Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Přírodovědecká fakulta

Aplikace komplexní analýzy a numerické matematiky na problémy teorie potenciálního proudění

Bakalářská práce

Vladan Čížek

Školitel: doc. Dr. rer. nat. Ing. Jan Valdman

České Budějovice 2023

Čížek V., 2023: Aplikace komplexní analýzy a numerické matematiky na problémy teorie potenciálního proudění. [Application of complex analysis and numerical mathematics in potential flow theory problems. Bc. Thesis, in Czech.] – 35 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Annotation:
The bachelor's thesis aims to introduce basic complex analysis theory leading to conformal mappings and to show the use of the Joukowski transform. The finite element method is applied for solving various Laplace equations appearing in potential flow theory. Key concepts are complex numbers, complex functions, conformal mappings, harmonic functions, Laplace equation, and finite element method.

Prohlašuji, že jsem autorem této kvalifikační práce a že jsem ji vypracoval pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu použitých zdrojů.

V Českých Budějovicích, dne 12.4. 2023

Vladan Čížek

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat panu doc. Dr. rer. nat. Ing. Janu Valdmanovi za jeho cenné rady a jeho trpělivost při vedení této bakalářské práce a Mgr. Alexejovi Moskovkovi za naše společné konzultace, které mi byly velkým přínosem.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Tato bakalářská práce si dává za cíl vybudovat potřebnou znalost komplexní analýzy a numerické matematiky k následující aplikaci této teorie na problémy z teorie potenciálního proudění. Teoretická část práce je pro přehlednost složena z definic, vět a poznámek. Některé věty jsou dokázány.

Práce je rozdělená do dvou hlavních kapitol. Tyto kapitoly jsou dále rozvětveny na podkapitoly, kde na začátku většiny podkapitol je uveden její stručný obsah.

V první kapitole se připomínají některé pojmy z reálné analýzy, které jsou v práci používány. Zavádí se teorie konformního zobrazení a veškerá teorie potřebná k pochopení této teorie od základů komplexních čísel, komplexních funkcí a posloupností po zavedení pojmu holomorfních funkcí, Cauchy-Riemannových podmínek, harmonických funkcí a Laplaceovy rovnice.

V druhé kapitole jsou definovány základní pojmy týkající se potenciálního proudění. Je zde vysvětlena metoda konečných prvků a předvedeny její aplikace na problémy potenciálního proudění. Kapitola je zakončena vyřešením problému obtékání okolo kruhu za pomoci konformních zobrazení.

Předpokládá se základní znalost matematické analýzy.

Práce byla vysázena systémem LaTeX. K výpočtům a vizualizaci byl použit software Matlab a Mathematica.

Kapitola 2

Komplexní analýza

2.1 Přehled z reálné analýzy

V této kapitole stručně uvedeme některé pojmy a tvrzení z reálné analýzy, které v naší práci využíváme, jako je například pojem funkce více proměnných, parciální derivace a pojem vektorové funkce. Detailněji se s těmito koncepty lze seznámit v knize [10].

Definice 1 *Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je neprázdná. Zobrazení $f : D \to \mathbb{R}$ nazveme reálnou funkcí dvou proměnných. Množinu D nazýváme definičním oborem a také někdy značíme D_f nebo $D(f)$.*

Definice 2 *Mějme funkci $f(x, y)$ dvou reálných proměnných. Řekněme, že $f(x, y)$ má v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ limitu $A \in \mathbb{R}$, jestliže*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \implies |f(x, y) - A| < \epsilon.$$

Značíme $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$.

Definice 3 *Nechť je dán bod $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ a funkce $f(x, y)$. Řekněme, že je funkce f spojitá v bodě (x_0, y_0), jestliže platí* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Definice 4 *Nechť je dána $G \subset \mathbb{R}^2$ otevřená a funkce $f(x, y)$ definovaná na G. Funkce f je spojitá na G, pokud je spojitá v každém bodě $(x_0, y_0) \in G$.*

Definice 5 *Ať je $G \subset \mathbb{R}^2$ otevřená množina a ať je dána funkce $f : G \to \mathbb{R}$ a vektor $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$. Derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in G$ ve směru $\boldsymbol{h}$ rozumíme limitu*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t},$$

pokud existuje. Značíme $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}_0)$.

Parciální derivací funkce f podle x v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in G$ rozumíme směrovou derivaci ve směru $\boldsymbol{h} = (1,0)$ a značíme ji $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0)$. Parciální derivací funkce f podle y v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in G$ rozumíme směrovou derivaci ve směru $\boldsymbol{h} = (0,1)$ a značíme ji $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)$.

Definice 6 *Mějme funkci $f(x,y)$ definovanou na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$. Řekněme, že $f \in \mathscr{C}^1(G)$, jestliže je f na G spojitá a má na G také spojité parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.*

Poznámka 1 *Analogicky je definováno $\mathscr{C}^2(G)$. Vyžadujeme ale oproti $\mathscr{C}^1(G)$ ještě spojitost druhých derivací na G.*

Definice 7 *Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je neprázdná. Zobrazení $\boldsymbol{F} : D \to \mathbb{R}^2$ nazveme dvourozměrnou reálnou vektorovou funkcí dvou proměnných. Množinu D nazýváme definičním oborem a také někdy značíme $D_{\boldsymbol{F}}$ nebo $D(\boldsymbol{F})$.*

Poznámka 2 *Vektorovým funkcím se také říká vektorová pole. Analogicky lze tuto definici zobecnit do $\mathbb{R}^3$. Na dvourozměrnou vektorovou funkci $\boldsymbol{F}$ lze nahlížet jako na dvojici funkcí $(F_1, F_2) = \boldsymbol{F}$ a na trojrozměrnou vektorovou funkci $\boldsymbol{G}$ lze nahlížet jako na trojici funkcí $(G_1, G_2, G_3) = \boldsymbol{G}$.*

Definice 8 *Operátor nabla definujme jako $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, respektive $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.*

Definice 9 *Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Gradientem funkce f rozumíme vektor grad $f = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$.*

Definice 10 *Nechť je dána vektorová funkce $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Divergencí vektorového pole $\boldsymbol{F}$ rozumíme výraz div $\boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$.*

Definice 11 *Mějme vektorovou funkci $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Rotací vektorového pole $\boldsymbol{F}$ rozumíme vektor rot $\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$.*

Věta 1 *Ať jsou dány funkce $U(x,y)$, $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$, které mají spojité parciální derivace podle obou proměnných. Pak pro derivace funkce $u(x,y) = U(\xi(x,y), \eta(x,y))$ platí*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Poznámka 3 *Této větě se někdy také říká řetízkové pravidlo.*

2.2 Komplexní čísla

V této podkapitole zavedeme komplexní čísla. Ukážeme, jaké mají vlastnosti a jak je lze reprezentovat. Zavedeme si algebraický, goniometrický a exponenciální tvar komplexních čísel, který se v práci často objevuje. Zajímavé aplikace komplexních čísel lze najít v knize [7].

Definice 12 *Komplexním číslem rozumíme každou uspořádanou dvojici* $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. *Nechť* $z_1 = [x_1, y_1],\ z_2 = [x_2, y_2]$ *jsou komplexní čísla, pak definujme následující operace:*

1. $z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$ *(rovnost komplexních čísel)*
2. $z_1 + z_2 = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$ *(součet komplexních čísel)*
3. $z_1 z_2 = [x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1]$ *(součin komplexních čísel)*

Množinu všech komplexních čísel označujeme $\mathbb{C}$.

Definice 13 *Pro komplexní číslo* $z = [x, y]$ *definujme jeho reálnou složku jako* $\Re(z) = x$ *a imaginární složku jako* $\Im(z) = y$. *Číslo komplexně sdružené k* z *je číslo* $\bar{z} = [x, -y]$. *Velikost komplexního čísla* z *definujme jako* $\sqrt{\Re(z\bar{z})} = \sqrt{x^2 + y^2}$ *a označme* $|z|$.

Poznámka 4 *Můžeme si povšimnout, že komplexní čísla lze chápat jako rozšíření čísel reálných. Číslo* $x \in \mathbb{R}$ *lze totiž ztotožnit s komplexním číslem* $[x, 0]$.

Poznámka 5 *Lze jednoduše ověřit, že sčítání a násobení komplexních čísel je komutativní.*

Definice 14 *Imaginární jednotkou rozumíme komplexní číslo* $i = [0, 1]$. *Platí* $i^2 = [-1, 0]$, *lze tedy ztotožnit druhou mocninu* i *s reálným číslem* -1. *Algebraickým tvarem komplexního čísla* $z = [x, y]$ *budeme rozumět výraz* $x + iy$, *kde* i *je imaginární jednotka.*

Poznámka 6 *Pro dvě komplexní čísla v algebraickém tvaru* $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ *snadným výpočtem dostáváme:*

1. $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ *(což víme, že musí vyjít z vlastností násobení komplexních čísel),*
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$

Přesvědčili jsme se tedy, že komplexní čísla v algebraickém tvaru lze bez větších obtíží mezi sebou vydělit. Dodejme, že číslo $\dfrac{1}{z}$ *se nazývá číslo převrácené k* z.

Definice 15 *Goniometrickým tvarem komplexního čísla $z = x + iy$ rozumíme vyjádření*

$$z = |z|(\cos(\phi) + i\sin(\phi)),$$

kde $\phi \in (-\pi, \pi]$ je číslo takové, že platí

$$\cos(\phi) = \frac{\Re(z)}{|z|}, \quad \sin(\phi) = \frac{\Im(z)}{|z|}.$$

Číslo ϕ se nazývá hlavní argument komplexního čísla z a někdy se také označuje $arg(z)$.

Poznámka 7 *Ukažme si nyní, jak se násobí komplexní čísla v goniometrickém tvaru. Nechť $z_1 = |z_1|(\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1))$ a $z_2 = |z_2|(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2))$, potom zřejmě platí $z_1z_2 = |z_1||z_2|((\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)) + i(\cos(\phi_1)\sin(\phi_2) + \cos(\phi_2)\sin(\phi_1)))$. Využijeme-li známé součtové vzorce, potom $z_1z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$. Toto nám dává geometrickou interpretaci násobení komplexním číslem a zároveň z tohoto vztahu a matematické indukce už jednoduše vyplývá následující věta.*

Věta 2 *Nechť $n \in \mathbb{Z}$ a $z = |z|(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$, potom $z^n = |z|^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$.*

Poznámka 8 *Tato věta nám ukazuje, jak snadné je umocňovat komplexní čísla v goniometrickém tvaru. Umocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru je podstatně výhodnější než ve tvaru algebraickém. Dokážeme ale najít ještě úspornější tvar komplexního čísla díky slavnému vzorci z komplexní analýzy.*

Věta 3 *Pro každé $\phi \in \mathbb{R}$ platí, že $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$.*

Definice 16 *Exponenciálním tvarem komplexního čísla $z = x + iy$ rozumíme vyjadření $z = |z|e^{i\phi}$, kde $\phi = arg(z)$.*

Poznámka 9 *Z Eulerova vzorce lze odvodit, že platí podobné vlastnosti pro exponenciální tvar jako pro goniometrický. Nechť $z_1 = |z_1|e^{i\phi_1}$ a $z_2 = |z_2|e^{i\phi_2}$, pak:*

1. $z_1z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\phi_1+\phi_2)}$,
2. $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{|z_1|}e^{-i\phi_1}$,
3. $\forall x \in \mathbb{R} : |e^{ix}| = 1$.

