UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Užití mnohoznačných funkcí v ekonomii

Vedoucí diplomové práce:
prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.
Rok odevzdání: 2012

Vypracovala:
Michaela Gabrhelíková
AME, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně za vedení prof. RNDr. dr hab. Jana Andrese, DSc. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracovávání své práce.

V Olomouci dne 21. březen 2012

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce prof. RNDr. dr hab. Janu Andresovi, DSc. za spolupráci i za čas, který mi věnoval při konzultacích. V neposlední řadě děkuji také mé rodině a přátelům, kteří mě po celou dobu studia podporují.

Obsah

Úvod

Mnohoznačné funkce mají pro ekonomii velký přínos. Díky tomu, že ekonom a matematik profesor Debreu pohlížel na ekonomiku jako na hru o N hráčích, došlo k možnosti využít poznatky z teorie her spojené s hledáním bodů zaručujících rovnováhu. Tato rovnováha nese název Nashova a pro dokázání její existence lez použít Kakutaniho větu o pevném bodě využívající právě mnohoznačné funkce.

Práce je rozdělena do tří částí. V první kapitole je uvedena definice mnohoznačné funkce a základní vlastnosti týkající se především její (polo)spojitosti. Mnohoznačná funkce může být spojitá nebo pouze polospojitá shora či zdola. Polospojitosti i spojitost jsou pro objasnění demonstrovány na příkladech. Pokud se jedná o zobrazení s kompaktními hodnotami, dá se spojitost mnohoznačného zobrazení definovat také pomocí Hausdorffovy metriky.

Abychom mohli přejít k hledání rovnováhy v ekonomice definované Debreuem, je ale nejprve potřeba objasnit problematiku teorie her. O této disciplíně pojednává druhá kapitola, která je rozdělena do tří podkapitol. V první podkapitole je popsán rozdíl mezi rozhodovací situací a hrou v normálním tvaru. Protože se rozhodovací situace dělí na antagonistický a neantagonistický konflikt, rozlišuje se definice hry i pro tyto dva případy. Každou hru lze zapsat do matice či dvojmatice a každý hráč hraje ve hře s nějakou svou strategií. Ta může být buď ryzí, nebo se provede smíšené rozšíření maticové hry, které umožňuje hráči hrát ryzí strategie s určitou pravděpodobností. Ve hře může nastat tzv. Nashova rovnováha (neboli rovnovážný bod). Její obecná definice, význam a příklady jsou uvedeny v druhé podkapitole. Ve třetí podkapitole je uvedena základní věta teorie maticových her, která říká, že smíšené rozšíření každé maticové hry má řešení. K důkazu této věty se v diplomové práci využívá Kakutaniho věta, která není nic jiného, než větou dokazující existenci pevných bodů pro mnohoznačné funkce. I tato věta bude v práci dokázána.

Celá druhá kapitola je provázena vysvětlujícím příkladem hry “Kámen, nůžky, papír” a jedním z cílů práce je ilustovat na této hře důkaz existence Nashovy rovnováhy.

Na základě osvojení si problematiky uvedené v první a druhé kapitole můžeme přejít ke kapitole třetí. Zde je uvedena abstraktní ekonomika jakožto hra s N-účastníky. Každý účastník má svou výplatní funkci a jeho rozhodnutí je ovlivněno rozhodnutím všech ostatních účastníků. Toto rozhodnutí každého účastníka je popsáno právě mnohoznačnou funkcí. Pokud jsou splněny podmínky formulované Debreuem, je v takto definované abstraktní ekonomice dosaženo Nashovy rovnováhy. O tom hovoří lema 3.1 uvedená v závěru diplomové práce.

Cílem práce je tedy zvládnutí základních poznatků z teorie mnohoznačných funkcí, nastudování pojmů teorie her, provést důkaz existence Nashovy rovnováhy pomocí Kakutaniho věty, tento důkaz ilustrovat na všeobecně známém příkladě "Kámen, nůžky, papír" a na závěr využít znalosti mnohoznačných funkcí a teorie her k pochopení rovnováhy v abstraktní ekonomice.

1 Mnohoznačná zobrazení

Definice a tvrzení uvedené v této kapitole jsou čerpány z literatury [1].

1.1 Definice a značení

Mnohoznačné zobrazení je definováno následovně:

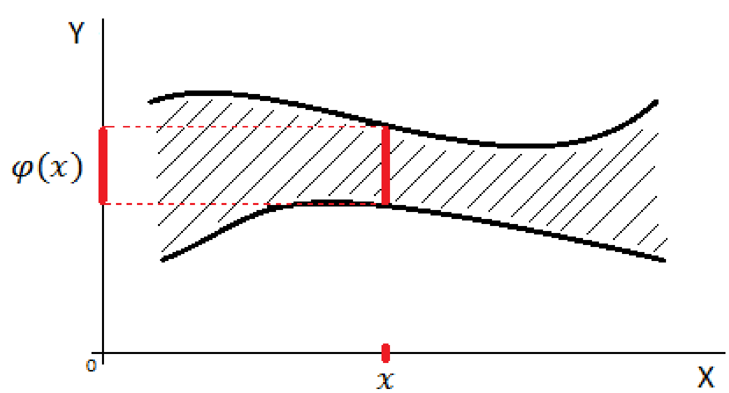
Definice 1.1. Nechť X a Y jsou dva metrické prostory. *Mnohoznačným zobrazením* rozumíme předpis

$$\varphi : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}, \tag{1}$$

který každému bodu množiny X přiřadí neprázdnou množinu bodů z Y.

Mnohoznačné zobrazení se obvykle značí:

$$\varphi : X \multimap Y. \tag{2}$$



Obrázek 1: Příklad mnohoznačného zobrazení $\mathbb{R} \multimap \mathbb{R}$

Poznámka 1.1. Pokud každému bodu přiřadíme jen jediný bod, hovoříme o jednoznačném zobrazení a používáme známý zápis $\varphi : X \to Y$.

V různých literaturách se můžeme setkat s odlišným značením mnohoznačné funkce. Krom značení uvedeného v definici výše, se používají rovněž následující symboly:

$$\rightsquigarrow,$$

$$\rightarrow\rightarrow.$$

V celé diplomové práci se pro mnohoznačnou funkci používá právě symbol "$\multimap$" a symbol "$\rightarrow$" představuje vždy funkci jednoznačnou.

1.2 Vlastnosti mnohoznačného zobrazení

Definice 1.2. Nechť $\varphi : X \multimap Y$ je mnohoznačné zobrazení ve smyslu předešlé definice 1.1. Pak *grafem* Γ_φ funkce φ rozumíme množinu:

$$\Gamma_\varphi = \{(x, y) \in X \times Y | y \in \varphi(x)\}. \tag{3}$$

Definice 1.3. Nechť X, Y je dvojice metrických prostorů. Nechť $X \cap Y \neq \emptyset$ a $\varphi : \ X \multimap Y$, pak se bod $x \in X \cap Y$ nazývá *pevný bod* zobrazení φ, jestliže $x \in \varphi(x)$. V případě jednoznačného zobrazení bude $x = \varphi(x)$.

Množinu pevných bodů zobrazení φ označujeme následovně:

$$Fix(\varphi) = \{x \in X | x \in \varphi(x)\}. \tag{4}$$

Definice 1.4. Nechť $\varphi : X \multimap Y$ a $B \subset Y$ je libovolná podmnožina. Pak $\varphi^{-1}(B)$ nazýváme *malým vzorem* a $\varphi_+^{-1}(B)$ *velkým vzorem* zobrazení φ množiny B a jsou definovány následovně:

$$\varphi^{-1}(B) = \{x \in X | \varphi(x) \subset B\}, \tag{5}$$

$$\varphi_+^{-1}(B) = \{x \in X | \varphi(x) \cap B \neq \emptyset\}. \tag{6}$$

Poznámka 1.2. Je zřejmé, že pro malý a velký vzor platí následující inkluze:

$$\varphi^{-1}(B) \subset \varphi_+^{-1}(B).$$

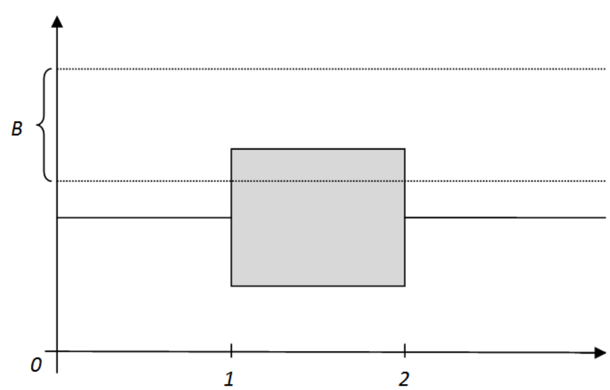
Příklad 1.1. Funkce $\varphi : \langle 0, \infty) \multimap \mathbb{R}$ definovaná

$$\varphi(x) = \begin{cases} \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle & \text{pro } x \in \langle 1, 2 \rangle, \\ 1 & \text{jinak}, \end{cases} \tag{7}$$

má následující velký a malý vzor:

$$\varphi^{-1}(B) = \emptyset,$$

$$\varphi_+^{-1}(B) = \langle 1, 2 \rangle.$$

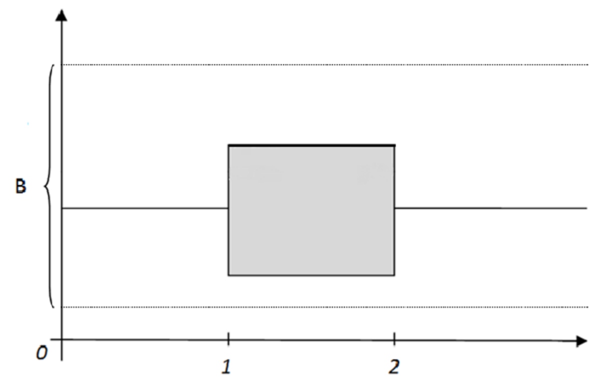


Obrázek 2: Příklad malého a velkého vzoru

Příklad 1.2. Pokud si zvolíme podmnožinu B následovně (viz obrázek 3), dojde u malého vzoru u funkce φ definované v příkladu 1.1 ke změně:

$$\varphi^{-1}(B) = \langle 0, \infty),$$

$$\varphi_+^{-1}(B) = \langle 0, \infty).$$



Obrázek 3: Příklad malého a velkého vzoru

Pro malý a velký vzor můžeme uvést několik vlastností (další vlastnosti lze nalézt například v [1]).

Lema 1.1. *Nechť* $\varphi : X \multimap Y$ *je mnohoznačná funkce,* $A \subset X$ *a* $B \subset Y$*. Pak platí:*

$$X \setminus \varphi^{-1}(B) \supset \varphi^{-1}(Y \setminus B), \tag{8}$$

$$X \setminus \varphi_{+}^{-1}(B) = \varphi^{-1}(Y \setminus B). \tag{9}$$

1.2.1 Spojitost a polospojitost mnohoznačného zobrazení

Mnohoznačné zobrazení může být polospojité shora, polospojité zdola nebo spojité. Na tyto vlastnosti se zaměříme v následujících definicích:

Definice 1.5. Mnohoznačné zobrazení $\varphi : X \multimap Y$ se nazývá *polospojité shora*, jestliže pro každou otevřenou podmnožinu $U \subset Y$ je množina $\varphi^{-1}(U)$ otevřená v X.

Poznámka 1.3. Zkráceně se pojem polospojitá shora označuje z anglického názvu upper semi-continnous jen u.s.c.

