Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Fakulta
Katedra

Bakalářská práce

Aplikační úlohy z diferenciálního počtu jedné proměnné

Vypracoval: Michaela Jelínková
Vedoucí práce: RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

České Budějovice, 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Aplikační úlohy z diferenciálního počtu jedné proměnné jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích, 5. 12. 2013 ………………………………………….

Poděkování

Chtěla bych poděkovat RNDr. Vladimíře Petráškové, Ph.D., vedoucí mé bakalářské práce za vedení, připomínky a čas, který mi věnovala. Mé poděkování patří též mé rodině a blízkým přátelům za podporu a pomoc během studia.

Anotace v českém jazyce

Cílem práce je vytvořit sbírku řešených příkladů, která bude zaměřena na průběh funkce jedné reálné proměnné a na slovní úlohy na extrém. Příklady budou řazeny dle obtížnosti a budou doplněny grafickým znázorněním.

Annotation

The aim of the thesis is to create a portfolio with solved exercises, which will be focused on process of function of one real variable and on word problems dealing with extreme. The exercises will be ordered by difficulty and enriched by graphs.

OBSAH

1. ÚVOD

Tato bakalářská práce je věnována diferenciálnímu počtu jedné reálné proměnné, respektive se bude zabývat jeho využitím a aplikacemi. Uvede také potřebnou teorii k danému tématu, bez které by se aplikace neobešly. Jelikož určitá přesnost a systém matematiky by měly být zachovány, nelze tedy v průvodních komentářích aplikačních příkladů používat předem nezavedenou a nevysvětlenou terminologii a teorii.

V první části práce je shrnuta základní teorie diferenciálního počtu jedné reálné proměnné, která je nutná k řešení aplikačních úloh (jedná se převážně o průběhy funkcí a optimalizační úlohy na extrém). Jsou zde shrnuty základní důležité definice a věty týkající se daného tématu. Počátek teoretické části je věnován základní teorii a terminologii týkající se funkcí jako takových, které budeme využívat a s nimiž budeme pracovat v dalších kapitolách. Jedná se především o funkce lineární, kvadratické, mocninné se sudým nebo lichým mocnitelem, tedy funkce polynomické, funkce n-tá odmocnina se sudou nebo lichou odmocninou a dále také funkce lineárně lomená, goniometrické funkce, logaritmická a exponenciální funkce. To jsou funkce, které se nejčastěji objevují právě v aplikačních úlohách, ostatní druhy funkcí, jako například funkce signum, celá a necelá část a absolutní hodnota zde zmiňovány nebudou.

Druhá část práce je věnována již výše zmíněným aplikačním úlohám. Část je zaměřena na průběhy funkcí jedné reálné proměnné. U každého příkladu je uvedeno zadání a následně početní i grafické řešení. Příklady jsou řazeny od jednodušších funkcí po ty složitější. Další část aplikačních úloh je věnována optimalizačním úlohám na extrém a svým zpracováním se neliší od předchozích typů příkladů.

Cílem práce je vytvořit sbírku řešených příkladů, zaměřenou na výše zmiňované aplikace. Jak již bylo výše poznamenáno, příklady jsou řazeny dle obtížnosti od nejjednoduššího ke složitějším a jsou provázeny jednak slovním komentářem, který vysvětluje jednotlivé postupy a objasňuje určité početní operace a kroky, jednak grafickým zobrazením. Grafy k jednotlivým funkcím jsou vytvořeny v programu Geogebra. Sbírka by měla sloužit jako studijní opora převážně studentům středních škol a bakalářských studií matematiky a měla by pomoci pochopit a objasnit danou problematiku.

2. FUNKCE A JEJICH VLASTNOSTI

V této kapitole budeme definovat základní pojmy z oblasti funkcí a uvedeme základní teorii týkající se funkcí. V této kapitole je čerpáno především z Hrubý, Kubát $[4]$ a Petrášková, Zmeškalová $[7]$.

Abychom mohli vůbec hovořit o funkci, je třeba definovat, co to funkce je.

Definice: **Funkce jedné reálné proměnné** je množina uspořádaných dvojic, kde platí, že každému prvnímu prvku z uspořádané dvojice je přiřazen právě jeden druhý prvek z uspořádané dvojice. Matematicky lze zapsat tyto vlastnosti následovně:

1. Každý prvek množiny f je uspořádaná dvojice $[x; y]$, pro $x, y \in R$,
2. $(\forall x_1, y_1, y_2 \in R), ([x; y_1] \in f \wedge [x;\ y_2] \in f) \Rightarrow\ y_1 = y_2)$
   (tedy každému možnému x je přiřazeno právě jedno y).

Definice: **Definiční obor** a **Obor hodnot**

- Množinu všech prvních složek uspořádaných dvojic, které jsou jejími prvky, nazýváme **definiční obor** a značíme ***Df:***

$$Df = \{x;\ \exists\ y \in R;\ [x; y] \in f\}.$$

- Množinu všech druhých složek uspořádaných dvojic, které jsou jejími prvky, nazýváme **obor hodnot** a značíme ***Hf***:

$$Hf = \{y;\ \exists\ x \in R;\ [x; y] \in f\}.$$

Dále nás bude zajímat pojem **složená funkce**, jelikož budeme řešit převážně průběh funkcí, které jsou právě složenými funkcemi.

Definice: Nechť máme dvě funkce *f* a *g.* Funkce *h*, pro kterou platí dvě následující podmínky:

1. $Dh = \{x \in Dg \wedge g(x) \in Df\}$, (tzn., že pro definiční obor nově vzniklé funkce platí, že všechna *x* jsou zároveň prvky definičního oboru vnitřní funkce a funkční hodnoty vnitřní funkce jsou zároveň prvky definičního oboru vnější funkce),
2. $\forall x \epsilon Dh;\ h(x) = f\big(g(x)\big)$,

nazýváme složenou funkcí a značíme $h = g \circ f$, kde *g* je funkcí vnitřní a *f* je funkcí vnější.

Nyní je třeba zavést základní vlastnosti funkcí, prozatím ty, které lze určit bez použití diferenciálního počtu. Tyto vlastnosti budou vždy zjišťované u každého průběhu funkce.

Definice: **Parita (**resp. sudost nebo lichost)

a) Funkce *f* se nazývá sudá, pokud platí $(\forall x \in D), (f(-x) = f(x))$.

(Graf sudé funkce je souměrný podle osy y).

b) Funkce *f* se nazývá lichá, pokud platí $(\forall x \in D), (f(-x) = -f(x))$.

(Graf liché funkce je souměrný podle počátku).

Definice: **Periodicita**

Funkce *f* se nazývá periodická s periodou $p \neq 0$, jestliže platí:

$(\forall x \in Df)\big(f(x+p) = f(x) \wedge f(x-p) = f(x)\big)$. Existuje-li nejmenší číslo $p_0 > 0$ takové, že funkce *f* je periodická s periodou p_0, tak toto číslo nazýváme nejmenší periodou.

Definice: **Injekce, bijekce** (resp. funkce prostá, vzájemně jednoznačné zobrazení)

a) Funkce f se nazývá **injektivní** (prostá), jestliže platí:

$(\forall x_1, x_2 \in Df), (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq fx_2))$, to znamená, že dvěma různým x_1, x_2 nelze přiřadit stejnou funkční hodnotu.

b) Přepokládejme, že funkce f je prostá a zároveň platí: $Df = A$ a $Hf = B$ (množiny *A* a *B* jsou libovolné množiny). Pak funkci *f* nazýváme **bijekcí** mezi *A* a *B* neboli vzájemně jednoznačné zobrazení z množiny A na množinu B.

Věta: Pokud funkce f, g, h jsou funkce a $h = g \circ f$, kde *g* je vnitřní a *f* je vnější funkce, potom platí:

1. jsou-li funkce *f* a *g* prosté ⇒ funkce *h* je také prostá,
2. je-li funkce *g* bijekce mezi *A* a *B*, funkce *f* je bijekcí mezi *B* a *C* ⇒ funkce *h* je bijekcí mezi *A* a *C*.

Definice**: Inverzní funkce**

Pokud je funkce *f* prostá, potom k ní existuje inverzní funkce f_{-1}, pro kterou platí:

$f_{-1} = \{[x; y] \in R \times R; [y; x] \in f\}$.

Poznámka: $y = f_{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$, to znamená, že dochází k záměně *x* za *y* a naopak. Graf inverzní funkce je souměrný s původní funkcí podle osy 1. a 3. kvadrantu.

Věta: Základní vlastnosti inverzní funkce jsou:

1. $Df = Hf_{-1} \wedge Hf = Df_{-1}$,
2. inverzní funkce f_{-1} je prostá,
3. funkce *f* je inverzní funkcí k funkci f_{-1} (*f* a f_{-1} jsou navzájem inverzní).

Definice: **Monotonie funkce**

Definuje se pomocí porovnání dvou funkčních hodnot. Funkce *f* je v *Df*:

a) **rostoucí, jestliže platí:** $(\forall x_1, x_2 \in Df), (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$,
s rostoucím *x* roste i *y*.

b) **klesající, jestliže platí:** $(\forall x_1, x_2 \in Df)$**:** $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$,
s rostoucím *x* klesá *y*.

c) **neklesající, jestliže platí:** $(\forall x_1, x_2 \in Df)$**:** $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$,
s rostoucím *x* neklesá *y*.

d) **nerostoucí, jestliže platí:** $(\forall x_1, x_2 \in Df)$**:** $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$,
s rostoucím *x* neroste *y*.

e) **konstantní jestliže platí:** $(\forall x_1, x_2 \in Df)$**:** $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$,
pro všechna *x* funkce nabírá stejné hodnoty.

Poznámka: Pokud je funkce ryze monotónní (tzn. rostoucí nebo klesající), je také prostá.

Věta:

Pokud f, g, h jsou funkce, pro které platí $h = g \circ f$ (složená funkce), *g* je vnitřní a *f* je vnější funkce, potom platí, že jsou-li *f* a *g* monotónní, pak je také *h* monotónní. Speciálně:

1. je-li *f*, *g* rostoucí ⇒ funkce *h* je také rostoucí.
2. je-li *f* rostoucí, *g* klesající ⇒ funkce *h* je klesající.
3. je-li *f*, *g* klesající ⇒ funkce *h* je rostoucí.

Věta: Pokud je funkce f rostoucí (respektive klesající) na množině $H \subseteq Df$, potom f_{-1} je také rostoucí (respektive klesající) na množině $H_f = \{f(x), x \epsilon H\}$.

Poznámka: Funkce inverzní zachovává monotonie původní funkce.

Definice: **Omezenost funkce**

a) Funkce f je **omezená shora** na množině M (to je buď celý *Df* nebo jeho část), jestliže: $\exists K_1 \in R$ takové, že platí $(\forall x \in M), (f(x) \leq K_1)$.

b) Funkce f je **omezená zdola** na množině M, jestliže $\exists K_2 \in R$, takové, že platí $(\forall x \in M), (f(x) \geq K_2)$.

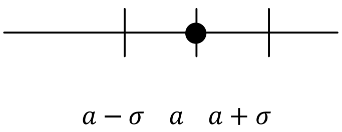
c) Funkce f je **omezená** na množině M, jestliže $\exists K > 0$ takové, že platí $(\forall x \in M), (|f(x)| \leq K)$. To znamená, že funkce je omezená shoda i zdola zároveň.

Spojitost funkce

Spojitost funkce je definována pomocí **okolí bodu nebo pomocí limity funkce.**

$U_\sigma(a)$: σ okolí bodu *a* je otevřený interval $(a - \sigma;\ a + \sigma)$.

Pro každé x z intervalu platí: $a - \sigma < x < a + \sigma$,tedy každé x z intervalu leží v okolí bodu.



σ ……………………… poloměr okolí

a ……………………… střed okolí

$U_\sigma(a) - \{a\}$ ……… prstencové okolí bodu *a.* Značíme $P_\sigma(a)$.

Obdobně lze definovat i pravé (levé) okolí bodu jako zprava (zleva) uzavřený interval.

Definice: Funkce *f* je **spojitá v bodě** *a*, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu $f(a)$ existuje takové okolí bodu *a*, že pro všechna *x* z tohoto okolí bodu *a* patří hodnoty $f(x)$ do zvoleného okolí bodu $f(a)$.

Definice: Funkce *f* je **spojitá v bodě** *a*, právě když $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Obdobně lze definovat i spojitost zprava (zleva).

<u>Věta</u>: Funkce je spojitá na celém *Df*, pokud je spojitá v každém jeho bodě. **V otevřeném intervalu $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ je spojitá** tehdy, pokud je spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. **V uzavřeném intervalu $\langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \rangle$ je spojitá** tehdy, pokud je spojitá v $(a; b)$ a dále je spojitá v bodě *a* zprava a v bodě *b* zleva.

<u>Definice:</u> Funkce je spojitá na množině *M*, která je sjednocením konečného počtu intervalů, jestliže je spojitá v každém intervalu.

<u>Věta:</u> Pokud jsou funkce f a g spojité v bodě a, potom i funkce $f + g; f \cdot g$ jsou spojité v bodě *a*. Je – li $f(a) \neq 0$, potom i funkce $\frac{1}{f(a)}$ je spojitá v bodě *a*.

<u>Věta:</u> Pokud jsou funkce *f*, *g*, *h* takové, že platí: $h = g \circ f$, g je vnitřní funkce, f je vnější funkce a dále platí, že funkce *g* je spojitá v bodě *a* a funkce *f* je spojitá v bodě $g(a)$, pak je i funkce *h* spojitá v bodě *a*.

<u>Definice</u>: **Limita funkce**

Nechť *f* je funkce a $a, L \in R^*$. Říkáme, že funkce *f* má v bodě *a* limitu rovnu *L*, jestliže platí: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \sigma > 0)(\forall x \in P_\sigma(a))(f(x) \in U_\varepsilon(L))$, značíme $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Obdobně lze definovat **limitu zprava (zleva)**, pokud zaměníme ve výše zmíněné definici $P_\sigma(a)$za $P_\sigma^+(a)$ (za $P_\sigma^-(a)$), a značíme $\lim_{x \to a+} f(x) = L$ ($\lim_{x \to a-} f(x) = L$).

<u>Věta</u>: Nechť pro funkce *f* a *g* platí: funkce *f* je tzv. „nulová“ (tedy $\lim_{x \to a} f(x) = 0$) a funkce *g* je omezená na daném okolí $U_\varepsilon(a)$ (tedy $(\exists K > 0)\big(\forall x \in U_\varepsilon(a)\big)$: $|g(x)| \leq K$). Pak existuje $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x)$ a platí $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

<u>Poznámka</u>: Nejběžnějšími neurčitými výrazy jsou: $\infty + (-\infty)$; $\frac{0}{0}$; $\infty \cdot 0$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; ∞^0, … .

Pokud při řešení limity vyjde neurčitý výraz, nelze o ní rozhodnout.

<u>Poznámka</u>: Přehled definovaných výrazů: $A \cdot \infty = \infty$ (pro $A > 0$); $A \cdot \infty = -\infty$ (pro $A < 0$); $\infty \cdot \infty = \infty$; $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$; $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$; $\frac{A}{\infty} = 0$; $\frac{\infty}{A} = \infty$ (pro $A > 0$); $\frac{\infty}{A} = -\infty$ (pro $A < 0$).

<u>Věta</u>: Jestliže existuje $\lim_{x \to a} f(x) = A$ a ex. $\lim_{x \to a} g(x) = B$, potom platí:

1. $\lim_{x \to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = A + B$ (pokud A+B $\neq \infty - \infty$).
2. $\lim_{x \to a}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = A - B$ (pokud A-B $\neq \infty - \infty$).
3. $\lim_{x \to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot B$ (pokud A $\cdot$B $\neq \infty \cdot 0$).
4. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}$ za předpokladu, že $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ a pokud $\frac{A}{B} \neq \frac{0}{0}$ nebo $\frac{A}{B} \neq \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$). (Tedy platí, že pokud $A \neq 0$, pak $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A}$).

3. DERIVACE FUNKCE

Derivace funkce je jeden ze stěžejních pojmů diferenciálního počtu vůbec. Pomocí derivace funkce lze zjišťovat mnohé další vlastnosti funkce, které budou v této kapitole vysvětleny. Derivaci lze definovat z více hledisek, například z algebraického, geometrického nebo fyzikálního. Existuje mnoho definic, vzorců, pravidel a vět, které pro derivování používáme. V této kapitole jsou uvedena ta nejdůležitější z nich, která budou v dalších kapitolách (aplikacích) četněji použity.

V této kapitole je čerpáno především z Hrubý, Kubát [4], Frolíková [3] a Bušek [2].

<u>Definice</u>**:** Nechť f je funkce, $a \in R$, pak **funkce *f* má v bodě *a* derivaci**, pokud existuje limita $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Značíme $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

<u>Poznámka</u>: Pokud je limita reálné číslo, mluvíme o vlastní derivaci. Pokud je limita rovna $\pm\infty$, pak mluvíme o nevlastní derivaci.

Obdobně jako u limit lze určit i **derivaci zprava (zleva)**: $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $(\lim_{x \to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a})$.

<u>Věta</u>: Funkce *f* má v bodě *a* derivaci, právě tehdy, když má v daném bodě i derivaci zprava a zleva a všechny tyto derivace se shodují.

<u>Věta</u>: **Funkce *f* má v intervalu $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ derivaci**, jestliže má derivaci v každém vnitřním bodě $(a; b)$. **Funkce *f* má v intervalu $\langle \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \rangle$ derivaci**, jestliže má derivaci v každém vnitřním bodě $(a; b)$ a v bodě *a* má derivaci zprava a v bodě *b* má derivaci zleva.

<u>Poznámka</u>: **geometrická a fyzikální interpretace derivace funkce v bodě**

Geometricky a graficky se jedná o směrnici tečny ke grafu v daném bodě, neboli směrnice přímky ($k = tg\alpha$), kde rovnice přímky (tečny) je definována jako přímka $y = kx + q$.

