX$ zvolíme bod $C$ a poté spojíme tyto body úsečkami a vznikne nám pravoúhlý trojúhelník $ABC$. Následně využijeme funkci *Pravidelný mnohoúhelník*, ke které nám stačí dva body a požadovaný počet vrcholů. Jelikož chceme nad stranami trojúhelníka vytvořit čtverce, tak nad každými dvěma body sestrojíme pravidelný mnohoúhelník se čtyřmi vrcholy. Vzniknou nám tedy čtverce nad stranami trojúhelníků a my si snadno pomocí funkce programu *Obsah* vygenerujeme jejich obsah (viz obr. 1).

Když si tedy určíme obsah čtverce $ABED$ jako $S_1$, $BCGF$ jako $S_2$ a $CAIH$ jako $S_3$, potom můžeme využít funkci programu nazývanou *Text*, pomocí které napíšeme rovnici vyjadřující Pythagorovu větu: $S_3 = S_1 + S_2$ (viz obr. 2).

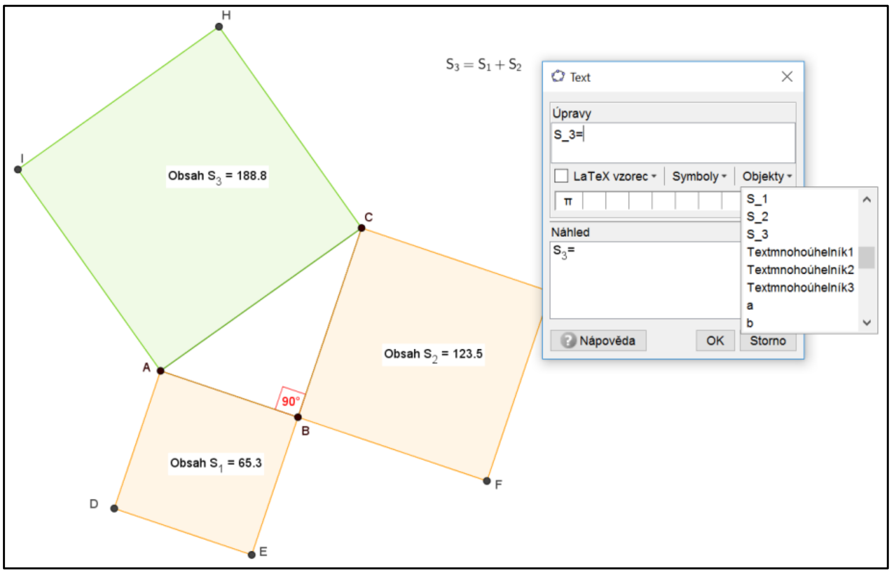



*Obrázek 1: Pythagorova věta*

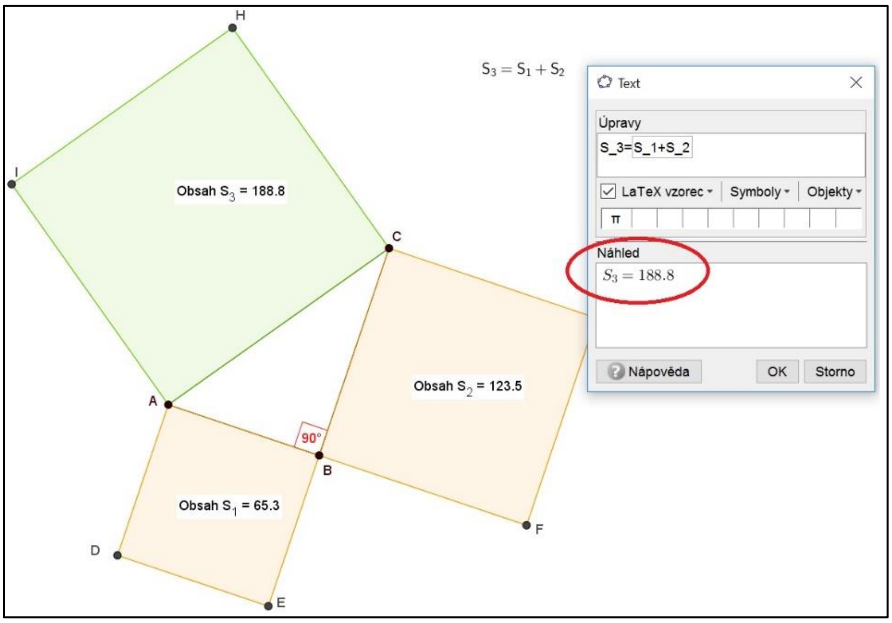



*Obrázek 2: Vložení textu*

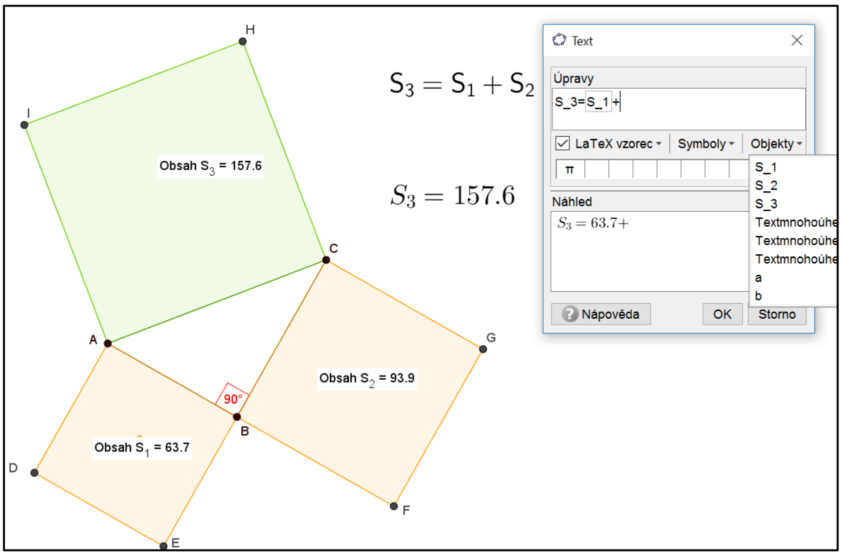
Tato funkce má však ještě další možnost, kde si můžeme vybrat přímo objekt, který nám převede na číslo, respektive vybereme si obsahy trojúhelníků, abychom tuto rovnici nemuseli počítat ručně:



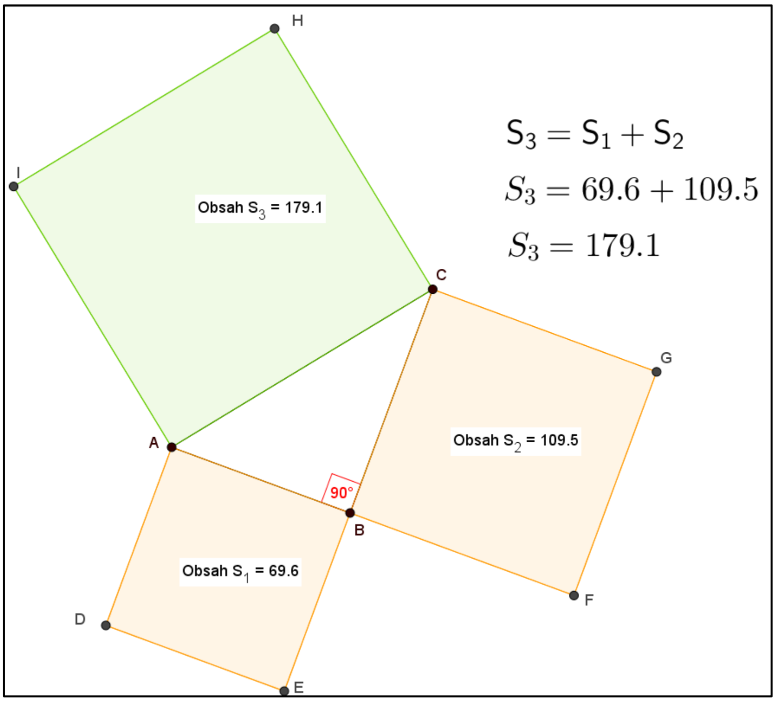

*Obrázek 3: Vložení objektu*




*Obrázek 4: "Interaktivní text"*




*Obrázek 5: Vložení rovnice*




*Obrázek 6: Verifikace*

Jak můžeme vidět na obrázcích výše, dynamický matematický program GeoGebra nám může v mnohém velmi usnadnit práci a v podstatě nic nemusíme počítat na papíře. Nespornou výhodou verifikace v tomto programu je, že jej můžeme snadno použít v hodinách matematiky a navíc vede k rychlejšímu pochopení u žáků, než když jim ukážeme klasický matematický důkaz.

# 4 MENELAOVA VĚTA

## 4.1 Menelaus z Alexandrie

O Menelaově životě je známo opravdu velmi málo. Pravděpodobně se narodil kolem roku 70 v Alexandrii (Egypt), kde strávil své mládí, a poté se přestěhoval do Říma. Arabský registr matematiků, který byl sepsán v 10. století, o Menelaovy říká toto:

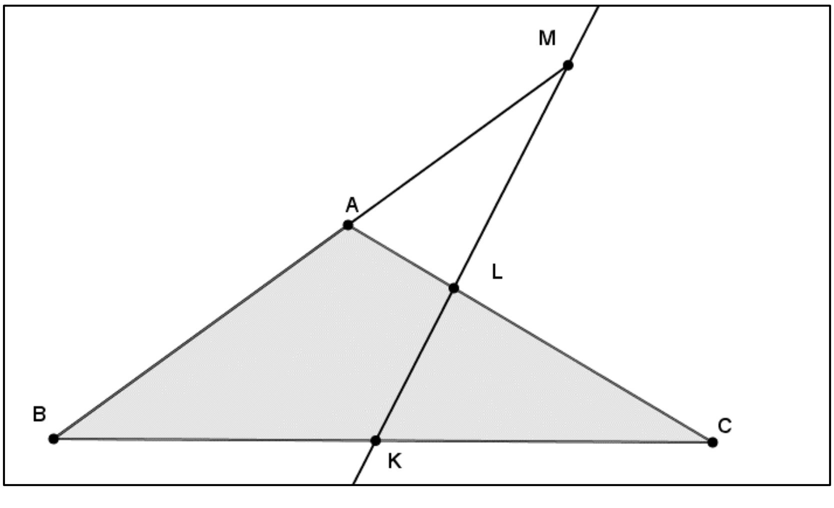
*„Menelaus žil před Ptolemaiem, neboť se o něm zmiňuje ve svém díle. Napsal několik děl a z toho nejméně 3 geometrická (Základy geometrie) a Knihu na trojúhelník. Některé z knih byly přeloženy do arabštiny.“*

Z mnoha knih, které Menelaus napsal, se celé dochovalo pouze dílo *Sphaerica (Kulový)*, které se zabývá sférickými trojúhelníky a jejich aplikací. Tato kniha je rozdělena do tří částí, ve kterých se zabývá geometrií koule a její aplikace v astronomických měření a výpočtů. V poslední knize se zabývá trigonometrií, která zahrnuje i Menelaův teorém (Menelaovu větu), kterým se budeme zabývat níže [38].

## 4.2 Menelaova věta

***Nechť tři body $K, L, M$ leží v tomto pořadí na stranách $BC, AC$ a $AB$ v trojúhelníku $\Delta ABC$, pak jsou tyto body kolineární, jestliže platí [10]:***

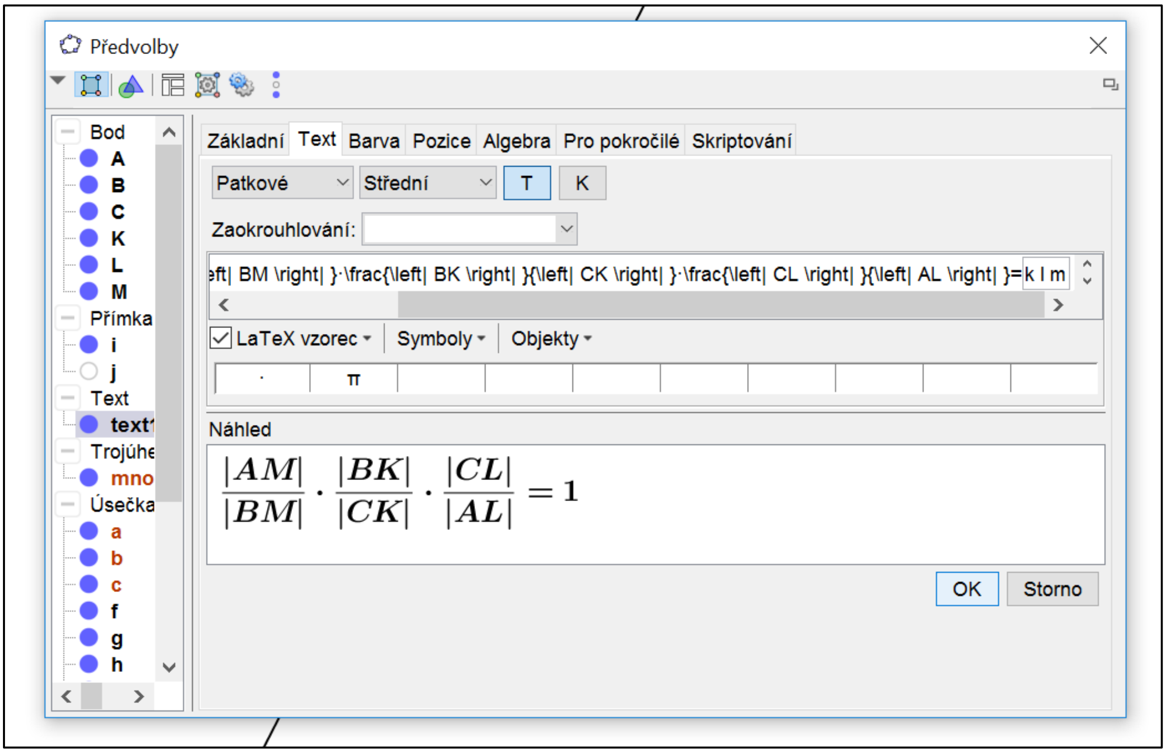
$$\boldsymbol{\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BK}{CK} \cdot \frac{CL}{AL} = 1.}$$




*Obrázek 7: Menelaova věta*

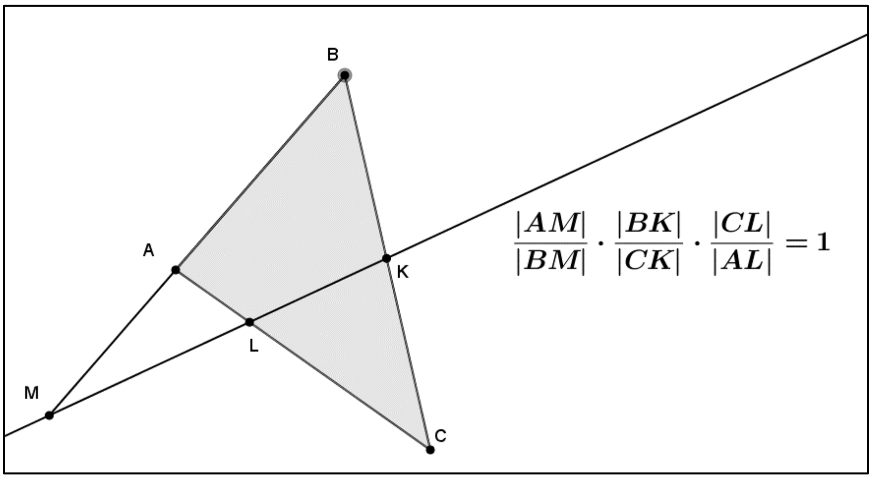
## 4.3 Verifikace Menelaovy věty pomocí programu GeoGebra

Před verifikací si nejprve zkonstruujeme libovolný trojúhelník $ABC$ a body $K, L, M$, které vyhovují definici výše (viz obr. 7). Dále si definujeme poměry stran, kdy platí: $k = \frac{AM}{BM}$, $l = \frac{BK}{CK}$ a $m = \frac{CL}{AL}$. Pak už jen využitím funkce *Text* napíšeme rovnici z definice, která se nám objeví jako běžný text. My však můžeme ještě využít tzv. *interaktivní text*, který nám přepočítává výsledek. To znamená, že si za tento námi napsaný text vložíme *Objekt (prázdné pole)*, kam zapíšeme součin námi definovaných poměrů $k, l, m$.




*Obrázek 8: Menelaova věta - verifikace pomocí funkce Text*

Jelikož nám definice říká, že se mají tyto poměry rovnat jedné a *interaktivní text* nám tento fakt potvrzuje (viz obr. 8), a zároveň se při pohybu bodů výsledek nemění (viz obr. 9), pak můžeme verifikaci považovat za úspěšně dokončenou.




*Obrázek 9: Menelaova věta - pohyb bodů při verifikaci*

## 4.4 Důkaz Menelaovy věty

Menelaova věta je v ekvivalentním tvaru, tudíž potřebujeme dokázat obě strany ekvivalence, tedy obě implikace.

V první části důkazu předpokládejme, že body $K, L$ , $M$ jsou kolineární, tedy dokazujeme vztah:

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BK}{CK} \cdot \frac{CL}{AL} = 1.$$

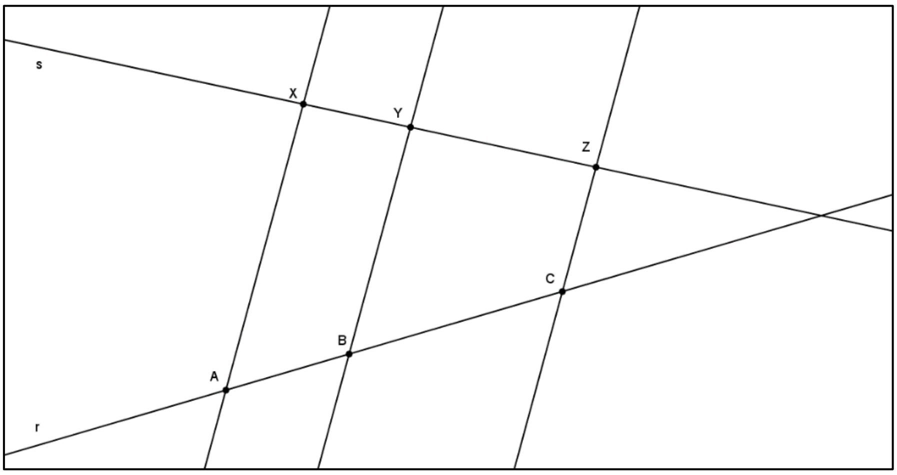
Body $K, L, M$ vedeme přímku $p$ a k ní sestrojíme dvě rovnoběžky procházející bodem $A$ a bodem $B$. Poté víme, že platí [39]:

$$\frac{|CL|}{|AL|} = \frac{|CK|}{|XK|} \bigwedge \frac{|AM|}{|BM|} = \frac{|XK|}{|BK|},$$

podle **věty o třech přímkách**:

*Máme-li tři různé body $A, B, C$ ležící na jedné přímce $r$ a nechť máme libovolnou přímku $s$. Pak existují rovnoběžné přímky $a, b, c,$ které procházejí po řadě body $A, B, C$. Potom dostaneme průsečíky přímek $X, Y, Z$ tak, že platí $X \in a \cap s, Y \in b \cap s$ a $Z \in c \cap s$ (viz obr. 10). Následně můžeme říci, že [39]:*

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|XZ|}{|YZ|}.$$




*Obrázek 10: Věta o třech přímkách*

Ze vztahu $\frac{|CL|}{|AL|} = \frac{|CK|}{|XK|} \wedge \frac{|AM|}{|BM|} = \frac{|XK|}{|BK|}$ dostáváme:

$$\frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CL|}{|AL|} \cdot \frac{|AM|}{|BM|} = \frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CK|}{|XK|} \cdot \frac{|XK|}{|BK|} = \frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CK|}{|XK|} \cdot \frac{|XK|}{|BK|} = 1.$$

Tím máme dokázanou první část Menelaovy věty. Při dokazování druhé implikace předpokládáme, že:

$$\frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CL|}{|AL|} \cdot \frac{|AM|}{|BM|} = 1.$$

Chceme dokázat, že body $K, L, M$ jsou kolineární, což lze dokázat sporem, tedy budeme předpokládat, že body $K, L, M$ nejsou kolineární. Zvolme například body $L, M$, kterými vedeme přímku a hledáme její průsečík $K'$ se stranou $BC$. Pak by platil vztah:

$$\frac{|BK'|}{|CK'|} \cdot \frac{|CL|}{|AL|} \cdot \frac{|AM|}{|BM|} = 1,$$

odkud dostáváme vztah

$$\frac{|BK'|}{|CK'|} = \frac{|BK|}{|CK|},$$

ze kterého je zřejmé, že $K' = K$, což je spor, neboť $K, L, M$ jsou kolineární a body $K', L, M$ jsou nekolineární. Tím je důkaz hotov [40].

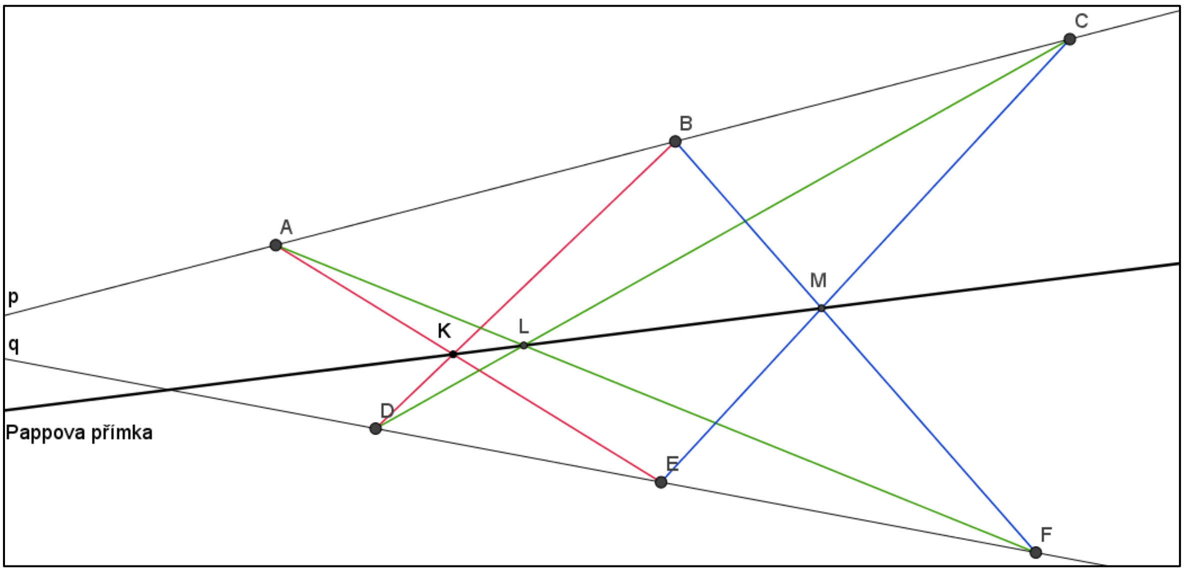
# 5 PAPPOVA VĚTA

## 5.1 Pappos z Alexandrie

Pappova věta, někdy také nazývána Pappova-Pascalova věta, byla poprvé vyřčena řeckým matematikem a astronomem ve 4. století našeho letopočtu. Říká se, že Pappos je posledním významným alexandrijským učencem a do podvědomí matematického myšlení se dostal svou osmidílnou prací *Synagoge* (což česky znamená *Sbírka*), kde můžeme nalézt nejen jeho vlastní objevy, ale také poznatky mnoha dalších starověkých matematiků, a proto o tomto díle můžeme mluvit jako o hlavním pramenu našich vědomostí o starověké geometrii. Ve skutečnosti se však neví, co z této *Sbírky* je doopravdy Pappova vlastní práce a co pochází od jiných matematiků a filosofů. Zde můžeme nalézt právě tento geometrický problém: *Pappova věta*, která byla v 17. století zobecněna významným francouzským matematikem Pascalem [1].

