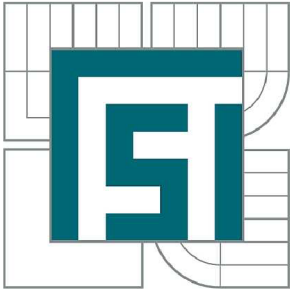


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND  
BIOMECHANICS

## PEVNOSTNÍ NÁVRH A DEFORMAČNÍ ANALÝZA NOSNÉ PRUTOVÉ KONSTRUKCE.

STRENGTH DESIGN AND DEFORMATION ANALYSIS OF THE TRUSS CONSTRUCTION.

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

MICHAL RYŠÁNEK

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. RNDr. Ing. JAN VRBKA, DrSc., dr.  
h. c.

BRNO 2012

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky  
Akademický rok: 2011/2012

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Michal Ryšánek

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

**Pevnostní návrh a deformační analýza nosné prutové konstrukce.**

v anglickém jazyce:

**Strength design and deformation analysis of the truss construction.**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Pevnostní návrh příčných rozměrů prutů jeřábové příhradové konstrukce pomocí přístupů prosté pružnosti. Předpokládá se rovinný geometrický výpočtový model a namáhání prutů na tah (tlak) a vzpěr. Tuhostní analýza.

Cíle bakalářské práce:

Tvorba výpočtového modelu umožňujícího řešení úlohy pomocí metod prosté pružnosti. Návrh příčného profilu prutů jeřábové příhradové konstrukce. Stanovení posuvů ve vybraných místech. Získání praktických výpočtářských zkušeností.

Seznam odborné literatury:

- Janíček,P.,Ondráček,E.,Vrbka,J.,Burša,J.: Mechanika těles. Pružnost a pevnost I. CERM, 2004  
Gere, J.M., Timoshenko, S.P.: Mechanics of materials. Chapman and Hall, London, 1991  
Hoschl,C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL Praha, 1977

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ing. Jan Vrbka, DrSc., dr. h. c.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2011/2012.

V Brně, dne 25.10.2011

L.S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.  
Děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Obsahem bakalářské práce je pevnostní návrh a deformačně-napěťová analýza prutové soustavy. Tato prutová soustava je zjednodušený výpočtový model rovinné příhradové konstrukce. Jedním z cílů práce je vyčíslit normálové síly, vzniklé ve všech prutech soustavy, v závislosti na poloze břemene. Dále pak návrh profilu prutů s ohledem na bezpečnost vůči mezním stavům. Vliv gravitačního pole Země ve výpočtu není uvažován.

## **ABSTRACT**

This Bachelor thesis is focused on strength design and strain-stress analysis of truss construction. Simplified as a plain truss construction. One of the main goals of this thesis is calculate stresses for each member of the construction, depending on the load position. The cross section of beams were designed respecting safety conditions. The influence of the gravity field was not taken into account.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Příhradová konstrukce, Prut, Statická rovnováha, Napjatost, Deformace

## **KEYWORDS**

Truss construction, Rod, Static balance, Stress, Deformation

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

RYŠÁNEK, M. *Pevnostní návrh a deformační analýza nosné prutové konstrukce*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 47 s. Vedoucí bakalářské práce prof. RNDr. Ing. Jan Vrbka, DrSc., dr. h. c..

## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, zpracoval jsem ji samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím literatury uvedené v seznamu použitých pramenů.

25.5. 2012

.....  
Michal Ryšánek

## **PODĚKOVÁNÍ**

## PODĚKOVÁNÍ

Velké poděkování patří panu prof. RNDr. Ing. Janu Vrbkovi, DrSc., dr. h. c. za ochotu, věnovaný čas a cenné rady, poskytnuté při vypracování bakalářské práce.



## Obsah

1. Úvod .....	3
2. Teoretická část .....	4
2.1 Charakteristika oboru Pružnost a pevnost .....	4
2.2 Mezní stavy .....	4
2.2.1 Mezní stav pružnosti .....	5
2.2.2 Mezní stav vzpěrné stability .....	6
2.3 Vnitřní prvek tělesa .....	8
2.4 Prutové předpoklady .....	10
2.5 Zatížení tahem (tlakem) .....	10
2.5.1 Délková a úhlová přetvoření .....	11
2.5.2 Rozložení napětí v příčném průřezu .....	11
2.5.3 Energie napjatosti .....	13
2.5.4 Věta Castiglianova .....	14
2.6 Prutové soustavy .....	14
2.6.1 Statická určitost prutové soustavy .....	15
2.6.2 Metody řešící prutovou soustavu .....	16
3. Napěťová analýza prutové konstrukce, volba příčných rozměrů prutů .....	17
3.1 Varianta uložení I .....	18
3.1.1 Řešená prutová soustava .....	18
3.1.2 Statická určitost .....	19
3.1.2.1 Vnější statická určitost .....	19
3.1.2.2 Vnitřní statická určitost .....	19
3.1.3 Uvolnění prutové soustavy .....	20
3.1.4 Soustava rovnic .....	21
3.1.5 Řešení soustavy rovnic .....	22
3.1.6 Osové síly v prutech .....	23
3.2 Varianta uložení II .....	26
3.2.1 Řešená prutová soustava .....	26
3.2.2 Statická určitost .....	26
3.2.2.1 Vnější statická určitost .....	26
3.2.2.2 Vnitřní statická určitost .....	27
3.2.3 Uvolnění prutové soustav .....	28
3.2.4 Částečné uvolnění .....	29
3.2.5 Soustava rovnic .....	30

3.2.6	Řešení soustavy rovnic .....	32
3.2.7	Osové síly v prutech .....	33
3.3	Návrh příčných rozměrů prutu .....	35
3.3.1	Minimální plocha průřezu .....	35
3.3.2	Volba rozměrů profilu .....	36
3.4	Bezpečnost k meznímu stavu pružnosti .....	38
3.5	Kontrola prutů k meznímu stavu vzpěrné stability .....	39
3.5.1	Štíhlost prutu .....	39
4.	<b>Deformační analýza</b> .....	41
5.	<b>Závěr</b> .....	44
	<b>Seznam použitých zdrojů</b> .....	45
	<b>Seznam použitých veličin</b> .....	46
	<b>Seznam příloh</b> .....	47

## 1. Úvod

Zadaný úkol bakalářské práce bude řešen pomocí znalostí získaných při bakalářském studiu strojního inženýrství. Pro zpracování problematiky zadaného tématu práce jsou stěžejní základní poznatky ze čtyř absolvovaných kurzů. Těmito kurzy jsou:

- a) Pružnost a pevnost I - metodika určení napjatosti a deformace u nejjednodušších prutových těles
- b) Statika - uvolňování těles a řešení jejich statické rovnováhy
- c) Matematika - řešení soustavy lineárních rovnic pomocí matematického softwaru MAPLE
- d) Konstruování - řešení výpočtových modelů pomocí programu MathCad

Pro vypracování teoretické části bakalářské práce byla použita literatura určená pro výuku kurzu Pružnost a pevnost I [1], [2].

## 2. Teoretická část

### 2.1 Charakteristika oboru *Pružnost a pevnost*

V současné době je hlavní náplní oboru nazývaného *Pružnost a pevnost* (dále jen PP) deformačně-napěťová analýza těles, nauka o mezních stavech, stanovení bezpečnosti a spolehlivosti. Důležitým předpokladem, pro úspěšné řešení problému v tomto odvětví, jsou znalosti matematiky, materiálového inženýrství, fyziky a strojnictví. Cílem studia tohoto oboru je pochopení a vyjádření:

- deformace, napjatosti a porušování tělesa a jejich vyjádření pomocí veličin
- vztahů mezi silovým působením, deformací, napjatostí a porušením tělesa
- běžných a mezních stavů

### 2.2 Mezní stavy

Při zatěžování tělesa dochází téměř vždy k jeho deformaci a následně i jeho porušení. Pokud se těleso deformuje a někdy i zjistitelně porušuje, avšak stále plní požadovanou funkci, označujeme tento stav za běžný. Jestliže vlivem deformace a porušení těleso ztrácí svou funkčnost, deformace nebo porušení se mění z funkčně přípustných na funkčně nepřípustné, musela deformace a porušování překročit určité rozhraní. Tento okamžik označujeme jako mezní stav. V učebním textu je mezní stav definován takto:

*„Mezní stav je takový ze zatěžovacích stavů tělesa, při němž se kvalitativně mění schopnost tělesa plnit některou z požadovaných funkcí, příp. těleso tuto schopnost zcela ztrácí.“ [2]*

Jestliže navrhujeme soustavu (konstrukci) předpokládáme, že bude plnit požadovanou funkci. A to za podmínek:

- v realizovaném stavu (po montáži)
- za běžných i mimořádných provozních podmínek
- po požadovanou dobu

Schopnost soustavy (konstrukce) za těchto podmínek pracovat označujeme jako spolehlivost soustavy. Spolehlivost se běžně vyjadřuje pomocí veličiny, kterou nazýváme koeficient bezpečnosti (dále jen bezpečnost). Výpočet bezpečnosti provedeme pomocí známých hodnot. Těmito hodnotami jsou:

- $\alpha_M$  - mezní hodnota veličiny  $\alpha$ , popisující vznik mezního stavu
- $\alpha$  - veličina, určená pro vyšetřovaný zatěžovací stav

Následně dostaneme hodnotu bezpečnosti dle vztahu:

$$k = \frac{\alpha_M}{\alpha}$$

Z výsledné hodnoty bezpečnosti jsme schopni formulovat slovní hodnocení:

$k \leq k_D$  - nevyhovuje,

$k > k_D$  - pravděpodobně vyhovuje,

kde  $k_D$  odpovídá minimální dovolené bezpečnosti.  $k_D$  vyplívá z praktické zkušenosti a souvisí s bezpečností aktuálního mezního stavu. V praxi volíme obvykle pro výpočet  $k_D = 4$ .