Ve **fyzikálním** významu má význam pro výpočet okamžité rychlosti.

Věta: Nechť *f* je funkce, $a \in R$. Nechť *f* má v bodě *a* vlastní derivace, pak je funkce *f* v bodě *a* spojitá.

Definiční obor derivované funkce: $Df' = \{x \in Df$ ∧ ex. v bodě x vlastní derivace $\}$.

3.1 VZORCE PRO DERIVOVÁNÍ FUNKCÍ

Věta: **derivování součtu, součinu, rozdílu, podílu, složené a převrácené funkce**:

Nechť *f* a *g* jsou funkce, $a \in R$. Nechť existuje derivace *f'* a *g'* v bodě *a. P*ak:

1. ex. $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ … **derivování součtu a rozdílu**.
2. ex. $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ … **derivování součinu**.
3. $g(a) \neq 0 \Rightarrow$ existuje **derivace převrácené funkce** $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$.

Poznámka: Na základě bodů 2. a 3. platí vzorec pro derivování podílu, a to $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

Věta: Nechť pro funkce *f*, *g*, *h* platí, že $h = g \circ f$, *g* je vnitřní funkce, *f* je vnější funkce, dále existuje $g(a)$; $a \in R$, a existuje derivace vnější funkce v bodě $g(a)$. Pak existuje derivace funkce složené v bodě *a* $(f(g(a))' = f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

Základní vtahy pro derivování, které budou později využity**:**

$(c)' = 0; (c \in R)$

$(x)' = 1; (x \in R)$

$(x^c)' = c \cdot x^{c-1}; (x > 0; c \in R)$

$(c^x)' = c^x \cdot \ln c; (x \in R; c > 0)$

$(e^x)' = e^x; (x \in R)$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}; (x > 0)$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; (x > 0; a > 0; a \neq 1)$

$(\sin x)' = \cos x; (x \in R)$

$(\cos x)' = -\sin x; (x \in R)$

$(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}; \left(x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}; k \in Z\right)$

$(\cot x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}; (x \neq k\pi; k \in Z)$

Věta: **L´Hospitalovo pravidlo**

Pokud f a g jsou funkce, $a \in R^*$, ex. $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ a platí, že se jedná o limitu, která vychází jako typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$, pak existuje limita podílu a platí, že $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

3.2 EXTRÉMY FUNKCE

Extrémy funkce jsou také jedním z nejdůležitějších sledovaných ukazatelů vlastností funkce, zjišťované u každého průběhu funkce. Extrémy funkce jsou dvojího typu – lokální a globální. Nejprve vždy zjišťujeme **extrémy lokální** a až poté **extrémy globální**.

3.2.1 LOKÁLNÍ EXTRÉM

Definice: **Lokální extrém**

Funkce f má v bodě *c* lokální maximum (minimum), jestliže existuje nějaké okolí bodu *c* takové, že funkce *f* v bodě *c* nabývá na tomto okolí maxima (minima).

Věta: **Nutná podmínka pro lokální extrém** (podmínka, která musí nejprve nastat, aby v daném bodě mohl být daný extrém)

Pokud má funkce *f* v bodě *c* lokální extrém, pak $f'(c) = 0$ nebo $f'(c)$ neexistuje.

Poznámka: Výše uvedená věta neplatí obráceně! To znamená, pokud je první derivace rovna nule, pak nemusí být v daném bodě extrém.

Věta: **Postačující podmínka pro lokální extrém** (podmínka, která je jistotou pro extrém v daném bodě)

Nechť *f* je funkce, $c \in R$, nechť $(\exists \sigma > 0)$ tak, že pro $\forall x \in P_\sigma(c)$ existuje vlastní derivace a platí:

1.

a) $(\forall x \in P_{\sigma}^{+}(c): f'(x) < 0)$

b) $(\forall x \in P_{\sigma}^{-}(c): f'(x) > 0)$

c) funkce *f* je v bodě *c* spojitá.

Pak má tato funkce v bodě *c* lokální maximum.

2.

a) $(\forall x \in P_{\sigma}^{+}(c): f'(x) > 0)$

b) $(\forall x \in P_{\sigma}^{-}(c): f'(x) < 0)$

c) funkce *f* je v bodě *c* spojitá.

Pak má tato funkce v bodě *c* lokální minimum.

Poznámka: Lokální extrémy zjišťujeme pomocí první derivace funkce, a to tak, že ji položíme rovnou nule. Tím získáme body, ve kterých se mohou nacházet lokální extrémy, tzv. **stacionární body**. Pomocí monotonie funkce zleva a zprava zjistíme, zda se jedná o lokální extrém (v tom případě dochází v daném bodě ke změně monotonie) a určíme, zda jde o lokální maximum či minimum, s předpokladem, že v daných bodech derivace existuje. Monotonii zjišťujeme dosazením libovolného čísla z daného intervalu do předpisu první derivace. Pokud vyjde kladná hodnota, funkce je rostoucí, při záporné hodnotě je funkce klesající.

Věta: Má-li funkce f v každém bodě intervalu $(a; b)$ kladnou derivaci, je v tomto intervalu rostoucí. Naopak má-li funkce *f* v každém bodě intervalu $(a; b)$ zápornou derivaci, je v tomto intervalu klesající.

3.2.2 GLOBÁLNÍ EXTRÉM

Definice: **Globální extrém**

Nechť f je funkce, $M \subseteq Df$. Pak řekneme, že funkce f má v bodě $a \in M$ globální maximum, respektive minimum, na množině M, jestliže platí pro každý bod $x \in M$, že $f(x) \leq f(a)$, respektive $f(x) \geq f(a)$.

Při určování globálních extrémů na uzavřeném intervalu lze použít **Weirstrassovu větu**.

Věta: **Weirstrassova věta**

Nechť f je funkce spojitá na určitém intervalu $\langle a; b\rangle$, přičemž $a, b \in R$. Potom funkce f nabývá v bodě c svého minima, popřípadě maxima, pokud bod c splňuje jednu z následujících podmínek:

1. $c = a \wedge c = b$
2. $c \in (a; b) \wedge f'(c) = 0$
3. $c \in (a; b) \wedge f'(c)$ neexistuje.

Poznámka: Podle Weierstrassovy věty musíme nejdříve najít body splňující podmínky 1), 2) a 3) a poté nalézt jejich funkční hodnoty. Tyto funkční hodnoty porovnáme (seřadíme od nejnižší po nejvyšší), přičemž nejvyšší hodnota je globálním maximem a nejnižší hodnota je globálním minimem.

Věta: Má-li funkce f v každém bodě intervalu $(a; b)$ kladnou derivaci, je v tomto intervalu rostoucí. Naopak má-li funkce *f* v každém bodě intervalu $(a; b)$ zápornou derivaci, je v tomto intervalu klesající.

3.3 KONVEXNOST A KONKÁVNOST

Dalšími vlastnostmi zjišťované u průběhu funkce jsou konvexnost a konkávnost.

Definice: Funkce *f* se nazývá **konvexní** na intervalu *I*, právě když pro libovolná čísla $x_1, x_2, x_3 \in I$, která splňují nerovnost $x_1 < x_2 < x_3$, platí, že bod $[x_2; f(x_2)]$ leží pod přímkou procházející body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_3; f(x_3)]$ nebo na ní.

Funkce *f* se nazývá **konkávní** na intervalu *I*, právě když pro libovolná čísla $x_1, x_2, x_3 \in I$, která splňují nerovnost $x_1 < x_2 < x_3$, platí, že bod $[x_2; f(x_2)]$ leží nad přímkou procházející body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_3; f(x_3)]$ nebo na ní.

V případě, že vyloučíme připuštěnou možnost, kdy bod leží na přímce, jedná se o funkci **ryze konvexní** na intervalu *I*, popřípadě o funkci **ryze konkávní** na intervalu *I*.

Věta: Nechť existuje druhá derivace funkce f a nechť je funkce na daném intervalu nebo definičním oboru spojitá. Pokud v každém vnitřním bodě intervalu nebo *Df* platí:

1. $f'' > 0$, pak je funkce na intervalu či *Df* ryze konvexní.
2. $f'' \geq 0$, pak je funkce na intervalu či *Df* konvexní.
3. $f'' < 0$, pak je funkce na intervalu či *Df* ryze konkávní.
4. $f'' \leq 0$, pak je funkce na intervalu či *Df* konkávní.
5. $f'' = 0$, pak se jedná o funkci lineární.

Definice: **Konvexnost a konkávnost v bodě**

Nechť f je funkce, $a \in R$ a existuje vlastní derivace $f'(a)$.

a) Funkce f je **ryze konvexní v bodě** a, jestliže existuje $\sigma > 0$ takové, že pro každé $x \in ((a-\sigma; a) \cup (a;\ a+\sigma))$ platí:

$f(x) > f'(a)(x-a) + f(a)$.

b) Funkce f je **ryze konkávní v bodě** a, jestliže existuje $\sigma > 0$ takové, že pro každé $x \in ((a-\sigma; a) \cup (a;\ a+\sigma))$ platí:

$f(x) < f'(a)(x-a) + f(a)$.

Poznámka: V tomto případě vedeme tečnu ke grafu v daném bodě. Všechny ostatní funkční hodnoty leží buď pod přímkou (tzn. poloha pod tečnou), nebo nad přímkou (tzn. poloha nad tečnou). V prvním případě se jedná o funkci ryze konkávní, v druhém o funkci ryze konvexní.

Poznámka: Je-li funkce konvexní, respektive konkávní v každém bodu intervalu *I*, pak je konvexní, respektive konkávní na celém tomto intervalu *I*.

Definice: **Inflexní bod**

Nechť má funkce f v bodě a derivaci. Pokud přechází v tomto bodě konvexnost na konkávnost nebo naopak (tzn. z polohy pod tečnou do polohy pod tečnou a naopak), nazýváme bod a inflexním bodem funkce.

Věta: **Nutná podmínka pro inflexní bod**

Je-li bod a inflexním bodem funkce f a existuje-li v tomto bodě druhá derivace funkce, pak má funkce *f* v tomto budě druhou derivaci $f''(a) = 0$.

Věta: **Postačující podmínka pro inflexní bod**

Nechť existuje druhá derivace funkce f v každém bodě z okolí bodu a a platí, že v pravém okolí bodu $P_\sigma^+(a)$ je $f'' > 0$, a v levém okolí bodu $P_\sigma^-(a)$ je $f'' < 0$, resp., že v okolí bodu $P_\sigma^+(a)$ je $f'' < 0$, a v levém okolí bodu $P_\sigma^-(a)$ je $f'' > 0$, pak je bod *a* inflexní bod funkce *f*.

3.4 ASYMPTOTY FUNKCE

Asymptoty funkce jsou přímky, které usměrňují graf. Existují asymptoty se směrnicí a bez směrnice, neboli vertikální. Jako každá přímka, i asymptota má svou rovnici.

Definice: **Asymptota se směrnicí**

Přímka s rovnicí $y = kx + q$ se nazývá **asymptota** funkce *f* **se směrnicí** pro x→∞ (pokud je funkce *f* definovaná na intervalu $(a; \infty)$), popřípadě pro x→−∞ (pokud je funkce *f* definovaná na intervalu $(-\infty; a)$), $a \in R$, jestliže $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x) - (kx + q)\big) = 0$, popřípadě $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x) - (kx + q)\big) = 0$.

Definice: **Asymptota bez směrnice (tzn. vertikální asymptota)**

Je-li funkce f definovaná na intervalu $(a; b)$, přičemž $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \pm\infty$, pak má funkce *f* vertikální asymptotu $x = a$ nebo $x = b$.

Poznámka: Vertikální asymptota je přímka rovnoběžná s osou *y*.

Věta: **Nutná a zároveň postačující podmínka pro existenci asymptoty**

Přímka $y = kx + q$ je asymptotou právě tehdy, když platí, že $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k; (k \in R)$ a dále platí, že $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x) - k(x)\big) = q; (q \in R)$.

4. APLIKACE DRIVACE FUNKCE

V této kapitole budeme řešit aplikační úlohy, při jejichž řešení budeme užívat diferenciálního počtu. Těmito aplikačními úlohami jsou převážně průběhy funkcí a úlohy na extrémy funkce, přičemž se budu věnovat z pravidla úlohám matematického charakteru. Diferenciální počet se totiž používá i v mnoha dalších oborech, například ve fyzice, jak již bylo zmíněno výše, ale také v biologii, chemii a podobně.

4.1. PRŮBĚH FUNKCE

Najít průběh funkce znamená postupně určit a popsat všechny funkční vlastnosti, které byly vysvětleny v předchozích kapitolách. Vlastnosti funkce budou vždy řazeny následovně:

1. definiční obor funkce, spojitost funkce, popřípadě periodicita,
2. průsečíky s osami x a y,
3. parita funkce,
4. monotonie funkce a stacionární body, lokální maxima a lokální minima,
5. konvexnost, konkávnost a inflexní body,
6. limity v krajních bodech definičního oboru
7. asymptoty funkce,
8. obor hodnot, popřípadě další vlastnosti funkce, globální extrémy (pokud existují)
9. graf funkce.

Po vyřešení těchto vlastností budeme u každého příkladu řešit navíc případ, kdy předpis funkce zůstane stejný, ale její definiční obor bude omezen na určitý uzavřený interval.
V tomto případě nás budou zajímat pouze globální extrémy funkce na daném intervalu, popřípadě ty vlastnosti, které nebudou shodné s předchozím řešením s ohledem na zúžený interval Df.

4.1.1 Je dána funkce: $\boldsymbol{f(x) = 2x - x^3}$

a) Vyšetřete průběh funkce.

b) Určete globální extrémy na intervalu $\langle -\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}} \rangle$.

Řešení:

a)

- **Definiční obor**: $Df = R$

  Spojitost: Funkce je spojitá v *Df*, protože je rozdílem dvou spojitých funkcí.

- Nyní určíme **průsečíky s osami:**

Průsečík s osou *x*: $y = 0 \Longrightarrow 2x - x^3 = 0$

$$x \cdot (2 - x^2) = 0$$

$x_1 = 0;\ x_2 = -\sqrt{2};\ x_3 = \sqrt{2} \Longrightarrow P_{x1} = [0; 0];\ P_{x2} = [-\sqrt{2}; 0];\ P_{x3} = [\sqrt{2}; 0]$.

Průsečík s osou *y*: $x = 0 \Longrightarrow y = 0$. $P_y = [0; 0]$.

- **Parita**: Aby byla funkce sudá nebo lichá, musí mít funkce tzv. symetrický *Df*, což je v tomto případě splněno. Můžeme tedy přistoupit k určení předpisu funkce $f(-x)$.

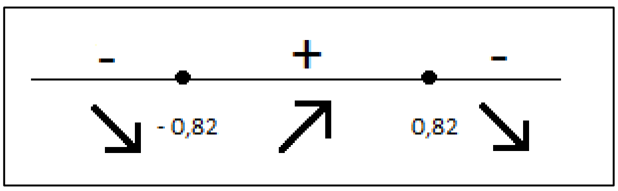
$f(-x) = -2x + x^3 = -f(x)$, z čehož vyplývá, že tato funkce je lichá.

- **Lokální extrémy a monotonie**: Najdeme první derivaci a položíme jí rovnou nule.

$f'(x) = -3x^2 + 2$

$-3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \cong \pm 0{,}82$, což jsou stacionární body.

Nyní zjistíme monotonii nalezených intervalů dosazením libovolného čísla daného intervalu do první derivace. Pokud bude první derivace kladná, pak je funkce na daném intervalu rostoucí, naopak při záporné hodnotě je funkce klesající.



Rostoucí na $(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}})$,

Klesající na $(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\rangle; \langle\sqrt{\frac{2}{3}}; \infty)$.

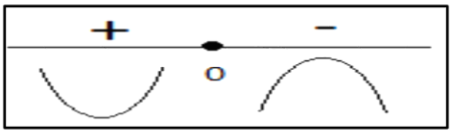
Jelikož je funkce lichá, stačí znát monotonii na intervalu $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right\rangle$, a z lichosti funkce vyplývá, že i na intervalu $\left\langle\sqrt{\frac{2}{3}}; \infty\right)$ musí mít funkce tutéž monotonii.

Protože dochází v bodech $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ a $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ke změně monotonie, což je postačující podmínkou pro existenci lokálního extrému v těchto bodech, je v bodě $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}; -\frac{4\sqrt{6}}{9}\right]$ lokální minimum a v bodě $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{4\sqrt{6}}{9}\right]$ lokální maximum. ($f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{9}$; $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4\sqrt{6}}{9}$).

- **Inflexní body a konvexnost, resp. konkávnost**: Najdeme druhou derivaci a položíme rovnu nule.

$f''(x) = (-3x^2 + 2)' = -6x$

$-6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, možný inflexní bod. Abychom to mohli určit s jistotou, je nutné zjistit konvexnost a konkávnost v intervalech od nuly zprava a zleva.



Konvexní na $(-\infty; 0\rangle$,

Konkávní na $(0; \infty)$.

Protože se mění v $x = 0$ konvexnost na konkávnost, je splněna postačující podmínka pro existenci inflexního bodu $x = 0$.

- **Limity**: V tomto případě hledáme limity v bodech$\pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} -x^3 + 2x = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot (2 - x^2) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 + 2x = \lim\limits_{x\to-\infty} x \cdot (2 - x^2) = -\infty \cdot (-\infty) = \infty$, ale jelikož máme lichou funkci, limita v $-\infty$ musí mít hodnotu s opačným znaménkem než limita v +∞.