Pro zobrazení polospojité shora platí následující ekvivalence:

Věta 1.1. *Mnohoznačné zobrazení* $\varphi : X \multimap Y$ *je polospojité shora právě tehdy, když pro každou uzavřenou podmnožinu* $A \subset Y$ *je množina* $\varphi_{+}^{-1}(A)$ *uzavřená v* X.

Důkaz věty 1.1 souvisí s vlastností (8) a (9) malého a velkého vzoru, které jsou uvedeny v lematu 1.1.

Navíc pro graf takového zobrazení platí následující věta:

Věta 1.2. *Jestliže zobrazení $\varphi : X \multimap Y$ je polospojité shora, pak graf Γ_φ je uzavřená podmnožina kartézského součinu $X \times Y$.*

Důkaz věty 1.2 je uveden v literatuře [1] na straně 32.

Věta 1.3. *Předpokládejme, že K je kompaktní množina a $\varphi : X \multimap Y$ je mnohoznačné zobrazení takové, že $\varphi(X) \subset K \subset Y$, kde graf tohoto zobrazení Γ_φ je uzavřený v $X \times Y$. Pak platí, že je zobrazení φ polospojité shora.*

Důkaz věty 1.3 je uveden v literatuře [1] na straně 33.

Větu 1.3 lze ilustrovat na následujících příkladech. Pro jednoduchost budeme užívat grafy mnohoznačných funkcí z M_1 do M_2, kde $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$ jsou vhodné podmnožiny reálné osy. Mnohoznačná funkce pak lze zapsat ve tvaru:

$$\varphi : M_1 \multimap M_2. \tag{10}$$

Příklad 1.3. Uvažujme $\varphi : \langle 0, 1\rangle \multimap \langle 0, 1\rangle$ funkci definovanou následovně (viz obrázek 4):

$$\varphi(x) = \begin{cases} \langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\rangle, \text{ pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1\rangle, \\ \langle \frac{1}{5}, \frac{4}{5}\rangle, \text{ pro } x = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{11}$$

Chceme dokázat, že je funkce φ polospojitá shora. Můžeme to dokázat pomocí definice 1.5. Tedy, jestliže pro libovolnou otevřenou podmnožinu $B \subset Y$ platí, že je množina $\varphi^{-1}(B) \subset X$ otevřená v X. To nastane, jestliže pro množinu B platí následující možnosti:

1) B je otevřená taková, že $\langle \frac{2}{10}, \frac{8}{10}\rangle \not\subset B \supset \langle \frac{4}{10}, \frac{6}{10}\rangle \Rightarrow \varphi^{-1}(B) = \langle 0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 0\rangle$, což je otevřená množina v $\langle 0, 1\rangle$,

2) B je otevřená taková, že $\langle \frac{2}{10}, \frac{8}{10}\rangle \subset B \Rightarrow \varphi^{-1}(B) = \langle 0, 1\rangle$, což je množina sama v sobě otevřená,

3) B je otevřená taková, že $B \not\supset \langle \frac{4}{10}, \frac{6}{10} \rangle \Rightarrow \varphi^{-1}(B) = \{\emptyset\}$, což je otevřená množina.

Polospojitost shora můžeme ale dokázat i pomocí věty 1.1. Tedy, jestliže pro libovolnou uzavřenou podmnožinu $B \subset Y$ platí, že je množina $\varphi_+^{-1}(B) \subset X$ uzavřená v X. Pro podmnožiny B musí platit následující:

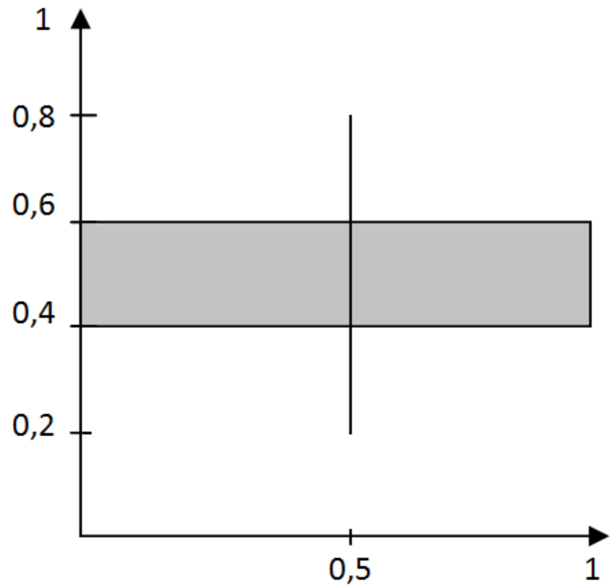
1) B je uzavřená taková, že $B \cap \langle \frac{2}{10}, \frac{8}{10} \rangle = \{\emptyset\} \Rightarrow \varphi_+^{-1}(B) = \{\emptyset\}$, kde $\{\emptyset\}$ je uzavřená množina,

2) B je uzavřená taková, že $B \cap \langle \frac{4}{10}, \frac{6}{10} \rangle \neq \{\emptyset\} \Rightarrow \varphi_+^{-1}(B) = \langle 0, 1 \rangle$, což je v $\langle 0, 1 \rangle$ uzavřená množina,

3) B je uzavřená taková, že $B \cap \langle \frac{2}{10}, \frac{4}{10} \rangle \neq \{\emptyset\} \wedge B \cap \langle \frac{4}{10}, \frac{6}{10} \rangle = \emptyset \Rightarrow \varphi_+^{-1}(B) = \{\frac{1}{2}\}$, kde jednoprvková množina je uzavřená,

4) B je uzavřená taková, že $B \cap \langle \frac{6}{10}, \frac{8}{10} \rangle \neq \{\emptyset\} \wedge B \cap \langle \frac{4}{10}, \frac{6}{10} \rangle = \emptyset \Rightarrow \varphi_+^{-1}(B) = \{\frac{1}{2}\}$, kde jednoprvková množina je uzavřená.

Protože však mohou nastat příklady mnohem složitější, není vždy vhodné k dokazování polospojitosti shora vycházet přímo z definice 1.5 či věty 1.1. Takové příklady se většinou dokazují následovně: protože je z grafu Γ_φ funkce φ zřejmé, že se jedná o uzavřenou a omezenou (tj. kompaktní) podmnožinu kartézského součinu, pak dle věty 1.3 platí, že je funkce $\varphi(x)$ polospojitá shora.



Obrázek 4: Příklad 1.3 funkce polospojité shora

Užitím velkého vzoru namísto malého vzoru vede k následující definici:

Definice 1.6. Nechť $\varphi : X \multimap Y$ je mnohoznačné zobrazení. Jestliže pro každou otevřenou podmnožinu $U \subset Y$ je množina $\varphi_+^{-1}(U)$ otevřená v X, pak se zobrazení φ nazývá *polospojité zdola*.

Poznámka 1.4. I zde se zkráceně pojem polospojitá zdola označuje z anglického názvu lower semi-continnous jen l.s.c.

Jak můžeme vidět v následující větě, také zobrazení, které je polospojité zdola lze vyjádřit pomocí malého vzoru:

Věta 1.4. *Zobrazení $\varphi : X \multimap Y$ je polospojité zdola právě tehdy, když pro každou uzavřenou podmnožinu $A \subset Y$ je množina $\varphi^{-1}(A)$ uzavřená v X.*

Důkaz věty 1.4 vzchází z definice 1.6 a vztahu 9.

V následujícím příkladu je uvedena funkce polospojitá zdola.

Příklad 1.4. Uvažujme $\varphi : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R}$ funkci definovanou následovně (viz obrázek 5):

$$\varphi(x) = \begin{cases} \langle 0, 1\rangle, \text{ pro } x \in \langle -\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, -\infty\rangle, \\ \langle 0, \frac{1}{2}\rangle, \text{ pro } x = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{12}$$

Vyjdeme z definice 1.6. Funkce je polospojitá zdola, jestliže pro libovolnou otevřenou podmnožinu $B \subset Y$ platí, že je množina $\varphi_+^{-1}(B) \subset X$ otevřená v X. Pro podmnožinu B musí tedy platit následující:

1) B je otevřená taková, že $B \cap \langle 0, 1\rangle = \{\emptyset\} \Rightarrow \varphi_+^{-1}(B) = \{\emptyset\}$, kde $\{\emptyset\}$ je otevřená,

2) B je otevřená taková, že $B \cap \langle 0, \frac{1}{2}\rangle \neq \{\emptyset\} \Rightarrow \varphi_+^{-1}(B) = \mathbb{R}$, kde $\mathbb{R}$ je sama v sobě otevřená,

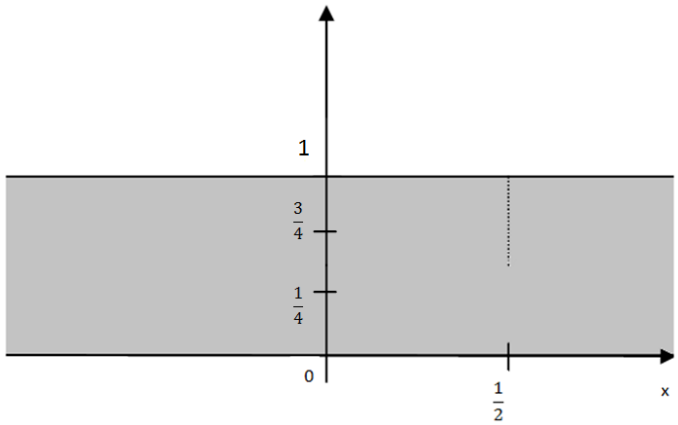
3) B je otevřená taková, že $B \cap (\frac{1}{2}, 1\rangle \neq \emptyset \wedge B \cap \langle 0, \frac{1}{2}\rangle = \emptyset \Rightarrow \varphi_+^{-1}(B) = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$, což je otevřená množina.

Můžeme ale také vyjít z věty 1.4. Funkce je polospojitá zdola, jestliže pro libovolnou uzavřenou podmnožinu $B \subset Y$ platí, že je množina $\varphi^{-1}(B) \subset X$ uzavřená v X. Pro podmnožinu B musí tedy platit následující:

1) B je uzavřená taková, že $B \supset \langle 0, 1\rangle \Rightarrow \varphi^{-1}(B) = \mathbb{R}$, což je uzavřená množina v $\mathbb{R}$,

2) B je uzavřená taková, že $B = \langle 0, \frac{1}{2}\rangle \Rightarrow \varphi^{-1}(B) = \{\frac{1}{2}\}$, kde jednoprvková množina je uzavřená,

3) B je uzavřená taková, že $\langle 0, 1\rangle \not\subset B \neq \langle 0, \frac{1}{2}\rangle \Rightarrow \varphi^{-1}(B) = \{\emptyset\}$, což je uzavřená množina.



Obrázek 5: Příklad 1.4 funkce polospojité zdola

Poznámka 1.5. Pro jednoznačné zobrazení $\varphi = f : X \to Y$ se pojmy polospojitá shora a zdola používají také, ale v jiném slova smyslu. Aby se pravý význam polospojitosti používaný u jednoznačných a mnohoznačných funkcí rozlišil, používá se někdy v literatuře u mnohoznačných funkcí pojem *hemicontinuity*. U jednoznačných funkcí pojmy *hemicontinuity* shora a zdola splývají, protože i malé a velké vzory těchto funkcí splývají. Tak vede pojem *hemicontinuity* jednoznačné funkce na pojem spojitosti jednoznačné funkce v klasickém slova smyslu.

Protože v mé práci polospojitost jednoznačných funkcí neuvažujeme, budeme termín *polospojitá* užívat vždy v souvislosti s mnohoznačnými funkcemi ve výše popsaném smyslu.

