



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

## ÚSTAV GEODÉZIE

INSTITUTE OF GEODESY

# VÝPOČET LOKÁLNÍCH MODELŮ KVAZIGEOIDU Z HETEROGENNÍCH DAT

CALCULATION OF LOCAL QUASIGEOID MODELS FROM HETEROGENEOUS DATA

## DISERTAČNÍ PRÁCE

DOCTORAL THESIS

## AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Ing. Richard Kratochvíl

## VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. RADOVAN MACHOTKA, Ph.D.

BRNO 2021



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod .....</b>	<b>4</b>
1.1	Cíle práce .....	5
<b>2</b>	<b>Tíhové pole Země .....</b>	<b>6</b>
2.1	Rozvoj tíhového potenciálu do řady sférických harmonických funkcí .....	6
2.2	Stručný popis tíhových polí .....	7
2.3	Tížnicové odchylky .....	10
2.4	Moloděnského přístup .....	11
2.5	Globální geopotenciální modely .....	12
<b>3</b>	<b>Metody programu PRVAK .....</b>	<b>13</b>
3.1	Interpolace a aproximace .....	13
3.1.1	Interpolace .....	13
3.1.2	Aproximace .....	14
3.2	Triangulace sítě bodů .....	14
3.3	Astrogeodetická nivelace .....	15
3.4	Výpočet $f_nALF$ a jejich prvních derivací .....	16
<b>4</b>	<b>Program PRVAK .....</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Řešené lokality .....</b>	<b>18</b>
5.1	Profil VB – B – UH .....	18
5.2	Síť Dolní Morava .....	20
5.3	Síť AGNES .....	21
5.4	Shrnutí závěrů ze sítě DM a AGNES .....	21
<b>6</b>	<b>Diskuze a závěr .....</b>	<b>25</b>
	<b>Literatura .....</b>	<b>27</b>
	<b>Vědecké projekty související s dizertační prací .....</b>	<b>31</b>
	<b>Publikace související s dizertační prací .....</b>	<b>31</b>

# 1 Úvod

Kvazigeoid je v mnoha zemích referenční plochou pro národní výškové systémy. V zájmu národních geodetických institucí je, aby tuto referenční plochu znaly na území svého státu co nejlépe. Určením modelu geoidu resp. kvazigeoidu (v této práci se bude hovořit o kvazigeoidu) o vysoké přesnosti a rozlišení se tudíž zabývá mnoho studií. V posledních desetiletích, s rozvojem výpočetní techniky a její schopnosti zpracovávat rychle velké objemy dat, lze snadno používat pokročilé metody výpočtu a dosahovat tak při výpočtech modelů kvazigeoidu přesnosti v řádech cm až mm.

Kvazigeoid je obecně popisován odchylkami (výškami) od zvolené referenční plochy, tou je zpravidla referenční elipsoid. Odchylky od globálního referenčního elipsoidu (např. GRS80) jsou přibližně v rozmezí -107 m až +85 m. Kvazigeoid není obecně ekvipotenciální plochou, i když na oceánech je totožný se střední hladinou moří. Na jeho tvar má primárně vliv zploštění Země a dále rozložení hmot pod povrchem Země. Kvazigeoid je vyjádřením tíhového potenciálu Země. Ten je součtem gravitačního a odstředivého potenciálu. Odstředivý potenciál lze vyjádřit jednoduchou analytickou funkcí. Obtížněji vyjádřitelný je gravitační potenciál. Ten lze vně Země vyjádřit rozvojem do řady harmonických sférických funkcí. Dlouhovlnné periody zvlnění tíhového pole resp. kvazigeoidu vycházejí z rozložení hmot v hlubším nitru Země. Krátkovlnné periody jsou buzeny rozložením hustoty hmoty v zemské kůře (Forsberg 1984). Změny v tíhovém poli Země o dlouhých periodách lze dobře sledovat a modelovat metodami družicové geodézie (např. mise GRACE a GOCE). Pro postihnutí vln o krátkých periodách, které jsou nejvíce ovlivněny topografií terénu, už musí být vykonáno měření blízko povrchu nebo na povrchu Země. V dnešní době se pro modelování krátkých vln tíhového pole Země nejvíce prosazuje gravimetrická metoda (ať už pozemní nebo letecká). Lze ale využít i astronomických měření a topografických dat. Z těchto dat lze určovat rozdíl ve směru mezi normálou k referenčnímu elipsoidu a normálou (tížnicí) ke geoidu. Tento rozdíl se nazývá tížnicová odchylka.

Pro měření astronomicko-geodetických (astrogeodetických) tížnicových odchylek byl v této práci použit Mobilní automatizovaný astronomický systém (MAAS-1). Systémem MAAS-1 se určují astronomické souřadnice bodu, technologií globálních navigačních satelitních systémů (GNSS) se určují geodetické souřadnice bodu. Tížnicová odchylka je vypočtena jako rozdíl těchto souřadnic. Systém MAAS-1 určuje meridiánovou složku  $\xi$

a příčnou složku  $\eta$  astrogeodetických tížnicových odchylek. Astrogeodetické tížnicové odchylky lze využít pro nezávislou kontrolu gravimetrických dat, nebo v oblastech s horší kvalitou, nebo menší hustotou gravimetrických dat pro jejich doplnění, nebo nahrazení.

V rámci této doktorské práce vznikl software pro výpočty s astrogeodetickými tížnicovými odchylkami nazvaný PRogram pro Výpočet Astrogeodetického Kvazigeoidu (PRVAK). V rámci dizertační práce byla také vybudována experimentální síť Dolní Morava na jižní straně masivu Kralického Sněžníku. Dále byla testována možnost nahrazení gravimetrických tížnicových odchylek topografickými tížnicovými odchylkami ve třech testovacích lokalitách (profil Velká Bíteš - Brno - Uherské Hradiště, síť Dolní Morava a síť AGNES v Brně) a porovnány modely kvazigeoidu vypočtené kombinací astrogeodetických a topografických dat s referenčními modely.

## 1.1 Cíle práce

Cílem této dizertační práce bylo:

- vytvořit výpočetní program, který by byl schopen pracovat s přímo měřenými astrogeodetickými tížnicovými odchylkami a zjednodušit tak zpracování dat pro výpočet modelů kvazigeoidu,
- otestovat zda lze gravimetrická data nahradit topografickými a zhodnotit kvalitu a přesnost výsledných modelů porovnáním s referenčními modely.

## 2 Tíhové pole Země

### 2.1 Rozvoj tíhového potenciálu do řady sférických harmonických funkcí

Každé vesmírné těleso (pevné těleso) lze vyjádřit jako sumu hmotných bodů o hmotnosti  $m_n$ , které svou hmotností generují gravitační silové pole celého tělesa. Gravitační potenciál  $V$  takového tělesa se vypočte integrací přes celý jeho objem podle Newtonova integrálu

$$V = G \iiint_v \frac{dm}{l} = G \iiint_v \frac{\rho}{l} dv, \quad (2-1)$$

kde  $G$  je Newtonova gravitační konstanta,  $v$  je objem tělesa,  $dm$  je element hmotnosti tělesa,  $l$  je vzdálenost bodu, v němž je potenciál určován,  $\rho$  je hustota tělesa a  $dv$  je element objemu tělesa. Rovnice (2-1) předpokládá rovnoměrné rozložení hmot uvnitř tělesa.

Vně tělesa splňuje gravitační potenciál diferenciální rovnici

$$\Delta V = 0, \quad (2-2)$$

kde symbol  $\Delta$  se nazývá Laplaceův operátor. Rovnice (2-2) se nazývá Laplaceova rovnice a jejím řešením jsou harmonické funkce. Nejdůležitějšími harmonickými funkcemi, pro výpočet gravitačního potenciálu  $V$ , jsou sférické harmonické funkce. Důkaz, že gravitační potenciál lze vyjádřit jako sférickou harmonickou funkcí, je uveden např. v (Hofmann-Wellenhof a Moritz 2005) nebo (Burša 2004).

Řešení Laplaceovy rovnice pomocí sférických harmonických funkcí má tvar

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n [a_{n,m} P_{n,m}(\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{n,m} P_{n,m}(\cos \vartheta) \sin m\lambda] \quad (2-3)$$

a

$$V_e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n [a_{n,m} P_{n,m}(\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{n,m} P_{n,m}(\cos \vartheta) \sin m\lambda]. \quad (2-4)$$

Každá funkce, která je harmonická uvnitř dané sféry, může být rozšířena na funkci  $V_i$  a každá funkce, která je harmonická vně dané sféry, může být rozšířena na funkci  $V_e$ , což je například gravitační potenciál  $V$ .