## 5.2 Pappova věta

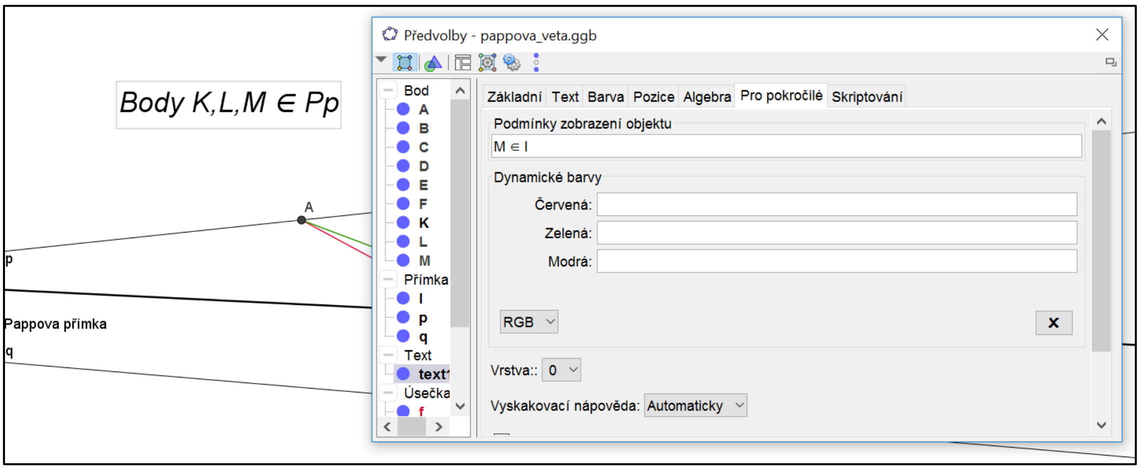
***Jsou dány dvě různoběžné přímky $p, q$. Zvolíme navzájem různé body $A, B, C \in p$ a body $D, E, F \in q$ tak, že existují průsečíky $K = AE \cap BD, L = AF \cap CD$, $M = BF \cap CE$. Potom body $K, L, M$ leží na jedné přímce (tzv. Pappově přímce) [2].***




*Obrázek 11: Pappova přímka*

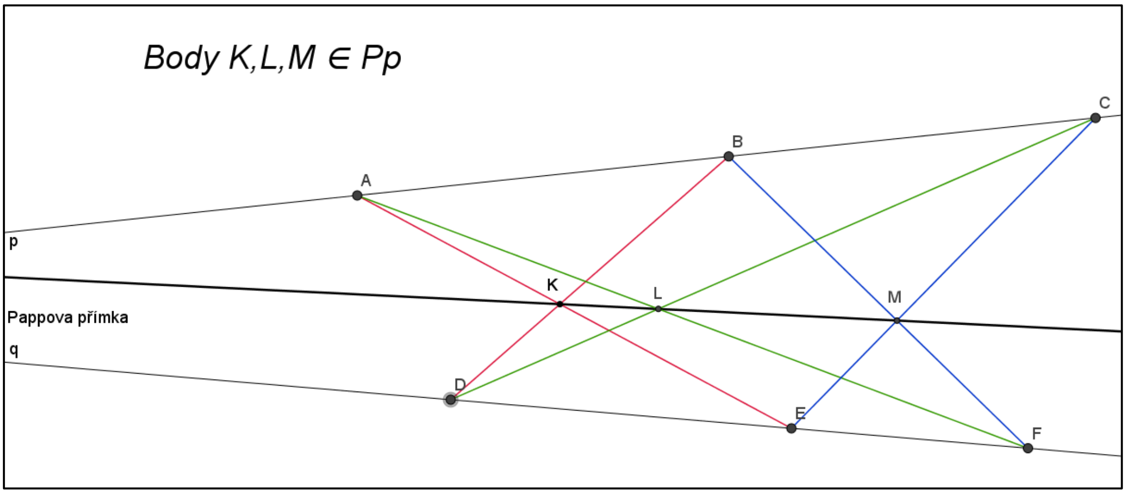
## 5.3 Verifikace pomocí programu GeoGebra

Program GeoGebra nám umožňuje funkci, která nám ukáže, že jsou tři různé body kolineární. Tuto vlastnost ověříme tak, že využijeme funkce *Text,* kde si můžeme zvolit podmínku, za které bude námi napsaný text zobrazen.



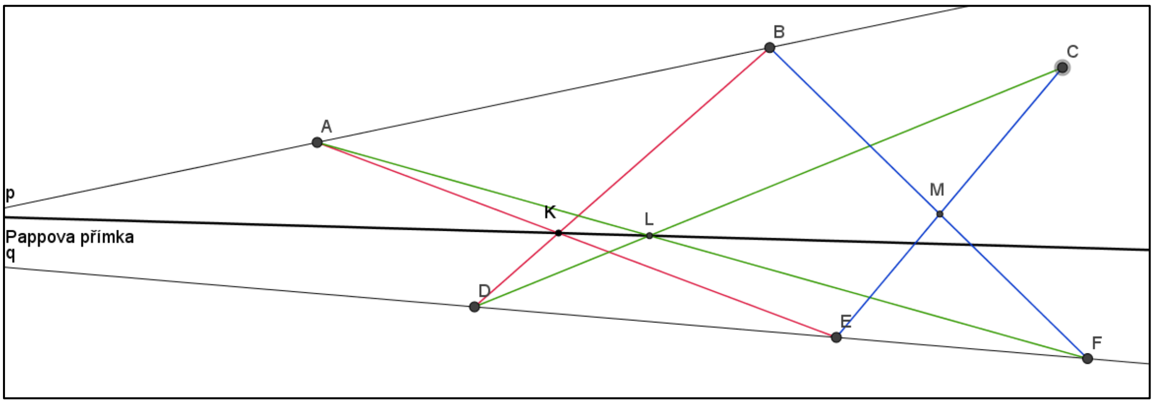

*Obrázek 12: Podmínka kolinearity bodů*

Nechť $K, L \in Pp$, kde $Pp$ je Pappova přímka. Pak napíšeme text: *„Body* $K, L, M \in Pp$*“* a uvedeme podmínku $M \in Pp$. Poté pohybem bodů ověříme, že body $K, L, M$ jsou kolineární právě tehdy, když $A, B, C \in p \ \wedge \ D, E, F \in q$ (viz obr. 13).




*Obrázek 13: Pappova přímka - kolinearita bodů K, L, M*

Pokud však $A, B, C \notin p \ \vee D, E, F \notin q$, potom $K, L, M \notin Pp$ (viz obr. 14).




*Obrázek 14: Pappova přímka - K, L, M nejsou kolineární*

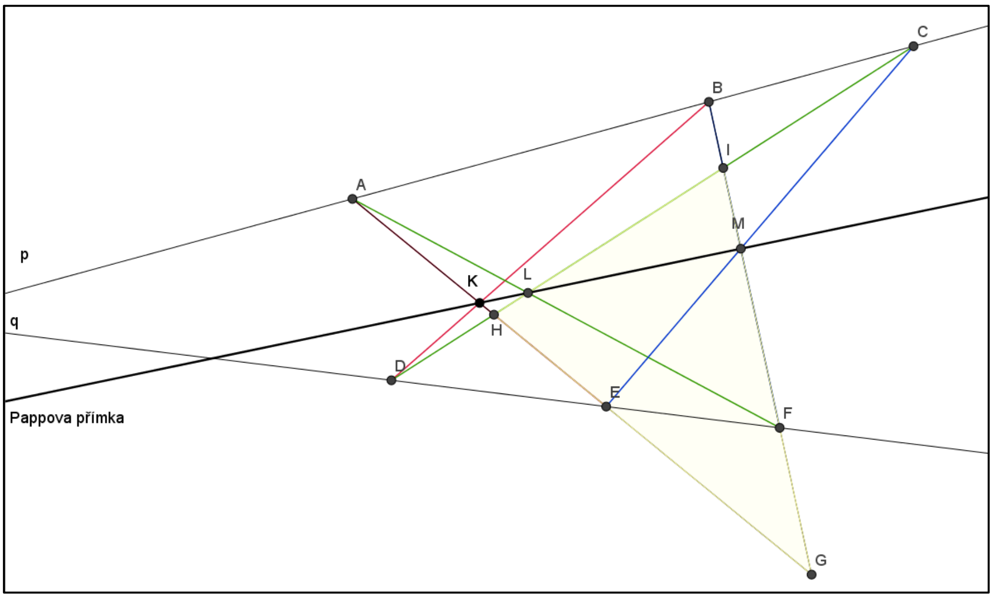
## 5.4 Důkaz Pappovy věty

Protože chceme dokázat, že tři body leží na jedné přímce, pak je vhodné využít výše zmíněnou Menelaovu větu:

*Nechť tři body $K, L, M$ leží v tomto pořadí na stranách $AB, BC$ a $AC$ v trojúhelníku $\Delta GHI$, pak jsou tyto body kolineární, jestliže platí [10]:*

$$\frac{GK}{KH} \cdot \frac{HL}{LI} \cdot \frac{IM}{GM} = 1.$$

V tomto případě to znamená, že větu aplikujeme na trojúhelník $\Delta GHI$, který můžeme vytvořit do již stávajícího obrazu Pappovy věty v programu GeoGebra.




*Obrázek 15: Důkaz dle Menelaovy věty*

Předpokládejme, že uskupení vypadá tak, jako na obrázku výše a chceme dokázat, že body $K, L, M$ jsou kolineární. To lze dokázat právě aplikací Menelaovy věty pro $\Delta GHI$ a jejích prvních pět příček $DKB, ALF, CME, ABC, DEF$ [2].

$$DKB: \quad \frac{HK}{GK} \cdot \frac{GB}{IB} \cdot \frac{ID}{HD} = 1$$

$$ALF: \quad \frac{HA}{GA} \cdot \frac{GF}{IF} \cdot \frac{IL}{HL} = 1$$

$$CME: \quad \frac{HE}{GE} \cdot \frac{GM}{IM} \cdot \frac{IC}{HC} = 1$$

$$ABC: \quad \frac{HC}{IC} \cdot \frac{IB}{GB} \cdot \frac{GA}{HA} = 1$$

$$DEF: \quad \frac{HD}{ID} \cdot \frac{IF}{GF} \cdot \frac{GE}{HE} = 1$$

Vynásobíme pět shodností a nově uspořádáme výrazy:

$$\frac{HK}{GK} \cdot \frac{GM}{IM} \cdot \frac{IL}{HL} \cdot \left(\frac{GB}{IB} \cdot \frac{ID}{HD} \cdot \frac{IC}{HC} \cdot \frac{HE}{GE} \cdot \frac{HA}{GA} \cdot \frac{GF}{IF} \cdot \frac{HC}{IC} \cdot \frac{IB}{GB} \cdot \frac{GA}{HA} \cdot \frac{HD}{ID} \cdot \frac{IF}{GF} \cdot \frac{GE}{HE}\right) = 1.$$

Pak se všechny výrazy v závorce vyruší:

$$\frac{HK}{GK} \cdot \frac{GM}{IM} \cdot \frac{IL}{HL} = 1,$$

což je Menelaova věta, která nám říká, že tři body $K, L, M$ opravdu leží na jedné přímce, tedy že body jsou kolineární. To téměř dokazuje Pappovu větu. Problém je v tom, že tento důkaz je závislý na existenci bodu, jakožto průsečíku přímek $AE$ a $BF$, tedy $G \in AE \cap BF$. Pokud nastane situace, kdy přímky $AE$ a $BF$, tedy $AE \parallel BF$, a průsečík $G$ nelze vytvořit, pak tento bod lze vytvořit pomocí jiných dvou příček, pro které platí stejné podmínky [2].

# 6 PASCALOVA VĚTA

## 6.1 Blaise Pascal

Roku 1623 se ve francouzském Clermont-Ferand narodil do vzdělané rodiny Blaise Pascal. V jeho třech letech mu umřela matka a jeho otec, ačkoliv byl matematikem, mu zakazoval studium v tomto vědním oboru, neboť se domníval, že je důležitější vzdělávat se v oblasti jazyků a to zejména latiny nebo řečtiny. Proto před ním schovával veškeré matematické knihy, ale to Blaise nezastavilo, a tak si sám vytvořil svou teorii geometrie, kde vymyslel své vlastní axiomy a důkazy, a dokonce se vypráví, že si dokázal odvodit axiomy eukleidovské geometrie. Ve svých sedmnácti letech napsal *Pojednání o kuželosečkách*, což vycházelo z matematických prací Apollonia a Girarda Desargua. Jeho současník René Descartes se však domníval, že tato práce pochází od jeho otce. V *Pojednání o kuželosečkách* můžeme najít jeho slavný planimetrický problém *Pascalova věta*, který bude v této práci podrobněji rozebrán. Tuto větu dokázal již ve svých šestnácti letech, ale naneštěstí se jeho originální důkaz nedochoval, takže se můžeme jen domnívat, zda již znal Menelaovu větu, podle které budeme dokazovat tuto větu. Ve svých devatenácti letech Blaise dokonce sestrojil první fungující počítací stroj pro svého otce, kterému chtěl ulehčit práci. Tento stroj se nazývá *„Pascaline“* a uměl vykonávat 4 základní aritmetické úkony a můžeme jej považovat za jednu z prvních kalkulaček. Postupem času tento svůj stroj neustále vylepšoval, avšak úplného zdokonalení se dočkal až od Gottfrieda Leibnitze. A pokud ještě zůstaneme u jeho matematického díla, tak nesmíme opomenout jeho spolupráci s Pierrem de Fermatem, se kterým položili základy teorie pravděpodobnosti jako vědy, což vzniklo na základě jejich konzultací v podobě korespondence. V důsledku toho napsal také dílo *Pojednání o aritmetickém trojúhelníku*, ve kterém uvedl dnes nazývaný *Pascalův trojúhelník*, ačkoliv ten byl známý již ve Starověké Indii [16].

V průběhu svého dalšího života se také zabýval fyzikou, kde například ve svém spise *Pojednání o rovnováze kapalin* zformuloval tzv. *Pascalův princip*, respektive *Pascalův zákon*, ze kterého dodnes vychází hydraulická technika a také vyčíslil velikost hydrostatického tlaku. Proto byla na jeho počest jednotka tlaku nazvána *pascal* [17].

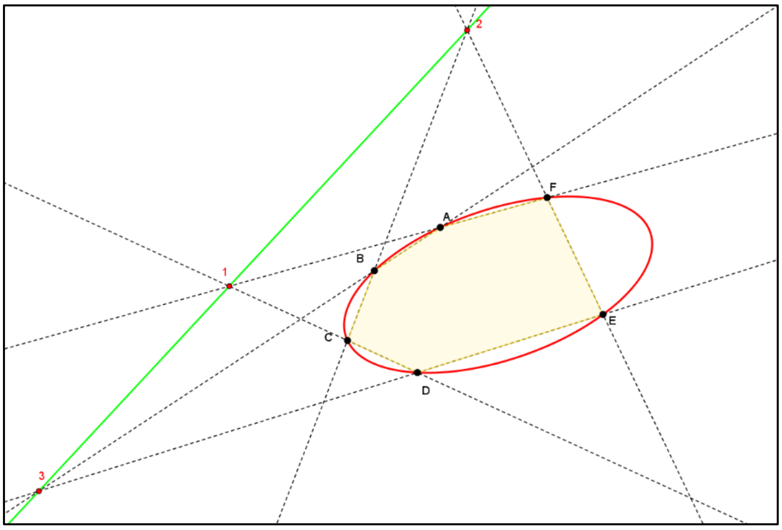
V roce 1954 se během jedné jeho vyjížďky stala nehoda, při které se splašili koně a Blaise málem uhynul. Od té doby obrátil svůj život směrem k filosofii a k náboženství, a dokonce vstoupil do kláštera a matematikou se již nezabýval [16].

## 6.2 Pascalova věta

***Průsečíky protilehlých stran šestiúhelníku vepsaného kuželosečce jsou tři body ležící na jedné přímce (tzv. Pascalova přímka) a naopak, leží-li průsečíky protilehlých stran šestiúhelníku na jedné přímce, je tento šestiúhelník vepsán kuželosečce [14].***

Pascalova věta je přímým zobecněním Pappovy věty a zároveň se jedná o duální větu s Brianchonovou větou [15].

Jednoznačně můžeme tuto větu označit jako projektivní a jestliže platí pro jeden druh kuželosečky, pak platí i pro všechny ostatní a to také v případě, kdy věta platí pro kruh. V tomto případě dokonce vlastnost neplatí pouze pro body, ale také pro pár protínajících se přímek (jako projektivní vlastnost to tedy platí také pro dvě rovnoběžné přímky), což je důvod, proč o tomto výroku říkáme, že se jedná o zobecnění Pappovy věty [15].

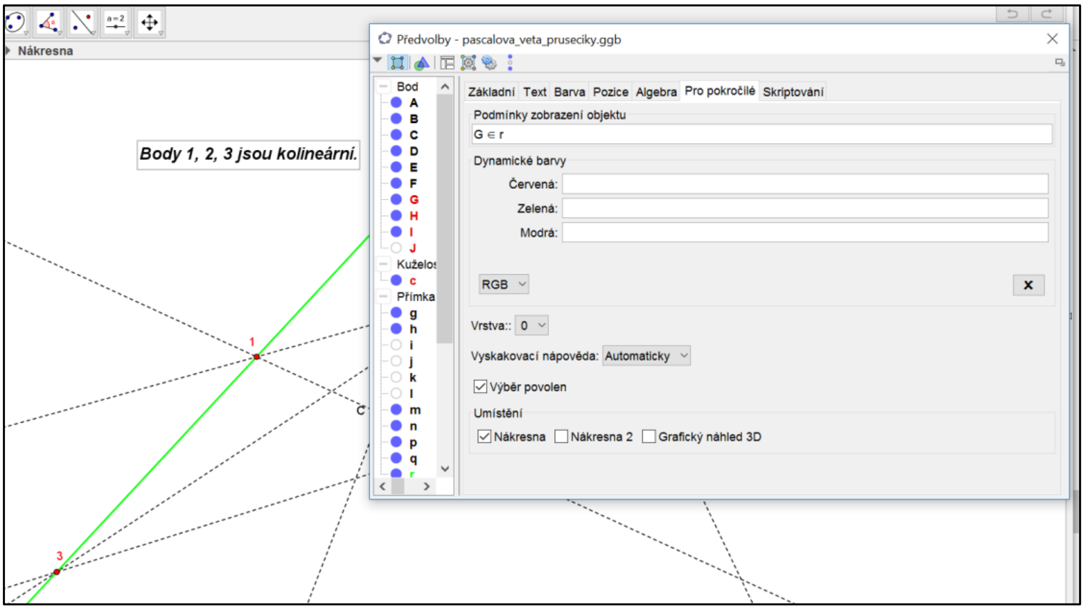



*Obrázek 16: Pascalova věta*

## 6.3 Verifikace pomocí programu GeoGebra

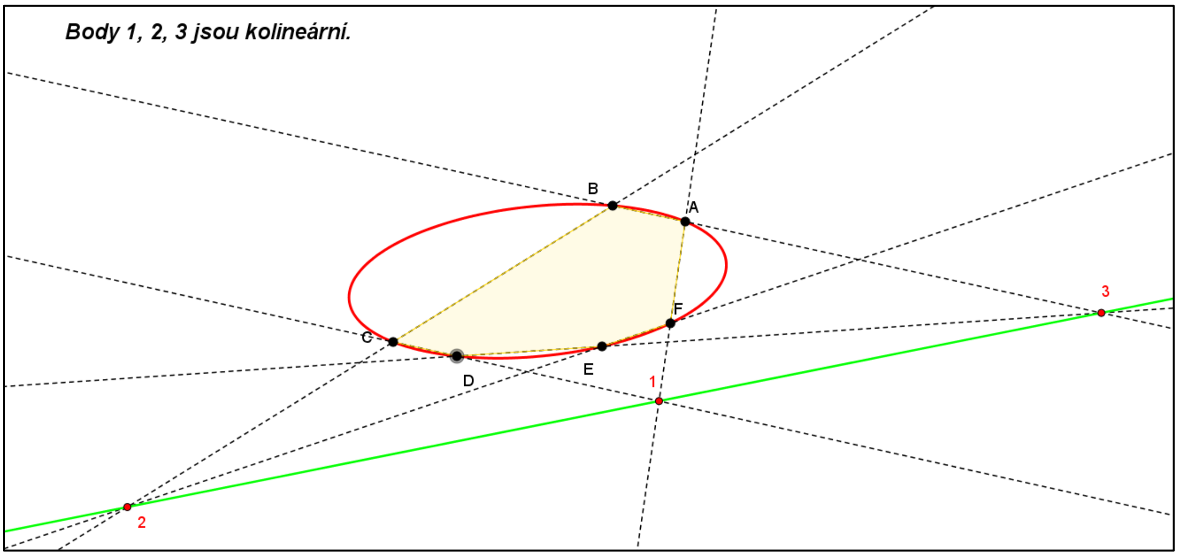
Nejprve v dynamickém programu GeoGebra zkonstruujeme elipsu (využijeme funkci *Kuželosečka daná 5 body*, neboť víme, že kuželosečka je vždy jednoznačně určena pěti body), na které leží 6 bodů – vytvoříme šestiúhelník. Všechny strany tohoto šestiúhelníku prodloužíme a vždy dvě protější strany se protnou, a proto nám vzniknou 3 průsečíky. Tři body (1, 2, 3), které dle Pascalovy věty leží na jedné přímce (viz obr. 16).

