UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Jitka Nedbalová

Trojúhelník v učivu matematiky na 2. stupni základních škol

Olomouc 2015 vedoucí práce: RNDr. Martina Uhlířová, Ph.D.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jen uvedených pramenů a literatury.

V Olomouci dne 15. 4. 2015 ....

Poděkování

Děkuji RNDr. Martině Uhlířové, Ph.D. za odborné vedení mé bakalářské práce, poskytování cenných rad, za ochotu a čas, který mi při sepisování práce věnovala. Také bych chtěla poděkovat rodině a přátelům, kteří mě po celou dobu studia podporovali.

Obsah

Úvod

„Bez trojúhelníku, jediného pevného mnohoúhelníku, by ani Eiffelova věž neexistovala!“ **E. Castelnuovo**

Učivo o trojúhelníku je nedílnou součástí náplně hodin matematiky na základních i středních školách. Už děti v útlém věku dokáží rozeznat obrazce, které připomínají tento rovinný útvar. Později s využitím pravítka získává trojúhelník přesnější tvar a v kombinaci s kružítkem je dovršena konstrukce tohoto na první pohled nekomplikovaného geometrického obrazce.

Téma „trojúhelník“ v Eukleidovské geometrii prostupuje napříč celým základním vzděláním a dále se prohlubuje na středních školách. Jelikož jsem i já měla možnost několik let v hodinách matematiky rozvíjet své znalosti v této oblasti, je mi tato problematika velmi blízká. Ze své zkušenosti vím, že trojúhelník dokáže vždy překvapit něčím novým nebo zajímavým. Volba tématu pro mou bakalářskou práci byla proto poměrně jednoduchá. Na vysoké škole jsem se seznámila s několika užitečnými počítačovými programy, prostřednictvím kterých jsem se naučila rýsovat ve virtuálním prostředí. Nejvíce jsem si oblíbila program GeoGebra, který se tak stal stěžejním nástrojem pro tvorbu všech obrázků v mé bakalářské práci.

Ne všichni studenti sdílí stejný entuziasmus pro matematiku, a proto bych chtěla v této bakalářské práci pomocí obrazového materiálu vytvořeného v počítačovém programu GeoGebra ukázat, že učivo o trojúhelníku v Eukleidovské geometrii může být velmi zajímavé a přínosné. Poznatky o trojúhelníku jsem se snažila seřadit systematicky od základních po složité. Východiskem pro rýsování obrázků v geometrickém dynamickém programu GeoGebra mi byla teoretická příprava.

Cílem bakalářské práce je:

- shrnout základní poznatky o trojúhelníku obsažené v učebním plánu matematiky pro základní školy,
- předložit soubor vybraných rozšiřujících poznatků o trojúhelníku pro nadané žáky druhého stupně základních škol nebo pro žáky středních škol,

- vytvořit soubor obrazového materiálu v počítačovém programu GeoGebra pro účely dalšího využití ve výuce matematiky.

Touto prací bych chtěla podpořit současný trend využívání moderních technologií v hodinách matematiky na základních i středních školách. Věřím, že nejen já, ale i ostatní učitelé budou čerpat inspiraci v následujících stránkách pro přípravu do hodin matematiky.

1 Definice trojúhelníku

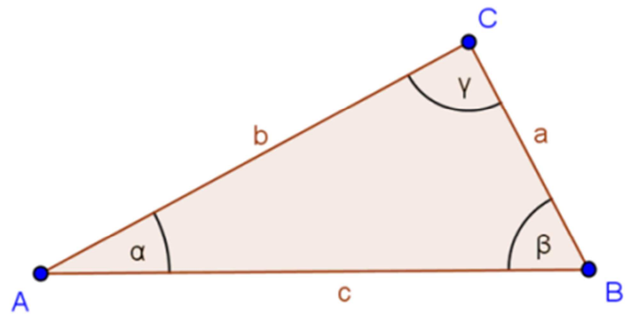
Trojúhelník je rovinný geometrický útvar. V literatuře se můžeme setkat s různými definicemi trojúhelníku. Někteří autoři definují trojúhelník například jako množinu bodů, množinu úseček nebo průnik polorovin dané vlastnosti.

