



Univerzita Palackého v Olomouci

Přírodovědecká fakulta

# Vybrané problémy optických polí koherenční zrnitosti

Disertační práce

**Mgr. Ivana Hamarová**

Školitel: Prof. RNDr. Miroslav Hrabovský, DrSc.

Olomouc 2012

Prohlašuji, že jsem uvedenou práci vypracovala samostatně s použitím níže uvedené literatury. S vypůjčováním práce souhlasím.

V Olomouci, dne

**Jméno a příjmení autora:**

Mgr. Ivana Hamarová (roz. Vašková)

**Název disertační práce:**

Vybrané problémy optických polí koherenční zrnitosti

**Pracoviště:**

Společná laboratoř optiky Univerzity Palackého a Fyzikálního ústavu Akademie věd České republiky

**Školitel:**

prof. RNDr. Miroslav Hrabovský, DrSc.

**Abstrakt**

Disertační práce se zabývá vytvořením numerického modelu vzniku a šíření polí koherenční zrnitosti a následnou aplikací tohoto modelu na metodu korelace polí koherenční zrnitosti. Prezentovaný model je dále využit k simulaci fraktálové koherenční zrnitosti a k prozkoumání jejích statistických vlastností a možných aplikací v metrologii.

**Author's name:**

Mgr. Ivana Hamarová (nee Vašková)

**Title of the Ph.D. thesis:**

Selected problems of optical speckle fields

**Department:**

Joint Laboratory of Optics of Palacky University and Institute of Physics of the Academy of Sciences of the Czech Republic

**Supervisor:**

prof. RNDr. Miroslav Hrabovský, DrSc.

**Abstract:**

The Ph.D. thesis is concerned with the design of a numerical model of origin and propagation of speckle fields and application of this model on the speckle correlation method. Then the presented model is used for simulation of fractal speckles and the study of its statistical properties and application in metrology as well.

## Poděkování:

Na tomto místě bych ráda poděkovala mému školiteli prof. RNDr. Miroslavu Hrabovskému, DrSc., za odborné vedení mého postgraduálního studia, jeho veškerou pomoc a poskytnuté zázemí a podporu při mé badatelské činnosti.

Velký dík patří RNDr. Petru Šmídovi, Ph.D., za jeho cenné rady a vědomosti, jak v oblasti optiky koherenční zrnitosti, tak v oblasti programování, se kterými se ochotně podělil.

Za četné konzultace, nejen v rámci optiky koherenční zrnitosti a statistické fyziky, s vděčností děkuji RNDr. Pavlu Horváthovi, Ph.D.

Dále děkuji RNDr. Jiřímu Fišerovi, Ph.D. za poskytnutou pomoc při seznamování se s problematikou fraktální analýzy.

V neposlední řadě patří velký dík Prof. Junu Uozumimu<sup>a</sup> za jeho rady a zaslání materiálů z oblasti fraktálové koherenční zrnitosti.

Ještě jednou všem ze srdce děkuji.

Tato práce vznikla za podpory projektů AV ČR č. KAN301370701 „Nanostrukturní makroskopické systémy – technologie přípravy a charakterizace“, 1M06002 „Optické struktury, detekční systémy a související technologie pro nízkofotonové aplikace“, IGA č. PrF\_2011\_009 „Koherenční a nelineární optika – vybrané kapitoly II“ a IGA č. PrF\_2012\_003 „Koherenční a nelineární optika – vybrané kapitoly III“.

<sup>a</sup>*Profesor Jun Uozumi, Faculty of Engineering, Hokkai – Gakuen University, Japonsko, mail: uozumi@eli.hokkai-s-u.ac.jp*

*S úctou a láskou věnuji svým rodičům.*

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Cíle disertační práce</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Současný stav v oblasti koherenční zrnitosti</b>	<b>4</b>
3.1	Koherenční zrnitost a její využití . . . . .	4
3.2	Počítačová simulace vzniku a šíření koherenční zrnitosti . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Koherenční zrnitost a její numerický model</b>	<b>8</b>
4.1	Vlastnosti koherenční zrnitosti . . . . .	9
4.1.1	Statistické vlastnosti prvního řádu . . . . .	9
4.1.2	Statistické vlastnosti druhého řádu . . . . .	10
4.2	Matematický popis šíření pole koherenční zrnitosti . . . . .	14
4.3	Numerický model vzniku a šíření pole koherenční zrnitosti . . . . .	15
4.3.1	Vliv vzorkování na simulaci vzniku a šíření pole koherenční zrnitosti	17
4.4	Vlastnosti pole koherenční zrnitosti vytvořeného pomocí numerického modelu	20
<b>5</b>	<b>Simulace translace předmětu metodou korelace polí koherenční zrnitosti</b>	<b>24</b>
5.1	Princip metody . . . . .	24
5.2	Geometrická uspořádání pro měření translace předmětu . . . . .	25
5.3	Numerický model translace předmětu . . . . .	28
5.3.1	Složka translace $a_x$ (volné pole) . . . . .	28
5.3.2	Složka translace $a_x$ (obrazové pole) . . . . .	32
5.3.3	Složka translace $a_z$ (volné a obrazové pole) . . . . .	36
5.3.4	Posuv předmětu v rovině $(x, z)$ a v prostoru - 2D a 3D posuv . . .	37
5.4	Srovnání výsledků simulace s výsledky experimentu realizovaného v laboratoři	42
5.4.1	Návrh a realizace experimentu . . . . .	42
5.4.2	Porovnání výsledků měření s výstupy prezentovaného simulačního programu . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Fraktály a fraktálová koherenční zrnitost</b>	<b>46</b>
6.1	Současný stav v oblasti fraktálů a fraktálové koherenční zrnitosti . . . . .	46
6.1.1	Fraktály . . . . .	46

6.1.2	Využití fraktálů ve fyzikální optice (difraktál a fraktálová koherenční zrnitost) . . . . .	51
6.2	Vytvoření amplitudového transparentu s náhodným fraktálem a odhad jeho dimenze . . . . .	53
6.2.1	Výpočet Weierstrassových funkcí s optimálními parametry . . . . .	53
6.2.2	Měření dimenzí vypočítaných náhodných fraktálů vytvořených kombinací Weierstrassových funkcí . . . . .	57
6.3	Simulace činnosti experimentální sestavy pro pozorování fraktálové koherenční zrnitosti . . . . .	61
6.3.1	Simulace difraktálu a jeho charakteristiky . . . . .	61
6.3.2	Simulace fraktálové koherenční zrnitosti a její charakteristiky . . . . .	65
6.4	Aplikace fraktálové koherenční zrnitosti pro měření tečného posuvu předmětu . . . . .	74
6.4.1	Simulace činnosti experimentální sestavy pro volné pole . . . . .	74
6.4.2	Simulace činnosti modifikované experimentální sestavy pro obrazové a volné pole . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>87</b>
	<b>Summary</b>	<b>90</b>
	<b>Přehled publikační činnosti autorky</b>	<b>93</b>
	<b>Literatura</b>	<b>95</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Koherenční zrnitost je známý optický jev. Jeho charakteristickým rysem je struktura zaznamenaná v podobě světlých a tmavých skvrn náhodně rozmístěných v rovině detekce. Lze ji pozorovat při průchodu koherentního, případně částečně koherentního světla předmětem s difúzně rozptylujícím rozhraním nebo při odrazu od takového rozhraní.

Jev koherenční zrnitosti byl dříve považován za jev parazitní, zvláště v holografii, dnes má však již četné praktické využití. Mezi ně patří zejména měření změny stavu osvětleného povrchu předmětu, přičemž existuje souvislost mezi složkami tenzoru malé deformace, které změnu stavu elementu povrchu charakterizují, a změnou polohy detekované struktury koherenční zrnitosti [1]-[4]. Optické metody založené na bázi koherenční zrnitosti skýtají mnohé výhody, jako je bezkontaktnost a nedestruktivnost. Další výhodou je poměrně vysoká přesnost či měření velmi malých deformací [5].

V poslední době se setkáváme s pojmem fraktálová koherenční zrnitost [6] - [10]. Jedná se o modifikaci běžné koherenční zrnitosti v případě, že světelná vlna před dopadem na předmět interaguje s fraktálem. Zrna ve struktuře fraktálové koherenční zrnitosti mají odlišné velikosti a jiný tvar než ve struktuře běžné koherenční zrnitosti. Ve fraktálové struktuře se zlepšují korelační vlastnosti [6], a proto se nabízí možnost ji využít na zvýšení citlivosti a rozsahu optických měřicích metod na bázi koherenční zrnitosti.

Předkládaná práce má následující strukturu: V prvních dvou úvodních částech práce (kapitola 2 a 3) jsou uvedeny vytyčené cíle disertační práce a současný stav v problematice běžné koherenční zrnitosti zahrnující také možné způsoby její numerické simulace. V další části práce (kapitola 4) jsou analyzovány základní aspekty týkající se vlastností koherenční zrnitosti z hlediska statistiky a také je proveden matematický popis šíření polí koherenční zrnitosti. Následně je představen navržený numerický model popisující vznik a šíření pole koherenční zrnitosti a funkčnost tohoto modelu je ověřena porovnáním jeho nasimulovaných statistik s teoreticky známými statistikami.

Další část práce (kapitola 5) se věnuje aplikaci prezentovaného modelu na vhodnou metodu měření vybraných složek tenzoru malé deformace. Výstupy simulace jsou porovnávány s experimentálně dosaženými výsledky měření.

Poslední část práce (kapitola 6) se věnuje problematice fraktálové koherenční zrnitosti. Vedle současného stavu v této problematice a popisu základních vlastností fraktálů je pozornost zaměřena na vznik difraktálu jakožto vlny interagující s vybranými náhodnými fraktály. Navržený model je využit k simulaci fraktálové koherenční zrnitosti od příslušných difraktálů a prozkoumání jejich statistických vlastností. Nakonec je zkoumána možnost aplikace fraktálové koherenční zrnitosti v optické metrologii.

Všechny simulace jsou provedeny v prostředí výpočetního systému pro numerické výpočty SciLab (Scientific Laboratory). Dosažené výstupy ze simulací jsou prezentovány v tabulkách nebo grafech.

# Kapitola 2

## Cíle disertační práce

Hlavním cílem disertační práce je vytvořit numerický model vzniku a šíření polí koherenční zrnitosti a následně aplikovat tento model na metodu korelace polí koherenční zrnitosti. Dalším cílem práce je využití prezentovaného modelu k simulaci fraktálové koherenční zrnitosti a prozkoumání jejích statistických vlastností.

Vytyčené cíle disertační práce lze podrobněji rozvést v následujících bodech:

1. Vytvoření numerického modelu vzniku a šíření polí koherenční zrnitosti a následné ověření funkčnosti tohoto modelu porovnáním teoretických statistik s výpočtem statistik nasimulované struktury koherenční zrnitosti.

2. Aplikace uvedeného numerického modelu při simulaci a detekci tečné i normálové translace předmětu na metodu korelace polí koherenční zrnitosti, a to ve volném i v obrazovém poli. Porovnání výsledků simulace s teoretickými předpověďmi a s vybranými experimentálními výsledky.

3. Studium fraktálů z hlediska jejich dimenze, která ovlivňuje charakter vlny interagující s těmito fraktály.

4. Studium difraktálů a fraktálové koherenční zrnitosti z hlediska statistických vlastností.

5. Zkoumání možnosti využití fraktálové koherenční zrnitosti pro účely metrologie na bázi koherenční zrnitosti.

# Kapitola 3

## Současný stav v oblasti koherenční zrnitosti

### 3.1 Koherenční zrnitost a její využití

Jev koherenční zrnitost [4, 11] vzniká při odrazu koherentního, případně částečně koherentního světla předmětem s difúzně rozptylujícím rozhraním nebo při odrazu od takového rozhraní. Podstata tohoto jevu spočívá v interferenci elementárních světelných vln šířících se rozptylem nebo odrazem od velkého množství mikroskopických plošek uvažovaných na povrchu předmětu. Následkem interference se v prostoru před předmětem (v případě odrazu) objeví náhodné rozložení interferenčních maxim a minim, tzv. pole koherenční zrnitosti. V řezu tohoto pole pak pozorujeme strukturu koherenční zrnitosti v podobě shluku světlých a tmavých skvrn.

Struktura koherenční zrnitosti byla poprvé pozorována již v 18. století při interferenci v rozptýleném světle, popřípadě později zejména při Fraunhoferově difrakci na skleněné desce pokryté malými částicemi prachu [11]. Až po objevu laseru přineslo pozorování předmětů osvětlených vysoce koherentním laserovým svazkem překvapivý jev, vznik výrazné zrnité struktury. Pozdější studium tohoto jevu, který byl z počátku především v holografii považován za parazitní, ukázalo, že koherenční zrnitost lze využít v různých vědních a technických disciplínách (mechanika, optika, astronomie, aj.), například pro měření drsnosti povrchu předmětu [12] nebo pro měření malé deformace předmětu [4], dále v optickém zpracování informací ke kódování a dekódování informací [13], pro měření optických aberací optických soustav [14], k měření refrakčního stavu lidského oka [15] a k měření průměru hvězd [16].

Každá jednotlivá skvrna (bod) i celá struktura skvrn ve struktuře koherenční zrnitosti mají určité statistické vlastnosti. Takzvaná statistická rozdělení prvního řádu se zabývají vlastnostmi pole koherenční zrnitosti v jednom bodě prostoru. Jedná se například o pravděpodobnostní rozdělení intenzity v bodě pole koherenční zrnitosti, které bylo poprvé teoreticky odvozeno J. W. Goodmanem [17]. Mezi prvními, který uvedené

teoretické statistiky experimentálně potvrdil, byl J. C. Dainty [18], který provedl 2 400 měření intenzity v daném bodě pole koherenční zrnitosti, či T. S. McKechnie [19], který analyzoval soubor 23 000 měření. Statistiky druhého řádu, zejména pak autokorelační funkce rozdělení intenzity, která na základě Fresnelova-Kirchhoffova difrakčního integrálu byla odvozena například v [11], zase umožňují stanovit střední velikost zrn. Různé způsoby výpočtu střední velikosti zrn v detekované struktuře koherenční zrnitosti jsou popsány například v [20]-[24]. Statistické vlastnosti pole koherenční zrnitosti jsou důležité nejen pro bližší pochopení jevu koherenční zrnitosti, ale zejména pro jeho praktické využití, například při vyhodnocování složek tenzoru malé deformace předmětu (translace, rotace a vlastní deformace).

Jedna z metod určení složek tenzoru malé deformace předmětu, kterou pro tento účel poprvé navrhl I. Yamaguchi [1], je metoda korelace polí koherenční zrnitosti. Tato metoda vychází z předpokladu, že pole koherenční zrnitosti generované předmětem se pohybuje v důsledku deformace předmětu. Poloha maxima statistické funkce vzájemné korelace polí koherenční zrnitosti detekovaných před a po změně stavu zkoumaného předmětu pak odpovídá posuvu struktury koherenční zrnitosti v místě detekce. Ze znalosti tohoto posuvu lze zpětně vyhodnotit deformaci předmětu na základě odvozených teoretických vztahů [1].

Na pracovišti Společná laboratoř optiky UP a FZÚ AV ČR se touto problematikou zabývá M. Hrabovský se svými spolupracovníky, který možnost využití metody korelace polí koherenční zrnitosti pro určení tenzoru složek malé deformace teoreticky rozvedl [2, 3] a zároveň experimentálně potvrdil [4, 5, 25].

## 3.2 Počítačová simulace vzniku a šíření koherenční zrnitosti

V souladu s výše uvedenými principy vzniku a šíření polí koherenční zrnitosti se nabízí možnost simulace tohoto jevu na základě numerického výpočtu Fresnelova-Kirchhoffova difrakčního integrálu [11, 26], přičemž je splněn předpoklad, že dopadající světlo je difragováno na opticky drsném rozhraní. Optická vlna odražená od tohoto drsného rozhraní<sup>1</sup> bývá v numerickém modelu charakterizována maticí o  $m \times n$  prvcích, kterou v dalším textu budeme značit  $\mathbf{A}'$ . V těchto bodech je zaznamenána komplexní amplituda difragovaného světla o různé fázi těsně za předmětem v důsledku nerovnoměrného dráhového rozdílu vlny odražené od drsného povrchu předmětu [27, 28, 29].

Při výpočtu Fresnelova-Kirchhoffova difrakčního integrálu lze postupovat několika způsoby. Jedním z nich je tzv. frekvenční přístup, kdy se využívá rozkladu světla do rovinných vln [26]. Analytický tvar Fresnelova-Kirchhoffova difrakčního integrálu je

---

<sup>1</sup>Drsné rozhraní bude v následujících kapitolách vyjádřeno maticí  $\mathbf{A}$ .

vhodně upraven tak, aby se dala aplikovat Fourierova transformace součinu vstupního signálu (matice  $\mathbf{A}'$ ) s kvadratickým fázovým faktorem. Pro rychlou implementaci Fourierovy transformace se běžně využívá rychlá Fourierova transformace-FFT (Fast Fourier Transform) [30]. Výsledná FFT je následně vynásobena kvadratickým faktorem volného šíření. Tento způsob výpočtu komplexní amplitudy je podrobněji rozveden například v [23, 31, 32]. Modifikovaný způsob výpočtu výsledné komplexní amplitudy, který je uveden v [31, 32], zahrnuje součin FFT vstupního signálu a kvadratického faktoru volného šíření a následně zpětnou Fourierovou transformaci (IFFT-Inverse Fast Fourier Transform), která představuje superpozici všech příspěvků rovinných vln. Každý z uvedených frekvenčních přístupů k určení výsledné komplexní amplitudy pomocí FFT je platný pouze pro jisté oblasti vzdáleností od předmětu stanovené na základě Nyquistova vzorkovacího teorému [31]. Podrobnější analýzy těchto frekvenčních přístupů včetně analýzy příslušných vzorkovacích teorémů jsou uvedeny v [31, 32]. Vynecháním kvadratických členů lze dosáhnout popisu šíření světla v rámci Fraunhoferovy aproximace. Pole koherenční zrnitosti je v tomto případě získáno pouze aplikováním FFT matice  $\mathbf{A}'$ . Pro regulaci velikosti zrna ve struktuře koherenční zrnitosti se na matici  $\mathbf{A}'$  volí kruhová maska [29, 28].

Funkčnost výše uvedených modelů využívajících FFT byla ověřena například při vyhodnocování statistik simulovaných polí koherenční zrnitosti, které byly porovnávány s teoretickými statistikami i s experimentálními výsledky. Byly počítány jak statistiky prvního řádu jako je rozložení intenzity [33, 34] nebo kontrast [35], tak statistiky druhého řádu, jako je autokorelační funkce intenzit [23]. Jelikož jev koherenční zrnitosti prolíná do všech možných praktických aplikací, byly tyto modely již také využity pro účely metrologie, například při simulaci měření tvaru a deformace předmětu [36] nebo při vyhodnocení posuvu struktury koherenční zrnitosti především pomocí metody interferometrie na bázi koherenční zrnitosti [37]. I přesto, že FFT umožňuje bezesporu rychlý výpočet komplexní amplitudy světla, její hlavní nevýhodou je daná souvislost mezi počtem vzorků (bodů matice  $\mathbf{A}'$ ) vstupního signálu a počtem vzorků výstupního signálu, což výrazně ovlivňuje například tvar jednotlivých zrn ve struktuře koherenční zrnitosti. Dále přímá implementace FFT znemožňuje řešit obecnější situaci, jakou je například šíření světla pod úhlem vzhledem k optické ose.

Proto při sestavování numerického modelu budeme využívat jiného přístupu k výpočtu Fresnelova-Kirchhoffova difrakčního integrálu - tzv. prostorový přístup [26]. Tento přístup je v souladu s Huygensovým-Fresnelovým principem šíření světla, kdy na osvětleném drsném rozhraní uvažujeme náhodně rozmístěné bodové zdroje sférických (parabolických) vln. Výsledná komplexní amplituda je dána superpozicí vln generovaných těmito bodovými zdroji. Součet všech takových příspěvků je dvojrozměrná konvoluce [26]. Tento způsob výpočtu difrakčního integrálu s sebou přináší četné výhody, zvláště v situaci, kdy je třeba zrušit souvislost mezi vzorkováním vstupního a výstupního signálu. Jak bude

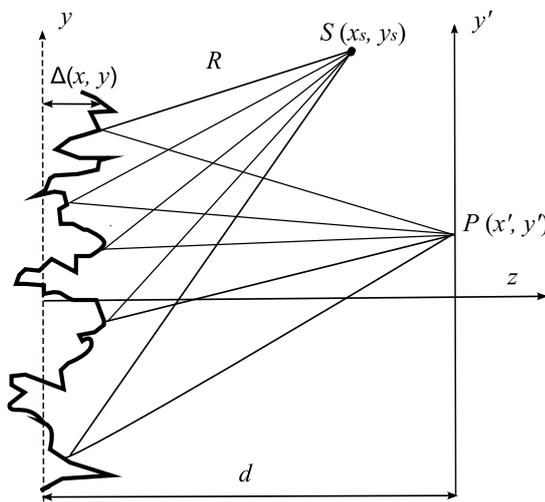
dále ukázáno v kapitole 5, numerický model založený na přímém výpočtu konvolučního tvaru Fresnelova-Kirchhoffova difrakčního integrálu je velmi vhodný zejména pro analýzu posuvu předmětu vyhodnoceném z posuvu koherenční zrnitosti detekované na jednom řádku matice.

# Kapitola 4

## Koherenční zrnitost a její numerický model

V této kapitole osvětlíme pojem koherenční zrnitost a uvedeme některé základní vlastnosti koherenční zrnitosti. Dále bude prezentován numerický model, podle kterého bude tento jev simulován. Výstupy z numerických simulací, v souvislosti se statistickými vlastnostmi, porovnáme s teoretickými vztahy.

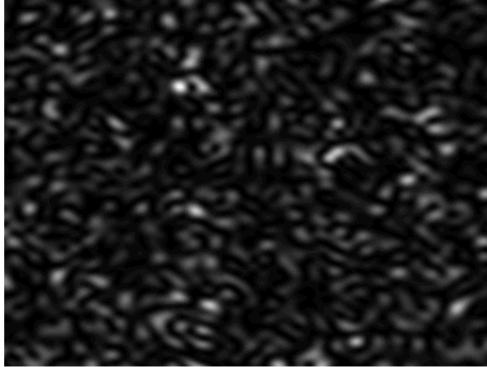
Jak již bylo řečeno, koherenční zrnitost je jev, který vzniká při odrazu koherentního světla od opticky drsného rozhraní, či při jeho průchodu takovým rozhraním. Budeme dále uvažovat odrazný povrch předmětu, který má náhodně proměnnou výšku reliéfu  $\Delta(x, y)$  a je osvětlen koherentním svazkem z bodového zdroje  $S$  (Obr. 4.1).



Obrázek 4.1: Drsný povrch předmětu osvětlený svazkem z bodového zdroje.

V ideálním případě lze předpokládat, že světlo dopadající na povrch předmětu je zcela absorbováno a opět zcela vyzářeno do prostoru. V soulase s Huygensovým–Fresnelovým principem lze uvažovat na povrchu předmětu velké množství bodových zdrojů, které jsou vzájemně koherentní a náhodně rozmístěné v důsledku náhodnosti tloušťky povrchu, a tudíž dochází k interferenci sekundárních kulových vln o různých fázových zpožděních

generovanými těmito zdroji. Pole, které před předmětem vznikne, je náhodné prostorové rozložení komplexní amplitudy světla, a tedy i intenzity světla, a nazýváme ho polem koherenční zrnitosti. Řez tímto polem pak nazýváme strukturou koherenční zrnitosti (Obr. 4.2).



Obrázek 4.2: Struktura koherenční zrnitosti.

## 4.1 Vlastnosti koherenční zrnitosti

Vzhled koherenční zrnitosti závisí zejména na stupni koherence dopadajícího světla, na jeho polarizaci a na vlastnostech rozptylujícího prostředí [11]. V následujícím textu budeme uvažovat, že pole koherenční zrnitosti vytvořené po odrazu koherentního světla od povrchu předmětu je polarizované a koherentní (plně vyvinuté). To znamená, že ve všech bodech prostoru má stejnou polarizaci a světelné vlny šířící se od předmětu se v daném bodě prostoru skládají koherentně (sčítají se jejich komplexní amplitudy) [4].

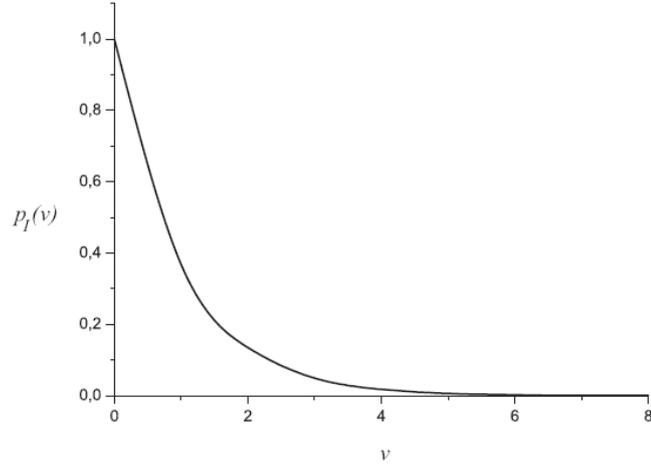
### 4.1.1 Statistické vlastnosti prvního řádu

V této části se budeme věnovat statistickým vlastnostem pole koherenční zrnitosti prvního řádu, to znamená, že nás budou zajímat charakteristiky v jednom bodě pole koherenční zrnitosti. Tyto charakteristiky lze najít středováním přes ensemble mnoha makroskopicky stejných, ale mikroskopicky různých odrazných povrchů. Protože je pole koherenční zrnitosti stacionární a ergodické, lze soubor mnoha měření statistik v jednom bodě pole koherenční zrnitosti nahradit měřením v mnoha bodech pole, které je generováno pro jediný povrch předmětu [38].

V daném bodě vyvinutého pole koherenční zrnitosti se intenzita  $I$  řídí exponenciálním pravděpodobnostním rozdělením [4, 11]

$$p_I(\nu) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\nu/2\sigma^2}, \quad 2\sigma^2 = \langle I \rangle, \quad (4.1)$$

kde  $\langle \rangle$  je souborové středování,  $\sigma$  je směrodatná odchylka komplexní amplitudy a  $\nu$  představuje náhodnou hodnotu intenzity  $I$ . Na Obr. 4.3 je znázorněn průběh funkce hustoty pravděpodobnosti (4.1) pro  $\langle I \rangle = 1$ .



Obrázek 4.3: Funkce hustoty pravděpodobnosti  $p_I(\nu)$  pro  $\langle I \rangle = 1$ .

Do kategorie statistických vlastností prvního řádu také patří veličina poměr signálu ku šumu  $S/N$ , která udává, do jaké míry je signál ovlivněn šumem. Definujeme ji jako poměr střední intenzity  $\langle I \rangle$  ku směrodatné odchylce intenzity  $\sigma_I$  [4]

$$\frac{S}{N} = \frac{\langle I \rangle}{\sigma_I} = \frac{2\sigma}{2\sigma} = 1. \quad (4.2)$$

Ze vztahu (4.2) je zřejmé, že koherenční zrnitost je značně zašuměný proces, neboť střední hodnota signálu je rovna jeho fluktuacím.

Informaci o kontrastu pole koherenční zrnitosti (viditelnosti jednotlivých zrn) poskytuje vizibilita, která je definována vztahem [4]

$$C = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} = 1. \quad (4.3)$$

#### 4.1.2 Statistické vlastnosti druhého řádu

Statistická rozdělení prvního řádu se zabývají vlastnostmi pole koherenční zrnitosti v jednom bodě prostoru, ovšem nejsou například schopny popsat střední velikost zrn v poli koherenční zrnitosti. Mezi statistiky druhého řádu patří zejména autokorelační funkce rozdělení intenzity, která stanovení střední velikosti zrn umožňuje [4].

Autokorelační funkci intenzity  $R_I(\Delta x', \Delta y')$  v rovině  $(x', y')$  lze napsat ve tvaru [4, 21]

$$R_I(\Delta x', \Delta y') = \langle I(x', y') \rangle^2 [1 + |\mu_U(\Delta x', \Delta y')|^2], \quad (4.4)$$

kde  $\langle I(x', y') \rangle$  je střední intenzita v rovině  $(x', y')$ ,  $\Delta x' = x'_1 - x'_2$ ,  $\Delta y' = y'_1 - y'_2$  jsou rozdíly souřadnic a  $\mu_U$  je komplexní korelační koeficient.

Pro něj je možné psát [11]

$$|\mu_U(\Delta x', \Delta y')|^2 = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle I(x, y) \rangle \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda d} (x \Delta x' + y \Delta y') \right] dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle I(x, y) \rangle dx dy} \right|^2, \quad (4.5)$$

kde  $(x, y)$  je osvětlená rovina předmětu, která je umístěna ve vzdálenosti  $d$  od roviny detekce  $(x', y')$ ,  $\lambda$  je vlnová délka světla a  $\langle I(x, y) \rangle$  představuje střední intenzitu světla vyzářující z bodu  $(x, y)$  povrchu předmětu.

Dále platí [11, 21, 22]

$$\begin{aligned} |\mu_U(\Delta x', \Delta y')|^2 &= r_I(\Delta x', \Delta y') = \\ &= \frac{\langle \Delta I(x', y') \Delta I(x' + \Delta x', y' + \Delta y') \rangle}{\langle (\Delta I(x', y'))^2 \rangle}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

kde  $r_I$  je intenzitní korelační koeficient nebo také normovaná autokorelační funkce intenzit  $I(x', y')$ , přičemž  $\Delta I(x', y') = I(x', y') - \langle I(x', y') \rangle$  je množina fluktuací intenzit  $I(x', y')$ , dále  $\langle \Delta I(x', y') \Delta I(x' + \Delta x', y' + \Delta y') \rangle$  je nenormovaná autokorelační funkce intenzit  $I(x', y')$  a  $\langle (\Delta I(x', y'))^2 \rangle$  představuje rozptyl hodnot intenzit ve všech bodech souboru  $I(x', y')$ .

Z výše uvedeného plyne, že normovanou autokorelační funkci  $r_I(\Delta x', \Delta y')$  lze vypočítat jak z rozdělení detekované intenzity  $I(x', y')$  v rovině  $(x', y')$ , tak ze znalosti rozdělení intenzity světla  $\langle I(x, y) \rangle$  na povrchu předmětu. V dalším textu proto uvedeme vztah pro výpočet střední velikosti zrna odvozený z (4.5), který následně porovnáme s hodnotou šířky normované autokorelační funkce  $r_I(\Delta x', \Delta y')$  intenzity  $I(x', y')$  vypočítané podle (4.6).

Dosazením (4.5) do (4.4) dostaneme autokorelační funkci intenzit ve tvaru [4, 11]

$$\begin{aligned} R_I(\Delta x', \Delta y') &= \langle I(x', y') \rangle^2 \times \\ &\times \left[ 1 + \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle I(x, y) \rangle \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda d} (x \Delta x' + y \Delta y') \right] dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |I(x, y)| dx dy} \right|^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Uvažujeme-li obdélníkovou plošku o stranách  $V_x$  a  $V_y$  osvětlenou rovinou vlnou šířící se ve směru osy  $z$  (viz Obr. 4.4), vztah (4.7) přechází na tvar [4, 11]

$$R_I(\Delta x', \Delta y') = \frac{V_x^2 V_y^2}{\lambda^4 d^4} \left[ 1 + \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\Delta x' V_x}{\lambda d} \right) \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\Delta y' D_y}{\lambda d} \right) \right], \quad (4.8)$$

přičemž součin kvadrátů sinc funkcí přísluší normované autokorelační funkci  $r_I(\Delta x', \Delta y')$ , jak plyne při porovnání vztahů (4.4) a (4.8). Za střední šířku zrna pole koherenční zrnitosti orientovanou do směru souřadné osy  $x'$  může být považována hodnota veličiny  $\Delta x' = \alpha_{x'}$ , při které autokorelační funkce  $R_I(\Delta x', \Delta y')$  nabývá svého prvního minima. To nastává v případě  $\operatorname{sinc}^2(\alpha_{x'} V_x / \lambda d) = 0$ , tedy<sup>1</sup> [4, 11]

$$\alpha_{x'} = \frac{\lambda d}{V_x}. \quad (4.9)$$

V případě osvětlené kruhové plošky na povrchu předmětu o průměru  $V$  osvětlené rovinou vlnou je střední průměr  $\alpha$  zrn ve struktuře koherenční zrnitosti určen vztahem [4]

$$\alpha = 1,22 \frac{\lambda d}{V}. \quad (4.10)$$

Umístíme-li mezi předmět a detektor nějaký optický systém, například čočku, střední velikost zrna v poli koherenční zrnitosti nyní nabývá tvaru [4]

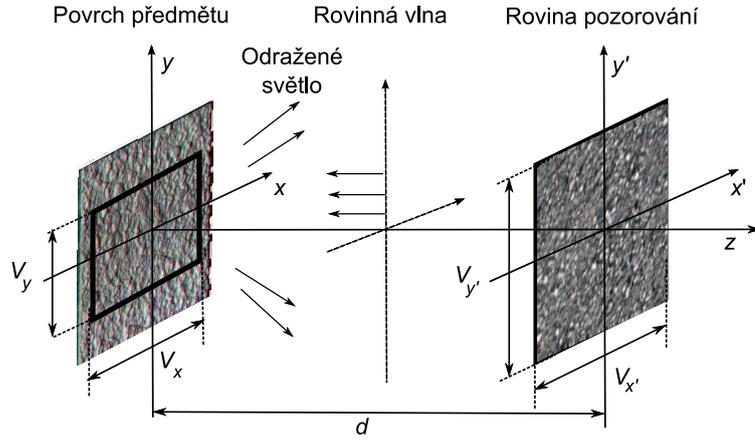
$$\alpha = 0,61 \frac{\lambda}{N_A}, \quad (4.11)$$

kde  $N_A$  je numerická apertura čočky,  $N_A = n \sin \beta$ , kde  $n$  je index lomu prostředí za čočkou a  $\beta$  je aperturní úhel čočky.

Vraťme se nyní ke vztahu (4.9). Ten byl, jak již bylo zmíněno, odvozen za předpokladu, že  $\operatorname{sinc}^2(\alpha_{x'} V_x / \lambda d) = 0$ . Při určování střední šířky zrna z detekované struktury koherenční zrnitosti však z praktických důvodů nebudeme určovat polohu minima autokorelační funkce  $R_I(\Delta x', \Delta y')$  (potažmo polohu nulové hodnoty normované autokorelační funkce intenzit  $r_I(\Delta x', \Delta y')$ ), ale budeme stanovovat šířku normované autokorelační funkce  $r_I(\Delta x', \Delta y')$  v  $1/e$  její maximální hodnoty<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Analogicky, střední šířka zrna orientovaná do směru souřadné osy  $y'$  je ovlivněna velikostí strany  $V_y$ .

<sup>2</sup>Dále se pod pojmem šířka normované autokorelační funkce  $r_I(\Delta x', \Delta y')$  bude rozumět šířka této funkce v  $1/e$  její maximální hodnoty.



Obrázek 4.4: Obdélníková ploška o stranách  $V_x$  a  $V_y$  na povrchu předmětu osvětlená rovinnou vlnou.

Abychom mohli porovnat tuto střední šířku zrna s teoretickou střední šířkou zrna odvozenou pro konkrétní případ osvětlené obdélníkové plošky, vztah (4.9) modifikujeme na tvar

$$\alpha_{x'} = 2 \frac{\lambda d}{V_x} \frac{1}{1,9085}, \quad (4.12)$$

kde faktor 1,9085 představuje poměr mezi hodnotami kvadrátu sinc funkce v nule a v  $1/e$  maximální hodnoty. Faktorem 2 celý výsledek násobíme pro dosažení plné šířky kvadrátu sinc funkce.

Z detekované struktury koherenční zrnitosti lze střední velikost zrna určit pomocí normované autokorelační funkce intenzit definované dle vztahu (4.6) [4], [21]–[23]. Uvážíme-li, že struktura koherenční zrnitosti je zaznamenána na maticovém detektoru, který obsahuje řádky s intenzitními profily struktury (řezy strukturou) koherenční zrnitosti, normovanou autokorelační funkci každého intenzitního profilu lze vyjádřit jako jednodimenzionální případ funkce (4.6)

$$r_I(\Delta x') = \frac{\langle \Delta I(x') \Delta I(x' + \Delta x') \rangle}{\langle (\Delta I(x'))^2 \rangle}. \quad (4.13)$$

Střední velikost zrna (označíme jako  $\alpha_{x'r}$ ) intenzitního profilu odpovídá šířce normované autokorelační funkce  $r_I(\Delta x')$ . Ze souboru všech naměřených hodnot  $\alpha_{x'r}$  ze všech řádků detektoru se vypočítá střední hodnota a směrodatná odchylka, abychom získali představu, jak moc tyto spočítané hodnoty  $\alpha_{x'r}$  fluktuují kolem střední hodnoty souboru. Uvedenou metodu pro výpočet střední velikosti zrna  $\alpha_{x'}$  budeme aplikovat v kapitole 4.4, kdy pomocí numerického modelu vytvoříme simulovanou strukturu koherenční zrnitosti.

## 4.2 Matematický popis šíření pole koherenční zrnitosti

Matematicky lze šíření pole koherenční zrnitosti popsat následovně: Nechť předmět je osvětlen koherentním laserovým svazkem. Komplexní amplituda  $U$  světla v rovině pozorování  $(x', y')$  vzdálené o  $d$  od roviny povrchu předmětu  $(x, y)$  je ve Fresnelově aproximaci rovna<sup>3</sup> [26]:

$$U(x', y') = \frac{\exp(-ikd)}{i\lambda d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, \Delta(x, y)) \times \exp \left[ -ik \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2(d + \Delta(x, y))} - ik\Delta(x, y) \right] dx dy, \quad (4.14)$$

kde  $U(x, y)$  je komplexní amplituda odražené vlny,  $x, y$  a  $x', y'$  jsou kartézské souřadnice v rovině povrchu předmětu a v rovině pozorování,  $\Delta(x, y)$  je náhodně proměnná výška reliéfu povrchu předmětu,  $\lambda$  je vlnová délka dopadajícího světla a  $k$  je vlnový vektor.

Komplexní amplituda  $U(x, y, \Delta(x, y)) = U_o(x, y, z)r(x, y)\exp(-ik\Delta(x, y))$  světla těsně po odrazu od studovaného povrchu předmětu v sobě zahrnuje komplexní amplitudu  $U_o(x, y, z) = U_{ol}(x, y) \exp(-i\varphi(x, y, z))$  dopadajícího světla, kde  $U_{ol}(x, y)$  je reálná část komplexní amplitudy a  $\varphi(x, y, z)$  je fáze dopadajícího světla; dále koeficient reflexe  $r(x, y)$  a fázi  $k\Delta(x, y)$ , která je náhodná v důsledku náhodnosti výšky reliéfu  $\Delta(x, y)$  povrchu předmětu.