O spojitosti mnohoznačného zobrazení mluví následující definice:

Definice 1.7. Nechť $\varphi : X \multimap Y$ je mnohoznačné zobrazení. Toto zobrazení je *spojité*, jestliže je zároveň polospojité shora a polospojité zdola.

Spojitá mnohoznačná funkce je uvedena v následujícím příkladu.

Příklad 1.5. Uvažujme $\varphi : \langle 0, 1\rangle \multimap \langle 0, 1\rangle$ funkci definovanou následovně (viz obrázek 6):

$$\varphi(x) = \langle x, 1\rangle, \quad \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle. \tag{13}$$

Funkce je spojitá, jestliže pro libovolnou otevřenou podmnožinu $B \subset Y$ platí, že je množina $\varphi_+^{-1}(B) \subset X$ otevřená v X a zároveň pro libovolnou uzavřenou podmnožinu $B \subset Y$ platit, že je množina $\varphi_+^{-1}(B) \subset X$ uzavřená v X. Množina B musí vypadat následovně:

1) B je libovolná uzavřená podmnožina taková, že $B \subset \langle 0, 1 \rangle \Rightarrow \varphi_+^{-1}(B) = \langle 0, y \rangle$, která je uzavřená v $\langle 0, 1 \rangle$, kde $y := \max_{x \in B} B(x)$,

2) B je libovolná otevřená podmnožina taková, že $B \subset \langle 0, 1 \rangle \Rightarrow \varphi_+^{-1}(B) = \langle 0, y)$, která je otevřená v $\langle 0, 1 \rangle$, kde $y := \sup_{x \in B} B(x)$.

Funkce je ale také spojitá, jestliže pro libovolnou uzavřenou podmnožinu $B \subset Y$ platí, že je množina $\varphi^{-1}(B) \subset X$ uzavřená v X a zároveň pro libovolnou otevřenou podmnožinu $B \subset Y$ platit, že je množina $\varphi^{-1}(B) \subset X$ otevřená v X. Množina B pak musí vypadat následovně:

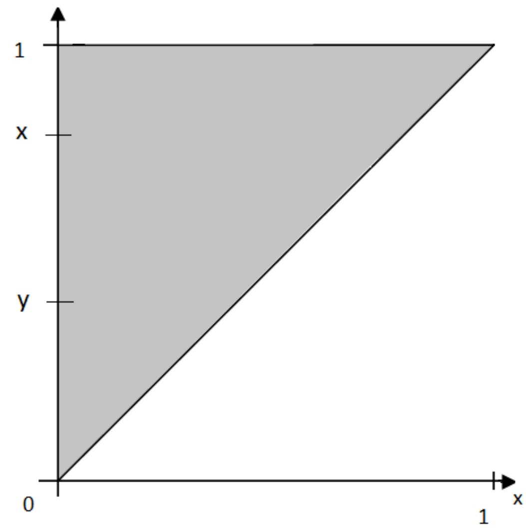
1) B je libovolná uzavřená taková, že $B = \langle x, 1 \rangle \Rightarrow \varphi^{-1}(B) = \langle x, 1 \rangle$, což je pro libovolné $x \in \langle 0, 1 \rangle$ uzavřená množina v $\langle 0, 1 \rangle$,

2) B je libovolná uzavřená taková, že $\langle 0, 1 \rangle \supset B \neq \langle x, 1 \rangle \Rightarrow \varphi^{-1}(B) = \{\emptyset\}$, což je pro libovolné $x \in \langle 0, 1 \rangle$ uzavřená množina v $\langle 0, 1 \rangle$,

3) B je libovolná otevřená taková, že $B = (x, 1 \rangle \Rightarrow \varphi^{-1}(B) = (x, 1 \rangle$, což je pro libovolné $x \in \langle 0, 1 \rangle$ otevřená množina množina v $\langle 0, 1 \rangle$,

4) B je libovolná otevřená taková, že $\langle 0, 1 \rangle \supset B \neq (x, 1 \rangle \Rightarrow \varphi^{-1}(B) = \{\emptyset\}$, což je pro libovolné $x \in \langle 0, 1 \rangle$ otevřená množina v $\langle 0, 1 \rangle$.

Poznámka 1.6. Rovněž funkce uvedená na obrázku 1 je příkladem spojité funkce.



Obrázek 6: Příklad 1.5 funkce spojité

1.2.2 Hausdorffova metrika

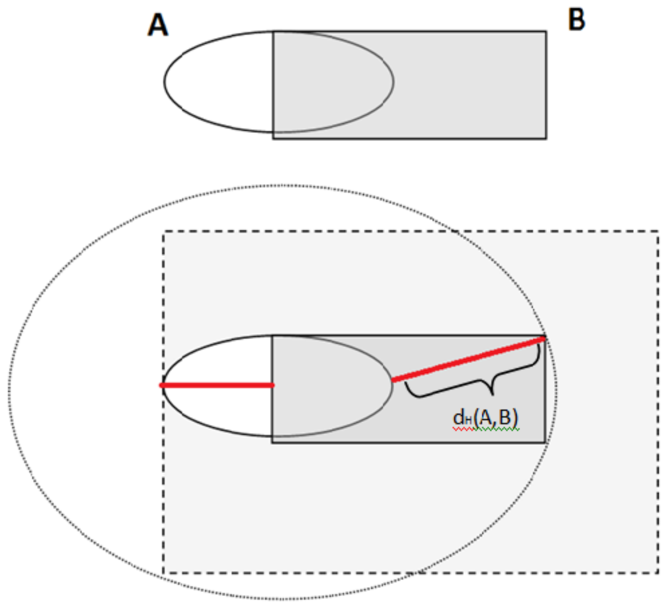
Definice 1.8. Nechť $X = (X, d)$ je metrický prostor s metrikou d a $A \subset X$ je podmnožina X. Pak *ε-okolím* množiny A je množina $A_\varepsilon \subset X$ definovaná následovně

$$A_\varepsilon := \{x \in X : \exists y \in A \quad d(x, y) < \varepsilon\}. \tag{14}$$

Definice 1.9. *Hausdorffova vzdálenost* $d_H(A, B)$ dvou množin A, $B \subset X$ je definovaná následovně:

$$d_H(A, B) = max\{inf\{\varepsilon | B \subset A_\varepsilon\}, \quad inf\{\varepsilon | A \subset B_\varepsilon\}\}.$$

Jak se Hausdorffova vzdálenost odhalí, můžeme vidět na následujících obrázcích 7, 8. U každé z množiny zvětšujeme její okolí tak dlouho, dokud toto okolí nepohltí celou druhou množinu. Najdeme nejkratší vzdálenost jedné množiny od zvětšeného okolí druhé množiny a druhé množiny od zvětšeného okolí první množiny. Tyto dvě nejkratší vzdálenosti porovnáme a vybereme tu nejdelší. Takto vybraná nejdelší vzdálenost představuje Hausdorffovu vzdálenost.



Obrázek 7: Nalezení Hausdorffovské vzdálenosti

V případě zobrazení s kompaktními hodnotami můžeme ekvivalentně definovat spojitost mnohoznačného zobrazení pomocí Hausdorffovy metriky.

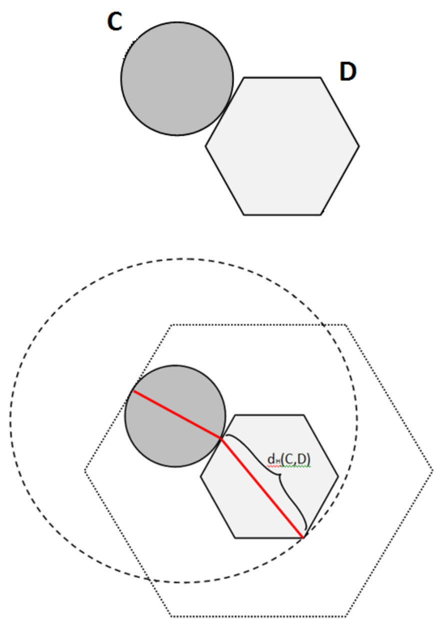
Definice 1.10. Zobrazení $\varphi : X \multimap X$ s kompaktními hodnotami je *hausdorffovsky spojité*, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow d_H(\varphi(x), \varphi(y)) < \varepsilon$, kde x, y jsou body z množiny X a $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ jsou kompaktní obrazy bodů x, y.

Spojitost pomocí Hausdorffovy metriky popisuje věta:

Věta 1.5. *Mnohoznačné zobrazení $F : X \multimap X$ s kompaktními hodnotami je hausdorffovsky spojité, právě tehdy když je zároveň u.s.c. i l.s.c.*

Důkazy vět 1.5 nalezneme v literatuře [1] (na straně 56).

Příklad 1.6. Nechť $X = Y = \langle 0, 1\rangle$, $F : \langle 0, 1\rangle \multimap \langle 0, 1\rangle$ zobrazení definované



Obrázek 8: Nalezení Hausdorffovské vzdálenosti

následovně (viz obrázek 9):

$$F(x) = \begin{cases} \langle 0,1\rangle, \; pro \; x \in (0,1\rangle, \\ \{0\}, \quad pro \; x = 0. \end{cases} \tag{15}$$

pak F je l.s.c. s kompaktními hodnotami, ale

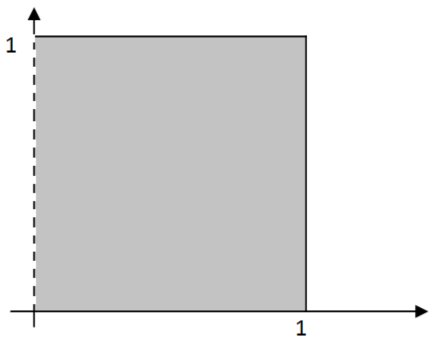
$$d_H(F(0), F(x)) = 1, \quad \text{pro všechny} \quad x \in (0,1\rangle.$$

Z toho plyne, že F hausdorffovsky spojité není a vzhledem k větě 1.5, není ani polospojité shora. Rovněž obráceně: jelikož graf F evidentně není uzavřený, nemůže být F podle věty 1.2 polospojité shora, a tudíž vzhledem k větě 1.5 ani hausdorffovsky spojité.

Platí také následující tvrzení:

Věta 1.6. *Jestliže $F : X \multimap X$ je hausdorffovsky spojité s omezenou a uzavřenou množinou hodnot, pak F je l.s.c.*

Důkazy věty 1.6 nalezneme v literatuře [1] (na straně 58).



Obrázek 9: Zobrazení F(x) z příkladu 1.6

Poznámka 1.7. Z věty 1.6 je zřejmé, že pokud hausdorffovsky spojité zobrazení F nemá kompaktní hodnoty, pak nemusí být vzhledem k větě 1.5 polospojité shora a tudíž vzhledem k definici 1.7 není ani spojitá.

2 Užití mnohoznačných funkcí v ekonomii

Nejprve je potřeba objasnit problematiku teorie her:

2.1 Úvod do teorie her

Definice a tvrzení v této podkapitole jsou čerpány převážně z literatury [6].