Definice 1.1 „Nechť A, B, C jsou tři body neležící v přímce. Trojúhelníkem ABC nazýváme množinu všech bodů X prostoru, které patří úsečce AY a Y patří úsečce BC. Symbolicky: $\Delta ABC = \{\mathrm{X} \in \mathrm{Z}; \mathrm{X} \in \mathrm{AY} \wedge \mathrm{Y} \in \mathrm{BC}\}$." (Francová, 1995, s. 18)

Definice 1.2 Nechť jsou dány nekolineární body A, B, C. Trojúhelníkem ABC nazveme sjednocení všech úseček AX, kde X je libovolný bod úsečky BC (bod X probíhá úsečku BC). (Stopenová, 1999)

Definice 1.3 „Mějme dány tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Trojúhelník ABC je průnikem polorovin ABC, BCA, CAB, tj. množina všech bodů, jež leží zároveň v těchto třech polorovinách. Označuje se symbolicky ΔABC." (Polák, 2008, s. 424)

Další autoři vymezují pojem trojúhelník jako n-úhelník pro $n = 3$ nebo jako konvexní mnohoúhelník se třemi vrcholy a třemi stranami. (Bartsch, 2006)



Obrázek 1. *Trojúhelník ABC*

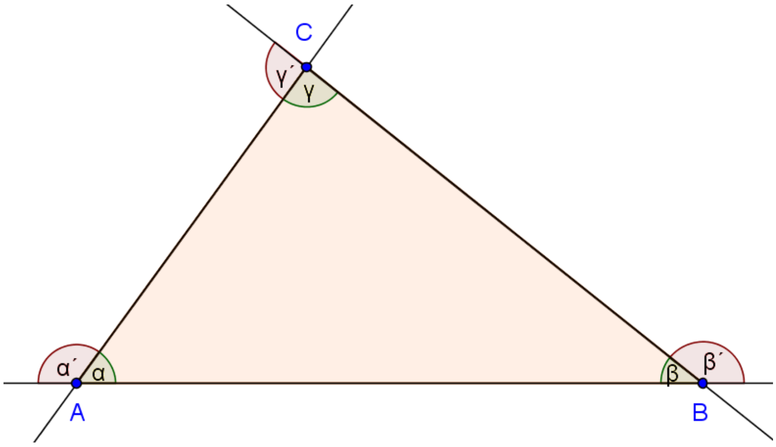
Vrcholy trojúhelníku budeme označovat velkými písmeny A, B, C. Pořadí vrcholů bude vždy uvedeno podle matematické úmluvy proti pohybu hodinových ručiček. Podle Švrčka (1988) můžeme vrcholy trojúhelníku vymezit jako uspořádanou trojici bodů A, B, C v rovině, které neleží na přímce a které souhlasí s kladnou orientací roviny.

Úsečky AB, BC, AC se nazývají *strany trojúhelníku.* Délku strany označujeme $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$ (tj. naproti vrcholu A strana a atd.).

Trojúhelník budeme zapisovat podle jeho vrcholů symbolem ΔABC.

Konvexní úhly CAB, ABC, BCA se nazývají *vnitřní úhly trojúhelníku* při vrcholech A, B, C. Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku označíme malými písmeny řecké abecedy α, β, γ (tj. při vrcholu A vnitřní úhel α atd.).

Vedlejší úhly k vnitřním úhlům trojúhelníku se nazývají *vnější úhly trojúhelníku*. Velikosti vnějších úhlů trojúhelníku ABC budeme symbolicky značit α', β', γ' (tj. vedlejší k úhlu α úhel α' atd.), viz obrázek 2.