Nyní budeme uvažovat obdélníkovou plošku povrchu předmětu o stranách  $V_x$  a  $V_y$  osvětlenou rovinnou vlnou šířící se proti směru souřadné osy  $z$ , jak je znázorněno na Obr. 4.4. Označme  $U_o(x, y, z)$  ohraničenou komplexní amplitudu světelné vlny dopadající na předmět, tedy  $U_o(x, y, z) = U_{ol}(x, y) \exp(-ikz)$ , přičemž

$$U_{ol} = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{V_x}{2} \vee |y| \leq \frac{V_y}{2} \\ 0, & |x| > \frac{V_x}{2} \vee |y| < \frac{V_y}{2} \end{cases}. \quad (4.15)$$

Uvažujme dále, bez újmy na obecnosti, že předmět je osvětlen rovinnou vlnou s jednotkovou amplitudou. Za předpokladu, že je fáze dopadajícího světla v rovině povrchu předmětu ( $z = 0$ ) nulová a koeficient reflexe je jednotkový,  $r(x, y) = 1$ , nabývá komplexní amplituda světla těsně po odrazu od povrchu předmětu

<sup>3</sup>Označíme-li  $a$  jako největší radiální vzdálenost ve výstupní rovině, je největší úhel, který svírá difragovaná vlna s optickou osou  $\theta_m \approx a/d$ . Podmínka platnosti Fresnelovy aproximace  $N_F \theta_m^2/4 \ll 1$ , kde  $N_F = a^2/\lambda d$  je Fresnelovo číslo, omezuje platnost použití integrálu (4.14) [26].

tvar  $U(x, y, \Delta(x, y)) = \exp(-ik\Delta(x, y))$ . Kirchhoffův difrakční integrál (4.14) pro výpočet komplexní amplitudy  $U(x', y')$  světla ve vzdálenosti  $d$  od roviny povrchu předmětu  $(x', y')$  se pak redukuje na tvar

$$U(x', y') = \frac{\exp(-ikd)}{i\lambda d} \times \int_{-\frac{V_x}{2}}^{\frac{V_x}{2}} \int_{-\frac{V_y}{2}}^{\frac{V_y}{2}} \exp \left[ -ik \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2(d + \Delta(x, y))} - 2ik\Delta(x, y) \right] dx dy. \quad (4.16)$$

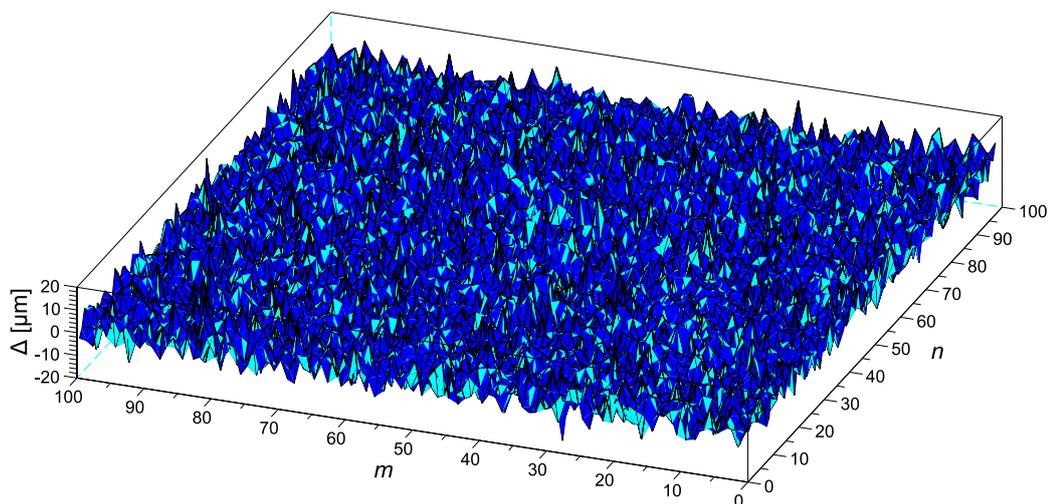
Nyní nasimulujeme jev koherenční zrnitosti pro případ osvětlení předmětu rovinnou vlnou, přičemž budeme porovnávat vlastnosti simulované struktury koherenční zrnitosti s výše uvedenými teoretickými vztahy. Zároveň budeme hledat optimální vstupní parametry simulace, aby se simulovaný jev koherenční zrnitosti co nejvíce přiblížil reálnému jevu.

### 4.3 Numerický model vzniku a šíření pole koherenční zrnitosti

Jak již bylo zmíněno, při odrazu koherentního světla od drsného rozhraní je fáze světla generovaného bodovými zdroji situovanými na povrchu předmětu různá, a proto dochází v prostoru před předmětem k interferenci sekundárních vln o různých fázových zpožděních. V libovolné rovině v poloprostoru před studovaným předmětem pak pozorujeme strukturu koherenční zrnitosti. Postup při simulaci vzniku pole koherenční zrnitosti je následující.

- Pomocí generátoru náhodných čísel vytvoříme dvourozměrnou matici  $\mathbf{A}$  o počtu  $m \times n$  prvků ( $i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ ), jejichž velikost definuje náhodné rozmístění bodových zdrojů na výškovém profilu předmětu. Na Obr. 4.5 je znázorněn výřez matice  $\mathbf{A}$  představující model drsného povrchu s normálním pravděpodobnostním rozdělením se zvolenou střední hodnotou  $0 \mu\text{m}$  a směrodatnou odchylkou  $5 \mu\text{m}$ . Matici  $\mathbf{A}$  následně uložíme jako textový soubor.

- Při simulaci šíření pole koherenční zrnitosti využijeme, v případě osvětlení předmětu rovinnou vlnou, Kirchhoffova difrakčního integrálu (4.16), který sčítá všechny příspěvky generovaných sekundárních vln přes osvětlenou oblast  $V_x V_y$  na povrchu předmětu, přičemž prvky matice  $\mathbf{A}$  při výpočtu dosadíme za dráhový rozdíl  $\Delta(x, y)$ . Výsledkem vztahu (4.16) je matice  $\mathbf{B}(U_{ij})$  o počtu  $m_{vy} \times n_{vy}$  prvků charakterizující rozložení komplexní amplitudy  $U(x', y')$  světla v rovině pozorování  $(x', y')$  ve vzdálenosti  $d$  od roviny předmětu  $(x, y)$ .



Obrázek 4.5: Výškový reliéf povrchu předmětu s normálním pravděpodobnostním rozdělením se střední hodnotou  $0 \mu\text{m}$  a směrodatnou odchylkou  $5 \mu\text{m}$ , který zavádí v každém bodě roviny povrchu předmětu  $(x, y)$  různý fázový rozdíl odražené koherentní vlny.

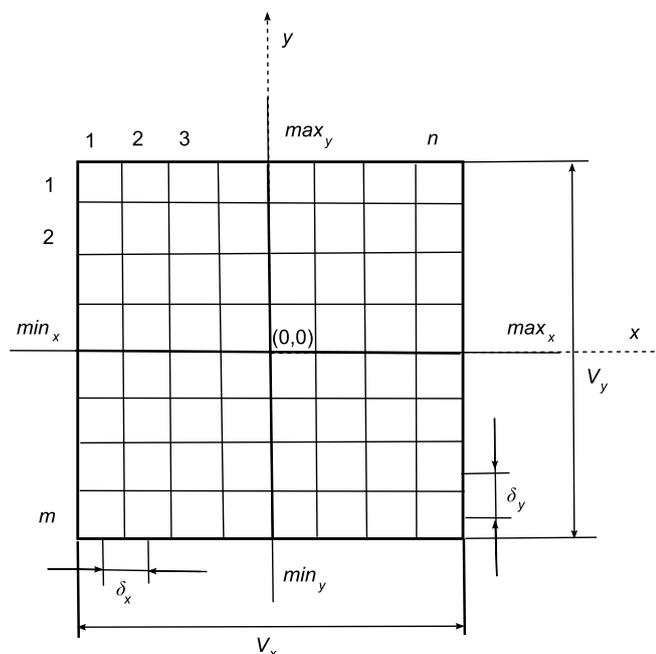
- Pomocí vztahu (4.17)

$$I(x', y') = |U(x', y')|^2 \quad (4.17)$$

v rovině detekce určíme a vykreslíme rozložení intenzity  $I(x', y')$  se zadanou úrovní šedi měnící se lineárně od černé k bílé, a to v závislosti na hodnotě vypočtené intenzity  $I(x', y')$ .

- Dále je důležité definovat reálnou vzdálenost mezi sousedními elementárními zdroji (body) na simulovaném povrchu předmětu. Pro tento účel zavedeme dva vektory orientované do směru souřadných os  $x$ ,  $y$ , jejichž složky definují pozici každého elementárního zdroje v rovině  $(x, y)$  vůči počátku souřadné soustavy  $(0,0)$ , jak je ukázáno na Obr. 4.6. Je-li velikost strany osvětleného povrchu předmětu  $V_{x,y} = \max_{x,y} - \min_{x,y}$ , kde  $\max_{x,y} > 0$  a  $\min_{x,y} < 0$ , potom vzdálenost mezi dvěma nejbližšími body (označíme jako  $\delta_{x,y}$ ) je  $\delta_x = V_x/(n-1)$ ,  $\delta_y = V_y/(m-1)$ . Složky obou vektorů během výpočtu komplexní amplitudy  $U$  světla v rovině pozorování  $(x', y')$  dosazujeme do vztahu (4.14) za souřadnice  $x$  a  $y$ <sup>4</sup>. Obdobně definujeme vzdálenost  $\delta_{x',y'}$  mezi body v rovině detekce, ve kterých určujeme výslednou komplexní amplitudu, tj.  $\delta_{x'} = V_{x'}/(n_{vy}-1)$ ,  $\delta_{y'} = V_{y'}/(m_{vy}-1)$ , kde  $V_{x'}$ ,  $V_{y'}$  představují velikosti stran oblasti detekce.

<sup>4</sup>V dalším textu budeme uvažovat  $\delta_x = \delta_y$ .



Obrázek 4.6: Rozdělení elementárních zdrojů v rovině povrchu předmětu  $(x, y)$ .

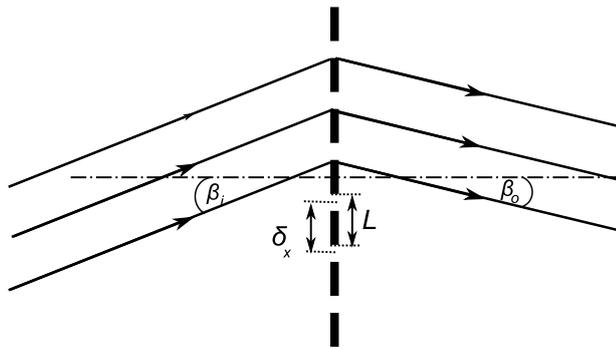
### 4.3.1 Vliv vzorkování na simulaci vzniku a šíření pole koherenční zrnitosti

I přesto, že je naší snahou co nejvěrněji nasimulovat reálný jev, není to úplně možné. Důvod je ten, že v simulačním programu pracujeme s maticí, která definuje pozici elementárních bodových zdrojů na povrchu předmětu. Hodnota každého prvku matice je sice náhodná, vzdálenost mezi jednotlivými prvky matice je však pravidelná, což neodpovídá reálné situaci. S analogickým případem se můžeme setkat při diskretizaci hodnot komplexní amplitudy světla při průchodu světla prostorovým modulátorem [39]. Tuto skutečnost můžeme pro jednoduchost demonstrovat na lineární difrakční mřížce na Obr. 4.7.

V rovině detekce se bude světlo difragované na mřížce zesilovat interferencí ve směrech, pro které je splněna podmínka konstruktivní interference. Matematicky lze tuto skutečnost zapsat pomocí mřížkové rovnice [39]

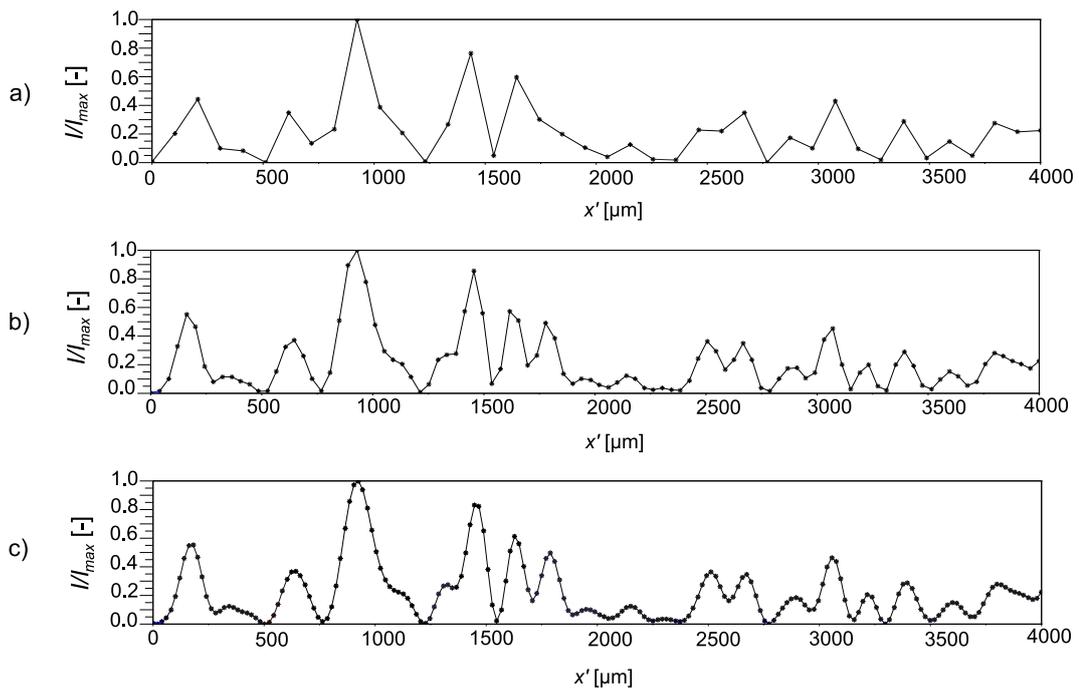
$$\sin \beta_i - \sin \beta_o = \frac{j\lambda}{L}, \quad (4.18)$$

kde  $L$  je mřížková konstanta,  $\beta_i$  úhel dopadu,  $\beta_o$  úhel difragovaného záření a  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Jelikož v tomto případě propustné části „mřížky“ tvoří pouze body, lze v rovnici (4.18) zaměnit  $L$  za  $\delta_x$ . Vzdálenost  $\delta_x$  mezi prvky matice  $\mathbf{A}$  musíme s ohledem na vztah (4.18) volit tak, aby efekt mřížky projevující se periodickými motivy ve struktuře koherenční zrnitosti nebyl patrný.



Obrázek 4.7: Difrakce na lineární mřížce.

Také při vykreslování struktury koherenční zrnitosti v rovině detekce je třeba zajistit dostatečné vzorkování. Grafy na Obr. 4.8 reprezentují jednodimenzionální intenzitní profil simulované koherenční zrnitosti generované při dopadu rovinné vlny na předmět. Parametry simulace jsou následující:  $m = 200$ ,  $n = 200$ ,  $V_x = 4$  mm,  $V_{x'} = 4$  mm,  $\delta_x = 40$   $\mu\text{m}$ ,  $d = 0,8$  m,  $\lambda = 632,8$  nm. Počet bodů na výstupu je a)  $n_{vy} = 40$ , b)  $n_{vy} = 100$ , c)  $n_{vy} = 200$ .

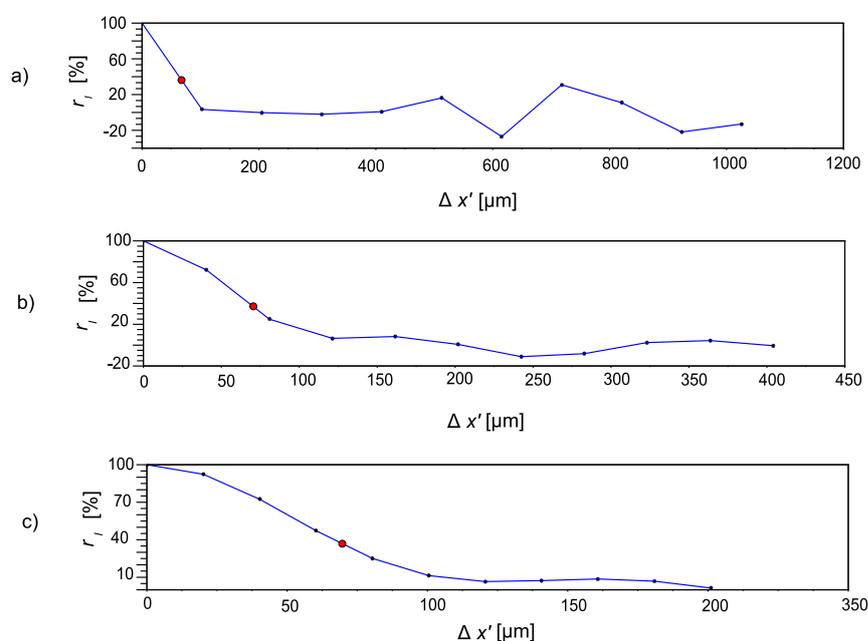


Obrázek 4.8: Jednodimenzionální intenzitní profil simulované struktury koherenční zrnitosti vykreslený a) 40 body, b) 100 body, c) 200 body.

Z Obr. 4.8 je zřejmé, že správné vykreslení intenzitního profilu koherenční zrnitosti podléhá počtu bodů  $n_{vy}$ . Proto nyní budeme hledat takový počet bodů, který zaručí dostatečné vzorkování intenzitního profilu na Obr. 4.8, přičemž dodatečné zvyšování počtu vykreslujících bodů již neovlivní tvar jednotlivých zrn ve struktuře. K tomuto účelu využijeme normovanou autokorelační funkci intenzity  $r_I$  (vztah (4.13)), budeme

určovat její šířku dle postupu navrženého v kapitole 4.1.2 a zjišťovat, jak se tato šířka mění s počtem bodů. Jak již bylo uvedeno, šířka normované autokorelační funkce  $r_I$  odpovídá střední velikosti zrna  $\alpha_{x'r}$  v intenzitním profilu. Proto je tato šířka značena identicky, tj.  $\alpha_{x'r}$ . Jelikož hodnoty autokorelační funkce intenzitního signálu známe pouze v některých bodech, jejichž vzájemná vzdálenost  $\Delta x'$  je daná vzdáleností  $\delta_{x'}$  mezi body výstupního intenzitního signálu, použijeme následující postup. Na Obr. 4.9 jsou znázorněny části průběhů normovaných autokorelačních funkcí definovaných pro kladné hodnoty  $\Delta x'$ . Body, ve kterých je tato funkce stanovena, jsou zvýrazněny černě. Na každém z těchto průběhů najdeme dva nejbližší body, mezi nimiž se nachází hodnota odpovídající pološířce  $\alpha_{x'r}/2$  normované autokorelační funkce  $r_I$ . Tato hodnota (označena červeně) se bude nacházet na spojnici, kterou mezi dvěma danými body vytvoříme.

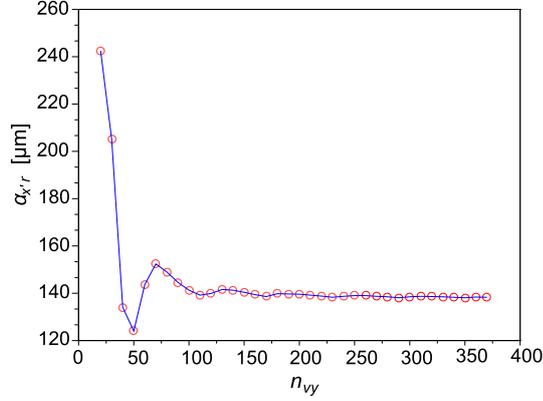
Obrázek 4.9 ilustruje nalezení pološířky  $\alpha_{x'r}/2$  normované autokorelační funkce  $r_I$  pro uvedené tři případy vzorkování (Obr. 4.9).



Obrázek 4.9: Průběh normované autokorelační funkce intenzitních profilů zaznamenaných na Obr. 4.8.

Obrázek 4.10 ukazuje závislost šířky  $\alpha_{x'r}$  normované autokorelační funkce  $r_I$  intenzitního profilu na počtu bodů  $n_{vy}$ , které tento intenzitní profil tvoří. Z Obr. 4.10 je evidentní, že pokud je počet bodů  $n_{vy} < 100$ , šířka autokorelační funkce  $r_I$  výrazně fluktuuje s různým počtem bodů  $n_{vy}$ . Pro  $100 \leq n_{vy} < 200$  se již šířka autokorelační funkce  $r_I$ , tedy i průběh intenzitního signálu, výrazně nemění (Obr. 4.8b a Obr. 4.9b), jsou však zaznamenány menší fluktuace. Pro  $n_{vy} \geq 200$  je šířka autokorelační funkce téměř konstantní. Lze tedy konstatovat, že uvedený intenzitní profil je dostatečně vykreslen 200 body (Obr. 4.8c).

Nyní případ zobecníme a odhadneme také dostatečný počet bodů pro vykreslení jednoho zrna se střední velikostí  $\alpha_{x'r}$ . S přihlédnutím na Obr. 4.8c a Obr. 4.9c je zřejmé, že průběh grafu autokorelační funkce  $r_I$  pro hodnoty vyšší než  $1/e$  její maximální hodnoty, a tedy příslušné zrno v řezu struktury koherenční zrnitosti, musí být vykresleno alespoň 8-10 body<sup>5</sup>.

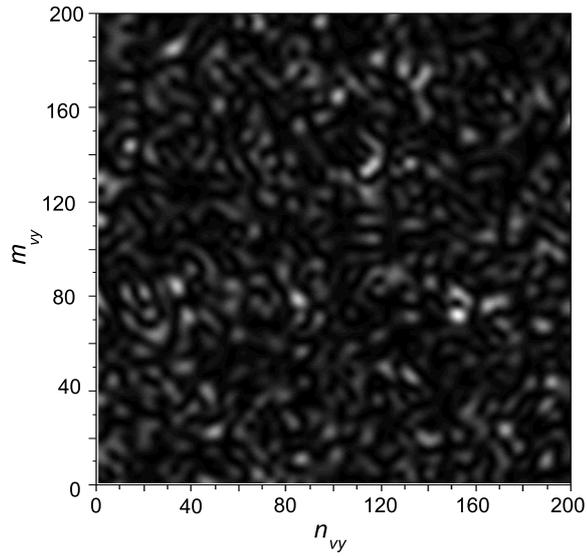


Obrázek 4.10: Závislost šířky  $\alpha_{x'r}$  normované autokorelační funkce intenzit  $r_I$  zaznamenaných na Obr. 4.8 na počtu  $n_{vy}$  vykreslujících bodů. Šířka  $\alpha_{x'r}$  normované autokorelační funkce je vypočítaná podle vztahu (4.12).

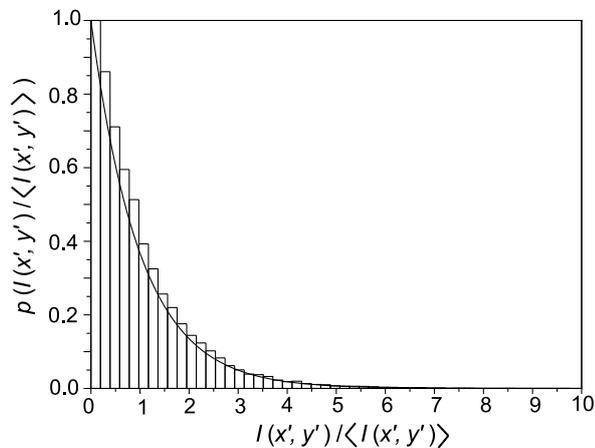
## 4.4 Vlastnosti pole koherenční zrnitosti vytvořeného pomocí numerického modelu

V této kapitole se zaměříme na vlastnosti simulované struktury koherenční zrnitosti vytvořené podle výše uvedeného numerického modelu. Určíme pravděpodobnostní rozdělení intenzity v bodě struktury a také střední velikost zrna ve struktuře vypočítanou pomocí normované autokorelační funkce intenzit. Pro jednoduchost budeme opět uvažovat rovinnou vlnu osvětlují předmět (Obr. 4.4), při výpočtu komplexní amplitudy v rovině detekce tedy využijeme vztah (4.16). Matici  $\mathbf{A}$  zvolíme čtvercovou o straně  $V_x$ , přičemž počet řádků i sloupců matice je stejný,  $m = n = 200$ . V rovině pozorování  $(x', y')$  ve vzdálenosti  $d$  budeme detekovat intenzitu v bodech matice  $\mathbf{B}$  o straně  $V_{x'}$  a stejném rozměru  $m_{vy} = m$ ,  $n_{vy} = n$  (Obr. 4.11). Ze získaného souboru hodnot detekované intenzity  $I(x', y')$  vypočteme střední hodnotu  $\langle I(x', y') \rangle$  a celý soubor pak normujeme, tj. určíme poměr  $I(x', y') / \langle I(x', y') \rangle$ . Dále vypočítáme směrodatnou odchylku  $\sigma_I$  souboru detekovaných intenzit  $I(x', y')$ , poměr signálu ku šumu  $S/N$  a kontrast  $C$ . Výsledek numerické simulace je znázorněn graficky v podobě histogramu na Obr. 4.12.

<sup>5</sup>Toto tvrzení o podmínce dostatečného vzorkování zrna ve struktuře koherenční zrnitosti je uvedeno také v [24].



Obrázek 4.11: Intenzitní rozdělení vygenerované struktury koherenční zrnitosti vypočtené pomocí vztahů (4.16) a (4.17), pro velikost strany  $V_x = 4$  mm osvětlené čtvercové plošky povrchu předmětu a vzdálenost  $d = 0,8$  m předmětu od roviny detekce. Další vstupní parametry simulace jsou následující:  $m_s = 200$ ,  $n_s = 200$ ,  $V_{x'} = 4$  mm,  $\delta_x = 20$   $\mu$ m,  $\delta_{x'} = 20$   $\mu$ m,  $\lambda = 632,8$  nm,  $m_{vy} = 200$ ,  $n_{vy} = 200$ .



Obrázek 4.12: Histogram výsledků měření souboru 40 000 hodnot normované intenzity  $I(x', y') / \langle I(x', y') \rangle$  v „bodě“ pole koherenční zrnitosti. Plná čára ukazuje, pro srovnání, teoreticky odvozenou hustotu pravděpodobnosti intenzity (exponenciální rozdělení) v bodě pole koherenční zrnitosti. Poměr signálu ku šumu je  $S/N = 1,003$ , vizibilita je  $C = 0,996$ .

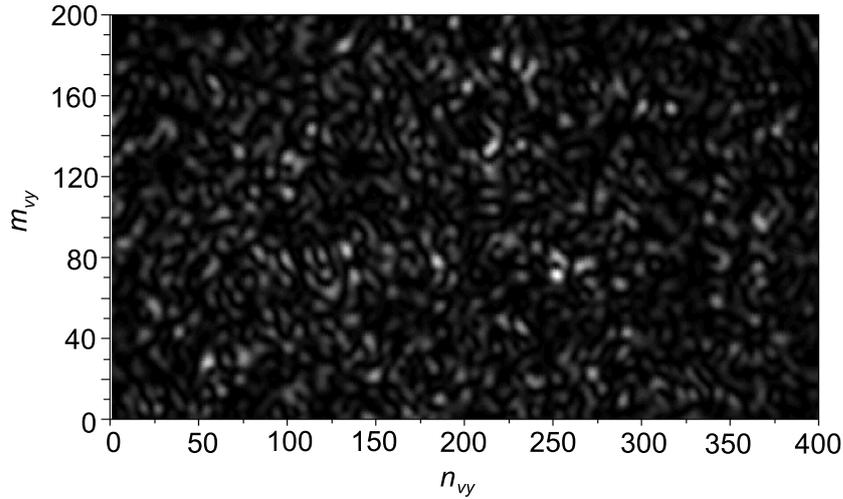
Jak ukazuje grafická reprezentace na Obr. 4.12, je zřejmé, že provedená simulace potvrzuje platnost teoretických statistických odvození (viz vztah (4.1)). V daných bodech pole koherenční zrnitosti se intenzita řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti a veličiny poměr signálu ku šumu a kontrast jsou přibližně jednotkové, jak je uvedeno v titulku obrázku.

Nyní soustředíme pozornost na určení velikosti zrn v generované struktuře koherenční zrnitosti v rovině detekce  $I(x', y')$  znázorněné na Obr. 4.11, přičemž budeme využívat postup popsany v kapitole 4.1.2. Uvedenou matici s počtem bodů  $200 \times 200$  intenzitní struktury rozdělíme na 200 řádků. Pro každý řádek vypočítáme normovanou autokorelační funkci a určíme její šířku  $\alpha_{x'r}$ .

Výsledná hodnota střední velikosti zrn získaná z 200 řádků je  $\alpha_{x'} = 127,6 \mu\text{m}$  a příslušná směrodatná odchylka charakterizující rozptyl jednotlivých hodnot  $\alpha_{x'r}$  je  $\sigma_{\alpha_{x'}} = 33,6 \mu\text{m}$ . Teoretická hodnota vypočtená pomocí vztahu (4.12) je  $\alpha_{x'} = 132,6 \mu\text{m}$ .

Vysoká směrodatná odchylka  $33,6 \mu\text{m}$  svědčí o tom, že se s každým řádkem střední hodnota  $\alpha_{x'r}$  velikosti zrna výrazně mění. To je způsobeno nedostatečným počtem zrn na řádku<sup>6</sup>. Abychom zvýšili přesnost odhadu střední velikosti zrna v celé struktuře koherenční zrnitosti, budeme řádky prodlužovat tak, aby se počet zrn zvětšoval a střední hodnota  $\alpha_{x'r}$  se měnila jen minimálně.

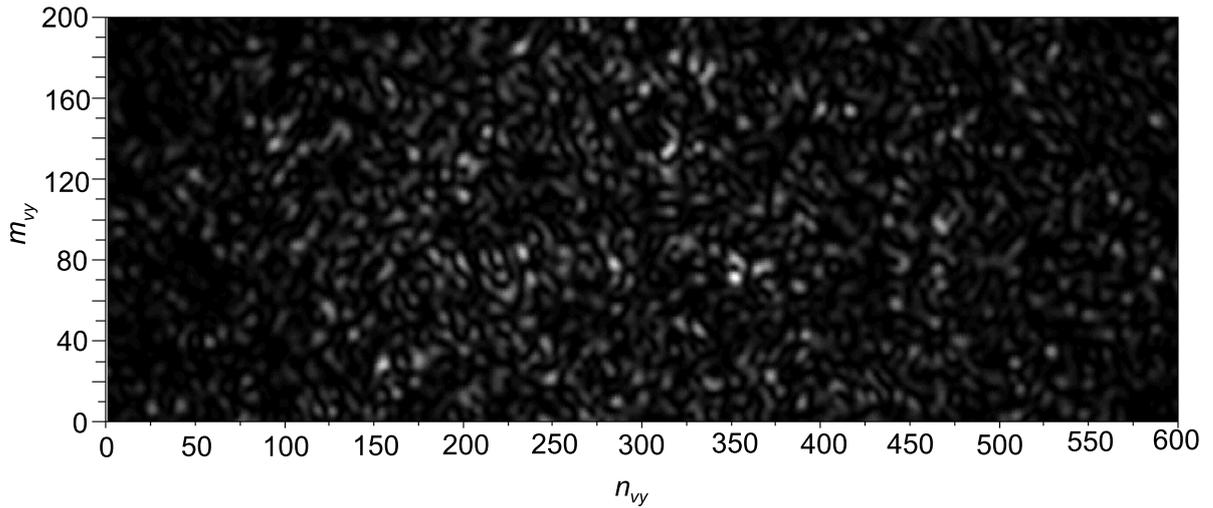
Na Obr. 4.13 je struktura koherenční zrnitosti detekovaná v  $200 \times 400$  bodech,  $V_{x'} = 8 \text{ mm}$  a na Obr. 4.14 je struktura koherenční zrnitosti detekovaná v  $200 \times 600$  bodech,  $V_{x'} = 12 \text{ mm}$ . V obou případech počítáme normovanou autokorelační funkci ve 200 řádcích<sup>7</sup>.



Obrázek 4.13: Intenzitní rozdělení vygenerované struktury koherenční zrnitosti vypočtené pomocí vztahů (4.16) a (4.17), pro velikost strany  $V_x = 4 \text{ mm}$  osvětlené čtvercové plošky povrchu předmětu a vzdálenost  $d = 0,8 \text{ m}$  předmětu od roviny detekce. Další vstupní parametry simulace jsou následující:  $m_s = 200$ ,  $n_s = 200$ ,  $V_{x'} = 8 \text{ mm}$ ,  $\delta_x = 20 \mu\text{m}$ ,  $\delta_{x'} = 20 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ ,  $m_{vy} = 200$ ,  $n_{vy} = 400$ .

<sup>6</sup>Přesnost statistických vyhodnocení závisí na počtu zrn ve struktuře koherenční zrnitosti, jak je uvedeno například v [24].

<sup>7</sup>Vzdálenost mezi jednotlivými body je stejná jako v předchozím případě  $\delta_{x'} = 20 \mu\text{m}$ .



Obrázek 4.14: Intenzitní rozdělení vygenerované struktury koherenční zrnitosti vypočtené pomocí vztahů (4.16) a (4.17), pro velikost strany  $V_x = 4$  mm osvětlené čtvercové plošky povrchu předmětu a vzdálenost  $d = 0,8$  m předmětu od roviny detekce. Další vstupní parametry simulace jsou následující:  $m_s = 200$ ,  $n_s = 200$ ,  $V_{x'} = 12$  mm,  $\delta_x = 20$   $\mu$ m,  $\delta_{x'} = 20$   $\mu$ m,  $\lambda = 632,8$  nm,  $m_{vy} = 200$ ,  $n_{vy} = 600$ .

Výsledná hodnota střední velikosti zrna získaná z 200 řádků ze struktur koherenční zrnitosti vyobrazených na Obr. 4.13 a Obr. 4.14 je  $\alpha_{x'} = 133,6$   $\mu$ m a  $\alpha_{x''} = 138,8$   $\mu$ m. Odpovídající směrodatné odchylky jsou  $\sigma_{\alpha_{x'}} = 20,8$   $\mu$ m a  $\sigma_{\alpha_{x''}} = 15,2$   $\mu$ m. Jak jsme předpokládali, přesnost prezentovaného výpočtu střední velikosti zrn se zvýšila s větším počtem zrn v detekované struktuře.

Závěrem této kapitoly lze konstatovat, že vypočítané statistiky prvního i druhého řádu se shodují s odvozenými teoretickými statistikami. Tím jsme ověřili funkčnost prezentovaného modelu vzniku a šíření koherenční zrnitosti, který dále budeme využívat v následující kapitole.

# Kapitola 5

## Simulace translace předmětu metodou korelace polí koherenční zrnitosti

V této kapitole budeme využívat metodou korelace polí koherenční zrnitosti pro vyhodnocení vzájemného posuvu simulovaných struktur koherenční zrnitosti v důsledku malých změn stavu povrchu předmětu, které jsou popsány složkami malé deformace (translace, rotace a vlastní deformace) [40]. Konkrétně se zaměříme na posuv předmětu ve směru tečném k rovině předmětu i na posuv ve směru normály k rovině předmětu, přičemž budeme uvažovat, že ostatní složky malé deformace jsou nulové. Předmět se tudíž bude pouze posouvat jako tuhé těleso ve směru vybrané souřadné osy. Poté budeme řešit situaci, kdy se těleso posouvá ve směru dvou, případně tří souřadných os najednou. V souladu s cíli disertační práce si popíšeme způsob simulace zmíněných posuvů předmětu a pro vybrané experimentální uspořádání realizované v laboratoři porovnáme výstupy simulace s výsledky experimentu.

### 5.1 Princip metody

Korelační metoda popsaná v této práci vychází z předpokladu, že pole koherenční zrnitosti generované předmětem se pohybuje v důsledku pohybu předmětu. Princip této metody je znázorněn na Obr. 5.1<sup>1</sup>. Předmět, který je osvětlen koherentním laserovým svazkem, se posune o  $a_x$  ve směru tečny roviny studovaného povrchu předmětu. Vytvořené pole koherenční zrnitosti je v podobě intenzitního signálu snímáno pomocí lineárního detektoru před posuvem i po posuvu předmětu. Příslušné intenzitní signály  $I_1$  a  $I_2$  jsou numericky

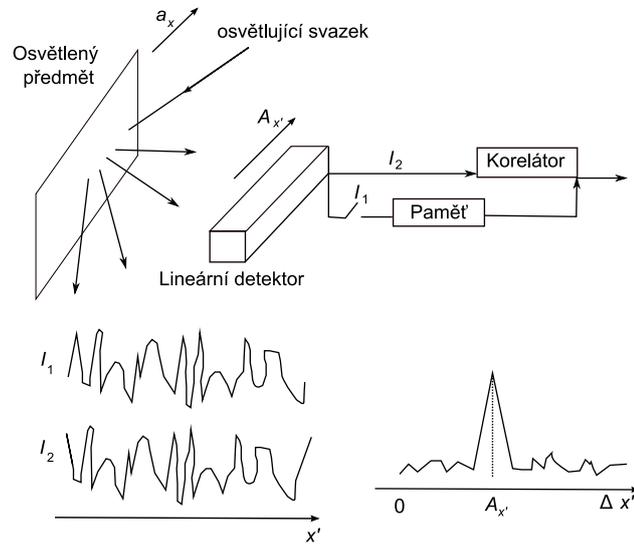
---

<sup>1</sup>Na obrázku je znázorněn posuv předmětu ve směru tečném k povrchu předmětu. Prezentovaný princip metody korelace polí koherenční zrnitosti však můžeme zobecnit i pro případ měření posuvu ve směru normály studovaného povrchu předmětu.

zpracovány v programu, který určuje pozici maxima normované funkce vzájemné korelace intenzit  $I_1$  a  $I_2$  dle následující relace:

$$r_{12}(\Delta x') = \frac{\langle \Delta I_1(x') \Delta I_2(x' + \Delta x') \rangle}{\sqrt{\langle (\Delta I_1(x'))^2 \rangle} \sqrt{\langle (\Delta I_2(x'))^2 \rangle}}, \quad (5.1)$$

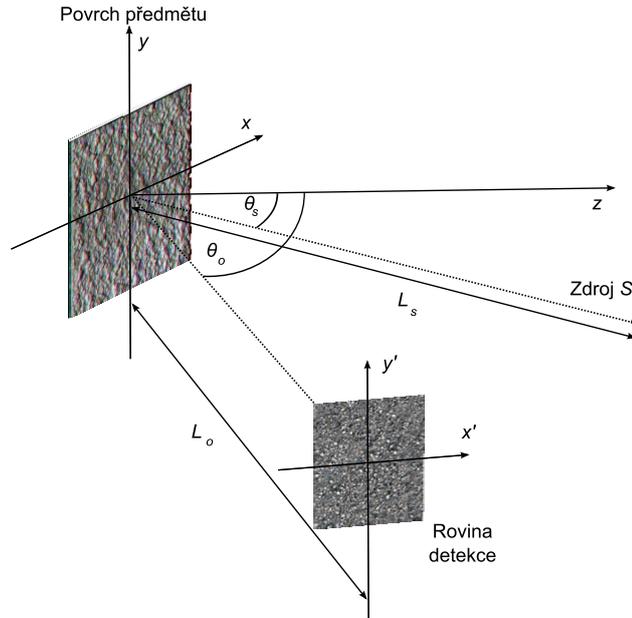
kde veličiny  $\Delta I_1$  a  $\Delta I_2$  reprezentují fluktuace intenzit zaznamenaných před a po posuvu předmětu a  $\Delta x'$  reprezentuje vzájemný posuv intenzitních signálů  $I_1$  a  $I_2$ . Pozice maxima funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  přísluší zaznamenanému posuvu  $A_{x'}$  v rovině detektoru [5]. Ze stanoveného posuvu  $A_{x'}$  struktury koherenční zrnitosti je možné zpětně určit složku translace  $a_x$  předmětu, jak bude ukázáno v následujícím odstavci.



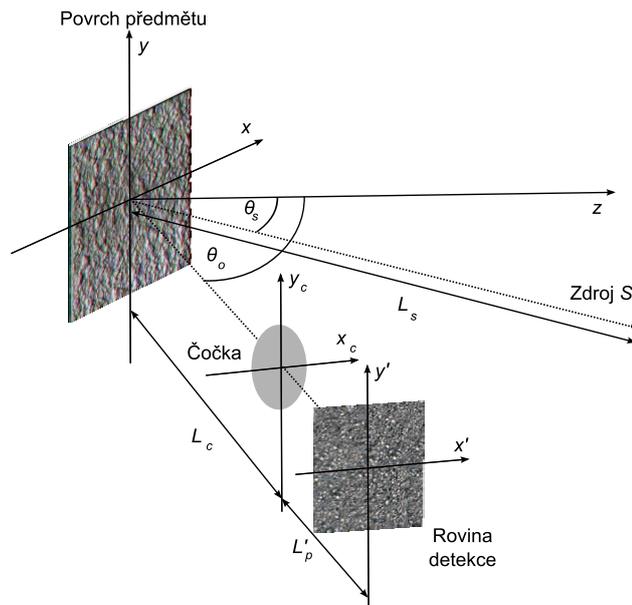
Obrázek 5.1: Princip lineární korelační metody.

## 5.2 Geometrická uspořádání pro měření translace předmětu

V této části budou uvedeny teoretické vztahy ke stanovení vybraných složek posuvu předmětu, které byly již dříve teoreticky odvozeny [1] a experimentálně použity například v [5] nebo [42]. Tyto vztahy budou uvedeny pro případ opticky volného pole, tj. pro případ, kdy mezi rovinou předmětu a rovinou detekce není umístěn žádný optický systém. Poté budeme uvažovat situaci, kdy je mezi rovinou předmětu a rovinou detekce umístěna tenká čočka (obrazové pole).