2.1.1 Vývoj teorie her

Počátky teorie her spadají až do 17. století a jsou spojeny se vznikem *teorie pravděpodobnosti* a *analytických metod řešení extremálních úloh*. První problémy, které teorie her řešila, se týkaly jen číselného popisu různých zábavných salónních a hazardních her, jako například šachy, karty, hry s kostkou a podobně. Cílem bylo matematicky vyřešit problém nalezení z množiny přípustných variant rozhodování hráčů právě tu variantu, která by maximalizovala hráčovu výhru. [17, 6]

Až postupem času se teorie her začala aplikovat na ekonomickou problematiku. Tak je tomu například v publikaci Leona Walrase [11], která je zaměřena na hledání rovnovážného stavu a rovnovážného řešení. Obohacením vědy bylo i vymezení pojmů z oblasti *paretovské optimality* Vilfredem Paretem [8] a z oblasti *teorie konfliktu s jedním dominantním hráčem* od H. von Strackelberga. [10]

Nejvýznamnější mezník nastal až v roce 1944, který veřejnost začala považovat za rok položení základů matematické teorie her. V tomto roce vydávají J. von Neumann a O. Morgenstern knihu s názvem "*Theory of Games and Economic Behavior*" zavádějící *teorii maticových her* a obsahující náznak *teorie užitku*. Tito autoři také navrhli koncepci teoretického řešení *koaličních her*, avšak pouze se dvěma hráči [7]. Kolem roku 1945 měla teorie her velkou naději prosadit se v aplikacích v ekonomii, především ve vojenských strategiích a taktikách. Teorie von Neumanna byla však omezená pouze na dva hráče. Bylo ji třeba rozšířit. S tím přišel J. F. Nash, který hru zobecnil na hru s N hráči a zároveň zavedl obecný pojem rovnováhy, který dokazuje, že každá konečná hra musí mít aspoň jednu rovnováhu. [17, 5]

V současnosti je teorie her disciplínou aplikované matematiky analyzující široké spektrum konfliktních rozhodovacích situací. Řeší konflikty mezi obchodními společnostmi, vojenskými jednotkami, ale například také mezi věřiteli, jejichž dlužník skončil bankrotem a zbylá částka nepokrývá všechny dluhy, řeší spolupráci lidí s různými preferencemi atd. Rozhodovací situace mohou nastat kdekoliv, kde dochází ke střetu zájmů. Teorie her proto nachází své uplatnění v mnoha oblastech lidské činnosti. [13, 6]

2.1.2 Rozhodovací situace a hra

Cílem teorie her je popis rozhodovacích situací, pochopení chování jednotlivých účastníků a poskytnutí návodu, jakou strategii mají jednotliví účastníci zvolit. Na začátek je třeba objasnit několik pojmů [6].

Rozhodovací situace je situace, kdy si účastník musí vybrat jednu ze dvou nebo více možností, které patří do jemu známé množiny. Přičemž vybrané rozhodnutí jednoho hráče má určitý důsledek pro všechny zúčastněné hráče. Budeme uvažovat *konfliktní* rozhodovací situace, které se dělí na:

- *antagonistické* - jedná se o konflikt mezi dvěma účastníky s naprosto protichůdnými zájmy. Spolupráce zde proto nemá žádný význam a nedochází tak k ovlivňování sebe navzájem. Klasickým případem jsou vojenská střetnutí nebo hra "Kámen-nůžky-papír".

- *neantagonistické* - každý z účastníků si hájí své zájmy, které však nemusejí být v přímém rozporu se zájmy druhého účastníka. Existují zde dvojice rozhodnutí výhodné současně pro oba účastníky. Tomuto stavu se říká rovnovážný bod (viz níže) a záleží na každém účastníkovi, zda jej bude volit, nebo se odkloní. Přičemž odklonem si většinou sice pohorší, ale může poškodit zároveň i ostatní. Příkladem je např. Lov jelena (viz. kapitola 2.2.4). Tyto konflikty mají v praxi mnohem větší využití než antagonistické.

U konfliktních neantagonistických situací mohou nastat dva případy. Toto dělení platí i pro hry s více než dvěma hráči.

- *kooperativní případ* - před volbou rozhodnutí je možnost uzavírat s některým jiným účastníkem, či účastníky, smlouvy o tom, jakou volbu zvolí. Tito účastníci mezi sebou utváří tzv. *koalice.* Díky spolupráci mohou účastníci získat možnosti, které by pro ně samotné nebyli dostupné. Příkladem může být vytváření vládních koalicí.

- *nekooperativní případ* - smlouvy není možné uzavírat. Vyskytuje se v situacích, kdy jsou například dohody protizákonné. Takovým příkladem můžou být kartelové dohody o cenách výrobků. Nekooperativní případ je i tvz. *abstraktní ekonomika*, popsána ve třetí kapitole.

Rozhodovací situace se dá popsat matematickým modelem pomocí tzv. *hry v normálním tvaru.*

Definice 2.1. Nechť je dána konečná neprázdná množina Q o N prvcích, tedy

$$Q = \{1, 2, \ldots, N\}, \tag{16}$$

jejiž prvky nazveme *hráči.* Dále nechť je dáno N množin $X_1, \ldots, X_N$ a N funkcí $U_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, U_N(x_1, \ldots, x_N)$ definovaných na kartézském součinu $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$. *Hru o N hráčích v normálním tvaru* nazveme množinu

$$\mathcal{H} = \{Q; X_1, \ldots, X_N; U_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, U_N(x_1, \ldots, x_N)\}, \tag{17}$$

kde

- Q je *množina hráčů,*

- X_i je *množina strategií* i-tého hráče,

- prvky x_i množiny X_i nazveme *strategiemi* i-tého hráče,

- funkci $U_i(x_1, \ldots, x_N)$ nazveme *výplatní funkcí* i-tého hráče. Představuje to, co dostane i-tý hráč, pokud 1. hráč hraje se strategií x_1, …, N-tý hraje se strategií x_N,

- X je množina všech strategií všech hráčů (=strategický prostor),

- $x = (x_1, \dots, x_N)$ je vektor strategií jednotlivých hráčů.

Takto definovanou hru chápeme jako matematický model rozhodovací situace: každý hráč musí zvolit nějaký prvek x_i ze svého prostoru strategií X_i. Poté hráči zveřejní své volby a hráč i dostane vyplacenou částku $U_i(x_i, \dots, x_N)$, kde za $x_i, \dots, x_N$ jsou dosazeny zvolené strategie jednotlivých hráčů. [6]

Příklad 2.1. Typicky příkladem hry N hráčů v normálním tvaru je známá hra "Kámen-nůžky-papír". Budeme uvažovat hru, kde výhrou je 1Kč, v případě prohry hráč o 1Kč přijde a v případě remízy (hráči zvolí stejné strategie) bude přínos ze hry pro každého nulový.

- $N = 2$, jedná se o hru o dvou hráčích,

- $X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ je množina strategií 1. hráče,

  $x_1 =$ dám kámen (K)

  $x_2 =$ dám nůžky (N)

  $x_3 =$ dám papír (P)

- $Y_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$ je množina strategií 2. hráče,

  $y_1 =$ dám kámen (K)

  $y_2 =$ dám nůžky (N)

  $y_3 =$ dám papír (P)

- $X = \{(K, K), (K, P), (K, N), (N, N), (N, K), (N, P), (P, P), (P, K), (P, N)\}$ je strategický prostor,

- výplatní funkce 1. a 2. hráče vypadají následovně:

2. hráč

1. hráč	U_1	K	N	P
	K	0	1	-1
	N	-1	0	1
	P	1	-1	0

2. hráč

1. hráč	U_2	K	N	P
	K	0	-1	1
	N	1	0	-1
	P	-1	1	0

Jak můžeme vidět v následující tabulce, je třeba rozlišovat dvojí terminologii podle oblasti použití. [6]

Značení	Matematické modely	Reálné rozhodovací situace
$\mathcal{H}$	hra v normálním tvaru	rozhodovací situace
$i \in Q$	hráč	účastník
$x_i \in X_i$	strategie i-tého hráče	rozhodnutí i-tého účastníka
X_i	množina strategií i-tého hráče	množina rozhodnutí i-tého účastníka
$U_i(x_i, \ldots, x_N)$	výhra i-tého hráče	důsledek i-tého účastníka
U_i	výplatní funkce i-tého hráče	užitek i-tého účastníka
	hra s konstantním součtem	antagonistický konflikt
	hra s nekonstantním součtem	neantagonistický konflikt

Co se týče hráčů, většina matematických modelů z oblasti teorie her předpokládá *racionalitu účastníků*. Tedy, že se bude každý hráč chovat tak, aby maximalizoval svůj zisk.

2.1.3 Antagonistický konflikt

Na antagonistický konflikt je hra dvou hráčů *s konstantním součtem*. Tedy taková, ve které platí, že pro každou volbu strategií je součet výplatních funkcí (výher) všech hráčů konstantní. Matematický model této hry vypadá následovně:

$$\mathcal{H} = \{Q = \{1, 2\}; X, Y; U_1(x, y), U_2(x, y)\}, \quad \text{kde} \quad U_1(x, y) + U_2(x, y) = K, \tag{18}$$

kde $K \neq 0$ je konstanta.

Speciálním případem hry s konstantním součtem je *hra s nulovým součtem*, kde výhra jednoho hráče představuje prohru u druhého. Neboli, algebraický součet výher všech hráčů je roven nule pro $\forall x \in X$ (tedy $K = 0$). Tomu je tak například i u hry "Kámen-nůžky-papír". Matematický model hry s nulovým součtem je:

$$\mathcal{H} = \{Q = \{1,2\}; X, Y; U(x,y)\} \tag{19}$$

Používáme výplatní funkci pouze jednoho hráče, protože pro hru s nulovým součtem platí:

$$U_1(x,y) + U_2(x,y) = 0$$

$$U_1(x,y) = -U_2(x,y)$$

Výplatní funkce hráčů můžeme značit:

$$U_1(x,y) = U(x,y)$$

$$U_2(x,y) = -U(x,y)$$

Klíčovým pojmem teorie her je tzv. *Nashova rovnováha* (označována také jako *rovnovážný bod*):

Definice 2.2. Nechť máme hru s konstantním součtem

$$\mathcal{H} = \{Q = \{1,2\}; X, Y; U_1(x,y), U_2(x,y)\} \quad \text{kde} \quad U_1(x,y) + U_2(x,y) = K. \tag{20}$$

Pak dvojici strategií $(\overline{x}, \overline{y})$ nazveme *Nashovou rovnováhou*, jestliže platí

$$U_1(x,\overline{y}) \leq U_1(\overline{x},\overline{y}) \wedge U_2(\overline{x},y) \leq U_2(\overline{x},\overline{y}), \tag{21}$$

pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$. $\overline{x} \in X$ je *rovnovážná strategie 1. hráče* a $\overline{y} \in Y$ *rovnovážná strategie 2. hráče*

Nashova rovnováha je ve hře s konstantním součtem taková strategie, kde odchýlení od této strategie jedním hráčem nepřinese tomuto hráči žádný přínos, přičemž strategie ostatních hráčů jsou neměnné. (Tomuto pojmu bude později věnována celá kapitola.)

Hru s nulovým součtem, jejíž výplatní funkce je $U(i,j) = a_{ij}$ (kde $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$), můžeme reprezentovat pomocí matice A

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

kde opět platí

$$U_1(i,j) = a_{ij}$$
$$U_2(i,j) = -a_{ij}.$$

Při hledání Nashovy rovnováhy maticových her antagonistického konfliktu, hledáme prvek $a_{\overline{ij}}$, který je největším prvkem ve sloupci $\overline{j}$ a současně je nejmenším v řádku $\overline{i}$. Pro tento prvek platí:

$$U(x,\overline{y}) \leq U(\overline{x},\overline{y}) \wedge -U(\overline{x},\overline{y}) \geq -U(\overline{x},y)$$

a protože platí

$$-U(\overline{x},\overline{y}) \geq -U(\overline{x},y) \Leftrightarrow U(\overline{x},\overline{y}) \leq U(\overline{x},y),$$

pak získáme tzv. sedlový bod

$$U(x,\overline{y}) \leq U(\overline{x},\overline{y}) \leq U(\overline{x},y).$$

Příklad 2.2. V následující maticové hře

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

bude podle výše uvedené vlastnosti rovnovážný bod dán strategiemi na pozici(2,2).