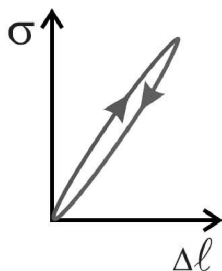
S ohledem na zadané téma budou uvedeny dva případy mezních stavů, které by při zatížení soustavy (konstrukce) mohly nastat, uvažujeme-li užití prosté PP. Těmito mezními stavy jsou:

- Mezní stav pružnosti
- Mezní stav vzpěrné stability

### 2.2.1 Mezní stav pružnosti

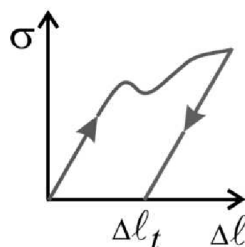
Zatěžujeme-li těleso z nezatíženého stavu na určitou hodnotu zatížení a následně těleso odlehčíme, uskutečnili jsme tzv. zatěžovací cyklus. Při tomto provedeném experimentu mohou nastat dvě různé situace:

- a) Pružná (vratná) deformace - deformace po odlehčení je tak malá, že není možné pomocí dostupných prostředků deformaci zjistit



Obr. 2.1 Pružná deformace [2]

- b) Plastická (trvalá) deformace - deformace po odlehčení je zjistitelná pomocí dostupných prostředků; při trvalé deformaci je v tělese vyvolána i deformace pružná



Obr. 2.2 Plastická deformace [2]

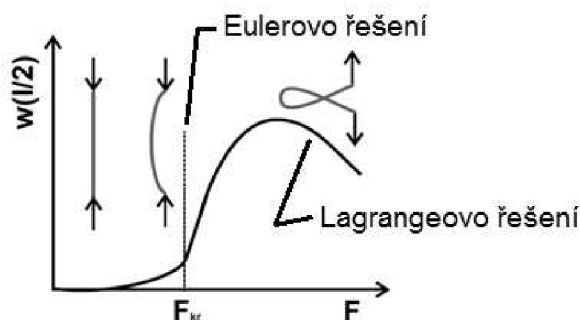
Mezní stav pružnosti je v učebním textu definován takto:

*„Mezní stav pružnosti tělesa je takový jeho stav, při jehož překročení vznikají v tělese zjistitelné plastické deformace (po uskutečnění zatěžovacího cyklu).“ [2]*

## 2.2.2 Mezní stav vzpěrné stability

Řešenou příhradovou konstrukci lze pro zjednodušení výpočtu převést na zjednodušený výpočtový model, kde do styčnic umístíme kloubové spoje. Tímto zjednodušením omezíme charakter namáhání prutů konstrukce na prostý tah (tlak) resp. vzpěr. Zatížíme-li tenkou tyč (poměr charakteristického rozměru příčného průřezu k délce prutu je malý) tlakem, začne se tyč při určité hodnotě zatížení prohýbat. Zatímco v počáteční fázi zatěžování (zatěžující síla  $F$  je menší než kritická síla vzpěru  $F_{kr}$ ) je podstatné stlačování prutu (střednice) a nepodstatný jeho průhyb, při větším zatížení (zatěžující síle  $F$  je větší než kritická síla vzpěru  $F_{kr}$ ) je tomu naopak. Podstatným se stává průhyb a stlačování prutu (střednice) je nepodstatné. V učebním textu je mezní stav vzpěrné stability definován takto:

*„Mezní stav vzpěrné stability je takový stav soustavy, při jehož dosažení se mění charakter podstatné deformace.“ [2]*



Obr. 2.3 Eulerovo řešení [2]

Eulerovo řešení předpokládá malé posuvy a natočení střednice. Rovnici kritické síly najdeme v literatuře [2] ve tvaru

$$F_{kr} = \alpha^2 \frac{E \cdot J_{min}}{l^2},$$

kde  $J_{min}$  je menší z kvadratických momentů průřezu, součinitel  $\alpha$  je dán uložením prutu.

Pomocí vztahu určeného pro ideální a ideálně zatížený prut jsme schopni určit bezpečnost k meznímu stavu vzpěrné stability dle vztahu

$$k_V = \frac{F_{kr}}{F}.$$

Nicméně u skutečného materiálu může mezi pevností vzpěrné stability předcházet mezní stav pružnosti, případně mezní stav křehké pevnosti. Při určování bezpečnosti nás zajímá první stav, který nastane při menším zatěžování součásti. Budeme-li předpokládat materiál prutu ve stavu tvárném, jenž je charakterizován výraznou mezí kluzu  $\sigma_k$ , potom určíme hodnotu odpovídající velikosti napětí při meznímu stavu vzpěrné stability

$$\sigma_{kr} = \frac{|N|}{S} = \frac{F_{kr}}{S} = \alpha^2 \frac{E \cdot J_{min}}{l^2 \cdot S} = \alpha^2 \frac{E}{\lambda^2},$$

kde veličina  $\lambda$  je tzv. štíhlost prutu a je definována vztahem

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{\frac{J_{min}}{S}}} = \frac{l}{i},$$

přičemž veličinu  $i$  nazýváme poloměrem osového kvadratického momentu. Tato veličina slouží k porovnání tloušťky prutů při různých tvarech jejich průřezu.

Následně stanovíme výpočtem mezní štíhlost prutu  $\lambda_k$  (plynoucí z podmínky  $\sigma_k = \sigma_{kr}$ )

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{\alpha^2 \cdot E}{\sigma_k}}.$$

Nyní je nutné v závislosti na příslušné relaci rozhodnout, který z možných mezních stavů nastane jako první:

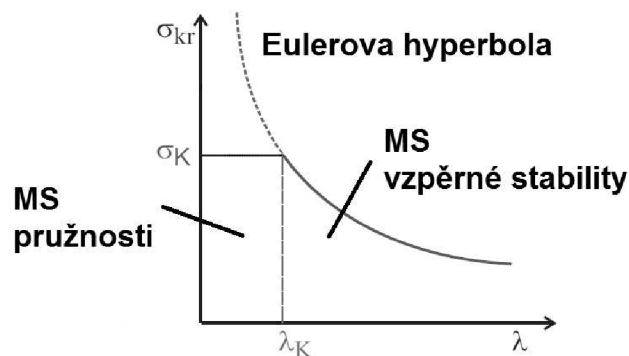
- a)  $\lambda \geq \lambda_k \rightarrow$  rozhodující je mezní stav vzpěrné stability,  $F_{kr} = \alpha^2 \frac{E \cdot J_{min}}{l^2}$   
a bezpečnost vzhledem k meznímu stavu vzpěrné stability bude určena vztahem

$$k_v = \frac{F_{kr}}{F}$$

b)  $\lambda < \lambda_k \rightarrow$  rozhodující je mezní stav pružnosti a bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti bude určena vztahem

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{max}}$$

Relace je možné znázornit Eulerovou hyperbolou, uvažujme materiál ve stavu tvárném.

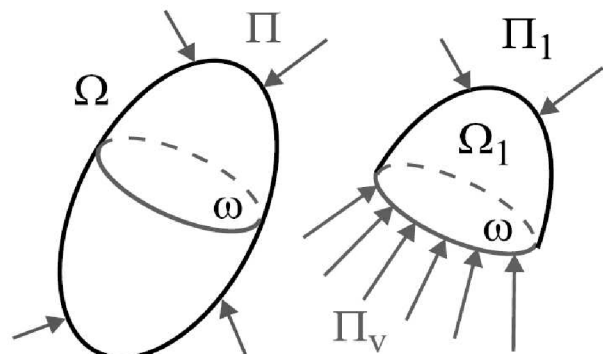


Obr. 2.4 Eulerova hyperbola

### 2.3 Vnitřní prvek tělesa

Vlivem vnějšího silového působení vznikají v tělese vnitřní síly. Pro vyšetření těchto sil v každém místě tělesa je vhodné těleso rozdělit na prvky. Tvar prvku je zvolen s ohledem na tvar vyšetřované součásti a charakter řešeného problému. Jako první krok je nutné uvolnit prvek z tělesa. Po oddělení prvku zavedeme na řezu  $\omega$  účinky vzájemného působení. V mechanice těles jsou to účinky silové, spojitě nebo po částech spojitě rozložené na řezu  $\omega$ . Jsou to tedy plošné síly.

- $\Omega$  - těleso
- $\Pi$  - rovnovážná soustava vnějších sil působících na těleso
- $\Omega_1$  - uvolněný prvek
- $\Pi_1$  - soustava vnějších sil působících na uvolněný prvek
- $\Pi_v$  - soustava vnitřních plošných sil



Obr. 2.5 Uvolnění prvku [2]

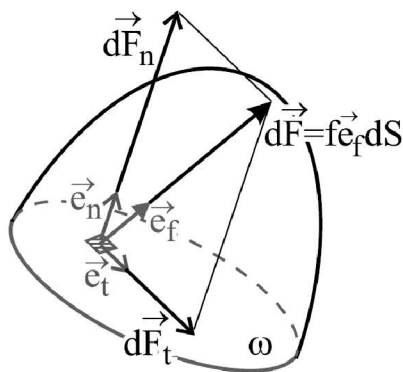


Na plochu  $dS$  v řezu  $\omega$  působí elementární síla

$$d\vec{F} = \vec{f} \cdot dS,$$

kde  $\vec{f}$  je měrná plošná síla a nazývá se obecné napětí v řezu.

Obecné napětí v řezu  $\vec{f}$  je vektor a je tedy možné ho rozložit do normálového a tečného směru vzhledem k ploše  $dS$ . Síly, vzniklé rozložením obecného napětí do zmíněných směrů, mají rozdílné účinky na materiál a případný vznik mezních stavů.



Obr. 2.6 Obecné napětí v řezu [2]

$$\vec{f} = \sigma \cdot \vec{e}_n + \tau \cdot \vec{e}_t$$

Vzájemné vztahy mezi obecným napětím  $\vec{f}$ , normálovým napětím  $\sigma$  a smykovým napětím  $\tau$  vypadají takto:

$$\sigma = \vec{f} \cdot \vec{e}_n$$

$$\tau = \sqrt{f^2 - \sigma^2} = \vec{f} \cdot \vec{e}_t$$

Jednotkou všech těchto napětí je pascal (Pa).

Námi řešená prutová soustava je namáhána pouze normálovým napětím. Je tedy nutné si určit orientaci napětí. Je-li:

$\sigma > 0 \rightarrow$  tahové napětí, směřující ven z řezu

$\sigma < 0 \rightarrow$  tlakové napětí, směřující dovnitř prvku

Z důvodu složitosti výpočtu obecného napětí na řezu je nutné zavést určité předpoklady, které sice zjednoduší výpočet, ale omezí rozsah použitelnosti výpočtu jen na modelová tělesa. Jedním z těchto těles je i prut, z něhož je složena řešená

prutová soustava. Prut uvolňujeme jednonásobně elementárním prvkem a za prut je možné prohlásit těleso, splňuje-li prutové předpoklady.

## 2.4 Prutové předpoklady

- a) předpoklady geometrické
- prut je určen střednicí a v každém bodě střednice příčným průřezem  $\psi$
  - střednice je spojitá a hladká křivka konečné délky
  - příčný průřez je jednoduše nebo vícenásobně souvislá oblast, ohraničená obrysovou křivkou
  - délka střednice je vždy podstatně větší než největší rozměr příčného průřezu
- b) předpoklady vazbové a zatěžovací
- vazby omezují jen posuvy a úhly natočení střednice
  - zatížení je soustředěno na střednici. Silovým působením na prut jsou osamělé nebo liniové síly a silové dvojice s působištěm na střednici
- c) předpoklady deformační
- střednice zůstává v procesu deformace spojitá a hladká
  - průřezy v procesu deformace zůstávají rovinné a kolmé k deformované střednici, pouze se vzájemně
    - o oddalují (tah), přibližují (tlak)
    - o natáčí kolem osy ležící v příčném průřezu a deformují (ohyb)
    - o natáčí kolem osy kolmé k příčnému průřezu a nedeformují (krut)
    - o posouvají kolmo ke střednici (smyk)
- d) předpoklady napjatostní
- napjatost v jakémkoliv bodě prutu je určena normálovým a smykovým napětím v příčném řezu vedeném tímto bodem - tuto napjatost nazýváme prutová napjatost. Tenzor napětí vypadá následovně:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ nebo } T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