Obrázek 5.2: Souřadnicový systém pro pozorování koherenční zrnitosti v opticky volném poli.



Obrázek 5.3: Souřadnicový systém pro pozorování koherenční zrnitosti v obrazovém poli.

Uvažujme experimentální uspořádání na Obr. 5.2. Zkoumaný předmět je v rovině  $(x, y)$  osvětlován koherentním svazkem vycházejícím z bodového zdroje  $S$ . V rovině pozorování  $(x', y')$  je umístěn detektor, který snímá řez pole koherenční zrnitosti. Vztah mezi posuvem  $A_{x'}$  koherenční zrnitosti a  $x$ -ovou složkou translace  $a_x$ , popřípadě  $z$ -ovou složkou translace  $a_z$  pro experimentální uspořádání na Obr. 5.2 je [5]

$$A_{x'} = a_x \left( \frac{L_o \cos^2 \theta_s}{L_s \cos \theta_o} + \cos \theta_o \right), \quad (5.2)$$

$$A_{x'} = -a_z \left( \frac{L_o \cos \theta_s \sin \theta_s}{L_s \cos \theta_o} + \sin \theta_o \right), \quad (5.3)$$

kde  $L_o$  je vzdálenost mezi předmětem a rovinou detekce,  $L_s$  je vzdálenost mezi bodovým zdrojem a předmětem,  $\theta_o$  a  $\theta_s$  jsou úhly směru pozorování a osvětlení.

Umístíme-li do roviny  $(x_c, y_c)$  mezi předmět a detektor tenkou čočku s ohniskovou vzdáleností  $f$  (viz Obr. 5.3), vztahy pro výpočet obou složek translace předmětu nabývají tvaru [5]

$$\frac{A_{x'} f}{L'_p - f} = -a_x \left( \frac{L_c (L'_p - f) - f L'_p \cos^2 \theta_s}{L_s (L'_p - f) \cos^2 \theta_o} + \cos \theta_o \right), \quad (5.4)$$

$$\frac{A_{x'} f}{L'_p - f} = a_z \left( \frac{L_c (L'_p - f) - f L'_p \cos \theta_s \sin \theta_s}{L_s (L'_p - f) \theta_o} \right) + a_z \sin \theta_o, \quad (5.5)$$

kde  $L'_p$  je vzdálenost mezi čočkou a rovinou detekce a  $L_c$  je vzdálenost mezi předmětem a čočkou.

Vztahy (5.2)-(5.5) byly odvozeny za předpokladu, že předmět je osvětlen parabolickou vlnou vycházející z bodového zdroje  $S$ . Abychom se přiblížili reálné situaci v laboratoři, nahradíme parabolickou vlnu gaussovským svazkem. Komplexní amplitudu gaussovského svazku ve vzdálenosti  $L_s$  od jeho pasu určíme ze vztahu [26]

$$\begin{aligned} U(x, y, \Delta(x, y)) &= A_1 \frac{\omega_o}{\omega(L_s + \Delta(x, y))} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(L_s + \Delta(x, y))} \right] \times \\ &\times \exp \left[ -ik(L_s + \Delta(x, y)) - ik \frac{x^2 + y^2}{2R(L_s + \Delta(x, y))} + i\zeta(L_s + \Delta(x, y)) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

kde  $\omega_o$  je poloměr pasu a

$$\omega(L_s + \Delta(x, y)) = \omega_o \left( 1 + \frac{(L_s + \Delta(x, y))}{q_o^2} \right)^{1/2} \quad (5.7)$$

je poloměr stopy laserového svazku ve vzdálenosti  $L_s + \Delta(x, y)$  od pasu<sup>2</sup>. Dále

---

<sup>2</sup>Vstupní parametry simulace  $\omega_o$  a  $L_s$  budou voleny tak, aby velikost osvětlené kruhové plochy vymezené poloměrem  $\omega$  byla menší než oblast simulovaného povrchu předmětu.

veličina  $q_o$  je Rayleighova vzdálenost,  $R$  je poloměr křivosti vlnoplochy gaussovského svazku,  $\zeta$  je fázové zpoždění na ose svazku a  $A_1$  představuje konstantu<sup>3</sup>. V dalším textu budeme uvažovat kolmý dopad gaussovského svazku na předmět, to znamená, že úhel směru osvětlení  $\theta_s = 0$ .

## 5.3 Numerický model translace předmětu

V kapitole 5.1 bylo zmíněno, že ze znalosti hodnoty posuvu  $A_{x'}$  struktury koherenční zrnitosti získané nalezením polohy maxima normované funkce vzájemné korelace intenzit lze zpětně určit složku translace  $a_x$  předmětu, popřípadě  $a_z$ . V simulačním programu budeme řešit inverzní úlohu, to znamená, že pro daný posuv předmětu  $a_x$  určíme posuv  $A_{x'}$  struktury koherenční zrnitosti, přičemž budeme postupovat dvěma způsoby. Jedním z nich je dosazení všech vstupních parametrů do jednoho ze vztahů (5.2)-(5.5) mezi složkou translace předmětu  $a_x$ , popřípadě  $a_z$  a odpovídajícím posuvem  $A_{x'}$  struktury koherenční zrnitosti. Takto získaný posuv  $A_{x'}$  struktury koherenční zrnitosti porovnáme s polohou maxima funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  (5.1), kterou určíme na základě korelace dvou simulovaných intenzitních signálů zaznamenaných v rovině detekce před a po posuvu předmětu. Abychom při určování polohy maxima funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  nebyli ovlivněni vzorkováním v detekční rovině, využijeme tříbodové gaussovské interpolace funkce vzájemné korelace intenzit  $r_{12}$  [43].

### 5.3.1 Složka translace $a_x$ (volné pole)

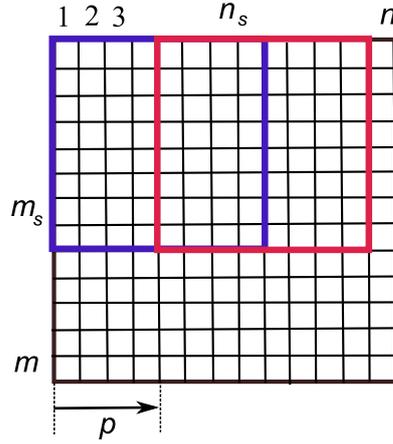
Nyní bude popsán způsob simulace posuvu předmětu ve směru souřadné osy  $x$  (v tečném směru v rovině povrchu předmětu), přičemž se budeme odkazovat na Obr. 5.4. Z vytvořeného textového souboru načteme do simulačního programu submatici  $\mathbf{A}_s = \mathbf{A}(1 : m_s, 1 : n_s)$  (na Obr. 5.4 je označena modře), jejíž prvky, jak již bylo zmíněno v kapitole 4.3, reprezentují výškový profil osvětlené části povrchu předmětu. Pomocí Fresnelova-Kirchhoffova difrakčního integrálu

$$U(x', y') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik(L_o + \Delta(x, y)))}{i\lambda(L_o + \Delta(x, y))} \times \\ \times U(x, y, \Delta(x, y)) \exp\left(-ik \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2(L_o + \Delta(x, y))}\right) dx dy \quad (5.8)$$

určíme komplexní amplitudu  $U$  světla v rovině detekce ve vzdálenosti  $L_o$  od předmětu (Obr. 5.2). Za komplexní amplitudu  $U(x, y, \Delta)$  dosazujeme komplexní amplitudu

<sup>3</sup>Bez újmy na obecnosti jsme zvolili  $A_1 = 1$ .

gaussovského svazku ve vzdálenosti  $L_s$  od jeho pasu podle (5.6). Jelikož zkoumáme posuv struktury koherenční zrnitosti ve směru souřadné osy  $x'$ , stačí, když rozložení komplexní amplitudy  $U$  určíme pouze v jednom řádku roviny detekce, přičemž  $y' = \text{konst.}$  Tím při výpočtu dojde ke značné časové úspoře. Při simulaci posuvu struktury koherenční zrnitosti v důsledku posuvu zkoumaného předmětu načteme do programu submatici  $\mathbf{A}_s = \mathbf{A}(1 : m_s, 1 + p : n_s + p)$  (na Obr. 5.4 je označena červeně), přičemž parametr  $p$  je celé číslo odpovídající počtu sloupců, o jaký posouváme submatici  $\mathbf{A}_s$ <sup>4</sup>.



Obrázek 5.4: Znázornění simulace tečného posuvu předmětu.

Je třeba si uvědomit, že vztah (5.8) platí za předpokladu, že rovina  $(x, y)$  je rovnoběžná s rovinou  $(x', y')$ . Podle experimentálního uspořádání na Obr. 5.2 však rovina  $(x', y')$  svírá nenulový úhel  $\theta_o$  s rovinou  $(x, y)$ , což musíme při numerických výpočtech zahrnout. Postup je následující: Budeme postupně vytvářet roviny rovnoběžné s rovinou  $(x', y')$ , které budou obsahovat všechny  $x$ -ové souřadnice roviny předmětu. V každé z těchto rovin zadefinujeme souřadnou soustavu s kartézskými osami  $x_N, y_N$ , přičemž počátek této souřadné soustavy je určen bodem, ve kterém osa  $z_N$  protíná tu kterou rovinu. Celou situaci vystihuje Obr. 5.5. Vybereme pro ilustraci jeden bod v předmětové rovině, který označíme  $x_1$ . Jeho  $x$ -ová souřadnice v souřadné soustavě  $(x, y, z)$  je označena jako  $D_{x_1}$ . V novém rotovaném souřadnicovém systému  $(x_N, y_N, z_N)$  je  $x$ -ová souřadnice bodu  $x_1$  označena jako  $D_{x_1N}$  a je zřejmé, že<sup>5</sup>

$$D_{x_1N} = D_{x_1} \cos \theta_o. \quad (5.9)$$

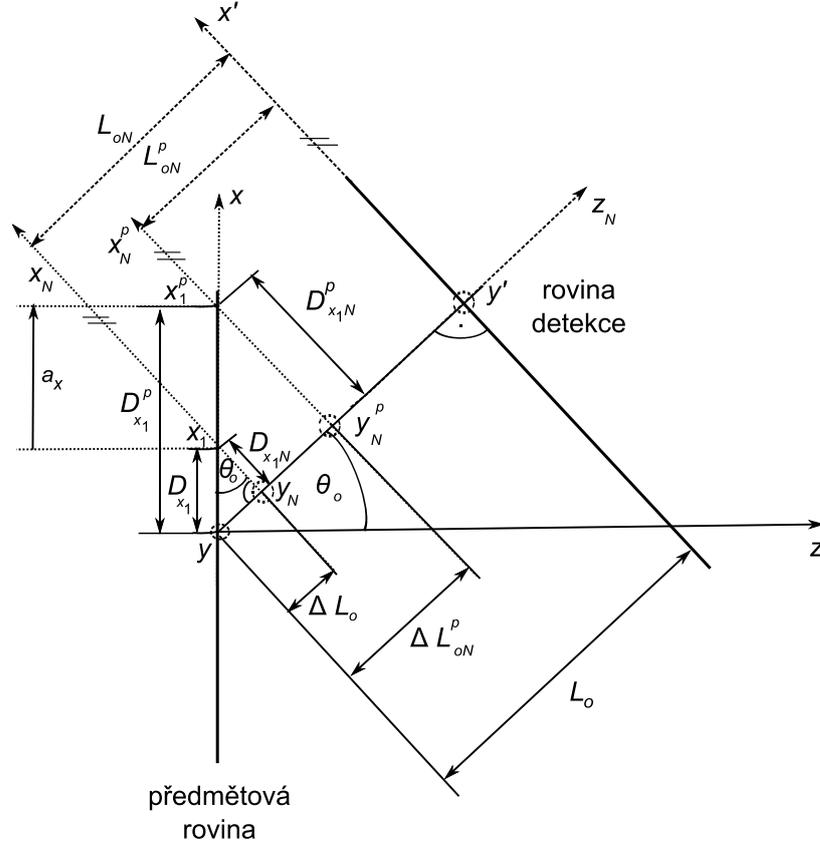
Vzdálenost rovin  $(x_N, y_N)$  a  $(x', y')$  je potom

$$L_{oN} = L_o - \Delta L_o = L_o - D_{x_1N} \operatorname{tg} \theta_o. \quad (5.10)$$

<sup>4</sup>Reálný posuv předmětu je pak  $a_x = p\delta_x$ .

<sup>5</sup>V obou souřadných soustavách  $(x, y, z)$  i  $(x_N, y_N, z_N)$  jsou  $y$ -ové souřadnice totožné.

Při výpočtu integrálu (5.8) pro daný bod roviny  $(x, y)$  nahrazujeme souřadnice  $x$  a  $y$  a vzdálenost  $L_o$  vztahy (5.9) a (5.10). Tento postup aplikujeme pro všechny  $x$ -ové body roviny  $(x, y)$ . Nyní se bod  $x_1$  v důsledku tečné translace předmětu posune o hodnotu  $a_x$



Obrázek 5.5: Řez rovinami  $(x, y)$  a  $(x', y')$ .

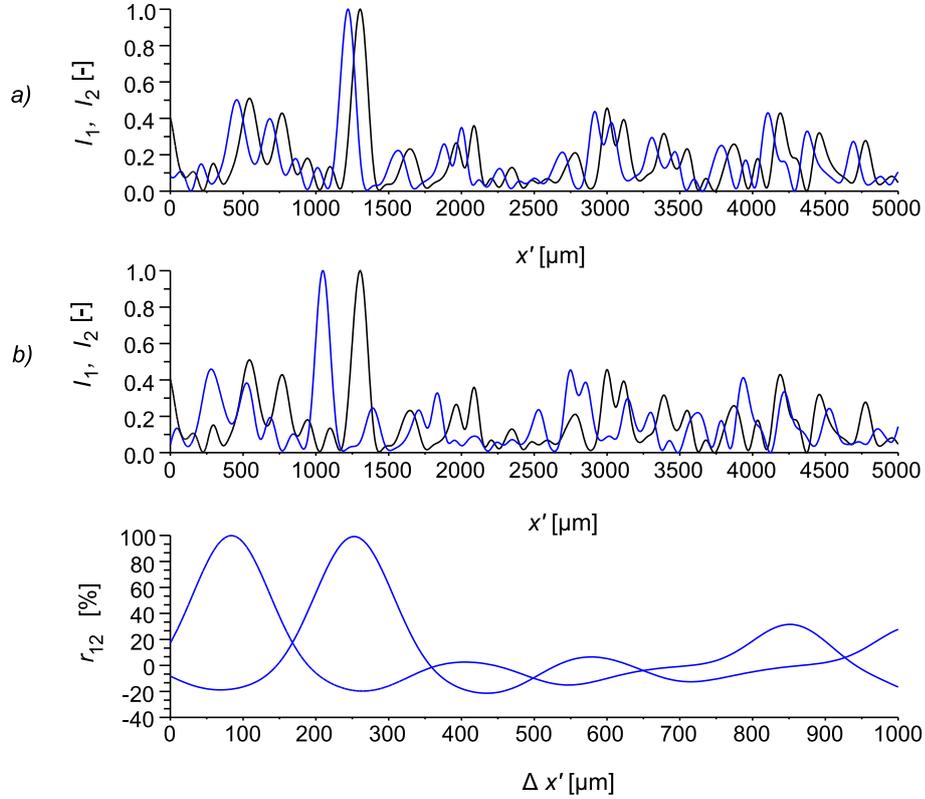
ve směru souřadné osy  $x$ . Posunutý bod označíme  $x_1^p$ . Opět budeme rotovat rovinou  $(x, y)$  kolem bodu  $x_1^p$  tak, aby byla rovnoběžná s rovinou  $(x', y')$ . Bod  $x_1^p$  má nyní v novém souřadnicovém systému  $(x_N^p, y_N^p, z_N)$  vůči jejímu středu  $(0, 0)_N^p$  polohu  $D_{x_1N}^p$ .

$$D_{x_1N}^p = D_{x_1}^p \cos \theta_o, \quad (5.11)$$

Vztahy (5.9) a (5.10) nyní nabývají tvaru

$$L_{oN}^p = L_o^p - \Delta L_o^p = L_o^p - D_{x_1N}^p \operatorname{tg} \theta_o. \quad (5.12)$$

Graf na Obr. 5.6 ukazuje výsledek simulace porovnávaných intenzitních struktur koherenční zrnitosti ( $I_1$  - černá křivka a  $I_2$  - modrá křivka) i stanovené posuvy  $A_{x'}$  odpovídající polohám maxima normované funkce vzájemné korelace  $r_{12max}$  intenzit.



Obrázek 5.6: Posuv  $A_{x'}$  struktury koherenční zrnitosti generované při dopadu gaussovského svazku na předmět v důsledku tečné translace předmětu  $a_x$  a odpovídající normovaná funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit  $I_1$  a  $I_2$ . Vstupní parametry simulace:  $m_s = 200$ ,  $n_s = 200$ ,  $m_{vy} = 1000$ ,  $V_x = 5$  mm,  $V_{x'} = 5$  mm,  $\delta_x = 25$   $\mu\text{m}$ ,  $\delta_{x'} = 5$   $\mu\text{m}$ ,  $L_s = 0,3$  m  $L_o = 0,7$  m,  $\lambda = 632,8$  nm,  $\theta_o = 10^\circ$ . Poloměr laserového svazku v pasu a ve vzdálenosti  $L_s$  od pasu je  $\omega_o = 30$   $\mu\text{m}$  a  $\omega(L_s) = 2,0$  mm. a) Zvolená translace předmětu je  $a_x = 25$   $\mu\text{m}$  a odpovídající posuv struktury koherenční zrnitosti vypočtený pomocí vztahu (5.2) je  $A_{x'} = 83,9$   $\mu\text{m}$ . Poloha maxima normované funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit  $I_1$  a  $I_2$  určená ze simulace ( $r_{12max} = 99,9$  %) je  $A_{x'}^{sim} = 84$   $\mu\text{m}$ . b) Zvolená translace předmětu je  $a_x = 75$   $\mu\text{m}$  a odpovídající posuv struktury koherenční zrnitosti vypočtený pomocí vztahu (5.2) je  $A_{x'} = 252,5$   $\mu\text{m}$ . Poloha maxima normované funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit  $I_1$  a  $I_2$  určená ze simulace ( $r_{12max} = 99,2$  %) je  $A_{x'}^{sim} = 251,6$   $\mu\text{m}$ .

### 5.3.2 Složka translace $a_x$ (obrazové pole)

Řešení úlohy popisu šíření pole koherenční zrnitosti v obrazovém poli (Obr. 5.3) se skládá z několika částí, a sice z popisu šíření pole koherenční zrnitosti od předmětu k čočce, násobení komplexní amplitudy pole v rovině čočky komplexní amplitudovou propustností čočky a následného šíření od čočky k rovině detekce. Komplexní amplitudu světla v rovině  $(x_c, y_c)$  těsně před tenkou čočkou ve vzdálenosti  $L_c$  od předmětu vypočítáme pomocí

$$U(x_c, y_c) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ikL_{c\Delta})}{i\lambda L_{c\Delta}} \times \\ \times U(x, y, \Delta(x, y)) \exp\left(-ik \frac{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2}{2L_{c\Delta}}\right) dx dy, \quad (5.13)$$

přičemž jsme pro jednoduchost použili substituci

$$L_{c\Delta} = L_c + \Delta(x, y). \quad (5.14)$$

Poté využijeme vztah pro komplexní amplitudu světla v rovině detekce  $(x', y')$  vzdálené o  $L'_p$  od čočky<sup>6</sup>

$$U(x', y') = \frac{\exp(-ikL'_p)}{i\lambda L'_p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_c, y_c) t(x_c, y_c) P(x_c, y_c) \times \\ \times \exp\left(-ik \frac{(x' - x_c)^2 + (y' - y_c)^2}{2L'_p}\right) dx_c dy_c, \quad (5.15)$$

kde

$$t(x_c, y_c) \approx \exp\left(ik \frac{x_c^2 + y_c^2}{2f}\right) \quad (5.16)$$

představuje komplexní funkci propustnosti tenké čočky o ohniskové vzdálenosti  $f$ . Pupilovou funkci čočky značíme  $P(x_c, y_c)$ , a platí, že  $P(x_c, y_c) = 1$  uvnitř apertury čočky a  $P(x_c, y_c) = 0$  vně apertury.

Dosazením (5.13) do (5.15) nabývá komplexní amplituda světla v rovině detekce  $(x', y')$  tvaru

<sup>6</sup>Vztahy (5.13) a (5.15) jsou analogické k (5.8).

$$\begin{aligned}
U(x', y') &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-ik(L_{c\Delta} + L'_p)\right)}{\lambda^2 L_{c\Delta} L'_p} U(x, y, \Delta(x, y)) \times \\
&\times \exp\left(-ik \frac{(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2}{2L_{c\Delta}}\right) \exp\left(-ik \frac{(x' - x_c)^2 + (y' - y_c)^2}{2L'_p}\right) \times \\
&\times \exp\left(ik \frac{x_c^2 + y_c^2}{2f}\right) dx dy dx_c dy_c. \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Po roznásobení argumentů v exponentech je výhodné vztah (5.17) upravit do tvaru

$$\begin{aligned}
U(x', y') &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-ik(L_{c\Delta} + L'_p)\right)}{\lambda^2 L_{c\Delta} L'_p} \exp\left(-ik \frac{x'^2 + y'^2}{2L'_p}\right) U(x, y, \Delta(x, y)) \times \\
&\times \exp\left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2L_{c\Delta}}\right) \exp\left(-ik \frac{x_c^2 + y_c^2}{2\zeta}\right) \exp\left(ik \frac{xx_c + yy_c}{L_{c\Delta}}\right) \times \\
&\times \exp\left(ik \frac{x'x_c + y'y_c}{L'_p}\right) dx dy dx_c dy_c, \tag{5.18}
\end{aligned}$$

přičemž jsme použili substituci

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{L_{c\Delta}} + \frac{1}{L'_p} - \frac{1}{f}. \tag{5.19}$$

Uvážíme-li, že

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ik \frac{x_c^2}{2\zeta}\right) \exp\left(ik \frac{xx_c}{L_{c\Delta}}\right) \exp\left(ik \frac{x'x_c}{L'_p}\right) dx_c = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ik \frac{x_c^2}{2\zeta} + ik \left(\frac{x}{L_{c\Delta}} + \frac{x'}{L'_p}\right) x_c\right) dx_c = \\
&= \sqrt{\frac{\zeta\lambda}{i}} \exp\left(\frac{ik\zeta}{2} \left(\frac{x}{L_{c\Delta}} + \frac{x'}{L'_p}\right)^2\right), \tag{5.20}
\end{aligned}$$

kde jsme při integraci využili tabulkového integrálu [44]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 x^2 + bx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right), \tag{5.21}$$

nabývá vztah (5.18) po integraci podle  $x_c, y_c$  tvaru

$$\begin{aligned}
U(x', y') &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta}{i\lambda L_{c\Delta} L'_p} \exp(-ik(L_{c\Delta} + L'_p)) U(x, y, \Delta(x, y)) \times \\
&\times \exp\left(-\frac{ik}{2L_{c\Delta}}(x^2 + y^2)\right) \exp\left(-\frac{ik}{2L'_p}(x'^2 + y'^2)\right) \times \\
&\times \exp\left(-\frac{ik\zeta}{2}\left(\frac{x}{L_{c\Delta}} + \frac{x'}{L'_p}\right)^2\right) dx dy, \tag{5.22}
\end{aligned}$$

přičemž finální vztah pro výpočet komplexní amplitudy  $U(x', y')$  lze uvést ve tvaru<sup>7</sup>

$$\begin{aligned}
U(x', y') &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta}{i\lambda L_{c\Delta} L'_p} \exp(-ik(L_{c\Delta} + L'_p)) U(x, y, \Delta(x, y)) \times \\
&\times \exp\left(-\frac{ik}{2L_{c\Delta}}\left(1 - \frac{\zeta}{L_{c\Delta}}\right)(x^2 + y^2)\right) \exp\left(-\frac{ik}{2L'_p}\left(1 - \frac{\zeta}{L'_p}\right)(x'^2 + y'^2)\right) \times \\
&\times \exp\left(\frac{ik\zeta}{L_{c\Delta} L'_p}(xx' + yy')^2\right) dx dy. \tag{5.23}
\end{aligned}$$

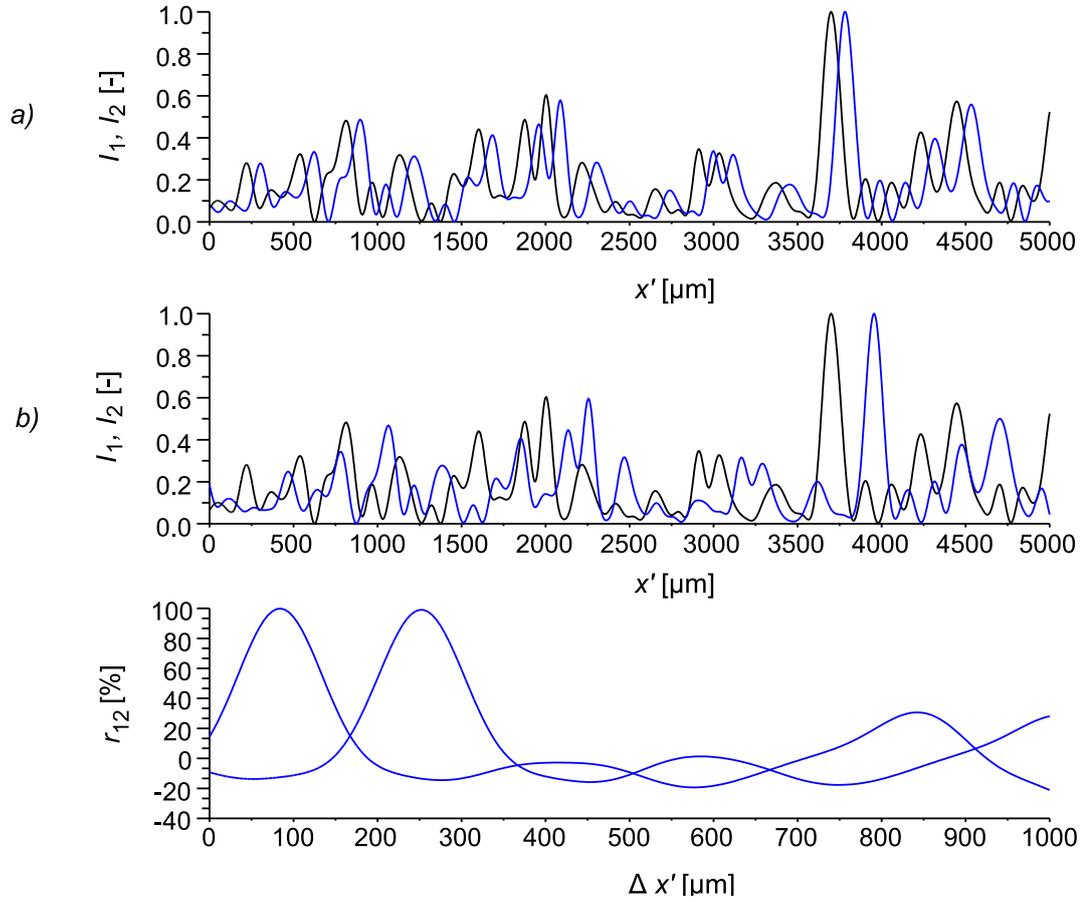
Při numerické simulaci šíření a posuvu pole koherenční zrnitosti v obrazovém poli budeme během výpočtu integrálu (5.23) dodržovat postup uvedený v kapitole 5.6, kdy za  $x$ -ové souřadnice a vzdálenost  $L_c$  budeme dosazovat vztahy (5.9) - (5.12)<sup>8</sup>. Následující graf na Obr. 5.7 ukazuje výsledek simulace obou porovnávaných intenzitních struktur koherenční zrnitosti ( $I_1$  - černá křivka a  $I_2$  - modrá křivka) i stanovené posuvy  $A_x$  odpovídající polohám maxima  $r_{12max}$  normované funkce vzájemné korelace intenzit. Vstupní parametry simulace byly pro tento konkrétní případ voleny tak, aby intenzitní struktury znázorněné na předchozím obrázku Obr. 5.6 byly čočkou zobrazeny do roviny detekce dle zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{L_p} + \frac{1}{L'_p} = \frac{1}{f}, \tag{5.24}$$

kde  $L_p$  je vzdálenost mezi čočkou a rovinou s generovanou strukturou koherenční zrnitosti, kterou čočka zobrazuje do vzdálenosti  $L'_p$ , přičemž zároveň platí  $L_o = L_c - L_p$ . Při porovnání Obr. 5.6 a Obr. 5.7 je zřejmé, že použitá čočka zobrazuje převrácený intenzitní profil ve vzdálenosti  $L_o$  od předmětu do vzdálenosti  $L'_p$  s jednotkovým zvětšením.

<sup>7</sup>Tento vztah byl bez odvození uveden v [41].

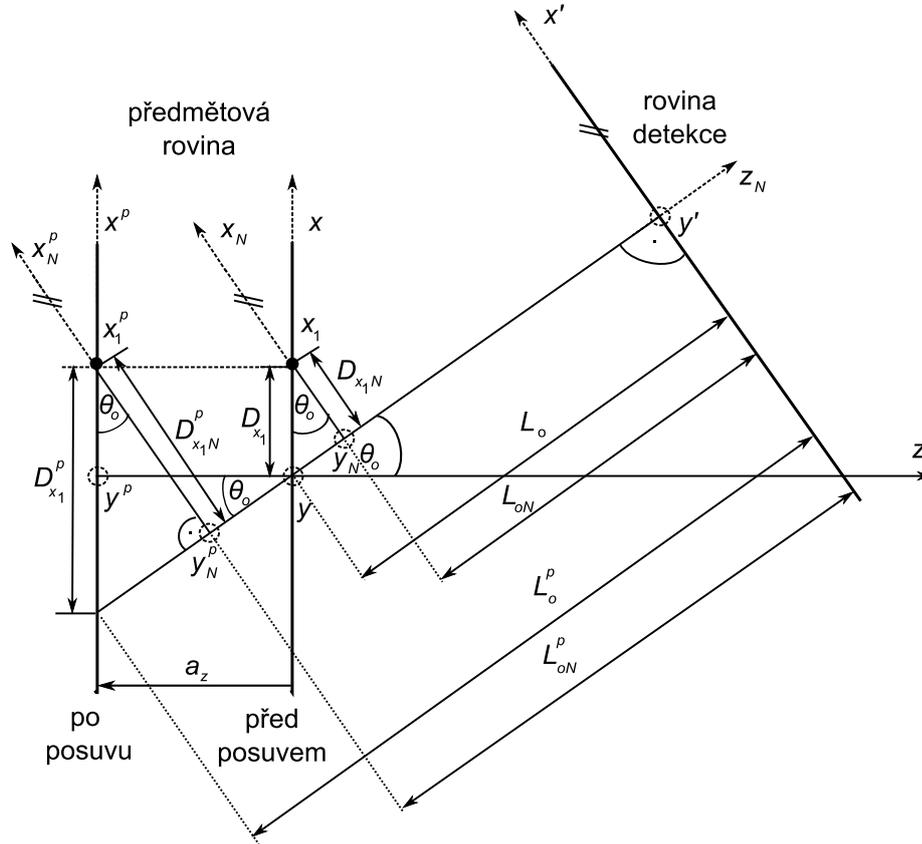
<sup>8</sup>Vzdálenost  $L_o$  ve vztahu (5.10) a (5.12) nahradíme vzdáleností  $L_c$ .



Obrázek 5.7: Posuv  $A_{x'}$  struktury koherenční zrnitosti generované při dopadu gaussovského svazku na předmět v důsledku tečné translace předmětu  $a_x$  a odpovídající normovaná funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit  $I_1$  a  $I_2$ . Vstupní parametry simulace:  $m_s = 200$ ,  $n_s = 200$ ,  $m_{vy} = 1000$ ,  $V_x = 5 \text{ mm}$ ,  $V_{x'} = 5 \text{ mm}$ ,  $\delta_x = 25 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $\delta_{x'} = 5 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $L_s = 0,3 \text{ m}$ ,  $L_c = 1,5 \text{ m}$ ,  $L'_p = 0,8 \text{ m}$ ,  $f = 0,4 \text{ m}$ ,  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ ,  $\theta_o = 10^\circ$ . Poloměr laserového svazku v pasu a ve vzdálenosti  $L_s$  od pasu je  $\omega_o = 30 \text{ } \mu\text{m}$  a  $\omega(L_s) = 2,0 \text{ mm}$ . a) Zvolená translace předmětu je  $a_x = 25 \text{ } \mu\text{m}$  a odpovídající posuv struktury koherenční zrnitosti vypočtený pomocí vztahu (5.4) je  $A_{x'} = 83,9 \text{ } \mu\text{m}$ . Poloha maxima normované funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit  $I_1$  a  $I_2$  určená ze simulace ( $r_{12max} = 99,9 \text{ } \%$ ) je  $A_{x'}^{sim} = 83,9 \text{ } \mu\text{m}$ . b) Zvolená translace předmětu je  $a_x = 75 \text{ } \mu\text{m}$  a odpovídající posuv struktury koherenční zrnitosti vypočtený pomocí vztahu (5.4) je  $A_{x'} = 252,2 \text{ } \mu\text{m}$ . Poloha maxima normované funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit  $I_1$  a  $I_2$  určená ze simulace ( $r_{12max} = 99,1 \text{ } \%$ ) je  $A_{x'}^{sim} = 251,6 \text{ } \mu\text{m}$ .

### 5.3.3 Složka translace $a_z$ (vlné a obrazové pole)

Nyní se budeme zabývat způsobem simulace translace  $a_z$  předmětu ve směru normály roviny předmětu, přičemž budeme opět předpokládat, že rovina detekce  $(x', y')$  svírá nenulový úhel  $\theta_o$  s rovinou  $(x, y)$ . Tuto situaci vystihuje Obr. 5.8. Situace před posuvem předmětu byla podrobně popsána v kapitole 5.3.1, proto dále uvedeme způsob simulace posuvu koherenční zrnitosti v důsledku normálové translace předmětu.



Obrázek 5.8: Posuv předmětové roviny o  $a_z$ .

Nechť se zkoumaný bod  $x_1$  v důsledku normálové translace předmětu posune o hodnotu  $a_z$  ve směru souřadné osy  $z$ . Posunutý bod označíme  $x_1^p$  a je situován v rovině  $(x, y)^p$ . Opět budeme, analogicky jako v kapitole 5.3.1, rotovat rovinou  $(x, y)^p$  kolem bodu  $x_1^p$  tak, aby byla rovnoběžná s rovinou  $(x', y')$ . Bod  $x_1^p$  má nyní v novém souřadnicovém systému  $(x_N^p, y_N^p, z_N)$  vůči jejímu středu  $(0, 0)_N^p$  polohu  $D_{x_1N}^p$ , přičemž platí

$$\begin{aligned} D_{x_1}^p &= D_{x_1} + a_z \operatorname{tg} \theta_o, \\ D_{x_1N}^p &= D_{x_1}^p \cos \theta_o. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Vzdálenost rovin  $(x, y)^p$  a  $(x', y')$  je potom

$$L_{oN}^p = L_o + \frac{a_z}{\cos \theta_o} - D_{x_1N}^p \operatorname{tg} \theta_o. \quad (5.26)$$

Při výpočtu integrálu (5.8) pro daný bod roviny  $(x, y)^p$  nahrazujeme souřadnici  $x$  a vzdálenost  $L_o$  vztahy (5.25) a (5.26). Tento postup aplikujeme pro všechny body roviny  $(x, y)^p$ . Za komplexní amplitudu  $U(x, y, \Delta)$  ve vztahu (5.8) dosazujeme komplexní amplitudu gaussovského svazku ve vzdálenosti  $L_s + a_z$  od jeho pasu, analogicky podle (5.6)<sup>9</sup>. Při popisu šíření pole koherenční zrnitosti čočkou opět využijeme vztah (5.23), přičemž za  $x$ -ovou souřadnici a vzdálenost  $L_c$  postupně dosazujeme (5.25) a (5.26).

Grafy na Obr. 5.9 a 5.10 ukazují výsledek simulace obou porovnávaných intenzitních struktur koherenční zrnitosti ( $I_1$  - černá křivka a  $I_2$  - modrá křivka) i stanovené posuvy  $A_{x'}$  odpovídající polohám maxima normované funkce vzájemné korelace  $r_{12max}$  intenzit ve volném a v obrazovém poli.

### 5.3.4 Posuv předmětu v rovině $(x, z)$ a v prostoru - 2D a 3D posuv

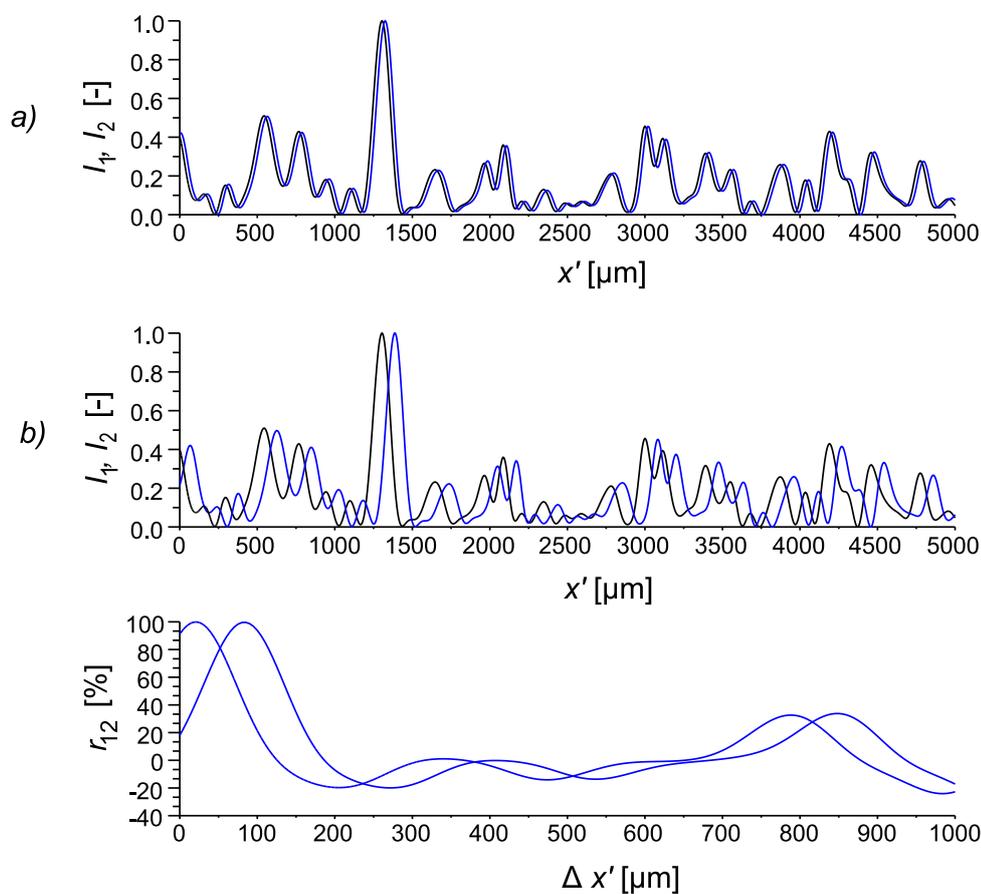
Nyní se budeme zabývat simulací obecného posuvu předmětu ve volném poli, který vznikne složením dvou, případně tří složek  $a_x$ ,  $a_y$  a  $a_z$  translace orientovaných do směřů odpovídajících souřadných os kartézského systému. Nejprve se bude předmět posouvat současně ve směru os  $x$  a  $z$ , jak ilustruje Obr. 5.11. Při výpočtu Fresnelova-Kirchhoffova difrakčního integrálu (5.8) opět využijeme vztahy (5.25) a (5.26), přičemž  $D_{x_1N}^p$  nyní představuje novou  $x$ -ovou souřadnici bodu  $x_1^p$  předmětu, který změnil svou pozici v důsledku tečné i normálové translace předmětu (Obr. 5.11).