2.3 Komplexní funkce a posloupnosti

V této podkapitole nejdříve definujeme pojmy okolí, prstencové okolí, oblast a otevřené množiny v $\mathbb{C}$. Následně zavedeme posloupnosti a řady komplexních čísel a pojem konvergence. Dále postoupíme k definici komplexních funkcí reálné a komplexní proměnné a zavedeme pojmy jako limita komplexní funkce komplexní proměnné, derivace komplexní funkce komplexní proměnné a ukážeme souvislost mezí existencí komplexní derivace a Cauchy-Riemannovými podmínkami. Na konci této kapitoly zavedeme mocninné řady a uvedeme několik příkladů komplexních funkcí a jejich základní vlastnosti. Detailnější výklad teorie funkcí komplexní proměnné lze najít například v [6, 7, 9, 11].

Definice 17 *Nechť je dáno* $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$. ϵ*-okolím bodu* $z_0 \in \mathbb{C}$ *rozumíme množinu* $U_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$ *a prstencovým* ϵ*-okolím bodu* $z_0 \in \mathbb{C}$ *rozumíme množinu* $P_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\} \setminus \{z_0\}$.

Poznámka 10 *Uvědomme si, že* ϵ*-okolí bodu* z_0 *není nic jiného než vnitřek kruhu se středem v* z_0 *a poloměrem* ϵ*. Představa prstencového okolí je totožná, jen ještě navíc vyjmeme střed tohoto kruhu, tedy bod* z_0.

Definice 18 *Podmnožina* $G \subset \mathbb{C}$ *je otevřená v* $\mathbb{C}$*, pokud* $\forall z \in G\ \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(z) \subset G$.

Poznámka 11 *Tato definice vlastně říká, že množina je otevřená právě tehdy, když každý prvek této množiny má nějaké okolí takové, které také náleží této množině. V* $\mathbb{C}$ *to znamená to, že s každým bodem obsaženým v* G*, je v* G *i nějaký kroužek se středem v tomto bodě.*

Definice 19 *Podmnožina* $S \subset \mathbb{C}$ *je souvislá, pokud*

$$((\exists A, B \subset \mathbb{C} \text{ otevřená }) : (S = A \cup B \wedge A \cap B = \emptyset)) \implies (A = \emptyset \vee B = \emptyset).$$

Poznámka 12 *Souvislá množina je tedy taková množina, kterou nelze rozložit na sjednocení dvou neprázdných disjunktních otevřených množin.*

Definice 20 *Podmnožina* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je oblast, pokud* Ω *je otevřená v* $\mathbb{C}$ *a souvislá.*

Definice 21 *Posloupností komplexních čísel rozumíme každé zobrazení* $z(n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$*. Posloupnost značíme* $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$*. Číslo* $z_n := z(n)$ *nazýváme n-tým členem posloupnosti* $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Definice 22 *Posloupnost* $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ *konverguje k* $z^* \in \mathbb{C}$*, pokud* $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$ $n > n_0 : z_n \in U_\epsilon(z^*)$*. Číslo* z^* *nazveme limita posloupnosti* $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ *a budeme jej značit* $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n$.

Věta 4 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z^* \in \mathbb{C} \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \Re(z_n) = \Re(z^*) \ \wedge \ \lim\limits_{n\to+\infty} \Im(z_n) = \Im(z^*)$.

Poznámka 13 *Analogicky jak v $\mathbb{R}$ platí, že posloupnost komplexních čísel je konvergentní, pokud konverguje k nějakému $z^* \in \mathbb{C}$. V opačném případě pak tvrdíme, že posloupnost je divergentní.*

Poznámka 14 *Pro limity posloupností komplexních čísel také platí analogie vět o limitách posloupností reálných čísel z reálné analýzy jako například věta o jednoznačnosti limit nebo aritmetika limit.*

Definice 23 *Nechť je $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost komplexních čísel. Výraz $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ nazveme komplexní řada.*

Definice 24 *Nechť je dána řada $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ a nechť $s_k = \sum_{n=0}^{k} z_n$. Posloupnost $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ nazýváme posloupnost částečných součtů. Konverguje-li posloupnost částečných součtů, potom řadu $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ nazveme konvergentní a limitu této posloupnosti $\lim\limits_{k\to+\infty} s_k := s$ budeme nazývat součtem této řady a budeme psát $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = s$. V opačném případě řadu nazveme divergentní.*

Poznámka 15 *Pro komplexní řady platí analogie věty 3. Tedy $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = s \in \mathbb{C} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \Re(z_n) = \Re(s) \ \wedge \ \sum_{n=0}^{\infty} \Im(z_n) = \Im(s)$.*

Definice 25 *Komplexní řada $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konverguje absolutně, pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konverguje.*

Věta 5 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *konverguje absolutně* $\implies \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *konverguje.*

Věta 6 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *konverguje* $\implies \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

Poznámka 16 *Opět vidíme, že pro komplexní řady platí analogické věty jako pro řady reálné. Analogicky by se dal i zavést součet dvou komplexních řad a násobení řady skalárem, kritéria konvergence komplexních řad a další.*

Definice 26 *Nechť $D \subset \mathbb{R}$ je neprázdná. Zobrazení $f : D \to \mathbb{C}$ nazveme komplexní funkce reálné proměnné. Množinu D nazýváme definičním oborem a také někdy značíme D_f nebo $D(f)$.*

Poznámka 17 *Nechť je $f(x)$ komplexní funkce reálné proměnné. Označíme-li $f_1(x) = \Re(f(x))$ a $f_2(x) = \Im(f(x))$, pak lze $f(x)$ zapsat jako $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$, kde f_1, f_2 jsou ale už reálné funkce reálné proměnné, jakožto reálná a imaginární část komplexní funkce. Na komplexní funkci reálné proměnné se lze tedy dívat jako na dvojici reálných funkcí reálné proměnné.*

Příklad 1 *Typickým příkladem komplexní funkce reálné proměnné je funkce* $f(x) = e^{ix}$*. Tato funkce je definována pro každé reálné číslo, tedy* $D_f = \mathbb{R}$*, a zobrazuje reálnou přímku na množinu* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *(dodejme, že prvky této množiny se nazývají komplexní jednotky). Zde* $\Re(f(x)) = \cos(x)$ *a* $\Im(f(x)) = \sin(x)$ *z Eulerova vzorce.*

Příklad 2 *Obecnějším případem předchozího je zobrazení* $f(x) = z_0 + Re^{ix}$ *pro* $z_0 \in \mathbb{C}$ *a reálné* $R > 0$*. Zřejmě také* $D_f = \mathbb{R}$*. Zobrazení* f *zobrazuje reálnou přímku na kružnici se středem v bodě* z_0 *o poloměru* R*, tedy na množinu* $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$*. Zde* $\Re(f(x)) = \Re(z_0) + R\cos(x)$ *a* $\Im(f(x)) = \Im(z_0) + R\sin(x)$*.*

Definice 27 *Nechť* $D \subset \mathbb{C}$ *je neprázdná. Zobrazení* $f : D \to \mathbb{C}$ *nazveme komplexní funkce komplexní proměnné. Množinu* D *nazýváme definičním oborem a také někdy značíme* D_f *nebo* $D(f)$*.*

Poznámka 18 *Dále budeme pod pojmem komplexní funkce rozumět komplexní funkci komplexní proměnné, pokud nebude řečeno jinak.*

Poznámka 19 *Mějme komplexní funkci* $f(z)$*. Stejně jako v případě komplexních funkcí reálné proměnné lze komplexní funkci rozložit na reálnou a imaginární část a dívat se na tuto funkci jako na dvojici reálných funkcí dvou reálných proměnných. Nechť* $z = x + iy$*, označme si* $f_1(x, y) = \Re(f(x + iy))$ *a* $f_2(x, y) = \Im(f(x + iy))$*, pak* $f(z) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$*.*

Definice 28 *Nechť je* $f(z)$ *komplexní funkce. Řekněme, že* $f(z)$ *má v bodě* $z_0 \in \mathbb{C}$ *limitu* $A \in \mathbb{C}$*, jestliže* $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in U_\delta(z_0) : f(z) \in U_\epsilon(A)$*. Značíme* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$*.*

Definice 29 *Nechť* $f : D \to \mathbb{C}$ *je komplexní funkce.* $f(z)$ *je spojitá v bodě* $z_0 \in D$ *vzhledem k* D*, jestliže* $\lim\limits_{z \to z_0, z \in D} f(z) = f(z_0)$*.*

Poznámka 20 *Všimněme si, že pokud je* D *otevřená, potom pojem spojitosti vzhledem k* D *a vzhledem k* $\mathbb{C}$ *splývá, protože víme, že nejenže je funkce definovaná v bodě* z_0*, ale také na nějakém jeho okolí. Pokud nebude řečeno jinak, spojitostí v bodě rozumíme spojitost v bodě vzhledem k* $\mathbb{C}$*.*

Věta 7 *Nechť jsou komplexní funkce* $f(z)$*,* $g(z)$ *spojité v* $z_0 \in \mathbb{C}$*, potom:*

1. $(f + g)(z)$ *je spojitá v* z_0*.*
2. $(fg)(z)$ *je spojitá v* z_0*.*
3. $[f(z)]^n$ *je spojitá v* z_0 *pro* $n \in \mathbb{N}$*.*
4. $(\frac{f}{g})(z)$ *je spojitá v* z_0*, kdykoliv* $g(z_0) \neq 0$*.*

Definice 30 *Funkce* $f : D \to \mathbb{C}$ *je spojitá na* D, *pokud* $\forall z_0 \in D : \lim\limits_{z \to z_0, z \in D} f(z) = f(z_0)$.

Poznámka 21 *Věta 7 by samozřejmě šla zobecnit pro spojitost na množině.*

Příklad 3 *Nechť* $n \in \mathbb{N}$. *Funkce* $f(z) = z^n$ *je spojitá na* $\mathbb{C}$.