Hra reprezentovaná maticí A má Neshovu rovnováhu v tzv. ryzích strategiích, jestliže má matice A sedlový bod. Jestliže matice sedlový bod nemá, musí se provést tzv. smíšené rozšíření maticové hry.

Příklad 2.3. U hry "Kámen-nůžky-papír" matice vypadá:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a protože zde sedlový bod nenalezneme, nemá tato hra v ryzích strategiích Nashovu rovnováhu.

Definice 2.3. Nechť máme dánu maticovou hru. Pak hra dvou hráčů s nulovým součtem, jejíž prostory strategií jsou

$$(X) = \{x : x = \sum_{i=1}^{m} p_i^X x_i \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i^X = 1, p_i^X \geq 0, x_i \in X\},$$

$$(Y) = \{y : y = \sum_{j=1}^{n} p_j^Y y_j \quad \text{kde} \quad \sum_{j=1}^{n} p_j^Y = 1, p_j^Y \geq 0, y_i \in Y\},$$

s výplatní funkcí

$$U(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_i^X a_{ij} p_j^Y = p^{X^T} \mathbf{A} p^Y. \tag{23}$$

nazveme *smíšeným rozšířením* maticové hry.

Jestliže jsou strategie z prostorů X a Y, nazýváme je *ryzími strategiemi*, zatímco prvky z prostorů (X) a (Y) jsou *smíšené strategie.* [6] Smíšené rozšíření tedy umožňuje hráči volit jednu z ryzích strategií s nějakou pravděpodobností (p_i^X resp. p_j^Y).

Příklad 2.4. Protože hra "Kámen-nůžky-papír" nemá rovnovážný bod při ryzích strategiích, musíme provést smíšené rozšíření maticové hry.

Nejprve budeme předpokládat, že první hráč volí strategie K, N, P s pravděpodobnostmi

$$p_K^1 = \frac{9}{10}, \quad p_N^1 = \frac{1}{10}, \quad p_P^1 = 0$$

a druhý hráč s pravděpodobnostmi

$$p_K^2 = 0, \quad p_N^2 = \frac{1}{10}, \quad p_P^2 \frac{9}{10}.$$

Pak nám výplatní funkce

$$U(x,y) = p^{X^T} \mathbf{A} p^Y = \left(\tfrac{9}{10}, \tfrac{1}{10}, 0 \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix} = -0,63 \qquad (24)$$

udává střední hodnotu výhry (v tomto případě prohry) prvního hráče. Tedy, že při daných smíšených strategiích první hráč prohraje průměrně na jednu hru 0,63 koruny. Zde se nejedná o Nashovu rovnováhu, protože kdyby se hráči odklonili od těchto smíšených strategií, mohli by si hráči polepšit. Druhý hráč by si například polepšil, pokud by při dané smíšené strategii prvního hráče začal hrát jen papír. Pak by střední výhra prvního hráče byla $U(x,y) = -0,8$ (a očekávaná výhra druhého hráče by v každé hře byla 0,8 koruny).

Pokud by oba hráči hráli následující smíšené strategie

$$p_K^1 = \frac{1}{3}, \quad p_N^1 = \frac{1}{3}, \quad p_P^1 = \frac{1}{3}$$

a

$$p_K^2 = \frac{1}{3}, \quad p_N^2 = \frac{1}{3}, \quad p_P^2 = \frac{1}{3},$$

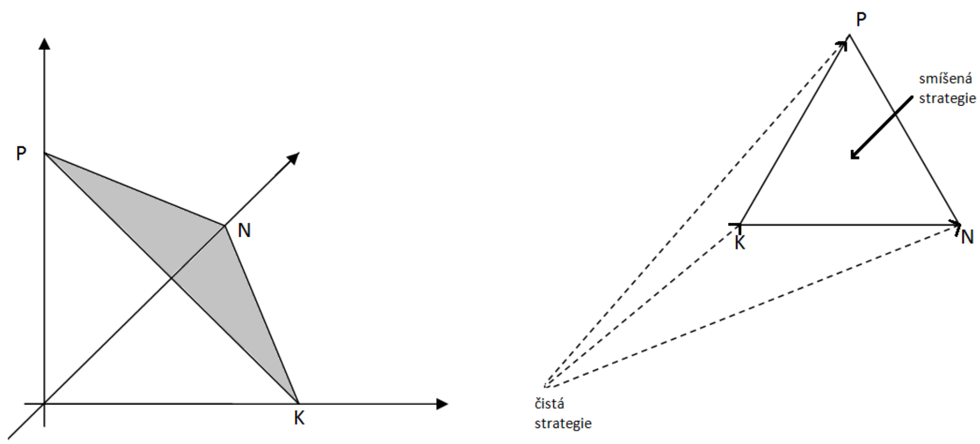
zaručuje jejich volba, že protihráči k větší výhře nepomůže žádná strategie. Výplatní funkce prvního hráče bude $U(x,y) = 0$. Platí, že očekávaná výhra prvního hráče (a současně i druhého) bude rovna nule, ať tento hráč zvolí jakoukoliv smíšenou strategii. V tomto případě se tedy jedná o Nashovu rovnováhu. Můžeme to dokázat sporem. Jestliže smíšené strategie $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ u obou hráčů nejsou Nashovou rovnováhou, vychýlení od těchto strategií povede k zisku.

Tedy existuje x, y :

$$\left[\tfrac{1}{3} + x, \tfrac{1}{3} + y, \tfrac{1}{3} - (x+y) \right] \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} > 0$$

což ale evidentně není pravda.

Strategie jednotlivých hráčů si můžeme zakreslit do simplexu, který je uveden na obrázku 10. Vrcholy představují ryzí strategie, smíšené strategie leží na hranách a uvnitř trojúhelníku.



Obrázek 10: Simplex strategií jednotlivých hráčů

2.1.4 Nentagonistický konflikt

Mnohem častěji než s antagonistickými konflikty, v nichž zájmy obou účastníků jsou protichůdné, se setkáváme s konflikty, v nichž každý ze dvou inteligentních účastníků zastává své vlastní zájmy, které ale nemusí být přímo protichůdné se zájmy druhého účastníka. [6] Matematickým modelem této hry je *hra dvou hráčů s nekonstantním součtem*

$$\mathcal{H} = \{Q = \{1,2\}; X, Y; U_1(x,y), U_2(x,y)\} \quad \text{kde} \quad U_1(x,y) + U_2(x,y) \neq K. \tag{25}$$

I tuto hru můžeme zapsat do matice. Předpokladem je, že množina strategií každého hráče je konečná, tzn. $X = \{1, \ldots, m\}$ a $Y = \{1, \ldots, n\}$. Výplatní funkce jednotlivých hráčů zapsané maticově vypadají:

$$U_1(m,n) = a_{mn} \quad \text{a} \quad U_2(m,n) = b_{mn},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Hru pak můžeme zapsat pomocí tzv. *dvojmatice*:

$$(A,B) = \begin{pmatrix} (a_{11},b_{11}) & (a_{12},b_{12}) & \dots & (a_{1n},b_{1n}) \\ (a_{21},b_{21}) & (a_{22},b_{22}) & \dots & (a_{2n},b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1},b_{m1}) & (a_{m2},b_{m2}) & \dots & (a_{mn},b_{mn}) \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Je třeba rozlišovat kooperativní hry a nekooperativní. Protože v diplomové práci uvažujeme jen nekooperativní hry, uvedeme definice pouze pro tento typ her.

V případě neantagonistického konfliktu může mít hra více Nashových rovnováh.

Definice 2.4. Mějme dánu hru dvou hráčů s nekonstantním součtem

$$\mathcal{H} = \{Q = \{1,2\}; X, Y; U_1(x,y), U_2(x,y)\} \quad \text{kde} \quad U_1(x,y) + U_2(x,y) \neq K. \tag{28}$$

pak dvojici strategií $\overline{x}, \overline{y}$ nazveme *Nashovou rovnováhou*, jestliže platí současně:

$$U_1(x,\overline{y}) \leq U_1(\overline{x},\overline{y})$$

$$U_2(\overline{x},y) \leq U_2(\overline{x},\overline{y}),$$

pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$. $\overline{x}$ je *rovnovážná strategie 1. hráče* a $\overline{y}$ *rovnovážná strategie 2. hráče.*

Což značí, že v případě, že se i-tý hráč rozhodně pro jednostrannou změnou své strategie, nijak si tím nepomůže. Vidíme, že Nashova rovnováha je pro hru s konstantním i nekonstantním součtem definovaná totožně.

Ve hře zapsané do dvojmatice hledáme Nashovu rovnováhu (rovnovážný bod) $(\overline{a}, \overline{b})$ tak, že za číslo $\overline{a}$ bude vybráno největší číslo ve sloupci pro 1. hráče a za číslo $\overline{b}$ největší v řádku pro 2. hráče.

Příklad 2.5. V uvedené dvojmaticové hře

$$\begin{pmatrix} (3,3) & (-4,2) \\ (2,-4) & (8,8) \end{pmatrix}$$

existuje více sedlových bodů, jsou to body strategií na pozicích (1, 1) a (2, 2). Znamená to tedy, že má hra dvě Nashovy rovnováhy.

2.2 Nashova rovnováha

Tato podkapitola je čerpána převážně z literatury [6] a [15].

2.2.1 Definice

Všimli jsem si, že Nashova rovnováha se pro hru s konstantním součtem i nekonstantním součtem definuje stejně. Můžeme proto definici zobecnit pro hru s N hráči následovně:

Definice 2.5. Nechť je dána hra s N hráči v normálním tvaru. N-tici strategií $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_N)$ nazveme *Nashovou rovnováhou* této hry, jestliže platí

$$U_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1}, x_i, \overline{x}_{i+1}, \ldots, \overline{x}_N) \leq U_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_N), \quad i = 1, \ldots, N, \quad \forall x_i \in X_i. \tag{29}$$

Jinak řečeno strategie $\overline{x}_i$ je bodem maxima

$$U_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1}, x_i, \overline{x}_{i+1}, \ldots, \overline{x}_N), \tag{30}$$

pro všechny $x_i \in X_i$ a složka $\overline{x}_i$ se nazývá *rovnovážná strategie* i-tého hráče.

Jestliže je nerovnost v definici ostrá (tzn. místo $\leq$ platí $<$ pro všechny hráče) je pak rovnováha označována *ostrou Nashovou rovnováhou.*

Strategie může být buď ryzí nebo smíšená a od toho se odvíjí i ryzí a smíšená Nashova rovnováha.

2.2.2 Význam

Jestliže si každý hráč zvolí určitou strategii a změna by danému hráči nepřinesla žádný prospěch, přičemž ostatní hráči svou strategii nemění, pak daný nastavený soubor strategií tvoří *Nashovu rovnováhu.* V Nashově rovnováze nemá nikdo důvod svou strategii měnit.

Jinými slovy, je to taková kombinace strategií všech hráčů, kdy zvolená strategie každého hráče, s ohledem na zvolené strategie ostatních hráčů, je ze všech možných ta nejlepší. Takto zvolená strategie se nazývá “nejlepší odpověď” a představuje pro hráče nejpříznivější výsledek v závislosti na strategiích ostatních hráčů.

Nashova rovnováha však nemusí nutně znamenat pro všechny hráče dohromady nejlepší výsledek, přestože je v jistém slova smyslu optimální. Ve většině případů by dokonce hráči mohli svou výplatní funkci vylepšit, pokud by se na strategiích mohli dohodnout. Dosažení *Nashovy rovnováhy* tak nutně neznamená pro všechny strany zisk. To lze pozorovat například v tzv. Vězňově dilematu [15] (viz kapitola 2.2.4).