## 2.2 Stručný popis tíhových polí

### Skutečné tíhové pole

Země svojí hmotou generuje gravitační pole s gravitačním potenciálem  $V$ . Svou rotací generuje odstředivou sílu, která je popisována odstředivým potenciálem  $Q$  (Huygens 1929)

$$Q = \frac{1}{2} p^2 \omega^2, \quad (2-5)$$

kde  $p$  je poloměr místní rovnoběžky a  $\omega$  je úhlová rychlost rotace Země. Součtem obou potenciálů získáme tíhový potenciál Země  $W$ ,

$$W = V + Q = G \iiint_v \frac{dM}{l} + \frac{1}{2} p^2 \omega^2, \quad (2-6)$$

kde  $dM$  označuje element hmotnosti Země. Tento vzorec popisuje skutečné tíhové pole Země. To vyhovuje zobecněné Poissonově rovnici

$$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2. \quad (2-7)$$

Gradientem skutečného tíhového pole je vektor  $\mathbf{g}$ . Plochy s konstantním geopotenciálem  $W$  se nazývají hladinové (ekvipotenciální) plochy. Z diferenciálu tíhového potenciálu  $W$

$$dW = \mathbf{g} * d\mathbf{x}, \quad (2-8)$$

kde  $d\mathbf{x} = [dx, dy, dz]'$ , vyplývá, že pokud  $dW = 0$ , tak směr vektoru  $\mathbf{g}$  je kolmý na ekvipotenciální plochu. \* je znak pro skalární součin. Souřadnice  $x, y, z$  jsou souřadnice pravoúhlého souřadnicového systému, který má počátek v těžišti Země, osa  $x$  prochází průsečíkem nultého poledníku a rovníku, osa  $z$  je totožná se střední osou rotace Země a osa  $y$  je doplněna tak, aby byl systém pravotočivý. Velikost vektoru  $\mathbf{g}$  se nazývá skutečná tíže a označuje se  $g$ .

Gravitační potenciál  $V$  Země lze rozvinout do podoby sférických harmonických funkcí

$$V = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n [C_{n,m}P_{n,m}(\cos \vartheta) \cos m\lambda + S_{n,m}P_{n,m}(\cos \vartheta) \sin m\lambda] \right\}, \quad (2-9)$$

kde  $GM$  je geocentrická gravitační konstanta Země,  $R$  poloměr rovníku Země a  $C_{n,m}$  a  $S_{n,m}$  jsou Stokesovy koeficienty stupně  $n$  a řádu  $m$ , v některé literatuře např. (Burša a Pěč 1988) jsou označovány jako parametry, kvůli své nestálosti v čase,  $r$  je geocentrický průvodič a  $P_{n,m}(\cos \vartheta)$  jsou přidružené Legendreovy funkce.

Pro popis skutečného tíhového pole Země, je vhodné zvolit některou ekvipotenciální plochu jako referenční a její tíhový potenciál označit jako  $W_0 = konst.$  Pokud takto definované těleso odpovídá střední hladině oceánů, nazývá se geoid (Listing 1872). Geoid lze použít jako náhradní těleso Země reprezentující střední hladinu světového oceánu protaženou pod kontinenty.

### Normální tíhové pole

Je zřejmé, že skutečné tíhové pole Země lze jen obtížně popsat, protože je závislé na rozložení hustoty hmot pod jejím povrchem, které nelze přesně zjistit a je nutné o něm vytvářet hypotézy. Pro praktické výpočty je skutečný tvar Země nahrazován jednoduše matematicky definovatelným tělesem, které se co nejvíce podobá geoidu. Tímto tělesem je rotační elipsoid. Pokud tento elipsoid má nějakou hmotnost a rotuje, tak generuje normální tíhové pole s normálním tíhovým potenciálem  $U$ . Takový elipsoid se nazývá hladinový elipsoid a jeho povrch je nulovou ekvipotenciální plochou normální tíže. Stejně jako u skutečného tíhového potenciálu je normální tíhový potenciál součtem normálního gravitačního potenciálu  $V_N$  a normálního odstředivého potenciálu  $G_N$ , vypočteného podle vztahu (2-5)

$$U = V_N + G_N. \quad (2-10)$$



Gradientem normálního tíhového pole je vektor normálního tíhového zrychlení  $\gamma$ , jehož velikost na povrchu elipsoidu je vypočtena podle Somigliana (1929) a je značena  $\gamma$ . Upravený vzorec pro numerické výpočty (Moritz 1980) má tuto podobu:

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (2-11)$$

kde  $k = \frac{b\gamma_p}{a\gamma_e} - 1$ ,  $a$  je hlavní poloosa elipsoidu,  $b$  je vedlejší poloosa elipsoidu,  $\gamma_e$  je normální tíhové zrychlení na rovníku a  $\gamma_p$  je normální tíhové zrychlení na pólu a  $e$  je první excentricita elipsoidu.

### Poruchové tíhové pole

Protože normální tíhové pole popisuje 99,9995 % skutečného tíhového pole Země (Jekeli 2015), tak v daném bodě  $P$  lze vypočítat rozdíl potenciálů těchto polí. Rozdíl mezi skutečným a normálním tíhovým potenciálem se nazývá poruchový potenciál  $T$ ,

$$T(P) = W(P) - U(P), \quad (2-12)$$

Rozdíl mezi vektorem  $g_0$  v bodě  $P$  na geoidu a vektorem  $\gamma_0$  v bodě  $Q$  na referenčním elipsoidu je nazván vektor anomálie tíže  $\Delta g$ . Velikost tohoto vektoru se nazývá anomálie tíže  $\Delta g$

$$\Delta g = g_0 - \gamma_0, \quad (2-13)$$

rozdíl v jejich směrech se nazývá astrogeodetická tížnicová odchylka  $\theta^{*1}$ .

Jelikož není možné měřit skutečné tíhové zrychlení na povrchu geoidu, tak se měření provádí na povrchu terénu v bodě  $P$ . V tomto bodě se měří skutečné tíhové zrychlení  $g_P$ , které je pro výpočty anomálií tíže redukováno na geoid. Podle zavedené redukce se rozlišuje více druhů tíhových anomálií. Nejčastěji používané jsou Fayovy tíhové anomálie a Bouguerovy tíhové anomálie.

Pokud je v bodě  $P$  na terénu známo pravé tíhové zrychlení  $g_P$  a současně normální tíhové zrychlení  $\gamma_P$ , lze vypočítat tíhovou poruchu  $\delta g_P$ .

---

<sup>1</sup> Astrogeodetické tížnicové odchylky jsou v dokumentu označovány \*.

Když je znám poruchový potenciál, lze vypočítat odlehlost geoidu  $N$ , od referenčního elipsoidu podle Brunsova teorému

$$N = \frac{T}{\gamma}. \quad (2-14)$$

### 2.3 Tížnicové odchytky

Tížnicovou odchytku  $\theta$  lze rozložit na dvě složky, meridiánovou  $\xi$  a příčnou (ve směru prvního vertikálu)  $\eta$ . Tížnicové odchytky lze určit různými způsoby, podle způsobu určení se dělí na astrogeodetické, gravimetrické, topografické nebo vypočtené z geopotenciálního modelu.

#### Astrogeodetické tížnicové odchytky

Již dle názvu je zřejmé, že k určení těchto tížnicových odchylek je potřeba znát astronomickou šířku  $\varphi^*$ , astronomickou délku  $\lambda^{*2}$ , geodetickou šířku  $\varphi$  a geodetickou délku  $\lambda^3$  v bodě  $P$  na povrchu Země. Složky astrogeodetické tížnicové odchytky lze vypočítat podle

$$\begin{aligned} \xi^* &= \varphi^* - \varphi, \\ \eta^* &= (\lambda^* - \lambda) \cos \varphi, \end{aligned} \quad (2-15)$$

těchto komponent lze vypočítat celkovou astrogeodetickou tížnicovou odchytku  $\theta^*$  a její směr (azimut) podle vztahu. Při znalosti azimutu  $\alpha$  spojnice dvou bodů se astrogeodetická tížnicová odchytky  $\varepsilon^*$  v azimutu  $\alpha$  vypočte podle

$$\varepsilon^* = \xi^* \cos \alpha + \eta^* \sin \alpha. \quad (2-16)$$

#### Topografické tížnicové odchytky

Topografická data, v podobě digitálních modelů reliéfu (DMR), jsou při modelování tíhového pole Země také využívána, protože poskytují informace o lokálních změnách v tíhovém poli Země (Forsberg a Tscherning 1981; Marti a Bürki 1997).

---

<sup>2</sup> Jako astronomické souřadnice  $\varphi^*$  a  $\lambda^*$  jsou označovány zeměpisné souřadnice vztahované k tížnici.

<sup>3</sup> Jako geodetické souřadnice  $\varphi$  a  $\lambda$  jsou označovány zeměpisné souřadnice vztahované k normále referenčního elipsoidu.

Terén v podobě DMR je vyjádřen pomocí základních geometrických těles, jako jsou pravoúhlé nebo zkosené kvádry. U těchto kvádrů lze podle např. Nagy (1966) nebo Heck a Seitz (2007) analyticky vyřešit jejich gravitační potenciál  $V$ .