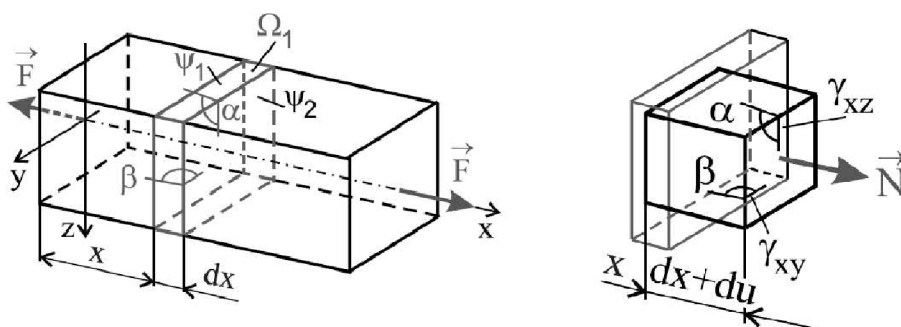
## 2.5 Zatížení tahem (tlakem)

Namáhání přímého prizmatického prutu tahem (tlakem) lze vymežit následujícími podmínkami

- jsou splněny prutové předpoklady
- příčné průřezy se vzájemně oddalují (přibližují) a následně izotropně deformují (tj. mění velikost, ale nemění tvar)
- deformace jsou z hlediska statické rovnováhy prvku nepodstatné

### 2.5.1 Délková a úhlová přetvoření

„Tyto vztahy vyjádříme v závislosti na typu pohybu příčných průřezů při zatěžování. Pro jejich vyšetřování uvolníme z prutu základní prvek prutu  $\Omega_1$ . Při tahovém (tlakovém) zatížení prutu se limitně blízké (vzdálenost  $dx$ ) příčné průřezy  $\psi_1, \psi_2$  prvku  $\Omega_1$  oddalují (přibližují) a deformační posuv  $du$  je stejný pro všechny body  $\psi$ . Pravé úhly  $\alpha, \beta$  se nemění.“ [1]



Obr. 2.7 Délková a úhlová přetvoření [2]

Těmto deformacím odpovídá vztah pro délkové přetvoření ve směru normály (konstantní po celém příčném průřezu)

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \text{konst.}$$

Úhlová přetvoření jsou nulová

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0.$$

Délková přetvoření v příčných směrech

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x.$$

V zatěženém prutu vzniká trojosý stav deformace a tenzor přetvoření má tvar

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

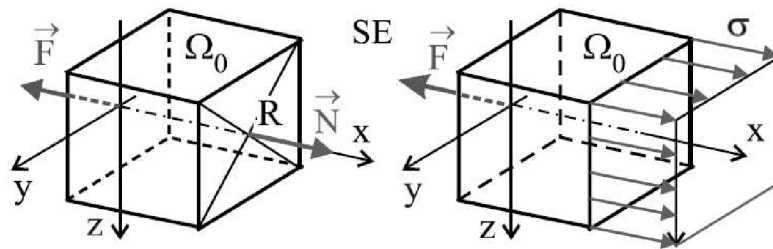
### 2.5.2 Rozložení napětí v příčném průřezu

Jedinou zatěžující silou je normálová síla k příčnému průřezu. To je podmínka zatěžování prostým tahem (tlakem). Délkové přetvoření je po celém příčném řezu

konstantní. Dosadíme-li tyto parametry do Hookova zákona je zřejmé, že napětí po příčném průřezu je konstantní.

$$\sigma_x(y, z) = E \cdot \varepsilon_x(y, z) = \text{konst.},$$

kde E je Youngův modul pružnosti v tahu.



Obr. 2.8 Rozložení napětí v příčném řezu [2]

Známe-li rozložení napětí v příčném průřezu, jsme schopni z podmínky statické rovnováhy určit velikost normálového napětí z průběhu výsledných vnitřních účinků.

Podmínka statické ekvivalence mezi soustavou elementárních plošných sil má tvar

$$dN = \sigma_x dS,$$

kde N je silová výslednice působící v těžišti průřezu.

Následně silová podmínka statické ekvivalence má tvar

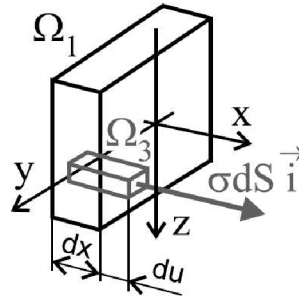
$$\sum_{\psi} F_x: \iint_{\psi} \sigma_x dS = N$$

$$\sigma_x = \text{konst.} \rightarrow \iint_{\psi} \sigma_x dS = \sigma_x \iint_{\psi} dS = N$$

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

### 2.5.3 Energie napjatosti

„V lineární pružnosti se celá deformační práce projeví zvýšením pružné energie napjatosti  $A = \Delta W$ . Na trojnásobně elementární prvek  $\Omega_3$  působí vnitřní elementární síla  $\sigma dS \vec{i}$ . Změnu délky  $dx$  tohoto prvku označíme  $du$ .“ [2]



Obr. 2.9 Energie napjatosti [2]

Deformační práce vnitřní elementární síly

$$A_{\sigma dS} = \frac{1}{2} (\sigma dS) du$$

Po dosazení za  $du = \varepsilon dx$  a  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$  dostaneme vztah pro energii napjatosti uvažovaného elementárního prvku ve tvaru

$$W_{\Omega_3} = A_{(\sigma dS)} = \frac{1}{2} (\sigma dS) \varepsilon dx = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} dS dx$$

Pro prostý tah platí  $\sigma = \frac{N}{S}$  a energie napjatosti jednonásobně elementárního prvku pak je

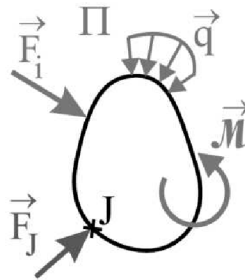
$$W_{\Omega_1} = \iint_{\psi} \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} dx dS = \iint_{\psi} \frac{N^2}{2ES^2} dx dS = \frac{N^2 dx}{2ES^2} \iint_{\psi} dS = \frac{N^2}{2ES} dx$$

V prutu o délce  $l$  se akumuluje energie napjatosti

$$W_l = \int_0^l W_{\Omega_1} = \int_0^l \frac{N^2}{2ES} dx$$

### 2.5.4 Věta Castiglianova

„Uvažujme izotropní těleso, na které působí obecná silová soustava  $\Pi$ . (jednu sílu z této silové soustavy s působištěm v bodě  $J$  označíme  $\vec{F}_J$ ). Tato silová soustava vykonala deformační práci  $A$ , která je nezávislá na historii zatěžování (uvažujme lineárně pružné těleso).“ [2]



Obr. 2.10 Obecná silová soustava [2]

Vykonaná práce se projeví zvýšením energie napjatosti

$$A = W$$

Provedeme-li parciální derivaci celkové energie napjatosti tělesa (soustavy) podle zvolené síly  $\vec{F}_J$ , pak posuv po nositelce této síly bude roven

$$u_j = \frac{\partial W}{\partial F_j}$$

Působí-li ve vyšetřovaném místě tělesa silová dvojice  $\vec{M}_j$ , jsme schopni parciální derivací celkové energie napjatosti podle této silové dvojice získat úhel natočení

$$\varphi_j = \frac{\partial W}{\partial M_j}$$

## 2.6 Prutové soustavy

Námi řešená prutová soustava je vlastně zjednodušený výpočtový model příhradové konstrukce, která se běžně používá pro výrobu mostů, jeřábových věží atd. Namísto nepohyblivých vazeb (v praxi svarové spoje) jsou do styčníků umístěny rotační kinematické dvojice. Tyto vazby vedou k jediné složce  $VVÚ$  a tou je normálová síla. Pruty jsou tedy namáhány pouze tahem (tlakem).

### 2.6.1 Statická určitost prutové soustavy

U prutových soustav mohou nastat dva druhy statické neurčitosti. Jedná se o neurčitost vnitřní a vnější

#### a) Vnitřní statická určitost

- počet neznámých sil v prutech se musí rovnat počtu použitelných vnitřních podmínek statické rovnováhy
- podmínka vnitřní statické určitosti má pak tvar

$$2k - 3 = p \quad \text{v rovině,}$$

$$3k - 6 = p \quad \text{v prostoru}$$

kde  $k$  značí počet styčníků,  $p$  je počet prutů soustavy

1. Nastane-li případ vnitřní statické neurčitosti  $2k - 3 > p$ , (resp.  $3k - 6 > p$ ), pak je soustava pohyblivá a nelze ji řešit.
2. Nastane-li případ vnitřní statické neurčitosti  $2k - 3 < p$  (resp.  $3k - 6 < p$ ), pak je soustava nepohyblivá, avšak vnitřně staticky neurčitá. Je třeba do výpočtu přidat vazbové deformační podmínky.

Stupeň vnitřní statické neurčitosti můžeme vyjádřit vztahem

$$s_{in} = p - (2k - 3) \quad \text{v rovině,}$$

$$s_{in} = p - (3k - 6) \quad \text{v prostoru}$$

#### b) Vnější statická určitost

- prutovou soustavu považujeme za celistvé těleso. Soustava je vně staticky určitá, rovná-li se počet použitelných podmínek statické rovnováhy počtu neznámých parametrů

$$v_{celek} = \mu_{ex}$$

Stupeň vnější statické neurčitosti můžeme vyjádřit vztahem

$$s_{ex} = \mu_{ex} - v_{celek}$$

## 2.6.2 Metody řešící prutovou soustavu

### a) Postupná styčnicková metoda

Postupným uvolňováním jednotlivých styčnicků sestavujeme rovnice statické rovnováhy pro celou prutovou soustavu. Uvolňovat začínáme styčnick se 2 neznámými parametry (v rovině) resp. 3 neznámými parametry (v prostoru).

### b) Obecná styčnicková metoda

Uvolněním všech styčnicků prutové soustavy za podmínek statické rovnováhy vznikne soustava lineárních rovnic. Tuto soustavu řešíme pomocí výpočtového softwaru



### **3. Napět'ová analýza prutové konstrukce, volba příčných rozměrů prutů**

Napět'ová analýza je řešena pro dvě varianty uložení prutové soustavy. Tato prutová soustava je zjednodušený výpočtový model portálového mostového jeřábu, kde svarové spojení je nahrazeno rotačními kinematickými dvojicemi. Tímto zjednodušením vzniká v prutech pouze tahové (tlakové) napětí vyvolané osovou silou v prutech.

Při řešení první varianty budeme uvažovat nulové tření v místě „F“. Styčnicku v místě „F“ tedy není bráněno v horizontálním posuvu.

Druhá úloha bude řešena za předpokladu, že styčnicku „F“ bude posuvu v horizontálním směru zcela zabráněno užitím rotační vazby v místě „F“.