Nashova rovnováha se využívá k předvídání rozhodnutí jednotlivých subjektů, kteří se rozhodují současně a jejich rozhodnutí závisejí na rozhodnutích ostatních. Pokud budeme nahlížet na jednotlivá rozhodnutí odděleně, nebo budeme ignorovat možné myšlenkové postupy druhého, výsledek hry nebudeme schopni předpovědět a nedosáhneme *Nashovy rovnováhy*. Proto musí být každé hráčovo rozhodnutí uvažováno v souvislosti se všemi možnými rozhodnutími ostatních hráčů.

2.2.3 Nalezení

Při nalezení musíme rozlišovat, zda máme hru s konstantím součtem (antagonistický případ), nebo s nekonstantním součtem (neantagonistický případ). Jak se rovnováha nalezne, jsem si popsali výše u každé hry zvlášť.

2.2.4 Příklady

Nashova rovnováha nám poskytuje způsob, jak předvídat co se stane, jestliže několik lidí, či společností, provede ve stejný čas nějaké rozhodnutí a jestliže je výsledek závislý na rozhodnutí ostatních. Je využívána v různých situacích jako je válka, či vojenské zbrojení. Tato rovnováha vysvětluje např. i vězňovo dilema. Dále se využívá při studiu, do jaké míry spolu mohou spolupracovat lidé s odlišnými preferencemi (např. bitva dvou pohlaví), zda se lidé odhodlají riskovat, aby dosáhli výsledku pomocí spolupráce (např. lov jelena). Další aplikace simulují dopravní zácpy, organizování aukcí, ale také například trestné kopy ve fotbale. [15]

Nyní si ukážeme, jak se Nashova rovnováha nalezne u následujících příkladů.

Lov jelena

Lov jelena je klasickou ukázkou kooperativní hry se dvěma hráči a dvěma strategiemi. Jestliže budou hráči spolupracovat, přijmou strategii, která bude pro oba nejvýhodnější. U *lovu jelena* představují strategie "lov jelena" nebo "lov zajíce". Přičemž, jestliže uloví jelena, získají mnohem více masa (4 jednotky užitku), než když uloví zajíce (1 jednotka užitku). Podmínkou je však spolupráce. Proto, jestliže se rozhodne pro lov jelena jen jeden, zatímco druhý bude lovit zajíce, první hráč neuloví nic. Získá tak 0 jednotek užitku, kdežto lovec zajíce jen 1 jednotku. Kdyby se ale rozhodli oba hráči spolupracovat, mohli by si rozdělit úlovek v poměru 2 a 2 jednotek užitku.

Ve hře existují dvě Nashovy rovnováhy, strategie jelen-jelen (pokud se oba rozhodnou lovit jelena společně), nebo zajíc-zajíc (jestliže lov jelena zamítnou oba a uloví si jen zajíce).

(1. lovec, 2. lovec)	jelen	zajíc
jelen	(2, 2)	(0, 1)
zajíc	(1, 0)	(1, 1)

Obrázek 11: Lov jelena

Vězňovo dilema

Dalším příkladem pro hledání Nashovy rovnováhy je *vězňovo dilema*, které představuje nekooperativní hru se dvěma hráči a dvěma různými strategiemi. Hry se účastní dva obžalovaní, kteří jsou obvinění z menšího a většího zločinu. Můžeme uvažovat příklad, kdy obžalovaní ukradli obraz, který byl ale pocákaný krví. Krádež obrazu je u obou obviněných zřetelná, zároveň jsou ale podezřelí i z vraždy. Obvinění jsou vyslýchání v oddělených místnostech. Pokud se navzájem nezradí, nemůže jim být vina vraždy prokázána. Tudíž dostanou oba trest pouze za krádež obrazu, a to dva roky. Jestliže ale zradí jen jeden druhého, bude mu za spolupráci v průběhu vyšetřování zmírněn trest na 1 rok, ale druhému za usvědčení z vraždy bude trest zvýšen na 10 let. Pokud se udají oba dva navzájem, dostane každý 7 let.

Ve dvojmatici můžeme u strategie (zradí, zradí) pozorovat maximum v řádku u jednoho obviněného i maximum ve sloupci u druhého obviněného. *Vězňovo dilema* má proto pouze jednu Nashovu rovnováhu: jestliže oba zradí. Zajímavé na tomto případu je, že stav nespolupráce není rozumný z pohledu maximalizace užitku obou hráčů dohromady. Při strategii (nezradí, nezradí) by za mřížemi byli dohromady pouze 4 roky, zatímco při rovnováze (zradí, zradí) 14 let.

(1. obviněný, 2. obviněný)	nezradí	zradí
nezradí	(-2, -2)	(-10, -1)
zradí	(-1, -10)	(-7, -7)

Obrázek 12: Vězňovo dilema

2.2.5 Historie

Koncept řešení Nashovy rovnováhy byl vysloven již mnohem dříve než se vůbec J. F. Nash narodil. První aplikaci “Nashovy rovnováhy” v matematickém modelu použil Antoine Augustin Cournot ve své teorii oligopolu [9]. Uvažoval n výrobců jednoho produktu, z nichž každý přispívá nezanedbatelnou částí k celkovému množství daného produktu na trhu. Cílem každého výrobce je maximalizovat svůj zisk, musí ale přihlédnout k množství nabízených výrobků ostatními výrobci. Na tuto situaci pohlížel Cournot jako na hru s n hráči, z nichž každý hledá optimální množství daného produktu, které má vyrábět. Výsledkem je rovnovážný bod, ve kterém firma správně odhadne výstupy ostatních výrobců, čímž bude na trhu nabízeno přesně celkové poptávané množství daného produktu. Jedná se tedy o strategii Nashovy rovnováhy.

Protože teorie oligopolu popsané A. A. Cournotem pochází již z roku 1838, mohla by se naskytnout otázka, zda "Nashově rovnováze" patří přívlastek právě "Nashova". Cournot metodiku ovšem pouze aplikoval, zatímco až s příchodem Nashe byla zavedena obecná formulace problému analýzy rovnováhy, rovnováha dokázána a položen základ pro řešení konceptu nekooperativní teorie her. [16]

Definice Nashovy rovnováhy v dnešním slova smyslu plyne spíše z pojmu "smíšených strategií", který byl představem J. von Neumannem a O. Morgensternem v knize "The Theory of Games and Economic Behavior" [7]. Tito matematici také přišli se zásadním zjištěním, že si racionální hráč musí zvolit svou strategii ještě před začátkem hry, přičemž zvolená strategie předpovídá informace o všech možných situacích, ve kterých by se v průběhu hry hráč mohl díky strategiím ostatních hráčů ocitnout. Toto zjištění vede k závěru, že každý hráč musí zvolit svou strategii, aniž by byl informován o volbě strategie druhého hráče. Hráči tudíž dělají svá strategická rozhodnutí nezávisle. Nicméně Neumannova a Morgensternova analýza byla omezená na speciální případ hry dvou hráčů s nulovým součtem.

Nash v článku z roku 1951 "Non-Cooperative Games" ([19]) přispěl definicí smíšených strategií pro hry s konečným počtem hráčů. Tímto zavedl obecný pojem rovnováhy a dokázal, že každá taková hra musí mít alespoň jednu rovnováhu (viz dále).

Později došlo k rozšíření konceptu Nashovy rovnováhy například i na opakované hry či na hry s absencí informace o hráčově preferenci. [15]

2.3 Základní věta teorie maticových her

Jak jsme si všimli, Nashova rovnováha nastává jak u antagonistických, tak u neantagonistických konfliktů. Viděli jsem, že pokud rovnováhu nelze nalézt u ryzích strategií, vždy existuje nějaké smíšené rozšíření maticových her, které řešení má. Toto popisuje následující věta:

Věta 2.1 (Základní věta teorie maticových her)**.** *Smíšené rozšíření každé maticové hry má řešení (tzv. Nashovu rovnováhu).*

Pro dokázání existence Nashovy rovnováhy (rovnovážného bodu) se využívá *Kakutaniho věta o pevném bodě*, která není nic jiného než větou dokazující existenci pevných bodů pro mnohoznačnou funkci. Věta byla vyslovena Shizuonem Kakutanim v roce 1941. [3]

Kakutaniho věta o pevném bodě poskytuje postačující podmínky, aby mnohoznačná funkce definovaná na kompaktní a konvexní podmnožině eukleidovského prostoru, měly pevný bod. Definice pevného bodu (1.3) je uvedena v první kapitole.

Věta je zobecněním Brouwerovy věty o pevném bodě, která dokazuje existenci pevného bodu spojitých funkcí.

Věta 2.2 (Brouwerova)**.** *Jestliže $K \subset \mathbb{R}^N$ je konvexní, uzavřená a omezená množina a $f : K \to K$ je spojitá funkce, pak má funkce f pevný bod. Tedy existuje $x \in K$ pro které platí $f(x) = x$.*

Důkaz Brouwerovy věty nalezneme například v [21].

Věta 2.3 (Kakutaniho)**.** *Nechť X je neprázdná, uzavřená, omezená a konvexní podmnožina eukleidovskeho prostoru $\mathbb{R}^N$. Nechť $\varphi : X \multimap X$ je mnohoznačná funkce polospojitá shora s neprázdnými a konvexními hodnotami. Pak má φ pevný bod.*

Poznámka 2.1. *Podle věty 1.2 lze požadavek polospojitosti shora narhadit uzavřeným grafem Γ_φ mnohoznačné funkce.*

Nyní k důkazu Kakutaniho věty, který byl čerpán z literatury [12].

Důkaz: [Kakutaniho]

Uvažujme $\mathcal{O}_\varepsilon$ sjednocení otevřených koulí o poloměru ε se středy ve všech bodech grafu φ. Tedy

$$\mathcal{O}_\varepsilon := \quad \{\cup B_\varepsilon(x,y) : \quad (x,y) \in \Gamma_\varphi\}$$

kde $B_\varepsilon(x,y)$ značí otevřenou kouli o poloměru ε se středem v bodě $(x,y) \in \mathbb{R}^{2N}$. Z technických důvodů uvažujme dále

$$O_\varepsilon := \quad \mathcal{O}_\varepsilon \cap (X \times X).$$

O_ε je grafem mnohoznačné funkce, kterou nazveme ϕ_ε. Protože O_ε je otevřená v $X \times X$, pak můžeme říci, že ϕ_ε má otevřený graf (viz obrázek 13). Dá se snadno ověřit, že když má funkce φ neprázdné a konvexní hodnoty, pak i funkce ϕ_ε má neprázdné a konvexní hodnoty.

Dále můžeme ukázat, že existuje spojitá selekce z ϕ_ε, tedy spojitá jednoznačná funkce $\varphi_\varepsilon : X \to X$ taková že $\Gamma_{\varphi_\varepsilon} \subset \Gamma_{\phi_\varepsilon}$ (viz obrázek 14).

Z Brouwerovy věty o pevném bodě plyne, že má φ_ε pevný bod. Uvažujme posloupnost $\{(x_1,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_3),\ldots\}$, kde x_t je pevný bod φ_ε, kde $\varepsilon = \frac{1}{t}$, $t \in \mathbb{N}$. Protože $X \times X$ je uzavřená a omezená množina v $\mathbb{R}^{2N}$, má tato posloupnost vybranou podposloupnost, která konverguje k $(x^*,x^*) \in X \times X$. Nyní se budeme zabývat pouze touto podposloupností.