Příklad 4 *Funkce* $f(z) = \frac{1}{z}$ *je spojitá na* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Příklad 5 *Vyšetřeme spojitost funkce*

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2+1}{z-i} & z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ 2i & z = i \end{cases}.$$

Funkce je zřejmě spojitá na množině $\mathbb{C} \setminus \{i\}$. *Jediný bod, ve kterém by funkce nemusela být spojitá je* $z_0 = i$, *vyšetřeme tedy spojitost funkce v tomto bodě. Počítejme*

$$\lim_{z \to i} \frac{z^2+1}{z-i} = \lim_{z \to i} \frac{(z+i)(z-i)}{z-i} = \lim_{z \to i} z + i = 2i.$$

V první rovnosti jsme využili rozkladu $z^2+1 = (z+i)(z-i)$. *Nyní ale víme, že* $f(i) = 2i$, *tedy funkce* $f(z)$ *je spojitá v* i. *Ukázali jsme tedy, že je funkce* $f(z)$ *spojitá na* $\mathbb{C}$.

Definice 31 *Nechť* $z_0 \in \mathbb{C}$ *a nechť je* $f(z)$ *komplexní funkce definovaná na* $U_\epsilon(z_0)$ *pro nějaké* $\epsilon > 0$. *Komplexní derivací funkce* f *v bodě* z_0 *rozumíme číslo*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

pokud tato limita existuje (v $\mathbb{C}$*).*

Poznámka 22 *Derivaci lze také definovat jako* $f'(z) = \lim\limits_{h \to 0, h \in \mathbb{C}} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$. *Někdy se více hodí používat tento tvar.*

Poznámka 23 *Jestliže má* $f(z)$ *v bodě* z_0 *komplexní derivaci, potom se někdy také říká, že je funkce* $f(z)$ *v bodě* z_0 *komplexně diferencovatelná.*

Definice 32 *Komplexní funkce* $f(z)$ *je holomorfní v bodě* $z_0 \in \mathbb{C}$, *jestliže*

$$\exists \epsilon > 0 \; \forall z \in U_\epsilon(z_0) : f'(z) \text{ existuje.}$$

Definice 33 *Nechť je* $G \subset \mathbb{C}$ *otevřená. Řekněme, že komplexní funkce* $f(z)$ *je holomorfní na* G , *jestliže má* $f(z)$ *v každém bodě* G *derivaci.*

Věta 8 *Nechť je $G \subset \mathbb{C}$ otevřená a $f(z), g(z)$ komplexní funkce holomorfní na G, potom:*

1. *$(f+g)(z)$ je holomorfní na G.*
2. *$(fg)(z)$ je holomorfní na G.*
3. *$[f(z)]^n$ je holomorfní na G pro $n \in \mathbb{N}$.*
4. *$g(f(z))$ je holomorfní na G.*
5. *$(\frac{f}{g})(z)$ je holomorfní na $G \setminus \{z \in \ G : g(z) = 0\}$.*

Definice 34 *Komplexní funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá celá funkce.*

Definice 35 *Nechť je $G \subset \mathbb{C}$ otevřená a $f(z)$ komplexní funkce. Funkce $F(z)$ se nazývá primitivní funkce k f na G, jestliže $\forall z \in G$: $F'(z) = f(z)$.*

Věta 9 *Nechť $z = x + iy$ a komplexní funkce f má v bodě z derivaci, potom platí*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x},$$

kde f_1, f_2 jsou reálná a imaginární část $f(z)$. Navíc platí

$$f'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} - i\frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Důkaz 1 *Předpokládejme, že $f'(z)$ existuje. Pro $h \in \mathbb{R}$ počítejme*

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h,y) - f_1(x,y) + i(f_2(x+h,y) - f_2(x,y))}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}(\frac{f_1(x+h,y) - f_1(x,y)}{h} + i\frac{f_2(x+h,y) - f_2(x,y)}{h}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Přibližujeme-li se po imaginární ose, potom pro $h \in \mathbb{R}$ dostaneme

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x,y+h) - f_1(x,y) + i(f_2(x,y+h) - f_2(x,y))}{ih} =$$
$$= \lim_{h\to 0}(\frac{f_2(x,y+h) - f_2(x,y)}{h} - i\frac{f_1(x,y+h) - f_1(x,y)}{h}) = \frac{\partial f_2}{\partial y} - i\frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Porovnáním reálných a imaginárních složek daných výrazů dostaneme

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x},$$

což jsme měli ukázat.

Poznámka 24 *Sadě dvou rovnic ve Větě 8 se říká Cauchy-Riemannovy podmínky. Věta je vlastně nutná podmínka existence komplexní derivace, jednoduchost ověření Cauchy-Riemannových podmínek nám poskytuje silný nástroj pro ověření (ne)existence derivace.*

Příklad 6 *Vyšetřeme existenci komplexní derivace funkce $f(z) = \bar{z}$. Nechť $z = x + iy$, pak lze psát $f(z) = f(x + iy) = \overline{x + iy} = x - iy$, tedy $f_1(x, y) = x$ a $f_2(x, y) = -y$. Spočítejme parciální derivace*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Dosadíme-li do Cauchy-Riemannových podmínek, dostaneme $1 = -1$, $0 = 0$, a tedy vidíme, že rovnost není splněná pro všechna $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, proto $f(z) = \bar{z}$ není holomorfní pro každé $z \in \mathbb{C}$.

Příklad 7 *Vyšetřeme existenci komplexní derivace funkce $f(z) = |z|$. Nechť $z = x+iy$, pak $f(z) = f(x + iy) = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$, tedy $f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $f_2(x, y) = 0$. Spočítejme parciální derivace:*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0.$$

Pak dle Cauchy-Riemannových podmínek: $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ a $\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$. Vidíme tedy, že na množině $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ nejsou splněny Cauchy-Riemannovy podmínky, tedy na této množině není f holomorfní. Vyšetřeme nyní holomorfnost v bodě $z = 0$.
Z definice derivace dostaneme: $f'(0) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{|z|}{z}$, tato limita ale neexistuje ani jakožto limita v $\mathbb{R}$, protože $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$, tedy nemůže existovat ani jakožto limita v $\mathbb{C}$. Ukázali jsme tedy, že $f(z) = |z|$ není holomorfní pro každé $z \in \mathbb{C}$.

Věta 10 *Nechť $z = x + iy$ a f je komplexní funkce, $f_1 = \Re(f(z))$, $f_2 = \Im(f(z))$.*
f má komplexní derivaci v $z \iff f_1$ a f_2 splňují Cauchy-Riemannovy podmínky a všechny parciální derivace funkcí f_1 a f_2 jsou spojité v (x, y).

Příklad 8 *Vyšetřeme existenci komplexní derivace funkce $f(z) = z^2$. Nechť $z = x + iy$, pak*

$$f(z) = f(x + iy) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy,$$

tedy $f_1(x, y) = x^2 - y^2$ a $f_2(x, y) = 2xy$. Spočítejme parciální derivace

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2x.$$

Všechny parciální derivace jsou spojité na $\mathbb{R}^2$ *a dosazením těchto derivací do Cauchy-Riemannových podmínek dostaneme* $2x = 2x$, $-2y = -2y$, *tuto soustavu řeší každé* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Funkce* $f(z) = z^2$ *je tedy dle Věty 9 holomorfní na* $\mathbb{C}$, *tedy je celá.*

Příklad 9 *Vyšetřeme existenci komplexní derivace funkce* $f(z) = \dfrac{1}{z}$ *na množině* $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. *Nechť* $z = x + iy$, *pak* $f(z) = f(x + iy) = \dfrac{1}{x + iy} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$, *tedy* $f_1(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ *a* $f_2(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$. *Spočítejme parciální derivace*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Všechny parciální derivace jsou spojité na $\mathbb{R}^2\setminus(0, 0)$ *a dosazením do Cauchy-Riemannových podmínek dostaneme*

$$\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

tato soustava je splněna pro každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. *Funkce* $f(z) = \dfrac{1}{z}$ *je tedy dle Věty 9 holomorfní na* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definice 36 *Nechť je* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ *posloupnost komplexních čísel a* $w \in \mathbb{C}$. *Komplexní řadu* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - w)^n$ *nazveme mocninná řada o středu* w.

Definice 37 *Mocninná řada je konvergentní, konverguje-li alespoň ve dvou rozdílných bodech.*

Poznámka 25 *Poznamenejme, že* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - w)^n$ *konverguje vždy pro* $z = w$. *Jestliže řada konverguje i pro nějaké* $z = w_0 \neq w$, *ukáže se, že řada konverguje dokonce i na jistém okolí bodu* w. *Proto má pro konvergenci řady smysl požadovat konvergenci alespoň ve dvou bodech.*

Příklad 10 *Typickým příkladem je geometrická řada* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, *která pro* $|z| < 1$ *konverguje k* $\dfrac{1}{1 - z}$. *Pro* $|z| \geq 1$ *řada diverguje.*

Příklad 11 *Mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ *je divergentní. Můžeme si povšimnout, že řada konverguje pouze pro z=0.*

Příklad 12 *Mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *je konvergentní pro libovolné* $z \in \mathbb{C}$ *(tedy je konvergentní na* $\mathbb{C}$*).*

Věta 11 *Nechť je dána řada* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-w)^n$, *která konverguje pro* $z = w_0 \neq w$, *potom tato řada konverguje absolutně na* $\{z \in \mathbb{C} : |z-w| < |w_0 - w|\}$.

Definice 38 *Číslo* $0 \leq R \leq \infty$, $R := \sup\{r \in [0,\infty) : \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ *konverguje*$\}$ *nazveme poloměr konvergence řady* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-w)^n$. *Množinu* $U_R(w)$ *nazveme kruh konvergence.*

Věta 12 *Nechť je dána řada* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-w)^n$. *Položme* $\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. *Jestliže* $\rho > 0$, *pak* $R = \frac{1}{\rho}$. *Pokud* $\rho = 0$, *pak* $R = \infty$. *Jestliže navíc* $\rho^* = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ *existuje, potom* $\rho = \rho^*$.

Věta 13 *Nechť je* $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ *a nechť je* $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ *definovaná na* $U_{R_1}(0)$ *a* $g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k$ *definovaná na* $U_{R_2}(0)$, *pak pro každé* $z \in U_{R_1}(0)$ *a* $w \in U_{R_2}(0)$ *platí* $f(z)g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, *kde* $c_n = \sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l} z^l w^{n-l}$.

Věta 14 *Nechť* $w \in \mathbb{C}$, $R > 0$ *a* $f(z)$ *komplexní funkce definována na* $U_R(w)$ *jako* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-w)^n$, *potom je* $f(z)$ *holomorfní na* $U_R(w)$. *Navíc pro každé* $z \in U_R(w)$ *platí* $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-w)^{n-1}$. *Označíme-li* $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-w)^{n+1}$, *potom pro každé* $z \in U_R(w)$ *platí* $F'(z) = f(z)$, *tedy* F *je primitivní k* f *na* $U_R(w)$.