Uvedený 2D posuv předmětu se projeví v posuvu  $A_{x'}$  detekované struktury koherenční zrnitosti dle vztahu

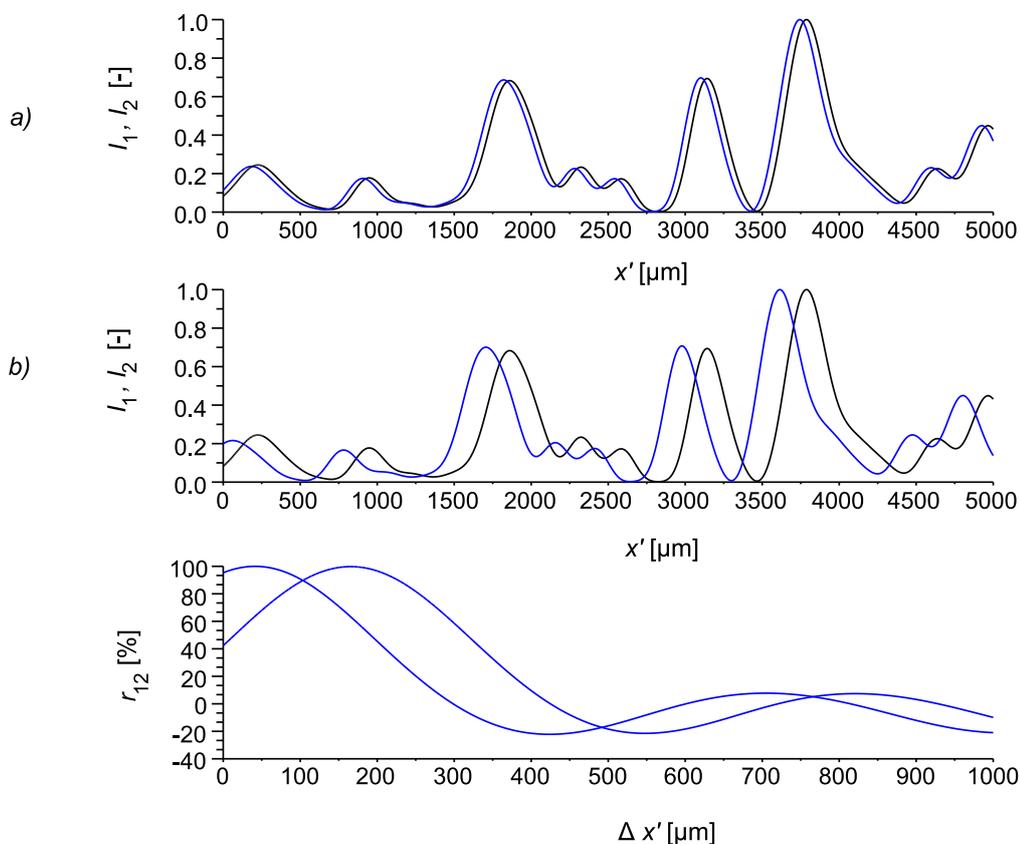
$$A_{x'} = a_x \left( \frac{L_o}{L_s \cos \theta_o} + \cos \theta_o \right) - a_z \sin \theta_o, \quad (5.27)$$

který vyplývá z kombinace vztahů (5.2) a (5.3). Výsledky počítačové simulace jsou uvedeny v Tabulce 5.1. Předmět se posouvá ve směru souřadné osy  $x$  o konstantní hodnotu  $a_x = 40 \mu\text{m}$  a zároveň ve směru souřadné osy  $z$ , přičemž vybrané velikosti posuvu  $a_z$  jsou zaznamenány v prvním sloupci tabulky. Příslušné hodnoty posuvů  $A_{x'}$  struktury

<sup>9</sup>Za dráhový rozdíl  $\Delta(x, y)$  ve vztazích (5.8) a (5.6) dosazujeme hodnoty prvků z téže submatice  $\mathbf{A}_s = \mathbf{A}(1 : m_s, 1 : n_s)$ .

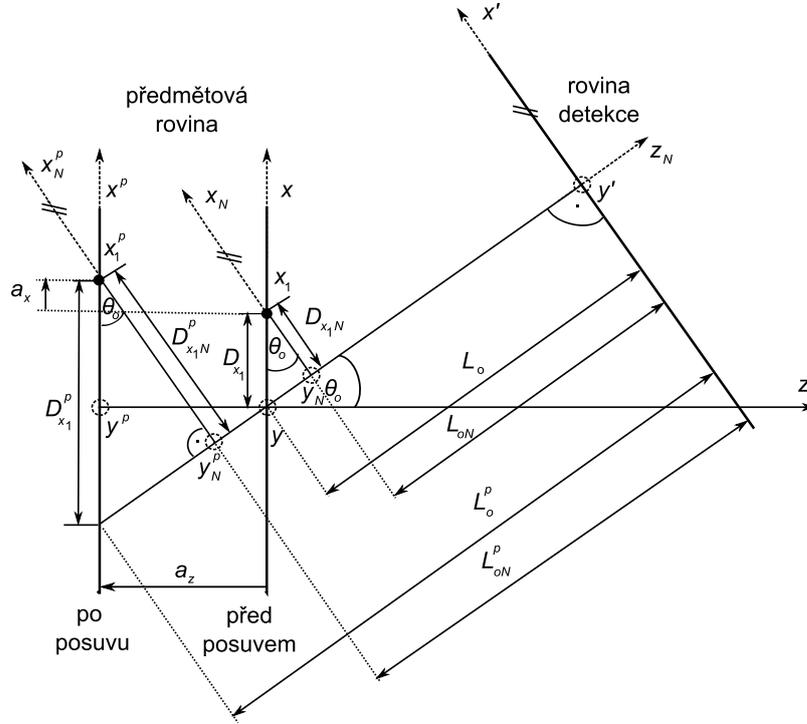


Obrázek 5.9: Posuv  $A_{x'}$  struktury koherenční zrnitosti generované při dopadu gaussovského svazku na předmět v důsledku normálové translace předmětu  $a_z$  a odpovídající normovaná funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit  $I_1$  a  $I_2$ . Vstupní parametry simulace:  $m_s = 200$ ,  $n_s = 200$ ,  $m_{vy} = 1000$ ,  $V_x = 5 \text{ mm}$ ,  $V_{x'} = 5 \text{ mm}$ ,  $\delta_x = 25 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $\delta_{x'} = 5 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $L_o = 0,7 \text{ m}$ ,  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ ,  $\theta_o = 10^\circ$ . Poloměr laserového svazku v pasu a ve vzdálenosti  $L_s$  od pasu je  $\omega_o = 30 \text{ } \mu\text{m}$  a  $\omega(L_s) = 2,0 \text{ mm}$ . a) Zvolená translace předmětu je  $a_z = 120 \text{ } \mu\text{m}$  a odpovídající posuv struktury koherenční zrnitosti vypočtený pomocí vztahu (5.3) je  $A_{x'} = 20,8 \text{ } \mu\text{m}$ . Poloha maxima normované funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit  $I_1$  a  $I_2$  určená ze simulace ( $r_{12max} = 99,9 \%$ ) je  $A_{x'}^{sim} = 20,8 \text{ } \mu\text{m}$ . b) Zvolená translace předmětu je  $a_z = 480 \text{ } \mu\text{m}$  a odpovídající posuv struktury koherenční zrnitosti vypočtený pomocí vztahu (5.3) je  $A_{x'} = 83,4 \text{ } \mu\text{m}$ . Poloha maxima normované funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit  $I_1$  a  $I_2$  určená ze simulace ( $r_{12max} = 99,7 \%$ ) je  $A_{x'}^{sim} = 83,2 \text{ } \mu\text{m}$ .



Obrázek 5.10: Posuv  $A_{x'}$  struktury koherenční zrnitosti generované při dopadu gaussovského svazku na předmět v důsledku normálové translace předmětu  $a_z$  a odpovídající normovaná funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit  $I_1$  a  $I_2$ . Vstupní parametry simulace:  $m_s = 200$ ,  $n_s = 200$ ,  $m_{vy} = 1000$ ,  $V_x = 5$  mm,  $V_{x'} = 5$  mm,  $\delta_x = 25$   $\mu\text{m}$ ,  $\delta_{x'} = 5$   $\mu\text{m}$ ,  $L_s = 0,3$  m  $L_c = 1,5$  m,  $L'_p = 1,2$  m,  $f = 0,4$  m,  $\lambda = 632,8$  nm,  $\theta_o = 10^\circ$ . Poloměr laserového svazku v pasu a ve vzdálenosti  $L_s$  od pasu je  $\omega_o = 30$   $\mu\text{m}$  a  $\omega(L_s) = 2,0$  mm. a) Zvolená translace předmětu je  $a_z = 120$   $\mu\text{m}$  a odpovídající posuv struktury koherenční zrnitosti vypočtený pomocí vztahu (5.5) je  $A_{x'} = 41,7$   $\mu\text{m}$ . Poloha maxima normované funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit  $I_1$  a  $I_2$  určená ze simulace ( $r_{12max} = 99,9$  %) je  $A_{x'}^{sim} = 41,4$   $\mu\text{m}$ . b) Zvolená translace předmětu je  $a_z = 480$   $\mu\text{m}$  a odpovídající posuv struktury koherenční zrnitosti vypočtený pomocí vztahu (5.5) je  $A_{x'} = 166,7$   $\mu\text{m}$ . Poloha maxima normované funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit  $I_1$  a  $I_2$  určená ze simulace ( $r_{12max} = 99,8$  %) je  $A_{x'}^{sim} = 165,6$   $\mu\text{m}$ .

koherenční zrnitosti vypočítané dle vztahu (5.27) jsou zaznamenány v druhém sloupci tabulky. Třetí a čtvrtý sloupec obsahují hodnoty posuvů  $A_{x'}^{sim}$  a maxima  $r_{12max}^{sim}$  funkce vzájemné korelace získané počítačovou simulací, jejíž vstupní parametry jsou uvedeny v popisku tabulky.



Obrázek 5.11: Posuv předmětové roviny o  $a_x$  a  $a_z$ .

Tabulka 5.1: Srovnání hodnot posuvů  $A_{x'}$  struktury koherenční zrnitosti vypočítaných pomocí vzorce (5.27) s hodnotami  $A_x^{sim}$  stanovenými počítačovou simulací při zvolených parametrech simulované měřicí sestavy  $L_o = 0,6$  m,  $L_s = 0,3$  m,  $\omega_o = 30$   $\mu$ m,  $\theta_o = 30^\circ$ . Další parametry simulace jsou:  $m_s = n_s = 100$ ,  $n_{vy} = 500$ ,  $V_x = V_y = 4$  mm,  $V_{x'} = 8$  mm.

$a_x = 40$ $\mu$ m			
$a_z$ [ $\mu$ m]	$A_{x'}$ [ $\mu$ m]	$A_{x'}^{sim}$ [ $\mu$ m]	$r_{12max}^{sim}$ [%]
225	14,5	14,5	99,9
200	27,0	27,0	99,9
175	39,5	39,6	99,8
150	52,0	52,1	99,9
125	64,5	64,3	99,8
100	77,0	69,9	99,8
75	89,5	89,7	99,8
50	102,0	102,2	99,7

Nyní přidáme k oběma složkám  $a_x$ ,  $a_z$  translace předmětu zbývající složku  $a_y$  (3D posuv). Výsledný posuv  $A_{x'y'}$  struktury koherenční zrnitosti v rovině detekce  $(x', y')$  se skládá ze složek  $A_{x'}$  a  $A_{y'}$ , které představují průměty posuvu  $A_{x'y'}$  do souřadných os  $x'$ ,  $y'$ . Pro složku  $A_{y'}$  platí vztah<sup>10</sup>

$$A_{y'} = a_y \left( \frac{L_o}{L_s} + 1 \right). \quad (5.28)$$

Budeme určovat posuv  $A_{y'}$  struktury koherenční zrnitosti způsobený tečnou translací  $a_y$  předmětu a zároveň prozkoumáme vliv působení složek  $a_x$  a  $a_z$  translace předmětu jakožto parazitních vlivů na vyhodnocování posuvu  $A_{y'}$ . Přiblížíme se tak možné reálné situaci, kdy se těleso nemusí pohybovat pouze ve směru vybrané souřadné osy, ale podléhá rovněž působení ostatních složek translace, např. z důvodů vibrace předmětu či jiných nechtěných a neovlivnitelných vnějších vlivů. Na rozdíl od předchozího případu, kdy jsme posuv struktury koherenční zrnitosti vyhodnocovali pouze z jednoho řádku matice detekce, budeme nyní počítat strukturu koherenční zrnitosti v celé oblasti matice detekce, přičemž složku  $A_{y'}$  stanovíme jako průměrnou hodnotu  $\overline{A_{y'}^{sim}}$  posuvů intenzitních profilů zaznamenaných ve všech sloupcích matice detekce. Analogicky provedeme výpočet průměrné hodnoty  $\overline{r_{12max}^{sim}}$  ze všech příslušných maxim korelačních koeficientů  $r_{12max}^{sim}$ . Tento postup volíme z toho důvodu, že vlivem složek  $a_x$  a  $a_z$  translace předmětu může stanovený posuv  $A_{y'}^{sim}$ , respektive maximum  $r_{12max}^{sim}$  nabývat každém sloupci různých hodnot. Příslušné směrodatné odchylky  $\sigma_{A_{y'}^{sim}}$  a  $\sigma_{r_{12max}^{sim}}$  poskytnou představu o tom, jak velmi se tyto hodnoty navzájem liší.

Tuto studii provedeme pro dvě různé struktury koherenční zrnitosti s odlišnou střední velikostí zrn regulovanou velikostí poloměru  $\omega(L_s)$  gaussovského svazku. V prvním případě je předmět osvětlen gaussovským svazkem o velikosti poloměru v pasu  $\omega_o = 60 \mu\text{m}$  a ve vzdálenosti  $L_s$  od pasu  $\omega(L_s) = 1 \text{ mm}$ . Střední velikost zrna v generované struktuře koherenční zrnitosti orientovaná do směru souřadné osy  $x'$  a  $y'$  získaná ze všech řádků a sloupců matice detekce dle postupu uvedeného v kapitole 4.1.2 je  $\alpha_{x'} = 255,8 \mu\text{m}$  a  $\alpha_{y'} = 222,2 \mu\text{m}$ . V druhém případě je předmět osvětlen gaussovským svazkem o velikosti poloměru v pasu  $\omega_o = 30 \mu\text{m}$  a ve vzdálenosti  $L_s$  od pasu  $\omega(L_s) = 2 \text{ mm}$ . Střední velikost zrna v generované struktuře koherenční zrnitosti orientovaná do směru souřadné osy  $x'$  a  $y'$  získaná ze všech řádků a sloupců matice detekce je potom  $\alpha_{x'} = 146,8 \mu\text{m}$  a  $\alpha_{y'} = 127,0 \mu\text{m}$ . Ostatní parametry simulace jsou totožné s výše uvedeným případem shrnutým v Tabulce 5.1

<sup>10</sup>Vztah (5.28) je analogický ke vztahu (5.2), kde  $\theta_o$  nyní představuje úhel, který svírají souřadné osy  $y$  a  $y'$  rovin  $(x, y)$  a  $(x', y')$ . Dle Obr. 5.11 je  $\theta_o = 0^\circ$ , tudíž  $\cos \theta_o = 1$ .

Tabulka 5.2 ukazuje srovnání průměrných hodnot  $\overline{A_{y'}^{sim}}$  posuvů struktur koherenční zrnitosti (třetí sloupec tabulky) s teoretickou hodnotou  $A_{y'}$  (záhlaví tabulky) vypočítanou dle vztahu (5.28). Tyto hodnoty jsou ovlivňovány složkou  $A_{x'}$ , jejíž teoretická hodnota (druhý sloupec tabulky) určena pomocí vztahu (5.27) již byla porovnávána s výstupy simulace v Tabulce 5.1. Z uvedené tabulky vyplývá, že s rostoucí hodnotou  $A_{x'}$  stanovené hodnoty posuvů  $A_{y'}^{sim}$  v jednotlivých sloupcích matice detekce více fluktuují, jak ukazuje směrodatná odchylka  $\sigma_{A_{y'}^{sim}}$  (čtvrtý sloupec tabulky). Zároveň dochází k dekorelaci, tj. klesá hodnota maxima  $\overline{r_{12max}^{sim}}$  funkce vzájemné korelace intenzit (pátý sloupec tabulky). Toto chování je výraznější u struktury koherenční zrnitosti s menší hodnotou střední velikosti zrna  $\alpha_{x'} = 146,8 \mu\text{m}$ , respektive  $\alpha_{y'} = 127,0 \mu\text{m}$  (druhá část tabulky).

Stanovíme si limitní hodnotu maxima  $\overline{r_{12max}^{sim}} \approx 60 \%$ , při které je ještě smysluplné vyhodnocovat posuv  $\overline{A_{y'}^{sim}}$  (při menších hodnotách  $\overline{r_{12max}^{sim}}$  může maximum korelační funkce zaniknout v šumu). V prvním případě (pro střední velikost zrna  $\alpha_{x'} = 255,8 \mu\text{m}$ ,  $\alpha_{y'} = 222,2 \mu\text{m}$ ) je tato limitní hodnota 64,2 % a odpovídá působení složky  $A_{x'} = 89,5 \mu\text{m}$ . V druhém případě (pro střední velikost zrna  $\alpha_{x'} = 146,8 \mu\text{m}$ ,  $\alpha_{y'} = 127,0 \mu\text{m}$ ) je tato limitní hodnota 62,3 % a odpovídá působení složky  $A_{x'} = 52,0 \mu\text{m}$ . Při porovnání obou uvedených případů lze konstatovat, že pokud je hodnota posuvu  $A_{x'}$  struktury koherenční zrnitosti menší než přibližně jedna třetina střední velikosti zrna  $\alpha_{x'}$ , je ještě možné vyhodnotit složku  $A_{y'}$  jakožto průmět hodnoty  $A_{x'y'}$  struktury koherenční zrnitosti do směru osy  $y'$ , neboť v obou případech je  $\overline{r_{12max}^{sim}} > 60 \%$ .

Závěrem lze konstatovat, že vhodně zvolená velikost zrn hraje velkou roli při eliminaci parazitních posuvů. Na druhou stranu je třeba vzít v úvahu fakt, že s rostoucí velikostí zrn v detekované struktuře roste také šířka korelační funkce a tudíž dochází k nepřesnému určení polohy maxima této funkce. V praxi je optimální velikost zrn volena s ohledem na konkrétní případ a na zkušenosti experimentátora.

## 5.4 Srovnání výsledků simulace s výsledky experimentu realizovaného v laboratoři

V této kapitole porovnáme výsledky simulace s výsledky měření složky tečného posuvu  $a_x$  předmětu, které bylo realizováno ve Společné laboratoři optiky UP a FZÚ AV ČR. Výsledky měření složky translace pro zvolené experimentální uspořádání jsou prezentovány v [45].

### 5.4.1 Návrh a realizace experimentu

Pro měření translace  $a_x$  předmětu ve směru souřadné osy  $x$  bylo navrženo experimentální uspořádání, jehož schéma je znázorněno na Obr. 5.12. Zkoumaný předmět je představován

Tabulka 5.2: Vliv složky  $A_{x'}$  na vyhodnocení posuvu  $\overline{A_{y'}^{sim}}$  struktur koherenční zrnitosti získaný průměrováním přes všechny posuvy  $A_{y'}^{sim}$  zaznamenaných ve všech sloupcích matice. Zvolené parametry simulované měřicí sestavy  $L_o = 0,6$  m,  $L_s = 0,3$  m,  $\theta_o = 30^\circ$ . Parametry laserového svazku, který generuje koherenční zrnitost s průměrnou velikostí zrn  $\alpha_{x'} = 255,8$   $\mu\text{m}$ ,  $\alpha_{y'} = 222,2$   $\mu\text{m}$  jsou  $\omega_o = 60$   $\mu\text{m}$  a  $\omega(L_s) = 1$  mm. Parametry laserového svazku, který generuje koherenční zrnitost s průměrnou velikostí zrn  $\alpha_{x'} = 146,8$   $\mu\text{m}$ ,  $\alpha_{y'} = 127,0$   $\mu\text{m}$  jsou  $\omega_o = 30$   $\mu\text{m}$  a  $\omega(L_s) = 2$  mm. Další parametry simulace jsou:  $m_s = n_s = 100$ ,  $n_{vy} = 500$ ,  $V_x = V_y = 4$  mm,  $V_{x'} = 8$  mm.

$a_x = 40$ $\mu\text{m}$ , $a_y = 80$ $\mu\text{m}$ , $A_{y'} = 240$ $\mu\text{m}$					
$\alpha_{x'} = 255,8$ $\mu\text{m}$ , $\alpha_{y'} = 222,2$ $\mu\text{m}$					
$a_z$ [ $\mu\text{m}$ ]	$A_{x'}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\overline{A_{y'}^{sim}}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\sigma_{A_{y'}^{sim}}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\overline{r_{12max}^{sim}}$ [%]	$\sigma_{r_{12max}^{sim}}$ [%]
225	14,5	239,6	2,3	98,1	0,7
200	27,0	239,6	3,6	95,4	1,8
175	39,5	239,8	5,1	91,1	3,4
150	52,0	240,1	6,6	85,7	5,3
125	64,5	240,5	8,4	79,2	7,5
100	77,0	241,0	10,4	71,9	9,6
75	89,5	241,7	12,9	64,2	11,6
50	102,0	241,2	16,9	56,4	13,3
25	114,3	240,5	28,0	48,9	14,6
$\alpha_{x'} = 146,8$ $\mu\text{m}$ , $\alpha_{y'} = 127,0$ $\mu\text{m}$					
$a_z$ [ $\mu\text{m}$ ]	$A_{x'}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\overline{A_{y'}^{sim}}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\sigma_{A_{y'}^{sim}}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\overline{r_{12max}^{sim}}$ [%]	$\sigma_{r_{12max}^{sim}}$ [%]
225	14,5	240,1	1,8	94,9	1,5
200	27,0	240,2	2,9	87,1	3,4
175	39,5	240,4	4,2	75,8	5,9
150	52,0	240,6	5,8	62,3	8,4
125	64,5	240,1	13,3	48,1	10,5
100	77,0	241,7	41,6	35,4	11,5
75	89,5	245,3	88,8	24,9	11,8
50	102,0	242,3	121,6	18,5	9,8
25	114,3	243,9	173,6	10,9	10,6

hliníkovým hranolem pevně uchyceným k elektronickému mikroposuvu (stolek Coherent MacroMech End Driven Linear Stage (25 mm) ve spojení s motorkem 25 mm Coherent EncoderDriver Actuator řízeným z PC karty Coherent EncoderDriver Control Card), který zajišťuje jeho řízenou translaci ve směru souřadné osy  $x$ . Zdrojem koherentního

záření je He-Ne laser (Melles Griot 25 LHP 928 s optickým výkonem 35 mW), jehož svazek je osvětlující čočkou s ohniskovou vzdáleností  $f_c = 100$  mm fokusován do bodu ve vzdálenosti  $L_s$  před povrchem předmětu a poté dopadá kolmo na studovaný povrch. Pole koherenční zrnitosti vzniklé po odrazu od předmětu je snímáno maticovou CMOS kamerou (EPIX SiliconVideo 2112), která obsahuje  $1288 \times 1032$  světlocitlivých prvků (pixelů), každý o rozměrech  $7,5 \mu\text{m} \times 7,5 \mu\text{m}$ . Data získaná z kamery jsou zpracována počítačem. V experimentu bylo provedeno měření translace předmětu pro hodnoty  $a_x = 10, 20, 40, 80$  a  $150 \mu\text{m}$ . Parametry sestavy byly následující: vzdálenost předmětu od detektoru a od bodového zdroje  $L_o = 0,5$  m a  $L_s = 0,1$  m, úhel směru pozorování  $\theta_o = 22,5^\circ$ . Poloměr  $\omega$  laserového svazku ve vzdálenosti  $L_s$  od předmětu byl  $23,6 \mu\text{m}$  [42]<sup>11</sup>.

Studovaný předmět je upevněný k elektronickému mikroposuvu, který jej v každém měřicím kroku posouvá ve směru souřadné osy  $x$  o vzdálenost  $a_x$ . Je realizováno celkem 10 kroků měření. Každé dva po sobě následující snímky (průběhy intenzit), které reprezentují strukturu koherenční zrnitosti, jsou numericky korelovány v počítači a následně jsou stanoveny polohy globálních maxim obdržných normalizovaných funkcí vzájemné korelace v souladu se vztahem (5.1). Tyto hodnoty odpovídají velikosti zaznamenaných posunutí struktur koherenční zrnitosti mezi dvěma po sobě jdoucími kroky měření. Nakonec numericky řešíme rovnici (5.2) s použitím určených hodnot posunutí struktur koherenční zrnitosti  $A_x$  a dostaneme tak měřené hodnoty složky translace  $a_x$ .

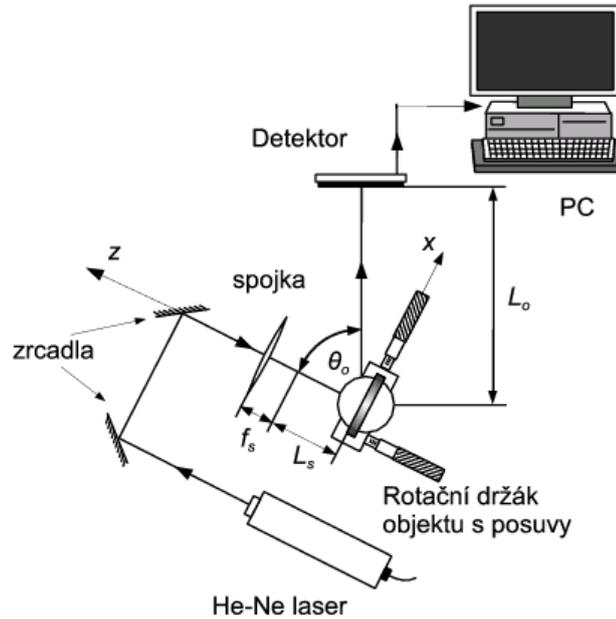
## 5.4.2 Porovnání výsledků měření s výstupy prezentovaného simulačního programu

Výsledky měření jsou prezentovány v Tabulce 5.3. První sloupec obsahuje hodnoty zvolených translací předmětu realizovaných pomocí elektronického mikroposuvu. Teoretické hodnoty posunutí pole koherenční zrnitosti vypočítaných dle vztahu (5.2) jsou uvedeny ve druhém sloupci. Ve třetím a čtvrtém sloupci jsou zaznamenány průměrné hodnoty  $\overline{A_x^{exp}}$  detekovaných posuvů struktur koherenční zrnitosti<sup>12</sup> a maxim  $\overline{r_{12max}^{exp}}$  normovaných funkcí vzájemné korelace získaných z deseti měření. Poslední dva sloupce tabulky obsahují informaci o posuvu  $A_x^{sim}$  simulované koherenční zrnitosti a hodnotě maxima funkce vzájemné korelace  $r_{12max}^{sim}$  mezi dvěma intenzitními signály. Jelikož v experimentu byly struktury koherenční zrnitosti zaznamenány v celých jednotkách snímacího zařízení a neprováděla se dodatečná interpolace pro přesnější stanovení poloh maxim, také při simulaci byla tato interpolace vynechána. Při vzájemné korelaci je proto

<sup>11</sup>Poloměr  $\omega$  laserového svazku v rovině předmětu  $(x, y)$  závisí jak na ohniskové vzdálenosti  $f_s$  osvětlující čočky, tak na vzdálenosti laseru od osvětlující čočky. Tyto parametry se shodovaly s parametry použitými v diplomové práci [42], kde byl poloměr  $\omega$  již počítán.

<sup>12</sup>Posuvy zaznamenané v celých jednotkách snímacího zařízení (pixel) jsou přepočítány na jednotky  $\mu\text{m}$ .

nejmenší možný vzájemný posuv obou intenzitních signálů  $\Delta x'$  roven vzdálenosti mezi aktivními body detektoru  $\delta_{x'} = 7,5 \mu\text{m}$ .



Obrázek 5.12: Experimentální sestava pro měření složky  $a_x$  translace předmětu.

Tabulka 5.3: Hodnoty posuvů struktur koherenční zrnitosti stanovené z experimentálních dat a z výstupů simulací. Parametry experimentálního uspořádání se shodují s vstupními parametry simulace: Vzdálenost mezi předmětem a rovinou detekce  $L_o = 0,5 \text{ m}$ , úhel směru pozorování  $\theta_o = 22,5^\circ$ , poloměr laserového svazku v pasu a ve vzdálenosti  $L_s = 0,1 \text{ m}$  od pasu je  $\omega_o = 23,6 \mu\text{m}$  a  $\omega(L_s) = 0,9 \text{ mm}$ . Další parametry simulace:  $m_s = n_s = 250$ ,  $n_{vy} = 1288$ ,  $V_x = V_y = 2,5 \text{ mm}$ ,  $V_{x'} = 9,66 \text{ mm}$ ,  $\delta_x = 10 \mu\text{m}$ ,  $\delta_{x'} = 7,5 \mu\text{m}$ .

$a_x [\mu\text{m}]$	$A_{x'} [\mu\text{m}]$	$\overline{A_{x'}^{exp}} [\mu\text{m}]$	$\overline{r_{12max}^{exp}} [\%]$	$A_x^{sim} [\mu\text{m}]$	$r_{12max}^{sim} [\%]$
10	63,4	67,5	98,4	60,0	99,9
20	126,7	127,5	97,5	127,5	99,9
40	253,4	262,5	96,4	255,0	99,8
80	506,9	517,5	93,8	502,5	99,3
150	950,4	967,5	89,2	945,0	97,9

Z Tabulky 5.3 plyne, že výstupy numerického modelu korespondují jak s teoretickými hodnotami pro zvolené geometrické parametry měřicí sestavy realizované v laboratoři, tak se samotnými experimentálními výsledky. Tím jsme opět ověřili funkčnost prezentovaného modelu, který nadále využijeme při vzniku a šíření fraktálové koherenční zrnitosti.

# Kapitola 6

## Fraktály a fraktálová koherenční zrnitost

### 6.1 Současný stav v oblasti fraktálů a fraktálové koherenční zrnitosti

V této kapitole se budeme zabývat novým přístupem k problematice koherenční zrnitosti, přičemž budeme využívat objekt zvaný fraktál [46]-[55]. Interakcí světla s fraktálem vzniká netradiční typ vlny-difraktál [56], který představuje optický svazek nové kvality a nových vlastností. Typickým příkladem je difraktál pozorovaný ve Fraunhoferově rovině fraktálního objektu, jehož intenzitní rozložení splňuje mocniný zákon [46]-[50]. Osvětlením předmětu takovým typem vlny vzniká tzv. fraktálová koherenční zrnitost [6].

Problematikou fraktálové koherenční zrnitosti se podrobně zabývá především skupina pod vedením J. Uozumiho [6]-[10], [51], která teoreticky i experimentálně studuje její statistické vlastnosti. Na základě specifických vlastností fraktálové koherenční zrnitosti bylo předurčeno její využití k účelu možného zlepšení rozsahu a citlivosti měřicích metod na bázi koherenční zrnitosti [6].

V dalším textu využijeme stávající numerický model, pomocí něhož fraktálovou koherenční zrnitost vytvoříme. Prozkoumáme statistické vlastnosti simulované fraktálové koherenční zrnitosti a porovnáme je s teoretickými předpoklady. Poté se budeme věnovat možnosti vylepšení parametrů měření tečné složky  $a_x$  translace předmětu využitím korelace polí fraktálové koherenční zrnitosti. Abychom hlouběji pronikli do celé problematiky, nejprve se s pojmy jako je fraktál, difraktál a fraktálová koherenční zrnitost podrobněji seznámíme.

#### 6.1.1 Fraktály

Fraktály [46]-[55] jsou geometrické objekty, jejichž tvar je, v porovnání s běžnými (tzv. geometricky hladkými) objekty, složitý, avšak jejich vznik lze popsat podle

jednoduchých principů. Při konstrukci fraktálu lze uplatnit, například, iterační systém funkcí (IFS) [55], při kterém dochází k iterativnímu opakování afinních transformací za vzniku požadovaného tvaru. Další princip vzniku fraktálu byl odvozen z popisu biologických procesů, jako je například růst rostlin (tzv. L-systémy) [55]. Protože fraktální povahu vykazuje chování některých dějů (například děje v atmosféře či Brownův pohyb [46, 57], jejich grafickým znázorněním lze také dosáhnout vytvoření fraktálu. Uvedené principy vzniku fraktálů se hojně využívají především v počítačové grafice k animaci různých přírodních útvarů, jako jsou mraky, pohoří, řeky, stromy, aj.

V optice našly fraktály uplatnění, například, při obrazové kompresi dat [55, 58], která je založena na bázi výše zmiňovaného systému IFS, přičemž se hledá podobnost mezi vzájemně transformovanými částmi obrazu. Obecně lze fraktální strukturu v optice využít k modulaci základních optických svazků (doposud se pracuje většinou se svazky s rovinnou, respektive kulovou vlnoplochou). K tomuto účelu se využívají fraktální apertury či transparenty [59]-[62]. Interakcí svazků s těmito fraktálními strukturami lze experimentálně vytvořit optické svazky nové kvality s přímou aplikací na řešení různých optických úloh, či vytvořit nové možnosti pro aplikace v měřicí technice [6].

Pro kvantitativní popis fraktálů slouží jejich dimenze. Je to základní parametr, který poskytuje informaci o složitosti a strukturovanosti fraktálů. Měření dimenze se stalo základem fraktální analýzy, která proniká do různých vědních oborů. Fraktální analýza zaujímá své místo v medicíně a genetice, například, při měření větvení kapilár [63], měření složitosti ve tvaru lidského genomu [64], či při vyhodnocování snímků magnetické rezonance mozku [65]. V archeologii nebo geografii lze fraktální analýzu uplatnit při zkoumání tvaru hranic historických osad a kolonií [66] nebo určování členitosti pohoří, hranic či komplexnosti kartografických map [67, 68]. Jelikož se lze s fraktály setkat také v grafických znázorněních, využívá se fraktální analýza, mimo jiné, v mechanice při vyhodnocování průběhu grafu měření drsnosti povrchů vybraných materiálů [69] nebo v ekonomice při zkoumání nárůstu cen na trhu (tzv. Elliotova vlna [55]).

I přesto, že obor fraktální geometrie vznikl již v 70. letech 20. století, neexistuje zatím rigorózní definice, která by fraktál jednoznačně popisovala. Zakladatel fraktální geometrie, B. B. Mandelbrot (1923-2010), však navrhl alespoň provizorní verze definic fraktálu, přičemž každá z nich pohlíží na tento pojem z různých hledisek [46]:

(1) Fraktál je množina, která se skládá z malých částí, jež jsou podobné celku [52].

(2) Fraktál je množina, jejíž Hausdorffova-Besicovitchova dimenze je ostře větší než dimenze topologická [53].

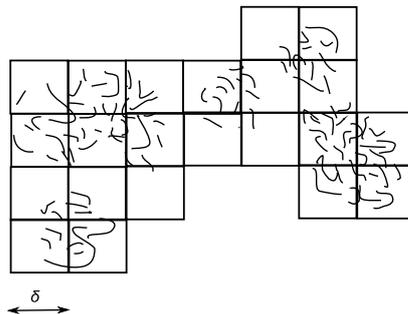
První definice označuje fraktál jako objekt, jehož zmenšená geometrická struktura se opakuje v něm samém. Jestliže je tato struktura zcela přesnou kopií původního objektu (případně je vůči původnímu objektu posunuta či rotována), pak se fraktál nazývá soběpodobný (self-similar). Soběpodobné fraktály se objevují pouze v matematických konstrukcích využívajících deterministický algoritmus. Je-li do procesu generace zavedena

náhoda (stochastický algoritmus), jedná se o fraktál náhodný nebo také statisticky soběpodobný (statistical self-similar) [46, 54, 57, 59].

Z matematického hlediska lze fraktál považovat za množinu  $F$  nekonečně mnoha bodů v prostoru [54]. V souladu s uvedenou druhou definicí fraktálu je jeho popis uskutečněn na základě topologické dimenze a Hausdorffovy-Besicovitchovy dimenze. Topologická dimenze  $D_T$  je pojem známý z euklidovské geometrie. Je vždy celočíselná a představuje počet parametrů, kterými lze danou množinu popsat. Například bod má topologickou dimenzi rovnou hodnotě nula, křivka hodnotě jedna, plocha hodnotě dva, atd. [46]. Naproti tomu Hausdorffova-Besicovitchova dimenze  $D$  (v literatuře také zaměňována za obecnější název fraktální dimenze [46]) je ve většině případů neceločíselná. Přesné znění její definice je uvedeno, například, v [54]. Hodnota této dimenze poskytuje informaci o tom, do jaké míry daná množina bodů vyplňuje prostor. Příkladem je fraktální křivka v dvoudimenzionálním prostoru (rovině), která má topologickou dimenzi  $D_T = 1$  a Hausdorffovu-Besicovitchovu dimenzi  $D$  nabývající hodnot od 1 do 2, na rozdíl od jednoduché (topologicky hladké) křivky, pro kterou platí  $D_T = D = 1$ .

Čím bude křivka členitější (body křivky budou vyplňovat více plochy v rovině, avšak nevyplní ji celou), Hausdorffova-Besicovitchova dimenze  $D$  se bude blížit k hodnotě 2. Fraktální křivka má nekonečnou délku ( $D > 1$ ), ale zároveň konečný obsah plochy, kterou ohraničuje ( $D < 2$ ) [54].

I přesto, že je Hausdorffova-Besicovitchova dimenze silným matematickým nástrojem, nenahraditelným v teorii fraktální geometrie, v praktických aplikacích nemá široké uplatnění. Důvodem je značná obtížnost a v některých případech i nerealizovatelnost jejího numerického výpočtu. Proto se pro charakteristiku fraktálů často používají alternativní typy dimenzí, které lze považovat za zjednodušené modifikace dimenze Hausdorffovy-Besicovitchovy [70]. Tyto dimenze bývají zpravidla založeny na měření



Obrázek 6.1: Pokrytí množiny  $F$  čtvercovou sítí. Počet zasazených čtverců  $N_\delta(F) = 22$  pro zvolenou stranu čtverce  $\delta$ .

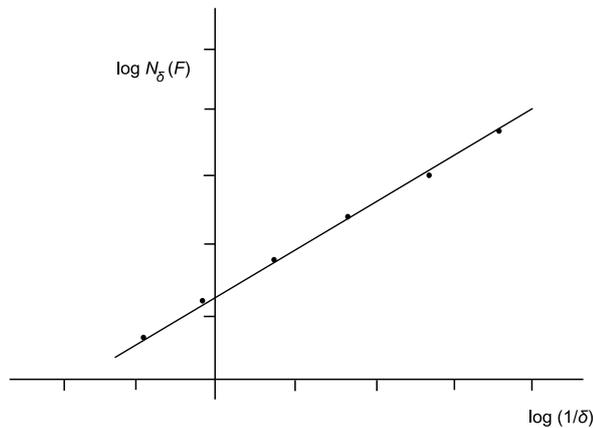
s měřítkem  $\delta$ , kdy je uvažovaná množina  $F$  pokryta podmnožinami (úsečkami, čtverci, kruhy, atd.) o velikosti  $\delta$  (délka úsečky, strana čtverce, poloměr kruhu, atd.), přičemž jsou zanedbávány nepravidelnosti menší než  $\delta$ . Tato měření jsou prováděna pro několik

velikostí  $\delta$  [54]. Z důvodu snadné implementace na počítači se pro numerické odhady dimenze fraktálních objektů volí nejčastěji dimenze mřížková (box-counting dimension) [54, 70, 72].

Daná množina  $F$  je v tomto případě pokryta sítí čtverců o zvolené straně  $\delta$ , přičemž se zjišťuje počet  $N_\delta(F)$  čtverců tvořících tu část sítě, která množinu  $F$  protíná. Celou situaci znázorňuje Obr.6.1. Uvedený postup je proveden pro několik délek  $\delta$  stran čtverců sítě. Mřížkovou dimenzi definovanou vztahem [54]

$$D_m(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log \left(\frac{1}{\delta}\right)} \quad (6.1)$$

lze potom určit ze směrnice grafu lineární závislosti  $\log N_\delta(F)$  na  $\log(1/\delta(F))$  pro zvolený rozsah délek  $\delta$ , jak naznačuje Obr. 6.2.



