UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Modelování finančních trhů

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Rostislav Vodák, Ph.D.**
Vypracovala: **Aneta Václavková**
Studijní program: N1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor: Aplikace matematiky v ekonomii
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2017

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Aneta Václavková

Název práce: Modelování finančních trhů

Typ práce: Diplomová práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Rostislav Vodák, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2017

Abstrakt: Cílem diplomové práce je ukázat odvození modelu finančního trhu, který je založen na poznatcích behaviorální ekonomie a odvrací se od teorie efektivních trhů. Práce má dvě části. Teoretická část je zaměřena na stochastické procesy, které využijeme pro modelování tržní ceny akcie a odvození modelu. Praktická část je zaměřena na simulování chování finančního trhu. Dále provedeme simulace rozšířených verzí výše uvedeného modelu, které jej více přibližují realitě.

Klíčová slova: teorie efektivních trhů, behaviorální ekonomie, stochastický proces, náhodná procházka, Brownův pohyb

Počet stran: 52

Počet příloh: 1

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Aneta Václavková

Title: Agent-based modeling of financial markets

Type of thesis: Master's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Rostislav Vodák, Ph.D.

The year of presentation: 2017

Abstract: The aim of the thesis is to demonstrate the derivation of the financial market model, which is based on the knowledge of behavioral economics and turns away from the efficient market hypothesis. The thesis has two parts. The theoretical part is focused on stochastic processes that we will use to model the stock market price and derivation of the model. The practical part is aimed at simulating the behavior of the financial market. We will also programme some simulations of the extended versions of the fundamental model, which bring it closer to reality.

Key words: Efficient Market Hypothesis, behavioral economics, stochastic processes, random walk, Brownian motion

Number of pages: 52

Number of appendices: 1

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením pana RNDr. Rostislava Vodáka, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Ráda bych poděkovala především svému vedoucímu diplomové práce panu RNDr. Rostislavu Vodákovi, Ph.D., za jeho trpělivost a čas, který mi věnoval při konzultacích, a také za cenné rady při práci s programem MATLAB. Děkuji také své rodině za podporu, kterou mi poskytovali po celou dobu studia.

Úvod

Tématem diplomové práce je modelování chování finančních trhů. Toto téma jsem si vybrala z důvodu zájmu o finanční matematiku. V práci se zabývám myšlenkou, jak lidské emoce ovlivňují situaci na trhu a jak lze tuto informaci zahrnout do modelování jeho chování. Jedni z prvních, kteří se pokusili překlopit poznatky z behaviorální ekonomie do matematického modelu jsou Lamba, Cross, Grinfeld, Seaman.

Cílem diplomové práce bylo ukázat odvození modelu pro simulaci chování finančního trhu, který je založen na poznatcích behaviorální ekonomie, publikovaném v [8]. Provést simulace, které by ověřily výsledky tohoto článku a realizovat rozšíření modelu, které jej mají více přiblížit realitě. Samotný model je uložen na přiloženém CD a je popsán v příloze.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první a druhé kapitole jsou popsány dvě protichůdné teorie finančních trhů. První z nich je teorie efektivního trhu, která je filozoficky spojena s neoklasickou ekonomií. Předpokládá, že všichni účastníci se na trhu chovají racionálně. Druhou je behaviorální ekonomie, která se odklání od tohoto předpokladu a tvrdí, že lidé mají sklon k chybování. Rozhodují se na základě psychologie davu a emocí. Ve třetí kapitole se zabývám stochastickými procesy a stochastickými diferenciálními rovnicemi, které využijeme pro modelování tržní ceny akcie. Oboje je ovlivněno náhodou. Ve čtvrté kapitole se seznámíme se samotným modelem a jeho odvozením. Dále v této kapitole ukážeme výsledky simulací a několika jeho rozšíření.

Na konci jsem uvedla literaturu, kterou jsem využila pro sepsání této práce. Může sloužit i jako zdroj pro nastudování a rozšíření znalostí o tuto problematiku.

Kapitola 1

Teorie efektivního trhu

Na začátku se budeme zabývat teorií efektivního trhu, která se snaží popsat chování kurzů cenných papírů, zejména akcií. Dozvíme se, kdo teorii efektivního trhu založil, jaké jsou její formy a předpoklady. Tato kapitola byla zpracována pomocí zdrojů: [7], [23].

1.1. Historie

Francouzský matematik Louis Bachelier ve své disertační práci v roce 1900 uvedl: „Ceny konají náhodnou procházku“. Znovu se k této myšlence vrátil až v roce 1953 statistik Maurice Kendall, který se zabýval hledáním cenových cyklů na zbožových trzích [1]. Avšak nemohl žádné najít a došel k závěru: „Ceny bloumají bez cíle“. Za zakladatele teorie efektivních trhů (EMH) je považován Eugene Fama, který zformuloval teoretický základ.

1.2. Formy efektivnosti

E. Fama rozlišuje 3 formy efektivnosti trhu podle publicity informací:

1. **Slabá forma efektivnosti** obsahuje pouze minulé (historické) informace o kurzech akcií. Z tohoto důvodu nemá žádný dopad pro předpovídání budoucího

[1] Světový trh dělíme, podle toho s čím obchodujeme na zbožový (trhy s hmotným a nehmotným zbožím a službami, komoditní trhy, trhy s hotovými výrobky, trhy se službami, trhy s vědeckotechnickými poznatky) a finanční (trhy vkladů a úvěrů, peněžní trhy, akciové trhy, dluhopisové trhy, derivátové trhy, trhy s ostatními finančními nástroji, trhy s devizemi).

pohybu kurzů.

2. **Středněsilná forma efektivnosti** odráží nejen minulé (historické) informace, ale i veřejně dostupné souvztažné informace. V porovnání s předchozí formou nyní jde o vyšší stupeň efektivnosti trhu. Jelikož jsou akciové analýzy založeny na veřejně dostupných informacích, nelze opakovaně zajistit dosažení nadprůměrných výnosů.

3. **Silná forma efektivnosti** představuje situace, kdy akciové kurzy reflektují veškeré informace, které je možno získat. Někdy je tento trh nazývám perfektním, kdy akciový kurz představuje pravdivou, objektivní hodnotu.

1.3. Předpoklady efektivního trhu

- K efektivnosti trhu přispívá vždy přítomný ziskový motiv investorů, díky kterému je možno identifikovat a eliminovat případné drobné odchylky v kurzech akcií od jejich vnitřní hodnoty během několika minut či sekund.
- Na trhu se předpokládá co nejbližší posun k tvrdě konkurenčnímu trhu s velkým počtem nezávislých investorů, kteří mají stejný přístup k technologiím, informacím a obchodnímu systému.
- Pro efektivnost trhu je nutný volný a všem dostupný tok informací o firmách, trhu, odvětví, domácí ekonomice, ale i zahraničních trzích a ekonomikách.
- Technický předpoklad pro fungování efektivního trhu je vybudování kvalitní infrastruktury, zejména transparentní a bezchybně pracující obchodní systém na burze.
- Efektivní trh musí být likvidní, jedině na tomto trhu lze zajistit hladké a adekvátní promítání nových neočekávaných informací do akciových kurzů.
- Fungování trhu musí být podpořeno kvalitní právní legislativou.

Kapitola 2

Behaviorální ekonomie

Současná ekonomická teorie čerpá z neoklasické ekonomie a keynesiánství. Navazuje na ně i behaviorální ekonomie, která se v poslední době těší veliké oblibě. Představíme si některé základní pojmy, vznik a metody využívané v behaviorální ekonomii. K sepsání této kapitoly byla použita tato literatura: [5], [10], [15].

2.1. Základní pojmy

Klasická politická ekonomie představuje vznik ekonomie jako vědy, která se zabývá tvorbou a rozdělováním národního bohatství.

Neoklasická ekonomie navazuje na klasickou politickou ekonomii, ale zaměřuje se na menší ekonomické subjekty. Předpokládá, že trhy samy spějí k rovnováze.

Naproti tomu **Keynesova ekonomie** zpochybňuje schopnost samoregulace tržních sil.

Behaviorální ekonomie se zabývá chováním investorů založeném na psychologické analýze ekonomických subjektů. Účastníci trhu se nechovají racionálně, ale ovlivňuje je psychologie davu a emoční psychologie. Tento přístup lépe vysvětluje reálné chování trhu než teorie efektivního trhu.

Behaviorální ekonomie se snaží o zvýšení reálnosti přidáním psychologických podkladů do ekonomické analýzy. Toto přesvědčení neznamená odmítnutí neoklasického přístupu, které poskytuje ekonomům užitečný teoretický rámec aplikovatelný na různé formy ekonomického (dokonce i neekonomického) chování.

Stigler (1965) říká, že teorie ekonomie by měla být posuzována podle tří kritérií: shody s realitou, obecností a snadnou ovladatelností.

Teorie v behaviorální ekonomii rovněž usiluje o obecnost (např. přidáním jednoho nebo dvou parametrů do standardního modelu), aby se dal použít pro širší škálu podobných případů. Model můžeme modifikovat tak, že zmírníme nějaké předpoklady, které nejsou zásadní pro neoklasickou ekonomii, např. averzi vůči riziku.

Přidání behaviorálních předpokladů často vede ke složitějším modelům, které jsou lépe využitelné. V některých případech můžou být ještě přesnější než tradiční, které předpokládají větší racionalitu, dynamičnost a strategické interakce. Naopak konkrétní hodnoty parametrů potom často redukují behaviorální model na standardní.

2.2. Historie

Myšlenky behaviorální ekonomie nejsou zcela nové, ale navrací se ke kořenům ekonomie. V době, kdy ekonomie byla identifikována jako samostatná věda, psychologie zatím neexistovala jako vědní disciplína. Mnozí ekonomové si přivydělávali jako psychologové té doby.

Adam Smith, který je známý jako zakladatel ekonomie, vydal v roce 1776 knihu Bohatství Národů. Dále vydal méně známou knihu Teorie mravních citů v roce 1759, ve které analyzoval psychologické chování jednotlivců. Kniha je plná poznatků o lidské psychologii a dává předzvěst aktuálnímu vývoji behaviorální ekonomie.

Jeremy Bentham, jehož teorie užitečnosti položila základy neoklasické ekonomie, se zabýval psychologickými faktory, které determinují užitek.

Francis Edgeworth v Theory of Mathematical Psychics popisuje box diagram, který ukazuje dvě osoby vyjednávající o výsledku a ukazující model sociálního užitku. Je to nástroj, kdy užitek jedné osoby je ovlivněn výdělkem druhé.

Odmítnutí akademické psychologie ekonomy zní poněkud paradoxně. Začalo to neoklasickou ekonomickou revolucí, která je vystavěna na předpokladu neomezené racionality - psychologie homo economicus [1]. Na přelomu 19. a 20. století se ekonomie začala řadit spíše mezi přírodní vědy. Na rozdíl od toho právě vznikající psychologie nebyla příliš vědecká. Ekonomové si mysleli, že to není stabilní základ pro ekonomii. A proto se snažili z ekonomie psychologii odstranit. Po nějaké době toho docílili a psychologie vymizela z ekonomie. V některých úvahách se i nadále objevovala psychologie, např.: Irving Fisher a Vilfredo Pareto stále zahrnovali do svých spekulací, jak se lidé cítí a jak uvažují při ekonomickém rozhodování.

Ve druhé polovině 20. století sílila kritika pozitivismu v ekonomii i psychologii. V ekonomii vědci jako Herber Simon, George Katon, Harvey Leibenstein, Tibor Scitovsky a Herbert Simon napsali knihy a články naznačující význam psychologie a omezené racionality. Svoji pozornost věnovali také psychologii, ale na základní směr ekonomie to nemělo žádný vliv.

Mnoho shodných událostí vedlo ke vzniku behaviorální ekonomie. Jedním vývojem bylo rychlé přijetí teorie očekávané utility. Objevovaly se i modely rozhodování za neurčitosti. Vědecké články Allaise, Ellsberga a Markowitze poukázaly na neobvyklé důsledky subjektivního očekávaného užitku.

Ekonomové začali přijímat anomálie jako protipříklady, které nemohli nadále ignorovat. Vývoj v psychologii identifikoval směr pro nové teorie. Okolo roku 1960 se stala kognitivní psychologie dominující [2]. Tím byla připravena půda pro psychology Amose Tverského a Daniela Kahnemana, kteří jsou považováni za zakladatele behaviorální ekonomie. Srovnávali ekonomické modely s psychologickými.