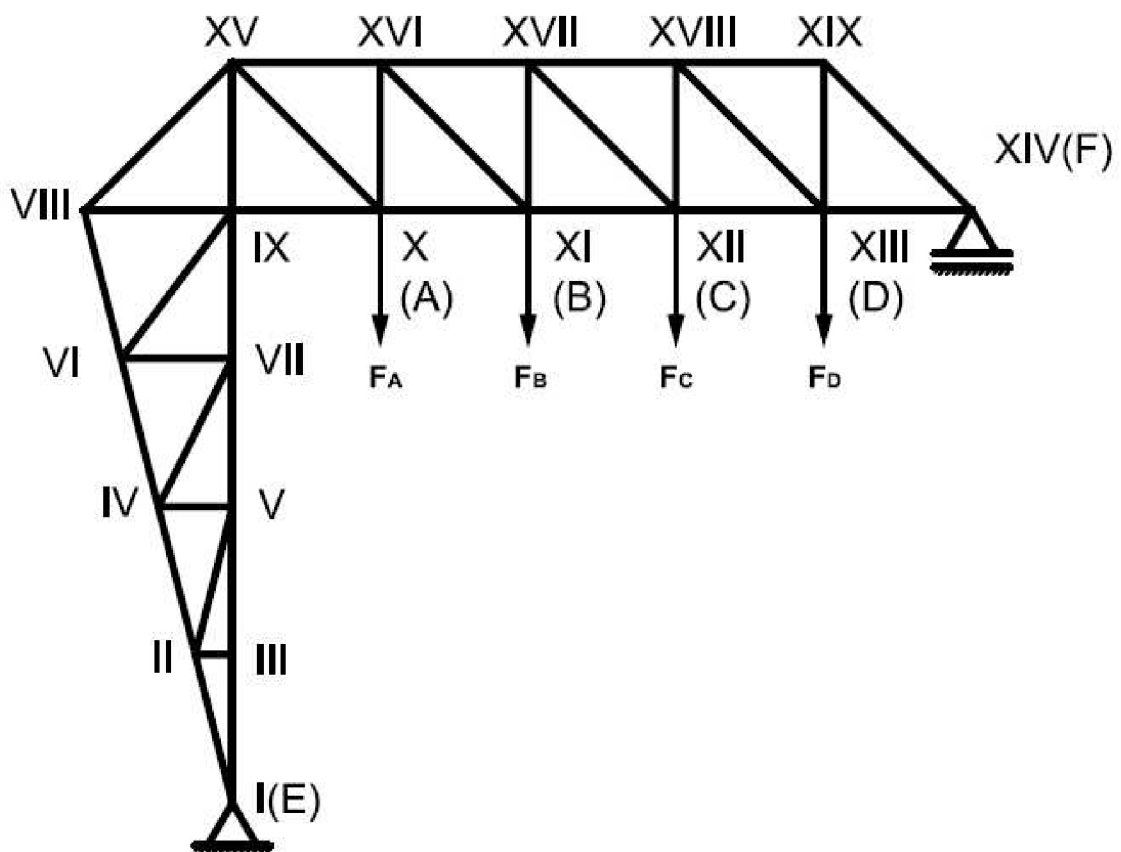
Tyto dva typy je možné považovat za dva krajní případy uložení. Ve skutečnost se tyto dvě varianty dají přirovnat k uložení pojezdového kola jeřábu v kolejnici za ideálních podmínek.

### 3.1 Varianta uložení I

#### 3.1.1 Řešená prutová soustava

Styčníky jsou označeny řeckými číslicemi „I“ až „XIX“. Zatěžující břemeno se bude pohybovat mezi styčníky „A“, „B“, „C“ a „D“.

Vzhledem k tomu, že se budeme zabývat pevnostním návrhem a deformací pomocí Castiglanovy věty pro různou polohu břemene, zavedeme do styčníků „A“, „B“, „C“ a „D“ osamělé síly, z nichž některé pro určitou polohu břemene mohou být nulové. V první variantě výpočtu umístíme do styčníku „E“ podporu rotační. V místě „F“ je podpora obecná.



Obr. 3.1 Varianta uložení I

### 3.1.2 Statická určitost

Jedná se o úlohu rovinnou.

#### 3.1.2.1 Vnější statická určitost

- rotační podpora odebírá dva stupně volnosti  $\mu_{\text{rot}} = 2$
- obecná podpora odebírá jeden stupeň volnosti  $\mu_{\text{obec}} = 1$

Počet neznámých parametrů tedy je

$$\mu_{\text{ex}} = \mu_{\text{rot}} + \mu_{\text{obec}} = 2 + 1 = 3$$

Pro rovinnou úlohu platí, že stupeň volnosti (složek možného pohybu) je roven

$$v = 3.$$

Tímto rozbořem tedy dostáváme

$$\mu_{\text{ex}} = v \Rightarrow 3 = 3$$

Podmínka vnější statické určitosti je splněna. Prutová soustava je vně staticky určitá.

#### 3.1.2.2 Vnitřní statická určitost

- počet styčniců  $k = 19$
- počet prutů  $p = 35$

Podmínka vnitřní statické určitosti

$$2k - 3 = p, \text{ tedy v našem případě}$$

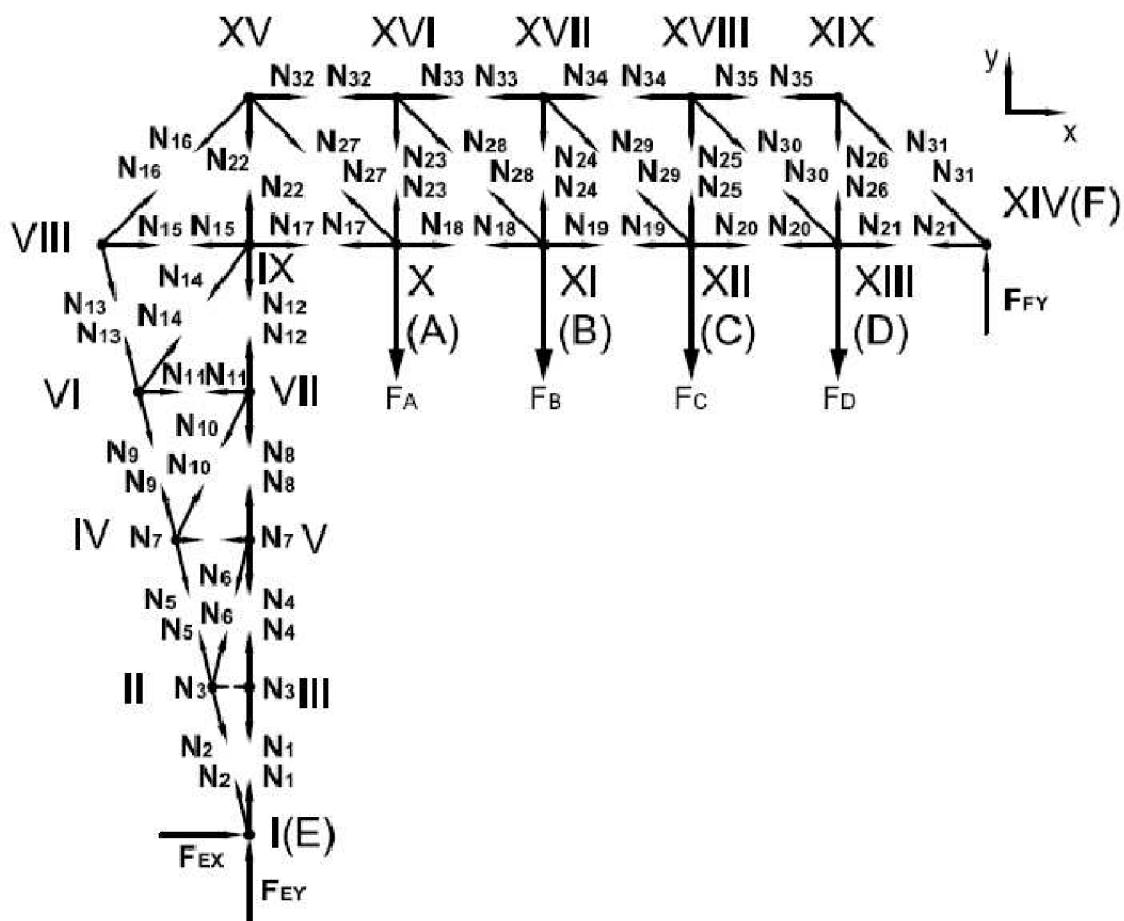
$$2 \cdot 19 - 3 = 35.$$

Podmínka vnitřní statické určitosti je splněna. Prutová soustava je vnitřně staticky určitá.

Je-li splněna vnější i vnitřní podmínka statické rovnováhy, rovná se počet neznámých veličin počtu rovnic statické rovnováhy získaných při uvolnění styčniců prutové soustavy.

### 3.1.3 Uvolnění prutové soustavy

Pro vyjádření rovnic statické rovnováhy je nutné uvolnit všechny styčníky. Předpokládané zatížení ve styčnicích je tahové. Vyjde-li síla se záporným znaménkem, působí ve styčnicu napětí tlakové. Síly  $N$  (s indexy 1 až 35) značí síly působící v prutech. Síly ve styčnicích „A“, „B“, „C“ a „D“ jsou závislé na poloze břemene. Reakce ve styčnicích „E“ a „F“ jsou vyvolány uložením, tedy zvolenými podporami.



Obr. 3.2 Uvolnění soustavy I

### 3.1.4 Soustava rovnic

Vypíšeme rovnice statické rovnováhy pro všechny uvolněné styčnický.

Styčnick I

$$\sum F_X = 0 : F_{EX} - N_2 \cdot \sin 14^\circ = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : F_{EY} + N_1 + N_2 \cdot \cos 14^\circ = 0$$

Styčnick II

$$\sum F_X = 0 : N_3 + N_2 \cdot \sin 14^\circ + N_6 \cdot \sin 14^\circ - N_5 \cdot \sin 14^\circ = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : -N_2 \cos 14^\circ + N_5 \cos 14^\circ + N_6 \cos 14^\circ = 0$$

Styčnick III

$$\sum F_X = 0 : -N_3 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_4 - N_1 = 0$$

Styčnick IV

$$\sum F_X = 0 : N_7 + N_{10} \cdot \sin 27^\circ - N_9 \cdot \sin 14^\circ + N_5 \cdot \sin 14^\circ = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_9 \cdot \cos 14^\circ + N_{10} \cdot \cos 27^\circ - N_5 \cdot \cos 14^\circ = 0$$

Styčnick V

$$\sum F_X = 0 : -N_7 - N_6 \cdot \sin 14^\circ = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_8 - N_4 - N_6 \cdot \cos 14^\circ = 0$$

Styčnick VI

$$\sum F_X = 0 : N_{11} + N_9 \cdot \sin 14^\circ + N_{14} \cdot \sin 37^\circ - N_{13} \cdot \sin 14^\circ = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{13} \cdot \cos 14^\circ + N_{14} \cdot \cos 37^\circ - N_9 \cdot \cos 14^\circ = 0$$

Styčnick VII

$$\sum F_X = 0 : -N_{11} - N_{10} \cdot \sin 27^\circ = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{12} - N_8 - N_{10} \cdot \cos 27^\circ = 0$$

Styčnick VIII

$$\sum F_X = 0 : N_{15} + N_{13} \cdot \sin 14^\circ + N_{16} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{16} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{13} \cdot \cos 14^\circ = 0$$

Styčnick IX

$$\sum F_X = 0 : N_{17} - N_{15} - N_{14} \cdot \sin 37^\circ = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{22} - N_{12} - N_{14} \cdot \cos 37^\circ = 0$$

Styčnick X(A)

$$\sum F_X = 0 : N_{18} - N_{17} - N_{27} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{23} + N_{27} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_A = 0$$

Styčnick XI(B)

$$\sum F_X = 0 : N_{19} - N_{18} - N_{28} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{24} + N_{28} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_B = 0$$

Styčnick XII(C)

$$\sum F_X = 0 : N_{20} - N_{19} - N_{29} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{25} + N_{29} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_C = 0$$

Styčnick XIII(D)

$$\sum F_X = 0 : N_{21} - N_{20} - N_{30} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{26} + N_{30} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_D = 0$$