Definice 39 *Nechť* $k \in \mathbb{N}$ *a* $c_n \in \mathbb{C}$ *pro* $n = 0, 1, ..., k$. *Komplexní funkci definovanou jako* $P_k(z) = \sum_{n=0}^{k} c_n z^n$ *nazýváme komplexní polynom s komplexními koeficienty. Číslo* k *nazýváme řád polynomu* $P_k(z)$.

Poznámka 26 *Polynom má následující vlastnosti:*

1. $P_k(z)$ *je definovaný a spojitý na* $\mathbb{C}$.
2. $P_k(z)$ *je celá funkce a platí* $P_k'(z) = \sum_{n=1}^{k} nc_n z^{n-1}$.
3. *Každý polynom* $P_k(z)$ *lze rozložit na součin polynomů* 1. *řádu.*

Definice 40 *Komplexní funkci* $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *nazveme komplexní exponenciála. Někdy ji také značíme* e^z.

Věta 15 *Komplexní exponenciála má následující vlastnosti:*

1. $\exp(z)$ *je definovaná a spojitá na* $\mathbb{C}$.
2. $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ *pro každé* $z, w \in \mathbb{C}$.
3. $\exp(z)$ *je celá funkce a platí* $(\exp(z))' = \exp(z)$.
4. *Pro* $z = x + iy$ *platí* $\exp(z) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))$ *a také* $|\exp(z)| = \exp(x)$.

5. $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ *pro každé* $z \in \mathbb{C}$.

6. $\exp(z)$ *je periodická s periodou* $2\pi i$, *tedy* $\exp(z) = \exp(z + 2\pi i)$ *pro každé* $z \in \mathbb{C}$.

Důkaz 2 *Dokažme postupně každou z vlastností 1-6:*

1. $\exp(z)$ *je definovaná mocninnou řadou s poloměrem konvergence* $R = \infty$, *vlastnost 1 tedy snadno plyne z vlastností mocninných řad.*

2. *Využijeme-li Větu 12 a binomickou větu, dostaneme*

$$\exp(z)\exp(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} \frac{1}{(n-l)!} z^l w^{n-l} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!(n-l)!} z^l w^{n-l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w).$$

3. *Dle Věty 13 je* $\exp(z)$ *celá a platí*

$$(\exp(z))' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = \exp(z).$$

4. *Nechť* $z = x + iy$. *Dle vlastnosti 2 a Eulerovy věty*

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x)\exp(iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y)).$$

$$|\exp(z)| = \sqrt{\exp(2x)\cos^2(y) + \exp(2x)\sin^2(y)} = \sqrt{\exp(2x)} = \exp(x).$$

5. *Nechť* $z = x + iy$, *pak*

$$\exp(\bar{z}) = \exp(x - iy) = \exp(x)(\cos(y) - i\sin(y)),$$

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\exp(x + iy)} = \overline{\exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))} = \exp(x)(\cos(y) - i\sin(y)).$$

Tedy $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$.

6. *Využijeme-li vztah 2 a Eulerův vzorec, dostaneme*

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)\exp(2\pi i) = \exp(z)(cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = \exp(z).$$

Dokázali jsme tedy Větu 14.

Věta 16 $\exp(z)$ *zobrazuje* $\mathbb{C}$ *na* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definice 41 *Komplexní funkci* $\sin(z) := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ *nazýváme komplexní sinus.*

Definice 42 *Komplexní funkci* $\cos(z) := \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ *nazýváme komplexní cosinus.*

Věta 17 *Komplexní sinus má následující vlastnosti:*

1. $\sin(z)$ *je definovaný a spojitý na* $\mathbb{C}$.
2. $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!}$ *pro* $z \in \mathbb{C}$.
3. $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ *pro každé* $z, w \in \mathbb{C}$.
4. $\sin(z)$ *je celá funkce a platí* $(\sin(z))' = \cos(z)$.

Věta 18 *Komplexní cosinus má následující vlastnosti:*

1. $\cos(z)$ *je definovaný a spojitý na* $\mathbb{C}$.
2. $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$ *pro* $z \in \mathbb{C}$.
3. $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ *pro každé* $z, w \in \mathbb{C}$.
4. $\cos(z)$ *je celá funkce a platí* $(\cos(z))' = -\sin(z)$.

Poznámka 27 *Důkaz těchto vět vyplývá z vlastností komplexní exponenciály a definic funkcí* $\sin(z)$ *a* $\cos(z)$.

2.4 Křivky v $\mathbb{C}$

V této podkapitole zavedeme pojem křivky v komplexním oboru. Je zde zavedena kolmost křivek a uvedeno několik příkladů základních křivek jako jsou kružnice a orientovaná úsečka.

Definice 43 *Každé zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, nazveme křivka (v $\mathbb{C}$).*

Definice 44 *Máme-li křivku $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, pak:*

1. *Množinu $\varphi([a, b])$ nazýváme obraz křivky φ a značíme $\langle\varphi\rangle$.*
2. *$\varphi(a)$ nazýváme počáteční bod křivky φ a $\varphi(b)$ nazýváme koncový bod křivky φ.*
3. *Křivka φ je uzavřená, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$.*
4. *Křivka φ se nazývá jednoduchá, pokud je φ prosté zobrazení na $(a, b]$.*
5. *Křivka φ se nazývá Jordanova, pokud je jednoduchá a uzavřená.*

Definice 45 *Nechť je dána křivka $\varphi(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$. Jestliže $t_0 \in (a, b) :\ \varphi'(t_0)$ existuje, potom číslo $\varphi'(t_0)$ nazýváme tečný vektor ke křivce φ v bodě t_0. Jestliže $t_0 \in [a, b] : \varphi'_+(t_0)$ resp. $\varphi'_-(t_0)$ existuje, potom tyto čísla nazýváme jednostranné tečné vektory ke křivce φ v bodě t_0.*

Definice 46 *Nechť jsou dány křivky $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ a $\psi : [c, d] \to \mathbb{C}$ takové, že platí $\varphi(a) = \psi(c)$. Jestliže $\varphi'_+(a)$, $\psi'_+(c)$ existují, potom úhlem mezi křivkami φ a ψ v jejich počátečním bodě rozumíme úhel mezi jejich jednostrannými tečnými vektory $\varphi'_+(a)$ a $\psi'_+(c)$.*

Definice 47 *Křivky nazveme kolmé (ortogonální), jestliže svírají úhel $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$ pro vhodné $k \in \mathbb{Z}$.*

Definice 48 *Nechť $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Křivku $\varphi(t) = z_1(1 - t) + z_2 t$, $t \in [0, 1]$, nazýváme orientovaná úsečka z bodu z_1 do z_2. Orientovanou úsečku z z_1 do z_2 také značíme $[z_1; z_2]$.*

Definice 49 *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Křivku $\varphi(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, nazýváme kružnice o středu z_0 a poloměru R.*

Poznámka 28 *Kružnice o středu z_0 a poloměru R je jednoduchá a uzavřená křivka, tedy je Jordanova křivka.*

Definice 50 *Nechť je dána $M \subset \mathbb{C}$. Podmnožina M je křivkově souvislá, pokud pro každé $z_1, z_2 \in M$ existuje křivka φ taková, že $z_1, z_2 \in \langle\varphi\rangle \subset M$.*

Věta 19 *Nechť $S \subset \mathbb{C}$. S je souvislá $\iff$ S je křivkově souvislá.*

Poznámka 29 *Tato věta nám ukazuje druhý možný, dle mého názoru jednodušší, pohled na souvislé množiny.*

2.5 Konformní zobrazení

V této podkapitole se zavádí pojem konformního zobrazení, který je v této práci naprosto klíčový. Je zde uvedeno několik příkladů konformních zobrazeních, kde nejdůležitější z nich je Žhukovského transformace. Dokazuje se zde několik tvrzení ohledně Žhukovského transformace, které budeme potřebovat. Zajímavé čtení ohledně konformních zobrazení nalezneme v pracích [5, 13].

Definice 51 *Nechť je dána komplexní funkce $f(z)$. Funkci $f(z)$ nazveme konformní zobrazení v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, jestliže je f spojitá v z_0 a zachovává úhly (a orientaci) křivek se společným bodem z_0.*

Věta 20 *Nechť je $f(z)$ komplexní funkce a $z_0 \in \mathbb{C}$. Jestliže je f holomorfní v z_0 a $f'(z_0) \neq 0$, potom je f konformní v z_0.*

Poznámka 30 *Tato věta nám slouží jako šikovný nástroj při ověřování konformnosti zobrazení.*

Věta 21 *Nechť je $f(z)$ konformní zobrazení definované na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$, potom je také $f(\Omega)$ oblast.*

Definice 52 *Oblasti $\Omega_1,\ \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ nazveme konformně ekvivalentní, jestliže existuje konformní zobrazení f takové, že $f(\Omega_1) = \Omega_2$.*

Věta 22 *Je-li f konformní zobrazení na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$, potom f^{-1} existuje a je to konformní zobrazení na oblasti $f(\Omega)$.*

Věta 23 *Nechť je dána analytická funkce $w = f(z)$ proměnné $z = x + iy$ a analytická funkce $\zeta = g(w)$ proměnné $w = u + iv$, potom je složení $g(f(z))$ analytická funkce proměnné z.*

Důkaz 3 *Nechť jsou dány analytické funkce $f(z), g(w)$. Pak dle derivace složené funkce dostáváme $\frac{d}{dz}(g(f(z))) = g'(f(z))f'(z)$, z tohoto již snadno plyne analytičnost složení těchto funkcí.*

Poznámka 31 *Zároveň lze vidět, že složení dvou konformních zobrazeních $f(z), g(w)$ je konformní zobrazení, protože $g'(f(z)) \neq 0$ a $f'(z) \neq 0$, tedy také $\frac{d}{dz}(g(f(z))) \neq 0$.*

Věta 24 *Nechť je $\Omega \subset \mathbb{C}$ jednoduše souvislá podmnožina, pak existuje prosté analytické zobrazení $w = f(z)$, které splňuje $f'(z) \neq 0$ pro každé $z \in \Omega$ a které zobrazuje Ω na $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*

Příklad 13 *$f(z) = z$ je funkce konformní na $\mathbb{C}$, jakožto spojitá funkce na $\mathbb{C}$, pro jejíž derivaci platí $\forall z \in \mathbb{C} : (z)' = 1 \neq 0$.*