- **Asymptoty**: a) bez směrnice: neexistují, protože nemáme žádné body nespojitosti,

  b) se směrnicí: ve tvaru $y = kx + q$, kde:

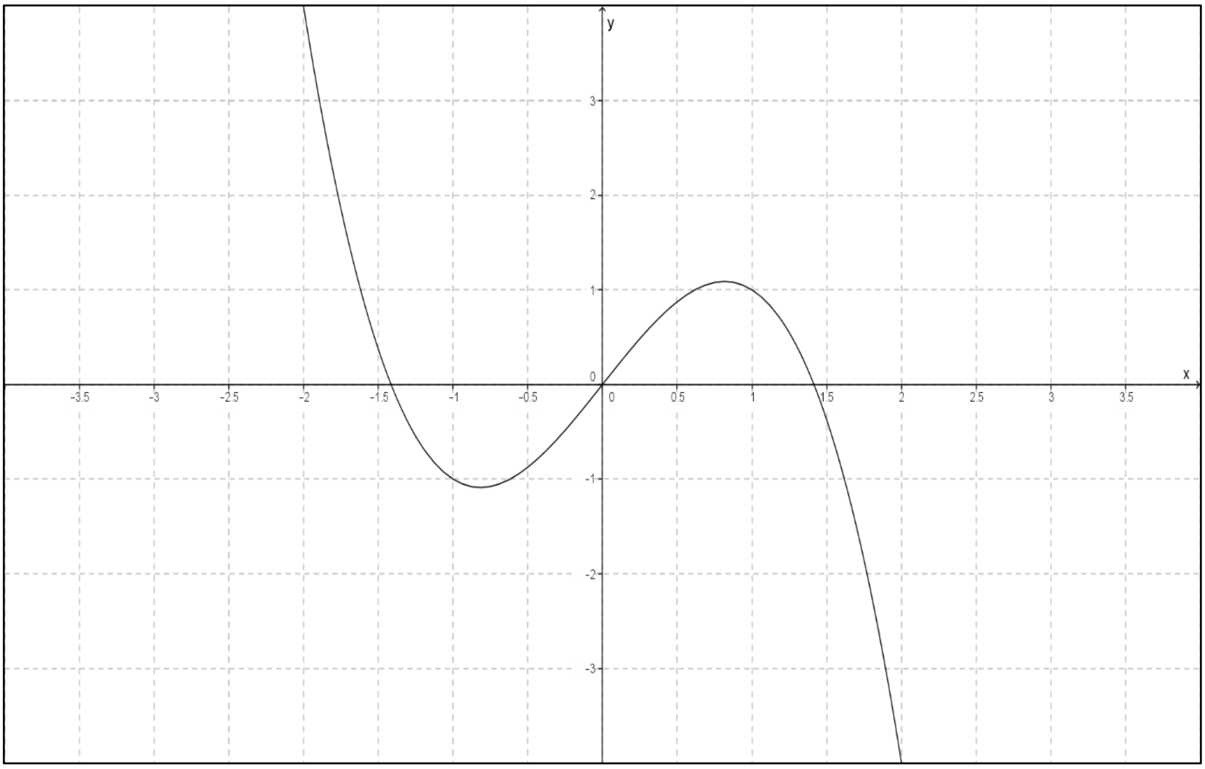
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x^3+2x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\cdot(-x^2+2)}{x} = -\infty$; $k \notin R \Longrightarrow$ asymptota neexistuje.

- Funkce není omezená na *Df* a je spojitá na *Df* $\Longrightarrow \boldsymbol{Hf} = R$.

Vzhledem k průběhu funkce a k určeným limitám v $\pm\infty$ víme, že lokální minimum v bodě $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}: f(x) = -\frac{4\sqrt{6}}{9}$ není globálním minimem, protože funkce nabývá i nižších hodnot a lokální maximum $x = \sqrt{\frac{2}{3}}: f(x) = \frac{4\sqrt{6}}{9}$ není globálním maximem funkce, protože funkce nabývá i vyšších hodnot.

Tato funkce není prostá, protože neplatí definice pro injektivní funkci v kapitole 2.

- **Graf**:



b)

- Nyní předpis funkce zůstává stejný $f(x) = 2x - x^3$, ale máme omezený *Df*, a to na uzavřený interval $\langle -\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}} \rangle$. Naším úkolem je určit globální extrémy na tomto intervalu.

Při tomto úkolu budeme vždy využívat Weierstrassovi věty, která říká, že na uzavřeném intervalu spojité funkce nabývají svých globálních extrémů.

1.) Podle Weierstrassovi věty také platí, že stačí najít body, ve kterých je 1. derivace rovna 0 nebo neexistuje. Z předchozího řešení víme, že máme lokální maximum $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{4\sqrt{6}}{9}\right]$ a lokální minimum $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}; -\frac{4\sqrt{6}}{9}\right]$. V jiných bodech derivace hodnoty 0 nenabývá a existuje ve všech bodech z Df'.

2.) Zjistíme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu. Tedy $f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{9}$ a $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4\sqrt{6}}{9}$, což známe, protože jsou to již nalezené lokální extrémy.

3.) Porovnáme všechny nalezené funkčních hodnoty. V tomto případě žádné nové hodnoty nemáme, proto nejvyšší nalezená hodnota je globálním maximem funkce na tomto intervalu, to znamená, že funkce nabývá svého globálního maxima v bodě $x = \sqrt{\frac{2}{3}} : \max f(x) = \frac{4\sqrt{6}}{9}$.

Nejnižší nalezená hodnota je globálním minimem funkce na tomto intervalu, to znamená, že funkce nabývá svého globálního minima v bodě $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}: \min f(x) = -\frac{4\sqrt{6}}{9}$.

Zatímco na celém *Df* globální extrémy neexistovaly, v uzavřeném intervalu jsme našli globální maximum i minimum.

Funkce na tomto intervalu je navíc prostá, jelikož na daném intervalu se žádná funkční hodnota neopakuje.

4.1.2 Je dána funkce: $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2 + 1}}$

a) Vyšetřete průběh funkce.

b) Určete globální extrémy na intervalu $\langle -2; 3 \rangle$.

Řešení:

a)

- **Definiční obor**: $Df = R$

  Spojitost: Funkce je spojitá v *Df*, protože skládáme spojité funkce.

- Nyní určíme **průsečíky s osami:**

Průsečík s osou *x*: $y = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 0$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{NŘ.}$$

Průsečík s osou *y*: $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow P_y = [0; 1]$.

- **Parita**: Symetrický *Df* v tomto případě máme. Můžeme tedy určit $f(-x)$.

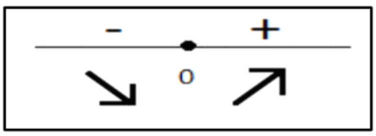
$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$,z čehož vyplývá, že tato funkce je sudá.

- **Lokální extrémy a monotonie**: Najdeme první derivaci a položíme ji rovnou nule.

$f'(x) = ((x^2 + 1)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, což je stacionární bod podezřelý z extrému.

Nyní zjistíme monotonii nalezených intervalů dosazením libovolného čísla daného intervalu do první derivace. Pokud bude první derivace kladná, pak je funkce na daném intervalu rostoucí, naopak při záporné hodnotě je funkce klesající.



Rostoucí na $(0; \infty)$,

Klesající na $(-\infty; 0\rangle$.

Jelikož je funkce sudá, stačí znát monotonii na intervalu $(-\infty; 0\rangle$, a ze sudosti funkce vyplývá, že na intervalu $\langle 0; \infty)$ musí mít funkce opačnou monotónii.

V levém okolí bodu $x = 0$ je funkce klesající, v pravém okolí tohoto bodu rostoucí, čímž je splněna postačující podmínka pro existenci lokálního extrému v tomto bodě, tedy v bodě $[0; 1]$ je lokální minimum. ($f(0) = 1$).

- **Inflexní body a konvexnost, resp. konkávnost**: Najdeme druhou derivaci a položíme ji rovnou nule.

$$f''^{(x)} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x^2+1}{1}} = \frac{1}{(x^2+1) \cdot \sqrt{x^2+1}} \neq 0$$

$\Longrightarrow$ Není splněná nutná podmínka pro existenci inflexního bodu, a tudíž inflexní bod neexistuje. $f''(x) > 0$: pro $\forall x \in Df$ je funkce je ryze konvexní.

- **Limity**: Hledáme limity v bodech$\pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} = \infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = \infty$, ale jelikož máme sudou funkci, limita v $-\infty$ musí být stejná s limitou v ∞.

- **Asymptoty**: a) bez směrnice: neexistují, protože nemáme žádné body, které nepatří do *Df* .

b) se směrnicí: ve tvaru $y = kx + q$, kde:

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 \cdot \left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1}$=1,

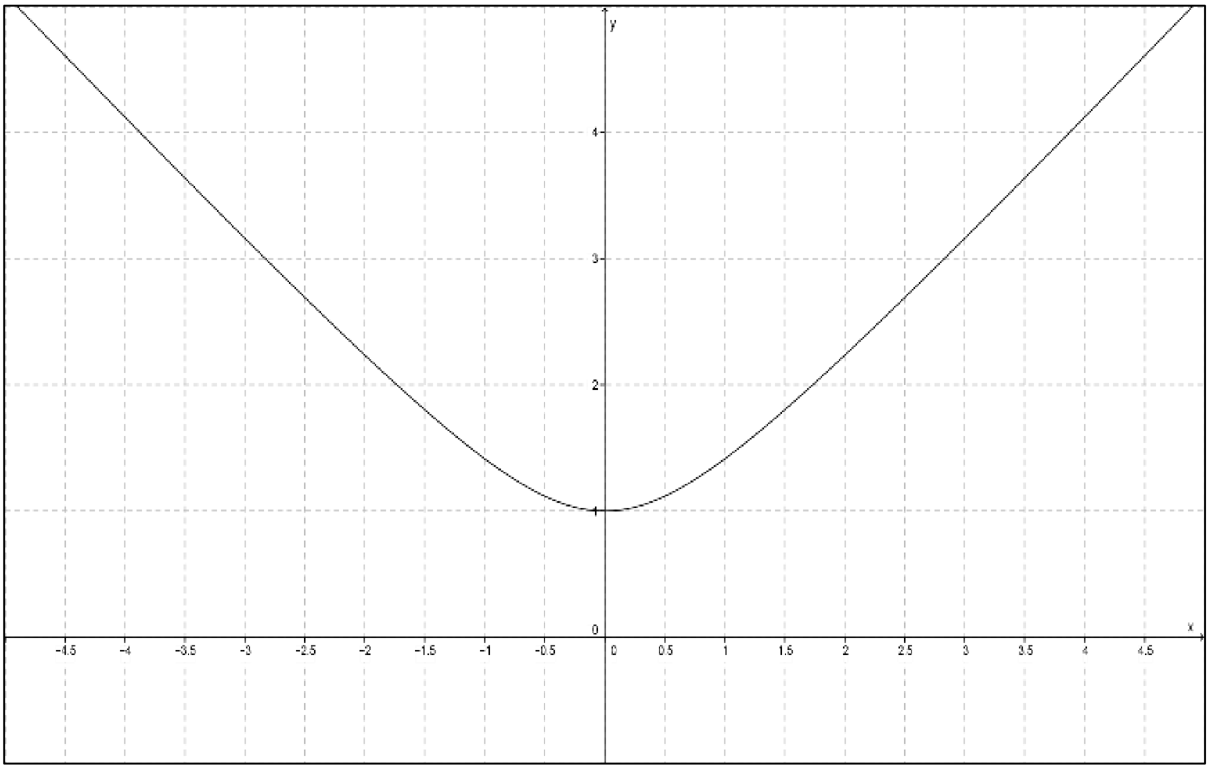
$q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + kx = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} + x = \infty + \infty = \infty;, q \notin R \Longrightarrow$ asymptota neexistuje.

- Funkce je spojitá na *Df* a nabývá na *Df* svého lokálního a zároveň globálního minima v bodě $x = 0$: min $f(x) = 1$, protože nižší hodnoty na celém *Df* už nenabývá $\Longrightarrow \boldsymbol{Hf} = \langle 1; \infty)$. Funkce je tedy také omezená hodnotou $f(x) = 1$ zdola.

Globálním maximum neexistuje vzhledem k limitám v $\pm\infty$, funkce tedy nabývá i vyšších hodnot, než lokálního maxima.

Tato funkce není prostá, protože neplatí definice pro injektivní funkci v kapitole.

- **Graf**:



b)

- Nyní předpis funkce zůstává stejný $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, ale máme omezený *Df* na uzavřený interval $\langle -2; 3 \rangle$. Hledáme globální extrémy.

Při tomto úkolu využijeme opět Weierstrassovi věty.

1.) Na základě Weierstrassovi věty stačí najít body, ve kterých je 1. derivace rovna 0 nebo neexistuje. Máme lokální minimum $[0; 1]$.Další body této podmínce nevyhovují.

2.) Nyní zjistíme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu. Hledáme tedy funkční hodnoty v bodě $f(-2) = \sqrt{5}$ a $f(3) = \sqrt{10}$.

3.) Porovnáme všechny nalezené funkční hodnoty.

$1 < \sqrt{5} < \sqrt{10} \implies$ Nejvyšší nalezená hodnota je globálním maximem funkce na tomto intervalu, to znamená, že funkce nabývá svého globálního maxima v bodě x = 3: $\max f(x) = \sqrt{10}$. Nejnižší nalezená hodnota je globální minimum, to znamená, že v bodě $x = 0$ nabývá funkce globálního minima: $\min f(x) = 1$.

Tato funkce již není sudá, protože nemá symetrický *Df.*

4.1.3 Je dána funkce: $\boldsymbol{f(x) = x^4 - 3x^2 + 2}$

a) Vyšetřete průběh funkce.

b) Určete globální extrémy na intervalu $\langle -1; \sqrt{\frac{3}{2}} \rangle$.

Řešení:

a)

- **Definiční obor**: $Df = R$

  Spojitost: Funkce je spojitá v *Df*, protože máme součet a rozdíl spojitých funkcí.

- Nyní určíme **průsečíky s osami:**

Průsečík s osou *x*: $y = 0 \Longrightarrow x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

substituce a=$x^2 \Longrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$

$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1;\ a_1 = \frac{3+1}{2} = 2;\ a_2 = \frac{3-1}{2} = 1$

$a_1 = x^2 \Longrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2};\ a_2 = x^2 \Longrightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$P_{x1} = [\sqrt{5}; 0];\ P_{x2} = [-\sqrt{5}; 0];\ P_{x3} = [-1; 0];\ P_{x4} = [1; 0].$

Průsečík s osou *y*: $x = 0 \Longrightarrow y = 2 \Longrightarrow P_y = [0; 2].$

- **Parita**: Máme symetrický *Df*, takže můžeme hledat $f(-x)$.

$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 2 = x^4 - 3x^2 + 2 = f(x)$, tedy je to funkce sudá.

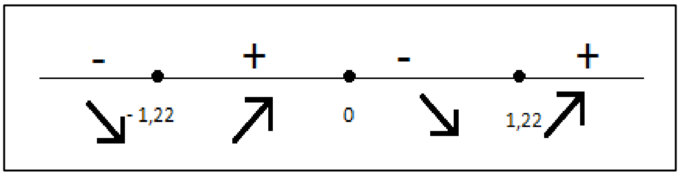
- **Lokální extrémy a monotonie**: Najdeme první derivaci a položíme ji rovnou nule.

$f'(x) = 4x^3 - 6x$

$4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (2x^2 - 3) = 0 \ \Leftrightarrow x_1 = 0;\ 2x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \cong \pm 1{,}22$, což

jsou stacionární body podezřelé z extrémů.

Nyní zjistíme monotonii nalezených intervalů dosazením libovolného čísla daného intervalu do první derivace. Pokud bude první derivace kladná, pak je funkce na daném intervalu rostoucí, naopak při záporné hodnotě je funkce klesající.



Rostoucí na $\langle -\sqrt{\frac{3}{2}}; 0\rangle \cup \left\langle\sqrt{\frac{3}{2}}; \infty\right)$,

Klesající na $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right); \left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

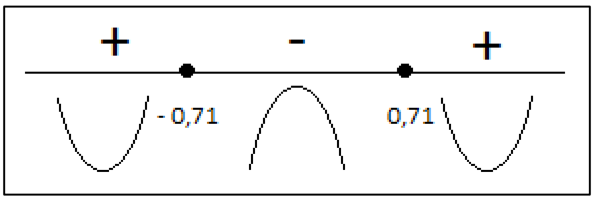
Jelikož je funkce sudá, stačí znát monotonii na intervalech $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right\rangle$ a $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0\right\rangle$ a ze sudosti funkce vyplývá, že i na intervalu a $\left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right\rangle$ je funkce klesající na na $(\sqrt{\frac{3}{2}}; 8\rangle$ rostoucí.

Protože dochází v bodech -$\sqrt{\frac{3}{2}}; 0; \sqrt{\frac{3}{2}}$ ke změně monotonie, což je postačující podmínkou pro existenci lokálních extrémů v těchto bodech, je v bodech $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}; -\frac{1}{4}\right]$ a $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}; -\frac{1}{4}\right]$ lokální minimum a v bodě $[0; 2]$ lokální maximum. $f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{4}; f(0) = 2.$

- **Inflexní body a konvexnost, resp. konkávnost**: Najdeme druhou derivaci a položíme ji rovnou nule.

$f''(x) = (4x^3 - 6x)' = 12x^2 - 6$

$12x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \cong \pm 0{,}71$, což jsou možné inflexní body. Abychom to mohli určit s jistotou, zjistíme konvexnost a konkávnost v intervalech zprava a zleva.



Konvexní na $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{1}{2}}\right\rangle; \left\langle\sqrt{\frac{1}{2}}; \infty\right)$,

Konkávní na $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

Protože se mění v $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ konvexnost na konkávnost nebo naopak, je splněna postačující podmínka pro existenci inflexních bodů $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

- **Limity**: Hledáme limity v bodech$\pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} x^4 - 3x^2 + 2 = \lim\limits_{x\to\infty} x^4 \cdot \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right) = \infty \cdot (1 - 0 + 0) = \infty,$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 - 3x^2 + 2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 \cdot \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right) = (-\infty)^4 \cdot (1 - 0 + 0) = \infty$, a jelikož máme sudou funkci, víme, že limita v $-\infty$ musí být stejná.