Obrázek 2. *Vnitřní a vnější úhly trojúhelníku ABC*

1.1 Konstrukce trojúhelníku

Konstrukční úlohy z geometrie v rovině nám předkládají k vyřešení a následnému sestrojení geometrický útvar daných vlastností. Uvažujeme o sestrojení jednoho útvaru nebo všech útvarů s požadovanými vlastnostmi.

Existuje několik metod řešení, které se často kombinují:

- metoda množin všech bodů daných vlastností,
- metoda algebraická,
- metoda geometrických zobrazení. (Pomykalová, 2007)

Trojúhelník lze sestrojit, jsou-li dány tři vhodně zvolené prvky tohoto trojúhelníku, např. strany, úhly, výšky, těžnice, poloměry kružnic trojúhelníku opsané nebo vepsané.

Konstrukční úloha může být zadána číselnými hodnotami prvků nebo prvky s nějakými podmínkami - parametry, pomocí nichž lze konstrukci provést. Konstrukci trojúhelníku v rovině řešenou užitím množin bodů rozdělíme do čtyř částí:

- rozbor,
- konstrukce,
- zkouška,
- diskuse.

Podle zadání úlohy načrtneme a označíme vhodným způsobem trojúhelník, ve kterém si vyznačíme zadané prvky. Předpokládáme, že existuje aspoň jedno řešení úlohy. Sestavíme postup řešení úlohy a zapíšeme jednotlivé kroky konstrukce. Posledním krokem je sestrojení hledaného trojúhelníku. Zkouškou následně ověříme, zda prvky výsledného sestrojeného trojúhelníku odpovídají zadání úlohy. Konstrukce by měla být kompletní, pokud požadovaným vlastnostem vyhovuje více trojúhelníků, narýsujeme je také. Závěrem v diskusi zvažujeme, kdy je úloha řešitelná a kolik řešení existuje. Úloha může mít jedno, dvě i více řešení.

Poznámka. Rozlišujeme úlohy polohové a nepolohové. Je-li v úloze určeno, kde je některý ze zadaných prvků umístěn, pak je určena i poloha hledaného útvaru. Jde tedy o úlohu polohovou. V nepolohové úloze dané prvky umístíme libovolně. Hledaný útvar má předepsané pouze metrické vlastnosti. (Davidová, 2005)

V některých případech řešení konstrukčních úloh je třeba využít metodu výpočtu. V případě trojúhelníků můžeme například rozlišovat úlohy, které počítáme s použitím trigonometrie (viz kapitola 6) nebo bez (např. obvod a obsah trojúhelníka).

Poslední metodou v našem výčtu je zobrazení v rovině. Konstrukční úloha může být tedy například řešena pomocí shodného zobrazení, posunutí, otočení, stejnolehlosti, podobného zobrazení, atd. Pro potřeby naší práce není nutné se hlouběji zabývat touto problematikou.

V předcházejícím textu jsme nastínili možnosti, kterými lze řešit konstrukční úlohy o trojúhelníku.

1.2 Základní věty geometrie trojúhelníku

Pro konstrukci trojúhelníku je třeba si uvědomit, že trojúhelník musí splňovat určitá kritéria. Uvedeme různá znění věty o trojúhelníkové nerovnosti, která vyjadřují základní vztahy mezi stranami trojúhelníku. Dále předložíme větu o stranách a protějších úhlech trojúhelníku a také věty o vnitřních a vnějších úhlech trojúhelníku. Důkaz provedeme u poslední z nich.

Věta 1.1 Jsou-li A, B, C tři různé body, které neleží na přímce (jsou vrcholy trojúhelníku), pak pro jejich vzdálenosti platí vztah $|AC| + |BC| > |AB|$. (Vyšín, 1965)

Věta 1.2 Součet každých dvou stran trojúhelníku je větší než strana třetí. (Pomykalová, 2007)

Pro délky stran a, b, c trojúhelníku ABC, platí *trojúhelníkové nerovnosti*

$$a < b + c,\ b < a + c,\ c < a + b.$$

Z druhé a třetí nerovnice plyne, že $b - c < a,\ c - b < a$, což můžeme vyjádřit jako $|b - c| < a$. Pro délku strany *a* tedy platí vztahy $|b - c| < a < b + c$.