Horizontální derivace  $V_x$  a  $V_y$  gravitačního potenciálu takového tělesa představují gravitační vlivy kvádrů na výpočetní bod  $P$  (Nagy a kol. 2000). Tyto vlivy se vypočtou, za předpokladu konstantní hustoty kvádrů  $\rho$ , podle (Nagy a kol. 2000, 2002)

$$V_x^{topo} = G\rho \left\| \left\| \left\| y \ln(z+r) + z \ln(y+r) - x \tan^{-1} \frac{yz}{xr} \right|_{x_1}^{x_2} \right|_{y_1}^{y_2} \right|_{z_1}^{z_2}, \quad (2-17)$$

$$V_y^{topo} = G\rho \left\| \left\| \left\| z \ln(x+r) + x \ln(z+r) - y \tan^{-1} \frac{zx}{yr} \right|_{x_1}^{x_2} \right|_{y_1}^{y_2} \right|_{z_1}^{z_2},$$

kde  $G$  je Newtonova gravitační konstanta,  $r$  je vzdálenost bodu  $(x, y, z)$  od počátku souřadnicového systému a  $x_i, y_i, z_i$  jsou souřadnice stěn hranolu vzhledem k počátku souřadnicového systému. Celý vliv topografie je získán součtem vlivů jednotlivých kvádrů a dělením normálním tíhovým zrychlením ve výpočetním bodě (Nagy a kol. 2000)

$$\xi^{topo} = \frac{\sum V_y^{topo}}{\gamma}, \quad (2-18)$$

$$\eta^{topo} = \frac{\sum V_x^{topo}}{\gamma}.$$

## 2.4 Moloděnského přístup

Výhodou přístupu, který publikoval Molodenskij a kol. (1962), je fakt, že pro určení výšky bodu není potřeba vycházet z hypotéz o rozložení hustoty hmot pod povrchem Země, jako je tomu u fyzikálních výšek. Moloděnského řešení sice není fyzikálním řešením skutečného tvaru Země, ale lze jej realizovat pouze z měření, provedeném na povrchu Země.

V bodě  $P$  na terénu je skutečný potenciál  $W(P)$  obecně různý od normálního potenciálu  $U(P)$ , ale na normále k referenčnímu elipsoidu, která prochází bodem  $P$  leží takový bod  $Q$ , který splňuje podmínku  $U(Q) = W(P)$ . Množina všech takových bodů tvoří plochu nazvanou teluroid, který je aproximací zemského povrchu (Krarup 1969). Teluroid

není hladinovou plochou, protože jeho povrch nemá konstantní hodnotu skutečného zemského tíhového potenciálu.

Moloděnskij nahradil ve vztahu (2–14) veličiny  $h$  a  $N$  za  $h_Q$  a  $\zeta$ .  $h_Q$  je normální výška bodu  $P$  a  $\zeta$  je výšková anomálie. Potom je elipsoidická výška vypočtena vztahem

$$H = h_Q + \zeta. \quad (2-19)$$

Dále lze upravit vztah (2–14) pro výpočet poruchového potenciálu na

$$\zeta = \frac{T(P)}{\gamma(Q)}, \quad (2-20)$$

kde  $T(P)$  je poruchový potenciál v bodě  $P$  a  $\gamma(Q)$  je normální tíže v bodě  $Q$  na teluroidu. Pro účely tohoto výpočtu lze zanedbat tížnicovou odchylku a ztotožnit tížnici s normálou. Pokud je výšková anomálie  $\zeta$  vynesena od referenčního elipsoidu, vznikne plocha, která se nazývá kvazigeoid. Kvazigeoid taktéž není hladinovou plochou.

## 2.5 Globální geopotenciální modely

Globálním geopotenciálním modelem (GGM) je nazván soubor Stokesových koeficientů  $C_{n,m}$  a  $S_{n,m}$ , kde  $n$  je stupeň a  $m$  je řád přidružených Legendreových funkcí  $P_{n,m}(\cos \psi)$ , kde  $\psi$  je redukovaná šířka (Burša 2004; Burša a kol. 2012). Vzorec (2–9) po plné normalizaci Stokesových koeficientů  $\bar{C}_{n,m}$ ,  $\bar{S}_{n,m}$  a přidružených Legendreových funkcí  $\bar{P}_{n,m}(t)$  lze zapsat dle (Torge a Müller 2012)

$$V = \frac{GM}{r} \left( \sum_{n=n_{min}}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n (\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\sin \psi) \right) \quad (2-21)$$

a poruchový potenciál

$$T = \frac{GM}{r} \sum_{n=n_{min}}^{n_{max}} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\sin \psi), \quad (2-22)$$

kde  $\Delta \bar{C}_{n,m}$  jsou sférické harmonické koeficienty opravené o normální pole.

### 3 Metody programu PRVAK

V následující kapitole budou popsány metody využití v programu PRVAK pro zpracování dat z měření a výpočet modelů kvazigeoidu.

#### 3.1 Interpolace a aproximace

Tyto matematické metody se obecně zabývají hledáním funkce  $g(x)$ , která vhodně nahrazuje neznámou funkci  $f(x)$ . Zde bude popsán případ, kdy je funkce  $f(x)$  zadána tabulkou, protože s takto zadanou funkcí pracuje program PRVAK.

##### 3.1.1 Interpolace

U interpolace je vyžadováno splnění následující podmínky

$$g(x)_i = f(x)_i = y_i. \quad (3-1)$$

Z této podmínky vyplývá cíl této metody, tedy nalézt takovou aproximační funkci  $g(x)$ , aby se funkční hodnota  $y_i$  v uzlových bodech shodovala s původní funkcí  $f(x)$ .

##### Lineární interpolace

Jedná se o nejjednodušší interpolační metodu. Funkce  $f(x)$  je mezi uzlovými body aproximována úsečkami. Hledaná hodnota  $x$  je vypočtena podle vztahu

$$g(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i). \quad (3-2)$$

Tento vztah platí za podmínky, že bod  $x \in \langle x_i; x_{i+1} \rangle$ .

##### Polynomická interpolace

V tomto případě je hledaná interpolační funkce  $g(x)$  polynomem ve tvaru

$$g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad (3-3)$$

kde  $a_i$  jsou koeficienty polynomu. Takovému polynomu je kladena podmínka, aby procházel  $n + 1$  zadanými body. Pokud je těmito body proložen polynom o stupni  $n$  a do podmínky (3-1) je dosazena obecná rovnice polynomu (3-3), vznikne soustava rovnic, která má právě jedno řešení.

### 3.1.2 Aproximace

Při aproximaci bodů zadaných tabulkou, kterých je  $n$ , je prokládán aproximační polynom stupně  $m$ . Stupeň polynomu bývá ve většině případů výrazně nižší než je počet bodů, kterými je polynom prokládán a má tvar

$$g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m = \sum_{j=0}^m a_jx^j. \quad (3-4)$$

Na tento polynom je kladena podmínka metody nejmenších čtverců. Tedy  $E = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \min$ , kde  $E$  je aproximační chyba.

### 3.2 Triangulace sítě bodů

Cílem triangulace je z množiny bodů vytvořit trojúhelníkovou síť. Program PRVAK provádí triangulaci sítě v rovině, protože jak je prokázáno v (Jurčík 2012), výšková optimalizace triangulace bude mít na výsledný výpočet modelu kvazigeoidu zanedbatelný vliv. Obecně triangulace dané množiny bodů nemá jednoznačné řešení, proto je hledána optimální triangulace. Triangulace je dle (Bayer) definována takto:

Triangulace  $\mathcal{T}$  nad množinou bodů  $P$  představuje takové planární rozdělení, které tvoří soubor  $m$  trojúhelníků  $t = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  a hran tak, aby platilo:

- Libovolné dva trojúhelníky  $t_i, t_j \in \mathcal{T}, (i \neq j)$ , mají společnou nejvýše jednu hranu.
- Sjednocení všech trojúhelníků  $t \in \mathcal{T}$  tvoří obal  $\mathcal{H}(P)$ .
- Uvnitř žádného trojúhelníku neleží žádný další bod z množiny  $P$ .

V geodézii se nejvíce uplatňuje Delaunayho triangulace  $\mathcal{DT}$ . Její princip je v generování trojúhelníků pomocí Thaletovy věty tak, aby v kružnici opsané třem bodům z množiny  $P$  neležel žádný jiný bod této množiny (de Berg a kol. 2000).

#### Obal sítě

Jsou rozlišovány pojmy obecný a konvexní obal sítě. Dle (Surynková) je konvexní obal množiny bodů  $P$  definován jako nejmenší konvexní množina, která obsahuje všechny body množiny  $P$ . Konvexní množina je taková množina, ve které když jsou definovány dva libovolné body, tak jejich spojnice leží v této množině. Obecný obal množiny  $P$  je libovolný

uzavřený polygon, který obklopuje množinu  $P$  a žádný bod této množiny neleží vně tohoto polygonu.

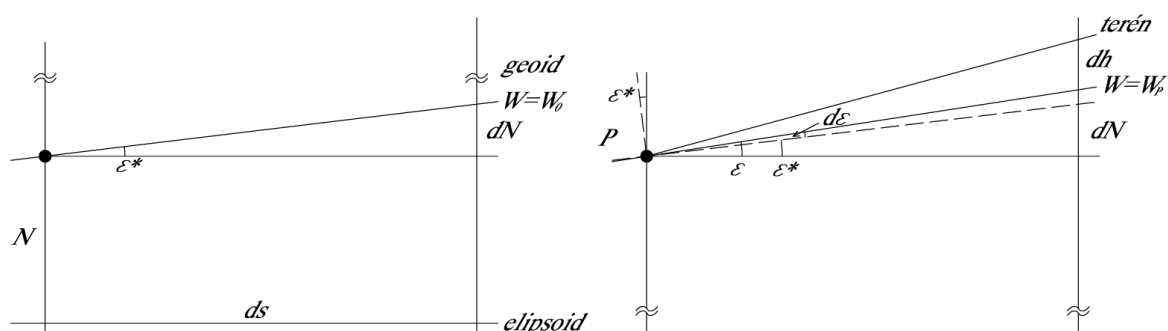
### 3.3 Astrogeodetická nivelace

Astrogeodetická nivelace je metoda pro určení převýšení  $dN$  mezi dvěma body na geoidu, kterou popsal Helmert (1880). Moloděnskij tuto metodu dále rozvedl s kolegy ve své práci Molodenskij a kol. (1962) a modifikovali ji pro výpočty na kvazigeoidu.