V behaviorální ekonomii bylo potřeba navrhnout předpoklady nebo modely, které jsou všude a jsou využívány ekonomy, jako je Bayesova aktualizace, očekávaný užitek. Identifikovali anomálie, které porušovaly předpoklady v modelu a snažili se pečlivě vyloučit jejich alternativní vysvětlení. Používají odlišnosti k tomu, aby vytvořili nové teorie, a to takovým stylem, že se snaží zevšeobecnit stávající se modely. Dále sestrojili ekonomické modely chování, které jsou založeny na předpo-

[1] Člověk ekonomický popisuje model chování, který předpokládá, že lidé jednají ve svém vlastním zájmu, aby maximalizovali svůj výnos a minimalizovali náklady.

[2] Psychologický přístup, který se zabývá lidským myšlením.

kladech o chování, otestovali je a odvodili z nich důsledky.

2.3. Metodologie behaviorální ekonomie

Metody používané v behaviorální ekonomii jsou stejné jako v jiných oblastech ekonomie. Při svém vzniku spoléhala na údaje získané pomocí experimentů. Behaviorální ekonomie aplikuje poznatky z psychologie do ekonomie, proto není závislá jen na používání experimentů, ale zpočátku hrály důležitou roli.

Příkladem experimentu je hra na ultimátum, kdy si hráči mezi sebou rozdělí určitou částku peněz. První hráč má celou sumu peněz a navrhne druhému hráči, jak ji rozdělit. Pokud souhlasí, částka se rozdělí, když odmítne, nikdo nic nedostane. Předpokládejme, že tento jev pozorujeme v reálném světě v podobě rozvodů, dohod u soudu a stávek. Bylo by obtížné říci, zda opakování her, nepochopení situace a další okolnosti mají za následek různé výsledky. V experimentu jdou všechny vlivy jasně stanovit tím, že je omezíme nebo odstraníme.

Ačkoliv behaviorální ekonomové zpočátku značně spoléhali na experimentální data, je behaviorální ekonomie odlišná od experimentální. Behaviorální ekonomie je metodicky rozmanitá. Nedefinuje se na základě výzkumných metod, ale na uplatnění psychologických poznatků do ekonomie. Na druhou stranu experimentální ekonomové používají experimentování jako výzkumný nástroj.

Experimentální ekonomové vymysleli pravidla, která se pro mnoho behaviorálních ekonomů zdají být příliš omezující. Popis experimentálního prostředí je spíše abstraktní, než aby evokoval určitý kontext vnějšího prostředí, protože se bojí ztráty kontroly nad stimuly.

Ekonomické experimenty obvykle používají „stacionární replikace“, které se stále dokola opakují, jen s novými informacemi. Údaje z posledních několika period se používají k vyvození závěru o rovnovážném chování v širším měřítku. Je zřejmé, že mnoho důležitých aspektů je spíše na začátku experimentu než na konci (např.: manželství, rozhodnutí o vzdělání, spoření na důchod nebo nákup dlouhodobého majetku jako je dům, auto, plachetnice, které se dějí jen několikrát v průběhu života).

Kapitola 3

Stochastický proces

Náhodné procesy se používají pro modelový popis náhodných jevů, které se mění v čase. Zaměříme se zejména na Brownův pohyb a využijeme ho pro modelování tržní ceny akcií. Ta se vyvíjí náhodně, podle nákupů a prodejů investorů.

Tato kapitola je zpracována pomocí zdrojů: [2], [3], [4], [6], [12], [16], [18], [19], [21].

3.1. Stochastický proces

Náhodným neboli stochastickým procesem rozumíme každou veličinu, která se v průběhu času vyvíjí náhodně. Aplikace náhodných procesů se vyskytuje v různých oblastech (např.: biologie, fyzika, psychologie, ekonomie). Ve financích se údaje zaznamenávají v diskrétních časových okamžicích a jednotkách (např. v jednotlivých obchodních dnech a celých korunách).

Ve financích se s ohledem na uznávané ekonomické teorie (např. EMH) využívají markovské náhodné procesy, kde se pro předpověď budoucí hodnoty procesu využívá pouze současná hodnota. Nejvyužívanější markovský proces je Brownův pohyb, se kterým se seznámíme později.

Definice 1 *Nechť* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor a nechť* $\mathbf{T} \subset \mathbf{R_1}$. *Systém náhodných veličin* $\{X_t, t \in \mathbf{T}\}$ *definovaných na* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *se nazývá* ***náhodný proces***.

Je-li $T = \mathbf{Z} \ = \{\mathbf{0}, \pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}, \ldots\}$ nebo $T = \mathbf{N_0} \ = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\ldots\}$, mluvíme o procesu s diskrétním časem nebo o časové řadě. V případě, že $T = \langle a, b \rangle$, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, říkáme, že $\{X_t, t \subset \mathbf{T}\}$ je proces se spojitým časem. Množinu náhodných veličin X_t označíme S. Jestliže náhodné veličiny X_t nabývají pouze diskrétních hodnot, říkáme, že $\{X_t, t \subset \mathbf{T}\}$ je proces s diskrétními stavy. Nabývají-li X_t hodnot z nějakého intervalu, mluvíme o procesu se spojitými stavy.

Náhodné procesy můžeme rozdělit do čtyř skupin podle charakteru množin T a S na:

- stochastický proces s diskrétním časem a diskrétními stavy - př.: standardní náhodná procházka
- stochastický proces s diskrétním časem a spojitými stavy - př: zobecněná náhodná procházka
- stochastický proces se spojitým časem a diskrétními stavy - př: Poissonův proces
- stochastický proces se spojitým časem a spojitými stavy - př: Brownův pohyb

3.2. Náhodná procházka

Prvním krokem k analyzování Brownova pohybu je potřeba zkonstruovat diskrétní binomický stochastický proces.

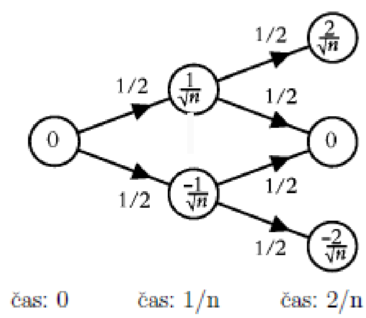
Definice 2 (Náhodná procházka $W_n(t)$) *Pro každé číslo $n \geq 1$ budeme definovat binomický proces $W_n(t)$, který splňuje následující:*

- $W_n(0) = 0$,
- *časový krok délky* $1/n$,
- *prostorový krok délky* $1/\sqrt{n}$,
- *pravděpodobnost pohybu nahoru nebo dolů je všude rovna* $1/2$.

Jinak řečeno, je-li $X_1, X_2, \ldots$ posloupnost nezávislých binomických náhodných proměnných, které nabývají +1 nebo -1 se stejnou pravděpodobností. Potom hodnota W_n je definována následovně:

$$W_n\left(\frac{i}{n}\right) = W_n\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{X_i}{\sqrt{n}} \quad \forall i \geq 1.$$

Následující obrázek nám vysvětluje definici náhodné procházky, která začíná v čase 0 v bodě 0. S pravděpodobností 1/2 v čase $1/n$ udělá prostorový krok délky $\pm 1/\sqrt{n}$. Následující kroky fungují na stejném principu.



Obrázek 3.1: První dva kroky náhodné procházky W_n

Aby jsme mohli vyslovit nějaké závěry, je nutno zavést centrální limitní větu.

Věta 1 (Lindebergova - Lévyho Centrální limitní věta) *: Nechť* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením se střední hodnotou* μ *a s nenulovým rozptylem* σ^2*. Potom náhodné veličiny*

$$\frac{\sum_1^n (X_i - \mu_i)}{\sigma\sqrt{n}}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

mají asymptoticky standardizované normálního rozdělení $\mathcal{N}(0,1)$.

Centrální limitní věta nám navíc dává omezení pro binomické rozdělení - pro rostoucí n rozdělení $W_n(1)$ směřuje k $\mathcal{N}(0,1)$. Ve skutečnosti je hodnota $W_n(t)$ stejná jako:

$$W_n(t) = \sqrt{t}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{nt}}\right).$$

Podíl v závorce má tendenci díky centrální limitní větě nabývat náhodných proměnných s normovaným normálním rozdělením $\mathcal{N}(0,1)$. Tak i rozdělení $W_n(t)$ má tendenci být $\mathcal{N}(0,t)$.

Každá náhodná procházka W_n má markovovu vlastnost. Její budoucí pohyb závisí pouze na hodnotě z předchozího kroku (nikoliv na trajektorii historii pohybů). Navíc budoucí posunutí $W_n(s+t) - W_n(s)$ má binomické rozdělení pravděpodobnosti s nulovou střední hodnotou a rozptylem t.

Rozdělení W_n konverguje k Brownově pohybu.

3.3. Brownův pohyb

Speciálním případem stochastických procesů se spojitým časem je Brownův pohyb.

Definice 3 (Brownův pohyb) *Náhodný proces $\{W_t\}_{t\geq 0}$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ se nazývá Brownův pohyb (Wienerův proces), jestliže splňuje následující vlastnosti:*

1. $W_0 = 0$,
2. *s pravděpodobností jedna je funkce $t \to W_t$ spojitá v t,*
3. *proces $\{W_t\}_{t\geq 0}$ má stacionární nezávislé přírůstky,*
4. *přírůstek $W_{s+t} - W_s$ má normální rozdělení $\mathcal{N}(0,1)$.*

Výraz nezávislé přírůstky znamená, že pro každou volbu nezáporných čísel

$$0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \ldots \leq s_n < t_n < \infty,$$

budou přírůstky náhodných veličin

$$W_{t_1} - W_{s_1}, W_{t_2} - W_{s_2}, \ldots, W_{t_n} - W_{s_n},$$

vzájemně nezávislé. Termínem stacionární přírůstky rozumíme, že pro všechna $0 < s, t < \infty$ bude mít přírůstek $W_{s+t} - W_s$ stejné rozdělení jako $W_t - W_0 = W_t$. Z nezávislosti přírůstků plyne, že Brownův pohyb je markovský proces.

Z vlastností (1)-(4) není jasné, zda Brownův pohyb skutečně existuje. Jeho existenci dokázal jako první N. Wiener okolo roku 1920, proto se mu často říká Wienerův proces. Jednou z vlastností Brownova pohybu je, že je limitou náhodné procházky.

3.3.1. Varianty Brownova pohybu

Brownův pohyb, který jsme si představili, má nulovou střední hodnotu. Zatímco tržní cena akcií podniku obvykle roste do určitě míry (očekáváme růst cen způsobený např. i jen inflací). Vezmeme si proces $S_t = W_t + \mu t$, který nazveme **Brownův pohyb s driftem**, kde konstanta μ reflektuje nominální růst neboli drift.

Brownův pohyb se dá škálovat ze strany nějakého faktoru: $S_t = \sigma W_t + \mu t$, kde σ je stochastická složka (šum).

Můžeme použít **exponenciální Brownův pohyb s driftem** nebo též nazývaný **geometrický Brownův pohyb s driftem** a to tak, že:

$$X_t = \exp(\sigma W_t + \mu t).$$

3.4. Stochastický kalkulus

3.4.1. Stochastický diferenciál

Stochastický proces X lze vytvořit jako funkci Brownova pohybu. Obecně se dá zapsat pomocí stochastické diferenciální rovnice (SDR)

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

kde μ_t nazýváme driftem (trendem) stochastického procesu X v čase t a σ_t je jeho volatilitou (difuzním koeficientem) v t. Vidíme, že parametry jsou časové proměnné. Nekonečně malé přírůstky označíme dt a v případě Brownova pohybu dW_t.

Nadefinujeme stochastický proces, se kterým budeme dále pracovat při odvození modelu finančních trhů:

Definice 4 *Nechť W_t je Brownův pohyb na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Jednodimenzionální Itôův proces je stochastický proces ve tvaru:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

který lze přepsat v diferenciálním tvaru:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

což je tzv. ***stochastický diferenciál****, kde koeficient μ se nazývá drift a σ je volatilita.*

Můžeme také předpokládat, že parametry μ a σ jsou konstanty, znamená to, že proces X má konstantní drift (trend) a volatilitu. Můžeme jej zapsat pomocí stochastické diferenciální rovnice

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t. \tag{3.4.1.1}$$

Řešením této rovnice bude

$$X_t = \mu t + \sigma W_t$$

(za předpokladu, že $X_0 = 0$).