V tomto případě opět budeme zkoumat kolinearitu tří bodů, tudíž jako v předchozím případě využijeme funkci *Text*, respektive podmínky pro zobrazení daného textu. Pokud vedeme přímku $r$ body 2 a 3, pak podmínkou pro zobrazení daného textu bude, že bod $G \in r$, respektive bod $1 \in r$ (viz obr. 17).




*Obrázek 17: Podmínka pro zobrazení textu*

Pokud hýbeme body ležící na dané kuželosečce, v tomto případě elipse, pak zjistíme, že text je stále viditelný, tudíž můžeme konstatovat, že všechny body neustále leží na jedné přímce (viz obr. 18). Tím lze verifikaci považovat za vydařenou a můžeme říci, že na základě ověření v programu GeoGebra tato vlastnost platí.




*Obrázek 18: Pohyb bodů po elipse*

## 6.4 Důkaz Pascalovy věty

Jak jsme již výše zmínili, Pascalova věta je zobecněním Pappovy věty, což znamená, že pro dokázání tohoto planimetrického problému můžeme také využít Menelaovu větu:

*Nechť tři body $K, L, M$ leží v tomto pořadí na stranách $AB, BC$ a $AC$ v trojúhelníku $\Delta GHI$, pak jsou tyto body kolineární, jestliže platí [10]:*

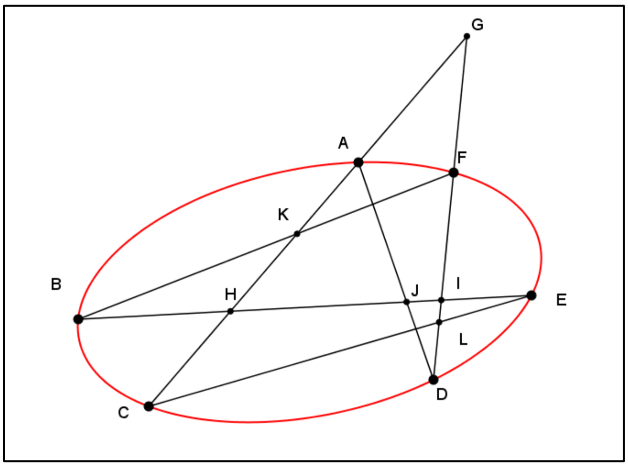
$$\frac{GK}{KH} \cdot \frac{HL}{LI} \cdot \frac{IM}{GM} = 1.$$

Pokud budeme tuto větu aplikovat na elipsu z obrázku 17, pak využijeme $\Delta GHI$ a její příčky $BKF, AJD$ a $ELC$ (viz obr. 19), potom platí:

$$BKF: \quad \frac{HK}{GK} \cdot \frac{GF}{IF} \cdot \frac{IB}{HB} = 1$$

$$AJD: \quad \frac{HA}{GA} \cdot \frac{GD}{ID} \cdot \frac{IJ}{HJ} = 1$$

$$ELC: \quad \frac{HC}{GC} \cdot \frac{GL}{IL} \cdot \frac{IE}{HE} = 1$$




*Obrázek 19: Menelaova věta - důkaz*

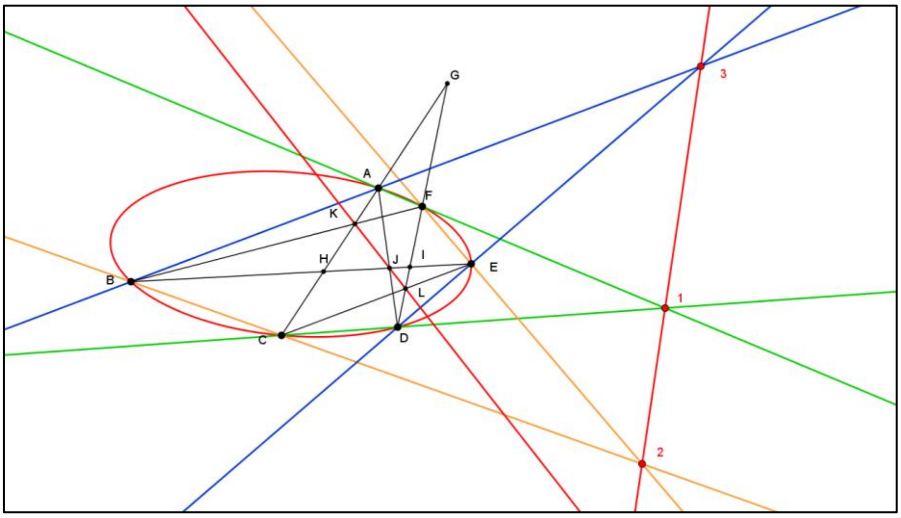
Vynásobíme tyto tři shodnosti a uspořádáme:

$$\left(\frac{HK}{GK}\cdot\frac{GL}{IL}\cdot\frac{IJ}{HJ}\right)\cdot\left(\frac{IB\cdot IE}{ID\cdot IF}\right)\cdot\left(\frac{HC\cdot HA}{HB\cdot HE}\right)\cdot\left(\frac{GF\cdot GD}{GA\cdot GC}\right)=1.$$

Po vykrácení dostaneme výraz:

$$\frac{HK}{GK}\cdot\frac{GL}{IL}\cdot\frac{IJ}{HJ}=1$$

Což nám předkládá Menealova věta a říká nám, že body $K, J, L$ jsou kolineární. Pak můžeme říci, že i průsečíky prodloužených protějších stran leží na jedné přímce (viz obr. 20) [15].

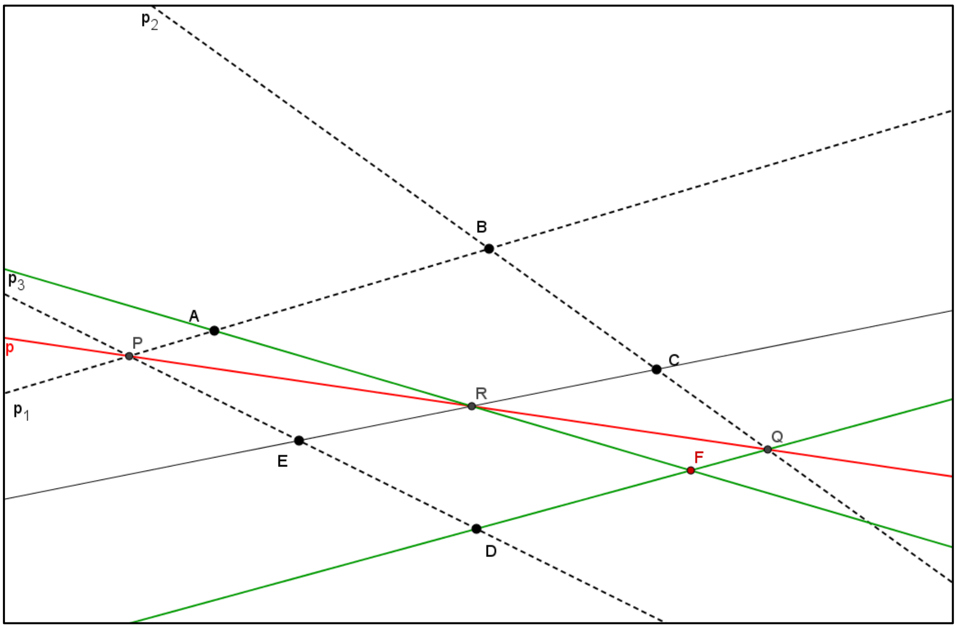



*Obrázek 20: Menelaova věta - důkaz II.*

## 6.5 Využití Pascalovy věty

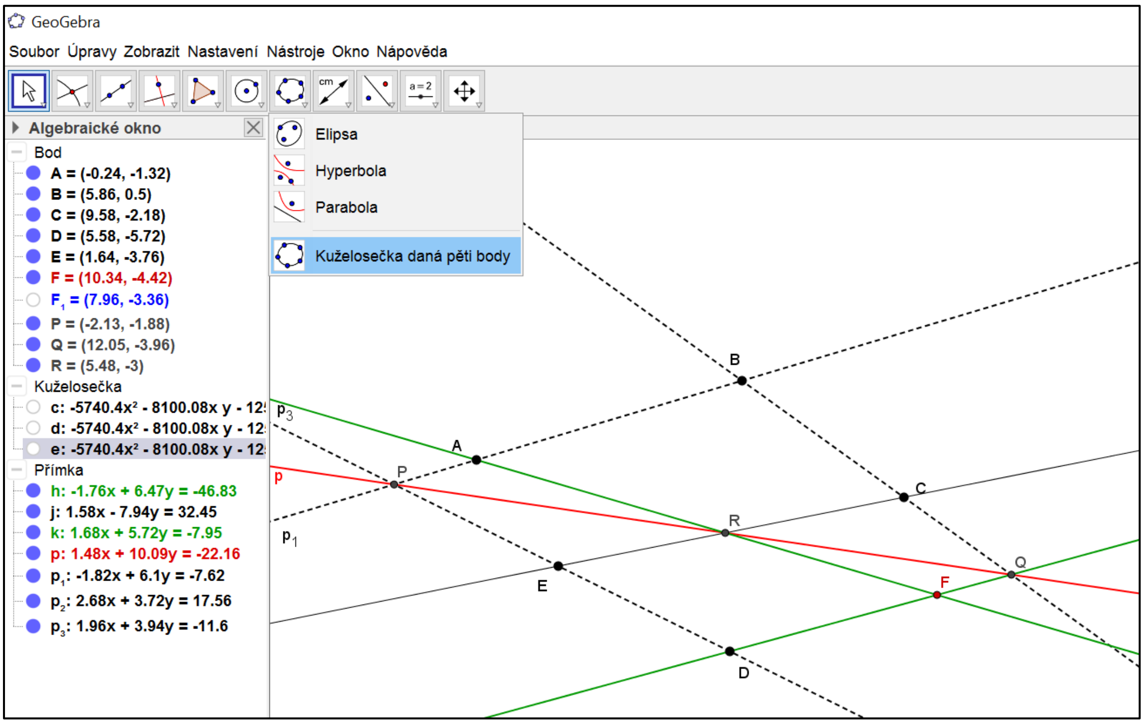
Pascalova věta se v praxi využívá pro vygenerování bodů kuželosečky, což nám může pomoci k vytvoření kuželosečky bez rýsování.

Víme, že kuželosečka je jednoznačně určena 5 body, proto si tedy zvolíme pět libovolných nekolineárních bodů $A, B, C, D, E$, které spojíme přímkami $p_1, p_2, p_3$ po řadě $AB, BC, DE$. Průsečíkem přímek $p_1, p_3$ je bod $P$. Poté zvolíme *Pascalovu přímku* $p$ tak, aby procházela bodem $P$. Tím nám vznikne bod $Q \in p \cap BC$. Následně sestrojíme přímku $EC$, čímž vytvoříme bod $R$ tak, že platí $R \in p \cap EC$. Poté sestrojíme přímky $AR, DQ$ a jejich průsečíkem je námi hledaný šestý bod kuželosečky, kdy $F \in AR \cap DQ$ (viz obr. 21).

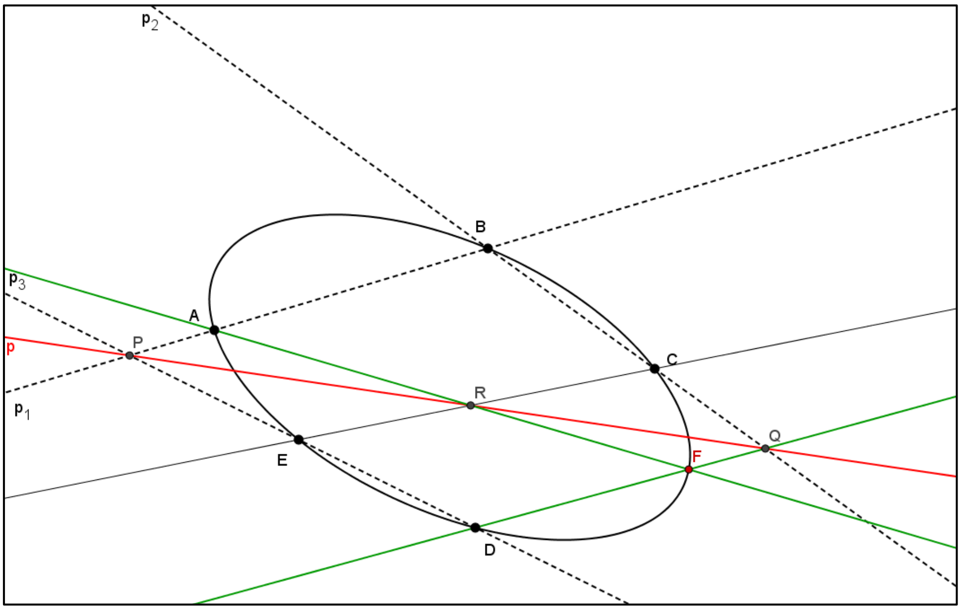



*Obrázek 21: Pascalova věta - generování bodů*

V našem případě se jedná o elipsu, což si můžeme ověřit v programu GeoGebra pomocí funkce *Kuželosečka daná pěti body* (viz obr. 22 a 23), ale tento postup platí pro jakoukoliv kuželosečku.




*Obrázek 22: Pascalova věta – ověření*




*Obrázek 23: Pascalova věta - elipsa*

# 7 BRIANCHONOVA VĚTA

## 7.1 Charles-Julien Brianchon

Charles-Julien Brianchon se narodil v roce 1783 ve francouzském městečku Sèvres, což je jihozápadní část metropolitní oblasti Paříže. O jeho původu toho také není příliš známo, nevíme totiž nic o jeho základním ani středním vzdělání. První zmínka o jeho vzdělání je to, že ve svých osmnácti letech nastoupil na školu *École Polytechnique* v Paříži, kde studoval u francouzského přírodovědce, matematika a revolučního politika Gasparda Monge[2]. Svou opravdu první studii *„Sur les surfaces courbes du second degré“ (Na zakřivené plochy druhého stupně)* napsal během svého studia na této škole. Ve studii Brianchon znovuobjevil Pascalův magický šestiúhelník a ukázal, že v každém šestiúhelníku, který je tvořen tečnami kuželosečky, jsou tři úhlopříčky setkávající se v jednom bodě:

*„Leží-li všechny vrcholy šestiúhelníku na kuželosečce a zároveň se protější strany protínají, pak průsečíky leží na jedné přímce.“*

Zajímavé je, že Pascalova věta je ze své podstaty projektivní vlastností, a proto je překvapující, že trvalo 167 let, než někoho napadlo, že je vlastně Brianchonova věta k Pascalově větě duální [18].

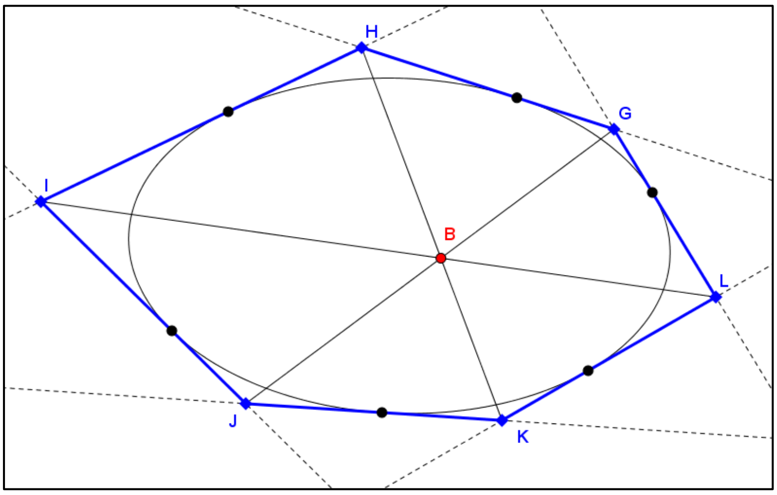
Brianchon v roce 1808 promoval jako první ve své třídě a asi by mnozí očekávali, že ve studiu dále pokračoval. Avšak žil v době Napoleona Bonaparta, a proto nebylo žádoucí, aby dále studoval, neboť bylo potřeba, aby nastoupil do Napoleonovi armády. Statečně bojoval v tažení ve Španělsku a v Portugalsku, avšak naneštěstí vždy na straně poražených, tedy ani jeho neminula zranění. Ze zdravotních důvodů tedy v roce 1813 zažádal o propuštění z aktivní vojenské služby, aby mohl nastoupit na místo učitele. Celých pět let mu trvalo, než našel místo učitele, a v roce 1818 konečně nastoupil jako profesor na dělostřelecké škole *Royal Guard* ve městě Vincennes. Během let, kdy sháněl svou novou práci, napsal řadu dokumentů, kde studoval další projektivní vlastnosti

[2] Gaspard Monge byl francouzský vědec, který je považován za otce diferenciální geometrie a zároveň postavil základy systému, kterému dnes říkáme deskriptivní geometrie. Také zformuloval vlastnosti pravoúhlého promítání, které je po něm nazváno – *Mongeovo promítání*.

kuželoseček. Nicméně poté, co byl přijat na *Royal Guard*, se matematice již moc nevěnoval a zabýval se spíše chemií. V této době pak již v oboru matematiky pouze provedl v jedné studii důkaz věty *Kružnice devíti bodů* [18].

## 7.2 Brianchonova věta

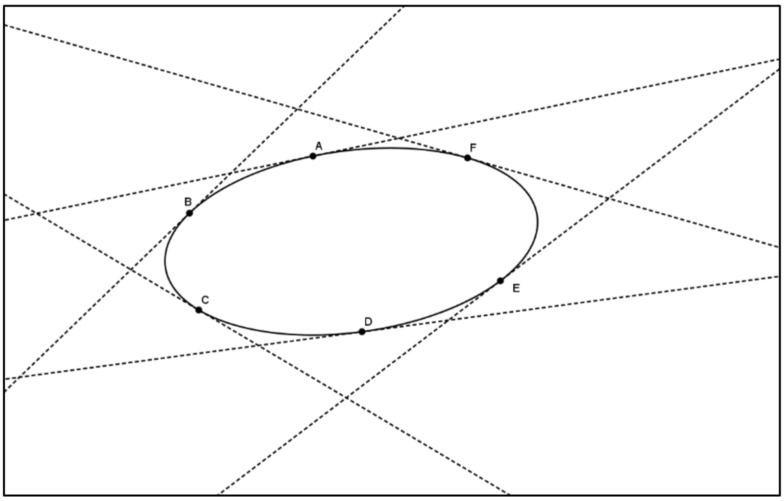
***Tři přímky spojující protilehlé vrcholy šestiúhelníku procházejí jedním bodem (tzv. Brianchonův bod) a obráceně, pokud spojnice protilehlých vrcholů šestiúhelníku procházejí jedním bodem, je tento šestiúhelník opsán kuželosečce [19].***




*Obrázek 24: Brianchonova věta*

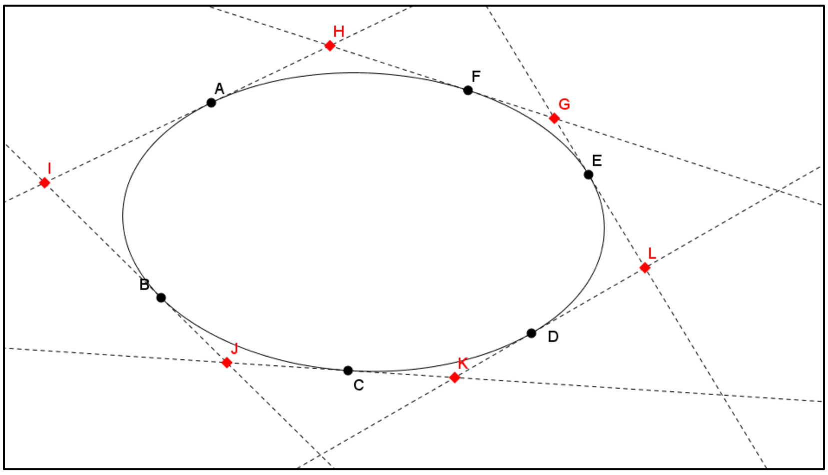
## 7.3 Verifikace pomocí programu GeoGebra

Pro verifikaci Brianchonovy věty si opět musíme sestrojit elipsu, na které tento planimetrický problém budeme ukazovat. To, stejně jako v předchozím případě, zajistíme funkcí *Kuželosečka daná pěti body*. Jelikož potřebujeme šest bodů na elipse, tak si ten poslední libovolně zvolíme na vytvořené kuželosečce. Obdobně jako u Pascalovy věty budeme potřebovat šestiúhelník, ale tentokrát tvořený tečnami k dané kuželosečce procházejícími šesti body ležící na elipse. Proto volíme funkci *Tečny z bodu* a vytvoříme šest tečen k elipse (viz obr. 25).