- **Asymptoty**: a) bez směrnice: neexistují, protože nemáme žádný bod, který nepatří do *Df.*

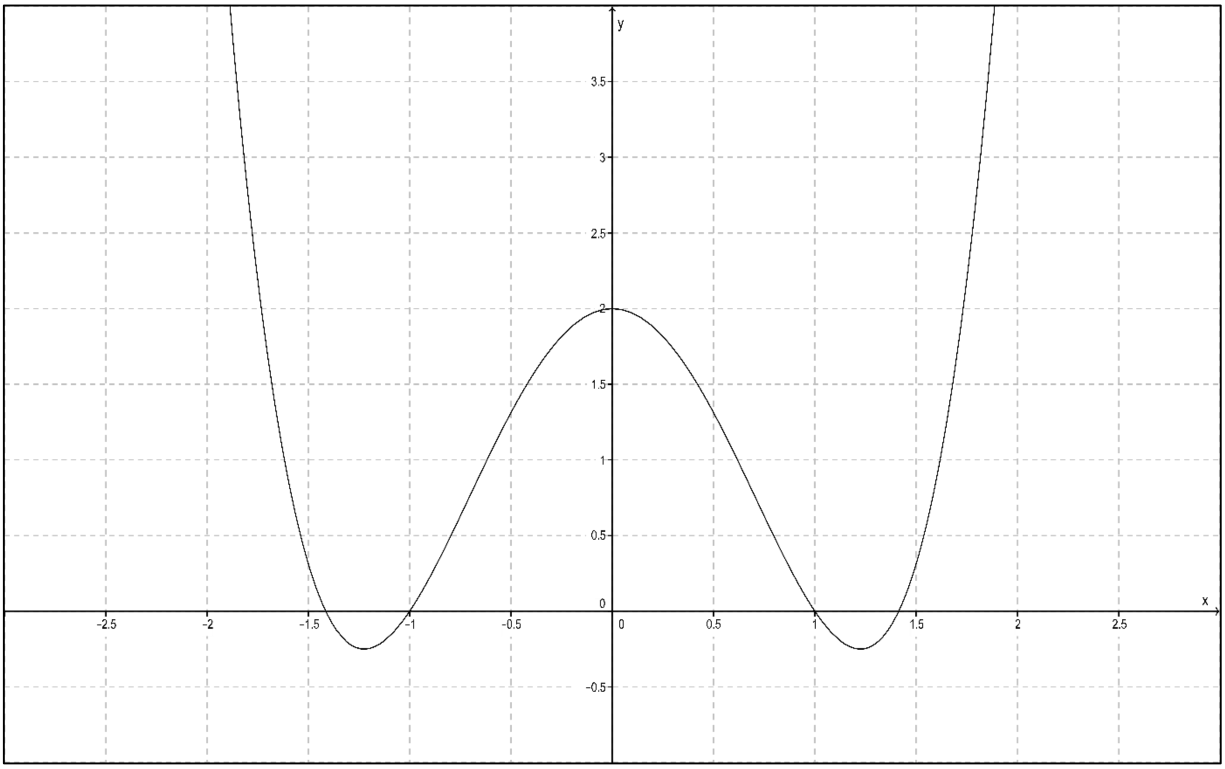
b) se směrnicí: ve tvaru $y = kx + q$, kde:

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4-3x^2+2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\cdot(x^3-3x+\frac{2}{x})}{x} = x^3 - 3x + \frac{2}{x} = \infty; k \notin R \Longrightarrow$ neexistuje.

- Protože je funkce spojitá na *Df*, dále nabývá v bodech $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}: f(x_1) = -\frac{1}{4}$ a v $x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}: f(x_2) = -\frac{1}{4}$ svého lokálního minima a je omezená touto hodnotou zdola $\Longrightarrow \boldsymbol{Hf} = \left\langle -\frac{1}{4}; \infty\right)$. Protože obě lokální minima mají stejnou funkční hodnotu, jedná se o neostré globální minimum. Globální maximum na *Df* funkce nemá vzhledem k limitám v ∞ a tudíž nabývá i vyšších hodnot než lokálního maxima.

Tato funkce není prostá, protože neplatí definice pro injektivní funkci v kapitole 2.

- **Graf**:



b)

Předpis funkce zůstává stejný $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ ale *Df* $= \langle -1; \sqrt{\frac{3}{2}} \rangle$. Hledáme globální extrémy. Opět budeme využívat Weierstrassovi věty.

1.) Na základě Weierstrassovi věty stačí opět najít body, ve kterých je 1. derivace rovna 0 nebo neexistuje. Víme, že v bodech $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}; -\frac{1}{4}\right]$ lokální minimum (jelikož jsme na intervalu $\langle -1; \sqrt{\frac{3}{2}} \rangle$, tak lokální minimum $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}; -\frac{1}{4}\right]$ neřešíme) a v $[0; 2]$ lokální maximum.

2.) Nyní zjistíme funkční hodnoty v krajních bodech. Tedy $f(-1) = 0$ a $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{4}$.

3.) Porovnáme všechny nalezené funkční hodnoty. Tedy $-\frac{1}{4} < 0 < 2 \Longrightarrow$ Nejvyšší nalezená hodnota je globálním maximem funkce na tomto intervalu, to znamená, že funkce nabývá svého globálního maxima v bodě x = 0: $\max f(x) = 2$. Nejnižší nalezená hodnota je globální minimum, to znamená, že v bodě $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nabývá funkce globálního minima: $\min f(x) = -\frac{1}{4}$.

Tato funkce již není sudá, protože nemá symetrický *Df.*

4.1.4 Je dána funkce: $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{4x}}{\boldsymbol{x^2-4}}$

a) Vyšetřete průběh funkce.

b) Určete globální extrémy na intervalu $\langle 15; 280 \rangle$.

Řešení:

a)

- **Definiční obor**: $Df = R - \{\pm 2\}$

Spojitost: Definiční obor této funkce je sjednocení 3 intervalů, a to $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$. Jelikož na každém z těchto intervalů je funkce spojitá (protože máme podíl dvou spojitých funkcí), je celá funkce na jejím *Df* spojitá.

- Nyní určíme **průsečíky s osami:**

Průsečík s osou *x:* $y = 0 \Longrightarrow \frac{4x}{x^2-4} = 0$

$$4x = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

.

Průsečík s osou *y*: $x = 0 \Longrightarrow y = 0$

$$P_x = P_y = [0; 0].$$

- **Parita**: Symetrický *Df* máme, protože je z něj vyřazeno jak $x = 2$, tak i $x = -2$. $f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2-4} = \frac{-4x}{x^2-4} = -f(x)$, tedy je to funkce lichá.

- **Lokální extrémy a monotonie**: Najdeme první derivaci a položíme ji rovnou nule.

$$f'(x) = \frac{4 \cdot (x^2-4) - 4x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{4x^2 - 16 - 8x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-4x^2 - 16}{(x^2-4)^2} = \frac{-4 \cdot (x^2+4)}{(x^2-4)^2}$$

$$\frac{-4 \cdot (x^2+4)}{(x^2-4)^2} = 0 \Leftrightarrow \; 4 \cdot (x^2+4) = 0 \; \Leftrightarrow x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Longrightarrow N\check{R}$$

Není splněna nutná podmínka pro existenci extrémů, funkce tedy nemění monotonii.

$f'(x) < 0$ pro $\forall x \in Df \Longrightarrow$ funkce je klesající na celém *Df.*

- **Inflexní body a konvexnost, resp. konkávnost**: Najdeme druhou derivaci a položíme ji rovnou nule.

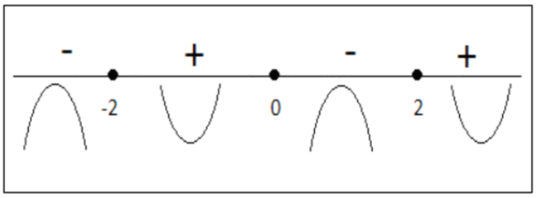
$$f''^{(x)} = \left(\frac{-4x^2-16)}{(x^2-4)^2}\right)' = \frac{-8x \cdot (x^2-4)^2 - (-4x^2-16) \cdot 2 \cdot (x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{(x^2-4) \cdot [-8x \cdot (x^2-4) - 4x \cdot (-4x^2-16)]}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{-8x^3 + 32x + 16x^3 + 64x}{(x^2-4)^3} = \frac{8x^3 + 96x}{3} = \frac{8x \cdot (x^2+12)}{(x^2-4)^4}$$

$$\frac{8x \cdot (x^2+12)}{(x^2-4)^4} = 0 \Leftrightarrow 8x \cdot (x^2+12) = 0 \Leftrightarrow 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

což je možný inflexní bod. Abychom to mohli určit s jistotou, je nutné zjistit konvexnost a konkávnost v intervalech od tohoto bodu zprava a zleva. Je důležité nezapomenout na osu zanést i body, které nepatří do *Df*.



Konvexní na $(-2; 0\rangle; (2; \infty)$,

Konkávní na $(-\infty; -2); (0; 2)$.

Protože se mění v $x = 0$ konvexnost na konkávnost, je splněna postačující podmínka pro existenci inflexního bodu $x = 0$. Body $x = \pm 2$ nepatří do *Df*.

- **Limity**: Určujeme limity v bodech ± 2; $\pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\cdot(4)}{x\cdot(x-\frac{4}{x})} = \frac{4}{\infty} = 0,$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\cdot(4)}{x\cdot(x-\frac{4}{x})} = \frac{4}{\infty} = 0$,jelikož mám lichou funkci, limita musí být také 0.

$\lim\limits_{x\to 2+} \frac{4x}{x^2-4} = \frac{4\cdot 2}{0+} = \infty,$ $\lim\limits_{x\to -2-} \frac{4x}{x^2-4} = \frac{4\cdot 2}{0-} = -\infty$ (s opačnými znaménky).

$\lim\limits_{x\to -2+} \frac{4x}{x^2-4} = \frac{4\cdot(-2)}{0+} = \infty,$ $\lim\limits_{x\to 2-} \frac{4x}{x^2-4} = \frac{4\cdot(-2)}{0-} = -\infty$ (s opačnými znaménky).

- **Asymptoty**: a) bez směrnice: v bodech nespojitosti: $x = \pm 2$.

b) se směrnicí: ve tvaru $y = kx + q$, kde:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x\cdot(x^2-4)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2-4} = \frac{4}{\infty} = 0,$$

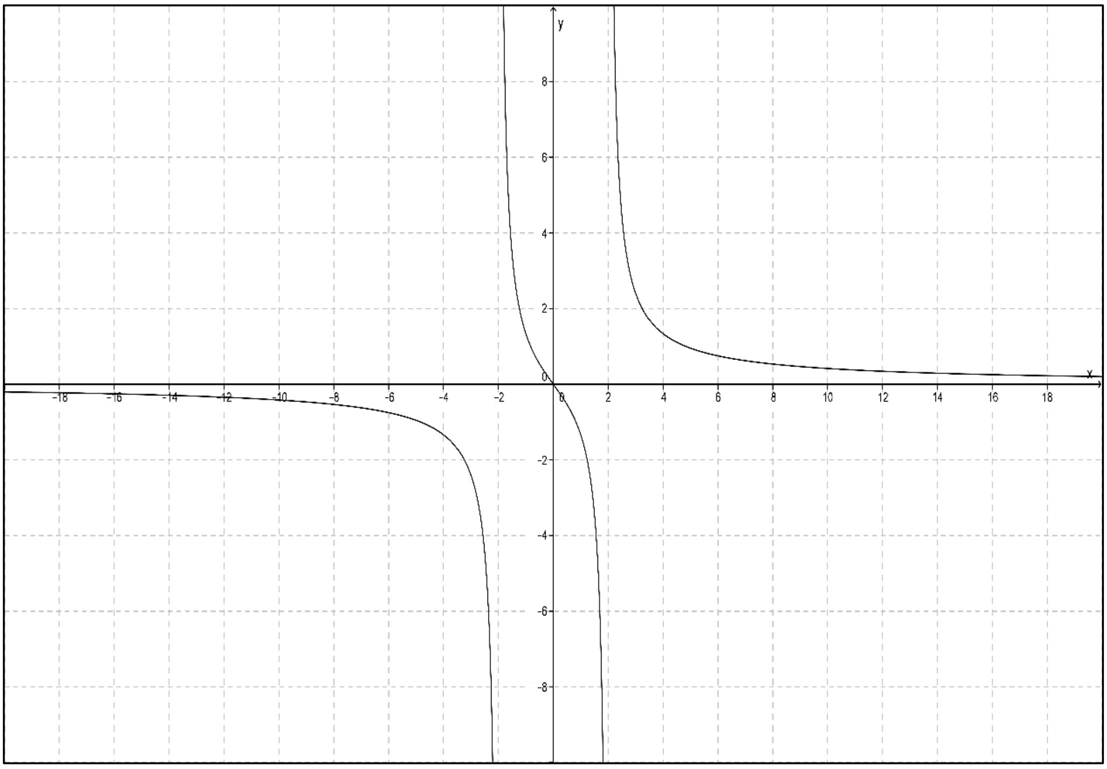
$q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + kx = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0 \Longrightarrow$ asymptota existuje a má tvar $y = 0$.

- Funkce není omezená na *Df* a je spojitá na *Df* $\Longrightarrow \boldsymbol{Hf} = R$.

Funkce nemá lokální extrémy na *Df,* nemá ani globální extrémy, tedy nemá žádnou minimální ani maximální hodnotu.

Tato funkce není prostá, protože neplatí definice pro injektivní funkci v kapitole 2.

- **Graf**:



b)

- Předpis funkce zůstává stejný $f(x) = \frac{4x}{x^2-4}$, ale *Df* $= \langle 15; 280 \rangle$. Hledáme globální extrémy.

Při tomto úkolu využijeme opět Weierstrassovi věty.

1.) Na základě Weierstrassovi věty stačí najít body, ve kterých je 1. derivace rovna 0 nebo neexistuje. V tomto případě nemáme žádné body, které by této podmínce vyhovovaly.

2.) Zjistíme funkční hodnoty v krajních bodech. Tedy $f(15) \cong 0{,}27$ a $f(280) \cong 0{,}01$.

3.) Porovnáme všechny nalezené funkční hodnoty.

$0{,}01 < 0{,}27 \implies$ Nejvyšší nalezená hodnota je globálním maximem funkce na tomto intervalu, to znamená, že funkce nabývá svého globálního maxima v bodě x = 15: $\max f(x) = 0{,}27$. Nejnižší nalezená hodnota je globální minimum, to znamená, že v bodě $x = 280$ nabývá funkce globálního minima: $\min f(x) = 0{,}01$.

Tato funkce již není lichá, protože nemá tzv. symetrický *Df* na tomto intervalu.

Navíc je funkce na tomto intervalu prostá, protože se žádná funkční hodnota neopakuje.

4.1.5 Je dána funkce: $\boldsymbol{f(x)} = \left(\frac{\mathbf{1+2x}}{\mathbf{1-2x}}\right)^{\mathbf{4}}$

a) Vyšetřete průběh funkce.

b) Určete globální extrémy na intervalu $\langle -15; 0\rangle$.

Řešení:

a)

- **Definiční obor**: $Df = R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Spojitost: Definiční obor této funkce je sjednocení 2 intervalů, a to $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$. Jelikož na obou z těchto intervalů je funkce spojitá (protože skládáme dvě spojité funkce), je celá funkce na jejím *Df* spojitá.

- Nyní určíme **průsečíky s osami:**

Průsečík s osou *x:* $y = 0 \Longrightarrow 1 - 2x = 0$

$$x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \ P_x = \left[-\frac{1}{2}; 0\right].$$

Průsečík s osou *y:* $x = 0 \Longrightarrow y = 1 \Longrightarrow P_y = [0; 1]$.

- **Parita**: Nemáme symetrický *Df*, funkce není sudá ani lichá.

- **Lokální extrémy a monotonie**: Najdeme první derivaci a položíme ji rovnou nule.

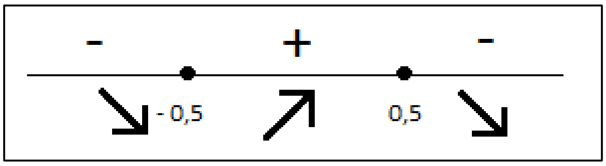
$$f'(x) = 4 \cdot \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^3 \cdot \frac{2 \cdot (1-2x) - (1+2x) \cdot (-2)}{(1-2x)^2}$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^3 \cdot \frac{2 - 4x - (-2 - 4x)}{(1-2x)^2} = 4 \cdot \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^3 \cdot \frac{4}{(1-2x)^2}$$

$$= \frac{16 \cdot (1+2x)^3}{(1-2x)^5} = 0 \Leftrightarrow \ (1+2x)^3 = 0$$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, což je stacionární bod podezřelý z extrému.

Nyní zjistíme monotonii nalezených intervalů dosazením libovolného čísla daného intervalu do první derivace. Pokud bude první derivace kladná, pak je funkce na daném intervalu rostoucí, naopak při záporné hodnotě je funkce klesající. Zaneseme i bod nespojitosti.



Rostoucí na $\left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$,

Klesající na $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle; \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Protože dochází v bodě $x = -\frac{1}{2}$ ke změně monotonie, což je postačující podmínkou pro existenci lokálního extrému, je v bodě $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ lokální minimum.$\left(f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0\right)$. Bod $x = \frac{1}{2}$ není lokálním maximem, protože nepatří do *Df* a také neexistuje v tomto bodě derivace.