Analogicky lze tyto vztahy vyjádřit i pro b, c. (Polák, 2008)

Věta 1.3 (Věta o stranách a protějších úhlech v trojúhelníku)

Proti shodným stranám trojúhelníku leží shodné vnitřní úhly, proti větší straně trojúhelníku leží větší vnitřní úhel. Pro délky stran a velikosti vnitřních úhlů tedy platí $a = b <=> \alpha = \beta,\ \ a > b <=> \alpha > \beta$ atd.

Věta 1.3 platí i naopak: Proti shodným vnitřním úhlům trojúhelníku leží shodné strany, proti většímu vnitřnímu úhlu trojúhelníku leží větší strana. (Francová, 1995; Pomykalová, 2007; Polák, 2008)

Věta 1.4 Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý, a tedy součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Věta 1.5 Velikost vnějšího úhlu trojúhelníku je rovna součtu vnitřních úhlů při zbývajících vrcholech. Pro velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku α, β, γ a jeho vnějších úhlů α', β', γ' tedy platí:

$$\alpha' = \beta + \gamma,\ \beta' = \alpha + \gamma,\ \gamma' = \alpha + \beta.$$ (Polák, 2008)

Důkaz.

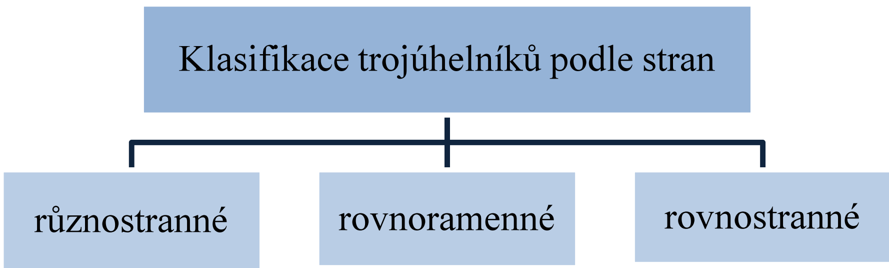
a) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, pak $\beta + \gamma = 180° - \alpha$. Odtud $\alpha' = 180° - \alpha$ z čehož plyne $\alpha' = \beta + \gamma$.

b) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, pak $\alpha + \gamma = 180° - \beta$. Odtud $\beta' = 180° - \beta$ z čehož plyne $\beta' = \alpha + \gamma$.

c) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, pak $\alpha + \beta = 180° - \gamma$. Odtud $\gamma' = 180° - \gamma$ z čehož plyne $\gamma' = \alpha + \beta$.

1.3 Klasifikace trojúhelníků

Trojúhelníky dělíme do dvou skupin, a to jednak podle délek jejich stran a jednak podle velikosti jejich vnitřních úhlů. Pro názornost jsme převzali diagramy klasifikace trojúhelníků od Poláka (2008).



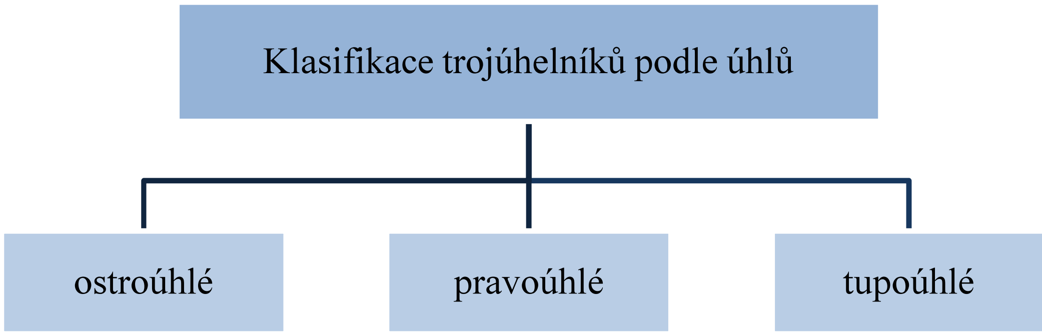
Obrázek 3. *Klasifikace trojúhelníků podle stran* (Polák, 2008, str. 433)

Trojúhelník různostranný nemá žádné dvě strany shodné. Různostranné trojúhelníky, které nejsou pravoúhlé, nazýváme obecné.