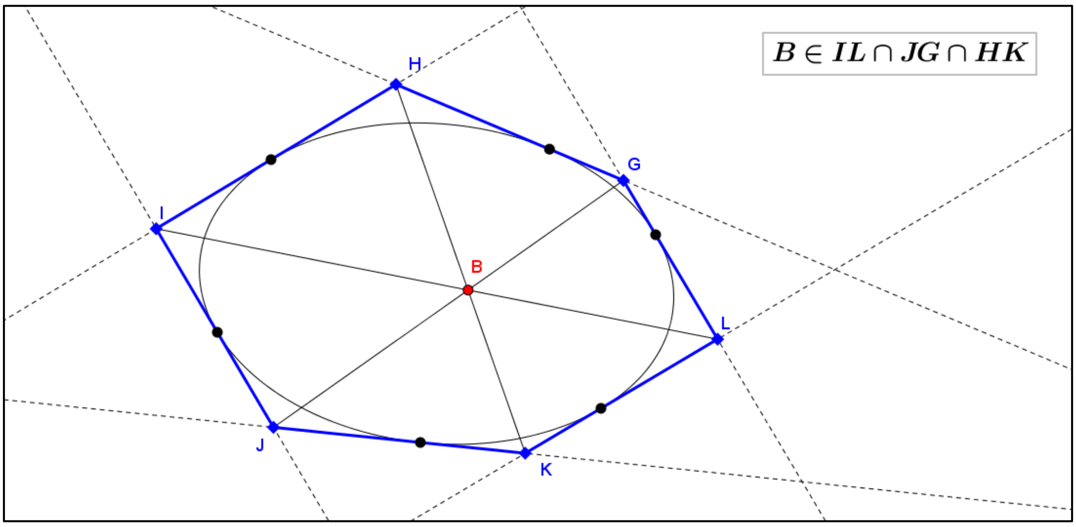

*Obrázek 25: Tečny ke kuželosečce*

Poté si označíme průsečíky těchto tečen a vznikne nám šestiúhelník opsaný dané kuželosečce:



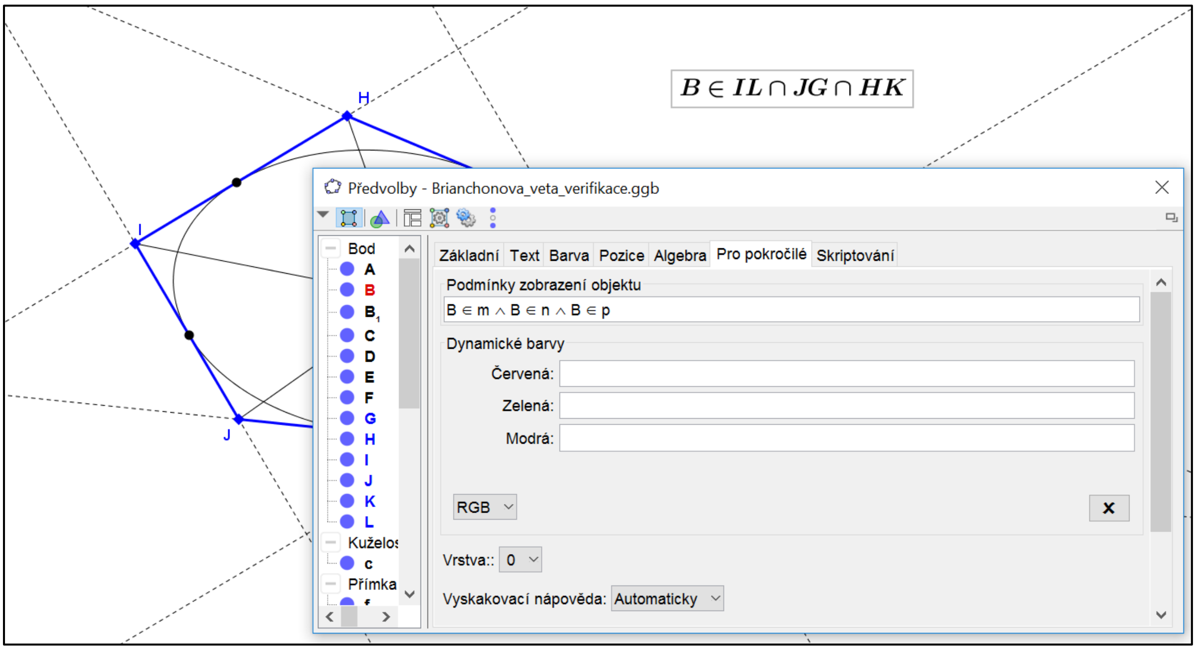

*Obrázek 26: Průsečíky tečen – šestiúhelník*

Když spojíme protější vrcholy tohoto opsaného šestiúhelníku, pak se vzniklé příčky protínají v jednom bodě – *Brianchonův bod*. Pro ověření toho, že se opravdu tyto příčky protínají v jednom bodě, využijeme opět funkci *Text* a zároveň *Podmínky zobrazení objektu*. Nejprve napíšeme text: $B \in IL \cap JG \cap HK$.



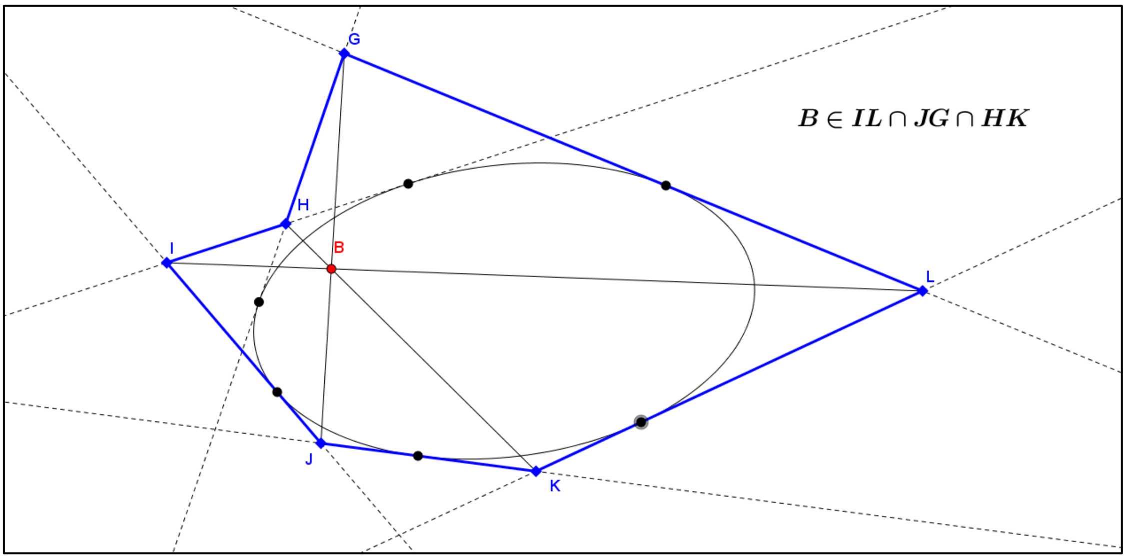

*Obrázek 27: Brianchonova věta – text*

Poté zadáme podmínku pro zobrazení tohoto textu, tedy že bod $B$ leží na každé z příček:




*Obrázek 28: Brianchonova věta - podmínky zobrazení textu*

A po celkovém zdeformování naší původní elipsy je stále text viditelný. Tím můžeme ověřování Brianchonovy věty shledat za úspěšně dokončený. A protože Brianchonova věta je duální k Pascalově větě, pak bude i jejich důkaz v podstatě stejný, proto jej zde uvádět nebudeme.




*Obrázek 29: Verifikace Brianchonovy věty*

# 8 FERMATŮV BOD

## 8.1 Pierre de Fermat

Přesné narození významného francouzského matematika není přesně známé a udává se mezi roky 1590 – 1608, avšak nejčastěji se datuje na srpen roku 1601. Narodil se obchodníkovi s kůžemi v městě Beaumont de Lomagne, a přestože nevystudoval vůbec vědecký obor, ale právnickou fakultu, stal se velmi významnou osobností ve světě vědy, zejména tedy matematiky. Povolání právníka jej živilo, zatímco matematika pro něj byla jen koníčkem a jeho objevy byly zejména pro jeho potěšení. Nezajímal se o peníze nebo slávu, a proto vydal pouze jediný rukopis s názvem *M. P. E. A. S.* – co tyto iniciály podle Fermata znamenaly, se dodnes nevysvětlilo. Po své smrti jeho nejstarší syn publikoval výběr z jeho matematických a přírodovědných úvah, ve kterých se Fermat inspiroval z Antiky a zejména spisy řeckými matematiky Eukleidem, Archimedem, Apolloniem a Diofantem [3].

Pro jeho vášeň k matematice bývá také označován jako *geniální amatér*, který tvrdil: *„Jsem ochoten s těmi, kdo budou si toho přáti, o své výsledky se poděliti, a učiním tak bez ctižádosti, jíž více jsem prost a k níž dále mám nežli kdo jiný [4].“*

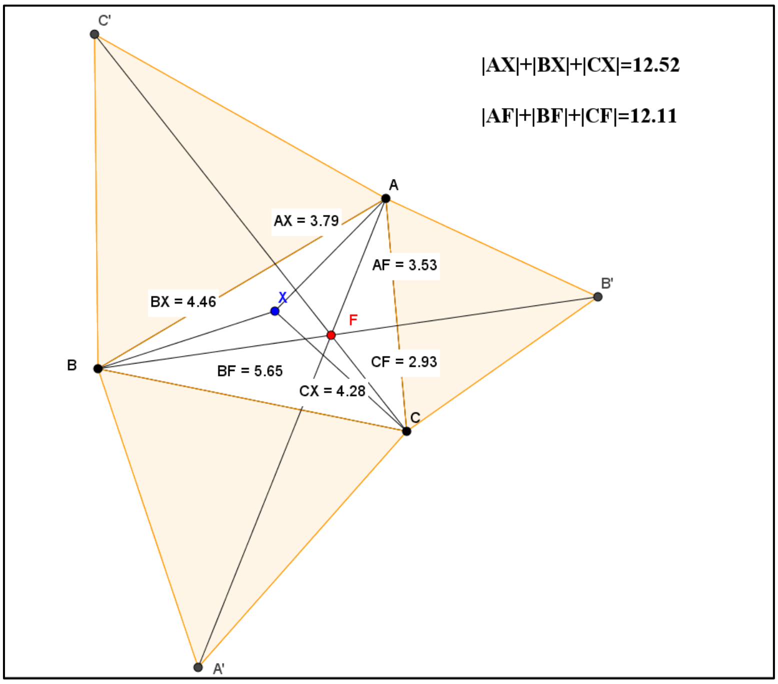
Nejen, že četl již výše zmíněnou Pappovu *Sbírku*, kam si na okraje psal své poznámky, ale také si dopisoval se známými matematiky, jako je například Wallis, Descartes, Hérigone, Carcavi a později také s Pascalem. Poslední dva zmiňovaní mu dokonce vydávali jeho dílo, podmínkou však bylo, aby nebylo zmíněno jeho jméno [4].

Ve své amatérské matematické kariéře bezprostředně navazoval na francouzského matematika Françoise Vièta a na základě jeho objevů Fermat pokládá základní kámen analytické geometrie a to vyslovením principu: *„Obsahuje-li rovnice dvě neznámé veličiny, existuje odpovídající místo (útvar v rovině) a extrémní bod těchto veličin opisuje čáru přímou či křivou.“* Na základě tohoto principu také zobecňuje rovnice o třech neznámých, kde popisuje „místa tělesová“ – trojrozměrné útvary [4].

## 8.2 Fermatův bod

***Najdi takový bod v trojúhelníku, jehož součet vzdáleností od vrcholů je minimální [5].***

Fermatův bod však můžeme hledat pouze v takovém trojúhelníku, jehož všechny vnitřní úhly jsou menší než 120°. Pro trojúhelník s úhlem větším než 120° platí, že bod, ve kterém je součet vzdáleností od vrcholů minimální, je vrcholem tohoto úhlu [5].

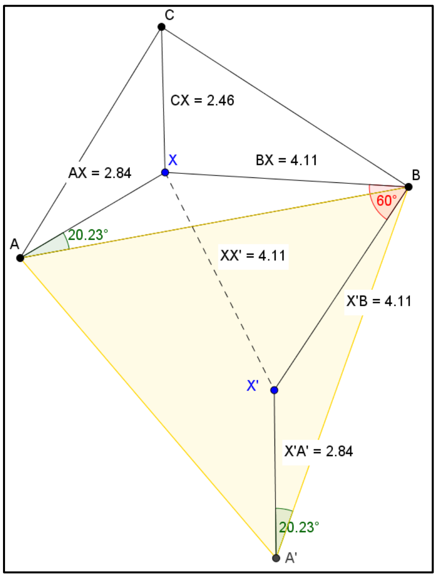



*Obrázek 30: Fermatův bod*

Je-li bod $X$ libovolným bodem trojúhelníku $\Delta ABC$, potom je součet vzdáleností $|AX| + |BX| + |CX| \geq |AF| + |BF| + |CF|$ a platí, že $|AX| + |BX| + |CX| = |AF| + |BF| + |CF|$ právě tehdy, když $X = F$, kde bod $F$ je Fermatův bod [5].

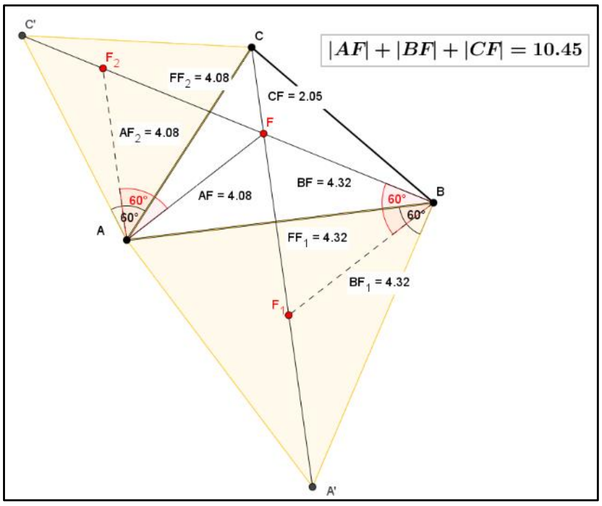
## 8.3 Verifikace pomocí programu GeoGebra

Otočíme trojúhelník $\Delta AXB$ kolem bodu $B$ o 60° v kladném směru. Potom dostáváme $\Delta A'X'B$, kde je bod $A'$ obrazem bodu $A$ a bod $X'$ je obrazem bodu $X$.




*Obrázek 31: Fermatův bod - libovolný bod X*

Z obrázku 31 je zřejmé, že lomená čára procházející body $C, X, X', C'$ má stejnou délku jako součet vzdáleností vrcholů trojúhelníka k bodu $X$, tedy $|AX| + |BX| + |CX|$. Proto si pokládáme otázku: *„V jakém případě bude tato lomená čára nejkratší?“* Křivka $|AX| + \ |BX| + |CX|$ bude nejkratší právě tehdy, když vytvoříme úsečku $A'C$, z čehož plyne, že Fermatův bod leží na úsečce $A'C$. Provedeme-li stejný postup s otočením trojúhelníku $\Delta CXA$ o 60° v kladném směru, potom leží Fermatův bod na úsečce $BC'$. Z toho plyne, že $F \in CA' \cap BC'$ [6].




*Obrázek 32: Verifikace Fermatova bodu*

Tuto verifikaci můžeme považovat za plnohodnotný důkaz.

# 9 ROUTHOVA VĚTA

## 9.1 Edward John Routh

Edward John Routh se narodil 20. ledna 1831 v kanadském městě Québec, což je jediná provincie v Kanadě, kde není angličtina hlavním jazykem, ale oficiální jazyk je zde francouzština. V jeho 11 letech s rodinou opustil Kanadu a přestěhovali se do Londýna, kde Edward navštěvoval střední školu *University College School*. Poté začal studovat na univerzitě *College*. Na této univerzitě byl pod vlivem britského matematika Augusta de Morgana, který vyslovil základní pravidla, formální logiky (tedy formální zákony), a který velmi ovlivnil Routhovo pokračování v matematické kariéře. Když absolvoval univerzitu, nastoupil na vysokou školu *Peterhouse* v Cambridge v roce 1850, což bylo v době, kdy sem nastoupil i James Clerk Maxwell. Ten však po dvou semestrech odešel na *Trinity College* – říká se, že důvodem bylo, že v Routhovi viděl velkou konkurenci, a to se také nakonec potvrdilo, neboť Edward v roce 1853 dostal *Gold Medals for Mathematics and for Natural Philosophy* (Zlatá medaile za matematiku a přírodní vědy). To, že byl opravdovým matematikem, také dokazuje, že se stal *Senior Wrangler*[3] [20].

Později se stal patronem vysoké školy *Peterhouse* a byl jmenován lektorem na univerzitě *College*. Byl to velmi inspirativní učitel a stal se jedním z nejznámějších a nejoblíbenějších profesorů na univerzitě *Cambridge*, což také dokazuje, že v roce 1862 se z 32 jeho studentů stalo devatenáct z nich *Wranglery* (sedm z nich bylo mezi nejlepšími deseti) a více než čtyřicet jeho studentů bylo oceněno prestižní cenou *Smith prize* (kterou i on byl oceněn). Během jeho učitelské profese se stalo *Wranglery* několik stovek studentů [21].

Nejen, že byl skvělým učitelem, ale také nesmíme opomenout jeho vědecké práce a studie, ve kterých přispěl nejen matematickému vědění a zabýval se zejména geometrií, ale jsou to studie věnované dalším vědeckým oblastem, jako je astronomie,

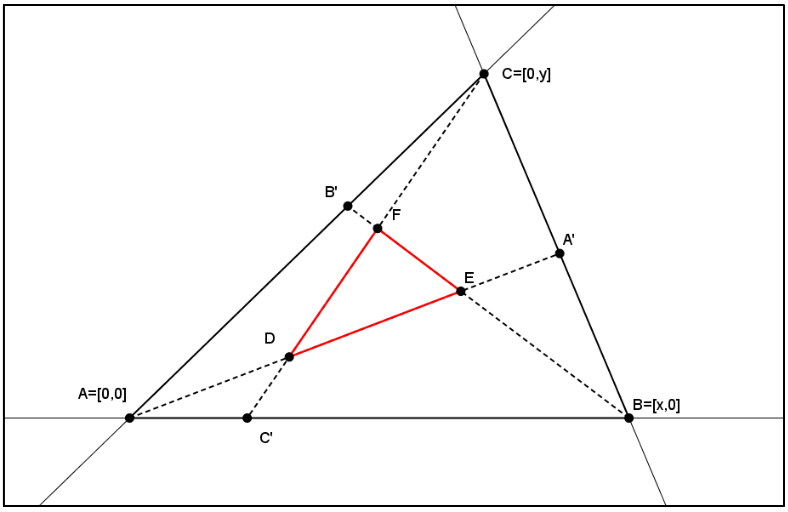
[3] **Wrangler** je někdo, kdo promoval s prvotřídními známkami v matematice na univerzitě Cambridge. **Senior Wrangler** je ten, který měl nejlepší známky, následuje *Second Wrangler* a tak dále to pokračuje v seznamu. Tato metoda klasifikování studentů se používala do roku 1909, od té doby jsou seznamy zveřejňovány v abecedním pořadí. [20]

dynamika, vlny nebo harmonická analýza. Dokonce se roku 1856 stal zakládajícím členem *Londýnské matematické společnosti*. V jeho posledním veřejném vystoupení bojoval za zachování klasifikování *Senior Wrangler* – jeho zrušení se nedožil, protože umřel v roce 1907 v Cambrige [20].

## 9.2 Routhova věta

***Je dán $\Delta ABC$ a tři body $A', B', C'$ po řadě na stranách $BC$, $AC$, $AB$ nebo jejich prodloužení. Označíme dělící poměry bodů $A', B', C'$: $k = (BA'C)$, $l = (CB'A)$, $m = (AC'B)$. Pak jsou přímky $AA', BB'$ a $CC'$ stranami $\Delta DEF$ (viz obr. 33) tak, že body $D, E$ a $F$ vzniknou průnikem dvojic úseček $D \in AA' \cap CC', E \in AA' \cap BB'$, $F \in BB' \cap CC'$. Potom je poměr obsahů trojúhelníků $DEF$ a $ABC$ dán výrazem [24]:***

$$\frac{\|DEF\|}{\|ABC\|} = \frac{(klm-1)^2}{(kl+k+1)(lm+l+1)(mk+m+1)}$$




*Obrázek 33: Routhova věta*

## 9.3 Dělicí poměr

Nyní si definujeme pojem ***dělicí poměr***, který byl použit v definici výše, a budeme jej využívat v následující verifikaci. Jedná se o číslo, které nám jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům ležícím na této přímce [35].

*Máme-li tři různé kolineární body $A, B, C$, pak dělicím poměrem bodu $C$ vzhledem k bodům $A, B$ je reálné číslo $\lambda$ takové, že platí:*

$$\lambda = |(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|},$$

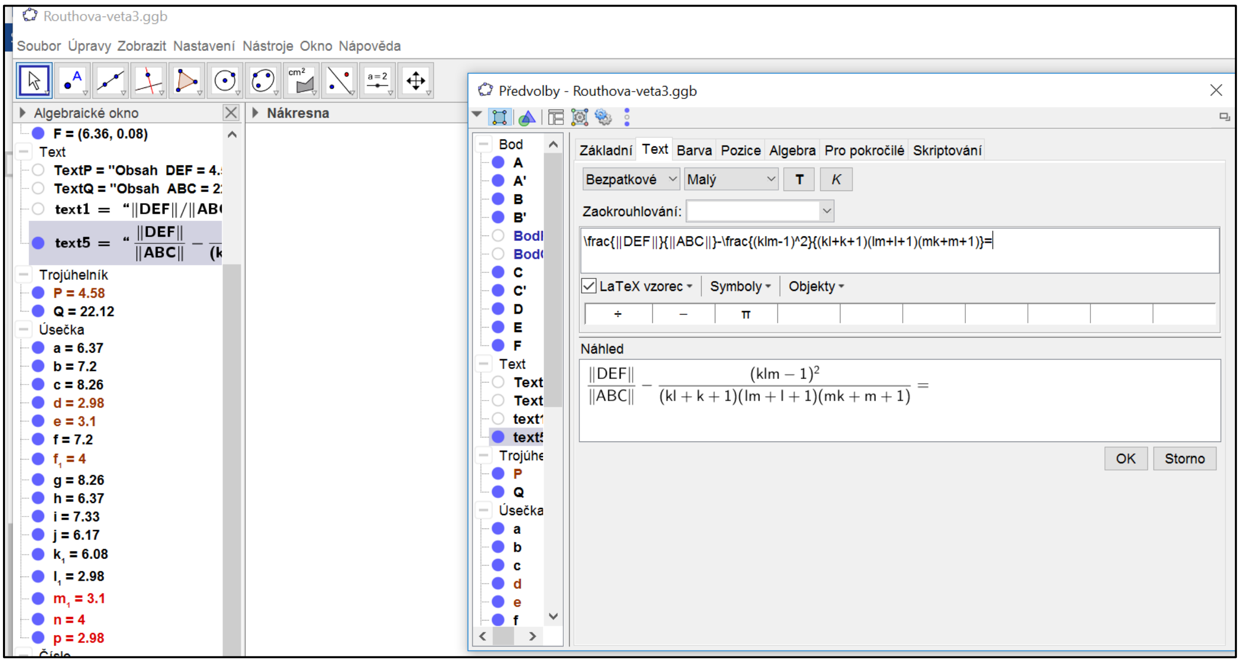
*respektive*

$$C - A = \lambda(C - B).$$

*Jestliže bod $C$ leží uvnitř strany $AB$, pak je $(ABC) < 0$ a naopak pro bod $C$ ležící vně strany $AB$, pak $(ABC) > 0$. Je-li $C = A$, pak je $(ABC) = 0$ a pro $C = B$ není dělicí poměr definován, neboť $|BC| = 0$ a nulou dělit nelze [35].*

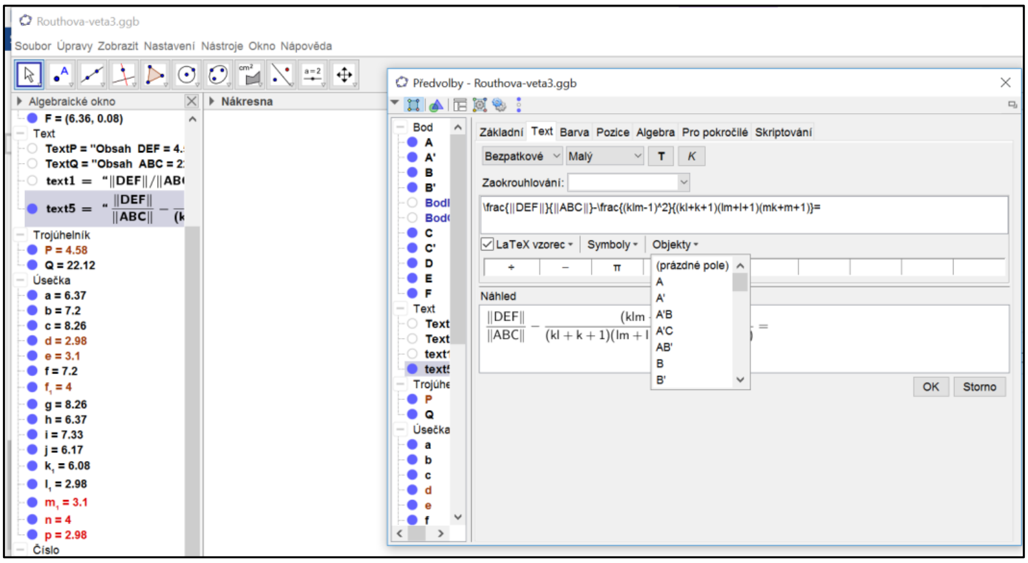
## 9.4 Verifikace pomocí programu GeoGebra

Pro tuto verifikaci je potřeba si nejprve v programu GeoGebra definovat dělicí poměry (dle definice výše), jak je máme udané v definici, tedy $k = (BA'C) = \frac{|BA\prime|}{|CA\prime|}$, $l = (CB'A) = \frac{|CB\prime|}{|AB\prime|}$, $m = (AC'B) = \frac{|AC\prime|}{|BC\prime|}$. Když máme dělicí poměry zadány, pak zvolíme opět funkci *Text*, kde zadáme rovnici, která nám udává poměr obou trojúhelníků, od kterého odečteme výraz z definice pro Routhovu větu (viz obr. 34).