- **Inflexní body a konvexnost, resp. konkávnost**: Najdeme druhou derivaci a položíme ji rovnou nule.

$$f''^{(x)} = \left(\frac{16 \cdot (1+2x)^3}{(1-2x)^5}\right)'$$

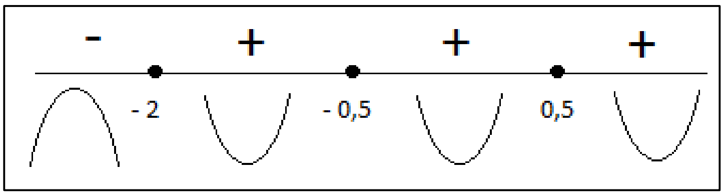
$$= \frac{16 \cdot 3 \cdot (1+2x)^2 \cdot 2 \cdot (1-2x)^5 - 16 \cdot (1+2x)^3 \cdot 5 \cdot (1-2x)^4 \cdot (-2)}{(1-2x)^{10}}$$

$$= \frac{96(1+2x)^2 \cdot (1-2x)^5 + 160(1+2x)^3 \cdot (1-2x)^4}{(1-2x)^{10}}$$

$$= \frac{(1+2x)^2 \cdot (256+128x)}{(1-2x)^6} = 0 \Leftrightarrow (1+2x)^2 \cdot (256+128x) = 0 \Leftrightarrow x_1$$

$$= -2;\ x_2 = -\frac{1}{2},$$

což jsou možné inflexní body. Abychom to mohli určit s jistotou, je nutné zjistit konvexnost a konkávnost v intervalech od těchto bodů zprava a zleva. Je důležité nezapomenout na osu zanést i bod nespojitosti.



Konvexní na $\left(-2; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$,

Konkávní na $(-\infty; -2\rangle$.

Protože se mění $x = -2$ konkávnost na konvexnost, je splněna postačující podmínka pro existenci inflexního bodu $x = -2$.

- **Limity**: Určujeme limity v bodech $\frac{1}{2}$ a $\pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x\cdot(\frac{1}{x}+2)}{x\cdot(\frac{1}{x}-2)}\right)^4 = (-1)^4 = 1,$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4 = (-1)^4 = 1,$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}+}\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4 = (\frac{1+1}{0+})^4 = \infty,$ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}-}\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4 = (\frac{1+1}{0-})^4 = \infty.$

- **Asymptoty**: a) bez směrnice: v bodě nespojitosti: $x = \frac{1}{2}$.

b) se směrnicí: ve tvaru $y = kx + q$, kde:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{16x^4+32x^3+24x^2+8x+1}{16x^5-32x^4+24x^3-8x^2+x}$$

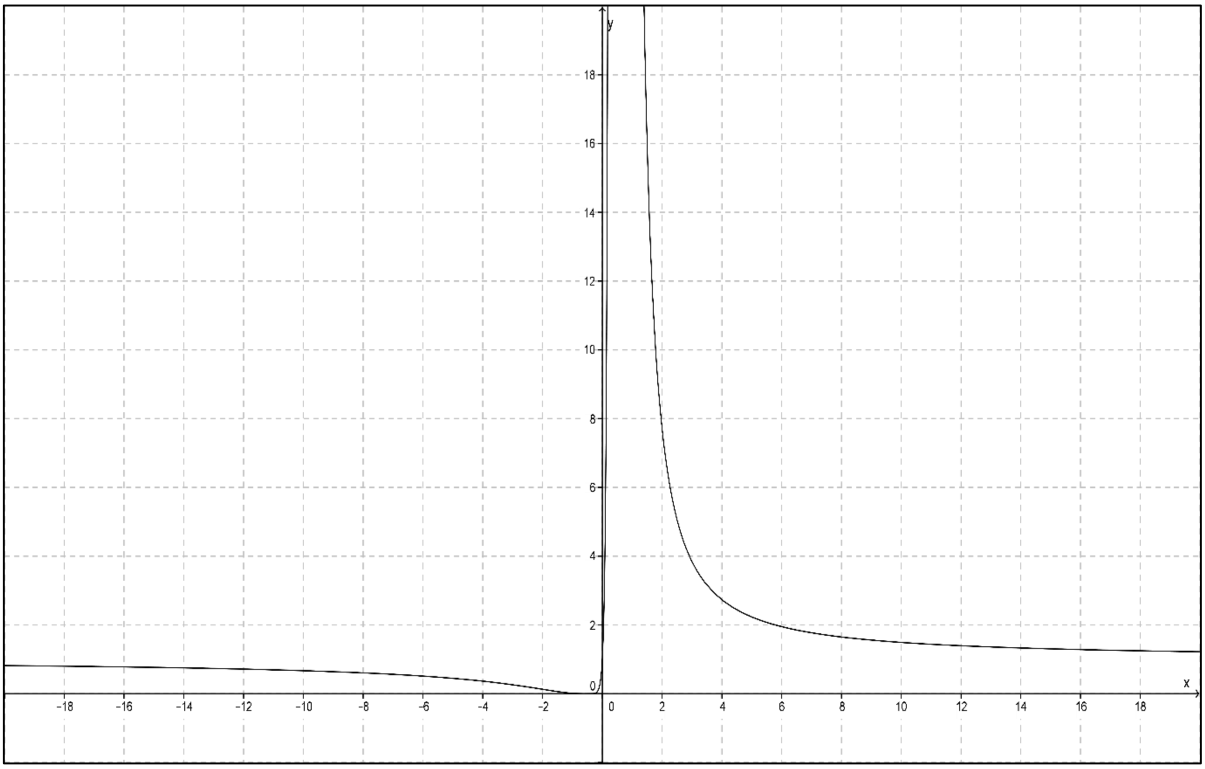
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^5\cdot(\frac{16}{x}+\frac{32}{x^2}+\frac{24}{x^3}+\frac{8}{x^4}+\frac{1}{x^5})}{x^5\cdot(16-\frac{32}{x}+\frac{24}{x^2}-\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^4})} = 0,$$

$q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + kx = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1 \Longrightarrow$ asymptota existuje a má tvar $y = 1$.

- Protože je funkce spojitá na *Df* a nabývá svého lokálního a zároveň globálního minima v bodě $x = -\frac{1}{2}$: $\min f(x) = 0$ a je touto hodnotou zdola omezená a nižší hodnoty již funkce nenabývá $\Longrightarrow \boldsymbol{Hf} = \langle 0;\infty)$. Globální maximum funkce nemá vzhledem k limitám v ∞.

Tato funkce není prostá, protože neplatí definice pro injektivní funkci v kapitole 2.

- **Graf**:



b)

- Předpis funkce zůstává $f(x) = \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4$, *Df*, $= \langle -15; 0 \rangle$. Hledáme globální extrémy.

Při tomto úkolu využijeme opět Weierstrassovi věty.

1.) Na základě Weierstrassovi věty stačí najít body, ve kterých je 1. derivace rovna 0 nebo neexistuje. V tomto případě máme lokální minimum $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ a jiné body této podmínce nevyhovují.

2.) Najdeme funkční hodnoty v krajních bodech, $f(-15) \cong 0{,}77$ a $f(0) = 1$.

3.) Porovnáme všechny nalezené funkční hodnoty. $0 < 0{,}77 < 1 \Longrightarrow$ Nejvyšší nalezená hodnota je globálním maximem funkce na tomto intervalu, to znamená, že funkce nabývá svého globálního maxima v bodě $x = 0$: $\max f(x) = 1$. Nejnižší nalezená hodnota je globální minimum, to znamená, že v bodě $x = -\frac{1}{2}$ nabývá funkce globálního minima: $\min f(x) = 0$.

4.1.6 Je dána funkce: $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\ln x}{2x}$

a) Vyšetřete průběh funkce.

b) Určete globální extrémy na intervalu $\langle\frac{1}{2}; e^2\rangle$.

Řešení:

a)

- **Definiční obor**: $Df = (0; \infty)$, jelikož do logaritmu lze dosadit jen kladné hodnoty.

  Spojitost: Tato funkce je spojitá, protože je složená ze dvou spojitých funkcí.

- Nyní určíme **průsečíky s osami:**

Průsečík s osou *x:* $y = 0 \Longrightarrow \ln x = 0$

$$x = 1 \Longrightarrow \ P_x = [1; 0].$$

Průsečík s osou *y:* $x = 0 \Longrightarrow N\check{R}$.

- **Parita**: Není symetrický *Df*, funkce není sudá ani lichá.

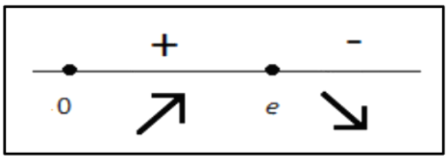
- **Lokální extrémy a monotonie**: Najdeme první derivaci a položíme ji rovnou nule.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot 2x - \ln x \cdot 2}{4x^2} = \frac{2 - 2\ln x}{4x^2} = \frac{1 - \ln x}{2x^2}$$

$$\frac{1 - \ln x}{2x^2} = 0 \Leftrightarrow \ \ 1 - \ln x = 0 \ \ \Leftrightarrow x = e\ ,$$

což je stacionární bod podezřelý z extrému.

Nyní zjistíme monotonii nalezených intervalů dosazením libovolného čísla daného intervalu do první derivace. Pokud bude první derivace kladná, pak je funkce na daném intervalu rostoucí, naopak při záporné hodnotě je funkce klesající.



Rostoucí na $(0; e\rangle$,

Klesající na $(e; \infty)$.

Protože dochází v bodě $x = e$ ke změně monotonie, což je postačující podmínkou pro existenci lokálního extrému v tomto bodě, je v bodě $[e; 0{,}18]$ lokální minimum.$(f(e) = 0{,}18)$.

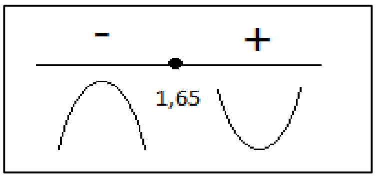
- **Inflexní body a konvexnost, resp. konkávnost**: Pro určení konvexnosti a konkávnosti musíme opět spočítat druhou derivaci a opět ji položit rovnou nule.

$$f''^{(x)} = \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot 2x^2 - (1-\ln x)\cdot 4x}{4x^4} = \frac{2x - (4x - 4x\ln x)}{4x^4} = \frac{-2x + 4x\cdot \ln x}{4x^4}$$

$$= \frac{-2 + 4\ln x}{4x^3}$$

$$\frac{-2+4\ln x}{4x^3} = 0 \Leftrightarrow -2 + 4\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} \cong 1{,}65,$$

což je možný inflexní bod. Abychom to mohli určit s jistotou, je nutné zjistit konvexnost a konkávnost v intervalech od těchto bodů zprava a zleva. Zaneseme na osu i krajní bod.



Konvexní na $(e^{\frac{1}{2}}; \infty)$,

Konkávní na $(0; e^{\frac{1}{2}}\rangle$.

Protože se mění $x = e^{\frac{1}{2}}$konkávnost na konvexnost, je splněna postačující podmínka pro existenci inflexního bodu $x = e^{\frac{1}{2}}$.

- **Limity**: Určujeme limity v bodech: 0+; ∞ .

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} = (L'H) \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{2x} = \frac{-\infty}{0+} = -\infty + \frac{1}{0+} = -\infty \cdot \infty = -\infty.$$

- **Asymptoty**: a) bez směrnice: v bodě krajním: $x = 0$.

  b) se směrnicí: ve tvaru $y = kx + q$, kde:

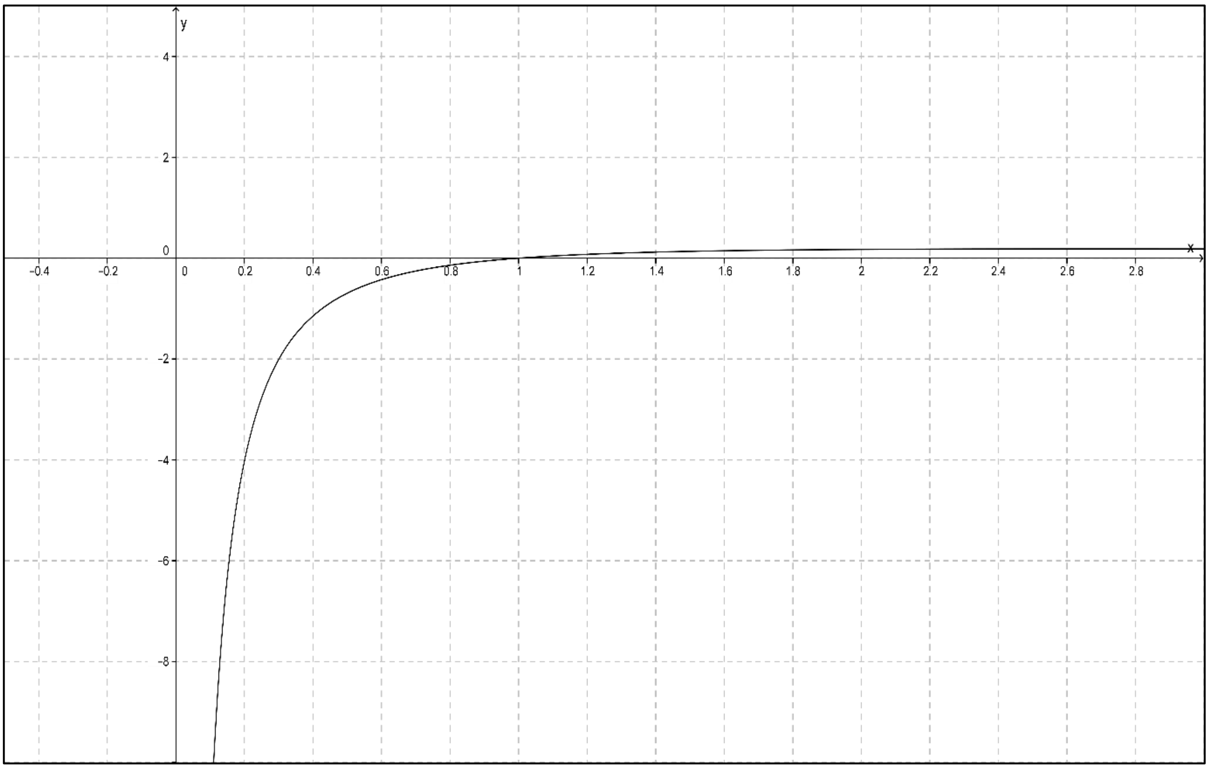
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{2x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2x^2} = (\mathrm{L'H}) \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

$q = \lim_{x\to\infty} f(x) + kx = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Longrightarrow$ asymptota existuje a má tvar $y = 0$.

- Protože je funkce spojitá na *Df a* nabývá svého lokálního a zároveň globálního maxima v bodě $x = e$: max$f(x) = 0{,}18$, protože vyšší hodnoty již nenabývá a je touto hodnotou shora omezená $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{Hf} = (-\infty;0{,}18\rangle$.

Tato funkce je prostá, protože splňuje definici pro injektivní funkci v kapitole 2.

- **Graf**:



b)

- Předpis funkce zůstává $f(x) = \frac{\ln x}{2x}$, ale *Df* $= \langle \frac{1}{2}; e^2 \rangle$. Hledáme globální extrémy.

Při tomto úkolu opět využijeme Weierstrassovi věty.

1.) Na základě Weierstrassovi věty stačí najít body, ve kterých je 1. derivace rovna 0 nebo neexistuje. Máme lokální maximum $[e; 0{,}18]$. Další body této podmínce nevyhovují.

2.) Zjistíme funkční hodnoty v krajních bodech. Tedy v bodě $f\left(\frac{1}{2}\right) \cong -0{,}69$ a $f(e^2) \cong 0{,}14$.

3.) Ve třetím kroku porovnáme všechny nalezené funkční hodnoty.

$-0{,}69 < 0{,}14 < 0{,}18 \implies$ Nejvyšší nalezená hodnota je globálním maximem funkce na tomto intervalu, to znamená, že funkce nabývá svého globálního maxima v bodě $x = e$: $\max f(x) = 0{,}18$. Nejnižší nalezená hodnota je globální minimum, to znamená, že v bodě $x = \frac{1}{2}$ nabývá funkce globálního minima: $\min f(x) = -0{,}69$.

4.1.7 Je dána funkce: $\boldsymbol{f(x) = e^{2x-x^2}}$

a) Vyšetřete průběh funkce.

b) Určete globální extrémy na intervalu $\langle -10; 10\rangle$.

Řešení:

a)

- **Definiční obor**: $Df = R$

  Spojitost: Tato funkce je spojitá, protože je složená ze dvou spojitých funkcí.

- Nyní určíme **průsečíky s osami:**

Průsečík s osou *x:* $y = 0 \Longrightarrow e^{2x-x^2} \neq 0 \Longrightarrow N\check{R}$.

Průsečík s osou *y:* $x = 0 \Longrightarrow e^0 = 1 \;\; P_y = [0; 1]$.

- **Parita**: Symetrický *Df* je splněn, proto můžeme ověřit výraz $f(-x)$:

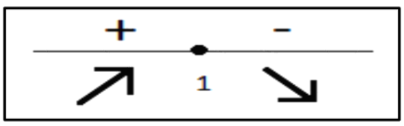
$f(-x) = e^{-2x-x^2} \neq f(x)$ ani $-f(x)$, proto funkce není sudá ani lichá.

- **Lokální extrémy a monotonie**: Najdeme první derivaci a položíme ji rovnou nule.

$f'(x) = e^{2x-x^2} \cdot (-2x + 2)$

$e^{2x-x^2} \cdot (-2x + 2) = 0 \Leftrightarrow \; -2x + 2 = 0 \;\; \Leftrightarrow x = 1$, což je stac. bod podezřelý z extrému.