Dokážeme, že $(x^*,x^*) \in \Gamma_\varphi$, čímž bude dokázána Kukataniho věta. Provedeme důkaz sporem. Budeme předpokládat, že $(x^*,x^*) \notin \Gamma_\varphi$ a dokážeme, že daný předpoklad je ve sporu s uzavřeností Γ_φ. Volme $\eta > 0$ a uvažujme $t > \frac{2}{\eta}$ dostatečně velké, aby

$$d((x_t,x_t),(x^*,x^*)) < \frac{\eta}{2},$$

což plyne z definice limity. Protože $(x_t,x_t) \in O_{\frac{1}{t}}$, díky konstrukci $O_{\frac{1}{t}}$ můžeme najít $(y_t,z_t) \in \Gamma_\varphi$ takový, že

$$d((y_t,z_t),(x_t,x_t)) < \frac{1}{t} < \frac{\eta}{2}.$$

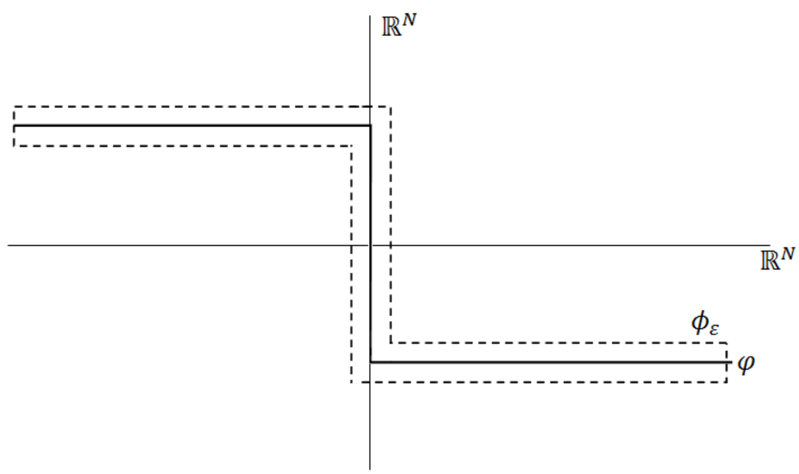
Podle trojúhelníkové nerovnosti platí, že

$$d((y_t, z_t), (x^*, x^*)) \leq d((y_t, z_t), (x_t, x_t)) + d((x_t, x_t), (x^*, x^*)) < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.$$

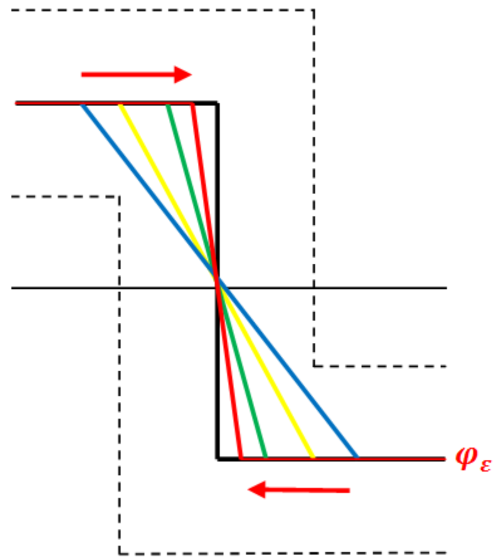
Máme tedy posloupnost bodů z Γ_φ

$$(y_t, z_t) \in \Gamma_\varphi,$$

která konverguje k (x^*, x^*), který neleží v Γ_φ. To je ale spor s uzavřeností Γ_φ. Proto $x^* \in \varphi(x^*)$ a tím je věta dokázána. $\square$



Obrázek 13: Mnohoznačná funkce ϕ_ε přidružená k funkci φ



Obrázek 14: Spojité selekce z ϕ_ε

2.3.1 Důkaz základní věty teorie maticových her

Nyní můžeme přejít k důkazu základní věty teorie maticových her:

Věta 2.4 (Základní věta teorie maticových her)**.** *Smíšené rozšíření každé maticové hry má řešení (tzv. Nashovu rovnováhu).*

Důkaz je čerpán z literatury [4].

Důkaz: [Základní věta teorie maticových her]

Důkaz je proveden aplikací Kakutaniho věty o pevném bodě na mnohoznačné funkce reprezentující "nejlepší odpovědi" jednotlivých hráčů. Nechť φ_i je nejlepší odpověď i-tého hráče na strategie všech ostatních hráčů. Uvažujme $x \in (X)$ nějakou smíšenou strategii všech hráčů z prostoru smíšených strategií. (Tomu odpovídá $x_i \in (X_i)$, což je smíšená strategie každého hráče.) Definujme

$$\varphi_i : (X) \multimap (X_i) \tag{31}$$

je mnohoznačná funkce, která každé smíšené strategii všech hráčů přiřadí množinu všech rovnovážných strategií i-tého hráče, tedy

$$\varphi_i(x) = \operatorname*{argmax}_{y \in (X_i)} U_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_N). \tag{32}$$

Definujme mnohoznačnou funkci

$$\varphi : (X) \multimap (X) \tag{33}$$

předpisem

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \times \varphi_2(x) \times \ldots \times \varphi_N(x).$$

Jestliže $\overline{x} \in \varphi(x)$, neboli $\overline{x}$ je pevným bodem φ, pak je smíšená strategie $\overline{x}$ Nashovou rovnováhou.

Aby měla funkce φ pevný bod, musí být z Kakutaniho věty splněny následující postačující podmínky:

1. Prostor smíšených strategií (X) je uzavřený a omezený (kompaktní), konvexní a neprázdný.

   - Protože prostor smíšených strategií (X) představuje kartézský součin simplexů strategií jednotlivých hráčů, pak je zřejmé, že je neprázdný.
   - Prostor je kompaktní, protože představuje kartézský součin $(X_1) \times \ldots \times (X_N)$ množin, které jsou kompaktní.
   - Prostor je i konvexní, protože (X) je $(X_1) \times \ldots \times (X_N)$ kartézský součin konvexních množin.

2. $\varphi(x)$ má neprázdné hodnoty.

   Podmínka je splněna, jelikož cílem každého hráče je maximalizovat své očekávané přínosy U_i, které představují spojitou funkci v kompaktní množině (X_i). A díky Weierstrassově větě [18], která nám říká, že jestliže je funkce definovaná předpisem 32 na kompaktní množině spojitá, nabývá na něm svého minima a maxima.

3. $\varphi(x)$ je konvexní.

   Podmínka platí, protože i každá z množin $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ je konvexní. To jde vidět takto: jestliže dvě nejlepší strategie maximalizují výplatní funkci U_i, pak konvexní kombinace těchto dvou strategií povede opět ke stejnému, největšímu, zisku.

4. $\varphi(x)$ je polospojitá shora.

   Tato podmínka je splněna díky Bergeově Maximalizační větě [2]. Platí, že pokud je výplatní funkce U_i spojitá, pak je $\varphi(x)$ polospojitá shora.

Proto má φ pevný bod, který představuje Nashovu rovnováhu. □

2.3.2 Ilustrace důkazu ve hře "Kámen, nůžky, papír"

Nyní aplikujeme postup na konkrétní příklad. Dokážeme, že hra "Kámen, nůžky, papír", skutečně má při smíšeném rozšíření maticových her, tedy při smíšených strategiích hráčů, Nashovu rovnováhu.

Aby nastala Nashova rovnováha, musíme ve strategickém prostoru všech smíšených strategií (X) nalézt rovnovážný bod $\overline{x}$. Tento bod představuje kartézský součin rovnovážných strategií obou hráčů:

$$\overline{x} = \overline{x}_1 \times \overline{x}_2.$$

To znamená, že první hráč má na svém prostoru smíšených strategií (X_1), který představuje dvojrozměrný simplex, svůj rovnovážný bod $\overline{x}_1$. A zároveň, i druhý hráč má na svém prostoru smíšených strategií (X_2), tvořící opět dvojrozměrný simplex, svůj rovnovážný bod $\overline{x}_2$.

Postup, jak tento rovnovážný bod nalézt, je následující:

1. Bod $x = (x_1, x_2)$ fixuje strategie obou hráčů.

2. Podíváme se, co při strategii x_2 druhého hráče maximalizuje užitek prvního hráče. Tedy najdu množinu $A_1 \subset (X_1)$ tímto způsobem

$$A_1 := \operatorname*{argmax}_{y \in (X_1)} U_1(y, x_2).$$

3. Podíváme se, co při strategii x_1 prvního hráče maximalizuje užitek prvního hráče. Tedy najdu množinu $A_2 \subset (X_2)$ tímto způsobem

$$A_2 := \operatorname*{argmax}_{y \in (X_2)} U_2(x_1, y).$$

4. Definujme

$$\varphi_1 : (X) \multimap (X_1) \quad \text{tak, že} \quad \varphi_1(x) = A_1$$

a

$$\varphi_2 : (X) \multimap (X_2) \quad \text{tak, že} \quad \varphi_2(x) = A_2$$

5. Pak definujme funkci

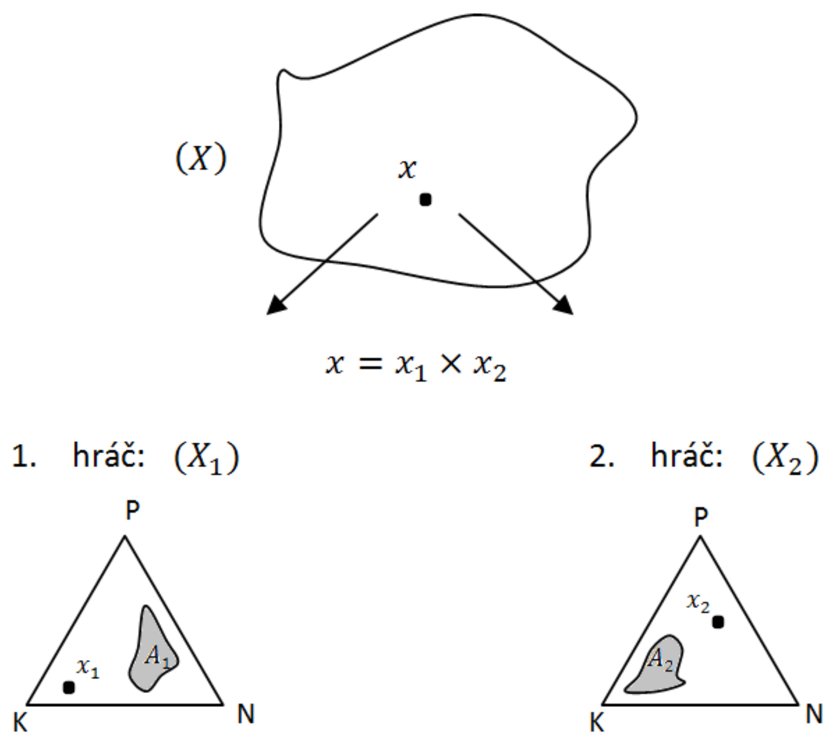
$$\varphi : (X) \multimap (X)$$

tak, že

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \times \varphi_2(x).$$

6. Strategie $\overline{x}$ bude Nashova rovnováha $\Leftrightarrow$ pevným bodem funkce φ, jestliže platí, že

$$\overline{x}_1 \in \varphi_1(\overline{x}) \wedge \overline{x}_2 \in \varphi_2(\overline{x}).$$



Obrázek 15: Strategické prostory jednotlivých hráčů

Protože postačující podmínky Kakutaniho věty jsou splněny pro všechny hry, viz. důkaz 2.3.1, je dokázáno, že rozšíření hry "Kámen, nůžky, papír" bude mít Nashovu rovnováhu.

V příkladu 2.4 jsem selským rozumem odhadli, že pro tuto hru nastane Nashova rovnováha, jestliže oba hráči budou hrát všechny své strategie se stejnými pravděpodobnostmi, tedy $(\frac{1}{3}K + \frac{1}{3}N + \frac{1}{3}P)$. Že se skutečně jedná o Nashovu rovnováhu jsem v daném příkladu i dokázali.