Styčnick XIV(F)

$$\sum F_X = 0 : -N_{21} - N_{31} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{31} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{FY} = 0$$

Styčnick XV

$$\sum F_X = 0 : N_{32} + N_{27} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{16} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : -N_{22} - N_{16} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{27} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Styčnick XVI

$$\sum F_X = 0 : N_{33} + N_{28} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{32} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : -N_{23} - N_{28} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Styčnick XVII

$$\sum F_X = 0 : N_{34} + N_{29} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{33} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : -N_{24} - N_{29} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Styčnick XVIII

$$\sum F_X = 0 : N_{35} + N_{30} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{34} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : -N_{25} - N_{30} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Styčnick XIX

$$\sum F_X = 0 : N_{31} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{35} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : -N_{26} - N_{31} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

### 3.1.5 Řešení soustavy rovnic

Soustava statických rovnic je lineární, tudíž ji můžeme napsat v maticovém tvaru

$$[K] \cdot [N] = [p], \text{ kde}$$

$[K]$  je čtvercová matice koeficientů,

$[N]$  je sloupcová matice neznámých sil v prutech spolu s reakcemi v podporách ( $N_1$  až  $N_{35}$ , síly v podporách  $F_{EX}$ ,  $F_{EY}$  a  $F_{FX}$ ),

$[p]$  je sloupcová matice obsahující známé proměnné (síla od břemene)

Výstup výpočtu je takový, že neznámé síly v prutech ( $N_1$  až  $N_{35}$ ) jsou vyjádřeny jako funkce známých veličin

$$N_i = f(F_A, F_B, F_C, F_D),$$

vyjádřené reakce budou také funkcí známých veličin

$$F_j = f(F_A, F_B, F_C, F_D).$$

Pro numerické řešení rovnic byl zvolen matematický software Maple, jelikož byl používán v základních kurzech matematiky během studia.

Zápis do programu Maple vypadá následovně. Označíme si vytvořené rovnice statické rovnováhy jako funkce  $f$ . Tyto funkce zapíšeme do programu. Příkaz pro řešení soustavy rovnic pak má tvar

$$reseni := solve(\{f1, f2, \dots, f38\}, [N_1, N_2, \dots, N_{35}, F_{EX}, F_{EY}, F_{FY}]).$$

Řešení pomocí softwaru Maple je vytištěno v příloze (Příloha 1a.).

Zatížení jednotlivých prutů v závislosti na poloze břemene můžeme vyjádřit pomocí programu MathCad (Příloha 1b.)

### 3.1.6 Osově síly v prutech

Po vyřešení výše zmíněných úkonů jsme schopni získat přehled průběhu sil v jednotlivých prutech v závislosti na poloze zatížení. Zatěžující síla má velikost  $F = 4 \cdot 10^4$  N. Je-li síla  $F$  v poloze uprostřed mezi styčníky, rozložíme ji na dvě síly o poloviční velikosti. Tyto poloviční síly umístíme do jednotlivých "sousedících" styčníků.

Jednotkou sil vypočtených v následující tabulce je [N].

Tabulka 3.1 Získané hodnoty

	A	A-B	B	B-C	C	C-D	D
N1	-32000	-28000	-24000	-20000	-16000	-12000	-8000
N2	0	0	0	0	0	0	0
N3	0	0	0	0	0	0	0
N4	-32000	-28000	-24000	-20000	-16000	-12000	-8000
N5	0	0	0	0	0	0	0
N6	0	0	0	0	0	0	0
N7	0	0	0	0	0	0	0
N8	-32000	-28000	-24000	-20000	-16000	-12000	-8000
N9	0	0	0	0	0	0	0

N10	0	0	0	0	0	0	0
N11	0	0	0	0	0	0	0
N12	-32000	-28000	-24000	-20000	-16000	-12000	-8000
N13	0	0	0	0	0	0	0
N14	0	0	0	0	0	0	0
N15	0	0	0	0	0	0	0
N16	0	0	0	0	0	0	0
N17	0	0	0	0	0	0	0
N18	32000	28000	24000	20000	16000	12000	8000
N19	24000	36000	48000	40000	32000	24000	16000
N20	16000	24000	32000	40000	48000	36000	24000
N21	8000	12000	16000	20000	24000	28000	32000
N22	-32000	-28000	-24000	-20000	-16000	-12000	-8000
N23	8000	-8000	-24000	-20000	-16000	-12000	-8000
N24	8000	12000	16000	0	-16000	-12000	-8000
N25	8000	12000	16000	20000	24000	8000	-8000
N26	8000	12000	16000	20000	24000	28000	32000
N27	45255	39598	33941	28284	22627	16971	11314
N28	-11314	11314	33941	28284	22627	16971	11314
N29	-11314	-16971	-22627	-28284	-33941	-11314	11314
N30	-11314	-16971	-22627	-28284	-33941	-11314	11314
N31	-11314	-16971	-22627	-28284	-33941	-39598	-45255
N32	-32000	-28000	-24000	-20000	-16000	-12000	-8000
N33	-24000	-36000	-48000	-40000	-32000	-24000	-16000
N34	-16000	-24000	-32000	-40000	-48000	-36000	-24000
N35	-8000	-12000	-16000	-20000	-24000	-28000	-32000
FEY	32000	28000	24000	20000	16000	12000	8000
FFY	8000	12000	16000	20000	24000	28000	32000
FEX	0	0	0	0	0	0	0

Nejvyšší hodnoty osových sil tedy jsou:

a) síly vytvářející nejvyšší možné tahové napětí v prutech

- je-li celková zatěžující síla umístěna do styčnicku „B“ je největší vzniklá tahová síla v prutu

$$N_{19} = 48000 \text{ N}$$

- je-li celková zatěžující síla umístěna do styčnicku „C“ je největší vzniklá tahová síla v prutu

$$N_{20} = 48000 \text{ N}$$

b) síly vytvářející nejvyšší možné tlakové napětí v prutech

- je-li celková zatěžující síla umístěna do styčnicku „B“ je největší vzniklá tlaková síla v prutu

$$N_{33} = 48000 \text{ N}$$



- je-li celková zatěžující síla umístěna do styčnicku „C“ je největší vzniklá tlaková síla v prutu

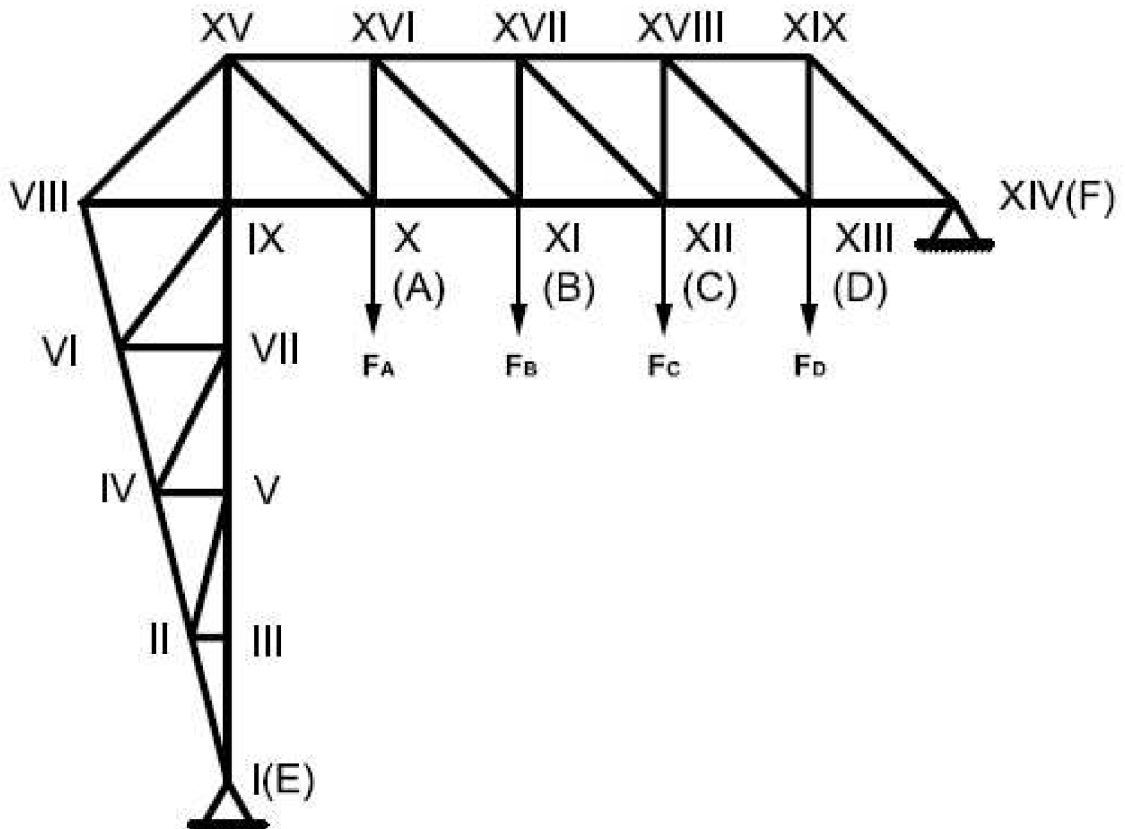
$$N_{34} = 48000 \text{ N}$$

Při řešení příhradové konstrukce typu I se nebudeme zabývat návrhem příčných rozměrů prutu. Tento úkon provedeme u následující prutové soustavy.

## 3.2 Varianta uložení II

### 3.2.1 Řešená prutová soustava

Jedná se o prutovou soustavu jako v předchozím řešení. Jediným rozdílem je použití dvou rotačních podpor pro uložení tělesa (prutové soustavy). Rotační podpory tedy umístíme jak do místa „E“, tak do místa „F“. Pohyb zatěžující síly je shodný se zadáním v předchozím případě.



Obr. 3.3 Varianta uložení II

### 3.2.2 Statická určitost

#### 3.2.2.1 Vnější statická určitost

- rotační vazba odebírá dva stupně volnosti  $\mu_{\text{rot}} = 2$
- námi řešený model obsahuje dvě rotační vazby

Počet neznámých parametrů tedy je

$$\mu_{\text{ex}} = 2 \cdot \mu_{\text{rot}} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Pro rovinnou úlohu platí, že stupeň volnosti (složek možného pohybu) je roven

$$v = 3.$$

Tímto rozbořem tedy dostáváme

$$\mu_{\text{ex}} \neq v \Rightarrow 4 \neq 3.$$

Stupeň vnější statické neurčitosti tedy je

$$s_{\text{ex}} = \mu_{\text{ex}} - v = 4 - 3 = 1.$$

Úloha je 1x vně staticky neurčitá.

### **3.2.2.2 Vnitřní statická určitost**

Do prutové soustavy nebyl přidán žádný výstužný prut. Vnitřní statická určitost tedy odpovídá předcházejícímu řešení.