Dále si uvedeme význam koeficientů : σ a μ. Nechť v rovnici (3.4.1.1) je $\sigma = 0$, tj.

$$dX_t = \mu dt$$

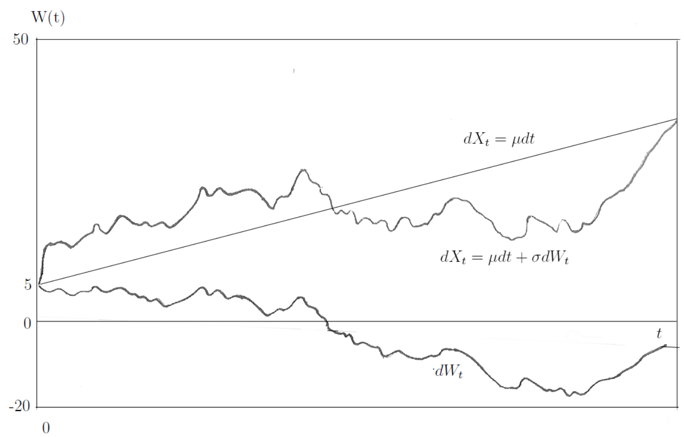
získáme (deterministickou) diferenciální rovnici, jejímž řešením je zřejmě přímka

$$X_t = X_0 + \mu t$$

se směrnicí (sklonem, trendem) μ. Jestliže v rovnici (3.4.1.1) bude nyní volatilita σ nenulová, bude na přímku nabalena stochastická složka (šum) ve výši σ-násobku Brownova pohybu, který způsobuje výkyvy v hodnotách funkce X_t.

Trend náhodného procesu určuje směr (růst/ pokles) vývoje hodnot a volatilita popisuje oscilování hodnot kolem trendu.

Na obrázku 3.2 vidíme význam jednotlivých koeficientů, které jsme si odvodili na předchozí straně a doplněné o křivku dW_t. Pro konkrétní volbu koeficientů v Brownově pohybu $\mu = 0,3$ a $\sigma = 1,5$, nabývá nyní hodnoty $W(0) = 5$.



Obrázek 3.2: Vývoj v rámci jedné trajektorie Brownova pohybu ($W(0) = 5$; $\mu = 0,3$; $\sigma = 1,5$)

3.5. Itôův kalkulus

Je nástroj, který dokáže manipulovat se stochastickými diferenciálními rovnicemi. Používá se pro modelování tržní ceny akcií, dluhopisů a jiných finančních derivátů. Jeho odvození vychází z Taylorova rozvoje.

Lemma 1 *Je - li X stochastický proces splňující rovnici $dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$ a f je deterministická dvakrát spojitě diferencovatelná funkce, potom $Y_t := f(X_t)$ je stochastický proces, pro který platí:*

$$dY_t = \left(\mu_t f'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 f''(X_t)\right)dt + \left(\sigma_t f'(X_t)\right)dW_t.$$

3.5.1. Odvození SDR ze stochastického procesu

Itôův kalkulus se nejvíce používá pro generování stochastických diferenciálních rovnic z funkčního výrazu pro proces. Vezmeme si exponenciální Brownův pohyb

$$Y_t = \exp(\mu t + \sigma W_t).$$

Stochastické diferenciální rovnice pro exponenciální funkce jsou výhodné díky vlastnosti $f'(Y_t) = f''(Y_t) = f(Y_t) = X_t$. U exponenciálního Brownova pohybu provedeme následující úpravy:

$$X_t := \mu t + \sigma W_t$$
$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$$
$$Y_t = e^{X_t} = f(X_t)$$
$$f'(X_t) = (e^{X_t})' = e^{X_t}$$
$$f''(X_t) = e^{X_t}$$

Se správnou formulací můžeme použít Itôův vzorec:

$$dY_t = \left[\mu e^{X_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{X_t}\right]dt + \left[\sigma e^{X_t}\right]dW_t = e^{X_t}\left[\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t\right] =$$

$$= Y_t\left[\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t\right].$$

Proměnná $\sigma \cdot Y_t$ je volatilitou procesu a trendem je $Y_t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$ procesu X_t.

3.5.2. Odvození stochastického procesu z SDR

Nyní chceme konvertovat stochastické diferenciální rovnice na procesy. Jinými slovy řešíme stochastické diferenciální rovnice.

Obecně to neumíme. Většina stochastických diferenciálních rovnic je příliš obtížná, aby šly vyřešit. Existuje pár vzácných příkladů, které mají skutečné řešení přes Itôův kalkulus. Takové řešení SDR se nazývá difuze.

3.6. Modelování tržní ceny akcie

Brownův pohyb není vhodným modelem, který by popisoval chování cen akcií procesů. Jeden z důvodů je: pokud $\{W^x(t)\}_{t\geq 0}$ je Brownův pohyb začínající v $x > 0$, potom trajektorie W_t může klesnout pod 0. Ceny akcií obchodovaných na burzách neklesají pod 0. Je potřeba najít vhodnější model pro chování cen akcií. Zvážíme-li očekávané návratnosti investic. V případě, že investor má 100$, které investuje. Může předpokládat návratnost 100$, pokud je cena akcií 10$ i 5$. Nejistota návratnosti investovaných 100$ je stejná pro různé ceny akcií. Výkyvy ceny akcií by měly být dvakrát větší, pokud ceny akcií jsou dvakrát vyšší; třikrát větší, když je cena akcií třikrát vyšší, atd. Tento argument naznačuje, že lepším modelem pro vývoj tržní ceny akcie v čase je:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{3.6.1}$$

kde S_t označuje tržní cenu akcie v čase t, konstanta μ představuje (spojitou) míru zisku plynoucí ze změn tržní ceny akcie ve smyslu růstu či poklesu směru vývoje hodnot, σ reprezentuje volatilitu (riziko) tržní ceny akcie, neboli kolísání její tržní ceny a dW_t značí nekonečně malou změnu v Brownově pohybu v příštím časovém okamžiku.

Rovnici (3.6.1) upravíme do tvaru, kde S_t se řídí geometrickým Brownovým pohybem. Tento proces nabývá nezáporných hodnot a je vhodným nástrojem pro modelování tržní ceny akcie:

$$\frac{dS_t}{S_t} = d(\ln S_t) = \mu dt + \sigma dW_t$$

Označme $\ln(S_t) = Y_t$, podle Taylorova rozvoje máme:

$$d(Y_t) = d(\ln(S_t)) =$$

$$= \frac{1}{1!}(\ln(S_t))' dS_t + \frac{1}{2!}(\ln(S_t))''(dS_t)^2 =$$

$$= \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2}\frac{(-1)}{S_t^2}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t)^2 =$$

$$= \frac{1}{S_t} S_t(\mu dt + \sigma dW_t) - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2} S_t^2[(\mu^2(dt)^2) + 2\mu dt\sigma dW_t + \sigma^2(dW_t)^2] \approx$$

$$\approx \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t$$

kde členy $\mu^2(dt)^2$ a $2\mu dt\sigma dW_t$ zanedbáme, protože nabývají malých hodnot. Výraz $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ představuje trend vývoje logaritmu ceny akcie.

S využitím geometrického Brownova pohybu přepíšeme odvozený model následovně:

$$S_t = S_0 \ \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right).$$

V praxi je výhodnější používat výpočty s diskrétními přírůstky. Nechť $\Delta t = T - t$. Potom

$$\Delta ln S_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma \Delta W_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) + \sigma \Delta W_t$$

je náhodná veličina s normálním rozdělením

$$N\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t); \sigma^2(T - t)\right].$$

Dále platí, že $\Delta ln S_t = \ln \ S_T - \ln S_t$.

Z toho vyplývá, že $ln S_T$ má také normální rozdělení

$$N\left[ln \ S_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t); \sigma^2(T - t)\right]$$

a S_T má lognormální rozdělení

$$LN\left[S_t e^{\mu(T-t)}; S_t^2 e^{2\mu(T-t)}(e^{\sigma^2(T-t)} - 1)\right].$$

Využití si ukážeme na následujícím příkladu:

Příklad Tržní cena akcie činí 1000 Kč a vykazuje spojitou míru výnosnosti 11% a volatilitu 15%. Určete cenu akcie za 1 měsíc ($\frac{1}{12}$ roku). Model pro tržní cenu akcie je

$$\frac{dS_t}{S_t} = 0,11dt + 0,15dW_t.$$

Následně vypočítáme střední hodnotu a rozptyl (respektive směrodatnou odchylku)

$$E(S_T) = 1000e^{0,11\frac{1}{12}} = 1009,209$$

$$var(S_T) = 1000^2 e^{2 \cdot 0,11\frac{1}{12}}(e^{0,15^3 \cdot \frac{1}{12}} - 1) = 1911,484$$

$$\sigma(S_T) = \sqrt{1911,484} = 43,721$$

Cena akcie se za měsíc bude pohybovat s 95% pravděpodobností v intervalu

$$\langle 1009,209 - 2 \cdot 43,721; 1009,209 + 2 \cdot 43,721 \rangle$$

tj.:

$$\langle 921,767; 1096,651 \rangle .$$

Kapitola 4

Model

V této kapitole nyní využijeme poznatky z předchozí kapitoly, rozšíříme je a pokusíme se odvodit model finančního trhu, který zohledňuje emoce jednotlivých investorů. Výsledky jsou ukázány v simulacích, které byly vyrobeny za použití softwaru Matlab. K sepsání této kapitoly byly využity tyto zdroje: [8], [9], [11], [13], [14], [16], [17], [20], [22].

4.1. Odvození modelu

Výchozím bodem pro sestavení tohoto modelu je jednorozměrná náhodná procházka, se kterou jsme se seznámili ve 3. kapitole, ale teď se na ni podíváme trochu detailněji. Jedná se o stochastický proces $S(n)$, který je definován v diskrétních časech $n = 0, 1, 2 \ldots$, kde $S(0) = 0$ a $S(n) = S(n-1) + X(n)$. Náhodné veličiny $X(n)$ pro $n = 1, 2, 3 \ldots$ jsou nezávislé a stejně rozdělené, nabývají hodnot ± 1 s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ (tak, že střední hodnota je rovna 0 a rozptyl 1).

Další možností, jak si můžeme jednoduchou náhodnou procházku představit zahrnuje pohyb částic po přímce. Částice se pohybují po celých číslech a v každém kroku se posunují o jeden krok doprava s pravděpodobností p nebo o jeden krok doleva s pravděpodobností $1-p$. Směr v každém kroku je nezávislý na předchozím.

Proces $S(n)$ nemá žádnou paměť, vyplývá to z nezávislosti $X(n)$. Je to markovský proces s diskrétními stavy a diskrétním časem. Neboli hodnota S_n, kterou proces nabývá v čase n podle $S(n) = S(n-1) + X(n)$ závisí pouze na hodnotě z předchozího časového okamžiku $S(n-1)$, nikoliv na trajektorii, která jej do tohoto stavu dovedla. Tuto vlastnost formálně popisuje i následující lemma.

Lemma 1 *Jednoduchá náhodná procházka má Markovovu vlastnost, jestliže*

$$P(S_{m+n} = j \mid S_0, S_1, \ldots, S_m) = P(S_{m+n} = j \mid S_m), \quad n \geq 0.$$

V základní náhodné procházce $S(n)$ můžeme nahradit $X(n)$ různými náhodnými veličinami, které jsou nezávislé, stejně rozdělené a nabývají více než jen dvou hodnot. Takové náhodné procházky se používají pro popis cen aktiv. Příchod nezávislých informací, korespondující $X(n)$, se přemění vlivem jednotlivých účastníků na trhu do procesu náhodné procházky pro stanovení ceny aktiva $S(n)$.