Nyní zjistíme monotonii nalezených intervalů dosazením libovolného čísla daného intervalu do první derivace. Pokud bude první derivace kladná, pak je funkce na daném intervalu rostoucí, naopak při záporné hodnotě je funkce klesající.



Rostoucí na $(-\infty; 1\rangle$,

Klesající na $(1; \infty)$.

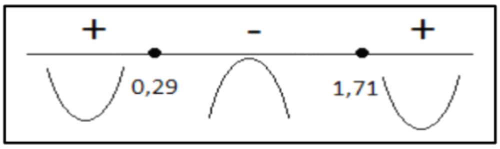
Protože dochází v bodě $x = 1$ ke změně monotonie, což je postačující podmínkou pro existenci lokálního extrému v tomto bodě, je v bodě $[1; e]$ lokální minimum.$(f(1) = e)$.

- **Inflexní body a konvexnost, resp. konkávnost**: Pro určení konvexnosti a konkávnosti musíme spočítat druhou derivaci a opět ji položit rovnou nule.

$$f''^{(x)} = \left(e^{2x-x^2} \cdot (-2x+2)\right)' = e^{2x-x^2} \cdot (2-2x) \cdot (2-2x) + e^{2x-x^2} \cdot (-2)$$
$$= e^{2x-x^2} \cdot (2-2x)^2 - 2e^{2x-x^2} = e^{2x-x^2} \cdot [(2-2x)^2 - 2]$$
$$= e^{2x-x^2} \cdot (4x^2 - 8x + 2)$$

$e^{2x-x^2} \cdot (4x^2 - 8x + 2) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 2 = 0;\, D = 32;\; x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$,

což jsou možné inflexní body. Abychom to mohli určit s jistotou, je nutné zjistit konvexnost a konkávnost v intervalech od těchto bodů zprava a zleva. Zaneseme na osu i bod nespojitosti.



Konvexní na $\left(-\infty; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \infty\right)$,

Konkávní na $\langle\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2}\rangle$.

Protože se mění v $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ konkávnost na konvexnost a naopak, je splněna postačující podmínka pro existenci inflexních bodů $x = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

- **Limity**: Určujeme limity v bodech: $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} e^{2x-x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{x^2\cdot(\frac{2}{x}-1)} = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot(2-x)} = e^{-\infty} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{2x-x^2} = \lim_{x\to-\infty} e^{x^2\cdot(\frac{2}{x}-1)} = \lim_{x\to-\infty} e^{x\cdot(2-x)} = e^{-\infty} = 0.$$

- **Asymptoty**: a) bez směrnice: neexistují, protože nejsou body nespojitosti.

  b) se směrnicí: ve tvaru $y = kx + q$, kde:

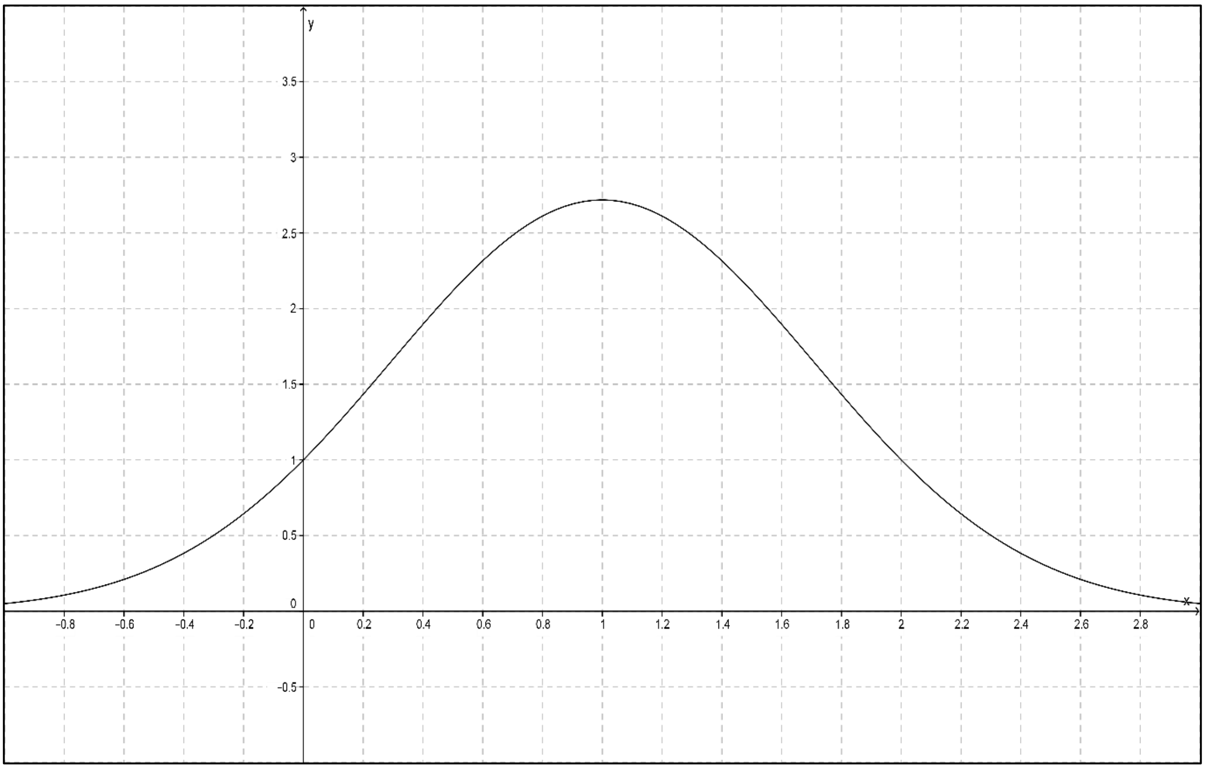
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x-x^2}}{x} = \frac{0}{\infty} = 0,$$

$q = \lim_{x\to\infty} f(x) + kx = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Longrightarrow$ asymptota existuje a má tvar $y = 0$.

- Protože je funkce spojitá na *Df a* nabývá svého lokálního a zároveň globálního maxima v bodě $x = 1$: max $f(x) = e$, protože vyšší hodnoty už funkce nenabývá a je touto hodnotou shora omezená a dále je zdola omezená hodnotou 0 $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{Hf} = (0;e\rangle$.

Tato funkce není prostá, protože nesplňuje definici pro injektivní funkci v kapitole 2.

- **Graf**:



b)

- Nyní předpis funkce zůstává stejný $f(x) = e^{2x-x^2}$, ale $Df = \langle -10; 10 \rangle$. Hledáme globální extrémy.

Při tomto úkolu opět využijeme Weierstrassovi věty.

1.) Na základě Weierstrassovi věty stačí najít body, ve kterých je 1. derivace rovna 0 nebo neexistuje. Máme lokální maximum $[1; e]$. Jiné body tuto podmínku nesplňují.

2.) Zjistíme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu. Hledáme tedy funkční hodnoty v bodě $f(-10) \cong 0{,}08 \cdot 10^{-51}$ a $f(10) \cong 1{,}8 \cdot 10^{-35}$.

3.) Nyní porovnáme všechny nalezené funkční hodnoty.

$0{,}08 \cdot 10^{-51} < 1{,}8 \cdot 10^{-35} < e \Longrightarrow$ Nejvyšší nalezená hodnota je globálním maximem funkce na tomto intervalu, to znamená, že funkce nabývá svého globálního maxima v bodě $x = 1$: $\max f(x) = e$. Nejnižší nalezená hodnota je globální minimum, to znamená, že v bodě $x = -10$ nabývá funkce globálního minima: $\min f(x) = 0{,}08 \cdot 10^{-51}$.

4.1.8 Je dána funkce: $\boldsymbol{f(x) = \sin x + \cos x}$

a) Vyšetřete průběh funkce.

b) Určete globální extrémy na intervalu $\langle 0; \frac{3}{4}\pi \rangle$.

Řešení:

a)

- **Definiční obor**: $Df = R$

  Spojitost: Tato funkce je spojitá, protože je součtem dvou složených funkcí.

  Periodicita: Funkce sinus i cosinus jsou periodické s $p = 2\pi$, tudíž i naše funkce je periodická s periodou $p = 2\pi$.

- Nyní určíme **průsečíky s osami:**

Průsečík s osou *x:* $y = 0 \Longrightarrow \sin x + \cos x = 0$

$$\sin x = -\cos x \Longrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$$

$P_x = \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi; 0\right]$. (je jich nekonečně mnoho).

Průsečík s osou *y:* $x = 0 \Longrightarrow \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1 \Longrightarrow P_y = [0; 1]$.

- **Parita**: Je splněna podmínky symetrického *Df*, najdeme tedy $f(-x)$:

$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) \neq f(x)$ ani $-f(x) \Longrightarrow$ není sudá ani lichá.

- **Lokální extrémy a monotonie**: Najdeme první derivaci a položíme ji rovnou nule.

$f'(x) = \cos x - \sin x$

$\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$, což jsou stacionární body podezřelé z extrémů, je jich nekonečně mnoho pravidelně se opakujících.

Nyní zjistíme monotonii nalezených intervalů dosazením libovolného čísla daného intervalu do první derivace. Pokud bude první derivace kladná, pak je funkce na daném intervalu rostoucí, naopak při záporné hodnotě je funkce klesající.

-		+		-		+		-		+
↘	$-3\pi/4$	↗	$\pi/4$	↘	$5\pi/4$	↗	$9\pi/4$	↘	$13\pi/4$	↗

R $\left(-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \frac{1}{4}\pi + 2k\pi\right)$, k$\in Z$,

K $\left(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi; \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right)$, k$\in Z$.

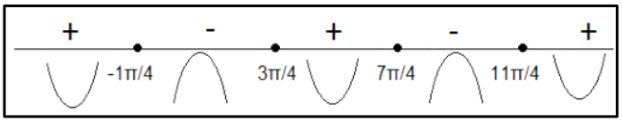
Protože dochází v bodech $x = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$, k$\in Z$ a v bodech $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$,k$\in Z$, ke změně monotonie, což je postačující podmínkou pro existenci lokálních extrémů, jsou v těchto bodech $\left[\frac{1}{4}\pi + 2k\pi; \sqrt{2}\right]$, $\mathrm{k} \in Z$, lokální maxima a v bodech $\left[\frac{5}{4}\pi + 2k\pi; -\sqrt{2}\right]$, $\mathrm{k} \in Z$, lokální minima. $\left(f\left(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi\right) = \sqrt{2}; f\left(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right) = -\sqrt{2}; k \in Z\right)$.

- **Inflexní body, konvexnost, resp. konkávnost**: Najdeme druhou derivaci a položíme ji rovnou nule.

$f''^{(x)} = (\cos x - \sin x)' = -\sin x - \cos x$

$-\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow -\sin x = \cos x; x = -\frac{1}{4}\pi + k\pi, \mathrm{k} \in Z,$

což jsou možné inflexní body. Abychom to mohli určit s jistotou, je nutné zjistit konvexnost a konkávnost v intervalech od těchto bodů zprava a zleva.



Konvexní na $\langle\frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\rangle\ k \in Z,$

Konkávní na $(-\frac{1}{4}\pi + 2k\pi; \frac{3}{4}\pi + 2k\pi) k \in Z.$

Protože se mění v $x = -\frac{1}{4}\pi + k\pi, k \in Z$ konvexnost na konkávnost a naopak, je splněna postačující podmínka pro existenci inflexních bodů $x = -\frac{1}{4}\pi + k\pi, k \in Z$.

- **Limity**: Určujeme limity v bodech: $\pm\infty$.

$\lim_{x\to\infty} \sin x + \cos x \Longrightarrow$ neexistuje, $\qquad \lim_{x\to-\infty} \sin x + \cos x \Longrightarrow$ neexistuje.

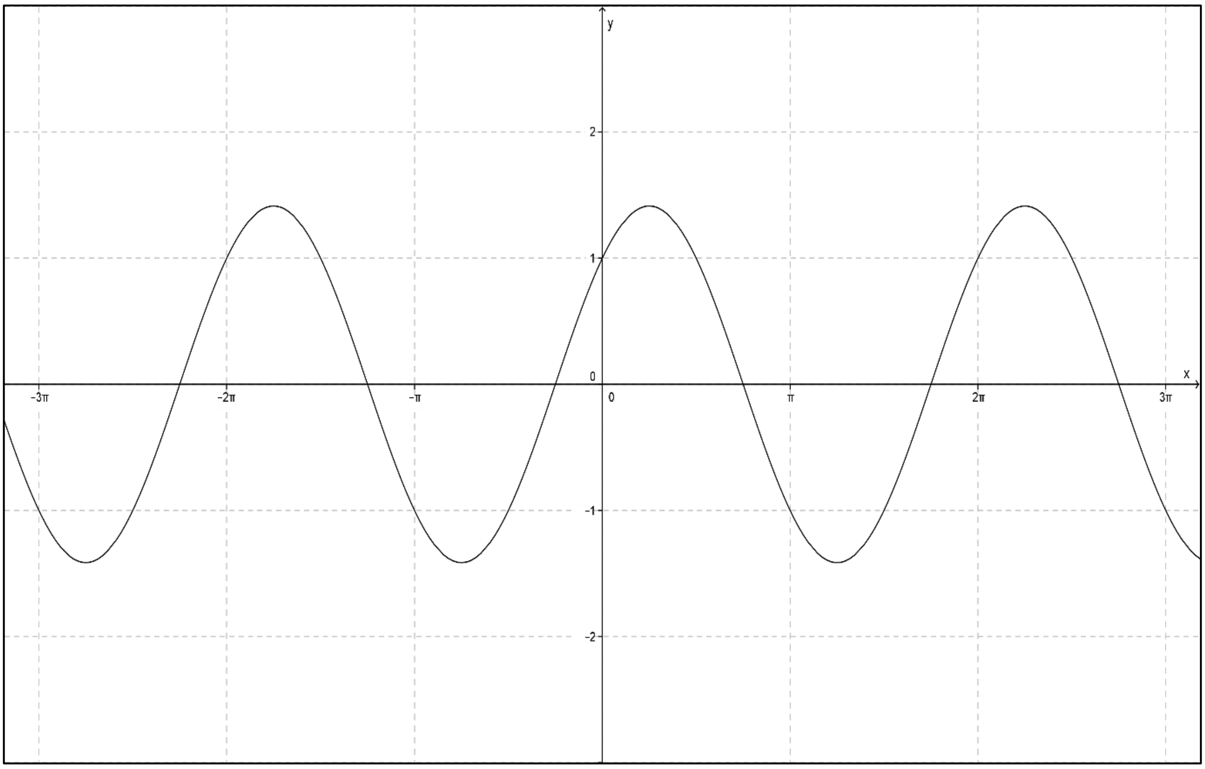
Důkaz, že limita $\lim_{x\to\infty} \sin x + \cos x$ neexistuje, najdeme například v Frolíková, [3].

- **Asymptoty**: V tomto případě asymptoty vynecháme z důvodu, že jsou příliš obtížné.

- Protože je funkce spojitá na *Df a* nabývá svého lokálního maxima v bodech $x = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi; k \in Z: f(x) = \sqrt{2}$ a vyšších hodnot již nenabývá, je touto hodnotou shora omezená, také je zdola omezená lokálním minimem, protože nižších hodnot už nenabývá $\Longrightarrow \boldsymbol{Hf} = \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2}\rangle$. Proto má také funkce tzv. neostré globální extrémy.

Tato funkce není prostá, protože nesplňuje definici pro injektivní funkci v kapitole 2. Funkce je prostá na každé své periodě *p*.

- **Graf**:



b)

- Předpis funkce zůstává stejný $f(x) = \sin x + \cos x$, ale *Df* = $\langle 0; \frac{3}{4}\pi \rangle$. Hledáme globální extrémy. Při tomto úkolu opět využijeme Weierstrassovi věty.

1.) Na základě Weierstrassovi věty stačí najít body, ve kterých je 1. derivace rovna 0 nebo neexistuje. Na tomto intervalu je to lokální maximum $\left[\frac{1}{4}\pi; \sqrt{2}\right]$ a lokální minimum v tomto intervalu neexistuje. Další body této podmínky nevyhovují.

2.) Nyní zjistíme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu. Hledáme tedy funkční hodnoty v bodě $f(0) = 1$ a $f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 0$.

3.) Ve třetím kroku porovnáme všechny nalezené funkční hodnoty.

$0 < 1 < \sqrt{2} \implies$ Nejvyšší nalezená hodnota je globálním maximem funkce na tomto intervalu, to znamená, že funkce nabývá svého globálního maxima v bodě $x = \frac{1}{4}\pi$: $\max f(x) = \sqrt{2}$. Nejnižší nalezená hodnota je globální minimum, to znamená, že v bodě $x = \frac{3}{4}\pi$ nabývá funkce globálního minima: $\min f(x) = 0$.

4.1.9 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

1. Určete intervaly monotonii funkcí:

   a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ b) $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$

   c) $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ d) $f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$

2. Najděte lokální extrémy funkcí:

   a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ b) $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x}$

   c) $f(x) = \ln(1 + x - 4x^2)$ d) $f(x) = (\cos x)^2$na $\langle 0; \frac{1}{2}\pi \rangle$

3. Najděte globální extrémy funkcí:

   a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ na $\langle -3; 3 \rangle$ b) $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ na $\langle 0; 3 \rangle$

   c) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 36x^2$ na $\langle -2; 2 \rangle$ d) $f(x) = (x+1) \cdot (x-2)^2$na $\langle 0; 2 \rangle$

4. Určete intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body funkcí:

   a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 + 5x$ b) $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$

   c) $f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}$ d) $f(x) = \tan x$

   (zadání příkladu d) převzato z Hrubý, Kubát[4])

5. Vyšetřete průběhy funkcí:

   a) $f(x) = e^{2x^2}$ b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{4}$

   c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$+1 d) $f(x) = \frac{2-x^4}{x^2}$

Výsledky:

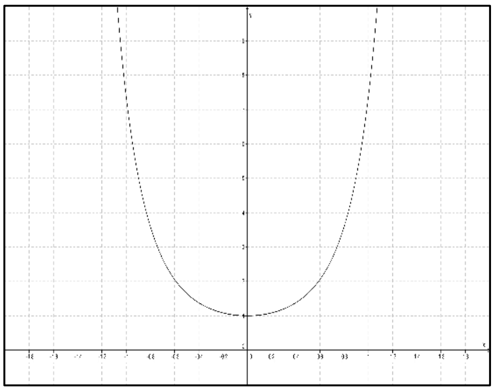
1. a) R na $(-\infty;-3\rangle \cup \langle 2;\infty)$, K na $(-3;2)$; b) R na $(0;1)$, K na $\langle 1;\infty)$; c) R na $\left(0;\frac{3}{2}\right)$, K na $\left\langle\frac{3}{2};3\right)$; d) R na $(-\infty;3\rangle$, K na $(3;\infty)$.