Obrázek 6.2: Způsob nalezení mřížkové dimenze  $D_m(F)$  množiny  $F$ .

Vztah (6.1) je ekvivalentní se vztahem [71]

$$D_m(F) = n - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log V[F(\delta)]}{\log \delta}, \quad (6.2)$$

kde  $n$  je dimenze celého prostoru,  $V[F(\delta)]$  představuje přifouknutí (ztloustnutí) množiny  $F$  o  $\delta$ , přičemž výsledkem je množina získaná sjednocením množiny  $F$  se všemi body do vzdálenosti  $\delta$  od  $F$ .

Pro snadný odhad dimenze fraktálních objektů se rovněž používá informační nebo korelační dimenze. Jejich popis je uveden, například, v [72]-[74].

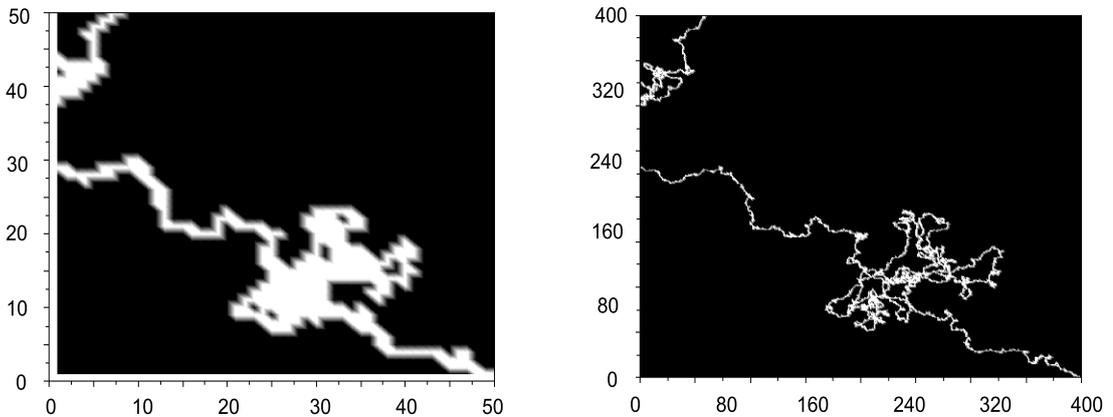
Samostatnou kapitolu tvoří tzv. tlusté fraktály (Fat fractals) [71, 75, 76]. Jsou definovány jako množiny, které mají nenulový objem (nenulovou Lebesgueovou míru) [71, 76]. Takové množiny obsahují podmnožiny s fraktální dimenzí shodnou s dimenzí celého prostoru, ve kterém jsou obsaženy. Za tlustý fraktál lze považovat, například,

černobílou digitální fotografii s fraktálním motivem, která sestává z ploch tvořených čtverečky (pixely), což jsou podmnožiny s fraktální dimenzí rovnou dvěma. Informaci o strukturovanosti množiny proto poskytuje pouze hodnota dimenze hranice této množiny, která je obecně neceločíselná. Tato dimenze se nazývá externí dimenze (exterior dimension) [54, 70, 71, 75, 76]. Externí dimenze se vypočítá dle vztahu analogickému k (6.2) [70]

$$D_e(F) = n - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log V[\bar{F}(\delta)]}{\log \delta}, \quad (6.3)$$

kde  $n$  opět značí dimenzi celého prostoru,  $V[\bar{F}(\delta)]$  představuje přifouknutí (ztloustnutí) množiny  $\bar{F}$  o  $\delta$ . Množina  $\bar{F}(\delta) = F(\delta) - F$  zbyde z rozdílu přifouknuté množiny  $F(\delta)$  a původní množiny  $F$ . Pro fraktál s nulovou Lebesgueovou mírou platí, že  $V[F] = 0$ , a tudíž  $V[\bar{F}(\delta)] = V[F(\delta)]$ , což znamená, že externí  $D_e$  a mřížková  $D_m$  dimenze množiny  $F$  jsou si rovny [71].

Je nutno podotknout, že k dodatečnému přifouknutí množiny  $F$  bude docházet také při převodu této množiny do datového souboru reprezentovaného maticí s menším počtem bodů než má původní množina  $F$ . Tuto situaci ilustruje Obr. 6.3.



Obrázek 6.3: Matice s výřezem fraktálního objektu o velikosti  $50 \times 50$  (vlevo) a  $400 \times 400$  (vpravo).

Konečné rozlišení matice způsobuje zanedbání detailů fraktálního objektu, přičemž dochází k dodatečnému zaplnění „prázdných míst“ body za vzniku výrazných plošek. Tento efekt je patrnější u matice s menším rozlišením znázorněné na Obr. 6.3 vlevo. Různé rozlišení matice fraktálního transparentu znázorňující tentýž objekt  $F$  tak mění vlastnosti difragovaného světla, jak bude ukázáno v dalším textu.

### 6.1.2 Využití fraktálů ve fyzikální optice (difraktál a fraktálová koherenční zrnitost)

Jak již bylo zmíněno, fraktály lze využít ve fyzikální optice, kdy dochází k rozptylu či difrakci optické vlny na fraktálních strukturách, reprezentovaných, například, amplitudovými fraktálními transparenty. Výsledkem této interakce je nová optická vlna - difraktál. Tento pojem jako první použil M. V. Berry [56]. Typickým příkladem je difraktál pozorovaný ve Fraunhoferově rovině fraktálního transparentu. Původní studie [46, 47] ukázaly, že střední hodnota intenzity difraktálu detekovaná v bodě Fraunhoferovy roviny splňuje mocninné pravděpodobnostní rozdělení

$$\langle I_o(q) \rangle \propto q^{-D}, \quad (6.4)$$

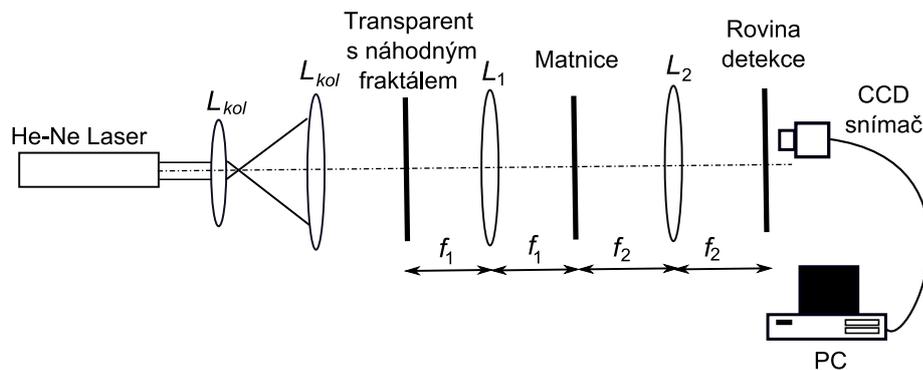
kde  $q = (x^2 + y^2)^{1/2}$  je radiální souřadnice ve Fraunhoferově difrakční oblasti fraktálu s dimenzí  $D$ . Neznámou dimenzi fraktálu lze tak odhadnout ze sklonu grafu funkce střední intenzity  $\langle I_o(q) \rangle$  na souřadnici  $q$ , který je vykreslen ve dvojitým logaritmickém měřítku.

Do řešení problematiky difraktálů se zapojil také J. Uozumi se svými spolupracovníky. Jejich skupina provedla mnoho experimentů, při kterých byly zkoumány vlastnosti difraktálů pozorovaných ve Fraunhoferově rovině pravidelných fraktálů (Kochova vločka [48]) i náhodných fraktálů (náhodná Kochova vločka [49], náhodné Weierstrassovy funkce [6]). Fraktálový předmět představoval amplitudový transparent, který byl nejprve vytisknut na tiskárně a poté zachycen na fotografický film (negativ). V případě náhodných fraktálů se v difrakčním obrazci vedle mocninné závislosti (6.4) objevovala také struktura náhodných zrn velmi podobná struktuře koherenční zrnitosti. Po osvětlení předmětu (matnice) náhodným difraktálem vznikl nový typ koherenční zrnitosti - fraktálová koherenční zrnitost (fractal speckle, speckled speckle, doubled speckle) [6]. Schéma použité experimentální sestavy pro pozorování fraktálové koherenční zrnitosti je znázorněno na Obr.6.4.

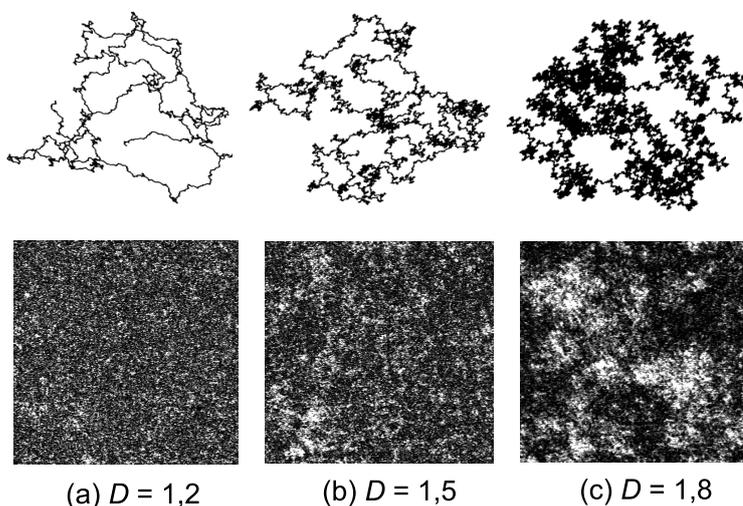
V [6] byly náhodné fraktály vytvořeny pomocí náhodných Weierstrassových funkcí o dimenzích  $D = 1,2$ ,  $D = 1,5$ ,  $D = 1,8$ . Na Obr. 6.5 jsou tyto fraktály zachyceny společně s příslušnými strukturami fraktálové koherenční zrnitosti. Zrna v zaznamenané struktuře fraktálové koherenční zrnitosti jsou nejasně ohraničena a mají tendenci shlukovat se do klastrů (z angl. cluster-shluk, chomáč), což nasvědčuje o zlepšení korelačních vlastností<sup>1</sup>. Z Obr. 6.5 je parné, že tento jev je výraznější s rostoucí dimenzí  $D$ .

---

<sup>1</sup>V teorii řádné (běžné) koherenční zrnitosti jsou tyto vlastnosti definovány střední velikostí zrna, přičemž body ležící vně zrna jsou považovány za úplně nekorelované [4]. V případě fraktálové koherenční zrnitosti se korelační vlastnosti zlepšují z důvodů shlukování jednotlivých zrn.



Obrázek 6.4: Schéma experimentálního uspořádání pro vznik a detekci pole fraktálové koherenční zrnitosti.

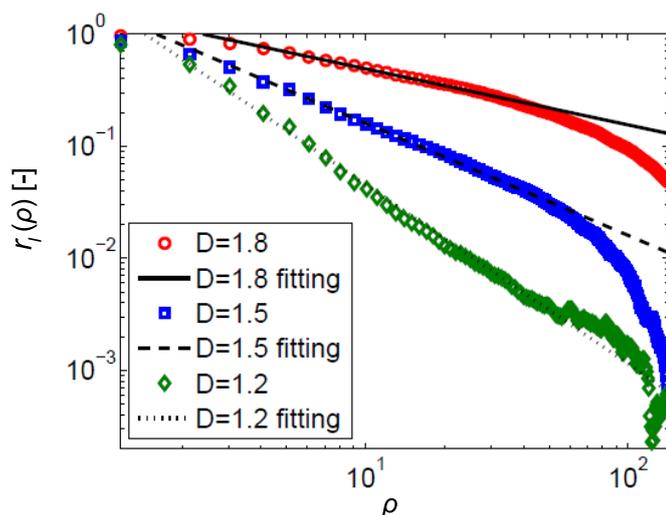


Obrázek 6.5: Náhodné fraktály s dimenzemi  $D = 1,2$ ,  $D = 1,5$ ,  $D = 1,8$  (nahore) a odpovídající struktury fraktálové koherenční zrnitosti (dole) (převzato z [6])

Autokorelační funkce zaznamenané intenzity v rovině detekce je definována jako [6]

$$r_I(\rho) = \frac{\langle I(\rho') I(\rho' + \rho) \rangle - \langle I(\rho') \rangle \langle I(\rho' + \rho) \rangle}{\langle I(\rho') \rangle \langle I(\rho' + \rho) \rangle} \propto \rho^{2(D-2)}, \quad (6.5)$$

kde  $\rho$  je radiální souřadnice v rovině detekce. Autokorelační funkce  $r_I$  rozložení intenzity v rovině detekce, stejně jako rozložení intenzity v rovině matnice, je tedy opět mocninná funkce, v jejímž exponentu se vyskytuje parametr  $D$ . Dimenzi fraktálu lze tedy odhadnout ze sklonu autokorelační funkce  $r_I$  znázorněné ve dvojitém logaritmickém měřítku, jak naznačuje Obr. 6.6.



Obrázek 6.6: Průběhy autokorelačních funkcí intenzit fraktálových koherenčních zrnitostí. Radiální souřadnice  $\rho$  je zaznamenána v jednotkách pixelů ( $1 \text{ px} = 4,65 \text{ } \mu\text{m}$ ) (převzato z [7]).

V následujícím textu prozkoumáme statistické vlastnosti difraktálu a fraktálové koherenční zrnitosti pomocí prezentovaného numerického modelu, přičemž budeme simulovat činnost výše uvedené experimentální sestavy na Obr. 6.4. Tu následně budeme modifikovat za účelem prozkoumání možnosti využití fraktálové koherenční zrnitosti pro měření tečné složky  $a_x$  translace metodou korelace polí koherenční zrnitosti. Nejprve se však zaměříme na vytvoření požadovaného amplitudového transparentu a odhad jeho fraktální dimenze, která při statistickém popisu představuje klíčový parametr.

## 6.2 Vytvoření amplitudového transparentu s náhodným fraktálem a odhad jeho dimenze

### 6.2.1 Výpočet Weierstrassových funkcí s optimálními parametry

Při výpočtu náhodných fraktálů využijeme Weierstrassových funkcí o dimenzi  $D_w$  [6, 70]

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=1}^N w^{-n(2-D_w)} \cos(w^n t + \phi_n), \\ y(t) &= \sum_{n=1}^N w^{-n(2-D_w)} \cos(w^n t + \phi'_n), \end{aligned} \quad (6.6)$$

kde  $x(t)$  a  $y(t)$  reprezentují souřadnice bodu náhodného fraktálu,  $\phi_n$  a  $\phi'_n$  jsou náhodné

proměnné z intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $N$  je počet funkcí v součtu, který je v ideálním případě  $N = \infty$ ,  $w$  je libovolné reálné číslo (podle [46] a [70] zvolíme  $w=1,5$ ) a  $t$  je libovolné reálné číslo z vybraného intervalu. Výsledný objekt má dimenzi rovnu [6, 57]

$$D = \frac{1}{2 - D_w}. \quad (6.7)$$

Weierstrassovy funkce (6.6) jsou v ideálním případě definovány jako nekonečný součet členů  $w^{-n(2-D_w)} \cos(w^n t + \phi_n)$ . Budeme-li nyní pro jednoduchost předpokládat, že člen  $\cos(w^n t + \phi_n) = 1$ , potom součet  $\sum_{n=1}^{N=\infty} w^{-n(2-D_w)}$  představuje klesající geometrickou nekonečnou řadu s kvocientem  $q = w^{-(2-D_w)}$ ,  $|q| < 1$  [44]. Její součet je definován jako

$$s = \frac{1}{1 - q}, \quad (6.8)$$

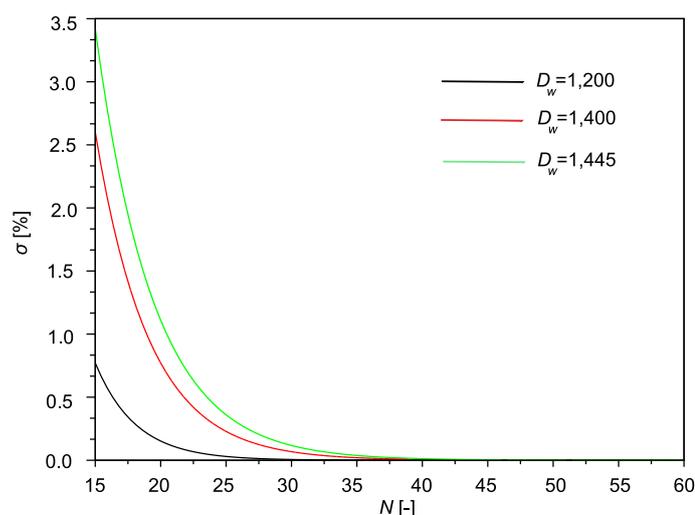
přičemž součet prvních  $n$  členů je [44]

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (6.9)$$

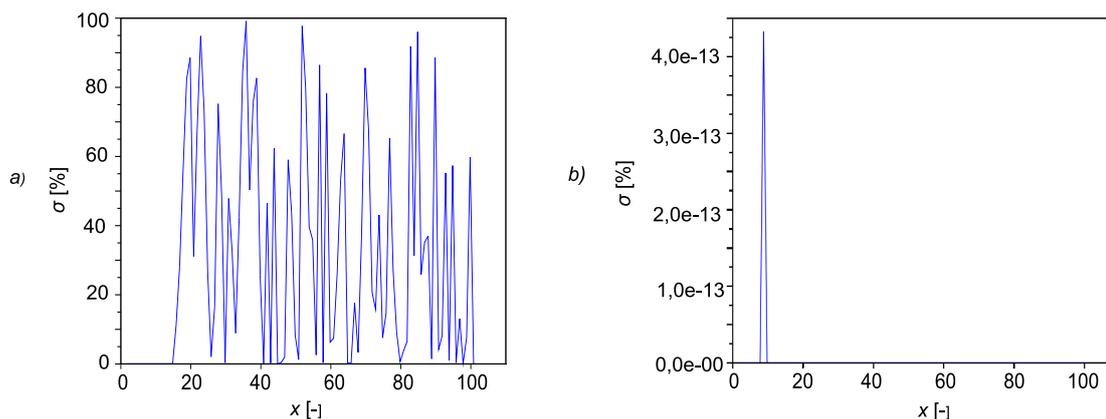
Budeme hledat optimální parametr  $N$  s ohledem na to, aby se oba součty (6.8) a (6.9) pro zvolené  $n \leq N$  příliš nelišily, čímž bychom se přiblížili ideálnímu případu nekonečné řady. Graf na Obr. 6.7 porovnává odchylku  $\sigma$  součtu  $s_n$  od součtu  $s$  nekonečné řady pro tři vybrané dimenze  $D_w = 1,2$ ,  $D_w = 1,4$  a  $D_w = 1,445$ , definovanou jako  $\sigma = 100\% \cdot |s_n - s| / s$ . Z grafu je patrné, že odchylka  $\sigma$  nabývá nejvyšších hodnot pro dimenzi  $D_w = 1,445$  a je téměř nulová pro všechny dimenze  $D_w$  při  $N \geq 40$ .

Nyní se zaměříme na člen řady  $\cos(w^n t + \phi_n)$ . Je třeba si uvědomit, že pro velké  $n \leq N$  se stávají výpočty kosinů v použitém výpočetním systému SciLab velmi neschůdnými. Pro názornost spočítáme  $\cos(2\pi \cdot 10^x)$ , kde  $x = 1, 2, 3 \dots 100$ , a odchylku  $\sigma$  těchto výsledků od  $\cos(2\pi)$  definovanou jako  $\sigma = |\cos(2\pi \cdot 10^x) - \cos(2\pi)| \cdot 100\%$ . Výsledek je znázorněn v grafu na Obr. 6.8a. Z grafu je patrné, že pro hodnoty  $x \leq 14$  je odchylka  $\sigma$  nulová, zatímco pro  $x > 14$  dosahují hodnoty odchylky  $\sigma$  až 100%. Pokud porovnáme argumenty  $10^{14} = w^n t$ , přičemž ostatní parametry jsme zvolili  $w = 1,5$  a  $t = 2\pi$ , potom hodnota  $n = 75$ . Pro hodnoty  $n > 75$  tedy dochází k chybným výpočtům kosinu ve Weierstrassových funkcích (6.6). Je však třeba podotknout, že příspěvky kosinu jsou pro vysoké  $n$  zanedbatelné, neboť, jak již bylo řečeno, funkce kosinus se ve funkcích (6.6) vyskytuje v součinu se členy klesající geometrické řady. Proto je také tato chyba zanedbatelná a nepřispívá tak k nepřesnosti výpočtu.

Pokud bychom i přesto chtěli funkci kosinus vypočítat správně i pro vysoké hodnoty  $n$ , je třeba provést redukci. Ta spočívá ve vlastnosti periodičnosti funkce kosinus, kterou lze jednoduše vyjádřit jako  $\cos u = \cos (u + 2k\pi)$ , kde  $k = 1,2,..$ . Argument  $u$ , který nabývá velmi velkých hodnot, lze tudíž nahradit součtem  $u + 2k\pi = u + 2\pi$ , kde  $u$  nyní představuje malé číslo ze základního intervalu  $(0, 2\pi)$  funkce kosinus. V programu využíváme příkaz  $u=(u/2\pi-\text{floor}(u/2\pi))*2\pi$ , kde příkaz `floor` znamená zaokrouhlení dolů. Je-li člen `floor(u/2π)` liché nebo sudé číslo, nahradíme jej  $\pi$  nebo  $2\pi$  a přičteme k rozdílu  $u$ . Uvedený postup jsme pro názornost aplikovali na již uvedený případ funkce  $\cos(2\pi \cdot 10^x)$ .



Obrázek 6.7: Odchylka  $\sigma$  od součtu s nekonečné řady pro různé dimenze  $D_w$ .

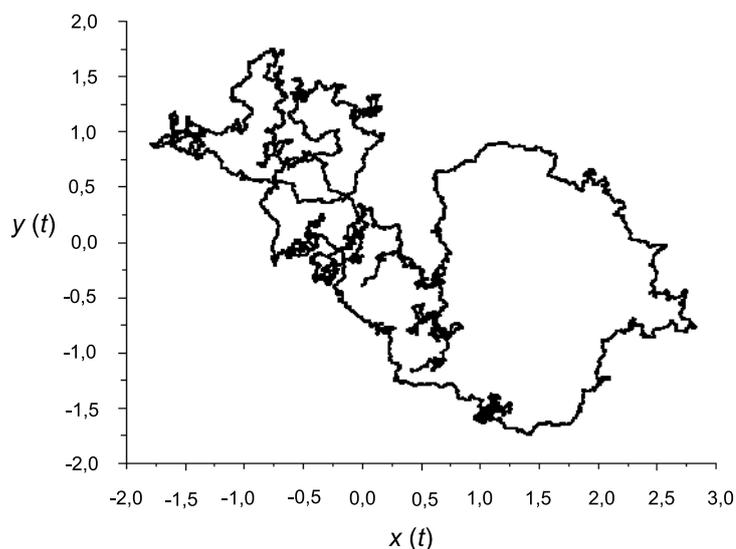


Obrázek 6.8: Odchylky  $\sigma$  kosinu argumentů  $(2\pi \cdot 10^x)$  od  $\cos(2\pi)$  a) před zavedením redukce, b) po zavedení redukce.

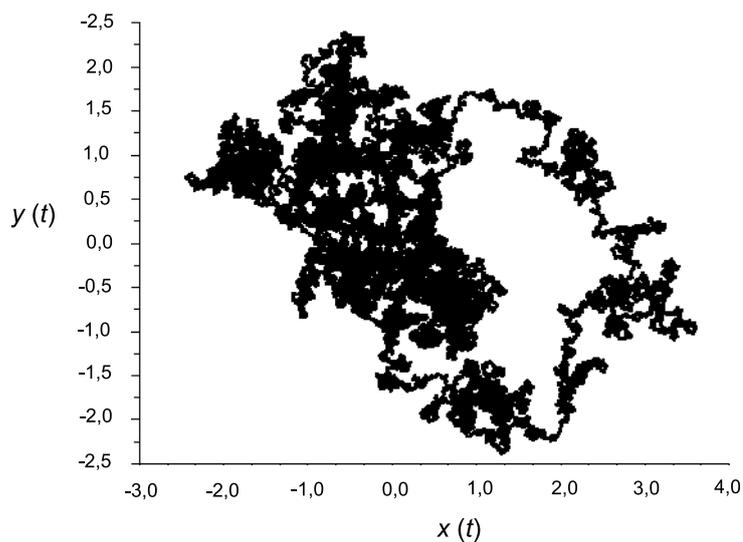
Graf na Obr. 6.8b znázorňuje průběh odchylky  $\sigma$  výpočtu  $\cos(2\pi \cdot 10^x)$  od  $\cos(2\pi)$  po zavedení redukce. Při porovnání s grafem na Obr. 6.8a lze konstatovat, že uvedená redukce výrazně zlepšila výpočet kosinů velkých argumentů.

Na základě výše provedené analýzy jsme zvolíme hodnotu  $N = 40$ . Ostatní parametry

Weierstrassových funkcí jsou následující:  $w = 1,5$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$  s krokem  $2\pi/L$ , kde  $L = 800\,000$  je počet bodů náhodného fraktálu. Dimenze zvolených Weierstrassových funkcí  $D_w$  a odpovídající dimenze celého objektu  $D$  vypočítaná dle (6.7) jsou po zaokrouhlení:  $D_w = 1,2$ ,  $D \doteq 1,250$ ;  $D_w = 1,445$ ,  $D \doteq 1,802$ . Uvedené příklady fraktálních objektů vytvořených kombinací vypočítaných Weierstrassových funkcí (6.6) jsou ilustrovány na Obr. 6.9 a Obr. 6.10.



Obrázek 6.9: Náhodný fraktální objekt s dimenzí  $D = 1,250$ .



Obrázek 6.10: Náhodný fraktální objekt s dimenzí  $D = 1,802$ .

## 6.2.2 Měření dimenzí vypočítaných náhodných fraktálů vytvořených kombinací Weierstrassových funkcí

V předchozím textu bylo nastíněno, jak dimenze fraktálu jakožto amplitudového transparentu výrazně ovlivňuje vlastnosti difragovaného světla. Budeme se proto dále zabývat odhadem dimenze vytvořených fraktálních objektů, abychom, s ohledem na tuto dimenzi, vlastnosti světla vytvořeného počítačovou simulací mohli porovnat s teoretickými tvrzeními. Nejprve budeme řešit situaci, kdy je daný fraktál tvořen body vypočítanými podle stanoveného matematického předpisu. Bude aplikována jedna z nejnámějších metod měření fraktální dimenze - měření mřížkové dimenze  $D_m$ . Posléze budou vyrobeny tlusté fraktály<sup>2</sup> pomocí algoritmu, jenž se k výpočtu mřížkové dimenze využívá. Budeme měřit dimenzi vztahenou k těmto objektům - externí dimenzi  $D_e$ .

Princip metody mřížkové dimenze  $D_m$  je nastíněn v kapitole 6.1.1 a praktická realizace výpočtu demonstrována, například, v [77]. V souladu s uvedeným postupem pokryjeme množinu  $F$  (fraktální objekt) čtvercovou sítí. Přitom najdeme okraje sítě, tj. maximální a minimální hodnotu  $x$ -ové i  $y$ -ové souřadnice bodů, který daný objekt vykresluje. Určíme rozdíl těchto hodnot v obou směrech souřadného systému a ten vydělíme požadovanou délkou strany  $\delta$ . Dostaneme tak počty  $N_\delta(x)$ ,  $N_\delta(y)$  stran čtverců o straně  $\delta$ , které jsou orientovány do  $x$ -ové i  $y$ -ové souřadné osy. Určíme počet  $N_\delta(F)$  zasažených čtverců, tj. těch čtverců, které obsahují alespoň jeden bod objektu. Postup opakujeme pro několik délek  $\delta$  stran čtverců sítě. Mřížkovou dimenzi určíme ze směrnice grafu lineární závislosti  $\log N_\delta(F)$  na  $\log(1/\delta)$  (Obr. 6.2). Při volbě rozsahu  $\delta$  je třeba si uvědomit, že je objekt tvořen izolovanými body. Bude-li proto délka  $\delta$  menší, než je průměrná vzdálenost mezi body fraktálu, odhadovaná hodnota dimenze se bude snižovat. Na druhou stranu, v oblasti větších délek  $\delta$  je odhad dimenze zatížen nepřesností, protože se nezohledňují detaily fraktální množiny  $F$ . Tyto detaily se ztrácejí ve čtvercích, které mají hodnotu dimenze rovnu dimenzi topologické, tj.  $D_T = 2$ . Odhadovaná dimenze je proto vyšší. Toto chování ztěžuje přesný odhad dimenze, neboť není snadné jednoznačně určit lineární část grafu. Proto navíc v každém bodě grafu budeme počítat hodnotu derivace, přičemž směrnice  $\tan \alpha$  bude určována pouze z té části grafu, ve které jsou hodnoty derivace téměř konstantní.

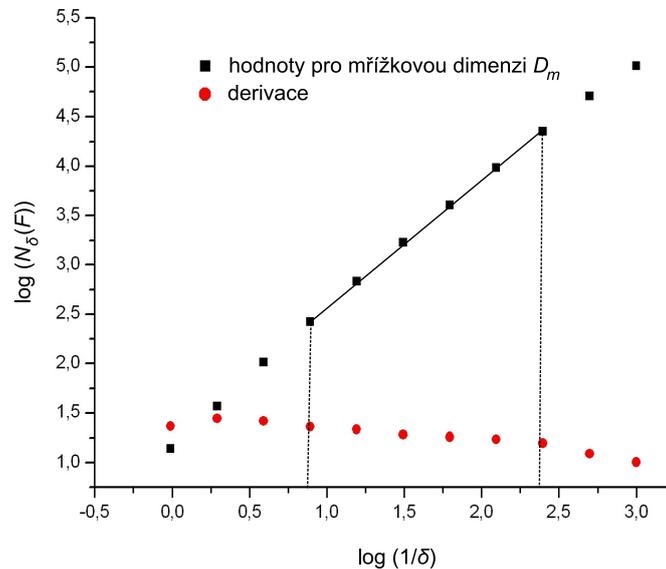
Grafy na Obr. 6.11 a Obr. 6.12 ukazují nalezení směrnice  $\tan \alpha$  grafu lineární závislosti  $\log N_\delta(F)$  na  $\log(1/\delta)$ . Červené body znázorňují hodnoty derivací vypočítaných v příslušných bodech grafu. Svislé přerušované čáry vymezují oblast grafu, kterou lze považovat za lineární (hodnoty derivace se bod od bodu mění velmi málo), a ze které určíme směrnici  $\tan \alpha$  pomocí metody nejmenších čtverců.

Dále se budeme zabývat odhadem dimenze fraktálů zakódovaných v datovém souboru (matici). Při transformaci matematické množiny bodů  $F$  na datový soubor budeme využívat algoritmu pro výpočet mřížkové dimenze  $D_m$ . Zvolíme stranu čtverce  $\delta$ .

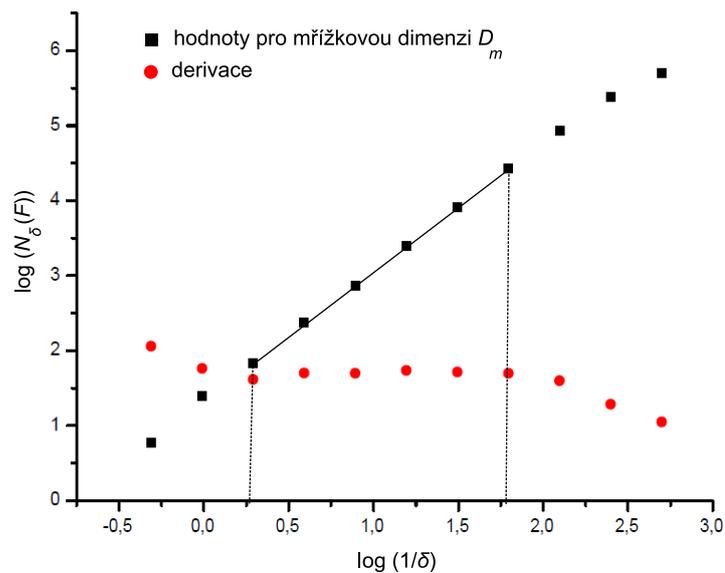
---

<sup>2</sup>Fraktál zakódovaný do matice o konečném rozlišení lze také považovat za tlustý fraktál.

Čtvercům, které pokrývají danou množinu a obsahují alespoň jeden bod množiny, bude přiřazena hodnota jedna a ostatním, nezasazeným čtvercům bude přiřazena hodnota nula. Tak vznikne matice nul a jedniček o rozlišení stanoveném délkou  $\delta$ .

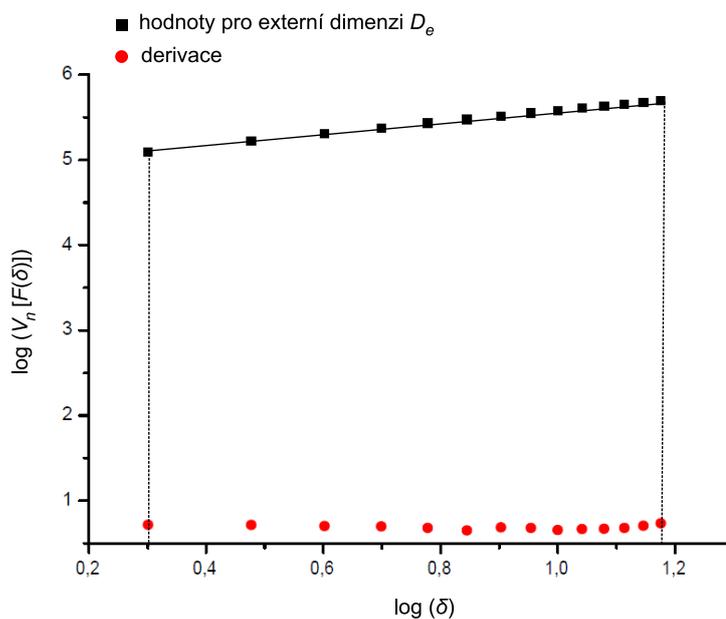


Obrázek 6.11: Graf pro měření mřížkové dimenze  $D_m$  náhodného fraktálu s dimenzí  $D = 1,250$  znázorněného na Obr. 6.9. Směrnice  $\text{tg } \alpha$  lineární části grafu, která je vymezena svislými přerušovanými čarami je rovna  $\text{tg } \alpha = D_m = 1,258 \pm 0,003$ .

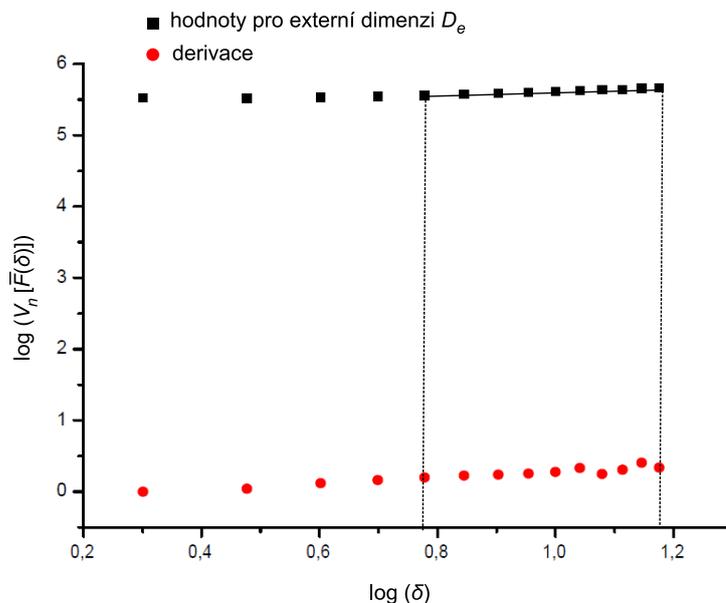


Obrázek 6.12: Graf pro měření mřížkové dimenze  $D_m$  náhodného fraktálu s dimenzí  $D = 1,802$  znázorněného na Obr. 6.10. Směrnice  $\text{tg } \alpha$  lineární části grafu, která je vymezena svislými přerušovanými čarami je rovna  $\text{tg } \alpha = D_m = 1,712 \pm 0,010$ .

Budeme měřit externí dimenzi těchto matic, jejíž definice byla uvedena v kapitole 6.1.1. Možný způsob výpočtu externí dimenze  $D_e$  je uveden, například, v [77]. Nejprve převedeme matici nul a jedniček, jejíž výpočet byl popsán v předchozím odstavci, do tzv. základní matice. Při tom postupujeme analogicky, jako při výpočtu mřížkové dimenze, to znamená, že zasaženým čtvercům o straně  $\delta$  přiřadíme hodnotu jedna, zbylým čtvercům hodnotu nula. Přifukovat budeme tím způsobem, že kolem každého jednotkového bodu základní matice přiřadíme další jedničky po způsobu možných tahů krále na šachovnici. Získali jsme přifouknutou matici ze základní matice pro dané  $\delta$ . Tento postup budeme opakovat pro různá  $\delta$ . S využitím vztahu [77]  $V^n [\bar{F}(\delta)] = \delta^n [N_p(\delta) - N_z(\delta)]$ , kde  $n$  je dimenze celého prostoru,  $N_p$  je počet jedniček přifouknuté matice a  $N_z$  je počet jedniček základní matice, pak vyhodnotíme externí dimenzi, analogicky jako v případě mřížkové dimenze, ze sklonu grafu  $\log V^n [\bar{F}(\delta)]$  na  $\log \delta$ . Následující grafy na Obr. 6.13 a Obr. 6.14 ukazují nalezení směrnice  $\text{tg } \alpha$  grafu lineární závislosti  $\log N_\delta(F)$  na  $\log(1/\delta)$ . Červené body znázorňují hodnoty derivací vypočítaných v příslušných bodech grafu. Svislé přerušované čáry vymezují oblast grafu, ze které určíme směrnici  $\text{tg } \alpha$  pomocí metody nejmenších čtverců.



Obrázek 6.13: Graf pro měření externí dimenze  $D_e$  náhodného fraktálu s dimenzí  $D = 1,250$  znázorněného na Obr. 6.9. Směrnice  $\text{tg } \alpha$  lineární části grafu, která je vymezena svislými přerušovanými čarami je rovna  $\text{tg } \alpha = D_e = 1,313 \pm 0,003$ .



Obrázek 6.14: Graf pro měření externí dimenze  $D_e$  náhodného fraktálu s dimenzí  $D = 1,802$  znázorněného na Obr. 6.10. Směrnice  $\text{tg } \alpha$  lineární části grafu, která je vymezena svislými přerušovanými čarami je rovna  $\text{tg } \alpha = D_e = 1,732 \pm 0,004$ .

Pro představu, jak velmi jsou metody výpočtu mřížkové a externí dimenze přesné, vedle obou uvedených fraktálů s teoretickými dimenzemi  $D = 1,250$  a  $D = 1,802$  jsme tyto metody aplikovali také na fraktály s teoretickými dimenzemi  $D = 1,429$ ,  $D = 1,538$  a  $D = 1,667$ . Naměřené hodnoty mřížkových dimenzí  $D_m$  a externích dimenzí  $D_e$  vybraných fraktálů jsou shrnuty v Tabulce 6.1. Odhadované hodnoty dimenzí jsou přibližně rovny příslušným teoretickým hodnotám.

Tabulka 6.1: Souhrn naměřených hodnot mřížkových dimenzí  $D_m$  a externích dimenzí  $D_e$  porovnávaných s teoretickou dimenzí  $D$ . Rozlišení matice fraktálu je ve všech případech podobné, přibližně  $(2000 \times 2000)$  bodů.

$D$	$D_m$	$D_e$
1,250	$1,258 \pm 0,003$	$1,313 \pm 0,003$
1,429	$1,416 \pm 0,004$	$1,458 \pm 0,002$
1,538	$1,531 \pm 0,004$	$1,575 \pm 0,002$
1,667	$1,603 \pm 0,004$	$1,611 \pm 0,003$
1,802	$1,712 \pm 0,010$	$1,732 \pm 0,004$

Jistý nesoulad odhadnutých dimenzí s teoretickými hodnotami, především pro poslední dvě dimenze, je přisouzen nedostatečnému množství bodů fraktálu. Nepřesnost odhadu externí dimenze tlustých fraktálu je zase způsobena konečným rozlišením matice.