Z Obr. 1 a) je dobře patrný princip metody. Jedná se o integraci astrogeodetické tížnicové odchylky  $\varepsilon_0^*$  na geoidu podél spojnice počátečního a koncového bodu podle vztahu

$$dN = - \int_A^B \varepsilon_0^* ds. \quad (3-5)$$

Protože zemský povrch není hladinovou plochou, je potřeba při astrogeodetické nivelaci na kvazigeoidu přičíst gravimetrickou korekci, tak jak je zobrazeno na Obr. 1 b).



Obr. 1 a) Astrogeodetická nivelace podle Helmerta, b) Astrogeodetická nivelace podle Moloděnského,  $\varepsilon_0^*$  je astrogeodetická tížnicová odchylka dle Helmerta,  $\varepsilon^*$  je astrogeodetická tížnicová odchylka dle Moloděnského,  $d\varepsilon^*$  je jejich rozdíl, upraveno (Hofmann-Wellenhof a Moritz 2005)

Odpovídající vztah pro výpočet na kvazigeoidu je

$$d\zeta = \frac{\delta\zeta}{\delta s} ds + \frac{\delta\zeta}{\delta h} dh, \quad (3-6)$$

kde  $d\zeta$  je element výškové anomálie,  $ds$  je element délky spojnice počátečního a koncového bodu a  $dh$  je element výšky.

Pokud není dodržena podmínka lineární změny tížnicové odchylky mezi počátečním a koncovým bodem spojnice, tak užití metody vede k méně přesným výsledkům. Tato nelineární změna může být zapříčiněna změnou hustoty hmot mezi kvazigeoidem a terénem.

Tento problém lze řešit zvýšením hustoty astrogeodetických bodů, nebo dodáním dalších dat do výpočtu ze širšího okolí spojnice bodů a použitím astrogeodetické nivelace s interpolací.

### **Astrogeodetická nivelace s interpolací**

Protože určování astrogeodetických tížnicových odchylek je časově náročné a ekonomicky nákladné, je v práci (Molodenskij a kol. 1962) navržena jejich interpolace pomocí gravimetrických tížnicových odchylek. Pro tuto interpolaci lze využít i jiných tížnicových odchylek např. topografických. Ty ve svých pracích použili Heitz (1968), Forsberg a Tscherning (1981), případně Hirt a Flury (2008) a jako interpolační metodu použili kolokaci. Elmiger (1969) použil pro vyhlazení tížnicových odchylek polynom.

### **3.4 Výpočet fnALF a jejich prvních derivací**

Výpočet fnALF<sup>4</sup>  $\bar{P}_{n,m}(t)$  je problém pro vyšší stupně  $n$  a řády  $m$ . Např. pro  $m = 2700$  bude rozsah hodnot čísla  $\bar{P}_{n,m}(t)$  přibližně v intervalu od  $-1 * 10^{5000}$  do  $1 * 10^{5000}$  (Holmes a Featherstone 2002). Skriptovací prostředí MATLAB®, ve kterém je program PRVAK napsán, podporuje datový formát double precision u čísel s plovoucí desetinnou čárkou. Nejmenší a největší hodnota datového formátu double precision je přibližně  $-1 * 10^{308}$  respektive  $1 * 10^{308}$ . Pro výpočet koeficientů fnALF je použita modifikovaná dopředná sloupcová metoda. Standardní forma této výpočetní metody je uvedena např. v práci (Colombo 1981). Ta se numericky nestabilní stává přibližně při  $m > 1900$  a při  $\psi > 70^\circ$  jižní nebo severní šířky. Proto Libbrecht (1985) standardní metodu modifikoval tak, že sektoriální členy podělil  $u^m$ ,  $u = \sin \psi$ . Holmes a Featherstone (2002) zavedli ještě globální měřítkový faktor  $10^{-280}$ , který zaručuje, že koeficienty fnALF nepřekročí hranice double precision. Globálním měřítkovým faktorem jsou vynásobeny všechny sektoriální koeficienty a ten se při rekurzi lineárně přenesse na všechny koeficienty. Po výpočtu koeficientů fnALF nebo jejich derivací a po jejich sumaci při výpočtu harmonických sférických funkcí jsou výsledné sumy vynásobeny převrácenou hodnotou globálního měřítkového faktoru  $10^{280}$ . Tato operace zajistí numerickou stabilitu výpočtu přibližně do  $m = 2700$ .

---

<sup>4</sup> Zkratka je převzata z anglického fully normalized associated Legendre functions.



## 4 Program PRVAK

V rámci této dizertační práce vznikl výpočetní program PRVAK. Program slouží pro výpočet modelů kvazigeoidu pomocí metody astrogeodetické nivelace z měřených astrogeodetických tížnicových odchylek. Lze s ním vypočítat profily na kvazigeoidu i plošný model kvazigeoidu.

Zdrojový kód včetně grafického uživatelského rozhraní (GUI) je napsán v programovém prostředí MATLAB® (MathWorks 1994). Využívá standardních balíků MATLAB® funkcí, rozšíření Mapping Toolbox™ a dvou funkcí vytvořených komunitou uživatelů: transformace geodetických souřadnic do souřadnic UTM (Palacios 2006) a progress bar pro funkci parfor (Jeremy 2011). Každý modul má vlastní GUI, které je přístupné z hlavního rozcestníku a disponuje aplikací HELP, ve které je vysvětlena funkčnost modulu. Výpočty se realizují na referenčních elipsoidech GRS80 a WGS84.

Program PRVAK má tyto moduly:

- Konverze vstupních dat 1 (DEG),
- Konverze vstupních dat 2 (ISG),
- Výpočet astro  $TO^5$  na známých bodech,
- Triangulace sítě,
- Grid interpolace,
- Astrogeodetická nivelace,
- Vyrovnání měření,
- Interpolace mezilehlých bodů,
- Topografické tížnicové odchylky,
- Globální geopotenciální modely,
- Interpolace astronomických tížnicových odchylek,
- Tisk obrázku.

---

<sup>5</sup> Program PRVAK používá pro tížnicové odchylky zkratku TO.

## 5 Řešené lokality

V této kapitole budou popsány testovací lokality, měřické práce, které byly v lokalitách vykonány, výsledky výpočtů a testování možnosti nahrazení gravimetrických tížnicových odchylek topografickými. První testovací lokalitou je profil podél nivelačních pořadů I. řádu KO, KP a LP Velká Bíteš – Brno – Uherské Hradiště (profil VB – B – UH). Druhou lokalitou je síť Dolní Morava a třetí lokalitou je Astronomicko-GNSS-nivelační experimentální síť (AGNES) v Brně.

### 5.1 Profil VB – B – UH

Na profilu byla k dispozici tato převzatá data:

- astrogeodetické tížnicové odchylky na třiceti bodech, které byly měřeny v rámci společného projektu Výzkumného ústavu geodetického, topografického a kartografického (VÚGTK) a Vysokého učení technického v Brně v roce 2011 (Kostecký a kol. 2012), střední chyba jejich určení je podle (Machotka 2013) 0,30", průměrná vzdálenost mezi astrogeodetickými body je přibližně 3,5 km a jsou umístěny v blízkosti nivelačních bodů I. řádu,
- na každou spojnici astrogeodetických bodů byly doplněny mezilehlé body, tak aby spojnici rovnoměrně rozdělily na dvacet úseků. Na všech bodech profilu byly vypočteny gravimetrické tížnicové odchylky kombinací modelu EGM2008 a integrací reziduálních pozemních tíhových anomálií vztažených k zemskému povrchu, numerickým řešením Vening Meineszových vzorců v integrační oblasti 0 – 5' (Kostecký a kol. 2011), jejich střední chyba je v (Machotka 2013) odhadnuta na 0,30",
- pro porovnání byl použit Podrobný model kvazigeoidu QGZÚ-2013 (ČÚZK 2013), gravimetrický kvazigeoid (Kostecký a kol. 2011) a data z GNSS/nivelace, která byla provedena na vybraných bodech profilu mezi roky 1999 – 2001 (Kostecký a kol. 2002).

Dalšími daty, využitými do výpočtu, byly tížnicové odchylky vypočtené pomocí programu PRVAK z geopotenciálního modelu EGM2008 (Pavlis a kol. 2008) a z DMR GMTED2010<sup>6</sup> (Danielson a Gesch 2011).