Příklad 14 *$f(z) = z^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ je funkce konformní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ jakožto spojitá funkce na $\mathbb{C}$, pro jejíž derivaci platí $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : (z^n)' = nz^{n-1} \neq 0$.*

Příklad 15 *$f(z) = \dfrac{1}{z}$ je funkce konformní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, jakožto spojitá funkce na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pro jejíž derivaci platí $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \left(\dfrac{1}{z}\right)' = \dfrac{-1}{z^2} \neq 0$.*

Příklad 16 *$f(z) = \exp(z)$ je funkce konformní na $\mathbb{C}$, jakožto spojitá funkce na $\mathbb{C}$, pro jejíž derivaci platí $\forall z \in \mathbb{C} : (\exp(z))' = \exp(z) \neq 0$.*

Definice 53 *Komplexní funkci $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ nazýváme Žhukovského transformace.*

Věta 25 *Žhukovského transformace zobrazuje množinu $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ na $[-2, 2]$.*

Důkaz 4 *Nechť $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$. Každý prvek množiny $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ lze napsat jako $z = e^{it}$ pro vhodné $t \in [0, 2\pi)$. Nyní tedy $f(z) = f(e^{it}) = e^{it} + e^{-it} = 2\cos(t)$. Zobrazení $2\cos(t)$ zobrazuje $[0, 2\pi)$ na $[-2, 2]$, tedy f zobrazuje $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ na $[-2, 2]$.*

Věta 26 *Nechť $R > 0,\ R \neq 1$. Žhukovského transformace zobrazuje $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ na množinu $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\Re^2(z)}{(R+\frac{1}{R})^2} + \frac{\Im^2(z)}{(R-\frac{1}{R})^2} = 1\}$.*

Poznámka 32 *Tedy na elipsu s poloosami velikosti $R + \frac{1}{R}$ a $R - \frac{1}{R}$ se středem v bodě $[0, 0]$.*

Důkaz 5 *Nechť $f(z) = z + \frac{1}{z}$. Každý prvek množiny $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ lze napsat jako $z = Re^{it}$ pro vhodné $t \in [0, 2\pi)$. Nyní tedy*

$$f(z) = f(Re^{it}) = Re^{it} + \frac{1}{R}e^{-it} = (R + \frac{1}{R})\cos(t) + i(R - \frac{1}{R})\sin(t).$$

Lze už snadno ověřit, že $\frac{\Re^2(f(z))}{(R+\frac{1}{R})^2} + \frac{\Im^2(f(z))}{(R-\frac{1}{R})^2} = 1$ pro $t \in [0, 2\pi)$. Z tohoto a prostoty $f(z(t))$ na $[0, 2\pi)$ vyplývá Věta 23.

Věta 27 *Nechť je $f(z) = z + \frac{1}{z}$ a $z = x + iy$. Pro reálnou a imaginární část $f(z)$ platí*

$$\Re(f(z)) = \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2}, \quad \Im(f(z)) = \frac{x(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2}.$$

Důkaz 6 *Nechť* $f(z) = z + \frac{1}{z}$ *a* $z = x + iy$, *pak*

$$f(z) = x + iy + \frac{1}{x+iy} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2+y^2} = (x + \frac{x}{x^2+y^2}) + i(y - \frac{y}{x^2+y^2}) =$$
$$= \frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2+y^2} + i\frac{y^3 + x^2y - y}{x^2+y^2} = \frac{x(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2} + i\frac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2},$$

což jsme měli ukázat.

Věta 28 *Žhukovského transformace* $f(z) = z + \frac{1}{z}$ *je konformní na* $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$.

Důkaz 7 *Nechť* $f(z) = z + \frac{1}{z}$, *pak na* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2} = 0 \iff (1 - \frac{1}{z})(1 + \frac{1}{z}) = 0 \iff z = \pm 1,$$

tedy je $f(z)$ *konformní na* $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$ *dle Věty 19.*

2.6 Harmonické funkce

V této kapitole ukážeme, že reálná a imaginární část holomorfní funkce je harmonická a také ukážeme některé vlastnosti řešení Laplaceovy rovnice.

Definice 54 *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, $u \in \mathscr{C}^2(G)$. Jestliže $\Delta u(x, y) = 0$ na G, potom funkci $u(x, y)$ nazýváme harmonická funkce. Rovnice $\Delta u = 0$ se nazývá Laplaceova.*

Poznámka 33 *Připomeňme, že $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ a nazývá se Laplaceův operátor.*

Věta 29 *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, f je holomorfní funkce na G a nechť $z = x + iy$, potom obě reálné funkce $f_1(x, y) = \Re(f(z))$ a $f_2(x, y) = \Im(f(z))$ jsou harmonické.*

Důkaz 8 *Nechť je dána f, G jako výše a nechť $z = x + iy$. Protože je f holomofní na G, pak reálná část f_1 a imaginární část f_2 funkce $f(z)$ splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky, tedy $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$ a $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$. Zderivujeme-li první rovnost podle x a y, dostaneme $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}$, tedy $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0$. Využili jsme záměnnosti smíšených derivací. Důkaz pro imaginární část by probíhal analogicky.*

Věta 30 *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, f je holomorfní funkce na G a nechť $z = x + iy$, potom pro $f_1(x, y) = \Re(f(z))$ a $f_2(x, y) = \Im(f(z))$ platí $\nabla f_1 . \nabla f_2 = 0$.*

Důkaz 9 *Nechť je dána f, G jako výše a nechť $z = x+iy$. Funkce f_1 a f_2 splňují Cauchy-Riemannovy podmínky z holomorfnosti f. Máme $\nabla f_1 = (\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y})$ a $\nabla f_2 = (\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y})$. Pro skalární součin nyní platí $\nabla f_1 . \nabla f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y} = -\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$ dle Cauchy-Riemannových podmínek.*

Věta 31 *Nechť je $U(\xi, \eta)$ harmonická funkce proměnných ξ, η a nechť je dána analytická funkce $\zeta = \xi + i\eta = \xi(x, y) + i\eta(x, y) = g(z)$, potom $u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y))$ je harmonická funkce proměnných x, y.*

Důkaz 10 *Nechť je dána harmonická funkce $U(\xi, \eta)$ a analytická funkce $g(z)$ jako výše. Chceme ukázat, že funkce $u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y))$ řeší Laplaceovu rovnici. Řetízkové pravidlo nám dává*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

a proto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial U^2}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial U^2}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Cauchy-Riemannovy podmínky dávají

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

S využitím všech vztahů výše dostáváme

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right] = |g'(z)|^2 \Delta U = 0,$$

protože $\Delta U = 0$. *Ukázali jsme tedy, že je* $u(x, y)$ *harmonická funkce.*

Kapitola 3

Potenciální proudění a jeho výpočet

3.1 Základní pojmy

V této podkapitole jsou vysvětleny základní pojmy, které jsou nutné k definici potenciálního proudění. Je zde zaveden pojem proudové funkce a komplexního potenciálu, který je v dalších kapitolách klíčový. Přehled definic lze najít také v [3]. Mnoho problémů týkajících se potenciálního proudění lze najít v [8].

Definice 55 *Rychlostním polem rozumíme spojitou vektorovou funkci* $\vec{v} = \vec{v}(x, y, t)$, *která každému bodu oblasti přiřadí rychlost proudění kapaliny v tomto bodě.*

Definice 56 *Proudění nazveme ustálené, pokud* $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, *tedy* $\vec{v} = \vec{v}(x, y)$.

Definice 57 *Proudění nazveme nevířivé, pokud platí* $\nabla \times \vec{v} = 0$.

Definice 58 *Proudění nazveme nestlačitelné, pokud se jedná o proudění kapaliny, která je nestlačitelná.*

Poznámka 34 *Pokud je proudění nestlačitelné, pak platí* $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

Definice 59 *Neviskózní proudění je proudění takové, při kterém se neuvažuje vnitřní tření kapaliny.*

Definice 60 *Rychlostní potenciál* ϕ *nevířivého proudění je skalární pole takové, že platí* $\nabla \phi = \vec{v}$.

Definice 61 *Potenciální proudění je ideální model proudění, které je nestlačitelné, neviskozní a nevířivé.*

Poznámka 35 *Pokud je proudění potenciální, pak platí* $\Delta \phi = 0$.

Důkaz 11 *Z nestlačitelnosti potenciálního proudění máme vztah $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Jednoduchým dosazením definičního vztahu ϕ dostaneme $0 = \nabla \cdot \nabla\phi = \Delta\phi$, což jsme měli ukázat.*

Poznámka 36 *Toto nám dává velice silný nástroj, jak zkoumat problémy potenciálního proudění, protože to tyto problémy převádí na řešení Laplaceových rovnic, které jsou snadno řešitelné.*

Definice 62 *Proudová funkce $\psi(x, y)$ nestlačitelného proudění je skalární pole takové, že $v_1 = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$ a $v_2 = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, kde $(v_1, v_2) = \vec{v}$.*

Poznámka 37 *Je snadné ověřit, že také proudová funkce splňuje Laplaceovu rovnici. Proudová funkce zároveň s rychlostním potenciálem tvoří harmonickou dvojici, tedy jsou provázány Cauchy-Riemannovými podmínkami, dokážeme proto jednoduše ze znalosti proudové funkce spočítat rychlostní potenciál a naopak.*

Definice 63 *Proudnice je křivka, jejíž tečna v každém jejím bodě je vektor rychlosti.*

Definice 64 *Komplexním potenciálem rozumíme zobrazení $F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, kde $z = x + iy$ a $x, y \in \mathbb{R}$.*

Poznámka 38 *Jestliže jsou parciální derivace rychlostního potenciálu a proudové funkce spojité, pak je komplexní potenciál analytická funkce. Derivaci komplexního potenciálu lze jednoduše spočítat jako $F'(z) = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} + i\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$.*

3.2 Metoda konečných prvků

V této kapitole je vysvětlen základ metody konečných prvků, kterou využíváme k řešení Laplaceových rovnic. Stručný úvod do metody konečných prvků lze nalézt v textech [2, 4]. Více o metodě konečných prvků nejen v realném oboru lze najít v [12].

Metoda konečných prvků je jedna z nejčastěji využívaných numerických metod k řešení parciálních diferenciálních rovnic. Metoda umožňuje řešit Poissonovu rovnici s okrajovými podmínkami na komplikovaných oblastech.