3 Ekonomika jako hra o N hráčích

Jak již bylo řečeno v úvodu diplomové práce, pojem *abstraktní ekonomika* definoval ekonom a matematik Gérard Debrau v roce 1952 ([20]) tak, že zobecnil nekooperativní hru s N-hráči definovanou matematikem Johnem Forbesem Nashem, ve které množina strategií hráče závisí na volbě strategií všech ostatních hráčů. V takto pojaté abstraktní ekonomice s konečnou množinou hráčů, s konečně rozměrným prostorem strategií a spojitou funkcí užitku, dokázal Debreu existenci konkurenční rovnováhy. Cesta, jak ke zobecnění došel, není předmětem práce, nalezneme ji ale v článku [20], který celý problém popisuje.

Později byla Debreuova tvrzení rozšířena i do jiných směrů. Shafer a Sonnenschein (1975) myšlenku abstraktní ekonomiky s konečnou množinou hráčů a konečně rozměrným prostorem strategií rozšířili na tzv. ekonomiku bez uspořádaných preferencí. Pro případ nekonečně rozměrného prostoru strategií s konečně či nekonečně mnoha hráči řešili existenci rovnováhy Yannelis a Prabhakar (1983), Khan a Vohra (1984), Toussaint (1984) a mnoho dalších. [14]

3.1 Matematický model abstraktní ekonomiky

Kapitola vychází z použité literatury [20].

Definice 3.1.

- Nechť $Q = 1, \dots, N$.
- Nechť X_i jsou podmnožiny z $\mathbb{R}^l$ (kde $i = 1, \dots, N$).
- Nechť $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$, tj. X je množina uspořádaných N-tic $x = (x_1, \dots, x_N)$, kde $x_i \in X_i$ pro všechny $i = 1, \dots, N$.
- Nechť $U_i : X \to \mathbb{R}$ pro všechny $i = 1, \dots, N$.
- Nechť $\overline{X}_i = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \dots \times X_N$, tj. množina uspořádaných $(N-1)$-tic $\overline{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N)$, kde $x_{i'} \in X_{i'}$ pro všechny $i' \neq i$.
- Nechť $A_i(\overline{x}_i) : \overline{X}_i \multimap X_i$ je funkce definovaná pro všechny body $\overline{x}_i \in \overline{X}_i$.

Pak množina $\{Q; X_1, \ldots, X_N; U_1, \ldots, U_N; A_1(\overline{x}_1), \ldots, A_N(\overline{x}_N)\}$ je označována jako *abstraktní ekonomika*,

kde:

$Q = \{1, \ldots, N\}$ je množina *účastníků* abstraktní ekonomiky,

X_i představuje *množinu rozhodnutí* i-tého účastníka,

U_i je *výplatní funkce* i-tého účastníka,

A_i je mnohoznačná funkce představující *rozhodnutí i-tého účastníka* v závislosti na rozhodnutí všech ostatních účastníků.

Motivace této definice je následující: Nejprve uvažujme speciální případ, kde funkce $A_i(\overline{x}_i)$ jsou ve skutečnosti konstantní (to znamená, že rozhodnutí i-tého účastníka je vždy stejné, bez ohledu na strategie ostatních účatníků). To znamená že $A_i(\overline{x}_i)$ je pevná podmnožina z X_i. Pro zjednodušení můžeme předpokládat, že $A_i(\overline{x}_i) = X_i$ a můžeme vyslovit následující interpretaci: Nechť existuje N jednotlivců a i-tý jednotlivec si může vybrat rozhodnutí $x_i \in X_i$. Pak každý účastník udělá rozhodnutí nezávislé na ostatních a obdrží množství $U_i(x)$, kde $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Tento speciální příklad je tedy hra definovaná v 2.1.

Ve hře závisí výplatní funkce každého hráče na zvolených strategiích všech ostatních hráčů, ale prostor strategií, ze kterého si i-tý hráč svou strategii vybírá, je nezávislý na zvolených strategiích ostatních hráčů. Abstraktní ekonomika je zobecnění hry, ve které volba jednoho účastníka ovlivňuje jak jeho výplatní funkci, tak oblast voleb ostatních účastníků.

Požadavek pro toto zobecnění ve vývoji abstraktního modelu ekonomického systému vyplývá ze speciálního postavení spotřebitele. Na jeho "jednání" můžeme být pohlížet jako na volbu mezi "spotřebními vektory", které jsou ale omezeny celkovým příjmem spotřebitele. Ale ceny (a možná i některé nebo všechny součásti jeho příjmu) jsou určeny rozhodnutím ostatních účastníků ekonomiky. Z toho důvodu, pro spotřebitele, který představuje jednoho účastníka v ekonomickém systému, funkce $A_i(\overline{x}_i)$ nemůže být považována za konstantní.

3.2 Rovnováha v abstraktní ekonomice

Nashova rovnováha může být rozšířena na abstraktní ekonomiku.

Definice 3.2. Bod x^* je *rovnovážným bodem abstraktní ekonomiky*, jestliže pro všechny i=1,. . . , N platí

- $x_i^* \in A_i(\overline{x}_i^*)$,
- $U_i(x^*)$ označme jako $U_i(\overline{x}_i^*, x_i^*)$. Pak $U_i(\overline{x}_i^*, x_i^*) = \max_{y \in A_i(\overline{x}_i^*)} U_i(\overline{x}_i^*, y)$.

Poznámka 3.1.

$$(\overline{x}_i^*, x_i^*) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*).$$

Tak je rovnovážný bod charakterizovaný vlastností, že každý účastník maximalizuje svou výplatní funkci, určenou jednáním ostatních účastníků, na množině jemu přípustných jednání vzhledem k jednáním ostatních.

Debreu formuloval podmínky, na základě kterých je v ekonomice dosaženo rovnováhy, která je dána volbou konkrétní činnosti jednotlivých účastníků ekonomiky. Přičemž je tato volba limitována přihlédnutím k rozhodnutí ostatních a nastane, jakmile učiní všichni své rozhodnutí.

Lema 3.1. *Jestliže*

- *pro každé i je X_i kompaktní (tj. omezená a uzavřená) a konvexní,*
- *U_i je na X spojitá a kvazi-konkávní v i-té proměnné,*
- *pro všechny $\overline{x}_i$ je $A_i(\overline{x}_i)$ je polospojitá funkce zdola s uzavřeným grafem a pro všechna $\overline{x}_i$ je množina $A_i(\overline{x}_i)$ konvexní a neprázdná,*

pak má abstraktní ekonomika $\{Q; X_1, \dots, X_N; U_1, \dots, U_N; A_1(\overline{x}_1), \dots, A_N(\overline{x}_N)\}$ rovnovážný bod.

Důkaz věty je uveden v literatuře [20].

Poznámka 3.2. Funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je kvazi-konvexní jestliže $f^{-1}(-\infty, a)$ je konvexní pro $\forall a \in \mathbb{R}$.

Funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je kvazi-konkávní jestliže $-f$ je quasi konvexní.

4 Závěr

Jedním z cílů diplomové práce bylo provést důkaz základní věty teorie maticových her. Důkaz jsem provedli pomocí Kakutaniho věty, která dokazuje existenci pevného bodu u mnohoznačné funkce. Protože jsem důkaz pro názornost ilustrovali i na hře "Kámen, nůžky, papír", ověřili jsem, že má tato hra při smíšených strategií Nashovu rovnováhu. Selským rozumem jsme zjistili, že rovnováha nastane tehdy, jestliže oba hráči hrají ryzí strategie kámen, nůžky a papír s pravděpodobností $\frac{1}{3}K, \quad \frac{1}{3}N, \quad \frac{1}{3}P$. Což bylo následně i matematicky dokázáno.

Dalším cílem práce bylo osvojit si problematiku mnohoznačné funkce a teorie her, uvedené v první a druhé kapitole, a aplikovat poznatky na ekonomiku. To se nám také ve třetí kapitole podařilo. Zjistili jsem, že definováním abstraktní ekonomiky je položen základ pro další široké využití. Abraham Wald představil model výroby a model směny a pro každý model zvlášť dokázal existenci rovnováhy. Právě definováním pojmu abstraktní ekonomiky, jakožto zobecnění hry, mohla být dokázána existence rovnováhy sjednoceného modelu výroby, směny a spotřeby se zjednodušenými předpoklady na technologie výrobců a vkus spotřebitelů. [20]

Lema o existenci rovnováhy nám dává solidní základ také pro další výzkum abstraktní ekonomiky. Schafer a Sonnenschein dokázali, že konkurenční rovnováha existuje také pro abstraktní ekonomiku se vzájemně cenově závislými a neuspořádanými preferencemi. [14]

Psaní diplomové práce mi přineslo nejen nahlédnutí do principu zmíněných disciplín, ale také naučit se pracovat se zahraniční literaturou a trpělivosti při hledání kvalitních zdrojů.

Literatura a internetové zdroje

[1] Andres, J., Górniewicz, L., Topological Fixed Point Principles for Boundary Value Problems, 1. vydání, Kluwer, 2003.

[2] Berge, C., Topological spaces: including a treatment of multi-valued functions, vector spaces and convexity, 1. vydání, Oliver and Boyd, 1963.

[3] Border, K. C., Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory. 1. vydání, Cambridge University Press, 1985.

[4] Fudenberg, D. , Tirole, J., Game theory, 1. vydání, MIT Press, 1991.

[5] Kuhn, H. W., Nasar, S., The essential John Nash, 1. vydání, Princeton University Press, 2002.

[6] Maňas, M., Teorie her a optimální rozhodování, 1. vydání, SNTL, 1974.

[7] Neumann, von J., Morgenstern, 0., Theory of Games and Economic Behavior, 1. vydání, Princeton University Press, 1944.

[8] Pareto, V., The Economics of Vilfredo Pareto, Přeloženo: Ann S. Schwier, 1. vydání, Augustus M. Kelley, 1971.

[9] Touffut, J. P., Augustin Cournot: Modelling Economics, 1. vydání, Edward Elgar Publishing, 2008.

[10] Triffin, R., Monopolistic competition and general equilibrium theory, 1. vydání, Harvard University Press, 1949.

[11] Walras, L., Elements of Pure Economics: Or, the Theory of Social Wealth, 2. vydání, Routledge, 2003.

[12] http://artsci.wustl.edu/ẽcon467/FixedPoint.pdf
[citováno dne 17.3.2012]

[13] http://cs.wikipedia.org/wiki/Nashova_rovnov%C3%A1ha
[citováno dne 17.3.2012]

[14] http://econweb.tamu.edu/tian/el90.pdf
[citováno dne 17.3.2012]

[15] http://en.wikipedia.org/wiki/Nash_equilibrium
[citováno dne 17.3.2012]

[16] http://home.uchicago.edu/rmyerson/research/jelnash.pdf
[citováno dne 17.3.2012]

[17] http://mant.upol.cz/soubory/OdevzdanePrace/B08/b08-53-aj.pdf
[citováno dne 17.3.2012]

[18] http://mathworld.wolfram.com/WeierstrasssTheorem.html
[citováno dne 17.3.2012]

[19] http://www.cs.tau.ac.il/k̃empe/TEACHING/SEMINAR-LENS-SPRING08/Nash51.pdf
[citováno dne 17.3.2012]

[20] http://www.stanford.edu/class/msande311/arrow-debreu.pdf
[citováno dne 17.3.2012]

[21] http://www.jstor.org/discover/10.2307/2321416?uid=3737856&uid=2&uid=4&sid=21100657455016
[citováno dne 17.3.2012]