---

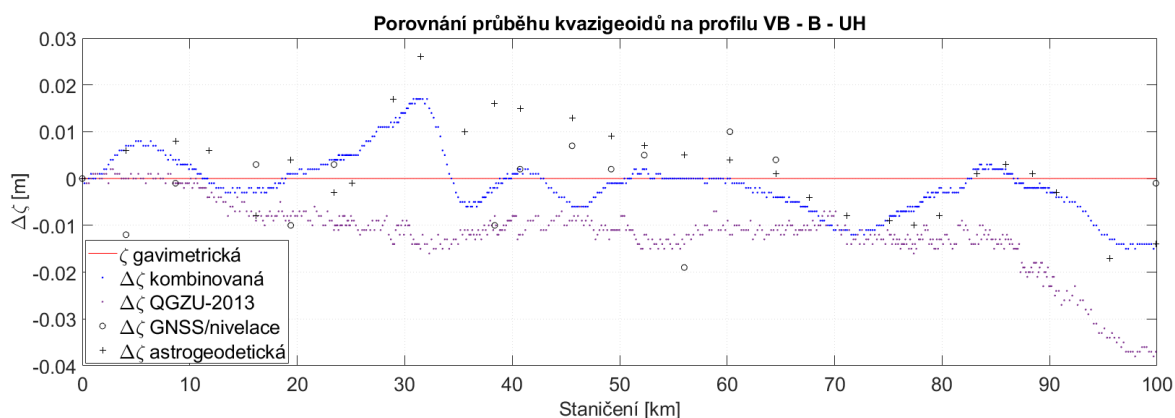
<sup>6</sup> Global multi-resolution terrain elevation data 2010.

## Shrnutí závěrů z profilu VB – B – UH

V rámci této lokality byly vypočteny kombinované tížnicové odchylky kombinací geopotenciálního modelu EGM2008 a DMR GMTED2010. Ty byly porovnány s gravimetrickými a astrogeodetickými tížnicovými odchylkami, viz Tab. 1. Z porovnání vychází, že je větší shoda mezi gravimetrickými a astrogeodetickými tížnicovými odchylkami, než mezi gravimetrickými a kombinovanými. Po vypočtení modelu kvazigeoidu na profilu metodou astrotopografické nivelace za využití kombinovaných tížnicových odchylek a srovnáním s referenčním gravimetrickým modelem, Obr. 2, se jeví tento model stejně přesný jako model QGZÚ2013, u kterého je udávána střední chyba výškové anomálie ve vnitrozemí 1 cm.

Tab. 1 Porovnání složek kombinovaných tížnicových odchylek

	gravimetrické vs. kombinované		gravimetrické vs. astrogeodetické	
	$\Delta\xi["]$	$\Delta\eta["]$	$\Delta\xi["]$	$\Delta\eta["]$
Min	-1,13	2,80	-0,45	-0,62
Max	1,24	1,41	0,59	0,21
Průměr	-0,31	-0,04	0,07	-0,08
Střední chyba	0,53	0,69	0,28	0,23



Obr. 2 Porovnání průběhu kombinovaného kvazigeoidu na profilu VB – B – UH, jako vztažná plocha byl zvolen gravimetrický model kvazigeoidu, (autor)

Střední chyba rozdílů mezi kombinovaným modelem a QGZÚ2013 je 13 mm, z čehož lze usuzovat, že kombinované řešení se lépe přimyká ke gravimetrickému modelu než k QGZÚ2013. Střední chyba diferencí kombinovaného modelu a GNSS/nivelace je 10 mm. Elipsoidické výšky bodů pro metodu GNSS/nivelace byly určeny třemi hodinu a půl trvajícimi observacemi. Střední chyba GNSS/nivelace je na základě toho odhadnuta v rozmezí 5–10 mm. Tento údaj dobře koresponduje se střední chybou rozdílů s porovnáním s kombinovaným řešením. Dosažené hodnoty jsou uvedeny v Tab. 2.

Tab. 2 Porovnání různých modelů kvazigeoidu s gravimetrickým řešením na profilu VB – B – UH

	Kombinovaný $\Delta\zeta$ [m]	QGZÚ-2013 $\Delta\zeta$ [m]	GNSS/nivelace $\Delta\zeta$ [m]	Astrogeodetický $\Delta\zeta$ [m]
Min	-0,013	-0,018	-0,012	-0,010
Max	0,017	0,010	0,024	0,024
Průměr	0,005	-0,006	0,005	0,008
Střední chyba	0,008	0,008	0,011	0,013

## 5.2 Sít' Dolní Morava

Lokalita Dolní Morava byla vybrána pro svůj horský charakter (v měřítku ČR) a dostupnost velkého množství využitelných dat z této lokality. Tato data pochází z experimentální sítě Sněžník (Cacoň a kol. 1996; Švábenský a Weigel 2009), ve které byla provedena GNSS měření a z terénních cvičení Ústavu geodézie, v rámci kterých jsou prováděna přesná nivelační měření. V rámci těchto cvičení byla provedena přesná nivelace i v nadmořských výškách nad 1000 m n. m. Jsou zde k dispozici Bouguerovy anomálie z gravimetrického mapování 1:50 000.

Pro účely této práce zde byly vypočteny hodnoty výškových anomálií z Podrobného kvazigeoidu QGZU-2013, který byl pro tuto oblast použit jako referenční model. Na sít' Sněžník, ve které byla první měření provedena v roce 1992, navazuje sít' Dolní Morava (sít' DM). Ta byla budována v letech 2014 – 2017. Rozkládá se v okolí obce Dolní Morava v jižní části masivu Kralického Sněžníku a její přibližná rozloha je 6 km<sup>2</sup>. V síti byly určeny složky astrogeodetických tížnicových odchylek na 30 bodech. Astronomické souřadnice bodů byly určeny systémem MAAS-1 metodou páru stejné výšky (Machotka 2005). Průběh astronomické observace a systém MAAS-1 je popsán v (Machotka 2013).

Autor práce se měřických prací v síti DM účastnil v letech 2014 a 2017. Dále na měřických pracích spolupracovali doc. Ing. Radovan Machotka Ph.D. (roky 2015 a 2016), Ing. Tomáš Volařík Ph.D. (rok 2014), Ing. Jakub Nosek (rok 2017) a v rámci svých magisterských prací Ing. Kateřina Petrová (Petrová 2017) (rok 2016) a Bc. Tadeáš Černohous (nebylo publikováno) (rok 2015). Sít' DM byla vybudována v rámci projektů FAST-J-14-2375 a FAST-J-15-2863 (jichž byl autor hlavním řešitelem).

### 5.3 Sít' AGNES

Sít' AGNES je podrobně popsána v práci (Machotka 2013). Sít' se rozkládá v širším centru města Brna, její rozloha je přibližně 5 x 7 km a má 34 astrogeodetických bodů s určenými astrogeodetickými tížnicovými odchylkami systémem MAAS-1. Průměrná vzdálenost astrogeodetických bodů v síti je přibližně 1,3 km. V této síti byla k dispozici tato data:

- astrogeodetické tížnicové odchylky podle Moloděnského na bodech sítě,
- Bouguerovy anomálie z gravimetrického mapování 1:50 000,
- gravimetrické tížnicové odchylky, určené kombinací gravimetrických (výše uvedené Bouguerovy anomálie) a topografických dat (DMR vytvořený ze ZABAGED) a geopotenciálního modelu EGM2008, které určil Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický, v. v. i., Zdíby, pracoviště Geodetická observatoř Pecný (Kostecký a kol. 2011),
- hodnoty výškové anomálie  $\zeta$  z Podrobného kvazigeoidu QGZU-2013,
- GNSS/nivelace na 22 bodech sítě (Kuruc 2013),
- DMR vytvořený ze Základní báze geografických dat ČR.

### 5.4 Shrnutí závěrů ze sítí DM a AGNES

#### Shrnutí závěrů ze sítě DM

Sít' DM byla vyrovnána dvěma způsoby. Poprvé jako čistě astrogeodetické řešení a podruhé jako astrotopografické řešení. Při astrotopografické variantě řešení s osmi vloženými body na spojnici bylo dosaženo přibližně 50% zlepšení vnitřní přesnosti oproti čistě astrogeodetické metodě, viz Tab. 3. S přihlédnutím k testování vnější přesnosti, kdy bylo dosaženo stejných výsledků u astrotopografické varianty s jedním nebo s osmi vloženými body na spojnici byla nakonec pro zpracování vybrána varianta s jedním vloženým bodem. U té bylo zlepšení vnitřní přesnosti oproti čistě astrogeodetické metodě přibližně o 40 %. Zlepšení ve vnější přesnosti při použití astrotopografické nivelace se na základě dostupných dat nepodařilo prokázat, Tab. 4.