Mějme oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a uvažujme problém

$$-\Delta u = f(\mathbf{x})$$

na $\mathrm{Int}(\Omega)$ s Dirichletovo okrajovou podmínkou $u(\mathbf{x})|_{\partial\Omega}= 0$. Předpokládejme, že je $u(\mathbf{x})$ řešení daného problému, pak pro každou testovací funkci $v(\mathbf{x}) \in H_0^1(\Omega)$ platí rovnost

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}A = \int_\Omega (-\Delta u)v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}A = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}A - \int_{\partial\Omega} (n \cdot \nabla u)v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s,$$

kde druhá rovnost vychází z integrace per partes pro funkce více proměnných. Nyní ale víme, že $v(\mathbf{x}) = 0$ na $\partial\Omega$, a proto $\int_{\partial\Omega} (n \cdot \nabla u)v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s = 0$. Za využití předešlého vztahu dostaneme rovnost $\int_\Omega f(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}A = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}A$, která je pro metodu konečných prvků klíčová.

Metoda konečných prvků spočívá v triangulaci oblasti Ω, tedy rozdělení Ω na konečný počet nepřekrývajících se trojúhelníků navazujících na sebe. Mějme danou konkrétní triangulaci oblasti Ω a označme $v_1, \dots, v_n$ vrcholy trojúhelníků vzniklých touto triangulací. Mějme funkce $h_1(\mathbf{x}), \dots, h_n(\mathbf{x})$ tak, aby $h_i(v_i) = 1$ a $h_i(v_j) = 0$ pro $j \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{i\}$ a aby také každá $h_i(\mathbf{x})$ byla v rámci každého trojúhelníku lineární a na oblasti Ω po částech lineární funkce.

Nalézt takovéto funkce není složité. Nechť je Δ_{ijk} trojúhelník s vrcholy v_i, v_j, v_k.
Na trojúhelníku Δ_{ijk} definujme $h_i(\mathbf{x}) = ax + by + c$. Dosazením vrcholů dostaneme sadu rovnic:

1. $h_i(v_i) = av_{i,x} + bv_{i,y} + c = 1,$
2. $h_i(v_j) = av_{j,x} + bv_{j,y} + c = 0,$
3. $h_i(v_k) = av_{k,x} + bv_{k,y} + c = 0.$

Vyřešením soustavy dostaneme restrikci $h_i(\mathbf{x})$ na trojúhelníku Δ_{ijk}. Podobný proces provedeme s dalšími trojúhelníky, jejíchž vrchol je v_i. Na trojúhelnících, které nemají vrchol v_i, definujeme $h_i(\mathbf{x}) = 0$. Tímto způsobem nalezneme všechny funkce $h_1, ..., h_n$.

Uvažujme nyní aproximaci řešení $u(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^{n} u_i h_i(\mathbf{x})$ a zafixujme $j \in \{1, ..., n\}$. Dosadíme-li aproximaci $u(\mathbf{x})$ a $v = h_j(\mathbf{x})$ do rovnosti na začátku kapitoly, dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \int_{\Omega} \nabla h_i \nabla h_j \, \mathrm{d}A = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) h_j(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}A.$$

Označme $f_j = \displaystyle\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) h_j(\mathbf{x}) \ \mathrm{d}A$ a $m_{ij} = \displaystyle\int_{\Omega} \nabla h_i \nabla h_j \ \mathrm{d}A$. Rovnici lze tedy přepsat do tvaru $f_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} u_i$. Pro každé j dostaneme jednu rovnici. Celkovou soustavu lze zapsat jako

$$M\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

kde $[M]_{i,j} = m_{ij}$ je matice soustavy a $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n)^T$ je vektor pravé strany. Řešením této soustavy je vektor $\mathbf{u}$, který nám dává aproximaci řešení v každém vrcholu každého trojúhelníku, protože $u(v_j) \approx \sum_{i=1}^{n} u_i h_i(v_j) = u_j$.

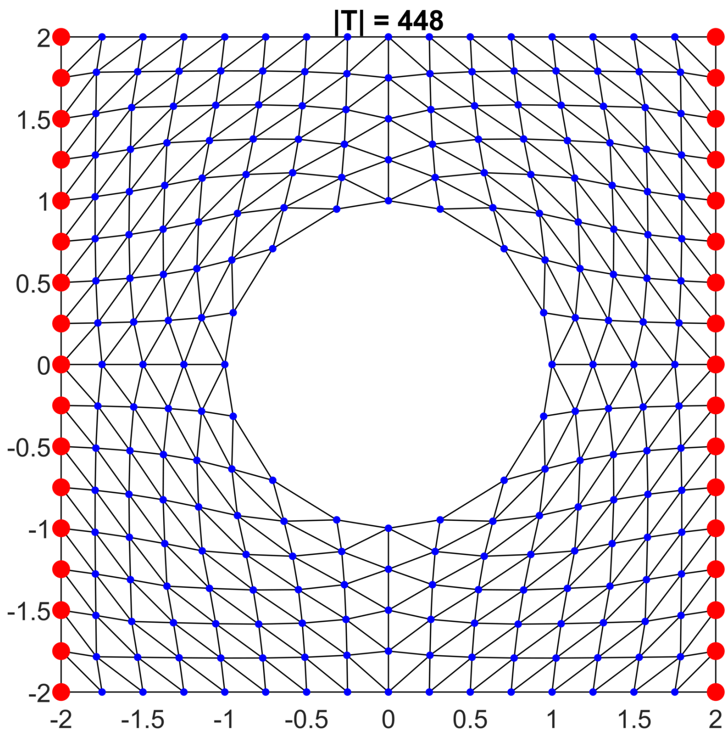
Poznamenejme, že homogenní Neumannovy podmínky jsou touto konstrukcí automaticky splněny. Problém s nenulovými Dirichletovými podmínkami lze jednoduše převést na problém s nulovými Dirichletovými podmínkami přičtením vhodné funkce k $u(\mathbf{x})$.

3.3 Obtékání kruhu

V této podkapitole budeme chtít vyřešit problém obtékání jednotkového kruhu metodou konečných prvků. Praktické výpočty jsou provedené v systému Matlab za pomocí kódu ze článku [1].

Mějme kruhovou množinu $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ a oblast $\Omega = [-2, 2] \times [-2, 2] \setminus K$, která představuje čtverec, ze kterého je vyjmutý kruh. Označme si $\Gamma_1 = \{-2\} \times [-2, 2]$, $\Gamma_2 = \{2\} \times [-2, 2]$, $\Gamma_3 = [-2, 2] \times \{-2\}$, $\Gamma_4 = [-2, 2] \times \{2\}$. Z teoretické části víme, že jak rychlostní potenciál, tak proudová funkce je harmonická funkce, tedy řeší Laplaceovu rovnici. V tomto případě se dokonce jedná o harmonickou dvojici, platí tedy speciálně, že skalární součin jejich gradientů je nulový, takže jsou jejich gradienty na sebe v každém bodě, ve kterém existují, kolmé. Omezme se nyní tedy pouze na rychlostní potenciál.

Od modelu čekáme alespoň částečně rozumné chování. Očekáváme, že do daného kruhu nepronika žádná tekutina, tedy musí platit $\dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0$ na ∂K, kde $\mathbf{n}$ je vnější normála. Zároveň očekáváme, že tekutina neprochází ani horní a dolní stěnou čtvercové oblasti, tedy máme podmínku $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ na Γ_3 a Γ_4. Na Γ_1 a Γ_2 předepisujeme Dirichletovu podmínku naměřenými hodnotami ϕ. V našem případě budeme uvažovat $\phi = -1$ na Γ_1 a $\phi = 1$ na Γ_2, tím částečně vynutíme chování stejnoměrného proudění na daných hranicích. V obrázku 3.1 lze vidět triangulaci, kterou používáme k výpočtu.



Obrázek 3.1: Výpočetní síť s 448 trojuhelníky.

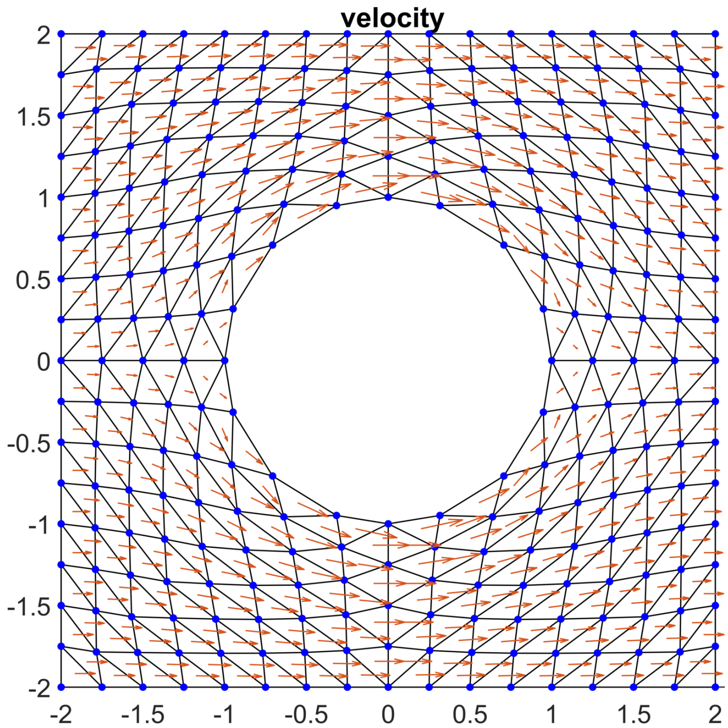
Řešíme tedy metodou konečných prvků úlohu

$$\Delta\phi = 0 \ na \ \Omega,$$

$$\phi = -1 \ na \ \Gamma_1, \ \phi = 1 \ na \ \Gamma_2,$$

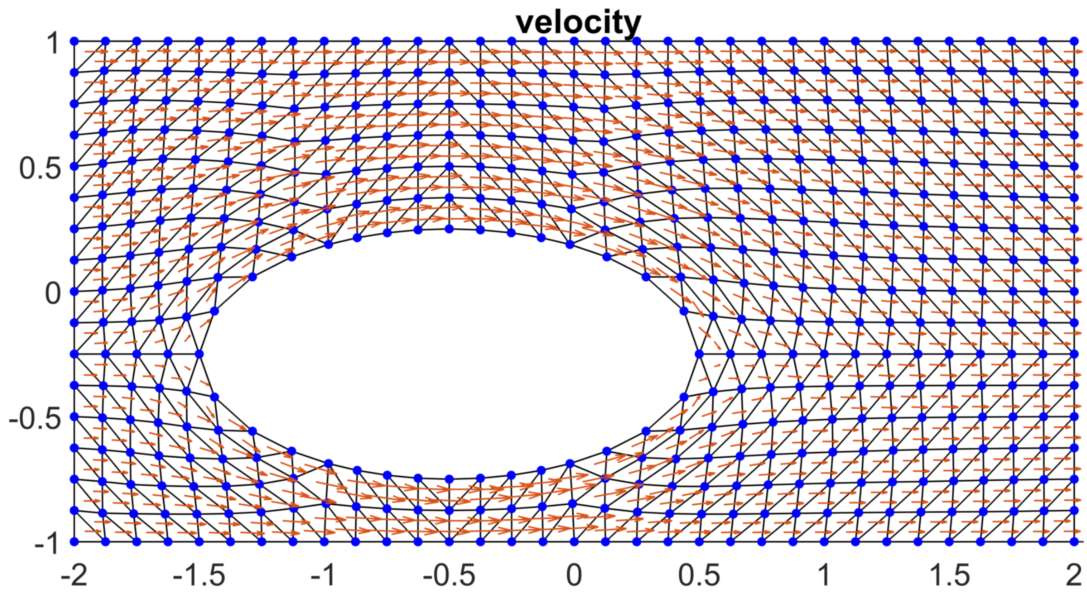
$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = 0 \ na \ \partial K, \ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \ na \ \Gamma_3, \ \Gamma 4.$$

Vypočítané rychlostní pole je znázorněno na obrázku 3.2.