Diskrétní náhodnou procházku s diskrétním časem nahradíme spojitým stochastickým procesem. První změnu, kterou uděláme je nahrazení součtu nezávislých proměnných $X(n)$ spojitým Brownovým pohybem $W(t)$, který reprezentuje nově příchozí exogenní informace. Modely cen si odvodíme řešením stochastických diferenciálních rovnic (SDR), jak uvidíme následovně. Nejjednodušší a nejvíce používaný cenový model předpokládá, že cena $p(t)$ (ve 3. kapitole cenu akcií značíme S_t, pro přehlednost a odlišení od náhodné procházky zanecháme značení $p(t)$) řeší v čase t SDR:

$$dp = \mu\ p\ dt + \sigma\ p\ dW, \tag{4.1.1}$$

kde dp vyjadřuje cenový přírůstek a dW je přírůstkem Brownova pohybu $W(t)$ přes nekonečně malé časové intervaly dt. Konstanta μ je průměrná míra výnosnosti za časovou jednotku, σ znásobí efekt náhodných exogenních informací $W(t)$ pomocí faktoru volatility. Trendy (drifty) i nečekané události mají na cenu p spíše multiplikativní vliv než aditivní.

Nyní se podíváme na dva předpoklady. Prvním z nich je, že exogenní informační proud $W(t)$ je ve skutečnosti Brownův pohyb s nezávislými, nekorelovanými, normálně rozdělenými přírůstky. Druhým předpokladem je, že $W(t)$ je účastníky trhu převedena okamžitě a dokonale do nezávislých přírůstků cen.

Řešením (4.1.1), vyžadující použití Itôva kalkulu, je geometrický Brownův pohyb, který jsme si již odvodili pomocí Taylorova rozvoje:

$$p(t) = p(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right). \tag{4.1.2}$$

SDR (4.1.1) je zvláštní v tom, že má explicitní řešení. Ještě více neobvyklé je řešení (4.1.2), které závisí pouze na aktuální hodnotě $W(t)$ a nikoli na celé historii Brownova pohybu $\{W(s)\}_{s=0}^{t}$. Proměnná $p(t)$ může být považována za archetyp pro ostatní proměnné v ekonomických modelech. Předpokládají, že výsledky okamžitě vyrovnávají nezávislé procesy.

Koresponduje to se standardními předpoklady hlavního proudu ekonomie a většinou základních modelů pro tvorbu cen v oblasti financí. Separace historie matematických proměnných z budoucího vývoje je mnohem jednodušší pro vytváření modelů s analytickým řešením v uzavřené formě (například používání Black-Scholes formulí pro oceňování finančních derivátů, které používá výsledek (4.1.2)). Rovnováha na bázi myšlení je přímým důsledkem toho, že obětujeme přesnost, aby jsme získali matematickou výhodnost.

Z tohoto důvodu budeme pracovat s proměnou logaritmu ceny $r(t) = \ln p(t)$, který je ekvivalentní, ale bude se nám s ním lépe pracovat. SDR používají stejného Brownova vstupu $W(t)$. Pro konstantní směr μ a volatilitu σ je logaritmus ceny dán řešením:

$$r(t) = \mu\ t + \sigma\ W(t) \tag{4.1.3}$$

z SDR

$$dr = \mu\ dt + \sigma\ dW. \tag{4.1.4}$$

Pro každý časový interval délky h má změna v logaritmu ceny $r(t+h) - r(t)$ normální rozdělení $\mathcal{N}(\mu h, \sigma^2 h)$. „Stylizovaná fakta“ finančních trhů jsou souborem statistických pozorování, které se snaží držet napříč všemi třídami aktiv, nezávisle na geografii, historii a obchodních pravidlech.

Nyní chceme přepsat spojitý model (4.1.4) do přírůstkového tvaru, k tomu je potřeba přidat další předpoklady. Aby se nějaká veličina W řídila Brownovým pohybem, je nutné aby splňovala následující podmínky, které vyjádříme pomocí přírůstků ΔW v infinitezimálních časových intervalech Δt. Předpoklady mají následující tvar:

1. Mezi libovolnými odpovídajícími přírůstky ΔW a Δt platí vztah:

   $$\Delta W = \epsilon\sqrt{\Delta t},$$

   kde ϵ je náhodná veličina s normovaným normálním rozdělením $\mathcal{N}(0,1)$.

2. Přírůstky ΔW pro libovolné disjunktní přírůstky Δt jsou navzájem nezávislé.

Při $\Delta t \to 0$ přepíšeme vzorec z 1. předpokladu do následující podoby:

$$dW = \epsilon\sqrt{dt}.$$

Přírůstkový tvar rovnice (4.1.4) je následující:

$$\Delta r = \mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t},$$

kde $\Delta r = r(n) - r(n-1)$. Nyní můžeme zvolit $\mu = 0$ a přeškálovat čas zvolením $\sigma = 1$. Za tímto účelem budeme počítat v diskrétním čase, aby řešení na konci n-tého časového intervalu Δt délky h bylo dáno

$$r(n) = r(n-1) + \sqrt{h}\Delta W(n), \tag{4.1.5}$$

kde $\Delta W(n) \sim \mathcal{N}(0,1)$ je diskrétní Brownův pohyb, tj. $\sum_{k=1}^{n}\Delta W(k) = W(nh)$.

Cenové změny způsobené (exogenním) Brownovým informačním proudem $\Delta W(n)$ jsou uskutečněny investory na trhu, kteří buď jednají velmi rychle nebo jsou motivováni příchodem nových informací. V každém kroku se rozhodují, zda změní svoji náladu na trhu.

Na trhu jsou investoři dvojího typu. „Slow“ investoři, kteří mění svoji investiční pozici nebo názor přes delší časový horizont (týden, měsíc, …). A naproti nim stojí „fast“ investoři, kteří zahrnují celé instituce nebo jednotlivé osoby, kteří pravidelně obchodují s aktivy v časovém horizontu kratší než jeden den a jsou motivováni příchodem nových informací.

Nyní zavedeme předpoklady, které nám pomohou zjednodušit model, ale zároveň budou pro naše účely dostatečné. Budeme předpokládat, že v n-tém časovém intervalu i-tý investor může být pouze v jednom ze dvou stavů, kde $s_i(n) = +1$ značí „long“ pozici nebo počeštěně „dlouhé pozice“ nebo naopak $s_i(n) = -1$ pozici „short“ neboli „krátké pozice“.

Investory, kteří nevlastní aktiva značíme $s_i(n) = -1$ a říkáme jim medvědi, což jsou investoři, kteří spekulují na pokles ceny. Akcie si pouze půjčí, prodají je a když jejich cena klesne, koupí je nazpět za nižší cenu, akcie vrátí a nechají si zisk. A $s_i(n) = +1$ označíme býky, neboli investory, kteří spekulují na vzestup ceny. Akcie nakoupí a věří, že jejich cena poroste.

Dále můžeme definovat náladu investorů na trhu:

$$\sigma(n) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} s_i(n), \tag{4.1.6}$$

která se pohybuje v rozmezí ± 1. Je mírou poměru „long“ a „short“ investorů. Hodnota σ blíže k -1 označuje medvědí trh, zatímco hodnota blíže k +1 označuje býčí trh. V případě, kdy $\sigma(n) = 0$ je na trhu stejný počet investorů, kteří jsou ve stavu „long“ nebo „short“. Podle toho, jak investoři mění náladu σ na trhu, ovlivňují poptávku a cenu $p(t)$. Tuto vlastnost nyní zahrneme do (4.1.5) a upravíme jej na následující tvar:

$$r(n) = r(n-1) + \sqrt{h}\Delta W(n) + \kappa \Delta\sigma(n), \tag{4.1.7}$$

kde $\kappa > 0$ a $\Delta\sigma(n) = \sigma(n) - \sigma(n-1)$. Parametr κ je mírou celkové tržní intenzity investorů. Formule (4.1.7) se dá interpretovat jako cenové změny, které mají exogenní komponentu $\sqrt{h}\Delta W(n)$ způsobenou novými informacemi a endogenní $\kappa\Delta\sigma(n)$ způsobenou změnami tržní nálady. Hodnota κ bude větší na trhu, kde jsou endogenní efekty silnější ve vztahu k exogenním účinkům.

Rozdíl mezi rovnovážným modelem cen (4.1.5) a (4.1.7) je samozřejmě v přidání endogenní proměnné $\kappa\Delta\sigma(n)$ a závisí na dynamických vlastnostech σ. Tento člen navíc reflektuje skutečnost, že informace můžou být přeměněny do cenových změn, ale musí nejdřív projít „filtrací“ nedokonalých agentů.

Model rovnovážné ceny (4.1.5) může být získán z (4.1.7) dvěma různými způsoby. Za prvé nastavíme $\kappa = 0$ tak, že neexistují žádné nálady investorů (nebo nemají žádný vliv na cenu) a člen navíc v (4.1.7) jednoduše zmizí. Za druhé budeme předpokládat, že investoři jsou vždy téměř v rovnováze $\sigma(n) \approx 0 \ \forall n$ tak, že poslední člen v (4.1.7) se stane zanedbatelným. Je to ekvivalentní průměrným účinkům nedokonalých investorů. Vzorec ceny (4.1.7) počítá s možností, že endogenní nerovnovážná dynamika mezi investory bude mít vliv na cenu. Jinými slovy jsme nahradili standardní model rovnováhy (4.1.5) méně restriktivním, který je schopen dynamických řešení a brání logickému nesouladu.

4.2. Předpoklady

Mnoho let bylo zřejmé, že modely finančních trhů vycházejí z předpokladů teorie efektivních trhů (EMH), se kterými jsme se seznámili v 1. kapitole. Jsou schopny reprodukovat důležité vlastnosti pozorovaného chování na trhu, ale nejsou schopny zachytit chování investorů, kteří jsou při rozhodování ovlivňováni okolními vlivy. V uzavřené formě EMH umožňují matematické řešení některých základních problémů.

Nyní si představíme model založený na (4.1.7), který porušuje EMH předpoklady a je založený na jednoduchém popisu psychologie/myšlení investorů. Docílíme toho tak, že investoři budou ovlivňováni různými situacemi vyvolanými tržními podmínkami. Ty se skládají z různé prahové úrovně a investor reaguje, pokud je této úrovně dosaženo. Budeme brát v úvahu dvě vlastnosti. První z nich je „cowardice“, který se představíme jako stres investora způsobený tím, že zůstane v menšině vzhledem k celkové náladě na trhu a druhý je „inaction“ neboli zvýšená touha jednat nebo přehodnotit svoji investiční pozici. Tím nahradíme dokonalou racionalitu pomocí omezené racionality. Díky tomu můžeme říct, že tento model vychází z behaviorální ekonomii.

Jedním z hlavních zjednodušení je absence „prostorových“ vztahů mezi investory. Místo toho jsou investoři propojeni prostřednictvím nálady na trhu a globální tržní cenou, která je částečně určena náladou na trhu prostřednictvím zákona nabídky a poptávky.