Rovnoramenný trojúhelník má dvě strany (ramena) shodné. Třetí strana se nazývá základna.

Rovnostranné trojúhelníky jsou zvláštním případem rovnoramenných trojúhelníků, které mají všechny strany shodné. (Pomykalová, 2007)

Poznámka. *V pravoúhlém trojúhelníku* leží nejdelší strana tj. přepona proti pravému úhlu a zbývající dvě strany se nazývají odvěsny. (Polák, 2008)



Obrázek 4. *Klasifikace trojúhelníků podle úhlů* (Polák, 2008, str. 433)

Ostroúhlý trojúhelník má všechny tři vnitřní úhly ostré tj. menší než $\frac{\pi}{2}$.

V pravoúhlém trojúhelníku je právě jeden vnitřní úhel pravý tj. roven $\frac{\pi}{2}$.

Trojúhelník tupoúhlý má právě jeden vnitřní úhel tupý tj. větší než $\frac{\pi}{2}$. (Herman, 1995)

1.4 Střední příčka trojúhelníku

Střední příčka je úsečka, která spojuje středy dvou stran trojúhelníku. V každém trojúhelníku najdeme tři takové úsečky.

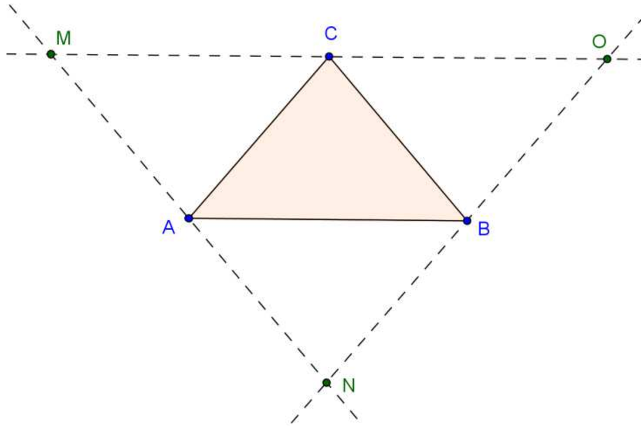
Definice 1.4 V trojúhelníku ABC označme po řadě S_a, S_b, S_c středy stran a, b, c. Úsečky S_aS_b, S_bS_c, S_cS_a se nazývají *střední příčky* trojúhelníku ABC. (Francová, 1995)

Věta 1.6 Střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná se stranou trojúhelníku, jejíž střed nespojuje. Její délka je rovna polovině délky této strany. (Pomykalová, 2007)

Důkaz. Podle Kadlečka (1996) provedeme důkaz doplněním trojúhelníku ABC na rovnoběžník $ABCM$. Úsečky AB a MC jsou rovnoběžné a mají stejnou velikost (platí i pro úsečky AM a BC). Doplněním na rovnoběžníky $ANBC$ a $ABOC$ získáme trojúhelník MNO se středními příčkami AB, BC a AC, viz obrázek 5.

Věta 1.7 Trojúhelník ABC je *příčkový trojúhelník* trojúhelníku MNO. Platí, že $AB \parallel MO$, $|AB| = \frac{1}{2}\,|MO|$; $BC \parallel NM$, $|BC| = \frac{1}{2}\,|NM|$; $AC \parallel NO$, $|AC| = \frac{1}{2}\,|NO|$. (Kadleček, 1996)

Poznámka. Důkaz věty 1.7 je zřejmý z předchozího textu.