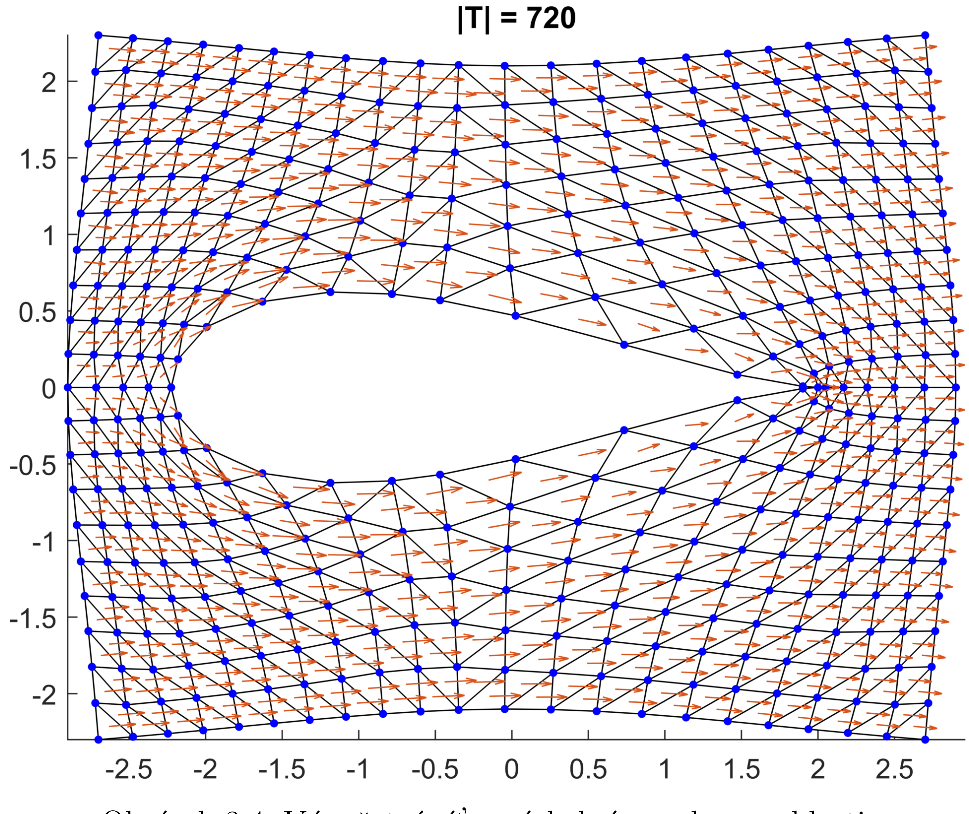


Obrázek 3.2: Výpočetní síť s výsledným polem rychlosti.

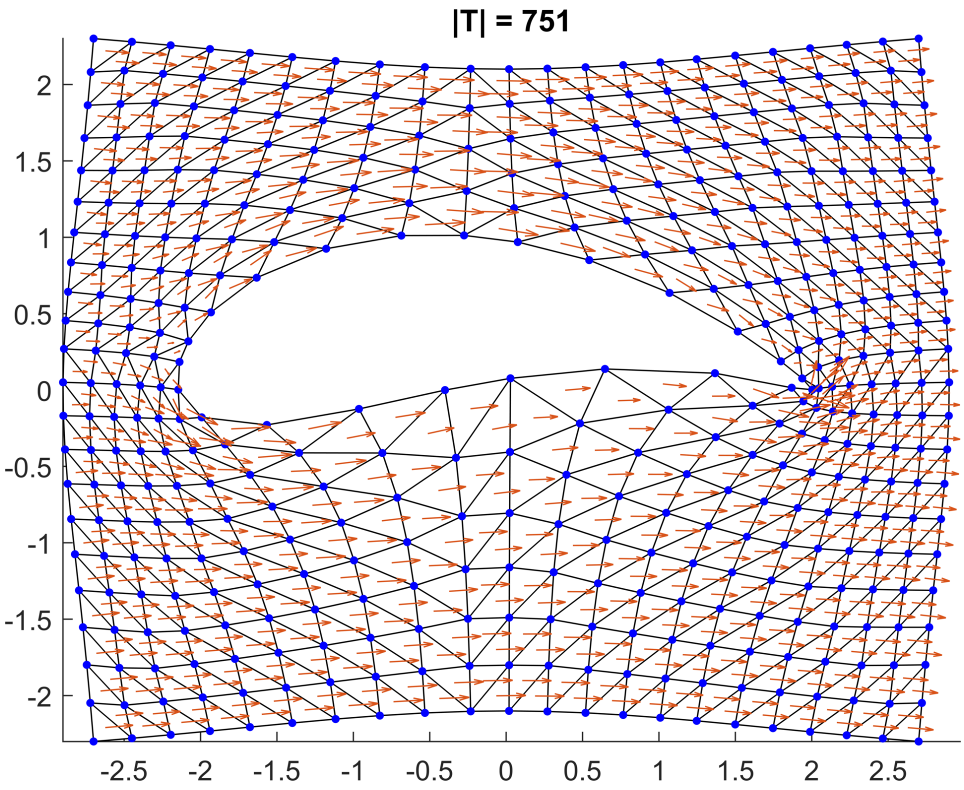
3.4 Obtékání dalších profilů



Obrázek 3.3: Výpočetní síť s výsledným polem rychlosti.



Obrázek 3.4: Výpočetní síť s výsledným polem rychlosti.



Obrázek 3.5: Výpočetní síť s výsledným polem rychlosti.

Poznamenejme, že rychlostní pole na obrázcích 3.4 a 3.5 jsme získali aplikací Žhukovského transformace na problém obtékání okolo kruhu, který obsahuje body $[0,0],[-1,0]$ a bod $[1,0]$ leží na hranici (poblíž hranice) a přepočítáním parciálních derivací v nových souřadnicích na základě věty o derivaci inverzní funkce. Výsledné oblasti získané touto transformací nazýváme Žhukovského profily. Pokud střed transformovaného kruhu leží na ose x, pak je profil symetrický podle osy x. Pro 3.4 byl volen střed kruhu $S = (-0.3, 0)$ a poloměr $a = 1.3$. V případě 3.5 byl volen střed kruhu $S = (-0.2, 0.32)$ a poloměr $a = 1.3$.

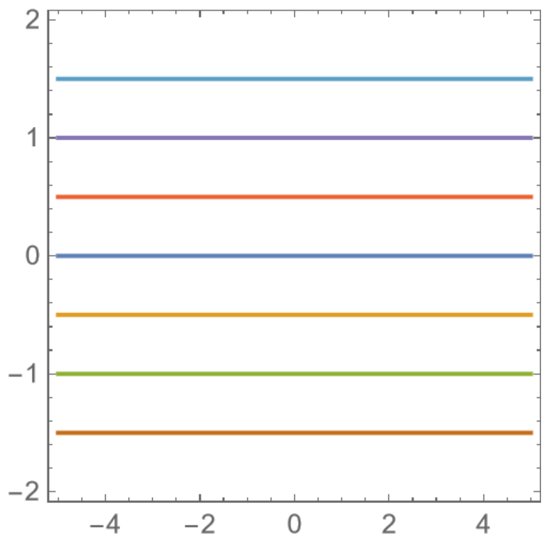
3.5 Obtékání kruhu - řešení pomocí konformního zobrazení

V této podkapitole ukážeme, jak lze vyřešit problém obtékání kruhu pomocí konformních zobrazení. Praktické vizualizace jsou provedené v systému Mathematica.

Uvažujme komplexní potenciál $F_1(z) = Uz$ pro $U \in \mathbb{R}$. Určeme nyní předpis rychlostního potenciálu, rychlostního pole a proudové funkce. Nechť tedy $z = x+iy$ pro $x, y \in \mathbb{R}$, pak $F_1(z(x,y)) = Ux + Uiy$. Víme, že

$$\phi_1(x,y) = \Re(F_1(z(x,y))) = Ux, \quad \psi_1(x,y) = \Im(F_1(z(x,y))) = Uy.$$

Pro rychlostní pole máme vztah $\vec{v}_1(x,y) = \nabla\phi_1 = (U,0)$. Komplexní potenciál tedy vlastně reprezentuje stejnoměrné proudění o rychlosti U. Přesvědčme se ještě vykreslením několika proudnic pro $U = 1$, tedy křivek $\psi_1(x,y) = c$ pro $c \in \mathbb{R}$.



Obrázek 3.6: Proudnice stejnoměrného proudění.