4.3. Model

Model je uvažován v diskrétních časových krocích délky h. Předpokládáme, že existuje M investorů (reprezentováni svou náladou pomocí hodnot +1 a -1), kteří mají na trhu stejnou váhu v každém časovém intervalu. Pokud investor dosáhne své prahové hodnoty, je nucen změnit svoji náladu na trhu. Pro model jsou využívány dva zdroje psychického napětí, jak již bylo uvedeno. Prvním z nich je „cowardice“ neboli rostoucí stres, kdy se investor nachází v minoritní pozici. Předpokládáme, že v každém časovém intervalu je úroveň „cowardice“ investora, který se nachází v menšině zvýšena o hodnotu úměrnou velikosti rozdílu celkových „short“ nebo „long“ pozic. Když dojde k překročení prahové hodnoty tolerance tohoto investora, pak změní svoji náladu, aby se připojil k většině. V tomto čase se „cowardice“ resetuje na nulu. Druhý je označován jako „inaction“ investora. Tuto vlastnost zahrneme do modelu tak, že investor změní svoji náladu, kdykoli se cena pohybuje podle určitého procenta nahoru nebo dolů z ceny, kdy investor naposledy změnil svoji náladu na trhu. Toto procento bereme jako prahovou hodnotu „inaction“. Konkrétně i-tý investor změní náladu, když aktuální cena opustí interval $[P_i/(1+H_i), P_i(1+H_i)]$. Nebereme v úvahu, zda investor vydělá nebo ztratí peníze. Resetování ceny i-tého investora má za následek zavedení cenového rozpětí, ve kterém je investor spokojen s aktuální cenou (ignoruje napětí „cowardice“). Tento interval se pohybuje, stínuje tržní cenu, kdykoliv investor změní svoji náladu na trhu. Kromě toho „inaction“ a existence dynamického rozpětí cenových relací úzce souvisí s dalšími ekonomickými a psychologickými faktory. Například: zahrnutí transakčních nákladů, které brání libovolné změně nálady investorů. Také „inaction“ může být spojena s představou „kotvení“, přičemž chování investorů je na něčem závislé, možná na libovolné předchozí ceně. Tržní cena na konci n-tého intervalu je označena $p(n)$, která vychází z (4.1.7) a je aktualizována prostřednictvím:

$$p(n+1) = p(n)\exp\Big(\sqrt{h}\Delta W(n) + \kappa\Delta\sigma(n)\Big), \tag{4.3.1}$$

kde $\Delta W(n)$ je standardní Gaussova náhodná veličina, která reprezentuje tvorbu nové, nekorelovaná a globálně dostupné informace v průběhu časové periody. Časový krok $h = 1$ odpovídá intervalu, na kterém má náhodná proměnná $\Delta W(n)$ jednotkový rozptyl. Proměnná $\Delta\sigma(n) = \sigma(n) - \sigma(n-1)$ představuje změnu tržní nálady a konstanta $\kappa > 0$ určuje dynamiku vnitřního trhu. Čím je větší hodnota κ, tím více je tržní cena ovlivněna dynamikou vnitřního trhu, na rozdíl od generování nových informací o trhu. Nová cena (4.3.1), úroveň napětí a stavy všech investorů jsou aktualizovány následujícím způsobem. Nechť i-tý účastník má prahovou hodnotu „inaction“ a „cowardice“ $H_i > 0$ a $C_i > 0$, respektive jsou přiděleny na začátku z rozdělení pravděpodobnosti. Pravidla pro aktualizování jsou:

1. Úroveň „cowardice“ pro i-tého investora je na začátku $c_i(0)$ náhodně vygenerována z intervalu $[0, 1]$ a v čase n je $c_i(n)$ definována a aktualizována prostřednictvím:

$$c_i(n+1) = \begin{cases} c_i(n) + h|\sigma(n)|, & s_i(n)\sigma(n) < 0 \\ c_i(n), & \textit{jinak.} \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Investoři, kteří jsou v menšině (tedy ti, kteří jsou ve stavu +1, pokud je $\sigma < 0$ a ve stavu -1 pokud $\sigma > 0$), budou mít v určité míře tlak/ motivaci, aby změnili svoji náladu na trhu a připojili se k většině v průběhu času.

Faktor h při aktualizaci napětí „cowardice“ $c_i(n+1) = c_i(n) + h|\sigma(n)|$ bere v úvahu délku doby, kdy je účastník v minoritě tak, že model je nezávislý na libovolných časových krocích. Hladina „cowardice“ zůstává pro všechny investory nezměněna, zatímco úroveň investorů v menšině se zvýšila o stejnou částku $h|\sigma(n)|$ (rozdíly mezi reakcemi investorů jsou vzhledem k jejich různým úrovním prahových hodnot C_i).

2. Nechť P_i je cena, kdy i-tý investor naposled změnil svoji pozici. Pokud $p(n+1) \notin [P_i/(1+H_i), P_i(1+H_i)]$ nebo $c_i > C_i$ (nebo obojí), potom „long“

se změní na „short“ a obráceně, P_i je nastavena na současnou cenu a napětí „cowardice“ je vynulována.

4.4. Simulace

Pro provedení simulací je třeba nastavit všechny parametry modelu z předchozí kapitoly. Jako první nastavíme délku časového kroku h a chceme, aby tento parametr odpovídal zhruba jednomu obchodnímu dni. Z tohoto důvodu nastavíme $h = 0.00004$ a zároveň počet iterací na 10000. Vzhledem k tomu, že během roku máme 250 obchodních dnů, bude to odpovídat zhruba 40 rokům. S přihlédnutím k délce časového intervalu jsou voleny následující parametry. Volíme práh „inaction“ pro i-tého investora z rovnoměrného rozdělení v rozmezí $10\% - 30\%$. Dále předpokládáme, že typický účastník trhu změní svoji náladu v důsledku „cowardice“ v délce časového rámce dlouhého od týdne až do několika měsíců, tak že C_i zvolíme také z rovnoměrného rozdělení v intervalu $[0.001, 0.004]$. Dále předpokládáme, že investoři s nižším prahem „cowardice“, budou mít také nižší práh „inaction“. Z toho vyplývá, že budou častěji přepínat svoji pozici na trhu, než investoři s vyššími prahovými hodnotami. Pro stanovení prahových hodnot i-tého investora vybereme náhodnou proměnnou z_i z rovnoměrného rozdělení na $[0, 1]$ a prahové hodnoty jsou určeny

$$C_i = 0.001 + 0.003z_i \quad H_i = 0.1 + 0.2z_i.$$

Hodnotu parametru $\kappa = 0.2$ je nastavena tak, aby se výsledné tržní ceny odchylovaly od základní ceny W_t jen do určité míry a byly vysoce korelované. Dále nastavíme počet investorů, kteří obchodují na trhu na hodnotu $M = 100$, jejich prahové hodnoty jsou generovány podle toho, jak bylo uvedeno výše. Počáteční úrovně napětí jsou náhodně rozděleny v souladu s jejich prahovými hodnotami, stejně jako jejich výchozí stavy ± 1. Dále nastavíme počáteční cenu $p(0) = 1$.

Výše uvedené parametry byly nastaveny stejně pro základní model i jeho rozšířené verze.

4.4.1. Základní model

Nyní si popíšeme výsledky, které jsme získali ze základního modelu popsaného výše. Výsledky jsou shrnuty na obrázku 4.1 a jednotlivé grafy nám vyjadřují následující:

1. graf ukazuje náladu na trhu jako funkci času. Stejně tak to může být interpretováno jako poměr mezi „long“ a „short“ investory. Vzhledem k tomu, že jsme pro naše modelování používali pouze „slow“ investory, kteří mění svoji náladu v delším časovém horizontu, vidíme, že dramatické změny celkové nálady na trhu se mění jednou za několik let.

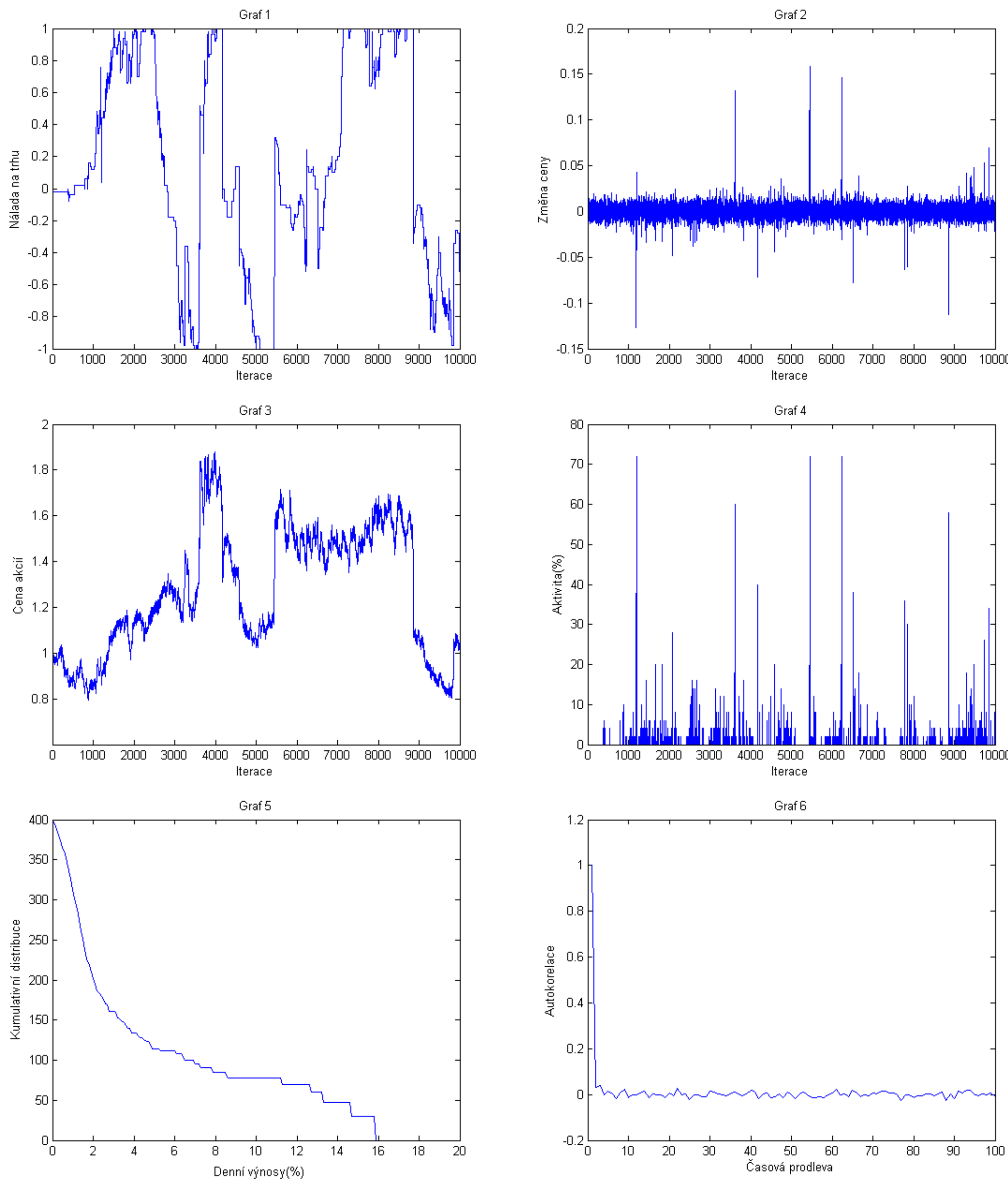
2. graf zobrazuje cenové výnosy, které jsme spočítali $\frac{p_{n+1}}{p_n} - 1$ jako funkci času. Výkmity, které vidíme odpovídají dramatickým posunům ve změně nálady, které souvisí s předcházejícím grafem.

3. graf znázorňuje tržní cenu, která se mění v závislosti na tom, jestli jsou investoři ve stavu +1 (spekulují na vzestup ceny) nebo -1 (spekulují na pokles ceny).

4. graf popisuje aktivitu investorů na finančním trhu, kterou měříme v procentech a vyjadřuje kolik procent investorů na konci každého období změní svoji investiční pozici.

5. graf vyobrazuje logaritmus kumulativní distribuce počtu denních výnosů, které překročí určitou hodnotu od 0 do 20%. Vidíme, že zpočátku přibližně kopíruje exponenciální rozdělení, kde jsou malé přebytky mezi denními výkyvy. Větší kolísání se pak zobrazuje jako přebytek špičatosti.

6. graf ukazuje autokorelaci denních výnosů na trhu. Vidíme, že výnosy nejsou závislé, kolísají kolem 0.



Obrázek 4.1: Výsledky základního modelu

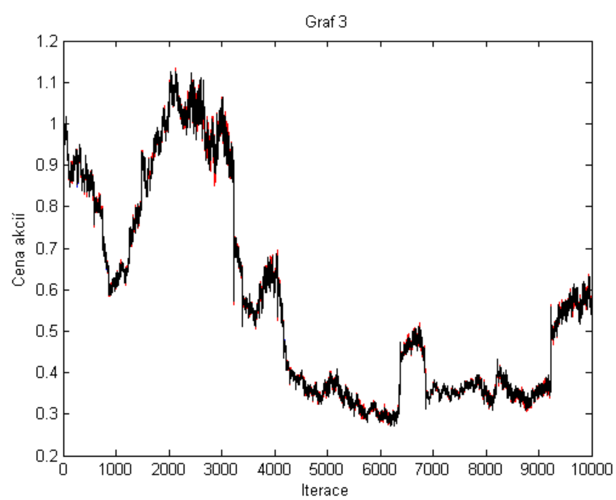
Tržní cenu definovanou vztahem (4.3.1), která je zobrazena modrou barvou, můžeme modifikovat přidáním korekci driftu (vyžadující Itôův vzorec) $-h/2$. Vztah pro cenu pak vypadá takto a v grafu ji znázorníme červenou barvou:

$$p(n+1) = p(n)\exp\Big(\sqrt{h}\Delta W(n) - \frac{h}{2} + \kappa\Delta\sigma(n)\Big). \tag{4.4.1.1}$$

Další úpravu, kterou lze provést, je přidání vlivu vnějších šoků k tržní náladě

$$p(n+1) = p(n)\exp\Big(\sqrt{h}\Delta W(n) - \frac{h}{2}f(\sigma) + \kappa\Delta\sigma(n)\Big), \tag{4.4.1.2}$$

kde $f(\sigma) = 1 + \alpha|\sigma|$ a výslednou cenu vyznačíme na obrázku černou barvou.