- počet styčníků  $k = 19$
- počet prutů  $p = 35$

Podmínka vnitřní statické určitosti

$$2k - 3 = p, \text{ tedy v našem případě}$$

$$2 \cdot 19 - 3 = 35.$$

Podmínka vnitřní statické určitosti je splněna. Stupeň vnitřní statické neurčitosti je tedy

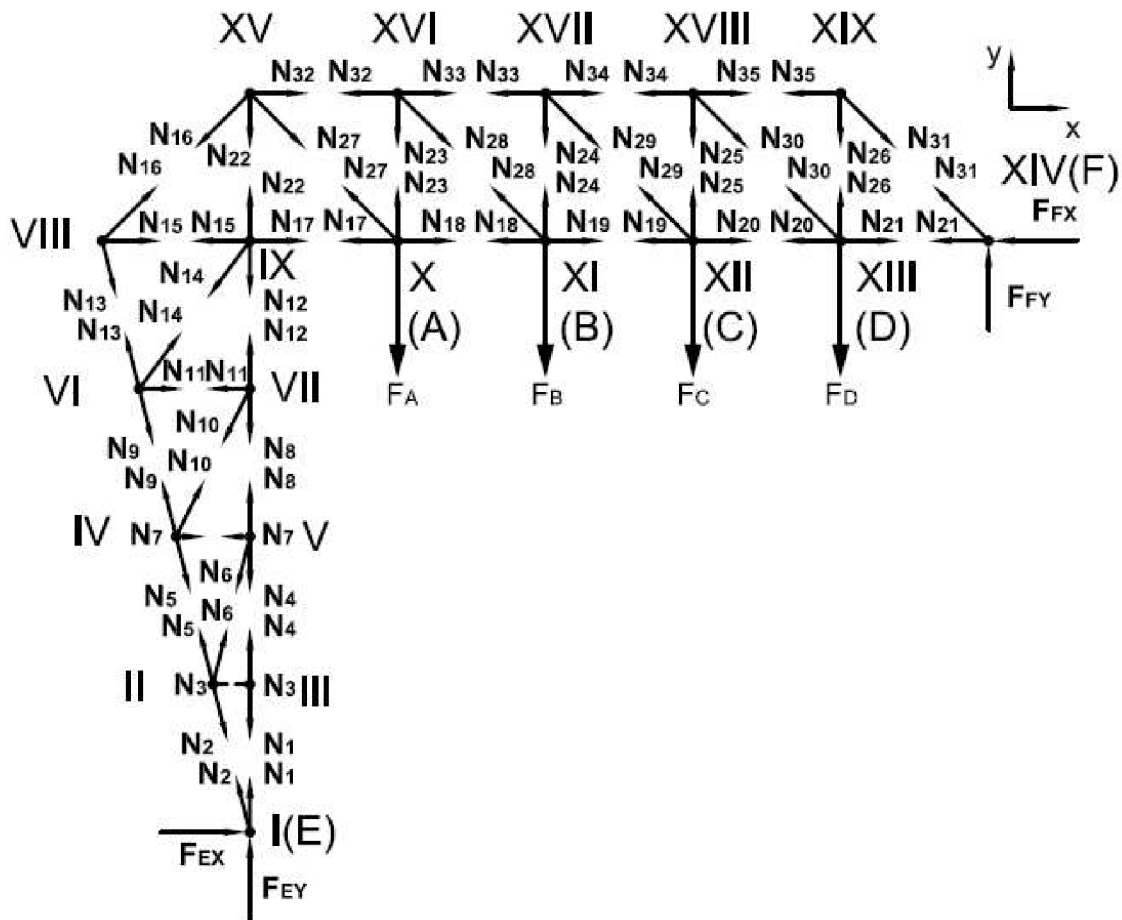
$$s_{\text{in}} = p - (2k - 3) = 35 - (2 \cdot 19 - 3) = 0.$$

Prutová soustava je vnitřně staticky určitá.

Provedený rozbor statické určitosti ukázal, že soustava je 1x vně staticky neurčitá.

### 3.2.3 Uvolnění prutové soustav

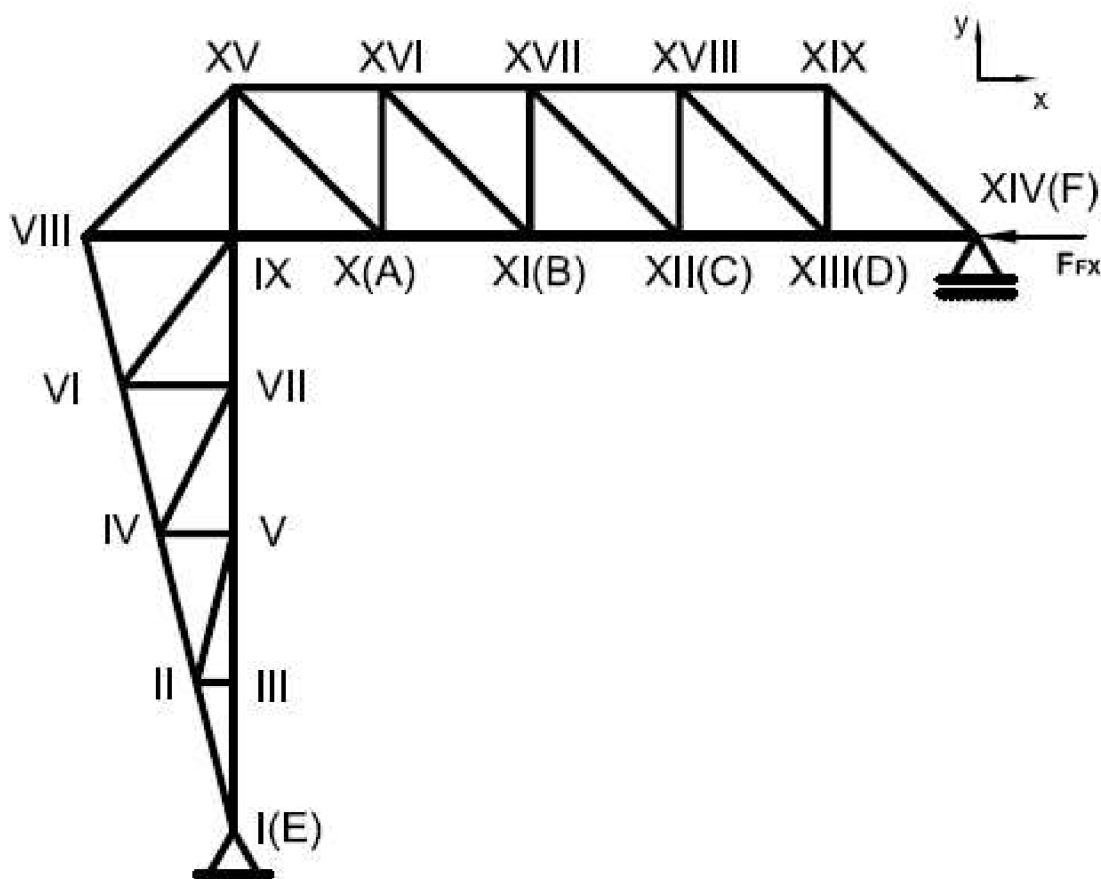
Prutová soustava je stejná jako v předchozí části výpočtu. Jediná změna je způsobena užitím rotační vazby ve styčniku „F“. Neznámými veličinami jsou tedy síly působící v prutech  $N$  (s indexy 1 až 35) a reakce v rotačních podporách  $F_{EX}, F_{EY}, F_{FY}$  a nově i  $F_{FX}$ .



Obr. 3.4 Uvolnění soustavy II

### 3.2.4 Částečné uvolnění

Jelikož by počet neznámých veličin převyšoval počet rovnic statické rovnováhy, je nutné zavést vazbové deformační podmínky.



Obr. 3.5 Částečné uvolnění

Jako první provedeme částečné uvolnění prutové soustavy. Namísto rotační vazby v místě styčnicku „F“ umístíme vazbu obecnou a ponecháme reakci  $F_{FX}$  působící ve směru osy „x“.

Nyní je třeba vyslovit počáteční deformační podmínku. Posunutí  $u_{F_{FX}}$  ve směru osy „x“ od reakční síly  $F_{FX}$  je nulové, z důvodu původního umístění rotační podpory

$$u_{F_{FX}} = 0.$$

Po vyjádření této počáteční deformační podmínky jsme schopni užitím Castiglianovy věty vyjádřit neznámou sílu  $F_{FX}$  v závislosti na poloze zatěžujícího břemene.

$$u_{F_{FX}} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{FX}} = 0$$

### 3.2.5 Soustava rovnic

Rovnice statické rovnováhy jsou stejné jako v předchozím výpočtu. Jediný rozdíl je ve styčnicku „F“. Užitím rotační podpory v tomto styčnicku jsou rovnice statické rovnováhy odlišné.

Styčnick I

$$\sum F_X = 0 : F_{EX} - N_2 \cdot \sin 14^\circ = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : F_{EY} + N_1 + N_2 \cdot \cos 14^\circ = 0$$

Styčnick II

$$\sum F_X = 0 : N_3 + N_2 \cdot \sin 14^\circ + N_6 \cdot \sin 14^\circ - N_5 \cdot \sin 14^\circ = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : -N_2 \cos 14^\circ + N_5 \cos 14^\circ + N_6 \cos 14^\circ = 0$$

Styčnick III

$$\sum F_X = 0 : -N_3 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_4 - N_1 = 0$$

Styčnick IV

$$\sum F_X = 0 : N_7 + N_{10} \cdot \sin 27^\circ - N_9 \cdot \sin 14^\circ + N_5 \cdot \sin 14^\circ = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_9 \cdot \cos 14^\circ + N_{10} \cdot \cos 27^\circ - N_5 \cdot \cos 14^\circ = 0$$

Styčnick V

$$\sum F_X = 0 : -N_7 - N_6 \cdot \sin 14^\circ = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_8 - N_4 - N_6 \cdot \cos 14^\circ = 0$$

Styčnick VI

$$\sum F_X = 0 : N_{11} + N_9 \cdot \sin 14^\circ + N_{14} \cdot \sin 37^\circ - N_{13} \cdot \sin 14^\circ = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{13} \cdot \cos 14^\circ + N_{14} \cdot \cos 37^\circ - N_9 \cdot \cos 14^\circ = 0$$

Styčnick VII

$$\sum F_X = 0 : -N_{11} - N_{10} \cdot \sin 27^\circ = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{12} - N_8 - N_{10} \cdot \cos 27^\circ = 0$$

Styčnick VIII

$$\sum F_X = 0 : N_{15} + N_{13} \cdot \sin 14^\circ + N_{16} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{16} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{13} \cdot \cos 14^\circ = 0$$

Styčnick IX

$$\sum F_X = 0 : N_{17} - N_{15} - N_{14} \cdot \sin 37^\circ = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{22} - N_{12} - N_{14} \cdot \cos 37^\circ = 0$$

Styčnick X(A)

$$\sum F_X = 0 : N_{18} - N_{17} - N_{27} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{23} + N_{27} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_A = 0$$

Styčnick XI(B)

$$\sum F_X = 0 : N_{19} - N_{18} - N_{28} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{24} + N_{28} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_B = 0$$

Styčnick XII(C)

$$\sum F_X = 0 : N_{20} - N_{19} - N_{29} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{25} + N_{29} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_C = 0$$

Styčnick XIII(D)

$$\sum F_X = 0 : N_{21} - N_{20} - N_{30} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{26} + N_{30} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_D = 0$$

Styčnick XIV(F)

$$\sum F_X = 0 : -N_{21} - N_{31} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_{FX} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : N_{31} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{FY} = 0$$