2. a) lok. max. $[1;0]$, lok. min. $[3;-4]$; b) lok. max. $\left[\frac{2}{3};\frac{2\sqrt{3}}{9}\right]$, lok. min. neexistuje; c) lok. max. $\left[\frac{1}{8};\ln\frac{17}{16}\right]$, lok. min. neexistuje; d) lok. max. $[0;1]$, lok. min. $\left[\frac{1}{2}\pi;0\right]$.

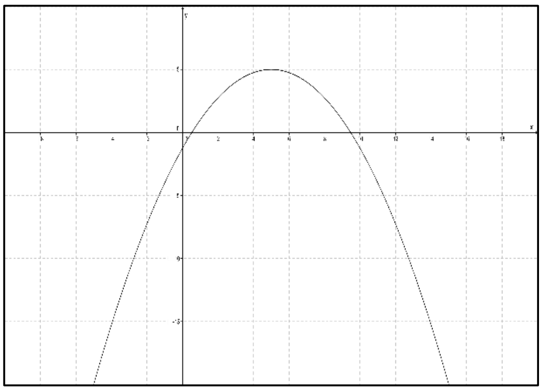
3. a) gl. max. $[3;81]$, gl. min. $[-3;-27]$; b) gl. max. neexistuje, gl. min. $[2;4]$; c) gl. max. $[-2;256]$, gl. min. $[0;0]$; d) gl. max. $[0;4]$, gl. min. $[2;0]$.

4. a) konvexní na $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right\rangle$, konkávní na $\left(\frac{5}{3};\infty\right)$, inflexní bod $x=\frac{5}{3}$; b) konvexní na $(-\infty;-1)$, konkávní na $(-1;\infty)$, inflexní bod neexistuje; c) konvexní na $\left\langle-\sqrt{\frac{5}{3}};0\right)\cup\left(0;\sqrt{\frac{5}{3}}\right\rangle$, konkávní na $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{5}{3}};\infty\right)$, inflexní bod v $x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$; d) konvexní na $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, konkávní na $\left(-\frac{\pi}{2};0\right\rangle$, inflexní bod $x=0$.

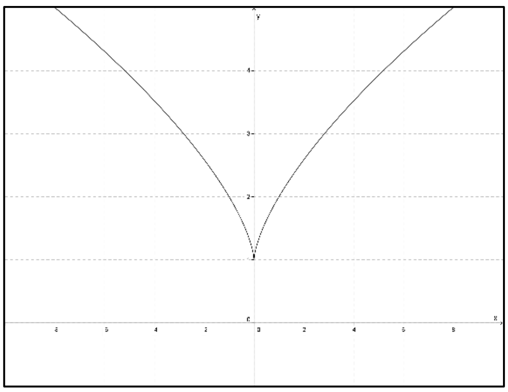
5. a) $y=e^{2x^2}$



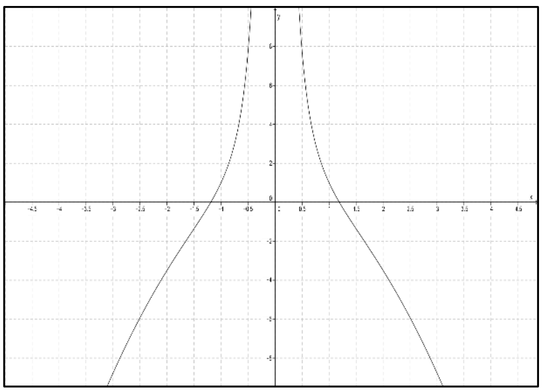
c) $y=\sqrt[3]{x^2}+1$



b) $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{5}{4}$



d) $y=\frac{2-x^4}{x^2}$



4.2 SLOVNÍ ÚLOHY NA EXTRÉM

V této kapitole se budeme zabývat slovními úlohami na extrémy funkce. Zadání mohou mít různý charakter, ale cíl příkladu bude vždy stejný, a to najít nějakou maximální, či minimální hodnotu, ať už konkrétní nebo obecnou.

4.2.1 PŘÍKLADY S ROVINNÝMI ÚTVARY

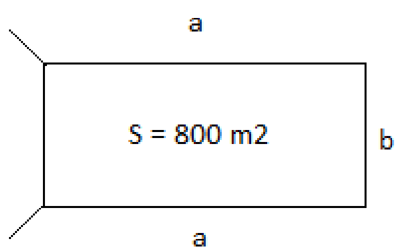
Velmi časté jsou úlohy s rovinnými útvary. Nejčastěji hledáme útvary s maximálním obsahem *S* při daném obvodu *o*, minimální obvod *o* při daném obsahu *S* nebo hledáme útvar o maximálním obsahu *S*, který je vepsaný do jiného rovinného útvaru.

Příklad 1

Majitel restaurace chce oplotit svůj obdélníkový pozemek přimykající se jednou stranou k budově restaurace. Obsah pozemku je roven 800 m^2*. Jaký by měl pozemek mít rozměry, aby majitele oplocení vyšlo co nejlevněji, tj. aby délka plotu byla co nejmenší?*

Řešení:

Hledáme minimální obvod, přičemž známe obsah pozemku.



Nejprve určíme podmínky. V tomto případě $a; b > 0$.

Vyjádříme vzorce pro obvod a obsah tohoto pozemku:

$S = a \cdot b = 800 \Longrightarrow b = \frac{800}{a}$ (z veličiny, kterou známe, vyjádříme jednu z neznámých)

$o = 2a + b$,

což bude funkce, jejíž minimum budeme hledat. Je to ale funkce dvou proměnných, proto je třeba dosadit výše vyjádřenou neznámou, abychom získali funkci jedné reálné proměnné. Po dosazení proměnné b do vzorce pro obvod dostaneme funkci:

$o(a) = 2a + \frac{800}{a} = 2a + 800 \cdot a^{-1}.$

Nyní máme funkci jedné reálné proměnné, jejíž minimum hledáme. Najdeme derivaci a tu položíme rovnou nule, abychom získali stacionární bod.

$$o'(a) = 2 + 800 \cdot (-1) \cdot a^{-2} = 2 - \frac{800}{a^2}$$

$$o'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{800}{a^2} = 2 \Leftrightarrow 2a^2 = 800 \Leftrightarrow a^2 = 400 \Leftrightarrow a = 20(m)$$

Nalezená hodnota $a = 20$ je hledaným stacionárním bodem.

Nyní se podíváme na znaménka první derivace v $(0; 20\rangle$: $f' < 0$ a v $\langle 20; \infty)$: $f' > 0$. To znamená, že v bodě $a = 20$ nabývá funkce lokálního minima.

Nyní dokážeme, že se jedná zároveň o globální minimum. Víme, že $a \in (0; \infty)$, proto nyní zjistíme, jakých funkčních hodnot funkce nabývá blížící se k těmto krajním bodům.

Pokud $a \to 0$, potom $\lim\limits_{a \to 0} 2a + \frac{800}{a} = 0 + \infty = \infty$.

Pokud $a \to \infty$, potom $\lim\limits_{a \to \infty} 2a + \frac{800}{a} = \infty + 0 = \infty$. V krajních bodech intervalů se funkční hodnoty blíží k maximálním hodnotám +∞, funkce je v tomto intervalu spojitá, proto námi nalezený bod, ležící v daném intervalu, je globálním minimem funkce.

Nyní tedy můžeme dopočítat i druhý rozměr pozemku. Neznámou b jsme vyjádřili z obsahu pozemku jako $b = \frac{800}{a} = \frac{800}{20} = 40(m)$.

Rozměry pozemku by tedy měly být $a = 20m$ a $b = 40m$.

Příklad 2

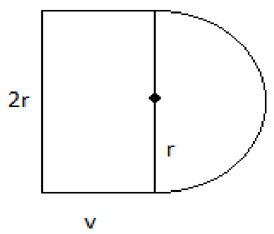
Dětské hřiště má tvar obdélníku, na který navazuje půlkruh, jak je vidět na obrázku níže. Jeho obvod $o = 140\ m$. Určete rozměry dětského hřiště tak, aby jeho obsah S byl co největší.

Řešení:

Při zadaném obvodu hledáme maximální obsah.

Podmínky: $v; r \in \langle 0; 140\rangle$.

Opět vyjádříme vzorce pro obvod a obsah půdorysu.



$$o = 2r + 2v + \frac{2\pi r}{2} = 2r + 2v + \pi r = 140$$

$S = 2r \cdot v + \frac{1}{2}\pi r^2$, což je veličina, jejíž maximální hodnotu hledáme, musíme ji převést na funkci jedné proměnné, proto vyjádříme v:

$140 = 2r + 2v + \pi r \Rightarrow v = \frac{1}{2}(140 - 2r - \pi r)$.

$$S(r) = 2r \cdot \frac{1}{2} \cdot (140 - 2r - \pi r) + \frac{1}{2}\pi r^2 = 140r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$$
$$= -2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 + 140r$$

Dostáváme tedy funkci jedné reálné proměnné, jejíž derivaci hledáme:

$S'(r) = 2 \cdot \left(-2 - \frac{1}{2}\pi\right) r + 140 = (-4 - \pi)r + 140.$

$S'(r) = 0 \Leftrightarrow (-4 - \pi)r = -140 \Leftrightarrow r \cong 19{,}6(m).$

To je námi hledaný stacionární bod.

Nyní se podíváme na znaménka první derivace: v $(0; 19{,}6\rangle$: $f' > 0$ a v $(19{,}6; \infty)$: $f' < 0$. Z toho vyplývá, že v bodě r$\cong$ 19,6 se nachází lokální maximum.

Nyní dokážeme, zda se jedná také o globální maximum. Víme, že $r \in \langle 0; 140\rangle$.Nyní dosadíme tyto krajní body a zjistíme funkční hodnoty.

Pokud $r = 0$, potom $S(r) = -2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 + 140r = 0$

Pokud $r = 140$, potom $S(r) = -2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 + 140r \cong -50388$, záporný obsah nemá smysl, první hodnota je minimální, proto je jasné, že námi nalezený bod je globálním maximem.

Nyní můžeme dopočítat rozměr *v*. $2r + 2v + \pi r = 140 \Leftrightarrow 2 \cdot 19{,}6 + 2v + \pi \cdot 19{,}6 = 140 \Leftrightarrow v \cong 19{,}6(m)$.

Hledané rozměry půdorysu divadelního jeviště jsou tedy přibližně $r = v \cong 19{,}6\ m$.

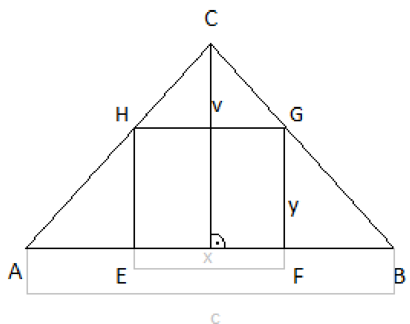
Příklad 3

Do rovnoramenného trojúhelníka vepište obdélník maximálního obsahu S.

(zadání příkladu převzato z Hrubý, Kubát[4])

Řešení:

Tato úloha má již obecný charakter. Proto je třeba se zamyslet i nad vztahy mezi trojúhelníkem a obdélníkem. Pro lepší orientaci pomůže obrázek:



Nejprve podmínky: $x; y; c; v > 0; x \in \langle 0; c\rangle; y \in \langle 0; v\rangle$.

Budeme hledat maximální obsah $S = x \cdot y$, ale protože nemáme žádnou druhou veličinu, musíme jednu z neznámých vyjádřit jiným způsobem. Vyjdeme z podobnosti trojúhelníků CAB a CHG:

$\frac{x}{c} = \frac{v-y}{v} \Longrightarrow x = \frac{v-y}{v} \cdot c$, nyní už máme vyjádřenou jednu z neznámých a můžeme dosadit do obsahu, jehož maximum hledáme:

$$S(y) = \frac{v-y}{v} \cdot c \cdot y = \frac{(v-y) \cdot c}{v} \cdot y = \frac{vc - yc}{v} \cdot y = cy - \frac{c}{v} \cdot y^2$$

Opět najdeme první derivaci a položíme ji rovnou nule pro nalezení stacionárních bodů.

$S'(y) = -2 \cdot \frac{c}{v} \cdot y + c.$

$S'(y) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{c}{v} \cdot y = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{\frac{2c}{v}} = \frac{c \cdot v}{2c} = \frac{v}{2}$, což je námi hledaná stacionární bod.

Nyní musíme dokázat, zda se jedná o globální maximum. Podíváme se na hodnoty krajních bodů, v kterých, jak říká Weierstrassova věta, by také mohl být extrém. Máme interval $y \in \langle 0; v \rangle$.

Pokud $y = 0$, pak: $S(y) = c \cdot 0 - \frac{c}{v} \cdot 0^2 = 0.$

Pokud $y = v$, pak: $S(y) = c \cdot v - \frac{c}{v} \cdot v^2 = 0.$ V obou krajních bodech nám vyšla minimální hodnota pro neznámou *y*, proto nalezená hodnota $y = \frac{v}{2}$ bude ta maximální a naším hledaným globálním maximem.

Nyní lze dopočítat rozměr *x*. $x = \frac{v - \frac{v}{2}}{v} \cdot c = \frac{\frac{1}{2}v}{v} \cdot c = \frac{v}{2v} \cdot c = \frac{c}{2}.$

Hledané hodnoty jsou tedy $y = \frac{v}{2}$ a $x = \frac{c}{2}$.

4.2.2 PŘÍKLADY S PROSTOROVÝMI ÚTVARY

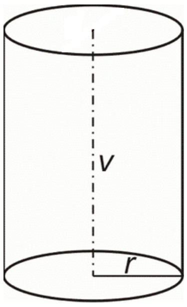
Dalšími příklady jsou úlohy, kde počítáme maximální a minimální hodnoty rozměrů prostorových útvarů. Nejčastěji hledáme tělesa s minimálním povrchem *S* při daném objemu *V*, maximální objem *V* při daném povrchu *S* nebo tělesa maximálního objemu *V*, která jsou vepsaná do jiného tělesa. Takovýmito příklady mohou být:

Příklad 1

V nejmenované firmě se vyrábí z plechu přístroj sepurátor (k promíchání vody se vzduchem). Tento přístroj má tvar válce. Jaké rozměry by měl přístroj mít, pokud víme, že pro spotřebitele je nejvýhodnější maximální objem a pro výrobce minimální spotřeba materiálu na jeho výrobu, tzn., aby měl přístroj minimální povrch?

Řešení:

Hledáme minimální povrch při daném objemu, navíc má tato úloha obecný charakter.



Nejprve opět podmínky: $r; v > 0$.

Nyní napíšeme vzorce pro objem a povrch válce:

$V = Sp \cdot v = \pi r^2 \cdot v \Longrightarrow v = \frac{V}{\pi r^2}$ zde jsme rovnou vyjádřili rozměr *v*.

$S = 2Sp + Spl = 2\pi r^2 + 2\pi rv = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2}$, což je pro nás funkce s jednou neznámou *r* a hledáme minimum této funkce.

Nejprve spočítáme první derivaci a stacionární body.

$$S'(r) = 4\pi r + (-1) \cdot 2v \cdot r^{-2} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

$$S'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi r^3 - 2V = 0 \Leftrightarrow r^3 = \frac{2V}{4\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Toto je stacionární bod, kde může být hledaný extrém.

Musíme nyní dokázat, že se jedná o globální minimum. Víme, že $r \in (0; \infty)$. Nyní zjistíme, k jakým funkčním hodnotám se blíží funkce v těchto krajních bodech.

Pokud $r \to 0$, potom $\lim\limits_{r\to 0} 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2}$ =neex.→ $\lim\limits_{r\to 0+} 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 0 + \frac{V}{0+} = \infty$.

Pokud $r \to \infty$, potom $\lim\limits_{r\to\infty} 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = \infty$. Tedy je jasné, že námi nalezená hodnota je globální minimum.

Nyní tedy můžeme dopočítat druhý rozměr válce: $v = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\sqrt[3]{\frac{\pi^3 V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{V^3 \cdot \frac{4\pi^2}{\pi^3 V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

Hledané rozměry válce jsou $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ a $v = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

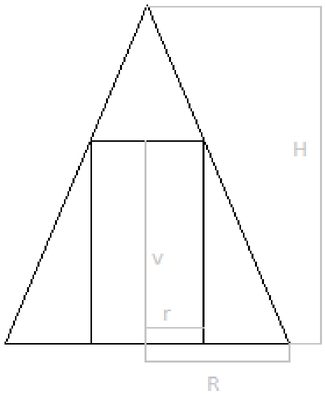
Příklad 2

Z libovolného kužele daného výškou H a průměrem podstavy D lze zhotovit válec s maximálním objemem V. Určete rozměry takového válce.

(Zadání převzato z Aksamit, Mráz [1].)

Řešení:

Nyní hledáme maximální objem vepsaného tělesa, který máme za úkol spočítat obecně. Opět nám pomůže ilustrace problému.