## 6.3 Simulace činnosti experimentální sestavy pro pozorování fraktálové koherenční zrnitosti

V této kapitole představíme numerický model vzniku difraktálu a fraktálové koherenční zrnitosti podle experimentálního uspořádání na Obr. 6.4 v kapitole 6.1.2. V dřívější studii [10] byly provedeny simulace fraktálové koherenční zrnitosti za použití Fisher-Burfordovy funkce [8, 59], která představuje aproximaci průběhu intenzity (komplexní amplitudy) difraktálu ve Fraunhoferově rovině fraktálního transparentu. Intenzitní, popřípadě amplitudová Fisher-Burfordova funkce je definována jako

$$I(x, y) = \left(1 + \frac{q^2}{R^2}\right)^{-D/2}, \quad (6.10)$$

popřípadě

$$U(x, y) = \left(1 + \frac{q^2}{R^2}\right)^{-D/4}, \quad (6.11)$$

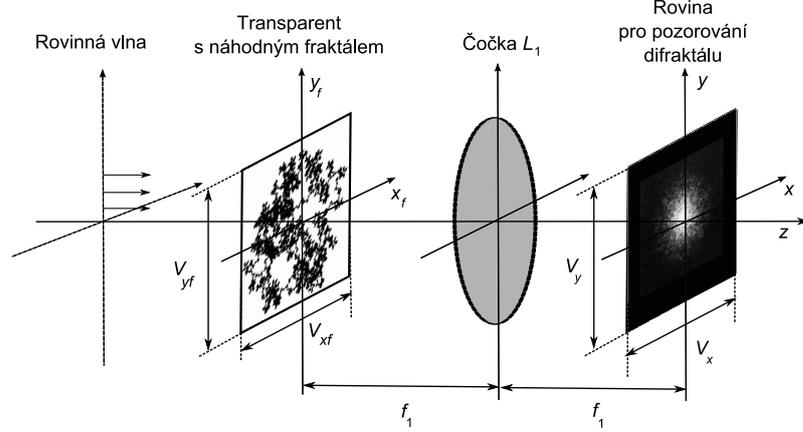
kde  $q = (x^2 + y^2)^{1/2}$  je radiální souřadnice v rovině pozorování difraktálu a  $R = \lambda f_1 / (2\pi V_{xf})$ , přičemž  $f_1$  je ohnisková vzdálenost čočky  $L_1$  a  $V_{xf}$  představuje velikost strany fraktálního transparentu. Výsledné pole fraktálové koherenční zrnitosti bylo počítáno za pomoci FFT součinu funkce (6.11) s komplexní amplitudou  $\exp(ik\Delta(x, y))$  vlny v rovině matnice [10].

V této práci budeme při simulaci fraktálové koherenční zrnitosti postupovat jiným způsobem. Nejprve provedeme za pomoci prezentovaného modelu výpočet difraktálu jako vlny difragované na vybraných fraktálních objektech, které jsme vytvořili a jejichž dimenzi jsme odhadovali v předchozí kapitole. Budeme tak simulovat reálnou situaci, kdy rozložení intenzity difraktálu vykazuje drobné fluktuace (koherenční zrnitost) a také může být deformováno z důvodu rozlišení fraktálního transparentu. Nakonec využijeme k vytvoření fraktálové koherenční zrnitosti také Fisher-Burfordovu funkci. Vzhled simulované fraktálové koherenční zrnitosti porovnáme při různě zvolených šířkách spekter difraktálu ovlivňovaných ohniskovou vzdáleností  $f_1$  čočky  $L_1$ . Zároveň prozkoumáme, jak se tento vzhled mění s různým počtem bodů matice osvětleného předmětu (matnice).

### 6.3.1 Simulace difraktálu a jeho charakteristiky

Nejprve se zaměříme na první část problému, tj. na simulaci difraktálu, který se vytvoří ve Fraunhoferově oblasti fraktálního transparentu. Fraunhoferovu difrakci na nepropustných místech fraktálního transparentu lze interpretovat jako Fourierovu

transformaci rozložení komplexní amplitudy optické vlny v rovině transparentu. Tato Fourierova transformace je realizována čočkou  $L_1$  s ohniskovou vzdáleností  $f_1$ . Při numerické simulaci budeme vycházet ze schématického znázornění na Obr. 6.15.



Obrázek 6.15: Schéma pro pozorování difraktálu.

Za předpokladu, že dopadající rovinná vlna má jednotkovou komplexní amplitudu, při výpočtu komplexní amplitudy světla v rovině  $(x, y)$  budeme používat vztah

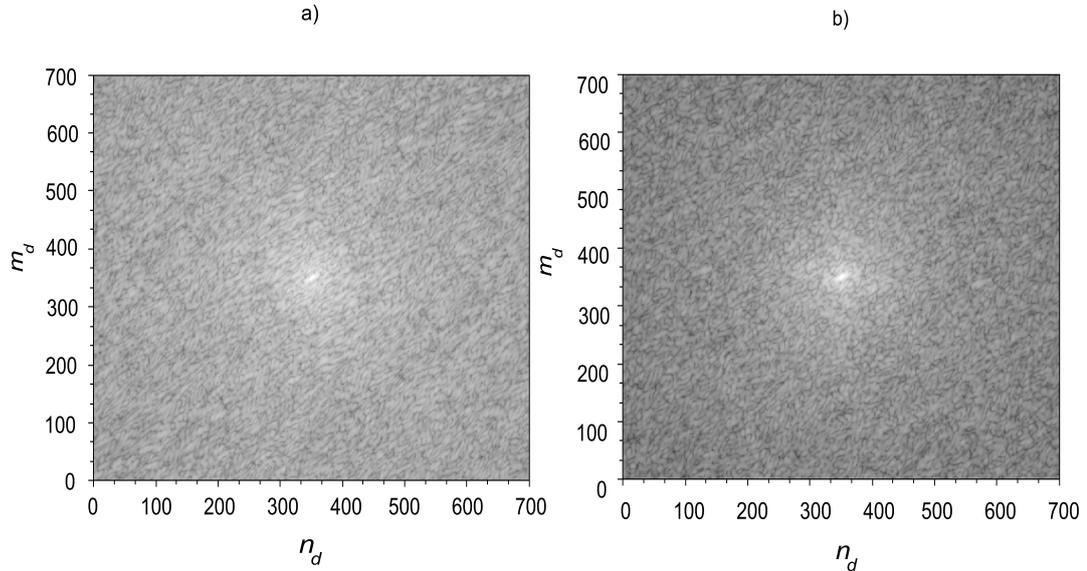
$$U(x, y) = \frac{1}{i\lambda f_1} \exp(-2ikf_1) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_f, y_f) \exp\left(\frac{ik}{f_1}(xx_f + yy_f)^2\right) dx_f dy_f, \quad (6.12)$$

kde  $p(x_f, y_f)$  představuje amplitudovou propustnost fraktálního transparentu, přičemž v bodech tvořících náhodný fraktál je  $p(x_f, y_f) = 1$  a v bodech situovaných mimo náhodný fraktál je  $p(x_f, y_f) = 0$ . Výpočet se urychlí, budeme-li do vztahu (6.12) za souřadnice  $x_f, y_f$  dosazovat pouze pozice nenulových bodů matice transparentu, zatímco nulové body nebudeme při výpočtu uvažovat. Zvolené parametry simulace jsou následující: Rozlišení matic fraktálních transparentů je  $n_f \times m_f = 2308 \times 1747$  pro fraktál s teoretickou dimenzí  $D = 1,250$  a  $n_f \times m_f = 2332 \times 1838$  pro fraktál s teoretickou dimenzí  $D = 1,802$ . Počet bodů matice rozložení komplexní amplitudy difraktálu je  $n_d \times m_d = 700 \times 700$ . Velikosti stran fraktálního transparentu  $V_{x_f}, V_{y_f}$  v rovině  $(x_f, y_f)$  jsou  $V_{x_f} = 10$  mm,  $V_{y_f} \doteq 8$  mm<sup>3</sup> a velikosti stran  $V_x, V_y$  matice rozložení komplexní amplitudy difraktálu v rovině  $(x, y)$  jsou  $V_x = 10$  mm,  $V_y = 10$  mm. Ohnisková vzdálenost čočky  $L_1$  je  $f_1 = 1000$  mm.

Na obrázcích (Obr. 6.16a a Obr. 6.16b) jsou znázorněny intenzity difrakčních obrazců detekovaných ve Fraunhoferově rovině  $(x, y)$  fraktálního transparentu o dimenzích  $D = 1,250$  a  $D = 1,802$ . Je důležité si povšimnout, že kromě výrazného středu

<sup>3</sup>Velikost strany  $V_{y_f}$  je dopočítána dle vztahu  $V_{y_f} = (m_f/n_f)V_{x_f}$ , aby se zachoval původní tvar fraktálního objektu. V obou případech je velikost strany  $V_{y_f}$  po zaokrouhlení rovna 8 mm.

s maximální úrovní intenzity obsahují difraktály ve své intenzitní struktuře také strukturu koherenční zrnitosti. Její vznik je zapříčiněn interferencí vln, jejichž zdroje jsou náhodně rozloženy na propustné části fraktálního transparentu. Porovnáme-li intenzitní profil z prostředního řádku matice rozložení intenzity difraktálu na Obr. 6.16a s intenzitním profilem Fisher-Burfordovy funkce spočítané pro tytéž parametry, je zřejmé, že fluktuace intenzity se objevuje pouze u difragovaného světla, zatímco Fisher-Burfordova funkce má hladký průběh (Obr. 6.17).

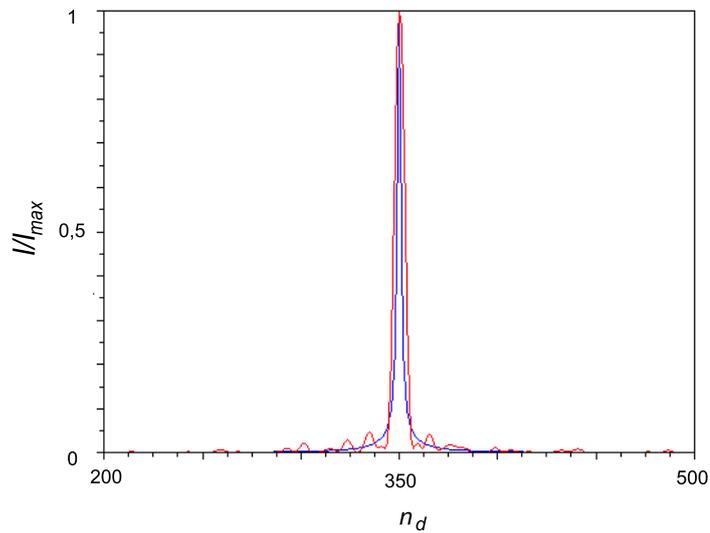


Obrázek 6.16: Znázornění intenzity difrakčního obrazce ve Fraunhoferově rovině  $(x, y)$  fraktálního transparentu a) s teoretickou dimenzí  $D = 1,250$  (Obr. 6.9) a rozlišením  $2308 \times 1747$  a b) s teoretickou dimenzí  $D = 1,802$  (Obr. 6.10) a rozlišením  $2332 \times 1878$ . Pro lepší vykreslení je úroveň intenzity znázorněna v logaritmickém měřítku.

V rámci vyhodnocení statistických vlastností simulovaných difraktálů (Obr. 6.16) určíme závislost střední hodnoty intenzity  $\langle I_o(q) \rangle$  na radiální souřadnici  $q$  a výsledek porovnáme se vztahem (6.4) uvedeným v kapitole 6.1.2. Při tom budeme postupovat tak, že k radiální souřadnici (poloměru)  $q = (x^2 + y^2)^{1/2}$  přiřadíme příslušnou kružnici. Body na kružnici představují soubor intenzit  $I_o(q)$ , jehož střední hodnotu  $\langle I_o(q) \rangle$  určíme. Takto budeme postupovat pro všechna  $q$ . Pro další analýzu souřadnice  $x, y$  ve Fraunhoferově rovině (Obr. 6.15) převedeme na prostorové frekvence dle  $\nu_x = x/\lambda f_1$ ,  $\nu_y = y/\lambda f_1$  [26].

Na Obr. 6.18 jsou znázorněny průběhy střední hodnoty intenzity  $\langle I_o(q) \rangle$  uvedených rozložení intenzity v řezu difraktálů znázorněných na Obr. 6.16. Sklon lineární části zaznamenané v intervalu prostorových frekvencí s hraničními hodnotami  $q_{min} = 200 \text{ m}^{-1}$  a  $q_{max} = 7901 \text{ m}^{-1}$  je  $\text{tg } \alpha = -1,330 \pm 0,008$ ,  $\text{tg } \alpha = -1,875 \pm 0,010$ .

Uvedená statistická vyhodnocení ukázala, že rozložení intenzity difraktálů, potažmo odhadované hodnoty fraktálních dimenzí  $D$ , neodpovídají zcela přesně teoretickým dimenzím  $D = 1,250$  a  $D = 1,802$ . Důvodem je konečné rozlišení fraktálních transparentů.

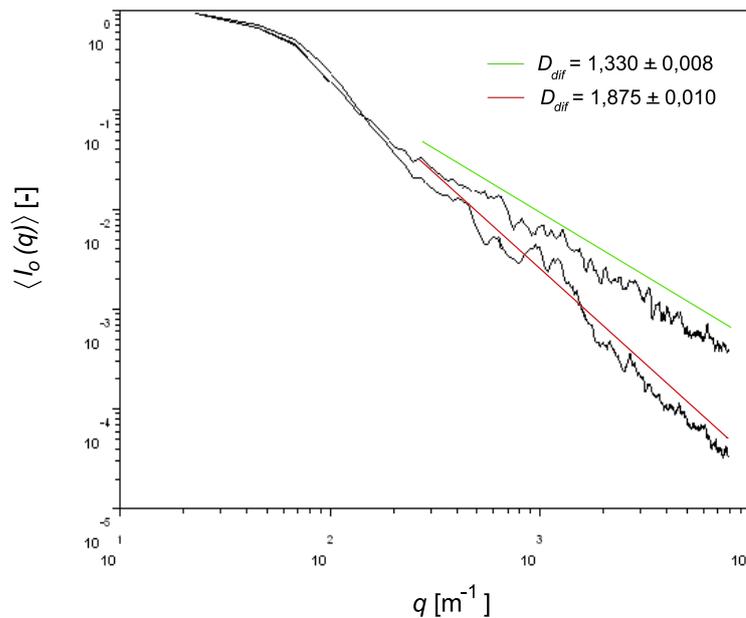


Obrázek 6.17: Porovnání normovaného intenzitního profilu difraktálu získaného z prostředního řádku difrakčního obrazce na Obr. 6.16a (červeně) s intenzitním profilem Fisher-Burfordovy funkce (modře).

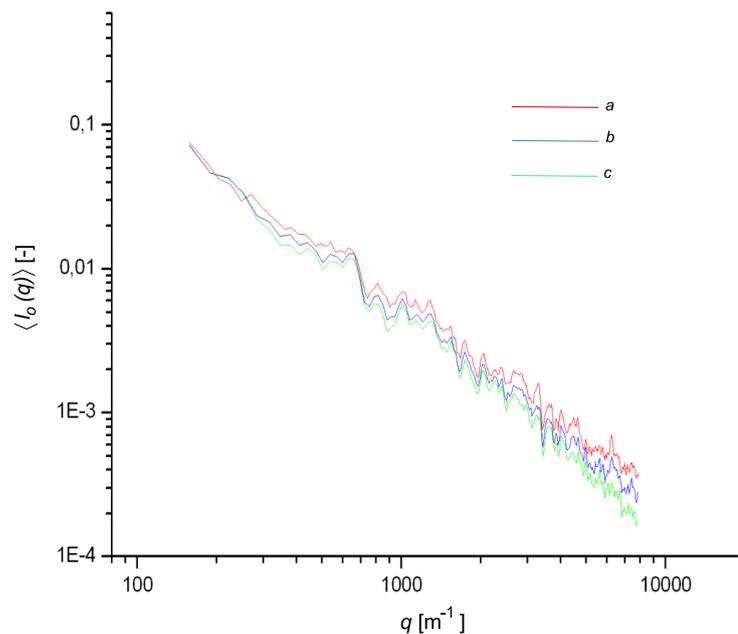
Tuto skutečnost ilustruje Obr. 6.19, který znázorňuje průběhy střední intenzity  $\langle I_o(q) \rangle$  difraktálů v závislosti na radiální souřadnici  $q$  pro vybranou teoretickou dimenzi  $D = 1,250$  při různých rozlišeních fraktálních transparentů. Stanovené sklony nejlépe proložených přímk všech uvedených průběhů středních intenzit  $\langle I_o(q) \rangle$  při rozlišení fraktálních transparentů  $578 \times 438$ ,  $1154 \times 874$  a  $2308 \times 1747$  jsou:  $\text{tg } \alpha = -1,412 \pm 0,010$ ,  $\text{tg } \alpha = -1,376 \pm 0,008$  a  $\text{tg } \alpha = -1,330 \pm 0,008$ . Průběh střední intenzity je strmější, a tedy i odhadovaná hodnota dimenze je větší s menším rozlišením fraktálního transparentu.

Určování dimenze ze sklonu grafu závislosti střední intenzity  $\langle I_o(q) \rangle$  na souřadnici  $q$  tedy není u uvedených fraktálních objektů zcela jednoznačné<sup>4</sup>. Konečné rozlišení způsobuje na některých místech fraktálního objektu zanedbání detailů, které se ztrácejí za vzniku velkých plošek, jak ukazuje detail na Obr. 6.3. Jelikož fraktální dimenze vyhodnocené z grafu na Obr. 6.18 se z výše uvedených důvodů neshodují s teoretickými dimenzemi  $D$ , budeme je dále značit  $D_{dif}$ , takže  $D_{dif} = 1,330$  a  $D_{dif} = 1,875$ .

<sup>4</sup>Průběh střední intenzity je však strmější i v případě jednoduchého objektu, jakým je například kruhová štěrbinu. Odhad dimenze se opět zvýší, neboť šířka štěrbinu má konečnou velikost, což odpovídá vyšší dimenzi, než je teoretická hodnota  $D = 1$  pro štěrbinu s infinitesimálně malou šířkou [6].



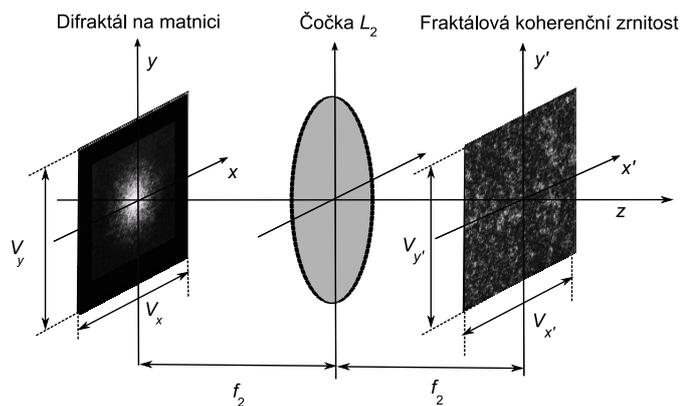
Obrázek 6.18: Průběhy střední intenzity  $\langle I_o(q) \rangle$  difraktálů od fraktálů s teoretickou dimenzí  $D = 1,250$  a  $D = 1,802$ . Rozlišení fraktálů je  $2308 \times 1747$  a  $2332 \times 1878$ .



Obrázek 6.19: Průběhy střední intenzity  $\langle I_o(q) \rangle$  difraktálů od fraktálu s teoretickou dimenzí  $D = 1,250$ . Rozlišení fraktálu a)  $2308 \times 1747$ , b)  $1154 \times 874$ , c)  $578 \times 438$ .

### 6.3.2 Simulace fraktálové koherenční zrnitosti a její charakteristiky

Při simulaci fraktálové koherenční zrnitosti vyjdeme z experimentálního uspořádání na Obr. 6.20. Amplitudu světla  $U(x, y)$  v rovině pozorování difraktálu



Obrázek 6.20: Vznik fraktálové koherenční zrnitosti při osvětlení matnice difraktálem.

vynásobíme fázovou propustností matnice  $\exp(-ik\Delta(x, y))$ , kde  $\Delta(x, y)$  charakterizuje fluktuační drsné rozhraní v řádech jednotek mikrometrů a výslednou komplexní amplitudu v rovině detekce  $(x', y')$  vypočítáme dle vztahu

$$\begin{aligned}
 U(x', y') &= \frac{1}{i\lambda f_2} \exp(-2ikf_2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \exp(-ik\Delta(x, y)) \times \\
 &\times \exp\left(\frac{ik}{f_2}(xx' + yy')\right) dx dy. \tag{6.13}
 \end{aligned}$$

Obrázky (Obr. 6.21 a Obr. 6.22) ilustrují intenzitní rozdělení simulované fraktálové koherenční zrnitosti detekované v  $m_{vy} \times n_{vy}$  bodech obrazové ohniskové roviny čočky  $L_2$  o ohniskové vzdálenosti  $f_2 = 500$  mm. Ostatní parametry simulace jsou uvedeny v titulcích obrázků.

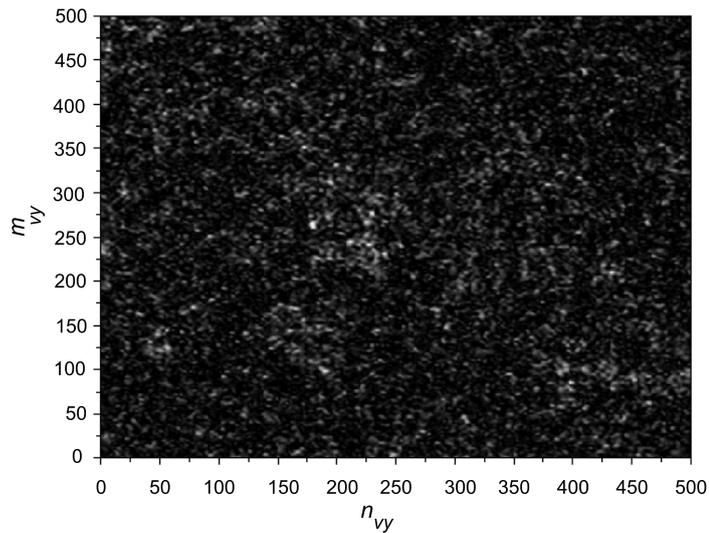
Obdobně jako v kapitole 4.4, budeme se i nyní zabývat statistickými vlastnostmi prvního i druhého řádu simulované fraktálové koherenční zrnitosti. Na Obr. 6.23 a Obr. 6.24 jsou zobrazeny histogramy výsledků měření souboru normované intenzity struktur fraktálové koherenční zrnitosti znázorněných na Obr. 6.21 a Obr. 6.22. Je evidentní, že vypočítané statistiky prvního řádu se shodují se statistikami běžné koherenční zrnitosti. Tento závěr byl také experimentálně potvrzen v diplomové práci [78].

Dále je zřejmé, že zrna v zaznamenané struktuře se mají tendenci shlukovat do výraznějších klastrů v případě fraktálního objektu s vyšší dimenzí. Abychom tuto tendenci kvantifikovali, využijeme autokorelační funkci  $r_I(\rho)$  intenzit [79]

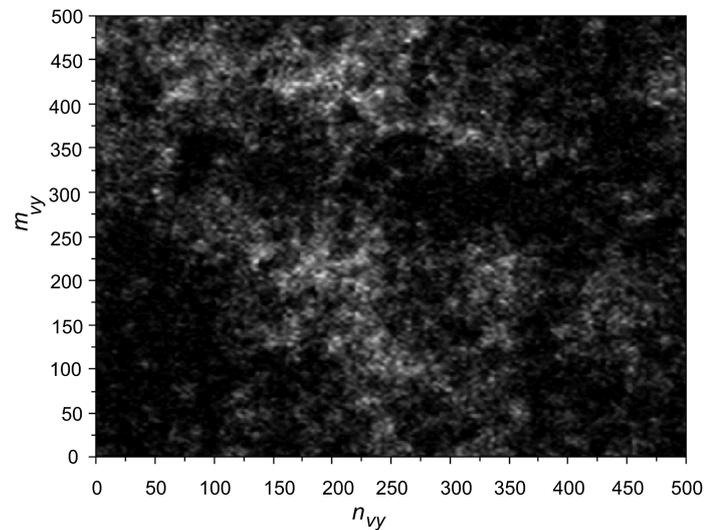
$$r_I(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_I(\rho, \theta) d\theta, \tag{6.14}$$

kteřá je, analogicky jako při výpočtu střední hodnoty  $\langle I_o(q) \rangle$  intenzity difraktálu, počítána

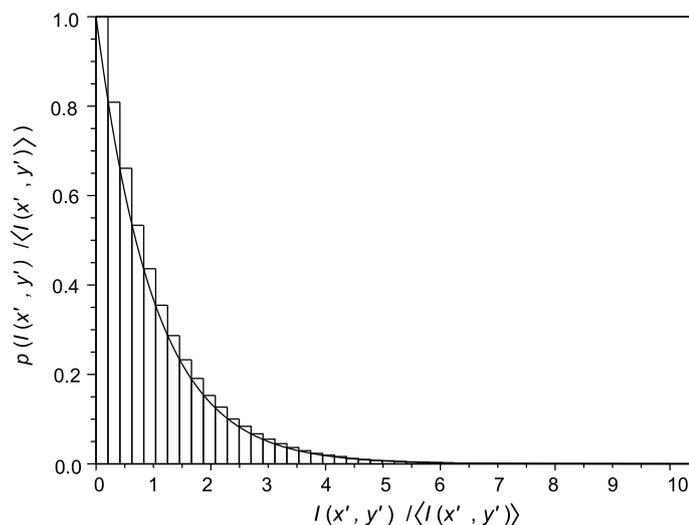
jako střední hodnota ze souboru hodnot dvojdimenzionální autokorelační funkce  $r_I$  (6.5) situovaných na kružnici o poloměru  $\rho = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$ .



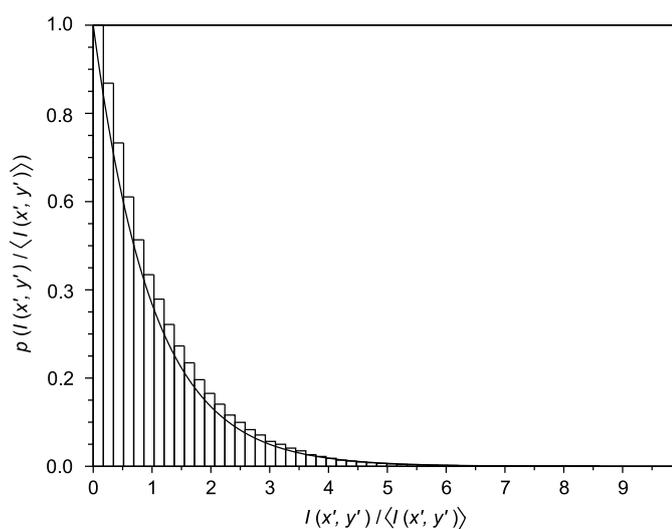
Obrázek 6.21: Struktura fraktálové koherenční zrnitosti generované při dopadu difraktálu, jehož intenzitní rozložení je znázorněno na Obr. 6.16a, a kterému přísluší odhadnutá dimenze  $D_{dif} = 1,330$ . Vstupní parametry simulace:  $V_x = 10$  mm,  $f_2 = 500$  mm,  $V_{x'} = 5$  mm,  $m_d = n_d = 700$ ,  $m_{vy} = n_{vy} = 500$ .



Obrázek 6.22: Struktura fraktálové koherenční zrnitosti generované při dopadu difraktálu, jehož intenzitní rozložení je znázorněno na Obr. 6.16b, a kterému přísluší odhadnutá dimenze  $D_{dif} = 1,875$ . Vstupní parametry simulace:  $V_x = 10$  mm,  $f_2 = 500$  mm,  $V_{x'} = 5$  mm,  $m_d = n_d = 700$ ,  $m_{vy} = n_{vy} = 500$ .

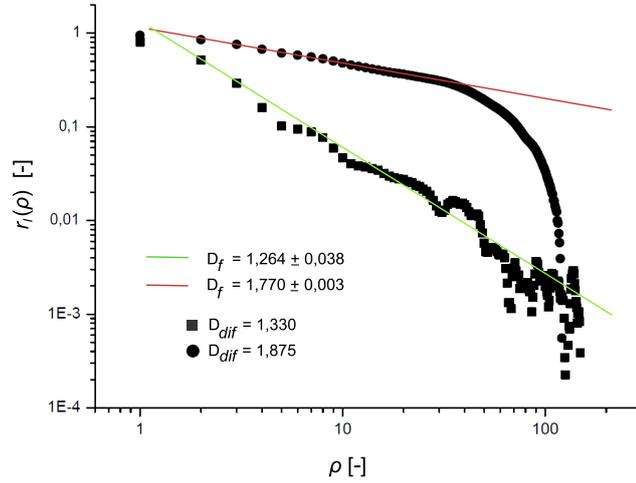


Obrázek 6.23: Histogram výsledků měření souboru 250 000 hodnot normované intenzity  $I(x', y') / \langle I(x', y') \rangle$  v „bodě“ pole fraktálové koherenční zrnitosti znázorněné na Obr. 6.21. Plná čára ukazuje, pro srovnání, teoreticky odvozenou hustotu pravděpodobnosti intenzity (exponenciální rozdělení) v bodě pole řádné koherenční zrnitosti. Poměr signálu ku šumu je  $S/N = 1,005$ , vizibilita je  $C = 0,995$ .



Obrázek 6.24: Histogram výsledků měření souboru 250 000 hodnot normované intenzity  $I(x', y') / \langle I(x', y') \rangle$  v „bodě“ pole fraktálové koherenční zrnitosti znázorněné na Obr. 6.22. Plná čára ukazuje, pro srovnání, teoreticky odvozenou hustotu pravděpodobnosti intenzity (exponenciální rozdělení) v bodě pole řádné koherenční zrnitosti. Poměr signálu ku šumu je  $S/N = 1,051$ , vizibilita je  $C = 0,952$ .

Obrázek 6.25 ukazuje průběhy autokorelačních funkcí  $r_I$  intenzit pro příslušné dimenze  $D_{dif} = 1,330$  a  $D_{dif} = 1,875$  a zaznamenané hodnoty dimenzí  $D_f = 1,264 \pm 0,038$  a  $D_f = 1,770 \pm 0,003$  odhadnuté ze sklonu lineárních částí grafu.



Obrázek 6.25: Autokorelační funkce intenzit fraktálové koherenční zrnitosti zaznamenané na Obr. 6.21 a 6.22.

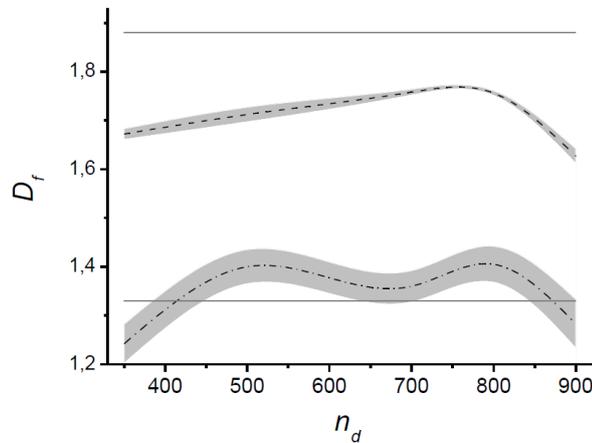
I přesto, že průběhy autokorelačních funkcí  $r_I$  intenzity vykazují mocinný charakter typický pro strukturu fraktálové koherenční zrnitosti, uvedené výsledky odhadu dimenze  $D_f$  se přesně neshodují s předpokládanými hodnotami  $D_{dif} = 1,330$  a  $D_{dif} = 1,875$ . Důvodem může být nedodržení Nyquistova teorému při výpočtu komplexní amplitudy světla podle vztahů (6.12) a (6.13) [39]. Rozteč bodů  $\Delta\nu_x$  ve frekvenční oblasti (rovině pozorování difraktálu) a velikost strany fraktálního objektu  $V_{xf}$  spojuje Nyquistova podmínka  $\Delta\nu_x = 1/V_{xf}$  (Obr. 6.15). Pro zvolené  $V_{xf} = 10$  mm je tudíž  $\Delta\nu_x = 100$  m<sup>-1</sup>. Rozteč  $\Delta\nu_x$  lze také vyjádřit jako  $\Delta\nu_x = 2\nu_{x,max}/n_d$ , kde  $n_d$  je počet bodů strany matice rozložení komplexní amplitudy difraktálu a  $\nu_{x,max}$  představuje maximální přenesenou prostorovou frekvenci. Hodnota této frekvence je ovlivňována nejmenší roztečí  $\delta_{xf}$  (rozlišením) matice fraktálu,  $\nu_{x,max} = 1/2\delta_{xf}$  (tzv. Nyquistova frekvence). Při  $\delta_{xf} \approx 5$  μm je Nyquistova frekvence  $\nu_{x,max} \approx 100000$  m<sup>-1</sup>. Při zvolených parametrech sestavy  $f_1 = 1000$  mm a  $V_x = 10$  mm však dochází k ořezání vyšších prostorových frekvencí, neboť pro maximální přenesenou frekvenci zároveň platí  $\nu_{x,max} = V_x/2\lambda f_1 = 7901$  m<sup>-1</sup>. Matrice předmětu s konečnými rozměry tudíž funguje jako prostorový filtr. Dosazením  $\nu_{x,max} = 7901$  m<sup>-1</sup> do vztahu pro rozteč  $\Delta\nu_x = 2\nu_{x,max}/n_d = 22,5$  m<sup>-1</sup> jsme dostali téměř pětkrát větší vzorkování ve frekvenční rovině, než stanovuje Nyquistova podmínka  $\Delta\nu_x = 100$  m<sup>-1</sup>.

Strukturu fraktálové koherenční zrnitosti jsme proto za dodržení výše uvedených podmínek (tj. při zvolených  $\Delta\nu_x = 100$  m<sup>-1</sup>,  $\nu_{x,max} \approx 100000$  m<sup>-1</sup>) nasimulovali ještě jednou, abychom se přesvědčili, zda dosáhneme při odhadu dimenze se struktury fraktálové koherenční zrnitosti přesnějších výsledků. Výsledky však byly podobné jako v předcházejícím případě:  $D_f = 1,283 \pm 0,013$  a  $D_f = 1,782 \pm 0,009$ . Další úvahy proto vedou k otázce, zda rozlišení matice rozložení komplexní amplitudy difraktálu vyplývající z Nyquistovy podmínky  $\Delta\nu_x = 100$  m<sup>-1</sup> není nedostatečné. Jelikož toto rozlišení společně se šířkou spektra může hrát podstatnou roli, našim dalším krokem je prozkoumat vliv jak

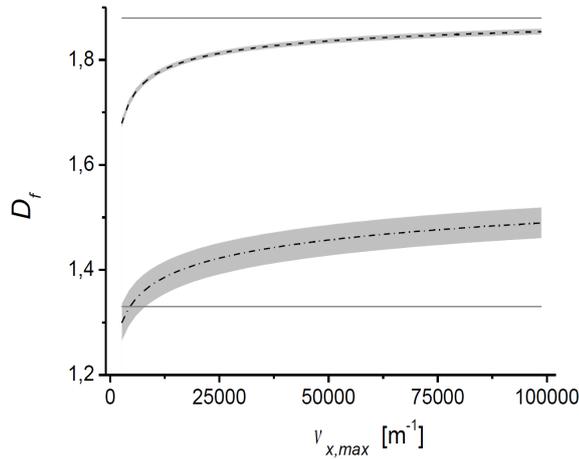
počtu bodů  $n_d$ , tak šířky spektra  $\nu_{x,max}$  na odhad výsledné dimenze, tentokrát bez ohledu na Nyquistův teorém. K tomu využijeme amplitudovou Fisher-Burfordovu funkci  $U(x, y)$  (6.11), kterou při simulaci fraktálové koherenční zrnitosti dosadíme do vztahu (6.13).

Grafy na Obr. 6.26 a Obr. 6.27 znázorňují závislost hodnoty odhadované dimenze  $D_f$  na počtu bodů  $n_d$  strany matice rozložení komplexní amplitudy difraktálu a na šířce spektra  $\nu_{x,max}$  difraktálu regulované ohniskovou vzdáleností  $f_1$  čočky  $L_1$ . Graf na Obr. 6.26 ukazuje, že v případě dimenze  $D_{dif} = 1,875$  hodnoty odhadované dimenze  $D_f$  předpokládanou hodnotu  $D_{dif}$  v uvedeném intervalu počtu bodů  $n_d \in \langle 300, 900 \rangle$  vůbec nedosáhnou. Nejlepší odhad hodnoty  $D_f$  však vyšel pro  $n_d = 700 - 800$ . V případě dimenze  $D_{dif} = 1,330$  byly výsledky přesnější, optimální hodnota  $n_d$  se však v uvedeném intervalu počtu bodů měnila. Graf na Obr. 6.27 ukazuje, že s rostoucí šířkou spektra  $\nu_{x,max}$  roste také odhadovaná hodnota dimenze  $D_f$ . Při dimenzi  $D_{dif} = 1,875$  se s rostoucí hodnotou  $\nu_{x,max}$  odhad dimenze  $D_f$  zlepšuje, zatímco při dimenzi  $D_{dif} = 1,330$  je stanovení dimenze  $D_f$  nejpřesnější v oblasti nižších hodnot  $\nu_{x,max}$ .

Je evidentní, že vysvětlení tohoto nejednoznačného chování by vyžadovalo hlubší analýzu. Jelikož však uvedené nejasnosti zřejmě nebudou mít vliv na následné zkoumání využití fraktálové koherenční zrnitosti v metrologii, nebudeme se tímto problémem dále zabývat.



Obrázek 6.26: Vliv počtu bodů  $n_d$  na přesnost stanovení dimenze ze sklonu autokorelační funkce  $r_I$  při konstantní hodnotě  $\nu_{x,max} = 7901 \text{ m}^{-1}$  šířky spektra difraktálu. Čerchovaná čára představuje odhadnuté hodnoty dimenze  $D_f$  pro  $D_{dif} = 1,330$  a čárkovaná čára představuje odhadnuté hodnoty dimenze  $D_f$  pro  $D_{dif} = 1,875$ . Šedá tlustá čára vykreslená podél výsledných hodnot graficky znázorňuje nejistotu odhadu dimenze. Teoretické hodnoty  $D_{dif} = 1,330$  a  $D_{dif} = 1,875$  jsou zobrazeny úsečkou.



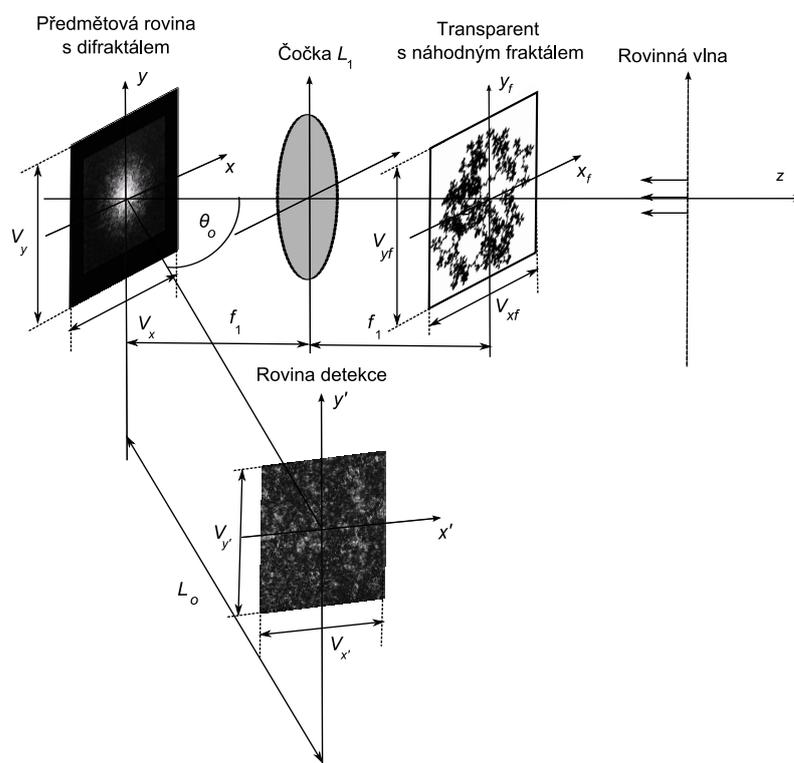
Obrázek 6.27: Vliv šířky frekvenčního spektra  $\nu_{x,max}$  na přesnost stanovení dimenze ze sklonu autokorelační funkce  $r_I$  při konstantní hodnotě  $n_d = 700$  počtu bodů strany matice rozložení komplexní amplitudy difraktálu. Čerchovaná čára představuje odhadnuté hodnoty dimenze  $D_f$  pro  $D_{dif} = 1,330$  a čárkovaná čára představuje odhadnuté hodnoty dimenze  $D_f$  pro  $D_{dif} = 1,875$ . Šedá tlustá čára vykreslená podél výsledných hodnot graficky znázorňuje nejistotu odhadu dimenze. Teoretické hodnoty  $D_{dif} = 1,330$  a  $D_{dif} = 1,875$  jsou zobrazeny úsečkou.