Obrázek 4.2: Graf zobrazující všechny tři ceny

Vidíme, že všechny tržní ceny sledují stejný trend, až na drobné výkmity. V simulacích proto používáme vždy vzorec (4.3.1) pro tržní cenu.

4.4.2. Rozšíření modelu

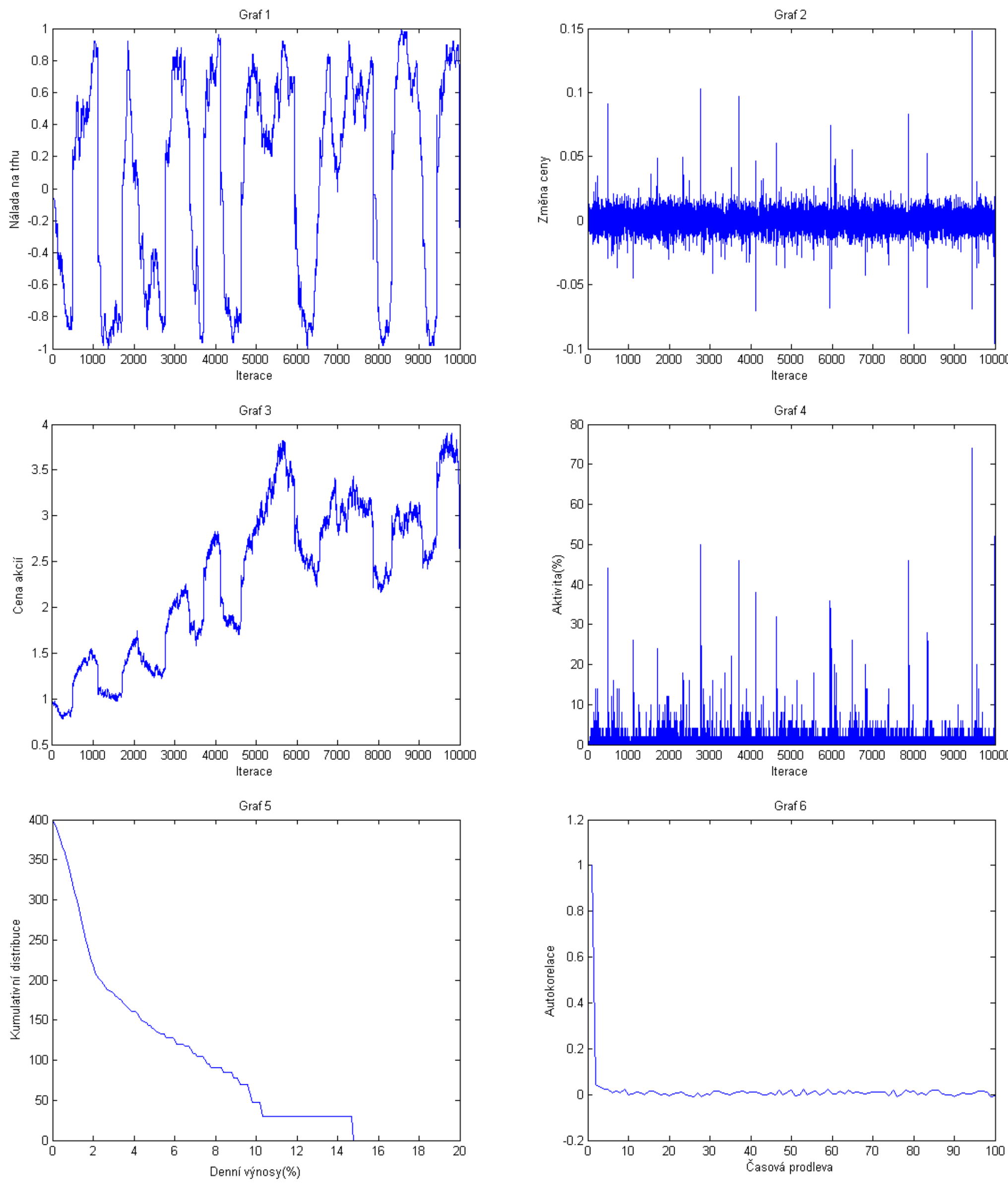
V této kapitole si představíme několik úprav a rozšíření základního modelu, které by jej přiblížily více realitě.

1.rozšíření

Jako první se budeme zabývat situací, kdy každý investor vnímá situaci na trhu s nějakou chybou. Formuli (4.3.2) upravíme tak, že do ní přidáme náhodné číslo vygenerované z normovaného normálního rozdělení, které nám umožní tento předpoklad do modelu zahrnout. A rovnici upravíme do následujícího tvaru:

$$c_i(n+1) = \begin{cases} c_i(n) + h|\sigma(n) + e|, & s_i(n)(\sigma(n) + e) < 0 \\ c_i(n), & jinak \end{cases} \tag{4.4.2.1}$$

Na obrázku 4.3 vidíme, že nálada na trhu se mění mnohem častěji (graf 1). Ovlivňuje to i samotnou cenu akcií, která častěji roste a klesá podle toho, jak investoři mění svoji náladu na trhu (graf 3). Na grafu 2 porovnáváme, jak se mění cena v čase n a $n-1$, kde pozorujeme větší změny. Aktivita investorů je stabilně vyšší (graf 4), než u základního modelu.



Obrázek 4.3: Výsledky 1. rozšíření

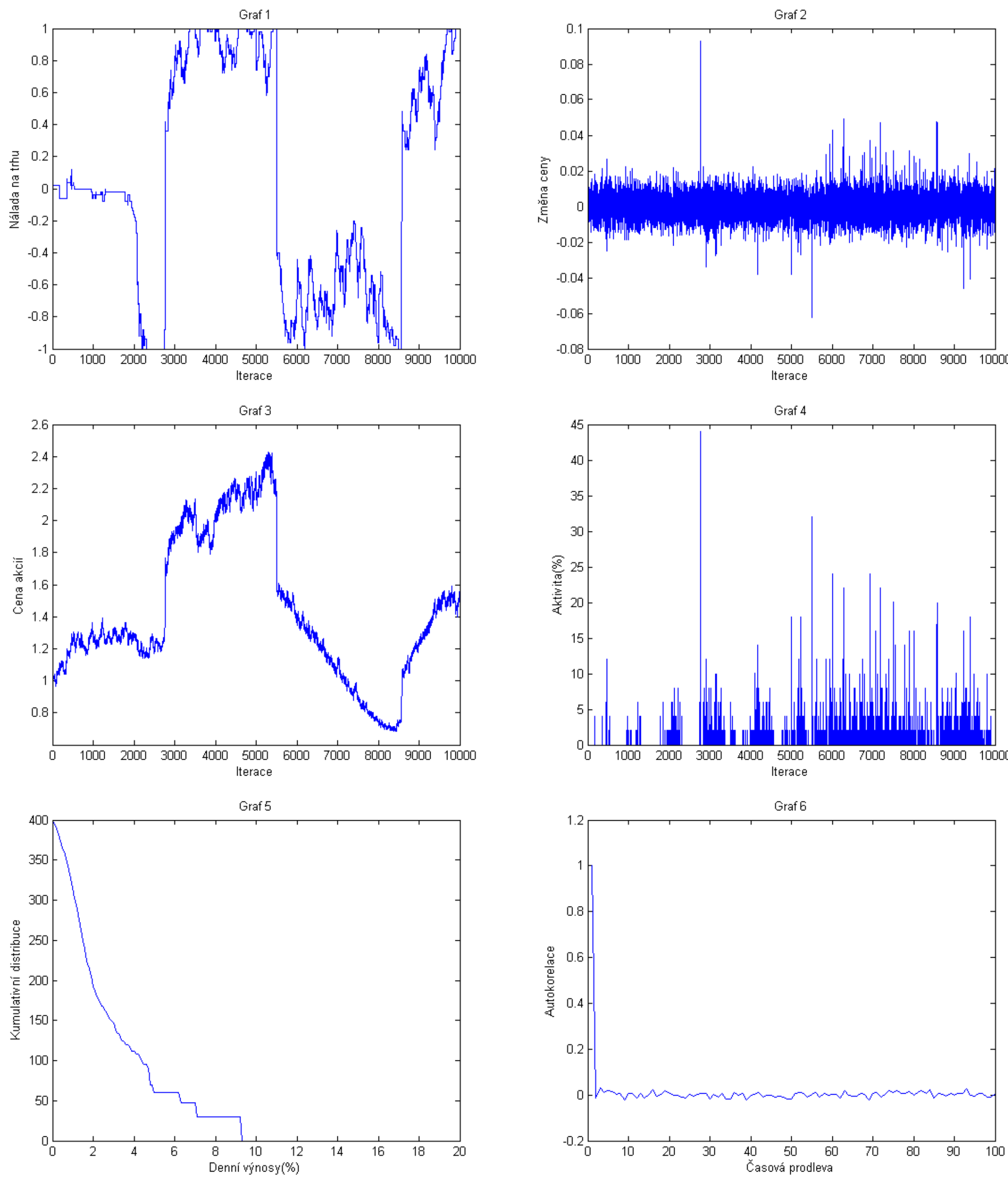
2.rozšíření

Druhé rozšíření, kterým se budeme zabývat, se týká změny v chování investorů. Budeme předpokládat, že svoji náladu nemění s pravděpodobností 1, ale s nižší. Tuto pravděpodobnost zadáme na začátku simulace.

Pro naše účely jsme zvolili pravděpodobnost s jakou změní svoji investiční pozici na 0.8.

Pokud je splněna následující podmínka $p(n+1) \notin [P_i/(1+H_i), P_i(1+H_i)]$ nebo $c_i > C_i$ (nebo obojí), vygenerujeme náhodné číslo a stanovíme novou podmínku, kde budeme porovnávat toto náhodné číslo se zadanou pravděpodobností. Potom jako v základním modelu investor změní svoji náladu z „long" na „short" nebo obráceně, P_i nastavíme na současnou cenu a napětí „cowardice" vynulujeme.

Na obrázku 4.4 se nálada na trhu bude měnit přes delší časový horizont zhruba ve stejných časových úsecích (graf 1). Je to způsobeno tím, že investor změní svoji pozici na trhu v 80 % případů. Stejný průběh má i cena akcií (graf 3).



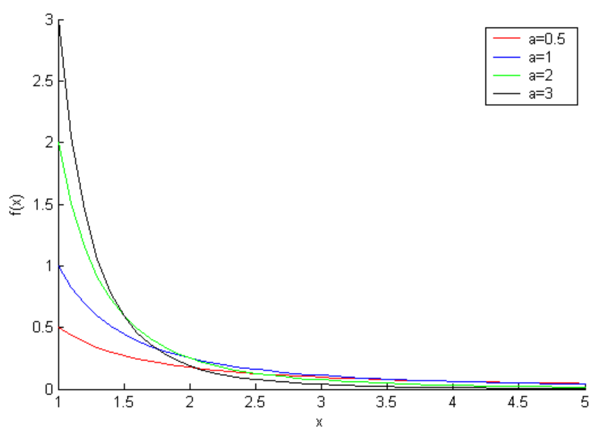
Obrázek 4.4: Výsledky 2. rozšíření

3.rozšíření

Doposud jsme předpokládali, že všichni investoři mají na trhu stejnou váhu. Ve skutečnosti se setkáváme s různými účastníky. První z nich jsou tzv.velcí hráči (market makeři). Početně je jich méně, ale objemy se kterými obchodují jsou mnohonásobně větší. V protikladu k nim máme drobné investory, kteří jsou ovlivňováni těmi velkými.