Styčnick XV

$$\sum F_X = 0 : N_{32} + N_{27} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{16} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : -N_{22} - N_{16} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{27} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Styčnick XVI

$$\sum F_X = 0 : N_{33} + N_{28} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{32} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : -N_{23} - N_{28} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Styčnick XVII

$$\sum F_X = 0 : N_{34} + N_{29} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{33} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : -N_{24} - N_{29} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Styčnick XVIII

$$\sum F_X = 0 : N_{35} + N_{30} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{34} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : -N_{25} - N_{30} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Styčnick XIX

$$\sum F_X = 0 : N_{31} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{35} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : -N_{26} - N_{31} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

### 3.2.6 Řešení soustavy rovnic

Soustava statických rovnic je opět lineární, tudíž ji můžeme napsat v maticovém tvaru

$$[K] \cdot [N] = [p], \text{ kde}$$

$[K]$  je čtvercová matice koeficientů,

$[N]$  je sloupcová matice neznámých sil v prutech spolu s reakcemi v podporách, vyjma síly  $F_{FX}$  ( $N_1$  až  $N_{35}$ , síly v podporách  $F_{EX}$ ,  $F_{EY}$  a  $F_{FY}$ ),

$[p]$  je sloupcová matice obsahující známé proměnné (síla od břemene) a nyní i neznámou sílu  $F_{FX}$

Výstup výpočtu je takový, že neznámé síly v prutech ( $N_1$  až  $N_{35}$ ) jsou vyjádřeny jako funkce známých veličin a síly zvolené při částečném uvolnění  $F_{FX}$

$$N_i = f(F_A, F_B, F_C, F_D, F_{FX}),$$

vyjádřené reakce budou také funkcí těchto veličin

$$F_j = f(F_A, F_B, F_C, F_D, F_{FX}).$$

Novým prvkem, pro získání všech hledaných hodnot oproti předchozímu výpočtu, je provedení derivace všech sil v prutech podle síly  $F_{FX}$

$$dN_i = \frac{\partial N_i}{\partial F_{FX}}$$

Dosazením získaných hodnot do Castiglianovy věty pro známou hodnotu deformace

$$u_{F_{FX}} = \sum_{i=1}^{35} \frac{N_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{FX}} = 0,$$

obdržíme velikost reakce  $F_{FX}$  v závislosti na poloze břemene.

Výpočet je uveden v příloze (Příloha 2a.) a vyjádřená reakce působící ve smyslu a zvoleném směru osy „x“ má tvar

$$F_{FX} = 0.014 \cdot F_C + 0.0053 \cdot F_B + 0.0107 \cdot F_D - 0.0198 \cdot F_A$$



### 3.2.7 Osově síly v prutech

Výpočet k získání následujících sil je uveden v příloze (Příloha 2b.). V tabulce (Tabulka 3.2) můžeme vidět přehled vzniklých sil v prutech v závislosti na poloze břemene.

Jednotkou sil vypočtených v následující tabulce je [N].

Tabulka 3.2 Získané hodnoty II

	A	A-B	B	B-C	C	C-D	D
N1	-28177	-26602	-25027	-21861	-18695	-14378	-10060
N2	-3283	-1200	882	1598	2315	2043	1769
N3	0	0	0	0	0	0	0
N4	-28177	-26602	-25027	-21861	-18695	-14378	-10060
N5	-3283	-1200	882	1598	2315	2043	1769
N6	0	0	0	0	0	0	0
N7	0	0	0	0	0	0	0
N8	-28177	-26602	-25027	-21861	-18695	-14378	-10060
N9	-3283	-1200	882	1598	2315	2043	1769
N10	0	0	0	0	0	0	0
N11	0	0	0	0	0	0	0
N12	-28177	-26602	-25027	-21861	-18695	-14378	-10060
N13	-3283	-1200	882	1598	2315	2043	1769
N14	0	0	0	0	0	0	0
N15	3980	1455	-1069	-1938	-2806	-2476	-2145
N16	-4505	-1647	1210	2194	3177	2802	2428
N17	3980	1455	-1069	-1938	-2806	-2476	-2145
N18	35342	29222	23101	18372	13642	9920	6198
N19	26752	37006	47260	38659	30059	22288	14516
N20	18068	24756	31444	38992	46541	34713	22884
N21	9431	1253	15615	19302	22990	27110	31228
N22	28177	-26602	-25027	-21861	-18695	-14378	-10060
N23	8637	-7767	-24171	-20310	-16449	-12396	-8343
N24	8637	12232	15828	-310	-16449	-12396	-8343
N25	8637	12232	15828	19689	23550	7603	-8343
N26	8637	12232	15828	19689	23550	27603	31656
N27	44353	39268	34183	28723	23262	17531	11799
N28	-2214	10984	34183	28723	23262	17531	11799
N29	-12214	-17300	-22385	438	23262	17531	11799
N30	-12214	-17300	-22385	-27845	-33305	-10753	11799
N31	-12214	-17300	-22385	-27845	-33305	-39037	-44769
N32	-3454	-28931	-23315	-18758	-14202	-10414	-6626
N33	-25911	-36698	-47486	-39069	-30652	-22810	-14969
N34	-17274	24465	-31657	-39379	-47101	-35207	-23313

N35	-8637	-12232	-15828	-19689	-23550	-27603	-31656
FEX	-794	-290	213	386	560	494	328
FEY	31363	27767	24171	20310	16449	12396	8343
FFX	-794	-290	213	386	560	494	428
FFY	8637	12232	15829	19689	23551	27604	31657

Nejvyšší hodnoty osových sil tedy jsou:

- a) síly způsobující nejvyšší možné tahové napětí v prutech
- je-li celková zatěžující síla umístěna do styčnicku „B“ je největší vzniklá tahová síla v prutu

$$N_{20} = 47260 \text{ N}$$

- b) síly způsobující nejvyšší možné tlakové napětí v prutech
- je-li celková zatěžující síla umístěna do styčnicku „B“ je největší vzniklá tlaková síla v prutu

$$N_{33} = 47486 \text{ N}$$

### 3.3 Návrh příčných rozměrů prutu

Jelikož případná výroba konstrukce předpokládá svařitelnou ocel, je zvolena ocel nesoucí označení ČSN 11 373. Základní mechanické hodnoty zvoleného materiálu jsou [4]:

- mez pevnosti v tahu  $R_m = 390 \text{ MPa}$
- mez kluzu v tahu  $R_e = 220 \text{ MPa}$

#### 3.3.1 Minimální plocha průřezu

Známe-li maximální zatížení prutů od působících sil, jsme schopni navrhnout nejmenší možnou plochu příčného průřezu. Následně zvolíme tvar a rozměry profilu. Při výpočtu vycházíme z rovnice uvedené v teoretické části. Hledaný rozměr vyjádříme pomocí rovnice pro výpočet bezpečnosti k meznímu stavu pružnosti

$$k = \frac{\alpha_M}{\alpha}$$

Za koeficient bezpečnosti  $k$  dosazujeme hodnotu odpovídající praktickým zkušenostem při konstrukci příhradových konstrukcí  $k_D = 4$ . Jak již bylo zmíněno, jedná se o výpočet k meznímu stavu pružnosti. Hodnota členu  $\alpha_M$  je v našem případě mez kluzu  $R_e = 220 \text{ MPa}$ . Hodnota členu  $\alpha$  je maximální napětí vzniklé od sil v prutech soustavy.

Porovnáním obou variant uložení získáme největší možnou osovou sílu v prutech. Při této volbě nerozlišujeme tahové a tlakové napětí.

Největší osová síla v prutu se vyskytuje ve výpočtu varianty I. Hodnota této síly je 48 000 N. Výraz pro výpočet k meznímu stavu bezpečnosti přepíšeme do tvaru

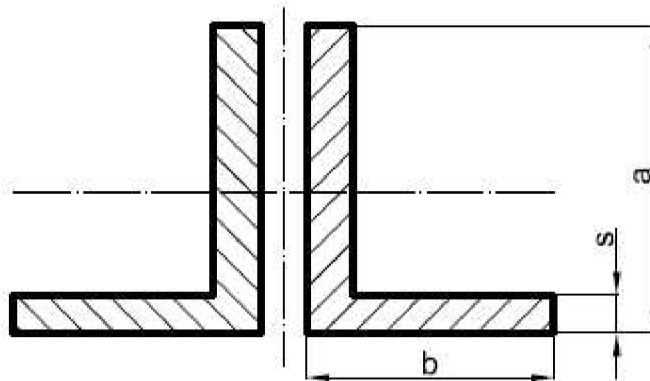
$$k_D = \frac{R_e}{\frac{N_{\max}}{S}}$$

Nejmenší možná plocha příčného průřezu nejvíce zatíženého prutu, s ohledem na zvolenou bezpečnost tedy je

$$S_{P\min} = \frac{k_D \cdot N_{33}}{R_e} = \frac{4 \cdot 48000}{220} = 872,72 \text{ mm}^2$$

### 3.3.2 Volba rozměrů profilu

Při volbě profilu budeme vycházet ze zadání. Pro výpočet je zvolen zdvojený L-profil.



Obr. 3.6 Zdvojený L-profil

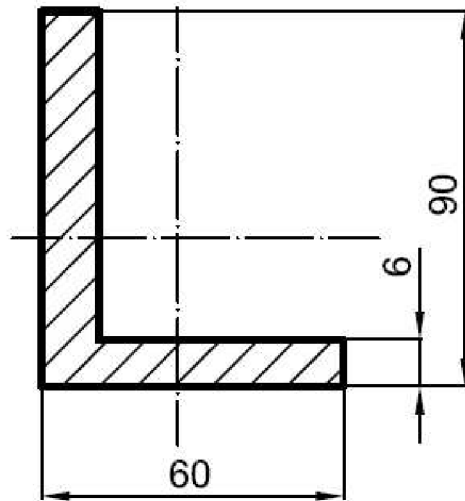
Výše uvedený výpočet minimálního příčného průřezu vyjadřuje plochu celého zdvojeného L-profilu.

Minimální plocha příčného průřezu jednoho L-profilu má tedy hodnotu

$$S_{Lmin} = \frac{S_{Pmin}}{2} = \frac{863,381}{2} = 431,690 \text{ mm}^2$$

Nyní je možné pomocí katalogu výrobce [5] vybrat vhodný profil.

Volíme tedy tyč průřezu nerovnoramenného L z konstrukční oceli 11 373 s označením L 90x60x6



Obr. 3.7 Zvolený profil

Plocha námi zvoleného profilu je

$$S_L = 869 \text{ mm}^2$$

### 3.4 Bezpečnost k meznímu stavu pružnosti

Zvětšíme-li obsah plochy příčného průřezu profilu, je vhodné vypočítat novou hodnotu koeficientu bezpečnosti k meznímu stavu pružnosti. Předpoklad výpočtu je zvýšení koeficientu bezpečnosti. Po volbě L-profilu má tedy tento koeficient hodnotu

$$k = \frac{R_e}{\frac{N_{\max}}{2 \cdot S_L}} = \frac{R_e}{\frac{N_{34}}{2 \cdot S_L}} = \frac{220}{\frac{48000}{2 \cdot 869}} = 7,96$$

Jak je vidět z provedeného výpočtu, bezpečnost se po výběru profilu zvýšila z hodnoty  $k_D = 4$  na hodnotu  $k = 7,96$ .