Uvažujme nyní transformaci $w = R(z) = ze^{i\alpha}$ pro $\alpha \in [0, 2\pi)$. Pro transformovaný komplexní potenciál máme vztah $F_2(w) = F_1(R^{-1}(w))$. Není těžké zjistit, že platí $R^{-1}(w) = we^{-i\alpha}$, a tedy

$$F_2(w) = F_1(we^{-i\alpha}) = Uwe^{-i\alpha}.$$

Nalezněme nyní znovu příslušný rychlostní potenciál, rychlostní pole a proudovou funkci potenciálu F_2. Mějme $w = u + iv$ pro $u, v \in \mathbb{R}$, pak

$$F_2(w(u,v)) = U(u+iv)(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)).$$

Roznásobením závorek dostaneme

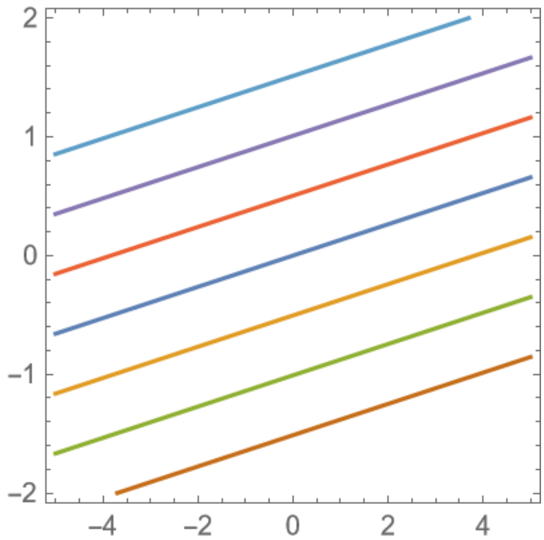
$$F_2(w(u,v)) = U(u\cos(\alpha) + v\sin(\alpha) + i(v\cos(\alpha) - u\sin(\alpha))).$$

Z tohoto tedy dostáváme předpisy pro rychlostní potenciál a proudovou funkci

$$\phi_2(u,v) = U(u\cos(\alpha) + v\sin(\alpha)), \quad \psi_2(u,v) = U(v\cos(\alpha) - u\sin(\alpha)).$$

Pro určení předpisu rychlostního pole budeme opět potřebovat parciální derivace rychlostního potenciálu. Spočtěme tedy derivace $\dfrac{\partial \phi_2}{\partial u} = U\cos(\alpha)$ a $\dfrac{\partial \phi_2}{\partial v} = U\sin(\alpha)$. Zjistili jsme, že $\vec{v}_2(u,v) = (U\cos(\alpha), U\sin(\alpha))$.

Znázorněme v tomto případě proudnice pro $U = 1$ a $\alpha = \dfrac{\pi}{24}$ na Obrázku 3.7.



Obrázek 3.7: Proudnice stejnoměrného proudění natočeného o úhel α.

Můžeme si všimnout, že proudnice druhého potenciálu jsou pouze zrotované proudnice potenciálu prvního o úhel α, takto přesně ale byla volena rotační transformace $R(z)$. Poznamenejme, že pro $\alpha = 0$ dostáváme předchozí případ a pro $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ dostáváme svislé proudění. Dokázali jsme tedy pomocí stejnoměrného proudění získat proudění kapaliny, která přitéka pod úhlem α rychlostí U.

Využijme nyní znalosti Žhukovského transformace jednotkového kruhu a potenciálu stejnoměrného proudění k popisu proudění okolo jednotkového kruhu. Nechť je dána Žhukovského transformace

$$J(\zeta) = \zeta + \frac{1}{\zeta},$$

pak potenciál reprezentující proudění okolo jednotkového kruhu je dán jako

$$F_3(\zeta) = F_1(J(\zeta)) = U(\zeta + \frac{1}{\zeta}).$$

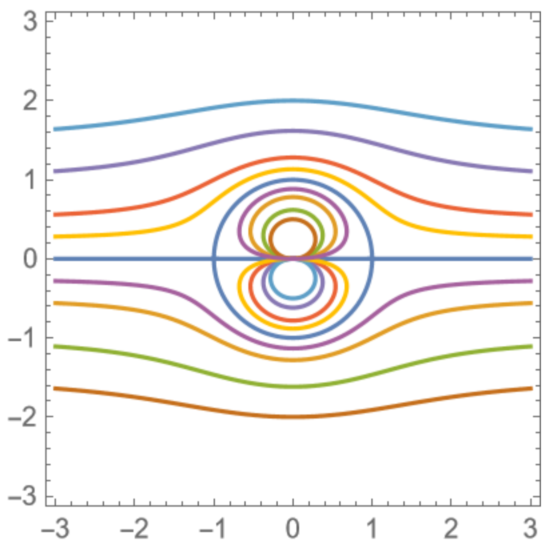
Uvědomme si, že je transformace prováděna v tomto případě opačným směrem, není tedy nutné hledat inverzní zobrazení Žhukovského transformace. Ať je $\zeta = \xi + i\eta$, kde $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, pak ze znalosti reálné a imaginární části Žhukovského transformace máme předpis rychlostního potenciálu a proudové funkce

$$\phi_3(\xi,\eta) = U\xi(1 + \frac{1}{\xi^2+\eta^2}),\ \ \psi_3(\xi,\eta) = U\eta(1 - \frac{1}{\xi^2+\eta^2}).$$

Rychlostní pole je v tomto případě dáno předpisem

$$\vec{v}_3(\xi,\eta) = \left(U(1 - \frac{\xi^2-\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}), \frac{-\,2U\xi\eta}{(\xi^2+\eta^2)^2} \right).$$

Vykreslením proudnic pro $U = 1$ se lze znovu přesvědčit o výsledku. Povšimněme si, že nám vyšlo podobné řešení jako na Obrázku 3.2, protože víme, že vektor rychlosti je tečný k proudnici v každém jejím bodě. Počítali jsme tedy správně.



Obrázek 3.8: Proudnice popisující obtékání kruhu.

V poslední řadě bychom rádi našli popis proudění okolo kruhu o poloměru $a \in \mathbb{R}$ se středem v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, kde kapalina přitéká pod úhlem α rychlostí U. Definujme transformaci $Z = T(\zeta) = a\zeta + z_0$, která představuje posunutí o z_0 a natáhnutí o a, tedy náš kruh posune do středu z_0 a změní poloměr na a. Inverzní transformaci lze snadno spočítat jako $T^{-1}(Z) = \dfrac{Z - z_0}{a}$. Potenciál reprezentující proudění okolo takovéhoto kruhu tedy bude mít tvar

$$F_4(Z) = F_3(T^{-1}(Z)) = \frac{U}{a}(Z - z_0 + \frac{a^2}{Z - z_0}).$$

Nyní zbývá už pouze docílit toho, že kapalina přitéká pod úhlem α. K tomu poslouží již definovaná transformace $\tilde{Z} = R(Z)$. Aplikujeme-li tuto transformaci, dostaneme předpis komplexního potenciálu

$$F_5(\tilde{Z}) = F_4(R^{-1}(\tilde{Z})) = \frac{U}{a}\left(\tilde{Z}e^{-i\alpha} - z_0 + \frac{a^2}{\tilde{Z}e^{-i\alpha} - z_0}\right).$$

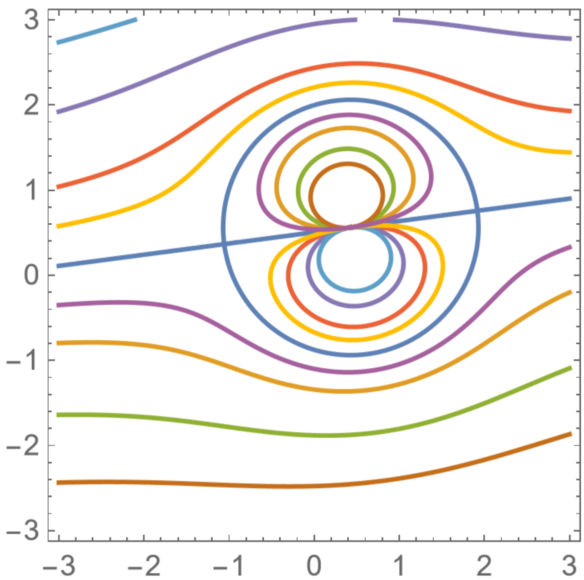
Nechť $\tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y}$ a $z_0 = x_0 + iy_0$. Označme si pro přehlednost

$$A = \tilde{X}\cos(\alpha) + \tilde{Y}\sin(\alpha) - x_0,\ \ B = \tilde{Y}\cos(\alpha) - \tilde{X}\sin(\alpha) - y_0.$$

Lze nyní vyjádřit

$$\phi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{UA}{a}\left(1 + \frac{a^2}{A^2 + B^2}\right),$$
$$\psi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{UB}{a}\left(1 - \frac{a^2}{A^2 + B^2}\right).$$

Vykresleme si proudnice pro případ $U = 1,\ \alpha = \frac{\pi}{24},\ a = 1.5$ a $z_0 = 0.5 + 0.5i$.



Obrázek 3.9: Proudnice popisující obtékání kruhu natočené o úhel α.

Kapitola 4

Závěr

V práci jsme popsali veškerou část teorie komplexní analýzy nezbytnou pro pochopení základů teorie konformního zobrazení. Zadefinovali jsme Žhukovského transformaci, která je typickým příkladem konformního zobrazení. Popsali jsme základy metody konečných prvků a definovali jsme několik pojmů týkajících se potenciálního proudění. Následně jsme využili metody konečných prvků k vyřešení několika Laplaceových rovnic, které popisovaly proudění okolo kruhu, elipsy a Žhukovského profilu, který jsme získali aplikací Žhukovského transformace na mírně vychýlený kruh od středu. V poslední řadě jsme ukázali použití Žhukovského transformace k analytickému vyřešení problému obtékání okolo libovolného kruhu, které potvrdilo naše výsledky za pomoci metody konečných prvků.

Další možné rozšíření práce by mohlo směřovat k výpočtu fyzikálněji přesnějších modelů obtékání leteckého profilu za využití složitějších konformních zobrazení anebo uvažování například cirkulace v daných modelech.

Literatura

[1] Alexej Moskovka, Jan Valdman, Fast MATLAB evaluation of nonlinear energies using FEM in 2D and 3D: nodal elements, Applied Mathematics and Computation 424, 127048 (2022).

[2] Approximations of Laplace's Equation, Finite Element Method, https://people.montefiore.uliege.be/geuzaine/MATH0504/09_Laplace_Matlab.pdf.

[3] Definitions, https://potentialflow.com/definitions.

[4] Finite Element Method and Laplace's Equation, https://math.okstate.edu/people/binegar/4263/4263-l21.pdf.

[5] H. Pospíšilová: Konformní zobrazení, 2012 https://is.muni.cz/th/ti11g/diplomova_prace_konformni_zobrazeni.pdf.

[6] J. G. Aramanovič, G. L. Lunc, L. C. Eĺsgoĺc: *Funkcie komplexnej premennej Operátorový počet Teória stability*, Alfa, 1973.

[7] J. Kalas: *Analýza v komplexním oboru*, Masarykova univerzita, 2006.

[8] J. Linhart: *Mechanika tekutin I*, Západočeská univerzita v Plzni, 2009.

[9] J. Veselý: *Komplexní analýza pro učitele*, Nakladatelství Karolinum, 2000.

[10] K. Rektorys: *Přehled užité matematiky*, SNTL, 1981.

[11] P. J. Olver: Complex Analysis and Conformal Mapping, https://www-users.cse.umn.edu/~olver/ln_/cml.pdf.

[12] S. Koukal, M. Křížek, R. Potůček: *Fourierovy trigonometrické řady a metoda konečných prvků v komplexním oboru*, Academia, 2002.

[13] S. Zámečník: Konformní zobrazení a jejich aplikace, 2015, https://is.muni.cz/th/pfeuv/Sablona.pdf.