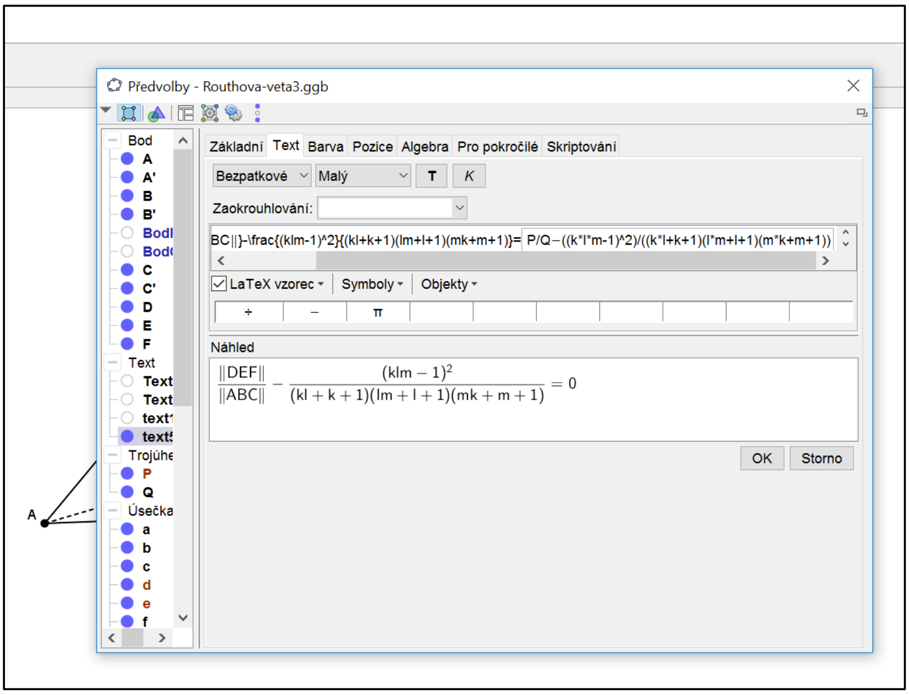

*Obrázek 34: Routhova věta – text*

Abychom měli tento text interaktivní, umožňuje nám program GeoGebra vložit objekt, kde zvolíme možnost *(prázdné pole)* viz obr. 35.




*Obrázek 35: Routhova věta - vložení objektu do textu*

Do tohoto prázdného pole zapíšeme rovnici znovu, ale díky této funkci se zde bude ukazovat pouze výsledné číslo, které by dle definice pro Routhovu větu mělo vyjít 0 (viz obr. 36).



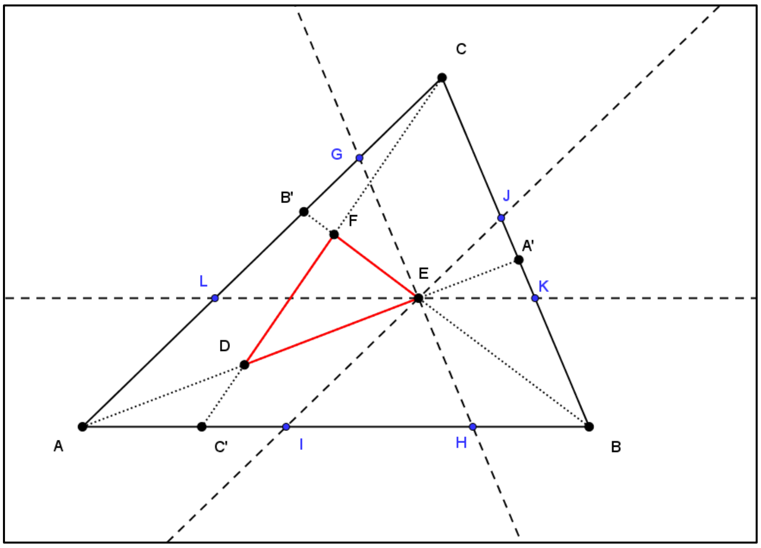

*Obrázek 36: Routhova věta - verifikace v programu GeoGebra*

Ve chvíli, kdy potvrdíme tuto rovnici, ihned se nám objeví výsledek, který námi byl očekáván – rovnice je rovna $0$. To si také posléze můžeme ověřit pohybem bodů v programu GeoGebra a zjišťujeme, že se výsledek nemění. Tím považujeme verifikaci za dokončenou.

## 9.5 Důkaz Routhovy věty

Důkazů Routhovy věty je několik. V této práci použijeme důkaz, který zveřejnil James S. Kline a Daniel J. Velleman, který uvedl profesor Pech v [24]. Budeme tedy vycházet ze vtahu:

$$\frac{\|DEF\|}{\|ABC\|} = \frac{(klm-1)^2}{(kl+k+1)(lm+l+1)(mk+m+1)}.$$




*Obrázek 37: Routhova věta - důkaz*

Potom bodem $E$ vedeme rovnoběžky s každou stranou $\Delta ABC$ (viz obr. 37). Pak můžeme říci, že

$$\frac{|HE|}{|EG|} = \frac{|BA'|}{|A'B|} = k,$$

odkud dostaneme vztah $|EG| = \frac{|HE|}{k}$. Pak lze na základě podobnosti $\Delta IHE$ a $\Delta EKJ$ vytvořit vztah:

$$\frac{|KJ|}{|HE|} = \frac{|JE|}{|EI|} = \frac{|CB'|}{|B'A|} = l.$$

Pak platí: $|KJ| = l \cdot |HE|$.

Dále můžeme říci, že platí vztah:

$$|BC| = |BK| + |KJ| + |JC| = |HE| + |KJ| + |EG| = |HE| + l \cdot |HE| + \frac{1}{k} \cdot |JG|,$$

tedy:

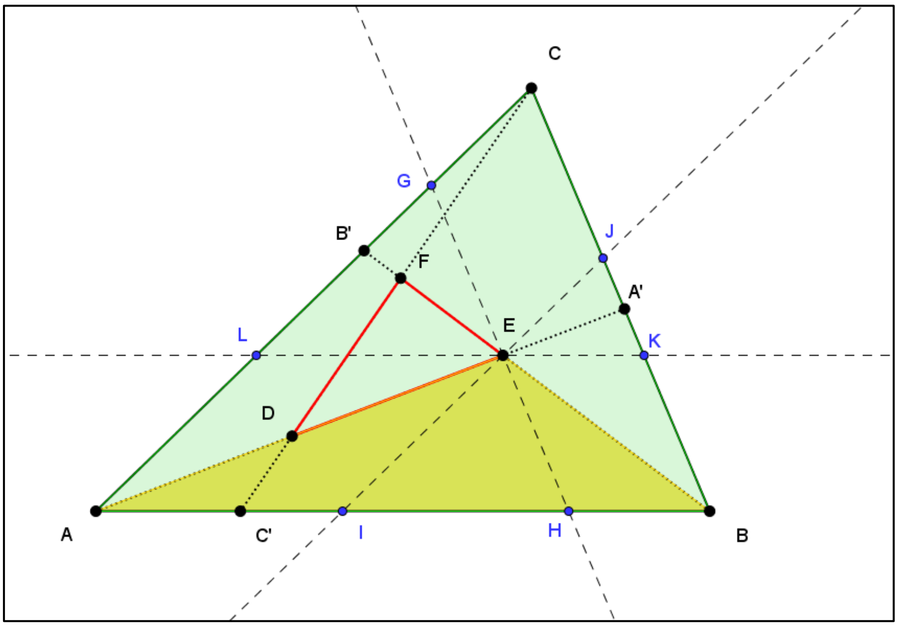
$$\frac{|HE|}{|BC|} = \frac{k}{kl + k + 1}.$$

Trojúhelníky $IHE$ a $ABC$ jsou podobné a jejich koeficient podobnosti je roven

$$\frac{k}{kl + k + 1}.$$

V takovém poměru jsou tedy i délky výšek na strany $IH$ a $AB$, z čehož plyne, že obsahy

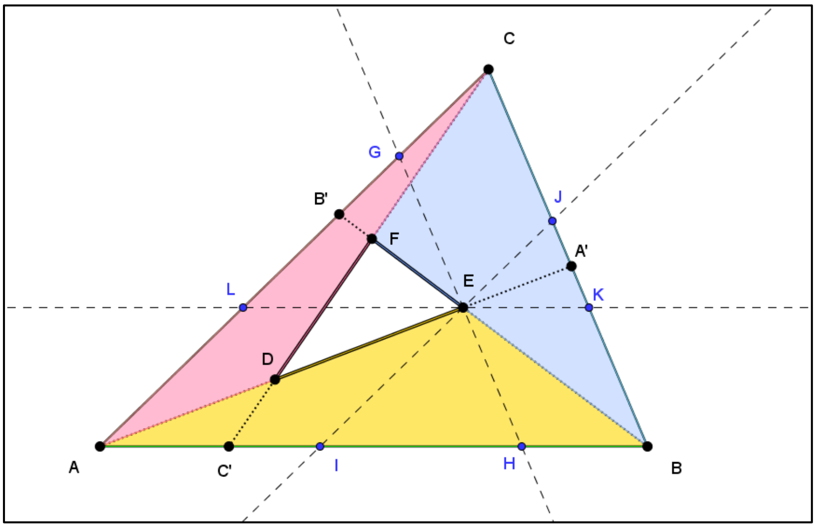
$$\Delta ABE : \Delta ABC = \frac{k}{kl + k + 1}.$$




*Obrázek 38: Obsahy trojúhelníků ABE a ABC*

Analogicky lze vytvořit poměr pro obsahy trojúhelníků $BCF$ a $CAD$:

$$\frac{\|BCF\|}{\|ABC\|} = \frac{l}{lm + l + 1} \quad \text{a} \quad \frac{\|CAD\|}{\|ABC\|} = \frac{m}{mk + m + 1}$$




*Obrázek 39: Obsahy trohúhelníků ABE, BCF a CAD*

A odtud plyne vztah:

$$\frac{\|DEF\|}{\|ABC\|} = 1 - \frac{k}{kl + k + 1} - \frac{l}{lm + l + 1} - \frac{m}{mk + m + 1}$$
$$= \frac{(klm - 1)^2}{(kl + k + 1)(lm + l + 1)(mk + m + 1)}$$

tedy po úpravě náš původní vztah, ze kterého jsme vycházeli. Tím je důkaz věty hotov.

# 10 CEVOVA VĚTA

## 10.1 Giovanny Ceva

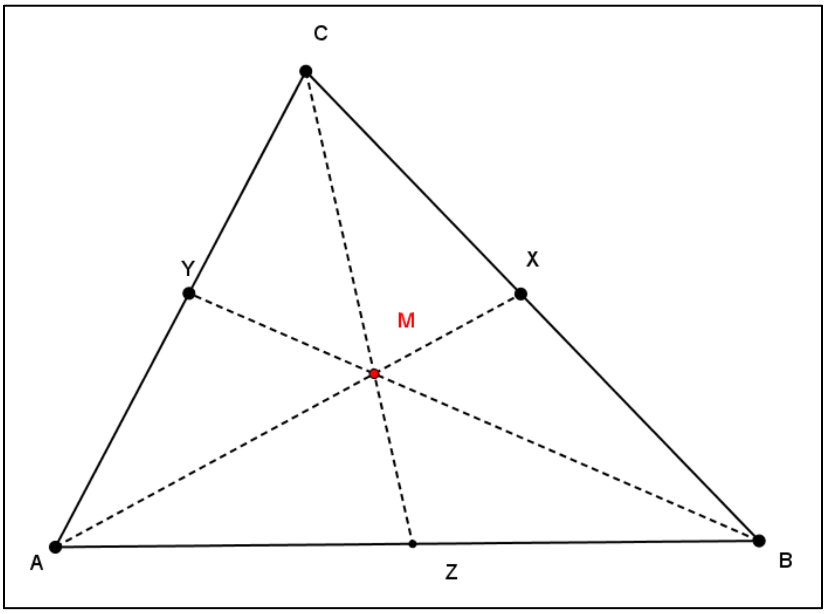
Giovanny Benedetto Ceva byl narozen v Miláně v habsburském impériu (dnešní Itálie), ale dodnes se spekuluje o tom, kdy přesně se narodil. Historikové říkají, že to bylo mezi lety 1647-48, avšak nejčastěji se udává datum 1. září 1647. Většina detailů, které víme o životě tohoto muže, je známa z jeho korespondence a z předmluv jeho děl. Své vzdělání získal na jezuitské vysoké škole v Miláně a později studoval na univerzitě v Pise, kde se zabýval zejména matematikou a mechanikou. Po absolvování této univerzity se zde stal profesorem matematiky. Většinu svého života zasvětil právě studiu geometrie a jako první velký problém, kterým se zabýval, byl klasický problém kvadratury kruhu. Řešení tohoto problému našel hned několik, ale bohužel všechna byla nesprávná, a tak na tento problém zanevřel a již se jím nezabýval [27]. V době jeho působení na univerzitě v Pise nejspíš napsal své první dílo *De lineis rectis* (v překladu *Co se týče přímek*), kde využil vlastnosti těžiště pro získání úseků, které vznikají průsečíky různých přímek. Na základě těchto informací v tomto díle publikoval svůj slavný problém: *Cevova věta*, kterým se v této práci budeme dále zabývat, a také zde znovuobjevil Menelaovu větu [26].

Po svém pobytu v Pise profesně následoval svého otce a přestěhoval se do města Mantova, kde provozoval administrativní práci a byl víceméně zodpovědný za ekonomiku města Mantova. Na matematiku však nezanevřel a stále se zabýval jejím studiem. V té době napsal například dílo *Opuscula Mathematica*, ve kterém se zabýval otázkami ryzí geometrie, aplikací matematiky (zejména v oblasti hydrodynamiky). Poté, co se oženil s Cecilia Vecchi a měli spolu asi 7 dětí, ukončil tuto administrativní práci a stal se profesorem na univerzitě v Mantově, kde vyučoval do konce svého života. Napsal ještě mnoho dalších děl, ve kterých se zabýval například studiem křivek (paraboly, hyperboly) využívající nekonečné metody typu, kterou představil *Bonaventura Cavalieri*, nebo sepsal studie o hydraulice a v neposlední řadě napsal jako první práci z oblasti matematické ekonomie, kde se snažil najít podmínky pro rovnováhu měnového systému [27].

## 10.2 Cevova věta

***Je dán trojúhelník $ABC$ a body $X, Y$ a $Z$ po řadě na stranách $BC, CA, AB$ nebo jejich prodloužení. Pak úsečky $AX, BY$ a $CZ$ procházejí jedním bodem právě tehdy, když platí [24]:***

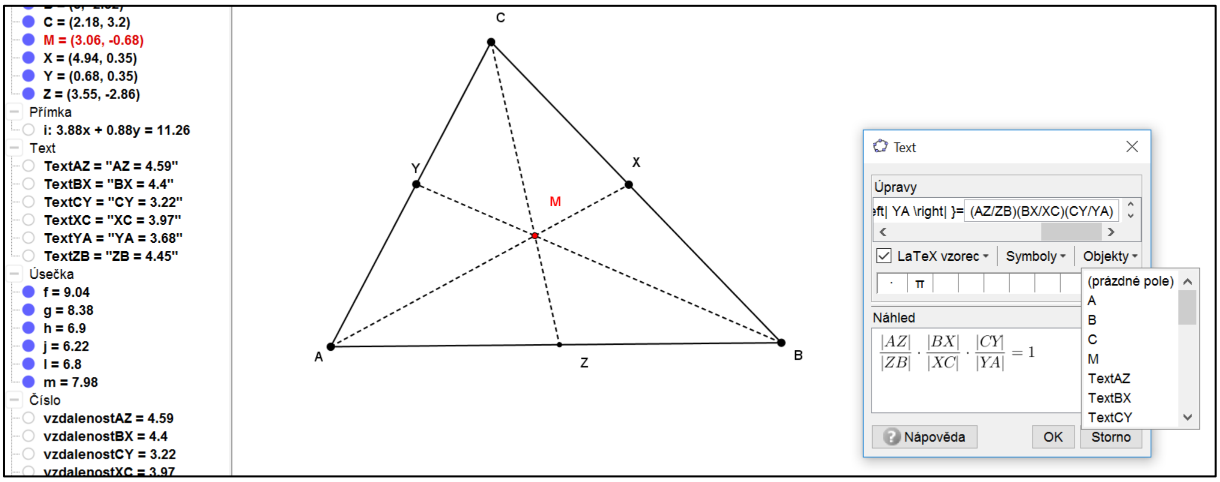
$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$




*Obrázek 40: Cevova věta*

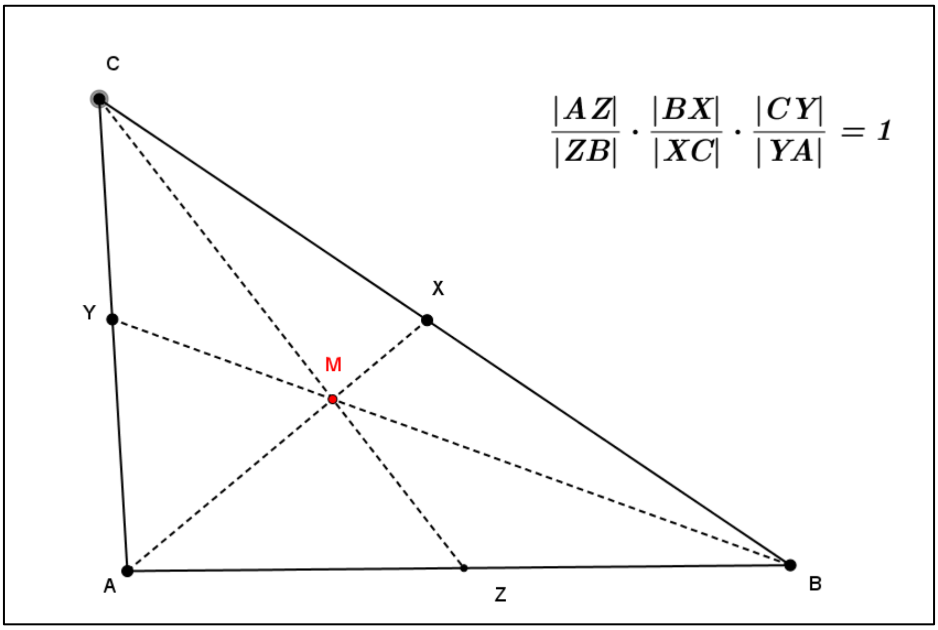
## 10.3 Verifikace pomocí programu GeoGebra

Pro verifikaci Cevovy věty opět využijeme funkci *Text*. Tam zapíšeme výše zmíněnou rovnici, ale protože tento program nám umožňuje vytvořit také tzv. interaktivní text, pak pomocí *Vložení objektu*, kam vložíme vzdálenosti bodů $AZ, ZB, BX, XC, CY$ a $YA$, vytvoříme interaktivní rovnici, která reaguje na změnu (posunutí) bodu (viz obr. 41).



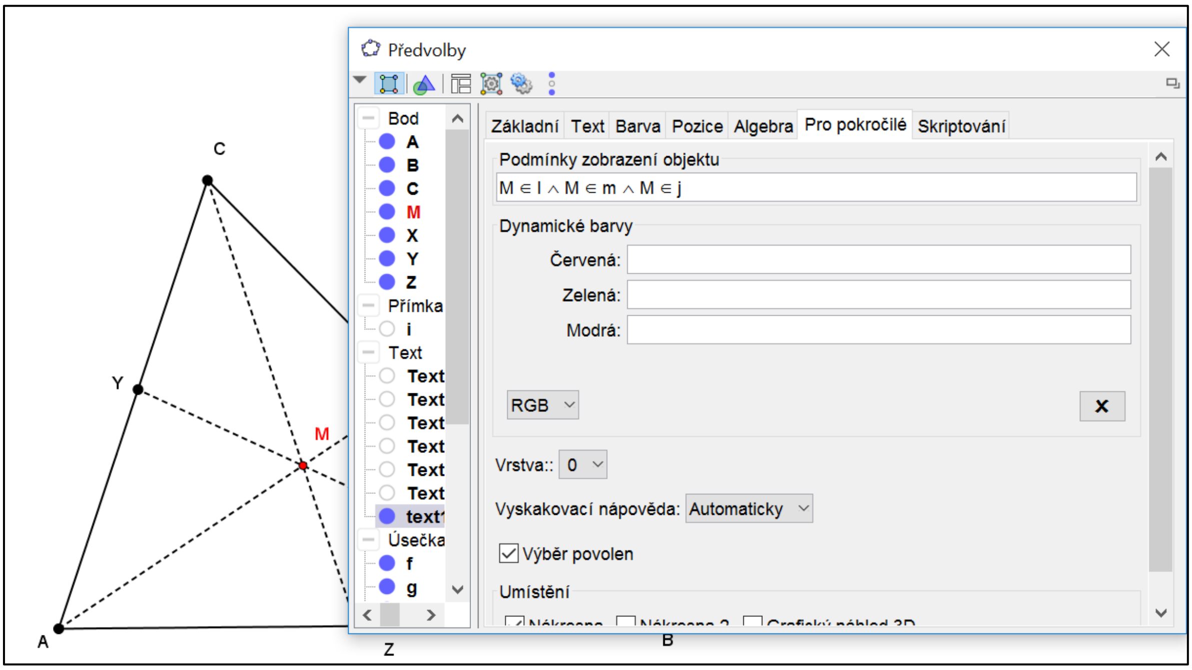

*Obrázek 41: Cevova věta - vložení textu*

Při pohybu bodů tedy pořád můžeme konstatovat, že jsou tyto poměry rovny jedné, jak můžeme vidět na obrázku 42.