Tab. 3 Porovnání průměrných vnitřních středních chyb výškových anomálií v síti DM

ČB	astro $m_{\zeta}$ [mm]	kombi <sup>7</sup> 1 $m_{\zeta}$ [mm]	kombi 2 $m_{\zeta}$ [mm]	kombi 4 $m_{\zeta}$ [mm]	kombi 6 $m_{\zeta}$ [mm]	kombi 8 $m_{\zeta}$ [mm]
Průměrná střední chyba	1,9	1,2	1,2	1,1	1,1	1,0

Tab. 4 Porovnání výsledných modelů kvazigeoidu v síti DM s Podrobným kvazigeoidem QGZÚ-2013

ČB	QGZÚ - astro $\Delta\zeta$ [m]	QGZÚ – kombi 1 $\Delta\zeta$ [m]	astro - kombi 1 $\Delta\zeta$ [m]
Průměrná chyba	0,007	0,006	0,001
Střední chyba rozdílů	0,008	0,007	0,001

### Shrnutí závěrů ze sítě AGNES

Při vyrovnání sítě AGNES bylo postupováno obdobě jako u sítě DM. Bylo vypočteno čistě astrogeodetické řešení a pak astrotopografické řešení. U astrotopografického řešení byla vzdálenost mezi body volena tak, aby byla v průměru stejná jako u sítě DM, z toho důvodu byly použity čtyři mezilehlé body. V relativní přesnosti byly výsledky vyrovnání s interpolací o 25 % lepší než výsledky vyrovnání bez interpolace. V porovnání s gravimetrickými tížnicovými odchylkami se nepodařilo prokázat přínos vyrovnání oproti měřeným tížnicovým odchylkám a u vyrovnání s interpolací bylo pozorováno zhoršení průměrných středních chyb rozdílů složek tížnicových odchylek, Tab. 5. Porovnání vypočtených modelů kvazigeoidu s gravimetrickým kvazigeoidem, Tab. 6, a s GNSS/nivelací, Tab. 7, také neprokázalo snížení hodnoty střední chyby rozdílů u vyrovnání s interpolací oproti vyrovnání bez interpolace.

Tab. 5 Průměrné střední chyby diferencí mezi gravimetrickými – měřenými, vyrovnanými a kombinovanými tížnicovými odchylkami v síti AGNES

	Gravimetrické -					
	Měřené		Vyrovnané		Kombinované 4	
	$m_{\Delta\zeta}$ ["]	$m_{\Delta\eta}$ ["]	$m_{\Delta\zeta}$ ["]	$m_{\Delta\eta}$ ["]	$m_{\Delta\zeta}$ ["]	$m_{\Delta\eta}$ ["]
Střední chyba rozdílů	0,33	0,34	0,27	0,35	0,38	0,34

<sup>7</sup> Pro účely Tab. 3 a Tab. 4 v této podkapitole jsou použity tyto zkratky: astrogeodetický kvazigeoid (astro), kombinovaný kvazigeoid s  $n$  vloženými body (kombi  $n$ ).

Tab. 6 Střední chyby rozdílů vyrovnaných výškových anomálií s QGZÚ-2013

	QGZU-2013 -		
	Astrogeodetický model $m_{\Delta\zeta}$ [m]	Kombinovaný 4 model $m_{\Delta\zeta}$ [m]	GNSS/nivelace $m_{\Delta\zeta}$ [m]
Střední chyba rozdílů	0,002	0,002	0,020

Tab. 7 Průměrné střední chyby rozdílů vyrovnaných výškových anomálií s GNSS/nivelací

	GNSS/nivelace -	
	Astrogeodetický model $m_{\Delta\zeta}$ [m]	Kombinovaný 4 model $m_{\Delta\zeta}$ [m]
Střední chyba rozdílů	0,020	0,020

### Porovnání dosažených výsledků

Porovnáním aposteriorních středních chyb složek měřených astrogeodetických tížnicových odchylek v sítích DM a AGNES lze usoudit, že astrogeodetické tížnicové odchylky byly v obou sítích určeny se srovnatelnou přesností. Taktéž srovnatelné hodnoty průměrných středních chyb složek vyrovnaných tížnicových odchylek ukazují na obdobnou vnitřní přesnost obou sítí. Nižší hodnoty aposteriorních středních chyb měřených respektive střední chyby vyrovnaných složek tížnicových odchylek při použití astrotopografické nivelace dokazují vhodnost této metody pro modelaci průběhu kvazigeoidu.

Velké rozdíly byly zjištěny v porovnání vnější přesnosti při použití modelu QGZÚ-2013. V síti AGNES vykazuje astrogeodetický respektive astrotopografický model kvazigeoidu velmi dobrou shodu s tímto modelem. Tu lze vysvětlit zaprvé rovinatou povahou terénu v širším okolí sítě AGNES a zadruhé umístěním sítě AGNES ve vnitrozemí ČR, kde je odhadovaná střední chyba výškové anomálie u modelu QGZÚ-2013 1 cm. V horském terénu nebo příhraničních oblastech (do 10 km od státní hranice) připouští autoři QGZÚ-2013 úplnou střední chybu výškové anomálie až 3 cm. Do obou těchto kategorií spadá lokalita sítě DM. Tím lze vysvětlit čtyřnásobný nárůst průměrné chyby výškových anomálií u sítě DM oproti stejnému porovnání u sítě AGNES.

Další nezávislou metodou, se kterou byly výsledky porovnány, je GNSS/nivelace. Předpokládaná střední chyba výškové anomálie u GNSS/nivelace v sítích AGNES a DM je okolo 15-20 mm. Střední chyba rozdílů výškových anomálií v síti AGNES je 20 mm u astrogeodetické i astrotopografické metody. V síti DM je 16 mm u astrogeodetické metody respektive 17 mm u astrotopografické metody. Tyto střední chyby v podstatě odrážejí přesnost

GNSS/nivelace, takže na jejich základě nelze rozhodnout, která z výpočetních metod je přesnější.

Na základě výše uvedených skutečností, nelze přesně určit vnější přesnost vypočtených modelů kvazigeoidu v této práci, protože do značné míry odráží přesnost referenčních modelů. Vnější přesnost vypočtených modelů bude horší než jejich vnitřní přesnost, ale hodnoty vnější přesnosti budou reflektovat hodnoty vnitřní přesnosti a budou se k nim blížit. Pro rozhodnutí, jestli je metoda astrotopografické nivelace ve vnější přesnosti přesnější než čistě astrogeodetická nivelace, by bylo nutné mít k dispozici o řád přesnější referenční model kvazigeoidu, než je QGZÚ-2013.



## 6 Diskuze a závěr

Ze srovnání kombinovaných tížnicových odchylek s gravimetrickými a astrogeodetickými tížnicovými odchylkami na profilu VB – B – UH v kapitole 5.1 lze uvést, že jejich přesnost je na úrovni 0,6". To dobře koresponduje s výsledky práce (Hirt 2010). Významné rozdíly v hodnotách kombinovaných a gravimetrických tížnicových odchylek byly zjištěny v okolí staničení 30 km. V těchto místech je soutok řek Svatky a Svitavy. Možným vysvětlením by mohla být skoková změna hustoty podloží, se kterou zjednodušený matematický model, použitý v této práci, nepočítá. Toto by mohlo být předmětem dalšího výzkumu. Z výpočtu kvazigeoidu na profilu VB – B – UH z kombinovaných tížnicových odchylek je patrné, že se nejlépe přimyká ke gravimetrickému řešení (střední chyba diferencí výškových anomálií je 8 mm) od VÚGTK, který byl pro dané území speciálně vypočítán, proto byl vybrán jako referenční model. Střední chyba diferencí je téměř o 40 % nižší než v porovnání s Podrobným kvazigeoidem QGZU-2013 (střední chyba diferencí je 13 mm) a o 20 % nižší než v porovnání s GNSS/nivelací (střední chyba diferencí je 10 mm). Přesnost modelu QGZU-2013 je ve vnitrozemí udávána střední chybou výškové anomálie 1 cm a to naznačuje, že kombinovaný kvazigeoid na tomto profilu je přesnější než QGZU-2013. Střední chyba GNSS/nivelace je odhadnuta v rozmezí hodnot 5 – 10 mm. Přesnost kombinované metody lze vyjádřit jako 1 cm/100 km délky profilu, což odpovídá předpovědi v práci (Hirt a Flury 2008).

Další dva experimenty v této práci se týkají vyrovnání tížnicových odchylek v plošné síti pomocí podmínkového vyrovnání. Prvním bylo vybudování sítě DM na jižní straně Kralického Sněžníku v okolí obce Dolní Morava. Bylo zde postupně zřízeno třicet astrogeodetických bodů, na kterých byly určeny astrogeodetické tížnicové odchylky. Z těch byl vypočítán čistě astrogeodetický model kvazigeoidu a následně kombinovaný model kvazigeoidu v několika variantách kombinací astrogeodetických a topografických tížnicových odchylek. Výsledkem vyrovnání byly vyrovnané hodnoty tížnicových odchylek a jejich střední chyby a vyrovnané hodnoty výškových anomálií a jejich střední chyby. Střední chyby vyrovnaných tížnicových odchylek a střední chyby výškových anomálií byly porovnány mezi sebou. Z tohoto porovnání vyplývá, že přidáváním mezilehlých bodů na spojnice astrogeodetických bodů a následná interpolace astrogeodetických tížnicových odchylek pomocí topografických může v hornatém území zlepšit vnitřní přesnost modelu kvazigeoidu takřka o 50 %, u astrogeodetického řešení je střední průměrná chyba 1,9 mm,

u kombinovaného řešení s osmi vloženými body na spojnici astrogeodetických bodů 1,0 mm. Vypočtené modely kvazigeoidu byly porovnány s Podrobným kvazigeoidem QGZU-2013. Průměrná střední chyba u astrogeodetického řešení je 8 mm a u kombinovaného s jedním až osmi vloženými body na spojnici astrogeodetických bodů je 7 mm. To značí dobrou shodu, nicméně nelze prokázat výrazné zlepšení vnější přesnosti modelu při použití astrotopografické nivelace oproti astrogeodetické nivelaci.