S ohledem na budoucí aplikace budeme také odhadovat dimenzi  $D_f$  ze struktury fraktálové koherenční zrnitosti ve volném poli, přičemž se dále zaměříme pouze na vyšší dimenzi  $D_{dif} = 1,875$ . Statistika fraktálové koherenční zrnitosti pozorované ve volném poli pod nulovým úhlem (po vyjmutí čočky  $L_2$  na Obr.6.4) byla experimentálně prostudována v [80]. Trend grafu závislosti autokorelační funkce  $r_I$  na radiální souřadnici  $\rho$  prezentovaný v [80] se s vzdáleností od detekční roviny neměnil. V tomto textu se však zaměříme na strukturu fraktálové koherenční zrnitosti pozorovanou pod úhlem  $\theta_o$  dle experimentálního uspořádání na Obr. 6.28<sup>5</sup>. Budeme zkoumat, jak se detekovaná struktura mění pro dva zvolené úhly pozorování  $\theta_o = 10^\circ$  a  $\theta_o = 60^\circ$ . Při výpočtu komplexní amplitudy  $U(x', y')$  světla v rovině detekce  $(x', y')$  ve vzdálenosti  $L_o$  od předmětu využijeme vztah

$$\begin{aligned}
 U(x', y') &= \frac{\exp(-ikL_o)}{i\lambda L_o} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \exp(-ik\Delta(x, y)) \times \\
 &\times \exp\left(-ik \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2L_o}\right) dx dy. \tag{6.15}
 \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Jelikož je tato experimentální sestava, na rozdíl od původní sestavy na Obr. 6.4, navržena pro případ odrazu od předmětu, je rozšířen potenciál využití fraktálové koherenční zrnitosti o měření translace nepropustných předmětů.

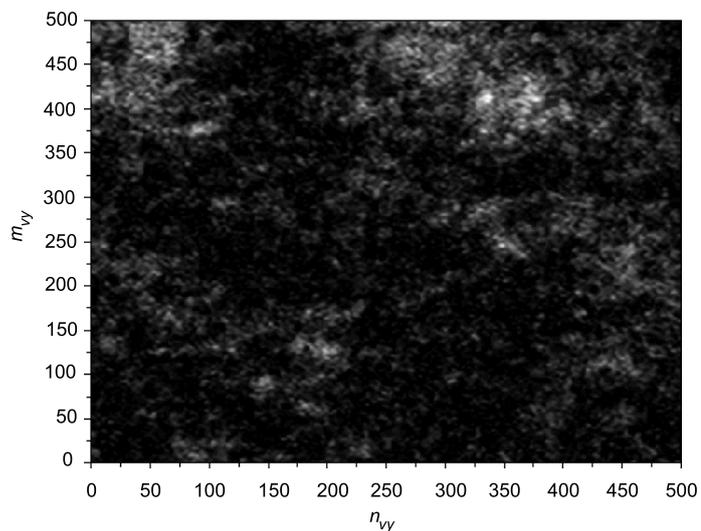
Na Obr. 6.29 a Obr. 6.30 jsou ilustrovány struktury fraktálové koherenční zrnitosti detekované ve volném poli ve vzdálenosti  $L_o = 0,5$  m pod úhlem  $\theta_o = 10^\circ$  a  $\theta_o = 60^\circ$ . Je zřejmé, že při zvoleném úhlu pozorování  $\theta_o = 60^\circ$  se zřetelněji mění charakter pozorované struktury, což dokazuje také průběh autokorelační funkce  $r_I$  na Obr. 6.31. Z grafu je patrné, že při porovnání s menším úhlem pozorování  $\theta_o = 10^\circ$  došlo k nárůstu šířky autokorelační funkce  $r_I$ . Důvodem je zvětšení velikosti zrn orientovaných do směru osy  $x'$ , neboť s rostoucím úhlem pozorování  $\theta_o$  se zmenšuje průmět osvětlené plošky (řez difraktálem) do směru detekce. Trend grafu funkce  $r_I$  však zůstal zachován, to znamená, že dimenze  $D_f$  se nezměnila. Lze tedy konstatovat, že budeme-li koherenční zrnitost pozorovat pod úhlem, korelační vlastnosti ve struktuře se nebudou znehodnocovat<sup>6</sup>.



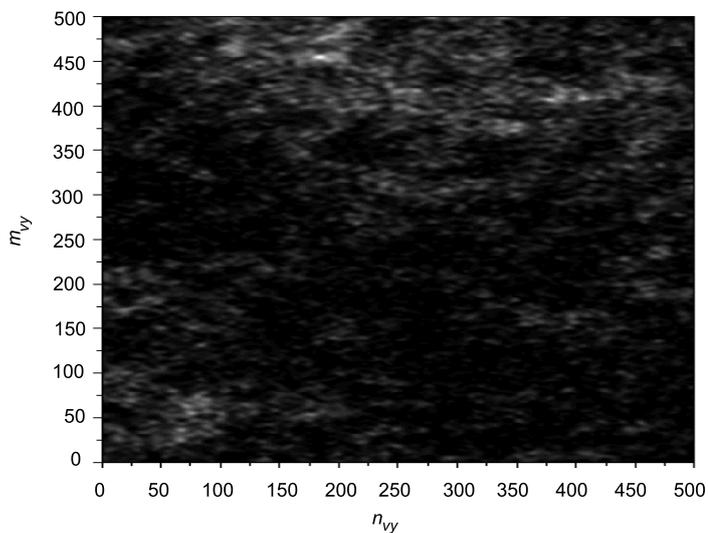
Obrázek 6.28: Experimentální sestava pro pozorování fraktálové koherenční zrnitosti ve volném poli.

Nyní porovnáme struktury fraktálové koherenční zrnitosti pro dvě různé vzdálenosti  $L_o = 0,11$  m (Obr. 6.32) a  $L_o = 0,5$  m (Obr. 6.29) při zvoleném úhlu pozorování  $\theta_o = 10^\circ$ . Z grafu na Obr. 6.33 je patrné, že úsek lineární části autokorelační funkce  $r_I$  se s klesající vzdáleností zmenšuje, neboť je zaznamenán pokles velikosti zrn ve struktuře fraktálové koherenční zrnitosti v důsledku malé vzdálenosti  $L_o$ . Trend grafu funkce  $r_I$  však opět zůstal zachován, což je v souladu s experimentálním závěrem v [80].

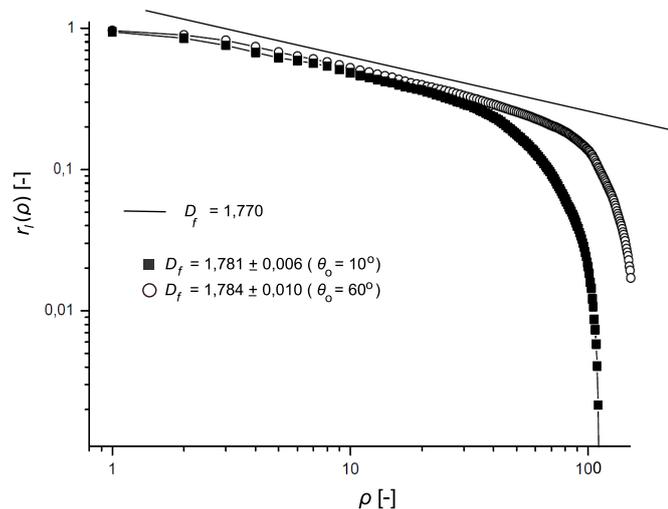
<sup>6</sup>Tento závěr koresponduje s faktem, že fraktálová koherenční zrnitost vykazuje dobré korelační vlastnosti rovněž podél optické osy [81].



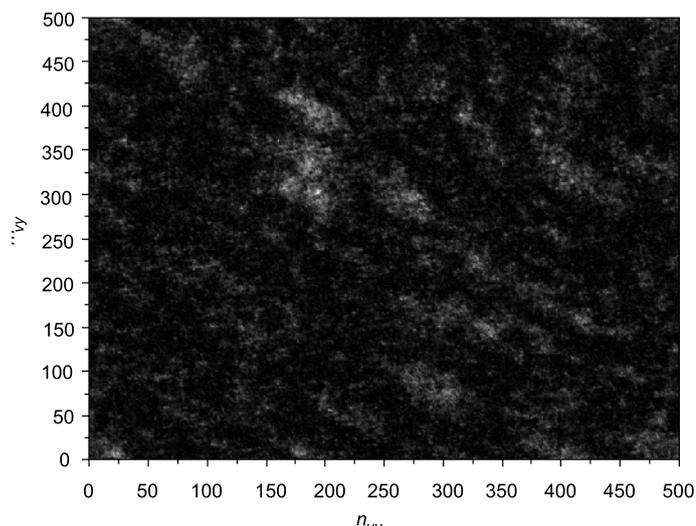
Obrázek 6.29: Struktura fraktálové koherenční zrnitosti generovaná při dopadu difraktálu, jehož intenzitní rozložení je znázorněno na Obr. 6.16b, a který přísluší odhadnuté dimenzi  $D_{dif} = 1,875$ . Vstupní parametry simulace:  $V_x = 10$  mm,  $L_o = 0,5$  m,  $V_{x'} = 5$  mm,  $m_d = n_d = 700$ ,  $m_{vy} = n_{vy} = 500$ ,  $\theta_o = 10^\circ$ .



Obrázek 6.30: Struktura fraktálové koherenční zrnitosti generovaná při dopadu difraktálu, jehož intenzitní rozložení je znázorněno na Obr. 6.16b, a který přísluší odhadnuté dimenzi  $D_{dif} = 1,875$ . Vstupní parametry simulace:  $V_x = 10$  mm,  $L_o = 0,5$  m,  $V_{x'} = 5$  mm,  $m_d = n_d = 700$ ,  $m_{vy} = n_{vy} = 500$ ,  $\theta_o = 60^\circ$ .



Obrázek 6.31: Autokorelační funkce intenzit fraktálové koherenční zrnitosti znázorněné na Obr. 6.29 a Obr. 6.30. Rovná čára představuje, pro porovnání, sklon autokorelační funkce  $r_I$  na Obr. 6.25.

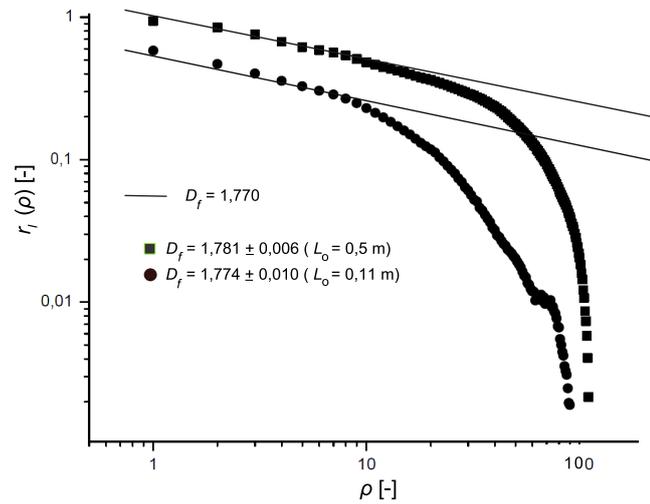


Obrázek 6.32: Struktura fraktálové koherenční zrnitosti generovaná při dopadu difraktálu, jehož intenzitní rozložení je znázorněno na Obr. 6.16b, a který přísluší odhadnuté dimenzi  $D_{dif} = 1,875$ . Vstupní parametry simulace:  $V_x = 10$  mm,  $L_o = 0,11$  m,  $V_{x'} = 5$  mm,  $m_d = n_d = 700$ ,  $m_{vy} = n_{vy} = 500$ ,  $\theta_o = 10^\circ$ .

## 6.4 Aplikace fraktálové koherenční zrnitosti pro měření tečného posuvu předmětu

### 6.4.1 Simulace činnosti experimentální sestavy pro volné pole

Závěrem této práce se budeme věnovat možnosti využití fraktálové koherenční zrnitosti pro měření tečného posuvu předmětu pomocí korelační metody použité v kapitole 5, přičemž se nejprve zaměříme na případ volného pole dle experimentálního uspořádání



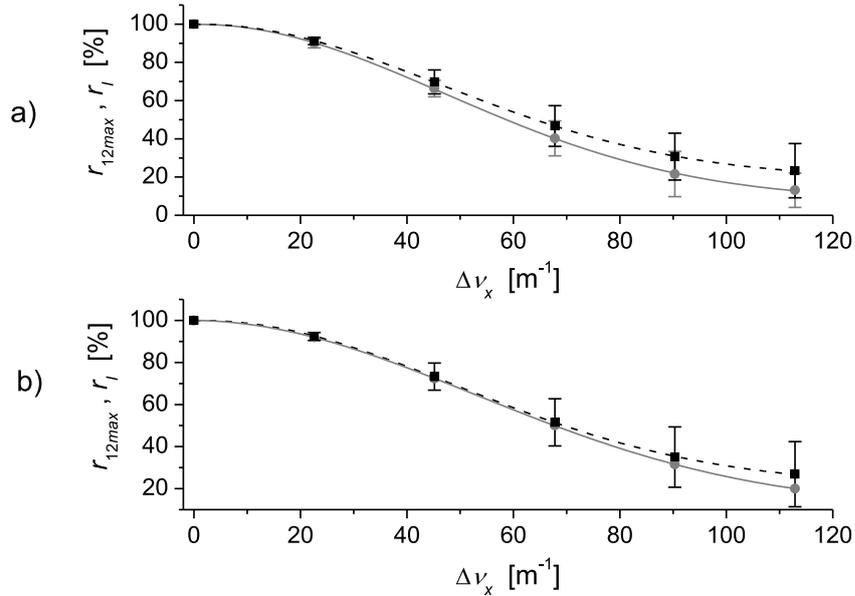
Obrázek 6.33: Autokorelační funkce intenzit fraktálové koherenční zrnitosti znázorněné na Obr. 6.29 a Obr. 6.32. Rovná čára představuje, pro porovnání, sklon autokorelační funkce  $r_I$  na Obr. 6.25.

na Obr. 6.28. Hlavní motivací pro prozkoumání možnosti užití fraktálové koherenční zrnitosti v metrologii byly specifické korelační vlastnosti v její struktuře. Očekávalo se, že přítomnost velkých klastrů ve struktuře fraktálové koherenční zrnitosti způsobí, analogicky jako v případě autokorelační funkce, pomalejší pokles maxima funkce vzájemné korelace porovnávaných struktur fraktálové koherenční zrnitosti ze dvou stavů předmětu (před a po posuvu předmětu). Toho by se dalo využít pro měření větších tečných translací předmětu, než které jsou běžné u prezentované korelační metody<sup>7</sup>. Počítačové simulace však poukázaly na jistá omezení využití osvětlující vlny (difraktálu) při velkých posuvech předmětu. Jak již bylo uvedeno, vedle výrazného maxima ve středu difrakčního obrazce (Obr. 6.16) jsou zde obsaženy také fluktuace intenzit - koherenční zrnitost. Nerovnoměrné osvětlení má za následek, že hodnoty komplexní amplitudy (intenzity) difraktálu zaznamenané v rovině povrchu předmětu  $(x, y)$  před a po jeho posuvu v jednom a tom samém bodě jeho povrchu jsou rozdílné. Generují se proto úplně odlišené intenzitní signály, které jsou nekorelované<sup>8</sup>. Tuto situaci vystihuje Obr. 6.34, ve kterém jsou zakresleny hodnoty maxim  $r_{12max}$  funkce  $r_{12}$  vzájemné korelace struktur fraktálových koherenčních zrnitostí (plná šedá čára) posunutých v důsledku tečné translace  $\Delta\nu_x$  předmětu vyjádřené v jednotkách prostorových frekvencí. Tyto hodnoty byly, analogicky jako v kapitole 5.3.4, získané středováním přes všechny řádky matice detektoru. Šedá vertikální čára protínající šedé body představuje směrodatnou odchylku hodnoty  $r_{12max}$  získané z jednoho řádku

<sup>7</sup>Rozsah měřicí metody pro měření tečné složky translace pro volné pole se, v závislosti na parametrech měřicí sestavy, běžně pohybuje v rozmezí jednotek až stovek mikrometrů [4, 42]

<sup>8</sup>K dekorelaci by při velkých posuvech docházelo i v případě osvětlení Fisher-Burfordovou funkcí (bez struktury koherenční zrnitosti). I když se zde nevyskytují fluktuace intenzit, výrazný střed v řezu difraktálu také představuje rychlou změnu intenzity.

matice detektoru. Pro porovnání jsou zde uvedeny také průběhy autokorelačních funkcí  $r_I$  intenzit v rovině pro pozorování difraktálu (čárkovaná černá čára) získané středováním přes všechny řádky matice rozložení intenzity v řezu difraktálu. Rychlý pokles průběhu autokorelační funkce  $r_I$  je způsoben nerovnoměrným osvětlením. Černá vertikální čára protínající černé body představuje směrodatnou odchylku hodnoty  $r_I$  získané z jednoho řádku matice rozložení intenzity v řezu difraktálu.



Obrázek 6.34: Hodnoty maxim  $r_{12max}$  funkce  $r_{12}$  vzájemné korelace posunutých struktur fraktálové koherenční zrnitosti (plná šedá čára) a průběh autokorelační funkce  $r_I$  intenzity v rovině pozorování difraktálu (čárkovaná černá čára); a)  $D_{dif} = 1,330$  a b)  $D_{dif} = 1,875$ .

Porovnáním vypočítaných hodnot  $r_I$  a  $r_{12max}$  je vidět, že se tyto hodnoty v rámci příslušných směrodatných odchylek překrývají. Lze tedy konstatovat, že možnost využití difraktálu jako osvětlující vlny při měření tečné translace předmětu úzce souvisí s tvarem autokorelační funkce  $r_I$  intenzity difraktálu v rovině  $(x, y)$ .

Budeme se dále zabývat grafickými průběhy znázorněnými na Obr. 6.34b. Translace  $\Delta\nu_x$  předmětu, při které hodnota maxima  $r_{12max}$  funkce vzájemné korelace klesne přibližně na 60%, je  $\Delta\nu_x \approx 60 m^{-1}$  při dané šířce autokorelační funkce  $r_I$ . Této hodnotě translace  $\Delta\nu_x$  vyjádřené v jednotkách prostorových frekvencí odpovídá příslušná hodnota translace  $a_x$  vyjádřená v metrech. Pro zvolenou ohniskovou vzdálenost  $f_1 = 1000$  mm čočky  $L_1$  je  $a_x = \Delta\nu_x \lambda f_1 \approx 38 \mu m$ . Při použití čočky s větší ohniskovou vzdáleností se tato velikost, a tudíž i rozsah možných translací předmětu zvýší.

Další pozornost však nyní zaměříme k malým posuvům, při kterých ještě nebude docházet k výrazné dekorelaci. Předmět se bude posouvat o konstantní hodnotu v rámci

oblasti téměř rovnoměrného rozdělení intenzity. Počítačovou simulací bylo zjištěno, že vztah mezi složkou  $a_x$  translace předmětu a posuvem fraktálové koherenční zrnitosti  $A_{x'}$  pro experimentální uspořádání na Obr. 6.28 je<sup>9</sup>

$$A_{x'} = a_x \cos \theta_o. \quad (6.16)$$

Platnost vztahu (6.16) potvrzují vybrané výsledky simulace shrnuté v Tabulce 6.2 pro různé parametry experimentálního uspořádání. V horním dílu tabulky jsou zvoleny různé hodnoty tečného posuvu  $a_x$  předmětu při pevně zvoleném úhlu pozorování  $\theta_o = 30^\circ$  a v dolním dílu tabulky jsou zvoleny různé hodnoty úhlu pozorování  $\theta_o$  při pevně zvoleném posuvu předmětu  $a_x = 28,6 \mu\text{m}$ .

*Tabulka 6.2: Srovnání hodnot posuvů  $A_{x'}$  struktury koherenční zrnitosti vypočtených pomocí vztahu (6.16) pro různě zvolené hodnoty tečných posuvů  $a_x$  předmětu a úhlů pozorování  $\theta_o$  s hodnotami  $A_{x'}^{sim}$  stanovenými počítačovou simulací při zvolených parametrech simulované měřicí sestavy  $L_o = 0,3 \text{ m}$ ,  $f_1 = 1000 \text{ mm}$ ,  $f_2 = 500 \text{ mm}$ . Další parametry simulace jsou:  $m_d = 1400$ ,  $n_d = 1400$ ,  $n_{vy} = 500$ ,  $V_x = V_y = 10 \text{ mm}$ ,  $V_{x'} = 10 \text{ mm}$ .*

$\theta_o = 30^\circ$			
$a_x [\mu\text{m}]$	$A_{x'} [\mu\text{m}]$	$A_{x'}^{sim} [\mu\text{m}]$	$r_{12max}^{sim} [\%]$
7,1	6,2	6,0	97,4
14,3	12,4	12,7	88,3
21,4	18,6	17,8	77,5
28,6	24,7	23,4	67,8

$a_x = 28,6 \mu\text{m}$			
$\theta_o [^\circ]$	$A_{x'} [\mu\text{m}]$	$A_{x'}^{sim} [\mu\text{m}]$	$r_{12max}^{sim} [\%]$
0	28,6	28,9	71,4
20	26,9	26,7	70,4
40	21,9	22,0	78,7
60	13,4	14,3	72,3

Nyní posuv fraktálové koherenční zrnitosti vyhodnotíme v různých vzdálenostech od předmětu. Budeme tak využívat specifické vlastnosti fraktálové koherenční zrnitosti,

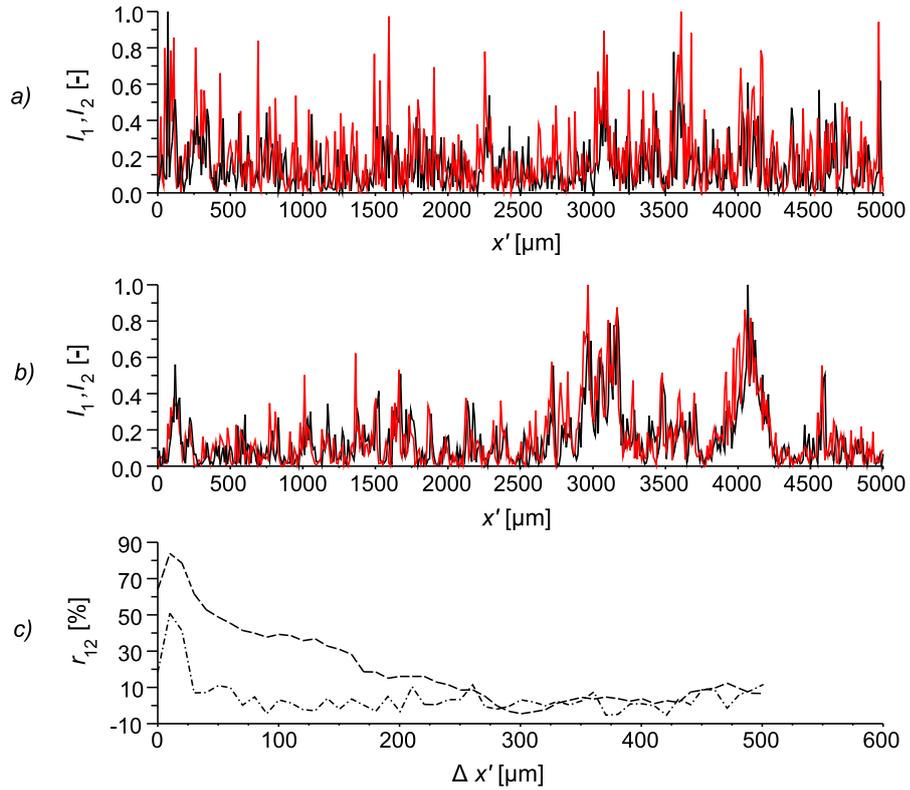
<sup>9</sup>Tento vztah odpovídá případu osvětlení předmětu rovinnou vlnou [82], kde nevystupuje vzdálenost  $L_o$ .

jakou je přítomnost zrn s různou velikostí. Nejmenší zrna se spojují za vzniku větších zrn, která se opět spojují a vytváří výrazné klastry. Jak bylo uvedeno v kapitole 4.3, zrnu o střední velikosti  $\alpha_{x'r}$  ve struktuře simulované řádné koherenční zrnitosti přísluší optimální počet bodů (přibližně 8-10 bodů), které toto zrno vykreslují. Uvedená podmínka dostatečného vzorkování při numerické simulaci je analogická s dosažením vhodné velikosti zrna (pomocí parametrů experimentální sestavy) do roviny detektoru o pevně stanovené rozteči  $\delta_{x'}$  mezi aktivními body detektoru. Bude-li vzdálenost  $L_o$  (Obr. 6.28) roviny detekce od předmětu malá, detektor zaznamená bez zkreslení pouze největší zrna (klastry) ve struktuře fraktálové koherenční zrnitosti, neboť při dané rozteči  $\delta_{x'}$  je uvedená podmínka vzorkování splněna pouze pro velká zrna. S rostoucí vzdáleností  $L_o$  poroste také velikost zrn a detektor bude tudíž postupně bez zkreslení detekovat i ta zrna, která předtím podmínku dostatečného vzorkování nespĺňovala.

Graf na Obr. 6.35 znázorňuje vzájemný posuv intenzitních signálů  $I_1$  a  $I_2$  z vybraného řádku struktury fraktálové koherenční zrnitosti generované od příslušných difraktálů  $D_{dif} = 1,330$  (Obr. 6.35a),  $D_{dif} = 1,875$  (Obr. 6.35b) a funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit (Obr. 6.35c) pro vzdálenost  $L_o = 0,11$  m roviny detekce od předmětové roviny. Graf na Obr. 6.36 znázorňuje vzájemný posuv intenzitních signálů  $I_1$  a  $I_2$  z vybraného řádku struktury fraktálové koherenční zrnitosti generované od příslušných difraktálů  $D_{dif} = 1,330$  (Obr. 6.36a),  $D_{dif} = 1,875$  (Obr. 6.36b) a funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit (Obr. 6.36c) pro vzdálenost  $L_o = 0,5$  m roviny detekce od předmětové roviny. Je vidět, že v případě dimenze  $D_{dif} = 1,875$  je hodnota  $r_{12max}$  maxima normované funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit  $I_1$  a  $I_2$  při stanoveném vzorkování  $\delta_{x'} = 10 \mu\text{m}$  matice detektoru a obou zvolených vzdálenostech  $L_o$  stále vysoká ( $r_{12max} \geq 90 \%$ ), neboť i při menší vzdálenosti  $L_o = 0,11$  m se ve struktuře objevují stále dostatečně velká zrna. V případě dimenze  $D_{dif} = 1,330$  na Obr. 6.35 však klesla hodnota maxima funkce vzájemné korelace pod 60 %. Tento závěr by mohl inspirovat k využití fraktálové koherenční zrnitosti příslušící velké dimenzi  $D_{dif}$  pro měření malých posuvů v různých vzdálenostech  $L_o$  roviny detekce od osvětleného povrchu předmětu a rozšířit tak potenciál metody korelace polí řádné koherenční zrnitosti.

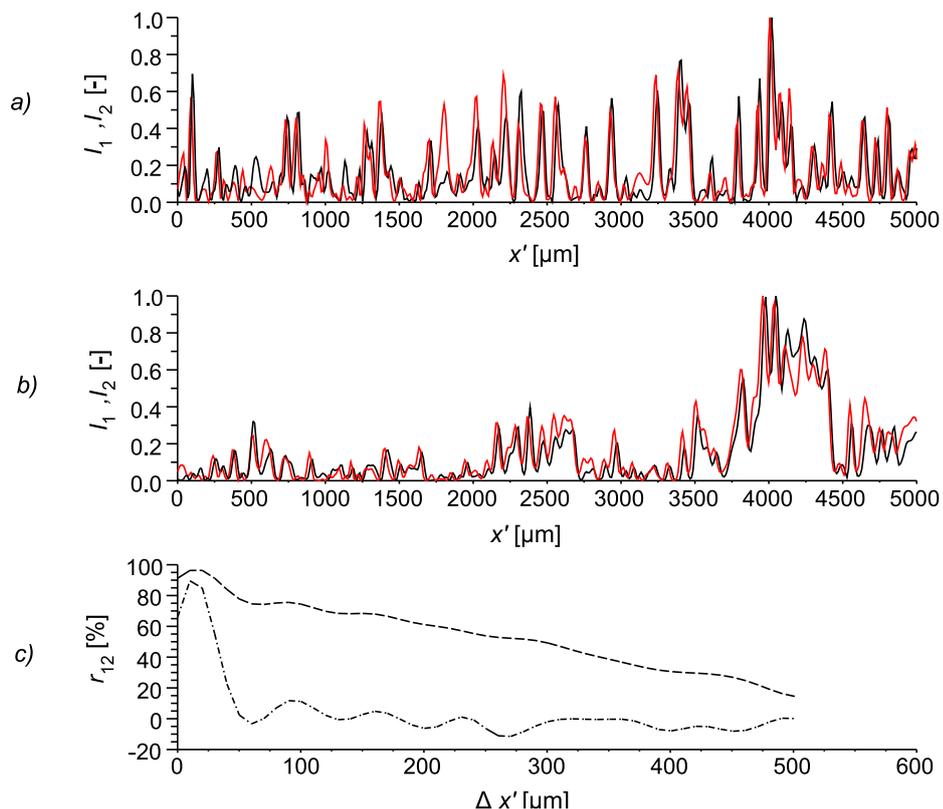
#### 6.4.2 Simulace činnosti modifikované experimentální sestavy pro obrazové a volné pole

V předchozím textu jsme se zabývali možnostmi měření tečné složky  $a_x$  translace předmětu ve volném poli pomocí korelace polí fraktálové koherenční zrnitosti. Vrátime se nyní k původnímu experimentálnímu uspořádání pro pozorování fraktálové koherenční zrnitosti v obrazovém poli (v obrazové ohniskové rovině čočky  $L_2$ ), přičemž opět budeme uvažovat sestavu na odraz (Obr. 6.37).



Obrázek 6.35: Posuv  $A_{x'}$  struktury fraktálové koherenční zrnitosti generované při dopadu difraktálu a) o dimenzi  $D_{dif} = 1,330$ , b) o dimenzi  $D_{dif} = 1,875$  na předmět v důsledku tečné translace předmětu  $a_x$ . c) Odpovídající normovaná funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit. Vstupní parametry simulace:  $m_d = 700$ ,  $n_d = 700$ ,  $m_{vy} = 500$ ,  $V_x = 10$  mm,  $V_{x'} = 5$  mm,  $\delta_x = 14,3$   $\mu$ m,  $\delta_{x'} = 10$   $\mu$ m,  $L_o = 0,11$  m,  $\lambda = 632,8$  nm,  $\theta_o = 10^\circ$ . Zvolená translace předmětu je  $a_x = 14,3$   $\mu$ m a odpovídající posuv struktury koherenční zrnitosti vypočtený pomocí vztahu (6.16) je  $A_{x'} = 14,1$   $\mu$ m. Poloha maxima normované funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  (čerkovaná čára) intenzit  $I_1$  a  $I_2$  znázorněných v části a) určená ze simulace ( $r_{12max} = 54,9$  %) je  $A_{x'}^{sim} = 13,3$   $\mu$ m. Poloha maxima normované funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  (čárkovaná čára) intenzit  $I_1$  a  $I_2$  znázorněných v části b) určená ze simulace ( $r_{12max} = 85,2$  %) je  $A_{x'}^{sim} = 13,1$   $\mu$ m.

Na základě počítačové simulace bylo zjištěno, že posuvem předmětu v rovině  $(x, y)$  osvětleného difraktálem nedosáhneme posuvu struktury fraktálové koherenční zrnitosti v rovině  $(x', y')$ . Tento závěr není nijak překvapující, neboť frekvenční posuv  $\Delta\nu_x$  ve Fourierově rovině  $(x, y)$  4f systému je ekvivalentní násobení výstupní komplexní amplitudy  $U(x', y')$  funkcí  $\exp(i2\pi\Delta\nu_x x)$  [26], což se v rozložení výstupní intenzity  $I(x', y')$  nijak neprojeví. V našem případě je situace komplikovanější, neboť ve Fourierově rovině se objevuje součin dvou funkcí  $U(\nu_x, \nu_y) \exp(-ik\Delta(\nu_x, \nu_y))$ , zatímco při posuvu předmětu se mění pouze druhá funkce - matice rozložení komplexní amplitudy v rovině předmětu, která zároveň v uvedeném optickém systému představuje fázový filtr. První funkce (komplexní amplituda difraktálu v rovině  $(x, y)$ ) zůstává beze změny. Následkem posuvu



Obrázek 6.36: Posuv  $A_{x'}$  struktury fraktálové koherenční zrnitosti generované při dopadu difraktálu a) o dimenzi  $D_{dif} = 1,330$ , b) o dimenzi  $D_{dif} = 1,875$  na předmět v důsledku tečné translace předmětu  $a_x$ . c) Odpovídající normovaná funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  intenzit. Vstupní parametry simulace:  $m_d = 700$ ,  $n_d = 700$ ,  $n_{vy} = 500$ ,  $V_x = 10$  mm,  $V_{x'} = 5$  mm,  $\delta_x = 14,3$   $\mu\text{m}$ ,  $\delta_{x'} = 10$   $\mu\text{m}$ ,  $L_o = 0,5$  m,  $\lambda = 632,8$  nm,  $\theta_o = 10^\circ$ . Zvolená translace předmětu je  $a_x = 14,3$   $\mu\text{m}$  a odpovídající posuv struktury koherenční zrnitosti vypočtený pomocí vztahu (6.16) je  $A_{x'} = 14,1$   $\mu\text{m}$ . Poloha maxima normované funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  (čerkovaná čára) intenzit  $I_1$  a  $I_2$  znázorněných v části a) určená ze simulace ( $r_{12max} = 90,0$  %) je  $A_{x'}^{sim} = 14,3$   $\mu\text{m}$ . Poloha maxima normované funkce vzájemné korelace  $r_{12}$  (čárkovaná čára) intenzit  $I_1$  a  $I_2$  znázorněných v části b) určená ze simulace ( $r_{12max} = 97,0$  %) je  $A_{x'}^{sim} = 15,1$   $\mu\text{m}$ .

předmětu dochází ke změně filtrace funkce difraktálu  $U(\nu_x, \nu_y)$ , což se projeví ve změně v porovnávání intenzitních strukturách  $I(x', y')$ , nikoliv však v jejich vzájemném posuvu.

Uvedený problém se podařil vyřešit umístěním roviny transparentu  $(x_f, y_f)$  s náhodným fraktálem do vzdálenosti  $d$  před čočku  $L_1$ , jak ukazuje modifikované experimentální uspořádání na Obr. 6.38. To odpovídá analytické situaci, kdy komplexní amplitudu v rovině  $(x, y)$  vynásobíme komplexní funkcí „chirp“ [26]

$$g(x, y) = \exp\left(i\pi \frac{(x^2 + y^2)(d - f_1)}{\lambda f_1^2}\right), \quad (6.17)$$

respektive

$$g(\nu_x, \nu_y) = \exp\left(i\pi\lambda(\nu_x^2 + \nu_y^2)(d - f_1)\right), \quad (6.18)$$

přičemž je zachována původní vzdálenost  $f_1$  mezi rovinami  $(x_f, y_f)$  a  $(x, y)$ . Ve Fourierově rovině se nyní objevuje součin tří funkcí  $U(\nu_x, \nu_y) \exp(-ik\Delta(\nu_x, \nu_y)) g(\nu_x, \nu_y)$ . S podobnou situací jsme se již setkali dříve při osvětlení předmětu parabolickou vlnou. Vyjádříme-li totiž situaci osvětlení předmětu parabolickou vlnou pomocí součinu  $U_1(x, y) \exp(-ik\Delta(x, y)) \exp(ik(x^2 + y^2)/2L_s)$ , kde  $U_1(x, y) = (A_1/L_s)\exp(ikL_s)$ , dojdeme, s přihlédnutím k substituci  $L_s = f_1^2/(d - f_1)$ , k analogickému výsledku. Na základě počítačové simulace jsme zjistili, že se tato souvislost projeví i ve vztahu mezi tečnou složkou  $a_x$  translace předmětu a posuvem  $A_{x'}$  struktury fraktálové koherenční zrnitosti.

V případě modifikovaného experimentálního uspořádání na Obr.6.38 se tečná translace  $a_x$  předmětu projeví v posuvu  $A_{x'}$  struktury fraktálové koherenční zrnitosti dle vztahu

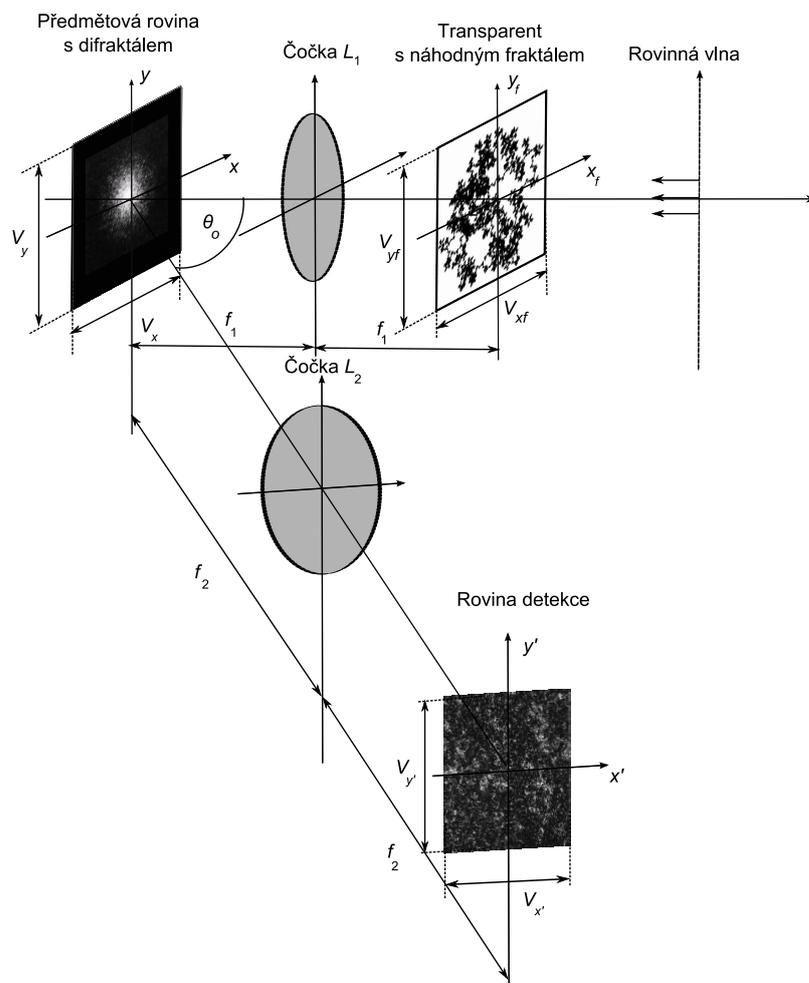
$$A_{x'} = -a_x \left( \frac{d - f_1}{f_1^2} \right) \frac{f_2}{\cos \theta_o} \quad (6.19)$$

a v případě modifikovaného experimentálního uspořádání ve volném poli (Obr. 6.39) platí vztah

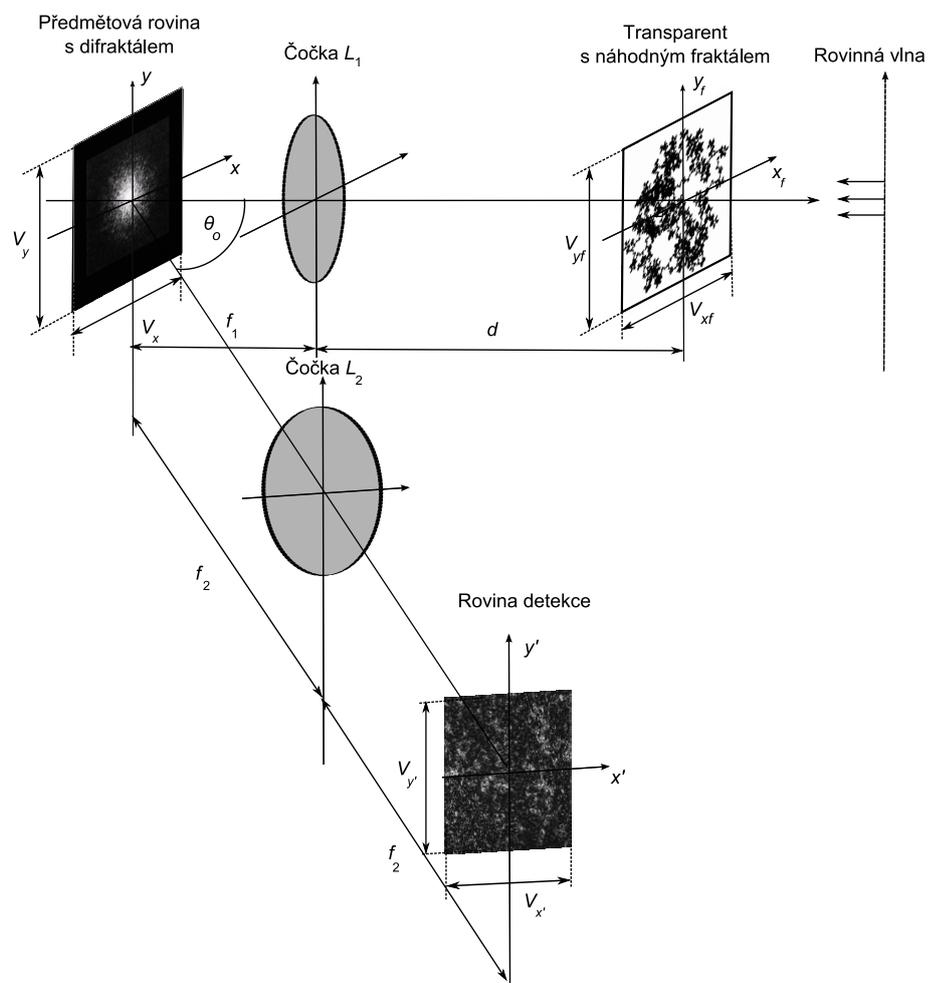
$$A_{x'} = -a_x \left( \frac{d - f_1}{f_1^2} \frac{L_o}{\cos \theta_o} - \cos \theta_o \right) = a_x \left( \frac{f_1 - d}{f_1^2} \frac{L_o}{\cos \theta_o} + \cos \theta_o \right), \quad (6.20)$$

který je ekvivalentní se vztahem (5.2).