Podmínky: $r; v; D; H; R > 0; r \in \langle 0; R \rangle; v \in \langle 0; H \rangle$.

Protože nemáme zadanou žádnou druhou veličinu než tu, jejíž maximální hodnotu hledáme, musíme opět využít geometrických vztahů mezi tělesy.

Protože s průměrem bychom složitě vyjadřovaly vztahy mezi tělesy, budeme pracovat s poloměrem $R = \frac{1}{2}D$. Na základě podobnosti platí: $\frac{H}{R} = \frac{v}{R-r}$, z čehož můžeme vyjádřit jednu z neznámých, kterou posléze dosadíme do vzorce pro objem. Abychom zjistili, která se nám bude nejvíce hodit, odvodíme vzorec pro objem válce.

$V = Sp \cdot v = \pi r^2 \cdot v$, z čehož vyplývá, že potřebujeme dosadit neznámou v, kterou lze vyjádřit z předchozí rovnice jako $v = \frac{H}{r} \cdot (R - r)$. Nyní dosadíme a zderivujeme:

$V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{H}{R} \cdot (R - r)$.

$V'(r) = 2\,\pi r \cdot \dfrac{H(R-r)}{R} + \pi r^2 \cdot (-1) \cdot \dfrac{H}{R}$.

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow 2\,\pi r \cdot \frac{H(R-r)}{R} + \pi r^2 \cdot (-1) \cdot \frac{H}{R} = 0 \Leftrightarrow \pi r(\frac{2}{R} \cdot H \cdot (R-r) - r \cdot \frac{H}{R} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{R} \cdot H \cdot (R-r) = r \cdot \frac{H}{R} \Leftrightarrow 2R - 2r = r \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}R.$$

Nyní máme stacionární a bod $r = \frac{2}{3}R$.

Opět musíme dokázat, zda se jedná o maximum. Jelikož víme, že neznámá $r \in \langle 0; R \rangle$, dosadíme obě krajní hodnoty, v kterých by také mohl být podle Weierstrassovi věty extrém, a poté odvodíme, jaký extrém je v námi nalezeném bodě. Víme, že $r \in \langle 0; R \rangle$.

Jestliže $r = 0$, pak: $V(0) = 0 \cdot \frac{H}{R} \cdot (R - 0) = 0$.

Jestliže $r = R$, pak $V(R) = \pi R^2 \cdot \frac{H}{R} \cdot (R - R) = \pi R^2 \cdot \frac{H}{R} \cdot 0 = 0$. Z toho plyne, že tyto krajní hodnoty jsou minimálními hodnotami, protože záporný objem nemá smysl. Tudíž námi nalezená hodnota $r = \frac{2}{3}R$ je globálním maximem, protože leží v intervalu mezi dosazovanými krajními body.

Dopočítáme druhý rozměr: $v = \frac{H}{r} \cdot (R - r) = \frac{H \cdot \left(R - \frac{2}{3}R\right)}{R} = \frac{H \cdot \frac{1}{3}R}{R} = \frac{H}{3}$.

Hledané rozměry jsou tedy $r = \frac{2}{3}R$ a $v = \frac{H}{3}$.

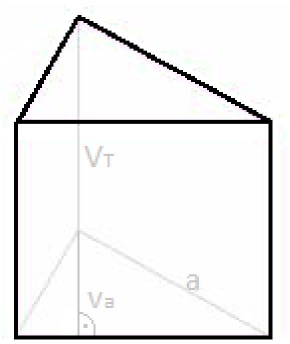
<u>Příklad 3</u>

Najděte pravidelný trojboký hranol, který má při daném povrchu maximální objem.

(zadání převzato z Hrubý, Kubát [4])

<u>Řešení:</u>

Hledáme maximální objem při daném povrchu, opět obecně. Situaci načrtneme.



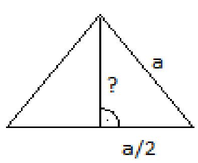
Podmínky: $v_T; a; v_a > 0$

Nyní vyjádříme oba potřebné vzorce:

$S = 2Sp + Spl = 2 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} + 3a \cdot v_T = a \cdot v_a + 3a \cdot v_T$.

$V = Sp \cdot v_T = \frac{a \cdot v_a}{2} \cdot v_T$, budeme hledat maximální objem. Potřebujeme nejprve zredukovat počet proměnných.

Protože víme, že se jedná o pravidelný trojboký hranol, můžeme pomocí Pythagorovy věty dopočítat rozměr v_a:



$$v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Dále musíme dosadit ještě za hodnotu v_T, což lze vyjádřit ze vzorce pro povrch následovně:

$$S = a \cdot v_a + 3a \cdot v_T \Longrightarrow v_T = \frac{S - a \cdot v_a}{3a} = \frac{S - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{3a}.$$

Nyní můžeme dosadit do vzorce pro objem za hodnotu v_T a získáme funkci jedné reálné proměnné, kterou budeme moci zderivovat.

$$V(a) = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} \cdot \frac{S - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{3a} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{S}{3a} - \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{6a} = \frac{\sqrt{3}a}{4} \cdot \frac{S}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}S}{12} \cdot a - \frac{3}{24}a^3 = \frac{\sqrt{3}S}{12} \cdot a - \frac{1}{8}a^3.$$

$$V'(a) = -3 \cdot \frac{1}{8}a^2 + \frac{\sqrt{3}S}{12} = -\frac{3a^2}{8} + \frac{\sqrt{3}S}{12}.$$

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{3a^2}{8} = \frac{\sqrt{3}S}{12} \Leftrightarrow 9a^2 = 2\sqrt{3}S \Leftrightarrow a^2 = \frac{2\sqrt{3}S}{9}.$$

Stacionární bod $a^2 = \frac{2\sqrt{3}S}{9}$ si prozatím ponecháme v tomto tvaru pro praktičtější následné úpravy.

Nyní musíme ještě ověřit, zda se jedná o globální maximum. Víme, že $a \in (0; \infty)$. Nyní zjistíme, jak se chovají funkční hodnoty v okolí těchto krajních bodů.

Pokud $a \to 0$, potom $\lim\limits_{a \to 0} \frac{\sqrt{3}S}{12} \cdot a - \frac{1}{8}a^3 = 0$

Pokud $a \to \infty$, potom $\lim\limits_{a \to \infty} \frac{\sqrt{3}S}{12} \cdot a - \frac{1}{8}a^3 = \lim\limits_{a \to \infty} a \cdot (\frac{\sqrt{3}S}{12} - \frac{1}{8}a^2) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty.$

Proto je jasné, že námi nalezená hodnota ležící v tomto intervalu je globálním maximem.

Dopočítáme tedy rozměr v_T pomocí délky strany trojúhelníkové podstavy a a délku strany podstavy a vyjádříme pomocí tělesové výšky v_T.

$$a^2 = \frac{2\sqrt{3}S}{9} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + 3a \cdot v_T\right)}{9} = \frac{\frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}a}{2} + 2\sqrt{3} \cdot 3a \cdot v_T}{9} = \frac{3a^2 + 2\sqrt{3} \cdot 3a \cdot v_T}{9}$$

$$a^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{2\sqrt{3} \cdot a \cdot v_T}{3} \Leftrightarrow 3a^2 = a^2 + 2\sqrt{3} \cdot a \cdot v_T \Leftrightarrow 2a^2 = 2\sqrt{3} \cdot a \cdot v_T$$

$$\frac{2a^2}{2\sqrt{3}a} = v_T \Leftrightarrow v_T = \frac{a}{\sqrt{3}} \Longrightarrow a = v_T \cdot \sqrt{3}.$$

Hledané hodnoty jsou tedy $a = v_T \cdot \sqrt{3}$ a $v_T = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

4.2.3 OSTATNÍ PŘÍKLADY

Příklad 1

Najděte takové kladné číslo, aby součet tohoto čísla a jeho převrácené hodnoty byl minimální.

(zadání převzato z Hrubý, Kubát $[4]$)

Řešení:

Podmínky: $a > 0$.

$a + \frac{1}{a} = f(a)$, v tomto případě máme rovnou funkci jedné neznámé, proto můžeme rovnou přejít k hledání extrému.

$$f'(a) = 1 - \frac{1}{a^2}$$

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a = 1$, což je hledaný stacionární bod.

Nyní dokážeme, zda se jedná o globální minimum. Víme, že $a \in (0; \infty)$.

Pokud $a \to 0$, potom $\lim_{a \to 0} a + \frac{1}{a}$ =neex. → $\lim_{a \to 0+} a + \frac{1}{a} = 0 + \frac{1}{0+} = \infty$.

Pokud $a \to \infty$, potom $\lim_{a \to \infty} a + \frac{1}{a} = \infty$. Proto je jasné, že nalezená hodnota ležící v tomto intervalu je globálním minimem.

Hledané číslo *a* je $a = 1$.

Příklad 2

Číslo 58 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

Řešení:

Ze zadání plyne, že $a + b = 58$, přičemž součin $a \cdot b$ má být maximální. Nejdříve opět určíme podmínky: $a; b > 0; a \in \langle 0; 58 \rangle; b \in \langle 0; 58 \rangle$.

Z výrazu $a + b = 58$ můžeme vyjádřit jednu z neznámých, například $a = 58 - b$.

Součin: $a \cdot b = f(a; b)$ je pro nás funkce, jejíž maximum hledáme. Protože se v ní vyskytují dvě proměnné, dosadíme za *a* výraz, který jsme odvodily a dostaneme funkci jedné proměnné, a to: $f(b) = (58 - b) \cdot b = 58b - b^2$. Nyní postupujeme jako u všech předchozích příkladů.

$f'(b) = -2b + 58$

$f'(b) = 0 \Leftrightarrow 58 = 2b \Leftrightarrow b = 29$, což je hledaný stacionární bod.

Abychom ověřili, zda se jedná zároveň o globální maximum, najdeme funkční hodnoty v krajních bodech intervalů, kterých může neznámá nabývat. Víme, že $b \in \langle 0; 58 \rangle$.

Pokud $b = 0$, potom $f(0) = 58 \cdot 0 - 0 = 0$

Pokud $b = 58$, potom $f(0) = 58 \cdot 58 - 58^2 = 0$. Je tedy jasné, že nalezená hodnota je globálním maximem.

Dopočítáme i druhou neznámou: $a = 58 - b = 28 - 29 = 29$.

Číslo 58 tedy rozložíme na sčítance 29 a 29.

Příklad 3

Dané číslo $x > 0$ rozložte na dva sčítance tak, aby součet jejich n-tých mocnin byl minimální.

Řešení:

Zadání říká, že $x = a + b$, a hledáme a a b tak, aby $a^n + b^n = f(x; y)$ bylo minimální.

Podmínky: $a; b > 0; a \in \langle 0; x \rangle; b \in \langle 0; x \rangle$.

Z výrazu $x = a + b$ lze vyjádřit jednu z neznámých, například $b = x - a$.

Potom dostaneme funkce $f(a) = a^n + (x - a)^n$ a hledáme minimum této funkce.

$f'(a) = n \cdot a^{-1} + n \cdot (x - a)^{-1} \cdot (-1)$

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow n \cdot (a^{n-1} - (x - a)^{n-1}) = 0$

Podle binomické věty platí:

$n \cdot (a - x + a) \cdot [a^{n-2} + a^{n-2} \cdot (x - a)^1 + \cdots + a^1 \cdot (x - a)^{n-3} + (x - a)^{n-2}]$,

přičemž $[a^{n-2} + a^{n-2} \cdot (x - a)^1 + \cdots + a^1 \cdot (x - a)^{n-3} + (x - a)^{n-2}] \neq 0$,

tedy $a - x + a = 0 \Leftrightarrow 2a = x \Leftrightarrow a = \frac{x}{2}$.

Abychom dokázali, zda je jedná o globální minimum funkce, dosadíme do krajních bodů $a \in \langle 0; x \rangle$:

$f(0) = a^n$

$f(x) = a^n$, je patrné, že tyto hodnoty jsou maximální, tedy hodnota $\frac{x}{2}$ ležící mezi krajními hodnotami je globální minimum funkce.

Nyní lze dopočítat hodnotu *b*, která byla vyjádřena jako $b = x - a = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$.

Tedy dané číslo *a* musíme rozložit na dvě shodná čísla, aby byl součet jejich n-tých mocnin minimální.

4.2.4 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

1. Najděte rovnostranný trojúhelník, který má při daném obvodu maximální obsah.
2. Jedna strana knihy má mít 405 cm^2potištěného obsahu. Horní a dolní okraj jsou 3 cm a boční 2 cm široké. Jaké rozměry má mít kniha, aby její obsah byl minimální? (zadání převzato z Aksamit, Mráz, $[1]$)
3. Z dřevěné desky tvaru ostroúhlého trojúhelníka (jedna jeho strana má délku a, výška k této straně v_a), má být vyříznuta stolová obdélníková deska, přičemž jedna strana obdélníku splývá s částí strany trojúhelníka. Určete rozměry stolové desky tak, aby deska byla co největší, tedy aby její obsah byl největší možný.
4. Čtvrtka tvaru obdélníka má rozměry 60×28 cm. V každém z jejích rohů se odstřihne stejný čtverce a zbytek čtvrtky se složí do tvaru otevřené krabice. Jak dlouhá musí být strana odříznutých čtverců, aby objem krabice byl maximální?
5. Z drátu dlouhého 104 cm se má zhotovit model kvádru s maximálním povrchem tak, aby součet délek dvou podstavných hran byl roven výšce (délce třetí strany) kvádru. Určete rozměry kvádru.
6. Do kužele o poloměru podstavy r a výšce v vepište rotační válec maximálního objemu. (zadání převzato z Hrubý, Kubát, $[4]$).
7. Určete takové nenulové reálné číslo x, že jeho rozdíl s převrácenou hodnotou druhé mocniny tohoto čísla je minimální. (příklad převzat z www.is.muni.cz).
8. Rozdělte číslo 50 na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

Výsledky: 1. $c = a = \frac{1}{3}o$ (a … rameno, c… základna, o… obvod). 2. $x = 3\sqrt{30}$; $y = \frac{405}{3\sqrt{30}}$. 3. $x = \frac{1}{2}a$; $y = \frac{1}{2}v_a$ (a… základna trojúhelníka, v_a… výška na základnu). 4. $x =$ 6cm. 5. $a = b =$ 6,5cm; $c =$ 13cm (a, b… délky podstavy, c… výška kvádru). 6. $r_1 = \frac{2}{3}r$; $v_1 = \frac{1}{3}v$ (r… poloměr válce, v… výška válce). 7. $x = -\sqrt[3]{2}$. 8. $x = y = 25$.

5. ZÁVĚR

Cílem této práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů na užití diferenciálního počtu jedné reálné proměnné. Aplikačními úlohami jsou především průběhy funkcí a slovní úlohy na extrémy, které jsem v této práci řešila.

V počáteční části práce jsem dvě kapitoly věnovala shrnutí základní potřebné teorie pro výše zmíněné aplikační úlohy. Tato teorie byla následně využita v aplikačních příkladech.

Druhá část práce se již věnuje aplikačním úlohám. V této části jsem řešila průběhy funkcí. U každého příkladu byl určen definiční obor funkce, spojitost funkce, popřípadě periodicita, průsečíky s osami x a y, parita funkce, monotonie funkce a stacionární body, lokální maxima a lokální minima, konvexnost, konkávnost a inflexní body, limity v krajních bodech definičního oboru, asymptoty funkce, obor hodnot, popřípadě další vlastnosti funkce, globální extrémy (pokud existují) a graf funkce. Grafy funkcí jsou vytvořeny v programu GeoGebra. Funkce byly vybírány tak, aby od každého typu zmiňovaného v úvodu práce byla vybrána alespoň jedna. Každý příklad se skládá ze dvou částí, nejprve je řešen průběh funkce a následně jsou hledány globální extrémy na konkrétním uzavřeném intervalu, kde používáme k řešení Weierstrassovu větu. Příklady jsou provázeny slovními komentáři vysvětlující postup a jsou řazené podle obtížnosti.

Další část práce je věnovaná úlohám na extrém. Tato část je rozdělena podle charakteru úloh. Jsou řešeny úlohy, v nichž se vyskytují rovinné útvary, prostorová tělesa, i další úlohy numerického typu. U každé části lze najít příklady řešené konkrétně i obecně. Příklady v této části jsou opět doplněny komentáři vysvětlující postup a jsou řazeny podle obtížnosti.

Tato práce by měla sloužit jako studijní opora studentům středních škol, gymnázií, popřípadě studentům bakalářských studií.

6. LITERATURA A ZDROJE

[1] AKSAMIT, Pavel a František MRÁZ. *Příklady z matematické analýzy pro učitelské studium.* 2., opr. a rozš. vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 1995. 209 s. ISBN 80-7040-150-8.

[2] BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 3. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 1999. 631 s. ISBN 80-719-6140-X.

[3] FROLÍKOVÁ, Jiřina. Matematická analýza pro učitelské studium, I. semestr, SPN Praha, 1984

[4] HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet*. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. 210 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN978-80-7196-363-9.

[5] JIRÁSEK, František, Zdeněk TICHÝ, Eduard KRIEGELSTEIN. *Sbírka řešených příkladů z matematiky: logika a množiny, lineární a vektorová algebra, analytická geometrie, posloupnosti a řady, diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné: příručka pro vys. školy*. 4. vyd. Praha: SNTL, 1990. 817 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-030-0239-7.

[6] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. 303 s. ISBN 80-719-6099-3.

[7] PETRÁŠKOVÁ, Vladimíra a Eva ZMEŠKALOVÁ. *Algebraické funkce.* Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2005, 167 s., ISBN 80-7040-825-1

[8] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia - Funkce*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008. 168 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-357-8.

[9] www.matematika.cz/derivace

[10] www.is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/aplikace-dif-poctu.html