Posledním experimentem bylo vyrovnání astrogeodetických tížnicových odchylek v síti AGNES, výpočet astrogeodetického modelu kvazigeoidu a následné zopakování postupu s kombinací tížnicových odchylek jako v síti DM a výpočet kombinovaného modelu kvazigeoidu. Vypočtené modely byly následně porovnány s QGZU-2013. I zde se projevilo zlepšení u středních chyb vyrovnaných tížnicových odchylek při použití astrotopografické nivelace oproti astrogeodetické nivelaci a to přibližně o 25 %. Obdobné to bylo i u středních chyb vyrovnaných výškových anomálií. Z porovnání s gravimetrickými tížnicovými odchylkami a s výškovými anomáliemi z QGZU-2013 a s GNSS/nivelací nelze přínos použití astrotopografické nivelace prokázat.

V rámci této dizertační práce vznikl výpočetní program PRVAK pro práci s astrogeodetickými tížnicovými odchylkami. Program primárně slouží pro výpočet profilů a modelů kvazigeoidu z měřených astrogeodetických tížnicových odchylek. Pomocí něj lze vypočítat topografické tížnicové odchylky a provádět syntézu globálních geopotenciálních modelů. Lze také s jeho pomocí vytvořit jednoduché vizualizace vypočtených modelů.

Na základě výsledků autora této práce, lze považovat za prokázané, že volně dostupná topografická data mohou částečně či plně nahradit data gravimetrická. A to zvláště v hornatých, nebo příhraničních oblastech, kde je obvykle nižší kvalita či homogenita gravimetrických dat. Dalších zajímavých výsledků by mohlo být dosaženo při použití např. kolokace nebo spektrální kombinace dat.

## Literatura

- Bayer, T. *Rovinné triangulace a jejich využití* [online]. Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie. Přírodovědecká fakulta UK. [cit. 14. 8. 2020] Dostupné z <<https://web.natur.cuni.cz/~bayertom/images/courses/Adk/adk5.pdf>>.
- Burša, M., 2004. *Geopotenciál. Teoretické základy a modely, Díl I.* Dobruška: Ministerstvo obrany ČR, Geografická služba AČR. 208 s. ISBN 80-7278-224-X.
- Burša, M. a Pěč, K., 1988. *Tíhové pole a dynamika Země.* Academia.
- Burša, M., Vátrt, V. a Vojtíšková, M., 2012. *Geopotenciál. Díl II. Modely a jejich využití v praxi.* Dobruška: Ministerstvo obrany ČR, Geografická služba AČR. 95 s. ISBN 978-8-260-2092-9.
- Cacoň, S., Weigel, J., Švábenský, O., Kontny, B. a Jamroz, O. 1996, Geodynamika Masywu Śnieżnika i ocszarów przyległych. V Masyw Śnieżnika - zmiany w środowisku przyrodniczym. Warszawa: Polska Agencja Ekologiczna, strany 57-70.
- Colombo, O.L. 1981, Numerical methods for harmonic analysis on the sphere. V Report No. 310. Columbus, Ohio: Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University.
- ČÚZK *Podrobný kvazigeoid QGZÚ-2013* [online]. 2013. [cit. 17. 9. 2020] Dostupné z <[https://geoportál.cuzk.cz/\(S\(inkw3xatgbduhirimblmdj55\)\)/default.aspx?mode=TeXtMeta&side=bodpole&metadataID=CZ-CUZK-QGZU&menu=275](https://geoportál.cuzk.cz/(S(inkw3xatgbduhirimblmdj55))/default.aspx?mode=TeXtMeta&side=bodpole&metadataID=CZ-CUZK-QGZU&menu=275)>.
- Danielson, J.J. a Gesch, D.B. Global multi-resolution terrain elevation data 2010 (GMTED2010). 2011.
- de Berg, M., Cheong, O., van Kreveld, M. a Overmars, M., 2000. *Computational Geometry: Algorithms and Applications.* Springer. ISBN 978-3-540-77974-2.
- Elmiger, A. *Studien über Berechnung von Lotabweichungen aus Massen, Interpolation von Lotabweichungen und Geoidbestimmung in der Schweiz.* Curich, 1969. 168 s. Dizertační práce. ETH Zürich. Kobold, F. a Schürer, M.
- Forsberg, R. A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling. Ohio State Univ Columbus Dept Of Geodetic Science and Surveying: 1984.
- Forsberg, R. a Tscherning, C.C. The use of height data in gravity field approximation by collocation. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 1981, 86(B9), s. 7843-7854. ISSN 2156-2202.
- Heck, B. a Seitz, K. A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. Journal of Geodesy, 2007, 81(2), s. 121-136. ISSN 0949-7714.

- Heitz, S., 1968. *Geoidbestimmung durch Interpolation nach kleinsten Quadraten aufgrund gemessener und interpolierter Lotabweichungen*. Verlag des Instituts für Angewandte Geodäsie.
- Helmert, F.R., 1880. *Die mathematischen und physikalischen theorieen der höheren geodäsie*. B. G. Teubner.
- Hirt, C. Prediction of vertical deflections from high-degree spherical harmonic synthesis and residual terrain model data. *Journal of Geodesy*, 2010, 84(3), s. 179-190. ISSN 0949-7714.
- Hirt, C. a Flury, J. Astronomical-topographic levelling using high-precision astrogeodetic vertical deflections and digital terrain model data. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(4-5), s. 231-248. ISSN 0949-7714.
- Hofmann-Wellenhof, B. a Moritz, H., 2005. *Physical Geodesy - second edition*. Wien: Springer Wien. 403 s. ISBN 978-3-211-33544-4.
- Holmes, S.A. a Featherstone, W.E. A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated Legendre functions. *Journal of Geodesy*, 2002, 76(5), s. 279-299. ISSN 0949-7714.
- Huygens, C. De vi centrifuga. *Œuvres Completes de Christiaan Huygens XVI*, 1929, s. 253–301 (The Hauge).
- Jekeli, C. Potential theory and the static gravity field of the Earth 2015, s. 11-42.
- Jeremy. Progress monitor (progress bar) that works with parfor. Verze 1.2.0.0. MATLAB Central File Exchange, 2011. [cit. 27. 8. 2018] Dostupné z <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32101-progress-monitor-progress-bar-that-works-with-parfor>
- Jurčík, J. *Užití astronomické nivelace pro vytváření modelů kvazigeoidu*. Brno, 2012. 75 s. Diplomová práce. VUT v Brně. Vedoucí práce Machotka, R.
- Kostecký, J., Kostecký, J.J., Pešek, I., Šimek, J., Švábenský, O., Weigel, J. a Zeman, A. Quasigeoids for the territory of the Czech Republic and their testing. *Reports on Geodesy*, 2002, (1/61), s. 47-52. ISSN 0867-3179.
- Kostecký, J., Machotka, R. a Šimek, J. Combination of heterogeneous geodetic data in detailed gravity field modelling. *EGUGA*, 2012, s. 8650.
- Kostecký, J., Novák, P. a Šimek, J. Technická zpráva: Výpočet gravimetrických tížnicových odchylek a výšek kvazigeoidu na bodech sítě AGNES. VÚGTK Zdíby: 2011.
- Krarup, T. A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. *Geod. Inst. Copenhagen*, 1969, 44, s.
- Kuruc, M. *Využití permanentních sítí GNSS pro určování výšek*. Brno, 2013. 102 s. Dizertační práce. Vysoké učení technické v Brně. Weigel, J.

- Libbrecht, K.G. Practical considerations for the generation of large-order spherical harmonics. *Solar Physics*, 1985/09/01 1985, 99(1), s. 371-373. ISSN 1573-093X.
- Listing, J.B., 1872. *Über unsere jetzige Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde: Aus den Nachrichten der K. Ges. der Wiss.* Dieterich.
- Machotka, R. Určování astronomických souřadnic-metoda párů stejné výšky (Determination of astronomical coordinates-method of couples of equal heights). *Geodetický a kartografický obzor*, 2005, 12, s. 258-264.
- Machotka, R. *Automatizace astronomického určování polohy*. Brno, 2013. 109 s. Habilitační práce. Vysoké učení technické v Brně.
- Marti, U. a Bürki, B., 1997. *Geoid der Schweiz 1997*. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Eidg. Technische Hochschule Zürich.
- MathWorks. MATLAB. Verze R2019b. 1994. [cit. 7. 9. 2020] Dostupné z <https://www.mathworks.com/help/matlab/index.html>
- Molodenskij, M.S., Jeremejev, B.F. a Jurkina, M.I., 1962. *Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1962. Přeloženo z: Metod izuchenyia vneshnego gravitatsionnogo polya i figury Zemli, 1960, Moskva.
- Moritz, H. Geodetic reference system 1980. *Journal of Geodesy*, 1980, 54(3), s. 395-405. ISSN 0949-7714.
- Nagy, D. The gravitational attraction of a right rectangular prism. *Geophysics*, 1966, 31(2), s. 362-371. ISSN 0016-8033.
- Nagy, D., Papp, G. a Benedek, J. The gravitational potential and its derivatives for the prism. *Journal of Geodesy*, Nov 2000, 74(7-8), s. 552-560. ISSN 0949-7714.
- Nagy, D., Papp, G. a Benedek, J. Erratum: corrections to: "The gravitational potential and its derivatives for the prism". *Journal of Geodesy*, Nov 2002, 76(8), s. 475-475. ISSN 0949-7714.
- Palacios, R. deg2utm. Verze 1.0.0.0. 2006. [cit. 22. 1. 2018] Dostupné z <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/10915-deg2utm>
- Pavlis, N.K., Holmes, S.A., Kenyon, S.C. a Factor, J.K. 2008. An Earth gravitational model degree 2160: EGM2008. In *Proceedings of the General Assembly of the European Geosciences Union*, Vienna, Austria, 13th-18th April 2008.
- Petrová, K. *Určování astronomických tížnicových odchylek přímým měřením*. Brno, 2017. 91 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně. Vedoucí práce Machotka, R.
- Somigliana, C. Teoria generale del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione. *MmSAI*, 1929, 4, s. 425. ISSN 0037-8720.