### 3.5 Kontrola prutů k meznímu stavu vzpěrné stability

Vlivem tlakové síly však meznímu stavu pružnosti může předcházet mezní stav vzpěrné stability. Podrobněji je tato problematika popsána v teoretické části této práce. Předpokládejme, že síly zatěžující pruty prochází těžištěm příčného průřezu zdvojeného L-profilu. Pro výpočet bezpečnosti k MS vzpěrné stability je nutné znát menší z kvadratických momentů zvoleného profilu.

Dle katalogu výrobce je menší hodnota kvadratického momentu L-profilu

$$J = 258000 \text{ mm}^4$$

#### 3.5.1 Štíhlost prutu

Nyní jsme schopni určit, který z mezních stavů v případě silového zatížení prutu nastane jako první.

Nejdříve určíme štíhlost prutu ze vztahu

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{\frac{J_{\min}}{S}}}$$

Z tabulky získaných sil je možno vyčíst, že pruty zatěžované nejvyšším tlakovým zatížením mají délku  $l = 1000 \text{ mm}$ . Štíhlosti prutu tedy bude

$$\lambda = \frac{1000}{\sqrt{\frac{J_{\min}}{S}}} = \frac{1000}{\sqrt{\frac{2 \cdot J}{2 \cdot S_L}}} = \frac{1000}{\sqrt{\frac{2 \cdot 258000}{2 \cdot 869}}} = 58,04$$

Případně je možné vypočítat štíhlost prutu pro nejdelší prut vyskytující se v prutové soustavě  $l = 1400 \text{ mm}$  zatěžovaný tlakem (dle tabulky silových zatížení např. prut označený číslem 31)

$$\lambda = \frac{1400}{\sqrt{\frac{J_{\min}}{S}}} = \frac{1400}{\sqrt{\frac{2 \cdot J}{2 \cdot S_L}}} = \frac{1400}{\sqrt{\frac{2 \cdot 258000}{2 \cdot 869}}} = 81,3$$

Hodnotu mezní štíhlosti vyjádříme ze vztahu

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{\alpha^2 \cdot E}{\sigma_k}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{220}} = 97,06,$$

kde součinitel  $\alpha$  je závislý na způsobu uložení prutu. Uvažujeme oba konce kloubově uloženy, tedy  $\alpha = \pi$ .  $\sigma_k$  je mez kluzu a má hodnotu  $\sigma_k = 220$  MPa [4]. Modul pružnosti v tahu  $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa.

Ze získaných hodnot je patrné, že  $\lambda < \lambda_k$ . Jsme tedy schopni vyvodit závěr, že prvním mezním stavem při zatěžování tlakem zdvojeného L-profilu bude mezní stav pružnosti.



## 4. Deformační analýza

Vlivem zatěžujících sil  $F_A, F_B, F_C, F_D$ , které nám nahrazují pohybující se břemeno, dochází k vertikálnímu a horizontálnímu posuvu styčníků „A“, „B“, „C“ a „D“. Vzhledem k tvaru prutové soustavy a směru zatěžujících sil horizontální posuvy zvolených styčníků zanedbáme.

Jelikož jsme pomocí provedené napěťové analýze schopni vyjádřit síly ve všech prutech soustavy jako funkce  $N_i = f(F_A, F_B, F_C, F_D)$ , je možná vyjádřit posuvy již zmíněných styčníků po nositelkách těchto zatěžujících sil.

Energii napjatosti celé prutové soustavy obdržíme ze vztahu

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 \cdot l_i}{2 \cdot E \cdot S}$$

Vertikální posunutí jednotlivých styčníků tedy můžeme vyjádřit jako parciální derivaci energie napjatosti podle síly působící v daném styčniku. Obecný zápis bude vypadat takto

$$u_{F_j} = \frac{\partial W}{\partial F_j} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_j}$$

Rovnice pro výpočet tedy píšeme ve tvaru:

- vertikální posuv styčniku „A“ ve směru zatěžující síly  $F_A$

$$u_{F_A} = \frac{\partial W}{\partial F_A} = \sum_{i=1}^{35} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_A}$$

- vertikální posuv styčniku „B“ ve směru zatěžující síly  $F_B$

$$u_{F_B} = \frac{\partial W}{\partial F_B} = \sum_{i=1}^{35} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_B}$$

- vertikální posuv styčnicku „C“ ve směru zatěžující síly  $F_C$

$$u_{F_C} = \frac{\partial W}{\partial F_C} = \sum_{i=1}^{35} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_C}$$

- vertikální posuv styčnicku „D“ ve směru zatěžující síly  $F_D$

$$u_{F_D} = \frac{\partial W}{\partial F_D} = \sum_{i=1}^{35} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_D}$$

Pro výpočet posuvů jednotlivých styčnicků byl z důvodu složitosti výpočtu opět volen matematický software Maple. Rovnice vyjadřující posunutí jednotlivých styčnicků v závislosti na poloze zatěžující síly jsou uvedeny v příloze (Příloha 3a.).

Jednotlivé vertikální posuvy v závislosti na poloze zatěžující síly jsme nyní schopni vyjádřit rovnicemi

- vertikální posuv styčnicku „A“ ve směru nositelky síly  $F_A$

$$u_{F_A} = 2.165954338 \cdot 10^{-8} \cdot F_B + 9.26490175 \cdot 10^{-9} \cdot F_D + 1.72984339 \cdot 10^{-8} \cdot F_C + 2.241834239 \cdot 10^{-8} \cdot F_A$$

- vertikální posuv styčnicku „B“ ve směru nositelky síly  $F_B$

$$u_{F_B} = 3.282116269 \cdot 10^{-8} \cdot F_B + 1.453626838 \cdot 10^{-8} \cdot F_D + 2.692963840 \cdot 10^{-8} \cdot F_C + 2.165954338 \cdot 10^{-8} \cdot F_A$$

- vertikální posuv styčnicku „C“ ve směru nositelky síly  $F_C$

$$u_{F_C} = 2.692963840 \cdot 10^{-8} \cdot F_B + 1.782537109 \cdot 10^{-8} \cdot F_D + 3.247897947 \cdot 10^{-8} \cdot F_C + 1.729843391 \cdot 10^{-8} \cdot F_A$$

- vertikální posuv styčnicku „D“ ve směru nositelky síly  $F_D$

$$u_{F_D} = 1.453626838 \cdot 10^{-8} \cdot F_B + 1.636348686 \cdot 10^{-8} \cdot F_D + 1.782537109 \cdot 10^{-8} \cdot F_C + 9.264901764 \cdot 10^{-9} \cdot F_A$$

Číselnou hodnotu posuvu všech styčníků v závislosti na poloze zatěžující síly pak dostáváme následující tabulku (Tabulka 4.1). Výpočet je přiložen v příloze (Příloha 3b.).

Tabulka 4.1 Vertikální posuvy

Působíště síly F	A	A-B	B	B-C	C	C-D	D
Posuv styčníků [mm]							
$u_{FA}$	0,897	0,882	0,866	0,779	0,692	0,531	0,371
$u_{FB}$	0,87	1,09	1,31	1,2	1,08	0,83	0,58
$u_{FC}$	0,69	0,88	1,08	1,19	1,3	1,01	0,71
$u_{FD}$	0,37	0,48	0,58	0,65	0,71	0,68	0,65

Z uvedené tabulky (Tabulka 4.1) vyplývá, že maximální svislé posuvy v místech „A“, „B“ a „C“ odpovídá situaci, kdy v těchto místech působí zatěžující síla. V případě místa „D“ je maximální posuv pro polohu břemene v místě „C“. Rozdíly hodnot nejsou příliš velké.

## 5. Závěr

Deformační a napět'ová analýza prutové konstrukce byla provedena pro zjednodušený výpočtový model, řešitelný na úrovni kurzu Pružnost a pevnost I. V samotném výpočtu nebylo bráno v úvahu tíhové pole Země. Vzhledem k velkému počtu prutů, jež jsou součástí samotné konstrukce, je nutné k výpočtu použít matematického softwaru.

Výstupem výpočtu jsou osově síly a příslušné reakce, vznikající v jednotlivých prutech, v závislosti na poloze zatěžující síly. Změna působíště zatěžující síly simuluje pohyb břemene.

Po numerickém vyčíslení všech osových sil vzniklých při zatěžování konstrukce, byl proveden pevnostní návrh příčných rozměr prutu na základě mezního stavu pružnosti pro  $k_D = 4$  a zvolen normalizovaný profil. Jako profil byla zvolena tyč průřezu nerovnoramenného L z konstrukční oceli ČSN 11373. K poměru mezi příčným průřezem zvoleného profilu a délkou jednotlivých prutů, bylo třeba provést kontrolu vůči vzniku mezního stavu vzpěrné stability. Tento mezní stav nastává u prutů zatěžovaných tlakem. S odkazem na provedený výpočet je možné tvrdit, že první dosažený mezní stav profilů zatěžovaných tlakem bude mezní stav pružnosti.

V závěru práce je proveden výpočet vertikálního posuvu vybraných styčnicků v závislosti na poloze zatěžující síly. Pro tento výpočet jsou použity výsledky získané při řešení předchozí napět'ové analýzy prutové konstrukce. Největšího posuvu dosahuje styčník „B“ při působení zatěžující síly právě v tomto styčnicku. Hodnota tohoto posuvu je  $u_{\max} = 1,31$  mm.

## Seznam použitých zdrojů

- [1] Janíček, P., Ondráček, E., Burša, J.: *Mechanika těles - pružnost a pevnost I.* Brno: CERM, 2004. 287s. ISBN 80-214-2592-X
- [2] Horníková, J.: *Pružnost a pevnost: Interaktivní učební text.* Brno: CERM, 2003. ISBN 80-7204-268-8.
- [3] Hoschl, C.: *Pružnost a pevnost ve strojnictví.* Praha: SNTL, 1971. 375s.
- [4] Leinveber, J., Vávra, P.: *Strojnické tabulky: pomocné učebnice pro školy technického zaměření.* Úvaly: ALBRA, 2005. 907s. ISBN 80-7361-011-6  
Brno: CERM, 2004. 287s. ISBN 80-214-2592-
- [5] Feron, a.s. - Velkoobchod s hutním materiálem  
Dostupné z <<http://www.ferona.cz/cze/katalog/detail.php?id=25971>>

## Seznam použitých veličin

Veličina	Označení	Jednotka
koeficient bezpečnosti	$k$	[-]
zatěžující síla	$F_A, F_B, F_C, F_D$	[N]
modul pružnosti v tahu	$E$	[MPa]
kvadratický moment	$J$	[mm <sup>4</sup> ]
délka prutu	$l$	[m]
plocha průřezu	$S$	[mm <sup>2</sup> ]
tahové (tlakové) napětí	$\sigma$	[MPa]
štíhlost prutu	$\lambda$	[-]
síla v prutu	$N_i$	[N]
vertikální posuv	$u$	[m]
reakce	$F_{EX}, F_{EY}, F_{FY}, F_{FX}$	[N]
mez pevnosti v tahu	$R_m$	[MPa]
mez kluzu v tahu	$R_e$	[MPa]

## Seznam příloh

- Příloha 1a. - vyjádření neznámých (konstrukce typu I)
- Příloha 1b. - číselné hodnoty (konstrukce typu I)
- Příloha 2a. - vyjádření neznámých (konstrukce typu II)
- Příloha 2b. - číselné hodnoty (konstrukce typu II)
- Příloha 3a. - vyjádření rovnic posuvů
- Příloha 3b. - číselné hodnoty posuvů