Paretovu distribuci využijeme pro generování vah, kdy náladu na trhu ovlivňují z 80% velcí investoři a na zbylých 20% mají vliv malí. Funkce hustoty Paretova rozdělení je dána:

$$f(x) = \frac{ak^a}{x^{a+1}}.$$



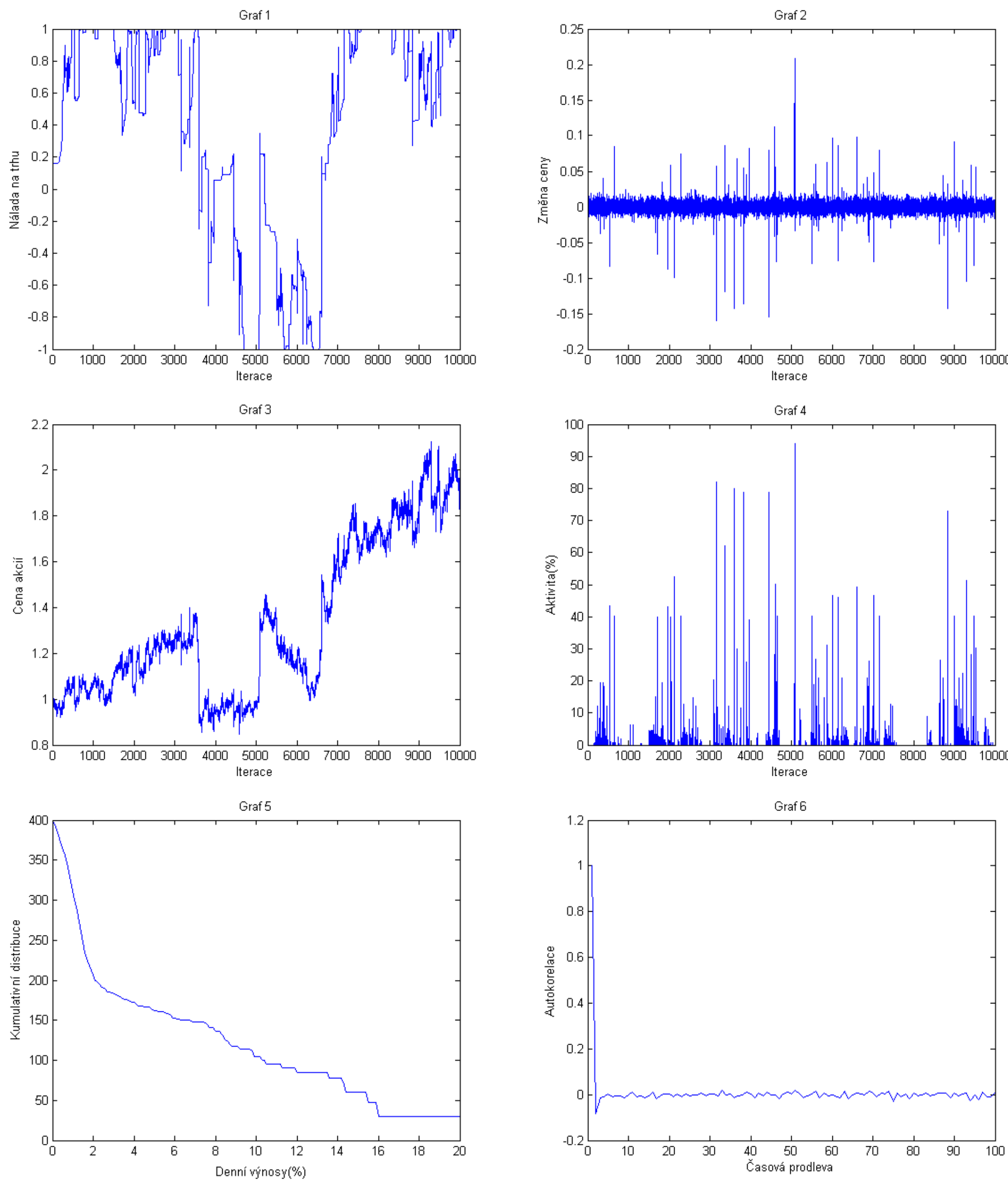
Obrázek 4.5: Funkce hustoty Paretova rozdělení

Do vztahu (4.1.6) jsme přidali váhy w generované z Paretovy distribuce a místo aritmetického průměru jsme použili vážený. Výsledný vztah má tuto podobu:

$$\sigma(n) = \frac{\sum_{i=1}^{M} s_i(n)\ w(i)}{\sum_{i=1}^{M} w(i)}.$$

Na obrázku 4.5 vidíme, že market makeři drží náladu na trhu. A drobní investoři častěji mění svoji náladu, aby se přizpůsobili těm velkým. Ke změně nálady investorů dochází přes delší časové období (graf 1). Cenové výnosy jsou pro drobné investory malé a pro velké větší, tento jev pozorujeme na grafu 2.

Cena akcií se mění přes delší časový horizont (graf 3). Můžeme pozorovat vyšší aktivitu účastníků trhu, která je způsobena častější změnou nálady drobných investorů (graf 4). Denní výnosy neklesly k 0 a převýšily hodnotu 20%, což zase může být způsobeno tím, došlo k opětovnému zvyšování ceny.



Obrázek 4.6: Výsledky 3. rozšíření

4.rozšíření

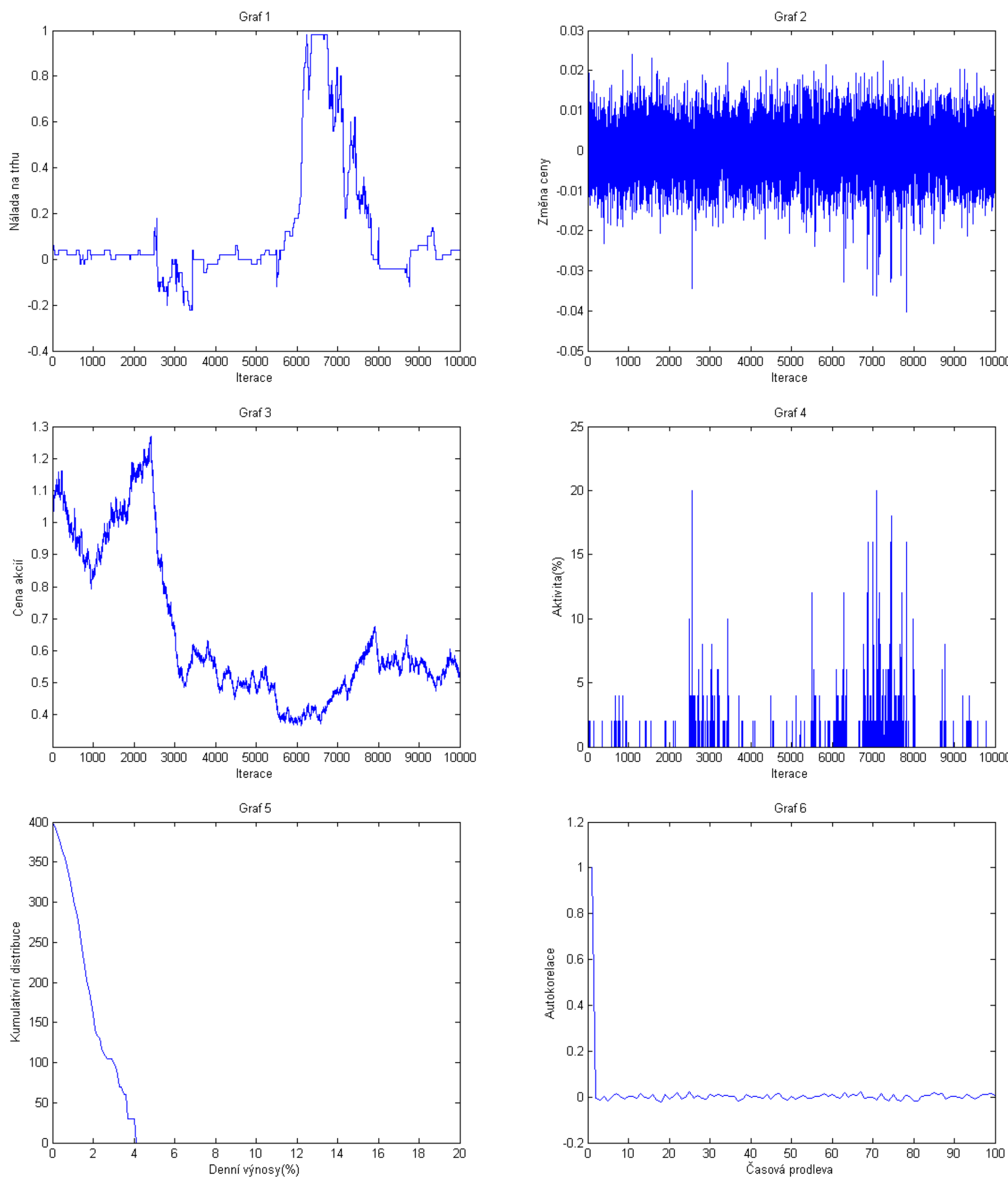
Nyní se pokusíme rozšířit model takovým stylem, že dáme dohromady kupující s prodávajícími. Provedeme u nich stejné změny jako v základním modelu. Prodávající a nakupující, kteří k sobě nenajdou odpovídajícího obchodního partnera, aktualizují pouze cenu a vynulujeme u nich „cowardice“, ale jejich nálada se nezmění.

Pro lepší pochopení a názornost si toto rozšíření vysvětlíme na jednoduchém příkladu, kdy uvažujeme 10 investorů, kteří jsou ve stavu „long“ +1 nebo „short“ -1 a zapsaném pomocí vektoru:

$$s_i(n) = [-1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1].$$

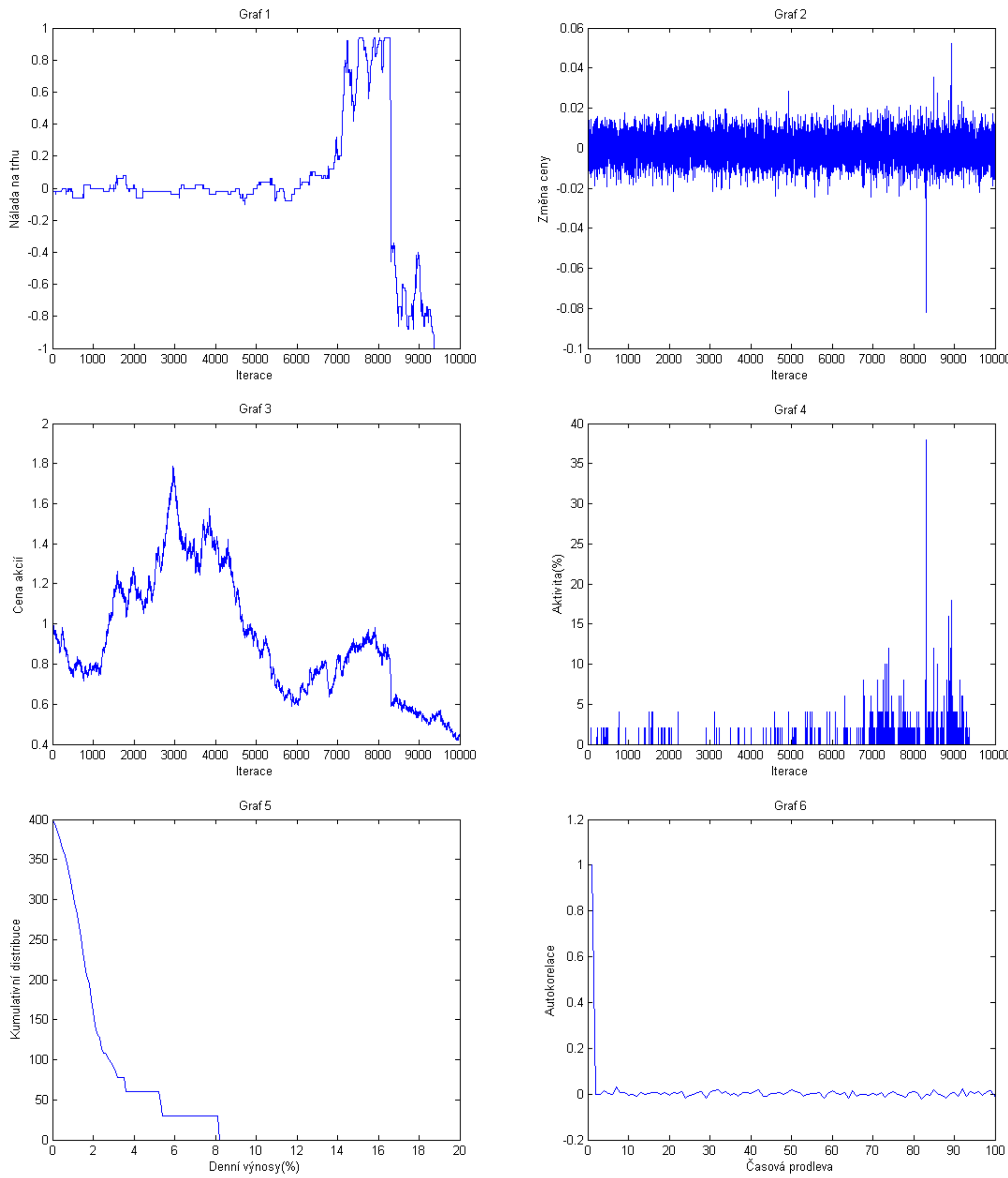
Vyplývá nám z toho, že 3 investoři jsou ve stavu „short“ a zbylých 7 je „long“. Jako první si vytvoříme 2 pole. Do prvního uložíme indexy investorů, podle toho na jakém místě se v poli nachází a jsou ve stavu „short“. Do druhého ty zbylé ve stavu „long“. Výsledkem budou pole: $p1 = [1, 3, 5]$ a $p2 = [2, 4, 6, 7, 8, 9, 10]$. Ve druhém kroce náhodně vygenerujeme z delšího pole stejný počet indexů, který je v prvním. V našem případě z $p2$ si náhodně vybereme 3 prvky, např. $p3 = [2, 8, 9]$ a zbylé prvky uložíme do $p4 = [4, 6, 7, 10]$. Pro investory, kteří se nachází na pozicích p1 a p3 provedeme stejné změny jako v základním modelu a na pole p4 aplikujeme nový postup, který u všech aktualizuje pouze cenu (střed intervalu „inaction“)a vynuluje prahovou hodnotu „cowardice“.