*Obrázek 42: Cevova věta - pohyb bodů*

Tím zjišťujeme, že roznásobení výše zmíněných poměrů je opravdu rovno jedné, pokud se úsečky $AX, BY$ a $CZ$ protínají v jednom bodě. Právě tuto podmínku můžeme do verifikace také zahrnout a to tak, že zvolíme podmínky pro zobrazení objektu, tedy textu (viz obr. 43).




*Obrázek 43: Cevova věta - podmínky zobrazení textu*

Pohybem bodů zjišťujeme, že text nemizí. Tím můžeme verifikaci považovat za úspěšně dokončenou.

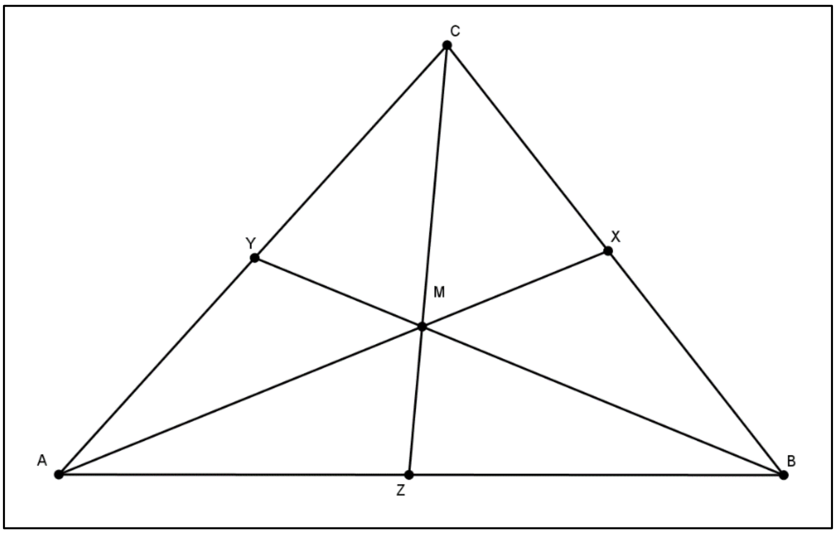
## 10.4 Důkaz Cevovy věty

Pro tento důkaz využijeme již zmíněný vztah, respektive podmínku Cevovy věty:

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

Větu lze opět dokázat několika způsoby a v této práci jsem zvolila důkaz pomocí tzv. *areální metody*, která se zakládá na využití poměrů obsahů trojúhelníků. V tomto případě lze totiž využít vlastnost, která nám říká, že pokud mají dva trojúhelníky stejnou základnu, pak je poměr jejich obsahů roven poměru odpovídajících výšek [24].

Pak dle obrázku 44 porovnáme obsahy poměrů obsahů trojúhelníků v závislosti na poměrech vzdáleností bodů [28]:




*Obrázek 44: Cevova věta*

$$\frac{|AZ|}{|ZB|}=\frac{S_{AZC}}{S_{BZC}}=\frac{S_{AZM}}{S_{BZM}}=\frac{S_{AZC}-S_{AZM}}{S_{BZC}-S_{BZM}}=\frac{S_{ACM}}{S_{BMC}}$$

$$\frac{|BX|}{|XC|}=\frac{S_{BXA}}{S_{CXA}}=\frac{S_{BXM}}{S_{CXM}}=\frac{S_{BXA}-S_{BXM}}{S_{CXA}-S_{CXM}}=\frac{S_{BMA}}{S_{CMA}}$$

$$\frac{|CY|}{|YA|}=\frac{S_{CYB}}{S_{AYB}}=\frac{S_{CYM}}{S_{AYM}}=\frac{S_{CYB}-S_{CYM}}{S_{AYB}-S_{AYM}}=\frac{S_{CMB}}{S_{AMB}}$$

Po úpravě dostáváme vztah:

$$\frac{|AZ|}{|ZB|}\cdot\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}=\frac{S_{ACM}}{S_{BMC}}\cdot\frac{S_{BMA}}{S_{CMA}}\cdot\frac{S_{CMB}}{S_{AMB}}=1.$$

# 11 FEYNMANŮV TROJÚHELNÍK

## 11.1 Richard Feynman

Richard Phillips Feynman se narodil do židovské rodiny v New Yorku (v malém městě Far Rockaway) roku 1918. Ještě než nastoupil do školy, tak se svou pílí a zájmem o encyklopedie naučil základy matematiky. Nebyl to však člověk, který by se zajímal pouze o jednu vědu, proto doma ve své laboratoři prováděl fyzikální experimenty, například s elektřinou, a dokonce vyrobil i svůj vlastní alarm. Studoval Massachusettský technologický institut (MIT) a doktorát složil na univerzitě v Princetonu. Jeho první velkou láskou, kterou si také vzal, byla Arline Greenbaum. Bohužel jejich šťastný život netrval příliš dlouho, neboť Arline měla tuberkulózu. V té době dostal nabídku pracovat na projektu Manhattan[4] ve městě Los Alamos. Avšak na svou ženu nezapomněl a každý víkend, kdy to bylo možné, ji navštěvoval v sanatoriu, kde v roce 1945 zemřela. Později se znovu oženil s Gweneth Howarthovou, se kterou měli 2 děti – syna a dceru [23].

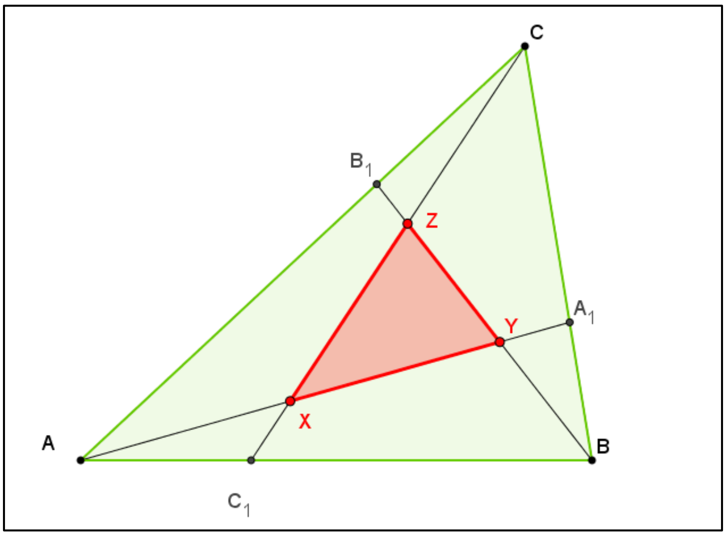
Po ukončení projektu Manhattan, tedy v souvislosti s koncem 2. světové války, se vydal na dráhu profesorského povolání. Ihned po skončení války se stal profesorem na *Cornell University*, ale později se přestěhoval do Pasadeny (Kalifornie), kde byl profesorem na univerzitě Cal Tech. Toto období jeho života je pro vědecký život velmi přínosné, neboť zde vypracoval nespočet kvalitních a jeho nejlepších prací zejména v oblasti fyziky, např. výzkum kvantové elektrodynamiky. To ho dostalo do podvědomí celého světa, neboť v roce 1965 obdržel Nobelovu cenu za fyziku právě za tento výzkum. Můžeme o něm říci, že se stal legendou své doby, stejně tak, jako Albert Einstein, a to díky své povaze, neboť se nespokojil s vysvětlením nikoho jiného, ale musel si na vše přijít sám a díky tomu objevil další problémy, nad kterými si mohl lámat hlavu. Byl nejen skvělý vědec, ale také vynikající pedagog proslulý svým vtipem. Richard Feynman se nezabýval pouze jedním oborem, ale zabrousil do všeho, co pro něj bylo zajímavé, což je v dnešní době již vzácností. Například maloval či se zajímal o historii, zejména o problematiku písma civilizací, které existovali před Kolumbem. Na sklonku svého života ještě proslavil svou úlohou ve vyšetřování katastrofy raketoplánu Challenger, kde ukázal svou

[4] Krycí název pro přísně tajný vývoj první atomové bomby za 2. sv. v. v USA.

dovednost vysvětlit i ty nejsložitější problémy velmi jednoduchým řešením. Zemřel ve svých nedožitých 70 letech (1988) na několik vzácných forem rakoviny [22].

## 11.2 Feynmanův trojúhelník

***Nechť existuje libovolný trojúhelník v rovině. Jestliže každý jeho vrchol spojíme s bodem ležícím v jedné třetině protilehlé strany, potom trojúhelník tvořen těmito spojnicemi má obsah roven jedné sedmině z původního trojúhelníku [25].***



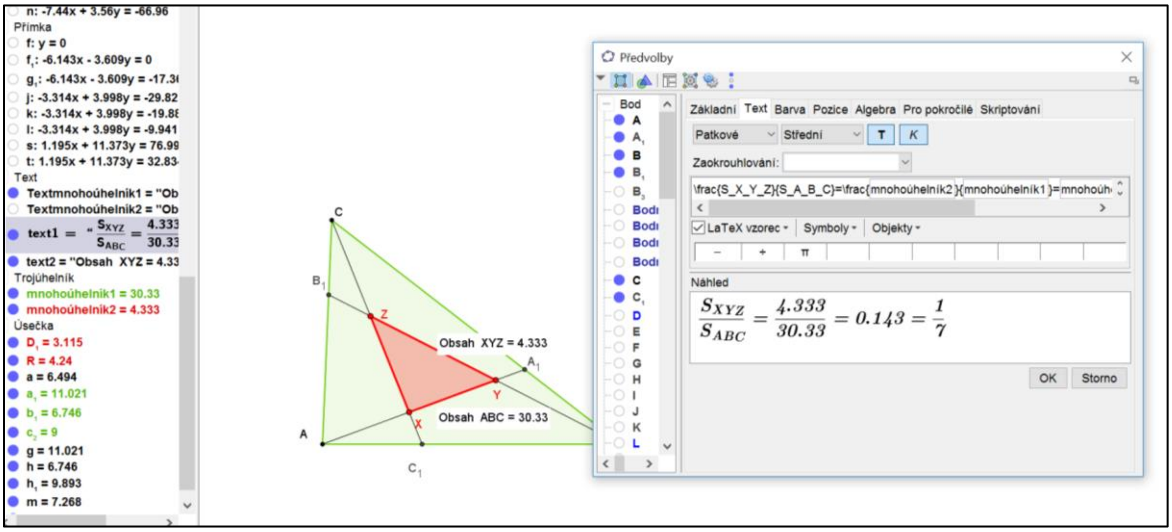

*Obrázek 45: Feynmanův trojúhelník*

Tato matematická věta je, stejně jako již zmíněná Cevova věta, také speciálním případem Routhovy věty. Richard Feynman tento problém neobjevil, ale když mu byl předložen, tak se ho údajně snažil vyvrátit, neboť se domníval, že tomu tak není. Nakonec se mu podařilo větu dokázat pro rovnostranný trojúhelník. Ačkoliv když si uvědomíme, že každý obecný trojúhelník můžeme v afinním zobrazení převést na rovnostranný trojúhelník, tak zjistíme, že tuto větu lze aplikovat na každý trojúhelník [25].

## 11.3 Verifikace pomocí programu GeoGebra

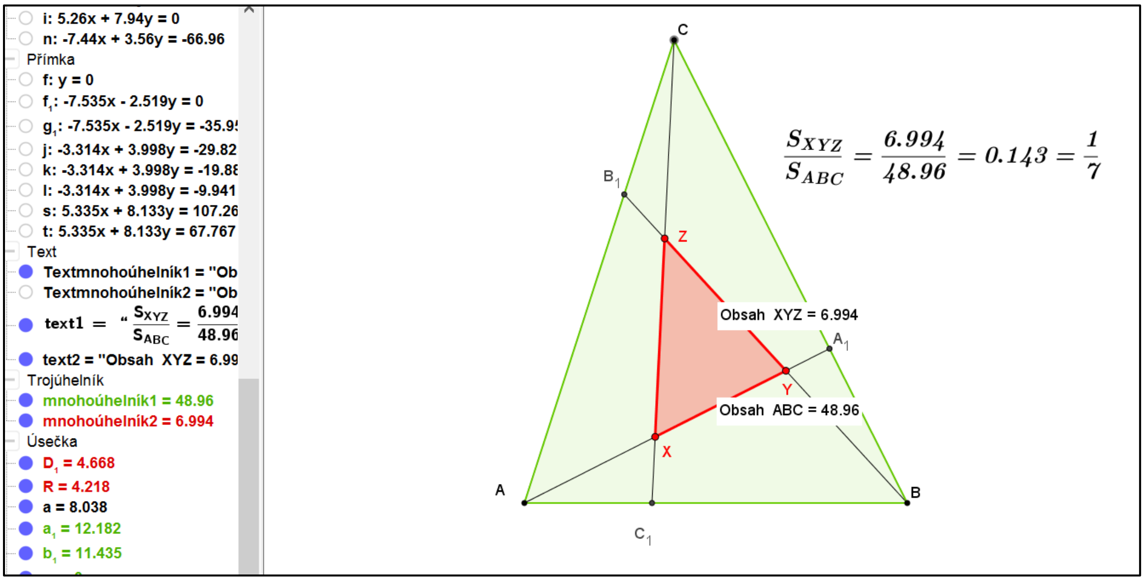
Nejprve si tedy v programu GeoGebra sestojíme obecný trojúhelník $ABC$ a body $A_1, B_1$ a $C_1$, které leží v jedné třetině po řadě na stranách $BC, CA, AB$. Tyto spojnice se nám protnou ve třech bodech a vznikne $\Delta XYZ$ (viz obr. 30).

Když máme trojúhelník zkonstruovaný, pak pomocí funkce *Text* zapíšeme poměr nově vzniklého trojúhelníku $\Delta XYZ$ a obecného $\Delta ABC$. Zde nám program GeoGebra umožňuje vytvořit rovnici tak, že tam můžeme vložit objekt (například délku, obsah apod.), a tím pádem je interaktivní s pohybem bodů v programu (viz obr. 46).




*Obrázek 46: Feynmanův trojúhelník - vložení interaktivního textu*

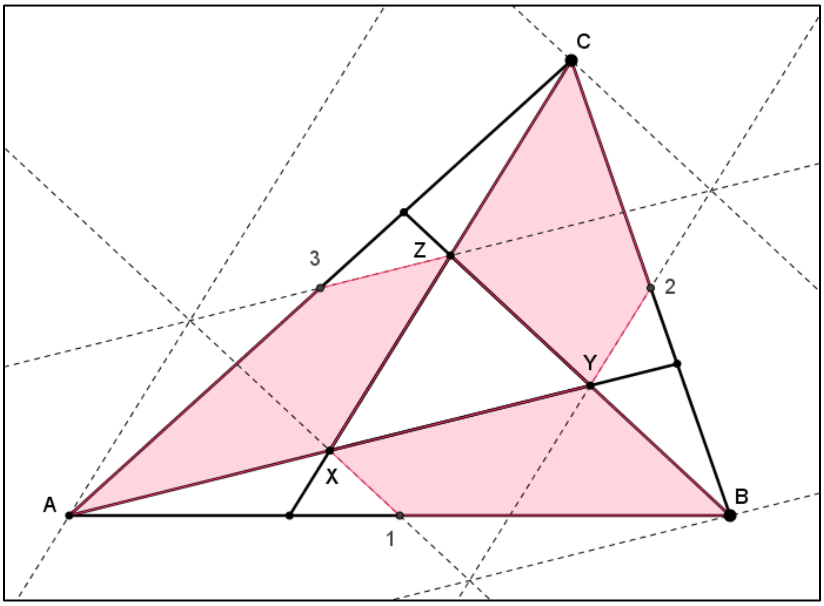
Pohybem bodů zjistíme, že obsahy obou trojúhelníků jsou stále v poměru $1:7$ (viz obr. 47), tento fakt nám neustále ukazuje interaktivní text. Tímto můžeme verifikaci považovat za dokončenou.




*Obrázek 47: Feynmanův trojúhelník - změna obsahů*

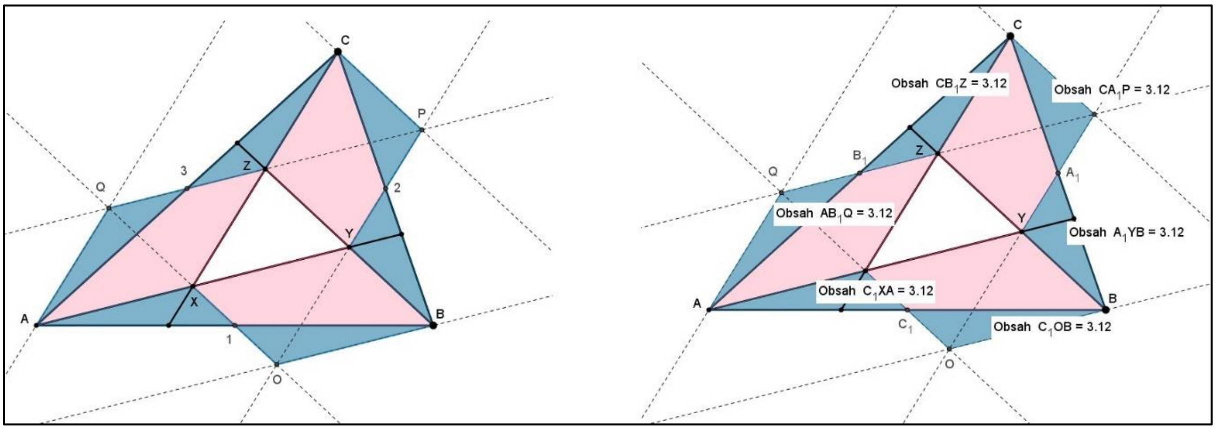
## 11.4 Důkaz Feynmanova trojúhelníku

V této práci není využit klasický algebraický důkaz pro Feynmanův trojúhelník, ale vizuální důkaz „beze slov“ podle Rogera Nelsena [29], který byl stejně tak, jako verifikace zpracován v matematickém programu GeoGebra, kde si nejprve sestrojíme Feynmanův trojúhelník a poté pomocí soustavy rovnoběžek sestrojeny tři nepravidelné čtyřúhelníky (viz obr. 48).

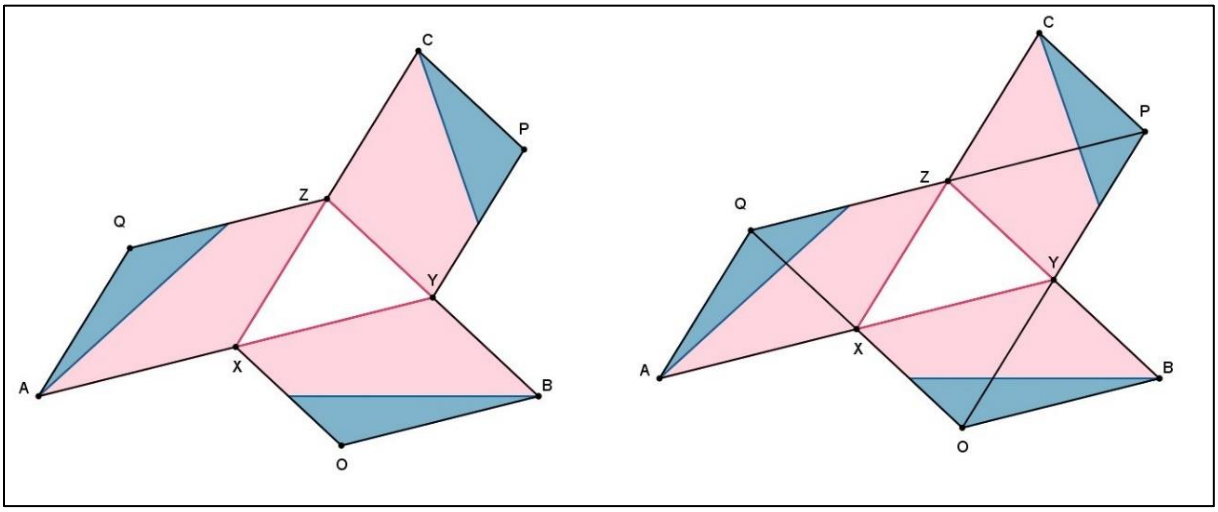



*Obrázek 48: Feynmanův trojúhelník - soustava rovnobžných přímek*

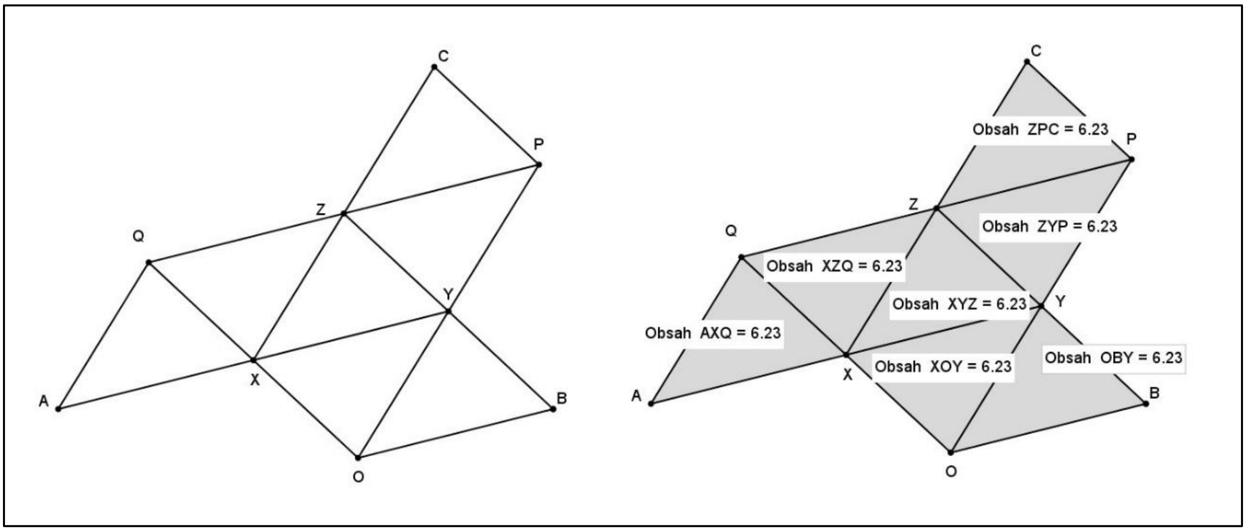
Soustavou rovnoběžek nám také vznikne šest stejných trojúhelníků – tři vně původního $\Delta ABC$ a tři uvnitř něj (viz obr. 49). Další kroky pro svou povahu není třeba komentovat.