Surynková, P. *Přednáškové texty z Počítačové geometrie* [online]. Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie. Přírodovědecká fakulta UK. [cit. 15. 8. 2020] Dostupné z <[http://surynkova.info/dokumenty/mff/PG/Prednasky/prednaska\\_8.pdf](http://surynkova.info/dokumenty/mff/PG/Prednasky/prednaska_8.pdf)>.

Švábenský, O. a Weigel, J. Výzkumná geodetická síť "Sněžník". *Geodetický a kartografický obzor*, 2009, 55/97(4), s. 6.

Torge, W. a Müller, J., 2012. *Geodesy - 4th Edition*. Göttingen, Germany: Walter De Gruyter. 433 s. ISBN 978-3-11-020718-7.

## Vědecké projekty související s dizertační prací

Název projektu: *Výpočet kvazigeoidu na území masivu Kralický Sněžník z geodeticko-astronomických měření*

Juniorský projekt AST-J-14-2375 Vysokoškolského specifického výzkumu pro rok 2014

Název projektu: *Určování nadmořských výšek v horských oblastech*

Juniorský projekt FAST-J-15-2863 Vysokoškolského specifického výzkumu pro rok 2015

## Publikace související s dizertační prací

Kratochvíl, R. Výpočet kvazigeoidu na profilu Velká Bíteš - Uherské Hradiště. V *Juniorstav 2014: 16. odborná konference doktorského studia*. Brno, 2014, s. 5.

Kratochvíl, R. Program for the interpolation of the astrogeodetic deflections of the vertical. V *XXXIV Sejmik SNK*. Wrocław, 2017.

Kratochvíl, R. Výpočet kvazigeoidu z různorodých dat. V *Juniorstav 2020: 22. odborná konference doktorského studia*. Brno, 2020, s. 6.

Kratochvíl, R., Buday, M. a Machotka, R. Užití topografických tížnicových odchylek pro výpočet kvazigeoidu. V *GEODÉZIA, KARTOGRAFIA A GEOINFORMATIKA 2019*. Košice: ÚGKaGIS, FBERG TuKE, 2019, s. 7.

Kratochvíl, R., Machotka, R. a Buday, M. Use of the topographic deflections of the vertical for computation of the quasigeoid. V *Advances and Trends in Geodesy, Cartography and Geoinformatics II: Proceedings of the 11th International Scientific and Professional Conference on Geodesy, Cartography and Geoinformatics (GCG 2019), September 10-13, 2019, Demänovská Dolina, Nízke Tatry, Slovensko*. CRC Press, 2020, s. 123.

Kratochvíl, R., Machotka, R., Volařík, T., Kuruc, M. a Jurčík, J. Porovnání profilů kvazigeoidu určených různými metodami. *Geodetický a kartografický obzor*, 2016, 62(6), s. 8. ISSN 1805-7446.

Kratochvíl, R. a Volařík, T. Mobilní automatizovaný astronomický systém jako alternativa nivelaci v horském prostředí. V *Juniorstav 2015: 17. odborná konference doktorského studia*. Brno, 2015, s. 7.

Kratochvíl, R., Volařík, T. a Buday, M. Interpolace astrogeodetických tížnicových odchylek pomocí topografických tížnicových odchylek. V *Juniorstav 2017: 19. odborná konference doktorského studia*. Brno, 2017, s. 7.

Machotka, R., Kratochvíl, R. a Kuruc, M. Precise astronomical positioning using motorized total station. V *EUREF 2017 Symposium*. Wrocław, 2017, s. 1.

Machotka, R., Kratochvíl, R., Kuruc, M., Volařík, T. a Jurčík, J. Mobilní automatický astronomický systém - efektivní nástroj pro výpočet astronomicko geodetických tížnicových odchylek. V *Stowarzyszenie Geodetów Polskich*. Berlín, 2014, s. 1.

## **Abstrakt**

Cílem této práce bylo zhodnotit, zda je možné nahradit gravimetrická data topografickými při výpočtu modelů kvazigeoidu pomocí astrogeodetické nivelace. Gravimetrická data nejsou ve vybraných oblastech dostatečně kvalitní, proto by jejich nahrazení přineslo v praxi zvýšení přesnosti získaných modelů.

Pro účely této práce byl vytvořen výpočetní program PRVAK, který usnadňuje výpočet modelu kvazigeoidu astrogeodetickou nivelací. Modely kvazigeoidu lze počítat na profilu nebo v ploše podmínkovým vyrovnáním z měřených astrogeodetických tížnicových odchylek nebo jejich kombinací s topografickými tížnicovými odchylkami. Dále byla vybudována síť Dolní Morava, kde na 34 bodech byly určeny astrogeodetické tížnicové odchylky. Porovnání dat bylo testováno na třech lokalitách, kde byly vypočteny modely kvazigeoidu astrogeodetickou a astrotopografickou nivelací a porovnány s referenčními daty.

Na profilu Velká Bíteš – Brno – Uherské Hradiště byly vypočtené modely porovnávány s gravimetrickým modelem vypočteným Výzkumným ústavem geodetickým, topografickým a kartografickým. Střední chyba diferencí mezi referenčním modelem a modely vypočtenými v této práci se při použití astrotopografické nivelace snížila přibližně o 38 % oproti astrogeodetické nivelaci.

U plošných modelů kvazigeoidu v lokalitách Dolní Morava a Brno bylo možné porovnat vnitřní přesnost těchto modelů. Při použití astrotopografické nivelace bylo zjištěno snížení hodnot středních chyb vyrovnaných výškových anomálií o 40 % v lokalitě Dolní Morava a o 25 % v lokalitě Brno oproti astrogeodetické nivelaci. V obou lokalitách byl jako referenční model pro posouzení vnější přesnosti zvolen model kvazigeoidu QGZÚ-2013. Přínos astrotopografické nivelace pro zlepšení vnější přesnosti se nepodařilo prokázat, protože vypočtené modely kvazigeoidu mají obdobnou přesnost jako referenční model. Metody a techniky dostupné v současnosti tedy zřejmě neumožňují další významné zpřesnění.

## **Klíčová slova**

kvazigeoid, vyrovnání podmínkových měření, tížnicové odchylky, digitální model reliéfu (DMR)



## **Abstract**

The goal of this thesis was to evaluate whether it is possible to replace gravimetric data with topographic ones for calculating quasigeoid models using astrogeodetic levelling. Gravimetric data are not of sufficient quality in selected areas, hence their replacement can increase the accuracy of obtained models.

The computational program PRVAK was created. It facilitates the calculation of the quasigeoid model by astrogeodetic levelling, the models can be calculated on a profile or in an area by least square adjustment of conditional observations from astrogeodetic deflections of the vertical or their combination with topographic ones. Furthermore, the Dolní Morava network was built, with astrogeodetic deflections of the vertical determined at 34 points. The data comparisons were tested at three localities, where quasigeoid models were calculated by astrogeodetic and astrotopographic levelling and compared with reference data.

On the profile Velká Bíteš – Brno – Uherské Hradiště, the calculated models were compared with the gravimetric model calculated by Research Institute of Geodesy, Topography and Cartography. The standard deviation of the differences between the reference model and the models calculated in this work was reduced using astrotopographic levelling by approximately 38 % compared to astrogeodetic levelling.

For area models of quasigeoid in the localities of Dolní Morava and Brno, it was possible to compare the internal accuracy of these models. When using astrotopographic levelling, values of standard deviation of height anomalies were reduced by 40 % in Dolní Morava locality and 25 % in Brno locality compared to astrogeodetic levelling. In both localities, the quasigeoid QGZÚ-2013 was chosen as a reference model for comparison of external accuracy. The contribution of astrogeodetic levelling to the improvement of external accuracy could not be demonstrated because the calculated models of quasigeoid have similar accuracy as the reference model.

## **Keywords**

quasigeoid, least square adjustment of conditional observations, deflections of the vertical, digital terrain model (DTM)