Na obrázku 4.6 máme situaci, kdy 48 investorů akcie na trhu prodává a 52 chce nakoupit. Vidíme, že nálada na trhu je dlouhou dobu vyrovnaná (graf 1). I cena se drží přes delší časový horizont zhruba na stejné úrovni (graf 3). Aktivita na trhu je menší (graf 4). Změna ceny se neděje až tak výrazně a nemá tolik výkmitů (graf 2). Ovlivní to i denní výnosy, které prudce klesají, díky tomu, že cena klesá.



Obrázek 4.7: Výsledky 4. rozšíření

Pro zajímavost na následujícím obrázku 4.7 je všech 100 investorů ve stavu short. Vidíme, že jejich aktivita na finančním trhu je dlouhou dobu malá.



Obrázek 4.8: Výsledky 4.rozšíření pro 100 investorů ve stavu short

Závěr

Hlavním cílem diplomové práce bylo ukázat odvození modelu finančního trhu, který je založen na předpokladech behaviorální ekonomie, naprogramovat tento model a jeho rozšíření tak, aby lépe odpovídal reálné situaci.

Po první a druhé kapitole, kde se zabývám dvěma protichůdnými ekonomickými teoriemi. Přichází teoretická část zabývající se stochastickými procesy, zejména markovskými, které využívají pro předpověď budoucí hodnoty pouze současnou hodnotu a toho jsme využili pro modelování tržní ceny akcie. Dále bylo potřeba zavést náhodnou procházku a Brownův pohyb, které spolu úzce souvisí. Následně jsme si ukázali stochastické diferenciální rovnice a jak je využijeme pro odvození tržní ceny akcie. Tyto poznatky jsme aplikovali na stěžejní část diplomové práce a odvození samotného modelu finančního trhu.

Nechybí zde ani simulace základního modelu a jeho rozšíření, které byly vytvořeny pomocí softwaru Matlab. Aby jsme mohli srovnat jednotlivé výsledky, byly použity stejné vstupní parametry. A provedli jsme více simulací. Pro názorné ukázky byly vybrány ty, které se opakovaly a potvrdili nám naše předpoklady.

Téma této práce mě velice zaujalo, protože jde o pokrokovou myšlenku přidat lidské emoce do modelování chování finančního trhu. V budoucnu by to mohlo být využíváno pro věrohodnější předpovědi.

Díky této práci jsem si prohloubila znalosti získané z předmětu Finanční matematika 2, kde jsme se mimo jiné zabývali modelováním tržní ceny akcie. A splnila jsem si i osobní cíl, lépe se naučit pracovat se softwarem Matlab.

Literatura

[1] Akcie online [online]. [cit. 2017-04-11]. Dostupné z: http://www.akcie.cz/slovnik/.

[2] Baxter,M., Rennie, A.: *Financial calculus: An introduction to derivative pricing.*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[3] Bohanesová, E: *Finanční matematika 2: Stochastický proces, Brownův pohyb* [online]. , [cit. 2017-03-30]. dostupné z: http://elearning-math.upol.cz/pluginfile.php/12955/mod_resource/content/1/FIM2_opora8.pdf.

[4] Bohanesová, E: *Finanční matematika 2: Itoova lemma, Modelování tržní ceny akcie* [online]. , [cit. 2017-03-30]. dostupné z: http://elearning-math.upol.cz/pluginfile.php/10888/mod_resource/content/1/FIM2_opora9.pdf.

[5] Camerer, Colin F., Loewenstein, G., Rabin, M..: *Advances in Behavioral Economics.* Princeton University Press, Princeton, 2004.

[6] Cipra, T. :*Matematika cenných papírů.*. PBtisk Příbram, 2013.

[7] Civín, L.: *Mezinárodní dělba práce, mezinárodní ekonomické vztahy a světové trhy* [online].[cit. 2017-04-11]. Dostupné z: https://is.bivs.cz/el/6110/zima2016/B103SEK1/um/4._prednaska_MDP__MEV_a_vvetove_trhy.txt?lang=en;so=nx;htmle=1.

[8] Cross, R., Grinfeld, M., Lamba, H., Seaman, T.: *A Threshold Model of Investor Psychology*, 2005.

[9] Cross, R., Grinfeld, M., Lamba, H., Seaman, T.: *Stylized facts from a treshold-based heterogeneous agent model*, 2007.

[10] Economist [online]. [cit. 2017-04-11]. Dostupné z: http://www.economist.com/economics-a-to-z/h.

[11] FinExpert [online]., [cit. 2014-03-24]. Dostupné z: http://finexpert.e15.cz/medvedi-nevedi.

[12] Forbelská, M, Koláček, J.: *Pravděpodobnost a statistika I.* Brno, Masarykova univerzita, 2013.

[13] Grimmett, G., Stirzaker, D. :*Probability and Random Processes.*. Great Britain, 2011.

[14] HOLČÍK, J., KOMENDA, M. (eds.) a kol. *Matematická biologie: e-learningová učebnice.* [online]., [cit. 2017-04-03]. Dostupné z: http://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=analyza-a-modelovani-dynamickych-biologickych-dat–vybrane-kapitoly-z-matematickeho-modelovani–nahodna-prochazka–definice-nahodne-prochazky.

[15] Holman, R. a kol.: *Dějiny ekonomického myšlení, 2.vydání.* C.H.Beck, Praha, 2001.

[16] Hron,K., Kunderová, P.: *Markovovy řetězce a jejich aplikace.* Univerzita Palackého v Olomouci, 2012.

[17] Klub investorů [online]. [cit. 2017-04-11]. Dostupné z: http://www.klubinvestoru.com/cs/article/2115-skola-investovani-7-subjekty-vstupujici-na-financni-trh-velci-hraci.

[18] Lalley, S: *Stochastic Calculus and Finance.* [online]. , [cit. 2017-03-28]. dostupné z: http://www.stat.uchicago.edu/ lalley/Courses/390/Lecture5.pdf.

[19] Lalley, S: *Stochastic Calculus and Finance.* [online]. , [cit. 2017-03-30]. dostupné z: http://www.stat.uchicago.edu/ lalley/Courses/390/Lecture6.pdf.

[20] Lamba, H.: *Implausible equilibrium solutions in economics and finance.*. [online]. , [cit. 2017-03-30]. dostupné z: http://math.gmu.edu/ harbir/implausible.pdf.

[21] Kolář, M.: *Učební text ze Stochastické analýzy*[online]. , [cit. 2017-04-10]. dostupné z: https://www.math.muni.cz/ mkolar/skripta002.pdf.

[22] Statistical Analysis Handbook [online]. [cit. 2017-04-11]. Dostupné z: http://www.statsref.com/HTML/index.html?pareto.html.

[23] Veselá, J.: *Analýza trhu cenných papírů II.díl: Fundamentální analýza.* Oeconomica, Praha, 2003.

Přílohy

Seznam přiložených programů:

- *main_n*
- *vypocet_sigmy_n*
- *vypocet_sigmy_vp*
- *cena_n*
- *cena1_n*
- *cena2_n*
- *cowardice_n*
- *cowardice_i*
- *prepnuti_n*
- *nahodne_prepnuti*
- *roztridlongshort*
- *prepnuti_nalady*

Popis programů:

- *main_n* - základní program, který uživatel spouští. V programu musí nastavit vstupní parametry (počet investorů, počáteční cenu, délku diskrétního časového kroku, celkovou tržní intenzitu, prahové hodnoty, počet iterací).
- *vypocet_sigmy_n* - funkce popisující náladu na trhu (poměr mezi long a short investory).
- *vypocet_sigmy_vp* - funkce popisující náladu na trhu, když jednotlivý investoři mají na trhu různou váhu (3.rozšíření).
- *cena_n* - funkce, která vypočítá tržní cenu na konci n-tého intervalu podle vztahu (4.3.1).
- *cena1_n* - funkce, která vypočítá tržní cenu na konci n-tého intervalu s přidáním driftu pomocí Itôva kalkulu podle vztahu (4.4.1.1).

- *cena2_n* - funkce, která vypočítá tržní cenu na konci n-tého intervalu s vlivem vnějších šoků k tržní náladě podle vztahu (4.4.1.2). Všechny tři ceny slouží k porovnání.
- *cowardice_n* - funkce popisující úroveň přepnutí každého investora na trhu v čase při porušení prahové hodnoty cowardice.
- *cowardice_i* - funkce popisující, jak jednotliví investoři vnímají náladu na trhu s určitou chybou. Když se poruší jeho prahová hodnota cowardice, je nucen přepnout. (1.rozšíření).
- *prepnuti_n* - funkce popisující přepnutí i-tého investora.
- *nahodne_prepnuti* - funkce popisující přepnutí i-tého investora s určitou zadanou pravděpodobností. (2.rozšíření)
- *roztridlongshort* - funkce, která dá k sobě stejný počet long a short investorů a ty, co jsou navíc, přidá do zvláštního pole. (4.rozšíření)
- *prepnuti_nalady* - funkce popisující přepnutí prodávajících, kteří si najdou kupce. A těch, kteří jej nenašli. (4.rozšíření)

Main_n obsahuje tyto funkce pro základní model:

- *vypocet_sigmy_n*
- *cena_n*
- *cowardice_n*
- *prepnuti_n*

Pro změnu základního modelu za nějakou rozšířenou verzi, stačí zapoznámkovat původní funkci a odpoznámkovat příslušnou funkci podle následujícího návodu:

1. rozšířená verze obsahuje tyto funkce:

- *vypocet_sigmy_n*
- *cena_n*
- *cowardice_i*
- *prepnuti_n*

2. rozšířená verze obsahuje tyto funkce:

- *vypocet_sigmy_n*
- *cena_n*
- *cowardice_n*
- *nahodne_prepnuti*

3. rozšířená verze obsahuje tyto funkce:

- *vypocet_sigmy_vp*
- *cena_n*
- *cowardice_n*
- *prepnuti_n*

4. rozšířená verze obsahuje tyto funkce:

- *vypocet_sigmy_n*
- *cena_n*
- *cowardice_n*
- *roztridlongshort*
- *prepnuti_nalady*