*Obrázek 49: Fenymanův trojúhelník - důkaz*




*Obrázek 50: Feynmanův trojúhelník - rozdělení na sedminy*




*Obrázek 51: Feynmanův trojúhelník – důkaz*

# 12 DESARGUOVA VĚTA

## 12.1 Girard Desargues

Osobní život inženýra a architekta Girarda Desargua také není ve zdrojích popsán. Víme, že se narodil roce 1591 do bohaté rodiny v té době po Paříži druhým nejvýznamnějším francouzském městě Lyon. Jeho rodina vlastnila několik domů a vinic, tudíž měl malý Girard mnoho možností na dobré vzdělání a mohl si dovolit koupit každou knihu, na kterou si vzpomněl. Byl to on, kdo přisel s novým pohledem na matematiku, respektive geometrii, která je dnes nazývána jako „projektivní“ nebo také „moderní“ geometrie. Jeho práce a studie byly v jeho době známé, avšak po jeho smrti byly zapomenuty. Znovuobjevena byla až v 19. století a to díky větě, kterou se v této práci budeme zabývat: *Desarguova věta*. Tuto větu však sám nezveřejnil, ale udělal to jeho blízký přítel Abraham Bosse v roce 1648 [29].

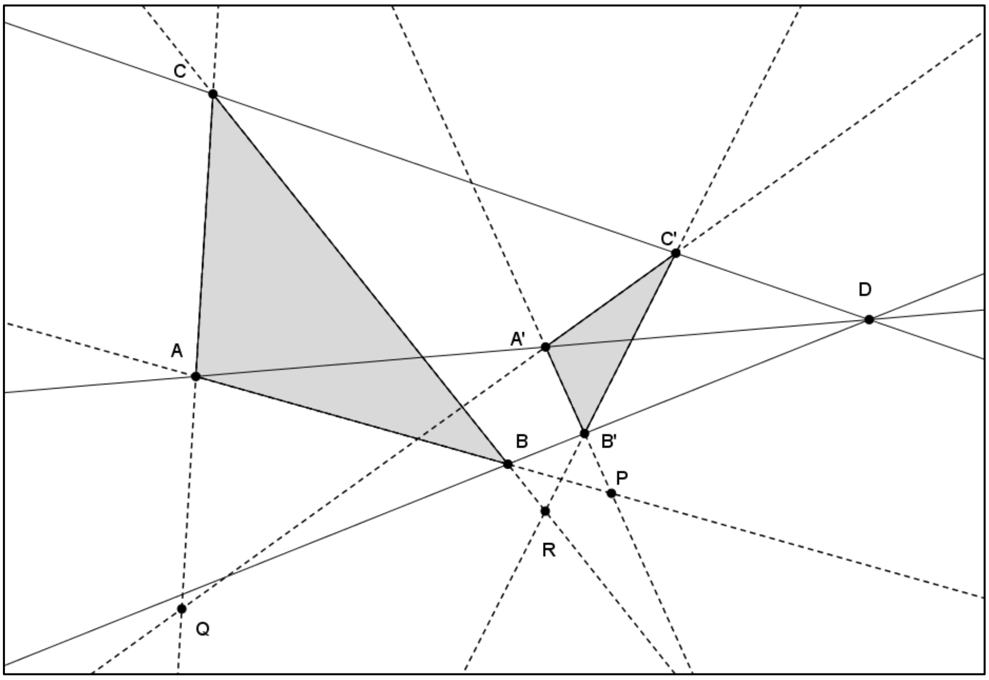
Desarguova věta je považována za úplně první netriviální větu v projektivní geometrii, jelikož v této tezi není ani zmínka o délkách či úhlech, nýbrž je postavena pouze na základně vzájemných vztahů mezi body a přímkami [36].

Pro francouzskou vědeckou společnost se stal zajímavým, když v roce 1626 navrhl jeden vodní projekt v Paříži. Pak si ho totiž všiml francouzský vědec Marin Mersenne, který ho pozval do svého kruhu francouzských vědců a matematiků, kteří se u něj pravidelně scházeli. Později, po Mersennově smrti, se z tohoto okruhu vědců stala *Akademie věd*. Zde měl možnost se setkat s největšími matematiky své doby, jako byl René Descartes, Pierre de Fermat nebo také otec Blaise Pascala – Étienne Pascal, který později Blaise na tyto schůzky začal také brát. To byl nejspíš také jeden z podnětů, proč sepsal své myšlenky a nechal je vytisknout, avšak mnoho z jeho studií nechal vydat jeho přítel Abraham Bosse [31].

Byl to člověk, který psal o praktických oborech jako je například řezání kamenů ve stavebnictví či o slunečních hodinách. Nejedná se však o žádnou učebnici, kde je krok za krokem vysvětleno, co mají řemeslníci dělat, neboť je velmi teoretická, ačkoliv byla opravdu určena pro řemeslníky. Nejvýznamnější jeho dílo bylo to, ve kterém objevil svou projektivní geometrii, které lze volně přeložit jako *Hrubý návrh, jak dosáhnout výsledku roviny křížící se s kuželem.* Jeho dílo bylo znovuobjeveno žáky Gasparda Monge, když studovali deskriptivní geometrii, která se přerodila právě v projektivní geometrii [31].

## 12.2 Desarguova věta

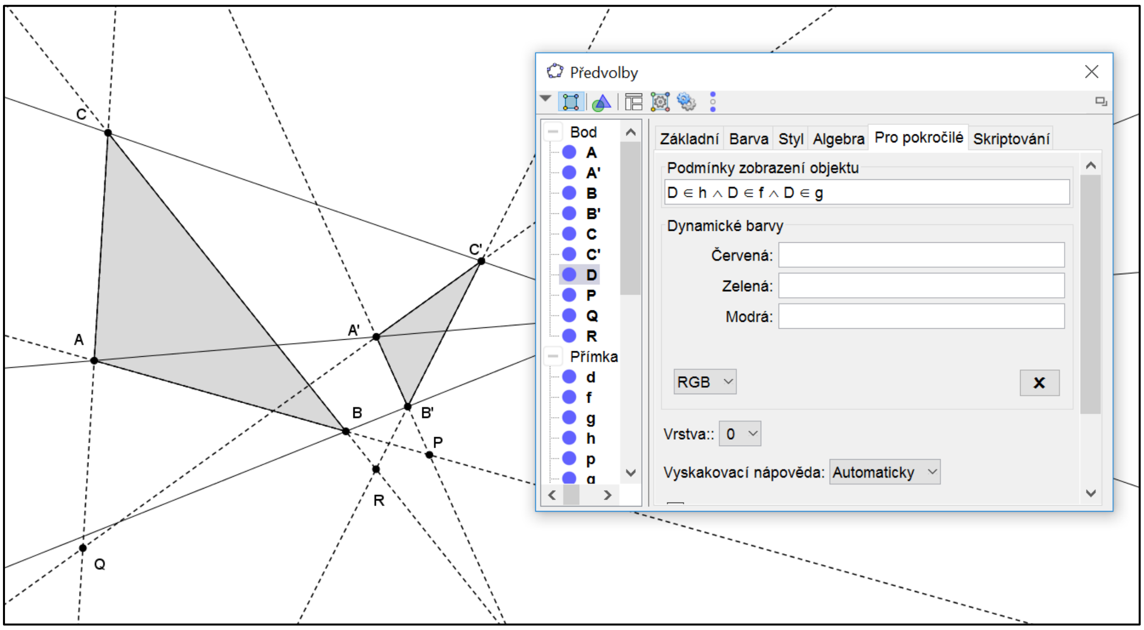
***Nechť máme dva trojúhelníky $\Delta ABC$ a $\Delta A'B'C'$, pro které platí, že přímky $AA'$, $BB'$, $CC'$ mají jeden společný bod D. Potom průsečíky P, Q, R, pro které platí $AB \cap A'B' \in P$, $AC \cap A'C' \in Q$, $BC \cap B'C' \in R$, jsou kolineární [33].***




*Obrázek 52: Desarguova věta*

## 12.3 Verifikace pomocí programu GeoGebra

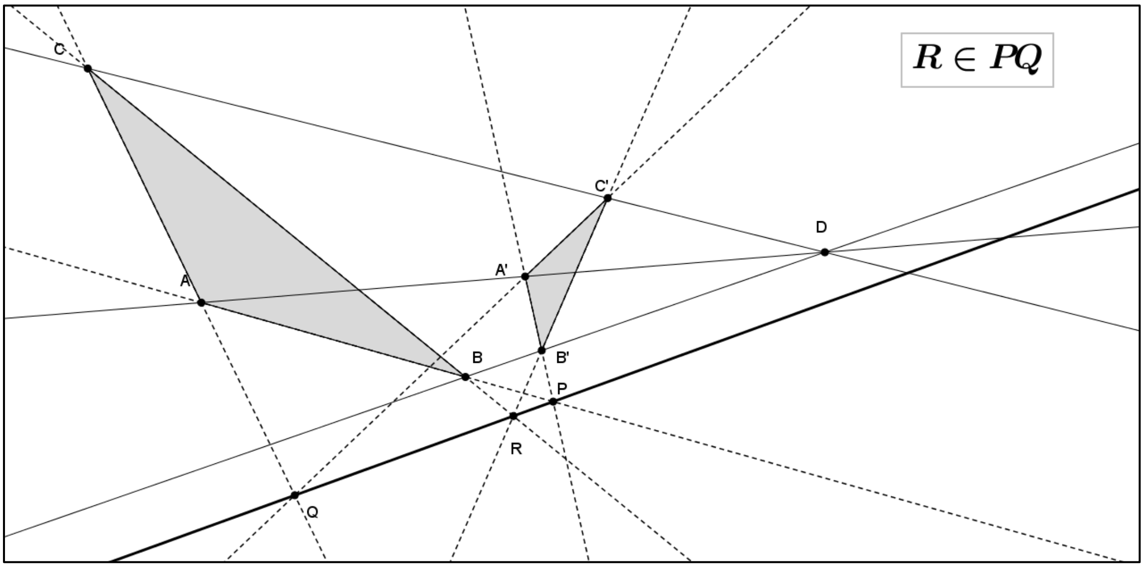
Pro verifikaci v tomto případě však využijeme podmínku pro zobrazení objektu, tedy obdobně jako u Pappovy věty. Nejprve si sestrojíme situaci jako na obrázku 52 výše. Poté zadáme podmínku pro zobrazení objektu, respektive bodu $D$ (viz obr. 53).




*Obrázek 53: Desarguova věta - průsečík tří přímek*

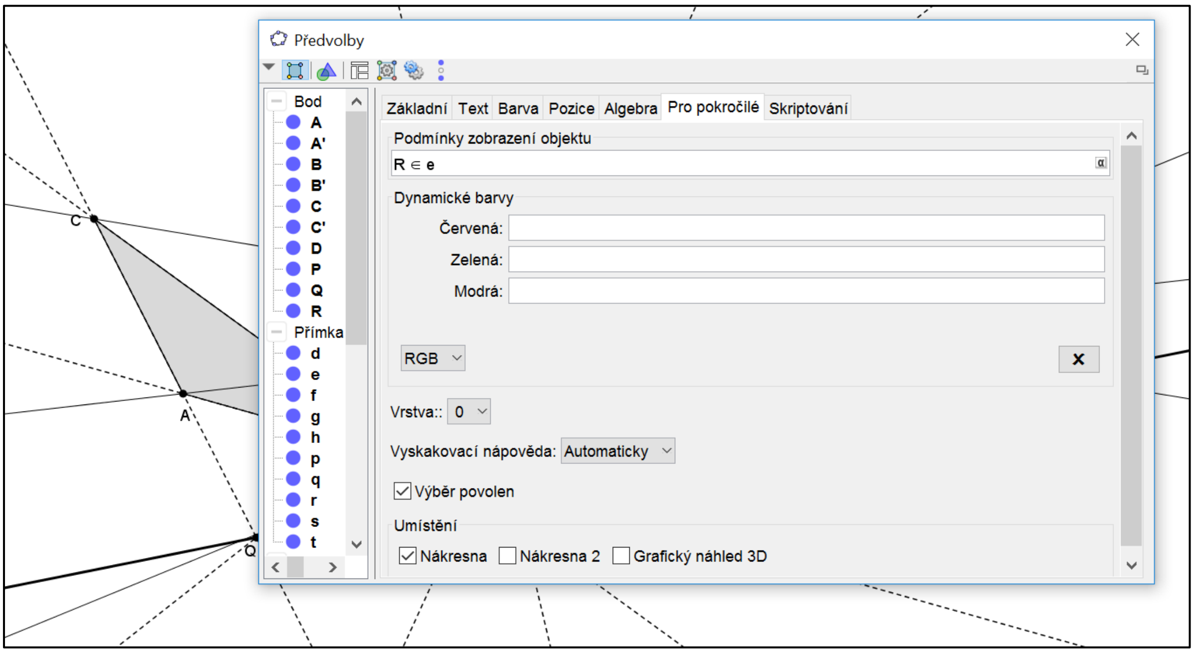
Pohybem bodů zjistíme, že bod $D$ opravdu leží na průsečíku všech tří přímek. Proto můžeme pokračovat ve verifikaci kolinearity bodů $P, Q, R$.

Nejprve vytvoříme přímku $PQ$ a následně napíšeme pomocí funkce *Text*: $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{PQ}$.



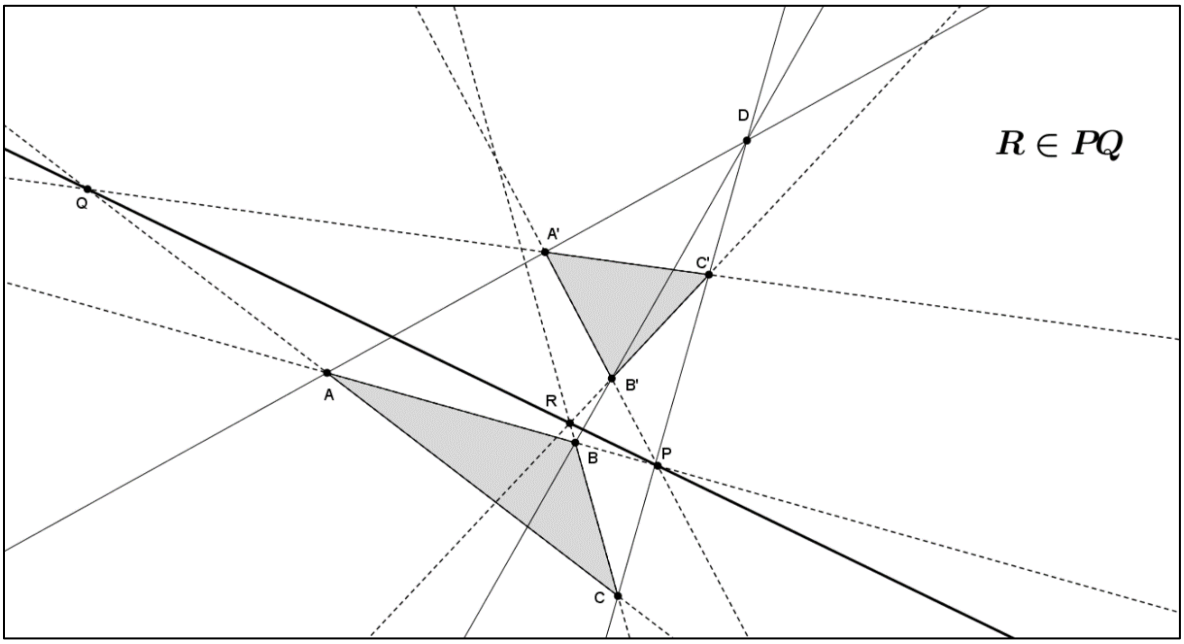

*Obrázek 54: Desarguova věta – text*

Poté opět využijeme funkci *Podmínky zobrazení objektu* a vložíme podmínku (viz obr. 55).




*Obrázek 55: Desarguova věta - podmínka pro kolinearitu bodů*

Při pohybu body zjišťujeme, že text opravdu nemizí a tím můžeme podmínku programu GeoGebra považovat za správnou. Tím jsme verifikovali kolinearitu tří bodů.




*Obrázek 56: Desarguova věta - verifikace koliearity bodů P, Q, R*

## 12.4 Důkaz Desarguovy věty podle Menelaovy věty

K důkazu tohoto planimetrického problému můžeme, stejně jako například u Pappovy věty, využít Menelaovu větu. Vzhledem k trojúhelníkům $BCD, CAD$ a $ABD$, a jejich příčkám $A'B'P, B'C'R, A'C'Q$ aplikujeme pro každou dvojici Menelaova větu:

$$\frac{BR}{RC} \cdot \frac{CC'}{C'D} \cdot \frac{DB'}{B'B} = -1$$

$$\frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AA'}{A'D} \cdot \frac{DC'}{C'C} = -1$$

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'D} \cdot \frac{DA'}{A'A} = -1$$

Vynásobením těchto tří rovností a po zjednodušení získáme rovnici:

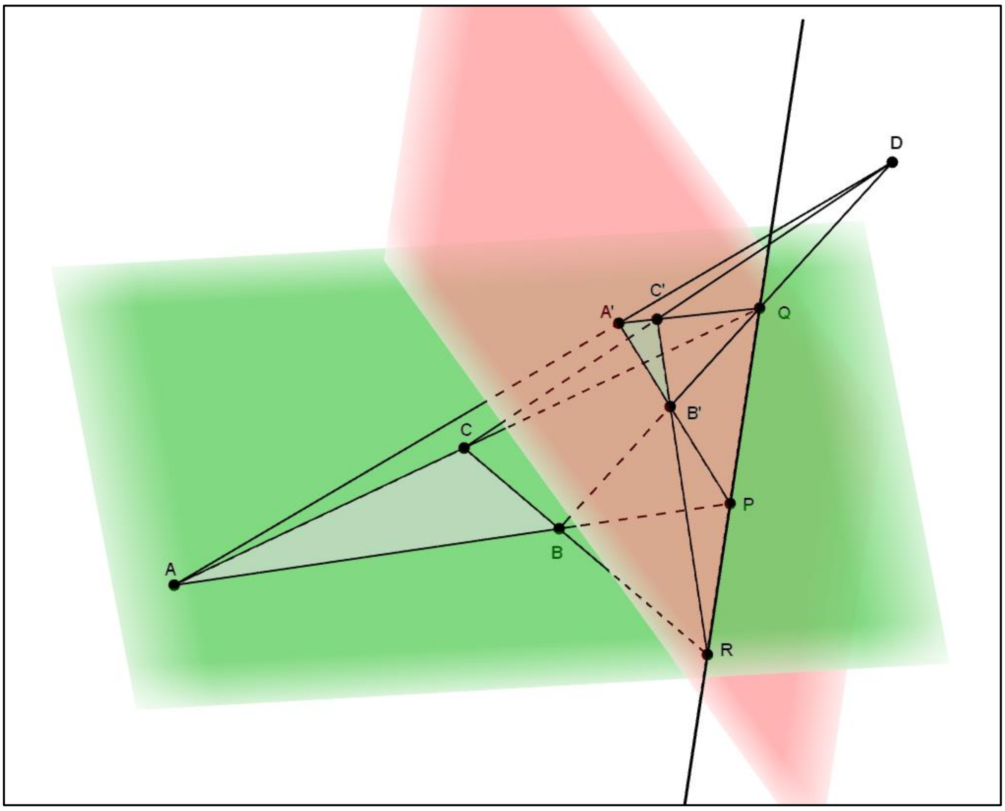
$$\frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AP}{PB} = -1,$$

což, jak nám říká Menelaova věta, znamená kolinearitu bodů $P, Q, R$. Tím můžeme důkaz považovat za dokončený [33].

## 12.5 Důkaz Desarguovy věty z trojrozměrného prostoru

Pro ještě lepší objasnění tohoto důkazu si ukážeme důkaz, který nám nabízí sama projektivní geometrie, neboť pokud dokážeme libovolné tvrzení projektivní geometrie, pak pro stejné uspořádání platí i pro jakoukoliv jinou projekci se stejným uspořádáním. Tato verze důkazu je založena na důkazu trojrozměrné Desarguovy věty, kde máme dva dané trojúhelníky na dvou různoběžných rovinách (viz obr. 57). Je tedy zřejmé, že se zde jedná o projekci z trojrozměrného prostoru do dvojrozměrného, tedy vyplývá zde platnost původní věty. Pokud budeme pozorně prohlížet obrázek níže, pak zjistíme, že přímky $AB$ a $A'B'$ leží na jedné rovině. Jestliže se pohybujeme v projektivní geometrii, pak také platí, že dvě přímky, které leží na stejné rovině, se musí protnout, tedy $P \in AB \cap A'B'$. Analogicky platí, že $Q \in AC \cap A'C'$ a $R \in BC \cap B'C'$. To znamená, že body $P, Q, R$ leží na prodloužených stranách $\Delta ABC$ a $\Delta A'B'C'$, tedy leží na jedné rovině.

A protože jsou roviny různoběžné, pak je zřejmé, že musí ležet na průsečnici obou rovin, tedy body $P, Q, R$ leží na jedné přímce. Tím je důkaz hotov [37].




*Obrázek 57: Desarguova věta v prostoru*

# 13 NAPOLEONOVA VĚTA

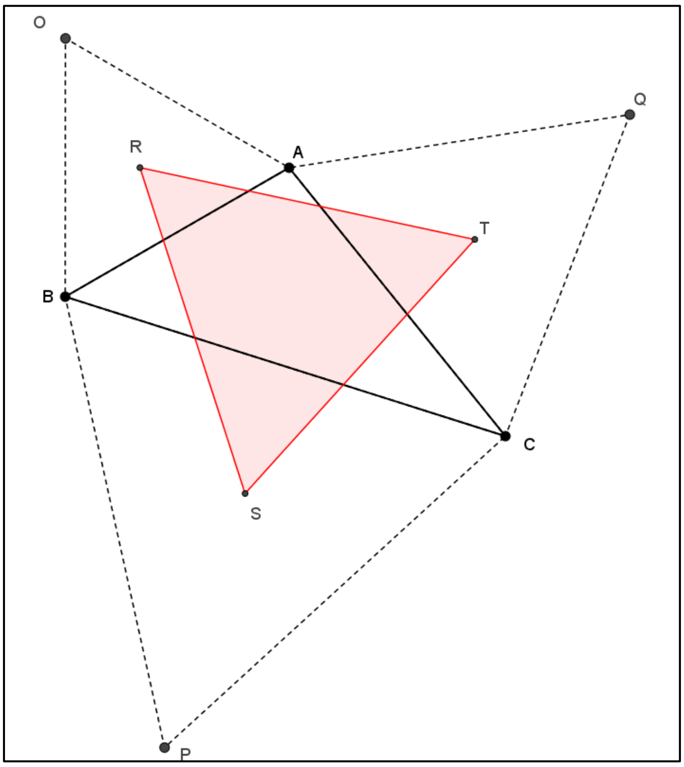
## 13.1 Napoleon Bonaparte

Napoleon Bonaparte se narodil v srpnu roku 1769 na ostrově Korsika a zemřel v exilu na ostrově Svatá Helena poté, co prohrál bitvu u Waterloo. Tento „malý velký muž“, jak je často nazýván, je známý nejen svou vojenskou genialitou, kterou projevoval zejména v bitevní strategii, a tím, že byl francouzský císař, byl to však také skvělý student matematiky. Studoval na francouzské škole ve městě Brienne, kde se zabýval algebrou, trigonometrií a geometrií. Na základě jeho zájmu o matematiku a jeho vynikajících výsledků v tomto směru byl přijat na vojenskou školu v Paříži, ačkoliv jeho schopnosti v ostatních předmětech byly průměrné. Během egyptského vojenského tažení byl Bonaparte doprovázen mnoha vzdělanci, a to jak matematiky, tak chemiky, pedagogy či stavebními inženýry. Mezi těmito vzdělanci byl například významný matematik Gaspard Monge nebo Joseph Fourier. Poté, co se z tohoto tažení vrátil, stal se hlavou Francie a provedl mnoho reforem. A aby Francie fungovala, jak si představoval, tak do své vlády dosadil právě vzdělance, kteří ho doprovázeli na tažení, tedy Monge, Fourier či Laplace, kteří měli zajistit reformu školství, vytvořit nové školy, kam měli zaměstnat ty nejlepší učitele. Ale také přepracovat kurikulum škol tak, aby byl kladen větší důraz na matematiku. Kolem Bonaparta se začala scházet skupina matematiků, kteří spolu konzultovali veškeré matematické problémy. V této skupině byl například již výše zmiňovaný Pierre Simon Laplace či Joseph Louis Lagrange [32].