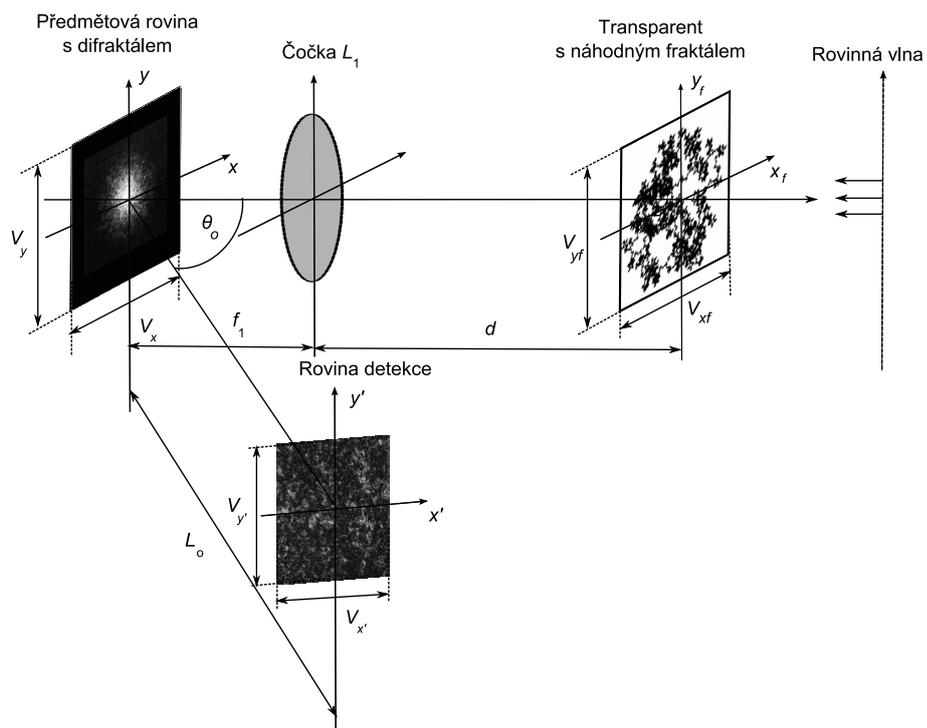
Jak plyne ze vztahů (6.19) a (6.20), lze citlivost modifikované měřicí sestavy vedle úhlu pozorování  $\theta_o$  a ohniskové vzdálenosti  $f_2$ , popřípadě vzdálenosti  $L_o$ , regulovat volbou vzdálenosti  $d$ . Následující tabulky (Tabulka 6.3, Tabulka 6.4) ověřují platnost vztahů (6.19) a (6.20) pro různé parametry experimentálního uspořádání. V případě Tabulky 6.3 jsou zvoleny různé hodnoty tečných posuvů  $a_x$  předmětu a v Tabulce 6.4 jsou zvoleny různé hodnoty vzdálenosti  $d$  roviny transparentu od čočky  $L_1$ .



Obrázek 6.37: Experimentální sestava pro pozorování fraktálové koherenční zrnitosti v obrazovém poli.



Obrázek 6.38: Modifikovaná experimentální sestava pro pozorování fraktálové koherenční zrnitosti v obrazovém poli.



Obrázek 6.39: Modifikovaná experimentální sestava pro pozorování fraktálové koherenční zrnitosti ve volném poli.

Tabulka 6.3: Srovnání hodnot posuvů  $A_{x'}$  struktury koherenční zrnitosti vypočtených pomocí vztahů (6.19) a (6.20) pro zvolené hodnoty tečných posuvů  $a_x$  předmětu s hodnotami  $A_{x'}^{sim}$  stanovenými počítačovou simulací při zvolených parametrech simulované měřicí sestavy  $L_o = 0,5$  m,  $f_1 = 1000$  mm,  $f_2 = 500$  mm,  $d = 5$  m,  $\theta_o = 20^\circ$ . Další parametry simulace jsou:  $m_d = 1400$ ,  $n_d = 1400$ ,  $n_{vy} = 500$ ,  $V_x = V_y = 10$  mm,  $V_{x'} = 10$  mm.

Obrazové pole			
$a_x$ [ $\mu\text{m}$ ]	$A_{x'}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$A_{x'}^{sim}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$r_{12max}^{sim}$ [%]
7,1	15,2	14,1	96,7
14,3	30,4	28,9	89,5
21,4	45,6	43,0	77,5
28,6	60,8	58,4	69,5
35,7	76,1	72,7	53,7
Volné pole			
$a_x$ [ $\mu\text{m}$ ]	$A_{x'}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$A_{x'}^{sim}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$r_{12max}^{sim}$ [%]
7,1	8,5	9,9	97,9
14,3	17,0	19,3	92,5
21,4	25,5	28,7	82,5
28,6	34,0	36,2	70,3
35,7	42,5	45,3	54,3

Tabulka 6.4: Srovnání hodnot posuvů  $A_{x'}$  struktury koherenční zrnitosti vypočtených pomocí vztahů (6.19) a (6.20) pro zvolené hodnoty vzdálenosti  $d$  od roviny transparentu s náhodným fraktálem od čočky  $L_1$  s hodnotami  $A_{x'}^{sim}$  stanovenými počítačovou simulací při zvolených parametrech simulované měřicí sestavy  $L_o = 0,5$  m,  $f_1 = 1000$  mm,  $f_2 = 500$  mm,  $a_x = 14,3$   $\mu$ m,  $\theta_o = 5^\circ$ . Další parametry simulace jsou:  $m_d = 700$ ,  $n_d = 700$ ,  $n_{vy} = 500$ ,  $V_x = V_y = 10$  mm,  $V_{x'} = 10$  mm.

Obrazové pole			
$d$ [m]	$A_{x'}$ [ $\mu$ m]	$A_{x'}^{sim}$ [ $\mu$ m]	$r_{12max}^{sim}$ [%]
1	0	0	95,1
5	28,9	28,7	91,3
10	64,4	64,6	93,4
15	100,5	100,5	94,2
20	135,5	136,4	91,0
Volné pole			
$d$ [m]	$A_{x'}$ [ $\mu$ m]	$A_{x'}^{sim}$ [ $\mu$ m]	$r_{12max}^{sim}$ [%]
1	14,1	14,3	91,8
5	14,9	14,5	95,9
10	50,4	50,4	97,1
15	86,0	86,3	94,5
20	122,3	122,2	95,2

# Kapitola 7

## Závěr

Předložená disertační práce se zabývá numerickou simulací jevu koherenční zrnitost. Řádná koherenční zrnitost vznikne osvětlením drsného předmětu běžným typem vlny, jako je, například, rovinná vlna či gaussovský svazek. Použije-li se při osvětlení předmětu speciální typ vlny - difraktál, vzniká nový typ koherenční zrnitosti - fraktálová koherenční zrnitost.

V úvodních částech práce (kapitola 2 a 3) jsou objasněny cíle disertační práce a osvětlen jev koherenční zrnitost spolu s jeho základními vlastnostmi a dosavadním uplatněním v různých oborech. Také je zde nastíněn současný stav v oblasti studia koherenční zrnitosti počítačovou simulací.

Podrobnější popis statistických vlastností prvního a druhého řádu struktury koherenční zrnitosti je proveden v kapitole 4. Součástí kapitoly je návrh numerického modelu, který je založen na přímém výpočtu Fresnelova-Kirchhoffova difrakčního integrálu (prostorový přístup výpočtu). Uvedený přístup výpočtu se odlišuje od častěji využívaného frekvenčního přístupu, při kterém se běžně využívá FFT. V rámci popisu numerického modelu vzniku a šíření koherenční zrnitosti jsou uvedena také možná omezení tohoto modelu, která vyplývají z konečného počtu bodů matice předmětu i matice detekce. Na závěr kapitoly 4 jsou zkoumány vlastnosti simulované koherenční zrnitosti, která je vytvořena speciálně pro případ osvětlení předmětu rovinnou vlnou. Stanovené charakteristiky jsou porovnány s uvedenými teoretickými předpoklady.

Simulací posuvu struktur koherenční zrnitosti následkem tečné a normálové translace předmětu a následnému vyhodnocení tohoto posuvu pomocí metody korelace polí koherenční zrnitosti se věnuje kapitola 5. V úvodu kapitoly je popsán princip metody korelace polí koherenční zrnitosti a také jsou zde uvedeny teoretické vztahy pro stanovení vybraných složek translace předmětu pro daná experimentální uspořádání využívaná v optické laboratoři. V těchto uspořádáních svírá rovina detekce nenulový úhel s rovinou povrchu předmětu, proto je popsán způsob, jakým je toto otočení roviny detekce při výpočtu Fresnelova-Kirchhoffova difrakčního integrálu v numerickém modelu zahrnuto. Předmět se v prezentovaném numerickém modelu posouvá nejprve ve směru vybrané

souřadné osy  $x$  nebo  $z$  (tečná nebo normálová translace) a poté je provedena simulace posuvu ve směru dvou, popřípadě tří os současně (2D a 3D posuv). Je provedena studie, při které je zkoumán vliv parazitních složek translace předmětu na určení požadovaného posuvu struktury koherenční zrnitosti s ohledem na střední velikost zrna ve struktuře koherenční zrnitosti. V závěru kapitoly 5 je uvedeno srovnání výstupů simulace posuvu koherenční zrnitosti následkem tečné translace předmětu s výsledky experimentu realizovaného v laboratoři. Všechny počítačové simulace uvedené v kapitole 5 jsou provedeny pro případ osvětlení předmětu gaussovským svazkem.

Poslední kapitola disertační práce (kapitola 6) se věnuje numerické simulaci fraktálové koherenční zrnitosti. Před samotným uvedením numerického modelu je osvětlen pojem fraktál a také dimenze fraktálu, která objekt fraktál kvantitativně charakterizuje. Vedle shrnutí současného stavu v oblasti fraktálů, difraktálů a fraktálové koherenční zrnitosti je pozornost zaměřena na vytvoření amplitudového transparentu s náhodným fraktálem a na odhad jeho dimenze uvedenými technikami výpočtu dimenzí. Poté je představen způsob simulace difraktálu, vlny, která ve Fraunhoferově rovině amplitudového fraktálního transparentu vykazuje mocninnou závislost intenzity. Je počítána střední intenzita v bodě difraktálu jako funkce radiální souřadnice, jejíž sklon, dle teoretických vztahů, závisí na dimenzi fraktálu. Osvětlením předmětu difraktálem vzniká fraktálová koherenční zrnitost, která je pozorována ve Fraunhoferově rovině předmětu (v obrazovém poli), ale i ve volném poli.

Velká část pozornosti je zaměřena na výpočet statistik prvního a druhého řádu simulované fraktálové koherenční zrnitosti, které jsou porovnávány s teoretickými vztahy. Je provedeno měření pravděpodobnostního rozdělení intenzity v bodě pole simulované fraktálové koherenční zrnitosti. Výsledky simulace ukazují, že zobrazený histogram výsledků měření souboru intenzity fraktálové koherenční zrnitosti se shoduje s teoreticky odvozenou hustotou pravděpodobnosti intenzity v bodě pole řádné koherenční zrnitosti. Tento závěr je podložen výsledky dřívějšího provedení experimentálního měření.

V rámci vyhodnocení statistik druhého řádu je počítána normovaná autokorelační funkce intenzity fraktálové koherenční zrnitosti, přičemž je určován sklon grafu této funkce v závislosti na radiální souřadnici roviny detekce. Počítačové simulace ukazují, že tento sklon je ovlivňován jak dimenzí příslušející osvětlujícímu difraktálu, tak také počtem bodů matice rozložení komplexní amplitudy difraktálu či šířkou spektra difraktálu.

Dále je v kapitole 6 také zkoumána možnost využití fraktálové koherenční zrnitosti pro zvětšení rozsahu měření tečné translace předmětu. Na základě počítačové simulace je ukázáno, že maximální možná translace předmětu, kterou lze vyhodnotit pomocí metody korelace polí koherenční zrnitosti, je při osvětlení předmětu difraktálem ovlivněna tvarem (šířkou) autokorelační funkce intenzity difraktálu v rovině předmětu. Tuto šířku lze volit ohniskovou vzdáleností použité čočky.

Další pozornost je zaměřena na možnost měření malých translací předmětu, přičemž

struktura fraktálové koherenční zrnitosti je detekována v různých vzdálenostech  $L_o$  od předmětu. Využívá se tak přítomnosti různě velikých zrn ve struktuře fraktálové koherenční zrnitosti.

Závěrem kapitoly 6 jsou navržena modifikovaná experimentální uspořádání ve volném i v obrazovém poli, přičemž je možné regulovat citlivost měření složky translace pomocí několika geometrických parametrů sestavy (v případě nemodifikovaného uspořádání ve volném poli je tato citlivost regulována pouze jedním parametrem sestavy - úhlem pozorování  $\theta_o$ ).

Přínos disertační práce lze shrnout do následujících bodů:

1. Vytvoření numerického modelu vzniku a šíření polí koherenční zrnitosti. Šíření pole koherenční zrnitosti je v tomto modelu umožněno také pod nenulovým úhlem vůči optické ose. Ověření správnosti prezentovaného numerického modelu porovnáním teoretických statistik s výpočtem statistik nasimulované struktury koherenční zrnitosti.

2. Využití prezentovaného modelu při simulaci posuvu struktury koherenční zrnitosti způsobeným tečnou a normálovou translací předmětu ve volném i obrazovém poli. Vyhodnocení tohoto posuvu metodou korelace polí koherenční zrnitosti. Simulace posuvu jak ve směru vybrané souřadné osy, tak obecného posuvu ve směru dvou, popřípadě tří os najednou. Porovnání výstupů simulace s vybranými výsledky experimentu realizovaného v laboratoři a tudíž také ověření správnosti prezentovaného numerického modelu.

3. Stručná rešerše problematiky fraktálů, především z hlediska jejich dimenze a aplikace vybraných technik výpočtu fraktálních dimenzí na vytvořené fraktální objekty. Studium statistických vlastností difraktálu v závislosti na dimenzi amplitudového transparentu s náhodným fraktálem.

4. Zkoumání statistických vlastností fraktálové koherenční zrnitosti pomocí prezentovaného modelu. Poukázání na omezené možnosti využití difraktálu jako osvětlující vlny při měření tečné translace předmětu. Navržení využití fraktálové koherenční zrnitosti při měření malých translací předmětu, přičemž je možno, díky existenci zrn s různou velikostí, detekovat fraktálovou koherenční zrnitost v různých vzdálenostech od předmětu. Návrh modifikované experimentální sestavy pro měření tečné translace předmětu.

# Summary

The presented Ph.D. thesis deals with numerical simulation of the speckle phenomena. The (ordinary) speckle effect arises when a common type of wave (such as a plane wave or a Gaussian beam) illuminates a rough object surface. The fractal speckle effect, which is a modified speckle effect, arises when a special type of wave - a diffractal - illuminates a rough object surface.

In the introductory chapters (Chapter 2 and 3) there is the reader introduced to a speckle phenomena including its elementary properties and the present utilization in many different fields. Moreover, the recent state of a study of speckle effect through simulation analysis is mentioned.

The detailed description of the first and second order statistical properties of speckle pattern is done in Chapter 4. Besides, the numerical model based on a direct calculation of Fresnel-Kirchhoff diffraction integral is proposed (the convolution approach of computing). The presented approach differs from the more common frequency approach of computing of Fresnel-Kirchhoff diffraction integral, which uses FFT. At the end of Chapter 4 the statistical properties of the simulated speckle field for the case of a plane wave illumination is studied. The stated properties are compared with theoretically derived properties.

Chapter 5 deals with the simulation of the both in-plane and normal object translation and evaluation of the translation by a method of correlation of speckle fields. In its introductory part the principle of the speckle correlation method is described. Moreover, the relations between translation components and displacement of speckle pattern for selected experimental setups are mentioned. In these experimental setups the detection plane is rotated by the nonzero angle toward the object surface, hence this rotation is included in the presented numerical procedure. At first, the object under investigation is translated along the  $x$ -axis or  $z$ -axis direction (in-plane or normal translation) and then the simulation of 2D or 3D translation is performed. The study of influence of spurious translation components on evaluation of desired speckle pattern movement is performed. Results of the numerical simulation of movement of the speckle pattern as a consequence of in-plane object translation are compared with achieved experimental results at the end of Chapter 5. All computer simulations presented in Chapter 5 are performed in the case of a Gaussian beam illumination.

The last chapter (Chapter 6) deals with numerical simulation of the fractal speckle effect. The terms such as a fractal and a fractal dimension (a parameter for the quantitative description of the fractal) are introduced. The recent state in the fields of research of area of fractals, diffractals and fractal speckles is summarised. Besides, the attention is focused on generation of an amplitude transparent with a random fractal as well as the estimation of dimension of the transparent by several presented techniques. Then the procedure for simulation of the diffractal is introduced. The ensemble-average intensity of diffractal

at a point in the Fraunhofer region of the transparent follows a negative power-law depending on the fractal dimension. When the diffractal illuminates the object, the fractal speckle is observed in the Fraunhofer region of the object (image field) and in free space as well.

The attention is focused on the computing of the first and second order statistical properties of the simulated fractal speckle field. The stated properties are compared with theoretically derived properties. The result of the probability distribution of intensity at a single point of the fractal speckle field is the same with the theoretically derived distribution for the ordinary speckle field. This conclusion is supported by the result of previous experimental measurement.

Within the framework of the evaluation of the second order statistical properties the normalized intensity autocorrelation function is computed. The numerical simulation shows, that the slope of the function depends on several parameters such as dimension corresponding to the diffractal, a number of points of the matrix of distribution of a complex amplitude of the diffractal or spectral width of the diffractal.

Then the possibility of utilization of the fractal speckles for improving range of measurement of the in-plane translation component is investigated. The numerical simulation shows, that the maximal translation, which can be evaluated by the correlation of speckle fields, is influenced by width of the normalized autocorrelation function of intensities of the diffractal in the object plane. The width is adjusted by the focal length of the used lens.

Then the attention is focused on measurement of a small object translation, while the fractal speckle is detected in various distances  $L_o$  from the object. This is enabled by special structure of the fractal speckles containing various speckle size.

The modified experimental setup in both free space and image field is designed at the end of Chapter 6. According to the setup it is possible to adjust sensitivity of measurement by means of several parameters (in the unmodified experimental setup in free space the sensitivity is adjusted only by one parameter-angle of observation  $\theta_o$ .)

The contribution of this Ph.D. thesis can be summed up as it follows:

1. The design of numerical model of origin and propagation of speckle fields. The presented numerical model involves detection of speckle pattern at any observation angles. The verification of rightness of the presented model by comparing both stated and theoretically derived statistical properties.

2. The use of the presented numerical model for simulation of movement of speckle fields in consequence of in-plane and normal object translation in free space and image field. The evaluation of the movement through method of correlation of speckle fields. The simulation of the object translation along one selected axis direction and common translation along

two eventually three axes directions simultaneously. Comparing the stated results with selected results of the experiment realized in laboratory as the verification of the rightness of the presented numerical model.

3. A brief review of questions about fractals like dimensions of the fractals and application of introduced selected technique of estimation of the fractal dimension on generated fractal objects. The study of the statistical properties of the diffractals in dependence on the dimension of the amplitude transparent with a random fractal.

4. The investigation of statistical properties of fractal speckles by means of the presented model. Pointing out the limited possibilities of utilization of the diffractal as an illuminating wave within the measurement of the in-plane object translation component. Proposition of utilization of the fractal speckles for measurement of small translation of object, whereas the fractal speckles can be detected at various distances from the object. This is enabled by special structure of the fractal speckles containing various speckle size. The design of the modified experimental setup for in-plane translation measurement.

# Přehled publikační činnosti autorky

## V impaktovaných časopisech

[HI1] Horváth P., Šmíd P., **Vašková I.**, Hrabovský M.: Koch fractals in physical optics and their Fraunhofer diffraction patterns. *Optik* **121**(2), 206-213 (2010).

[HI2] **Hamarová I.**, Horváth P., Šmíd P., Hrabovský M.: The simulation of the origin and propagation of speckle field generated through a plane wave and Gaussian beam and its verification by speckle correlation method. *Optik* **123**(5), 404-408 (2012).

## Ze sborníků konferencí

[HI3] Šmíd P., Horváth P., **Vašková I.**, Hrabovský M.: Užití metody korelace polí koherenční zrnitosti pro měření v mechanice (Konference *Optika a jemná mechanika 2008*, 24.-26.9.2008, Přerov). *Jemná mechanika a optika* **54**(1), 3-5 (2009).

[HI4] **Vašková I.**, Šmíd P., Horváth P., Hrabovský M.: Noncontact measurement of moving object velocity by using speckle pattern correlation. In *In 46th International Scientific Conference Experimental Stress Analysis 2008*. Fuxa J., Macura P., Halama R., Kubala R., Frydrýšek K., Fusek M., Václavek L., Lenert J., Adámková L., Fojtaník F., Rojíček J., eds., Horní Bečva, Česká republika, 2.-5.6. 2008, 263-266.

[HI5] Horváth P., Šmíd P., Hrabovský M., **Hamarová I.**: Optical sensor for measurement of an object in-plane translation and rotation by speckle correlation method. In *48th International Scientific Conference Experimental Stress Analysis 2010*. Šmíd P., Horváth P., Hrabovský M., eds., Velké Losiny, Česká republika, 31.5-3.6. 2010 (Palacky University, Olomouc, 2010), 95-100.

[HI6] **Hamarová I.**, Horváth P., Šmíd P., Hrabovský M.: Computer simulation of the speckle field propagation. In *17th Slovak-Czech-Polish Optical Conference On "Wave And Quantum Aspects of Contemporary Optics*. Müllerová J., Senderáková D., Jurečka S., eds., Proceedings of SPIE **7746**, 77460M-1-77460M-8 (2010).

[HI7] **Hamarová I.**, Horváth P., Šmíd P., Hrabovský M.: Computer simulation of the displacement of the speckle field due to 2D translation of the object and its evaluation by speckle correlation method. In *49th International Scientific Conference Experimental Stress Analysis 2011*. Návrat T., Fuis V., Houfek L., Vlk M., eds., Znojmo, Česká republika, 6.- 9.6. 2011 (Brno, University of Technology, Brno, 2011), 91-95 (2011).

## Výzkumné zprávy

[HI8] **Vašková I.**, Šmíd P., Horváth P.: Měření rychlosti pohybujícího se předmětu využitím korelace polí koherenční zrnitosti. Výzkumná zpráva č. 332/SLO/2008, Společná laboratoř optiky Univerzity Palackého a Fyzikálního ústavu Akademie věd České Republiky, Olomouc, 2008.

[HI9] **Hamarová I.**, Horváth P., Šmíd P.: Simulace vzniku a šíření polí koherenční zrnitosti pomocí programu SCILAB. Výzkumná zpráva č. 354/SLO/2009, Společná laboratoř optiky Univerzity Palackého a Fyzikálního ústavu Akademie věd České republiky, Olomouc, 2009.

## Ostatní články

[HI10] Šmíd P., Horváth P., **Vašková I.**, Hrabovský M.: Random Koch fractals in physical optics and their Fraunhofer diffraction patterns. In *Optické struktury, detekční systémy a související technologie pro nízkofotonové aplikace*. Křepelka J., ed. Olomouc: UP Olomouc, 180-185 (2008).

[HI11] **Hamarová I.**, Šmíd P., Horváth P., Hrabovský M.: Fraktály a jejich dimenze. *Jemná mechanika a optika* **56**(3), 78-81 (2011).

[HI12] Nožka L., Schovánek P., Horváth P., Šmíd P., **Hamarová I.**, Ivanov G., Hiklová H., Kepřt J., Kratochvíl A., Čepl M., Hrabovský M., Palatka M. Pech M., Mandát D.: Význačné aplikační výsledky Společné laboratoře optiky UP a FZÚ AV ČR za poslední desetiletí. *Jemná mechanika a optika* **57**(1), 10-15 (2012).

# Literatura

- [1] Yamaguchi I.: Speckle displacement and decorrelation in the diffraction and image fields for small object deformation. *Optica Acta* **28**10, 1359–1376 (1981).
- [2] Hrabovský M., Bača Z., Horváth P.: Theory of speckle displacement and decorrelation and its application in mechanics. *Optics and Lasers in Engineering* **32**(4), 395-403 (2000).
- [3] Horváth P., Hrabovský M., Šmíd P.: Full theory of speckle displacement and decorrelation in the image field by wave and geometrical description and its application in mechanics. *Journal of Modern Optics* **51**(5), 725-742 (2004).
- [4] Hrabovský M., Bača Z., Horváth P.: *Koherenční zrnitost v optice*. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc (2001).
- [5] Horváth P., Hrabovský M., Šmíd P.: Application of speckle decorrelation method for small translation measurements. *Optica Applicata* **34**(2), 203–218 (2004).
- [6] Uozumi J., Ibrahim M., Asakura T.: Fractal speckles. *Optics Communications* **156**(4-6), 350-358 (1998).
- [7] Funamizu H., Uozumi J.: Generation of fractal speckles by means of a spatial light modulator. *Optics Express* **15**(12), 7415-7422 (2007).
- [8] Uno K., Uozumi J., Asakura T.: Correlation properties of speckles produced by diffractal-illuminated difusers. *Optics Communications* **124**(1-2), 16-22 (1996).
- [9] Funamizu H., Uozumi J.: Effects of clipping threshold on the scaling property of clipped fractal speckle intensities. *Journal of optics A: Pure and Applied Optic* **10**(2), 1-7 (2008).
- [10] Funamizu H., Uozumi J.: Multifractal analysis of speckle intensities produced by power-law illumination of diffusers. *Journal of Modern Optics* **54**(10), 1511-1528 (2007).
- [11] Goodman J. W.: Statistical properties of laser speckle patterns. In *Laser Speckle and Related Phenomena*. J. C. Dainty (editor), Springer-Verlag, Berlin (1984).

- [12] Leger D., Mathieu E., Perrin J. C.: Optical surface roughness determination using speckle correlation technique. *Applied Optics* **14**(4), 872–877 (1975).
- [13] Françon M.: New method of optical processing using a random diffuser. *Optica Acta* **20**(1), 1–17 (1973).
- [14] Tanner L. H.: Camera testing by use of speckle patterns. *Applied Optics* **13**(9), 2026–2034 (1974).
- [15] Knoll H. A.: Measuring ametropia with a gas laser. *American Journal of Optometry and Archives of American Academy of Optometry* **43**(7), 415–418 (1966).
- [16] Labeyrie A.: High-resolution techniques in optical astronomy. In *Progress in Optics XIV*. E. Wolf (editor), North-Holland, Amsterdam (1976).
- [17] Goodman J. W.: *Stanford Electronics Laboratories*. TR 2302-1 (SEL-63-140) (1963).
- [18] Dainty J. C.: Some statistical properties of random speckle patterns in coherent and partially coherent illumination. *Optica Acta* **17**(10), 761–772 (1970).
- [19] Mc Kechnie T. S.: Measurement of some second order statistical properties of speckle. *Optik* **39**(3), 258–267 (1974).
- [20] Piederriere Y., Le Meur J., Cariou J.: Particle aggregation monitoring by speckle size measurement; application to blood platelets aggregation. *Optics Express* **12**(19), 4596–4601 (2004).
- [21] Piederriere Y., Cariou J., Guern Y., Le Jeune B., Le Brun G., Lotrian J.: Scattering through fluids: speckle size measurement and Monte Carlo simulations close to and into the multiple scattering. *Optics Express* **12**(1), 176–188 (2003).
- [22] Chicea D.: An alternative algorithm to calculate the biospeckle size in coherent light scattering experiments. *Romanian Journal of Physic* **54**(1-2), 147–155 (2007).
- [23] Pedrini G., Tiziani H. J., Zou Y.: Speckle size of digitally reconstructed wavefronts of diffusely scattering objects. *Journal of Modern Optics* **43**(2), 395–407 (1996).
- [24] Alexander T. L., Harvey J. E., Weeks A. R.: Average speckle size as a function of intensity threshold level: comparison of experimental measurements with theory. *Applied Optics* **33**(35), 8240–8250 (1994).
- [25] Horváth P.: *Statistické vlastnosti koherenční zrnitosti*. Disertační práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc (2006).
- [26] Saleh B. E. A., Teich M. C.: *Základy fotoniky 1*. Matfyzpress, Praha (1996).

- [27] Goldfischer L. I.: Autocorrelation Function and Power Spectral Density of Laser-Produced Speckle Patterns. *Journal of the Optical Society of America* **55**(3), 247-253 (1965).
- [28] Duncan D. D.: Kirkpatrick S. J., Wang R. K.: Statistics of local speckle contrast. *Journal of the Optical Society of America A* **25**(1), 9-15 (2008).
- [29] Gascón F., Salazar F.: A simple method to simulate diffraction and speckle patterns with a PC. *Optik* **117**(2), 49–57 (2006).
- [30] Cooley J.W., Tukey J.W.: An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation* **19**(90), 297-301 (1965).
- [31] Mendlovic D., Zalevsky Z., Konforti N.: Computation considerations and fast algorithms for calculating the diffraction integral. *Journal of Modern Optics* **44**(2), 407-414 (1997).
- [32] Mas D., Garcia J., Ferreira C., Bernardo L. M., Marinho F.: Fast algorithms for free-space diffraction patterns calculation. *Optics Communications*, **164**(4-6), 233–245 (1999).
- [33] Sendra G.H., Rabal H.J., Trivi M., Arizaga R.: Numerical model for simulation of dynamic speckle reference patterns. *Optics Communications* **282**(18), 3693-3700 (2009).
- [34] Federico A., Kaufmann G.H., Galizzi G.E., Rabal H., Trivi M., Arizaga R.: Simulation of dynamic speckle sequences and its application to the analysis of transient processes. *Optics Communications* **260**(2), 493-499 (2006).
- [35] Bergoend I., Orlik X., Lacot E.: Study of a circular Gaussian transition in an optical speckle field. *Journal European Optical Society - Rapid Publications* **3**(08028), 08028(1)-08028(8) (2008).
- [36] Anand A., Chhaniwal V. K., Almoró P., Pedrini G., Osten W.: Shape and deformation measurements of 3D objects using volume speckle field and phase retrieval. *Optics Letters* **34**(10), 1522-1524 (2009).
- [37] Tripathi R., Pati G.S.: Kumar A., Singh K.: In-plane displacement measurement using a photorefractive speckle correlator. *Optics Communications* **149**(4-6), 355–365 (1998)
- [38] Goodman J. W.: *Statistical Optics*. John Wiley and Sons Inc., New York (1985).
- [39] Chlup F.: Metody pro ovládání amplitudových a fázových modulátorů světla. Diplomová práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc (2007).

- [40] Brdička M.: *Mechanika kontinua*. NČSAV, Praha (1959).
- [41] Ibrahim M., J. Uozumi, T. Asakura.: Longitudinal correlation properties of speckles produced by ring-slit illumination. *Optical Review* **5**(3), 129-137 (1998).
- [42] Vašková I.: Využití koherenční zrnitosti pro detekci časově proměnných dějů. Diplomová práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc (2007).
- [43] Hýbl O.: Měření tvaru předmětu pomocí interferometrie v bílém světle se spektrálním rozkladem. Diplomová práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc (2005).
- [44] Bartsch H.-J.: *Matematické vzorce*. Mladá fronta, Praha (2002).
- [45] Stanke L.: Vliv typu numerické simulace korelace struktur koherenční zrnitosti na měření translace zkoumaného předmětu metodou korelace polí koherenční zrnitosti. Bakalářská práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc (2010).
- [46] Feder J.: *Fractals*. Plenum Press, New York (1988)
- [47] Allain C., Cloitre M.: Optical diffraction on fractals. *Physical Review B* **33**(5), 3566-3569 (1986) .
- [48] Uozumi J., Kimura H., Asakura T.: Fraunhofer diffraction by Koch fractals: the dimensionality. *Journal of Modern Optics* **38**(7), 1335-1347 (1991).
- [49] Uozumi J., Kimura H., Asakura T.: Laser diffraction by randomized Koch fractals. *Waves in Random Media* **1**(1), 73-80 (1991).
- [50] Uno K., Uozumi J., Asakura T.: Statistical properties of the Fraunhofer diffraction field produced by random self-similar fractals. *Applied Optics* **32**(15), 2722-2729 (1993).
- [51] Funamizu H., Uozumi J., Ishii Y.: Computer-Generated Holograms for Producing Fractal Speckles. *Optical Review* **17**(3), 191-194 (2010).
- [52] Mandelbrot B. B.: *The Fractal geometry of Nature*. Freeman, New York (1982)
- [53] Mandelbrot B. B.: Self-affine fractal sets. In *Fractals in Physics* (eds. Pietronelo L., Tossati E.), North-Holland, Amsterdam, 3-28 (1986).
- [54] Falconer K.: *Fractal geometry*. John Wiley and Sons, Chichester (2003).
- [55] Čandík M., Včelař F., Zelinka I.: *Fraktální geometrie-principy a aplikace*. BEN-technická literatura, Praha (2006).
- [56] Berry M. V.: Diffractals. *Journal of Physic A: Mathematical and General* **12**(6), 781-797 (1979).

- [57] Voss R. F.: Random Fractals: Self-affinity in noise, music, mountains, and clouds. *Physica D* **38**(1-3), 362-371 (1989).
- [58] Čandík M., Včelař. F.: Algorithms of Fractal image coding. *Jemná mechanika a optika* **53**(5), 136-139 (2008).
- [59] Uozumi J., Asakura T.: Optical Fractals. In *Optical Storage and Retrieval-Memory, Neural Networks, and Fractals* (eds. Yu F. T. S., Jutamulia S.) Marcel Dekker, New York, 100-137 (1996).
- [60] Sakurada Y., Uozumi J., Asakura T.: Diffraction fields of fractality Bounded Apertures. *Optical Review* **1**(1), 3-7 (1994).
- [61] Matteo J. A., Hesselink L.: Fractal extension of near-field aperture shapes for enhanced transmission and resolution. *Optics Express* **13**(2), 636-647 (2005).
- [62] Horváth P., Šmíd P., Vašková I., Hrabovský M.: Koch fractals in physical optics and their Fraunhofer diffraction patterns. *Optik* **121**(2), 206-213 (2010).
- [63] Anderson J. C., Babb A. L., Hlastala M. P.: A fractal analysis of the radial distribution of bronchial capillarie saround large airways. *Journal of Applied Physiology* **98**(3), 850-855 (2005).
- [64] Garte S.: Fractal properties of the human genome. *Journal of Theoretical Biology* **230**(2), 251-260 (2004).
- [65] Iftekharuddin K. M., Jia W., Marsh R.: Fractal analysis of tumor in brain MR images. *Machine Vision and Applications* **13**(5-6), 352-362 (2003).
- [66] Brown C. T., Witschey W. R. T.: The fractal geometry of ancient Maya settlement. *Journal of Archaeological Science* **30**(12), 1619-1632 (2003).
- [67] Wenxue J., Nina S.-N.L.: An improved algorithm for computing local fractal dimension using the triangular prism method. *Computers & Geosciences* **35**(6), 1224-1233 (2009).
- [68] Kolibal J., Monde J.: Fractal image error analysis. *Computers & Geosciences* **24**(8), 785-795 (1998).
- [69] Issa Mohsen A., Issa Mahmoud A., Islam M. S., Chudnovsky A.: Fractal dimension-a measure of fracture roughness and toughness of concrete. *Engineering Fracture Mechanics* **70**(1), 125-137 (2003).
- [70] Tricot C.: *Curves and Fractal Dimension*. Springer-Verlag, New York (1995).

- [71] Grebogi C., McDonald S. W., Ott E., Yorke J. A.: Exterior dimension of Fat Fractals. *Physics Letters A* **110**(1), 1-4 (1985).
- [72] Theiler J.: Estimating fractal dimension. *Journal of the Optical Society of America A* **7**(6), 1055-1073 (1990).
- [73] Pitsainis N., Bleris G. L., Argyrakis P.: Information dimension in fractal structures. *Physical Review B* **39**(10), 7097-7100 (1989).
- [74] Theiler J.: Efficient algorithm for estimating the correlation dimension from a set of discrete points. *Physical Review A* **36**(9), 4456-4462 (1987).
- [75] Umbereger D. K., Farmer J. D.: Fat Fractals on the Energy Surface. *Physical Review Letters* **55**(7), 661-663 (1985).
- [76] Lai Y., Grebogi C.: Characterizing riddled fractal sets. *Physical Review E* **53**(2), 1371-1374 (1996).
- [77] Rypka M.: Techniky výpočtu fraktálních dimenzí. Diplomová práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc (2008).
- [78] Svozilíková J.: Fraktály a koherenční zrnitost. Diplomová práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc (2008).
- [79] Uozumi J.: Fractality of the Optical Fields Scattered by Power-Law-Illuminated Diffusers. *Proceeding of SPIE* **4607**, 257-267 (2002).
- [80] Uozumi J.: Light Scattering from Fractal Random Media. *Proceeding of SPIE* **4242**, 19-26 (2001).
- [81] Okamoto T., Fujita S.: Statistical properties of three-dimensional speckle distributions produced by crossed scattered waves. *Journal of the Optical Society of America A* **25**(12), 3030-3042 (2008).
- [82] Hamarová I., Horváth P., Šmíd P., Hrabovský M.: The simulation of the origin and propagation of speckle field generated through a plane wave and Gaussian beam and its verification by speckle correlation method. *Optik* **123**(5), 404-408 (2012).