V této kapitole se budeme zabývat větou, která je přisuzována právě slavnému Napoleonovi Bonapartovi. Avšak i přesto, že byl považován za skvělého studenta a dobrého matematika, tak dodnes není jisté, zda měl dostatek vědomostí a času k tomu, aby tuto větu byl schopen dokázat a zda byla matematika na takové úrovni, aby ji Napoleon znal [24].

## 13.2 Napoleonova věta

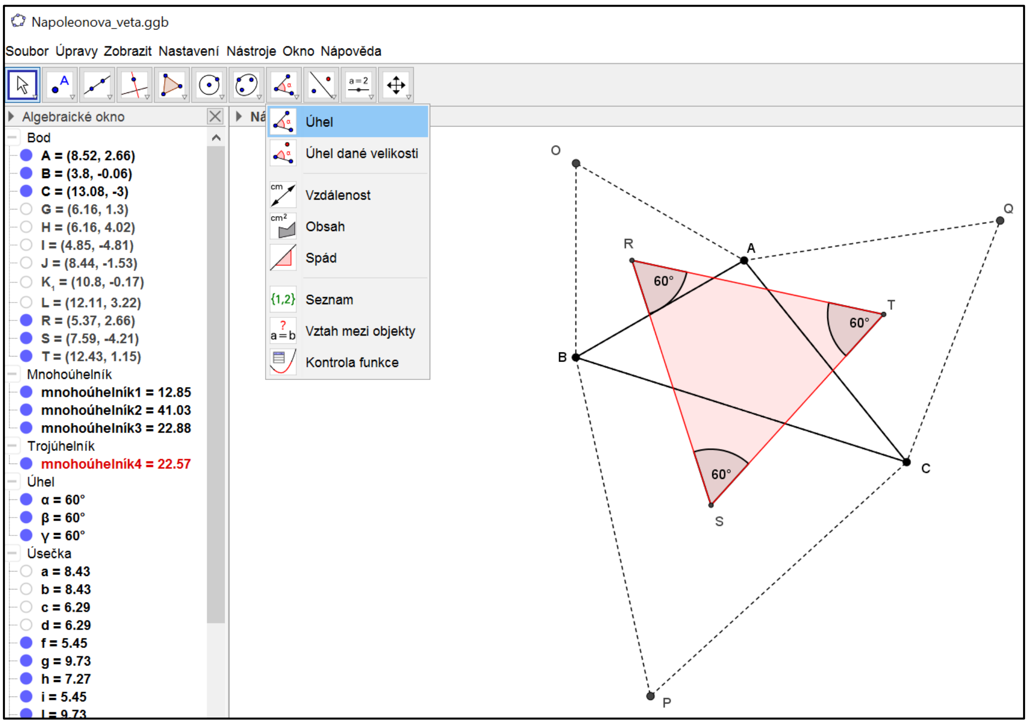
***Nad stranami libovolného trojúhelníka sestrojme rovnostranné trojúhelník (všechny vně nebo dovnitř). Potom středy těchto rovnostranných trojúhelníků (např. těžiště) tvoří rovnostranný trojúhelník [24].***




*Obrázek 58: Napoleonova věta*

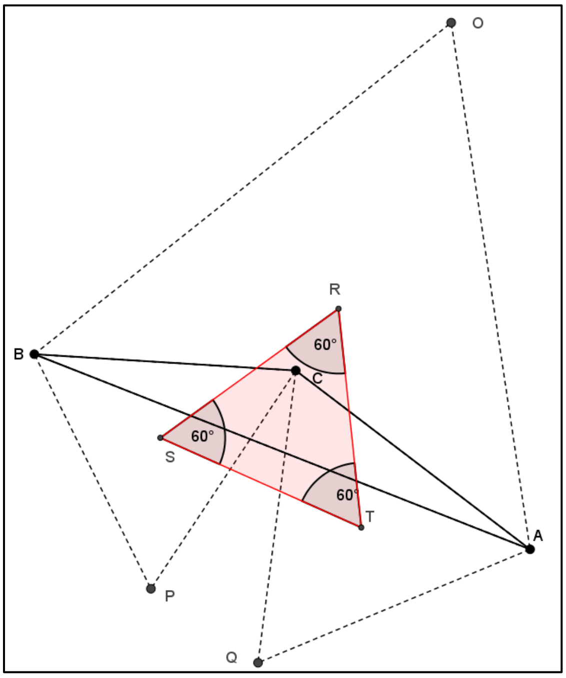
## 13.3 Verifikace pomocí programu GeoGebra

Verifikace tohoto důkazu v matematickém programu GeoGebra je velmi jednoduchý. Nejprve zkonstruujeme libovolný trojúhelník $ABC$ a nad každou stranou tohoto trojúhelníka sestrojíme rovnostranné trojúhelníky (pomocí funkce *Pravidelný mnohoúhelník*). Protože potřebujeme sestrojit středy těchto nově sestrojených rovnostranných trojúhelníků, pak můžeme sestrojit například těžiště – tedy průnik těžnic. Tím nám vzniknou body $R, S, T$ a jejich spojením $\Delta RST$. Jednoduše pak lze pomocí funkce *Úhel* změřit úhly v tomto trojúhelníku pomocí tří bodů ($\sphericalangle SRT, \sphericalangle RTS, \sphericalangle TSR$).




*Obrázek 59: Napoleonova věta - měření úhlů v trojúhelníku*

Když zobrazíme hodnotu úhlu, zjistíme, že všechny úhly jsou rovny $60°$, tedy můžeme konstatovat, že je trojúhelník rovnostranný. Při pohybu bodů $\Delta ABC$ zůstávají úhly rovny $60°$ (viz obr. 60).

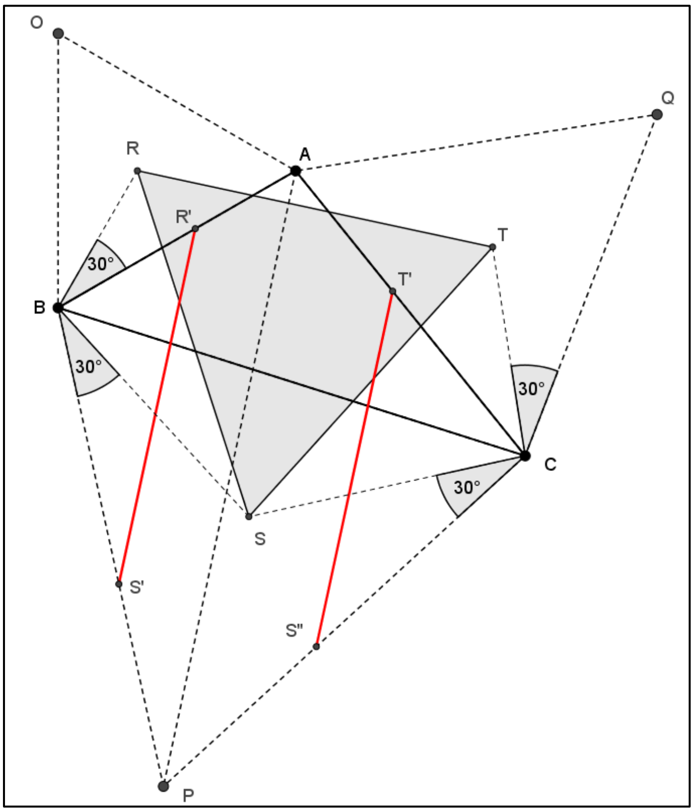



*Obrázek 60: Napoleonova věta - verifikace*

## 13.4 Důkaz Napoleonovy věty

Možností, jak tento planimetrický problém dokázat je hned několik. My si zde ukážeme geometrický důkaz využívající shodného zobrazení a využijeme otočení dvou stran Napoleonova trojúhelníku.

Nejprve provedeme otočení strany $RS$ o $30°$ v záporném směru okolo bodu $B$. Tak vznikne strana $R'S'$, pro kterou platí, že $S \in BP$ a $R \in BA$, neboť můžeme konstatovat, že $\sphericalangle RBA = \sphericalangle SBP = 30°$. Následně provedeme otočení strany $TS$ opět o $30°$, tentokrát ve směru kladném okolo bodu $C$. Tím nám vzniká strana $T'S''$, pro kterou platí, že $S'' \in \ CP$ a $T' \in CA$, neboť můžeme konstatovat, že $\sphericalangle TCA = \sphericalangle SCP = 30°$ (viz obr. 61) [34].




*Obrázek 61: Napoleonova věta - otočení stran*

Neboť víme, že v rovnostranném trojúhelníku je vzdálenost vrcholu od jeho těžiště rovna $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$ délce strany trojúhelníku, potom můžeme říct, že platí:

$$\frac{|BR'|}{|BA|} = \frac{|BR|}{|BA|} = p,$$

$$\frac{|BS'|}{|BP|} = \frac{|BS|}{|BC|} = p,$$

$$\frac{|CT'|}{|CA|} = \frac{|CT|}{|CA|} = p,$$

$$\frac{|CS''|}{|CP|} = \frac{|CS|}{|CB|} = p.$$

Pak můžeme konstatovat, že $\Delta BAP \sim \Delta BR'S'$ a $\Delta CAP \sim \Delta CT'S''$, z čehož plyne, že $R'S' \parallel T'S'' \parallel AP$. Dále také platí, že $|R'S'| = p|AP| = |S''T|$. Pak už je tedy zřejmé, že $|RS| = |TS|$ a tyto strany spolu svírají úhel 60°. Tím jsme dokázali, že $\Delta RST$ je rovnostranný [34].

# 14 ZÁVĚR

Planimetrické problémy v matematice jsou záležitostí již pradávnou, avšak matematikům dřívějších dob trvalo celé měsíce, ba dokonce roky, než se jim je podařilo dokázat. V dnešní době počítačů a Internetu se nám mohou zdát tyto problémy jako velmi snadné až primitivní. Avšak dnes si nedokážeme představit, kolik práce za těmito důkazy stojí, neboť si můžeme během několika minut vytvořit víceméně každý tento problém v dynamickém matematickém programu, jako je například GeoGebra, a ověřit si jeho správnost a tím i to, zda se vydáváme správnou cestou. V dnešní době tedy můžeme jen obdivovat dřívější vzdělance, a to nejen matematiky, jak se dokázali vypořádat s tak složitými úkoly, jako jsou například výše zmíněné problémy z planimetrie. Většina z těchto vět byla známa již před tím, než se jím daný matematik začal zabývat a než je nakonec dokázal a byl po něm daný problém pojmenován.

Touto prací Vás chci také seznámit nejen o planimetrii a důkazech různých vět, ale i s tím, kdo daný problém dokázal, zda to byl matematik, nebo právník a že to může být úplně obyčejný člověk, jako kdokoliv koho potkáte na ulici.

Tato práce je postavena na práci s dynamickým programem GeoGebra, který je nejen zdarma dostupný na Internetu, ale také se jedná o program, se kterým lze jednoduše a intuitivně pracovat. Mým cílem bylo čtenáře seznámit s tímto programem, kde si pomocí této práce může také vyzkoušet konstrukci daných problémů a jejich následnou verifikaci. To je také velmi vhodné do vyučování, neboť vizuální podpora výuky napomáhá k lepšímu zapamatování učiva a zejména k jeho pochopení, ale je důležité vybrat vhodný planimetrický problém pro určitou studijní skupinu.

# 15 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY A INTERNETOVÝCH ZDROJŮ

[1] LEISCHNER, Pavel. *Matematika: Polibky kružnic: Pappos z Alexandrie* [online]. Pedagogická fakulta JU, České Budějovice, 2016 [cit. 2016-11-05]. Dostupné z: http://mfi.upol.cz/files/25/2501/mfi_2501_001_011.pdf

[2] BOGOMOLNY, Alexander. *Pappus theorem*. In: CUT THE KNOT: Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles [online]. New York: New York Review Books, 2001 [cit. 2016-11-05]. Dostupné z: http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Pappus.shtml

[3] KRÁLOVÁ, Magda. *Pierre Fermat*. In: Techmania Science Center: Eduportál [online]. Plzeň: Techmania [cit. 2016-11-23]. Dostupné z: http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1138/fermat

[4] *Pierre de Fermat: Geniální amatér*. Dostupné také z: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:Ek6RCwlckUUJ:www.tlumoceni-preklady.cz/download/2081/507.pdf+&cd=2&hl=cs&ct=clnk&gl=cz

[5] BOGOMOLNY, Alexander. *The Fermat Point and Generalizations.* In: CUT THE KNOT: Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles [online]. New York: New York Review Books, c1996-2016 [cit. 2016-11-29]. Dostupné z: http://www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat_point.shtml

[6] KUCHAŘÍK, Jan. *Některé netradiční vhledy do geometrie* [online]. Jihlava, 2012 [cit. 2016-11-29]. Dostupné z: http://forum.matematika.cz/files/prace/SOC_Nektere_netradicni_vhledy_do_geometrie.pdf. Gymnázium Jihlava.

[7] *Thalés z Milétu: Zakladatel milétské školy, filozof, matematik, přírodovědec, který přenesl část vědomostí Orientu do Řecka.* In: Antický svět [online]. Antický svět, 2015 [cit. 2016-12-03]. Dostupné z: http://www.antickysvet.cz/25846n-thales-z-miletu

[8] PETRŽELKA, Josef. *Platón bez idejí.* [online]. Brno: Masarykova univerzita: Elportál, 2013 [cit. 2016-12-03]. ISBN 978-80-210-6260-3. Dostupné z: http://is.muni.cz/do/rect/el/estud/ff/ps12/platon/web/index.html

[9] *Fermat point.* In: Wikipedia: The Free Encyclopedia [online]. Wikipedia, 2016 [cit. 2016-12-03]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_point

[10] BOGOMOLNY, Alexander. *The Menelaus Theorem.* In: CUT THE KNOT: Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles [online]. New York: New York Review Books, c1996-2016 [cit. 2016-11-29]. Dostupné z: http://www.cut-the-knot.org/Generalization/Menelaus.shtml

[11] PŘIBYL, Pavel Wilhelm. *Explikace zlatého řezu v estetice* [online]. Brno, 2010 [cit. 2017-03-05]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/217584/ff_b/bakalarska_prace_pribyl.txt. Bakalářská diplomová práce. Masarykova univerzita v Brně. Vedoucí práce Mgr. Rostislav Niederle, PhD.

[12] *Eukleidovy definice, postuláty a axiomy.* In: Eridanus [online]. [cit. 2017-03-05]. Dostupné z: http://eridanus.cz/id32402/ve(2da/pr(2i(1rodni(1_ve(2dy/matematika/_uc(2ebnice/Geometrie/Eukleidovy_postulaty/index.htm

[13] KRÁLOVÁ, Magda. *Euklidés.* In: Techmania science portál: Eduportál [online]. Plzeň: Techmania Science Center [cit. 2017-03-05]. Dostupné z: http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1133/euklides

[14] HAŠEK, Roman. *Pascalova věta.* In: Pedagogická fakulta JČU: Katedra matematiky [online]. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2017 [cit. 2017-03-05]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO4/GEO4_CZV_SS_Pascalova_veta.pdf

[15] BOGOMOLNY, Alexander. *Pascal's Theorem: What is it? A Mathematical Droodle.* In: CUT THE KNOT: Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles [online]. New

York: New York Review Books, Copyright 1996-2017 [cit. 2017-03-07]. Dostupné z: http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Pascal.shtml

[16] KRÁLOVÁ, Magda. *BLAISE PASCAL.* In: Techmania Science Center: Eduportál [online]. Plzeň: Techmania Science Center [cit. 2017-03-08]. Dostupné z: http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1276/pascal

[17] VALENTA, Jiří. *Blaise Pascal.* In: Senior internet klub: Vysoká škola ekonomická v Praze [online]. Praha: Senior Internet Klub [cit. 2017-03-08]. Dostupné z: http://sik.vse.cz/ss/pascal.pdf

[18] O'CONNOR, J. J. a E. F. ROBERTSON. *Charles Julien Brianchon.* In: MacTutor History of Mathematics archive [online]. Scotland: School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, 2017 [cit. 2017-03-08]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brianchon.html

[19] HAŠEK, Roman. *Brianchonova věta.* In: Pedagogická fakulta JČU: Katedra matematiky [online]. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2017 [cit. 2017-03-05]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO4/GEO4_CZV_SS_Brianchonova_veta.pdf

[20] *Edward John Routh.* In: MacTutor History of Mathematics archive [online]. Scotland: School of Mathematical and Computational Sciences University of St Andrews, c1997-2000 [cit. 2017-03-10]. Dostupné z: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Routh.html

[21] SNEDDON, I. N. Routh, *Edward John.* In: Encyclopedia.com [online]. Collection of online encyclopedias: Encyclopedia.com, ©2016 [cit. 2017-03-10]. Dostupné z: http://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/routh-edward-john

[22] *Richard Feynman* (1918 - 1988). In: Atomicarchive.com [online]. San Diego: AJ Software & Multimedia All Rights Reserved, ©Copyright1998-2015 [cit. 2017-03-11]. Dostupné z: http://www.atomicarchive.com/Bios/Feynman.shtml

[23] KRÁLOVÁ, Magda. *RICHARD FEYNMAN: americký teoretický fyzik.* In: Techmania Science Center: Eduportál [online]. Plzeň: Techmania Science Center [cit. 2017-03-11]. Dostupné z: http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1140/feynman

[24] PECH, Pavel. *Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii.* České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2005. ISBN 80-7040-805-7.

[25] ŠTRAUSOVÁ, Irena. *Speciální případ Routhovy věty a jeho důkaz v programu GeoGebra.* In: South Bohemia Mathematical Letters [online]. České Budějovice: WordPress, 2017 [cit. 2017-03-12]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/Strausova1.pdf

[26] OETTEL, Herbert. *Ceva, Giovanni.* In: www.encyclopedia.com [online]. Collection of online encyclopedias: Encyclopedia.com, ©2016 [cit. 2017-03-14]. Dostupné z: http://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/ceva-giovanni

[27] O'CONNOR, J. J. a E. F. ROBERTSON. *Giovanni Benedetto Ceva.* In: MacTutor History of Mathematics archive [online]. Scotland: School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, 2017 [cit. 2017-03-14]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ceva_Giovanni.html

[28] HAŠEK, Roman. *Cevova věta a její užití.* In: Pedagogická fakulta JČU: Katedra matematiky [online]. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2017 [cit. 2017-03-16]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO2/CevovaVeta.pdf

[29] NELSEN, Roger B. *Proofs without words II: more exercises in visual thinking.* Ilustrované vydání. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000. Classroom resource materials (Unnumbered). ISBN 08-8385-721-9.

[30] ANDERSEN, Kirsti. *Girard Desargues.* In: Encyclopædia Britannica [online]. United States or Canada: Encyclopædia Britannica, Inc. All Rights Reserved., 2017 [cit. 2017-03-16]. Dostupné z: https://www.britannica.com/biography/Girard-Desargues

[31] FIELD, J. V. *Girard Desargues.* In: MacTutor History of Mathematics archive [online]. Scotland: School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, 2017 [cit. 2017-03-19]. Dostupné z: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Desargues.html

[32] JOHNSON, Art. *Famous problems and their mathematicians.* Englewood, Colo.: Teacher Ideas Press, 1999. ISBN 15-6308-446-5.

[33] BOGOMOLNY, Alexandr. *Desargues' Theorem.* In: CUT THE KNOT: Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles [online]. New York: New York Review Books, Copyright©1996-2017 [cit. 2017-03-29]. Dostupné z: http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Desargues.shtml

[34] MRÁZ, Luděk. *Napoleonova věta* [online]. České Budějovice, 2016 [cit. 2017-03-31]. Dostupné z: https://theses.cz/id/5aw41m/Diplomov_prce.pdf. Diplomová práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. Vedoucí práce Prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

[35] HAŠEK, Roman. *Dělicí poměr.* In: Pedagogická fakulta JČU: Katedra matematiky [online]. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2017 [cit. 2017-03-31]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO3/GEO3_CZV_Delici_pomer.pdf

[36] STEWART, Ian. *Krocení nekonečna: příběh matematiky od prvních čísel po teorii chaosu.* Brno: CPress, 2014. ISBN 9788026402954.

[37] DEVLIN, Keith J. *Jazyk matematiky: jak zviditelnit neviditelné.* Praha: Argo, 2002. Aliter (Argo: Dokořán): Dokořán). ISBN 80-8656-909-8.

[38] O'CONNOR, J. J. a E. F. ROBERTSON. *Giovanni Benedetto Ceva.* In: MacTutor History of Mathematics archive [online]. Scotland: School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, 2017 [cit. 2017-03-14]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ceva_Giovanni.html

[39] PUPÍK, Petr. *Projektivní geometrie kuželoseček: Lekce 1.* In: www.pupa.ic.cz [online]. Brno, ©2009-2012 [cit. 2017-04-04]. Dostupné z: http://pupa.6f.sk/dokumenty/projektivka.pdf

[40] BOGOMOLNY, Alexandr. *The Menelaus Theorem.* In: CUT THE KNOT: Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles [online]. New York: New York Review Books, Copyright©1996-2017 [cit. 2017-04-04]. Dostupné z: http://www.cut-the-knot.org/Generalization/Menelaus.shtml

# 16 SEZNAM OBRÁZKŮ