Obrázek 5. *Příčkový trojúhelník ABC*

1.5 Těžnice trojúhelníku

Stejně jako tři střední příčky, existují v trojúhelníku také tři těžnice.

Definice 1.5 Spojnice vrcholu trojúhelníku se středem jeho protější strany se nazývá *těžnice trojúhelníku*. Máme trojúhelník ABC, pak úsečky AS_a, BS_b, CS_c, jsou těžnice daného trojúhelníku a značíme je t_a, t_b, t_c, viz obrázek 6. (Pomykalová, 2007)

Věta 1.8 Těžnice v trojúhelníku procházejí týmž bodem. (Švrček, 1988)

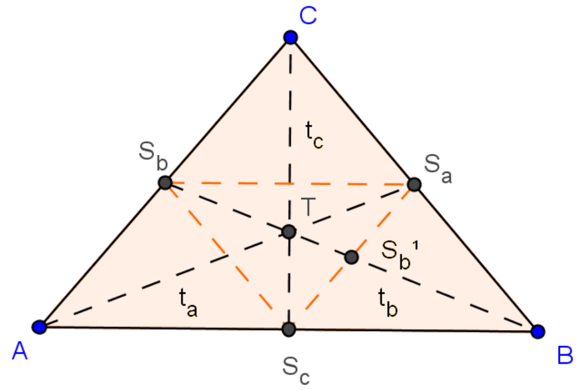
Důkaz. Podle Švrčka (1988) lze větu dokázat tak, že najdeme střed střední příčky S_cS_a trojúhelníku ABC a označíme ho S_b^1. Pak ΔABC a ΔS_aS_cB, jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti v bodě B. Středy odpovídajících si stran leží na jedné přímce tj. body B, S_b^1, S_b. I ΔCAT a ΔS_aS_cT jsou stejnolehlé. Střed stejnolehlosti je v bodě T. Body T, S_b, S_b^1 tedy rovněž leží na jedné přímce. Z toho vyplývá, že body B, T, S_b leží na jedné přímce a to znamená, že se všechny tři těžnice protínají v jednom bodě T.

Věta 1.9 Bod T se nazývá *těžištěm* trojúhelníku ABC. Těžiště T dělí každou těžnici na dvě úsečky, jejichž poměr velikostí je 1:2. (Kadleček, 1996)

Ve větě o těžnicích trojúhelníku Polák (2008) přidává, že těžiště je od středu jakékoliv strany vzdálené jednu třetinu délky dané těžnice. Máme těžnice t_a, t_b, t_c, pak $|TS_a| = \frac{1}{3}t_a$, $|TS_b| = \frac{1}{3}t_b$, $|TS_c| = \frac{1}{3}t_c$.

Důkaz. Podle Švrčka (1988) využijeme stejnolehlost se středem v bodě B. Víme, že $|AC| = 2\,|S_c S_a|$ a $|S_b B| = 2\,|S_b^1 B|$. Podle první rovnosti $|AC| = 2\,|S_c S_a|$ a stejnolehlosti se středem v bodě T, pak zjišťujeme, že $|S_b T| = 2\,|TS_b^1|$. Dále počítáme $|TB| = |TS_b^1| + |S_b^1 B| = |TS_b^1| + |S_b S_b^1| = |TS_b^1| + |S_b T| + |TS_b^1| = |S_b T| + 2|TS_b^1| = |S_b T| + |S_b T| = 2|S_b T|$.

Stejným způsobem můžeme dokázat i pro zbylé dvě těžnice.



Obrázek 6. *Těžnice a střední příčky trojúhelníku*

1.5.1 Délka těžnice trojúhelníku

Délku těžnice můžeme vypočítat, pokud známe délky tří stran libovolného trojúhelníku nebo pokud známe délky dvou stran a úhlu, který svírají, viz tabulka 1.

Tabulka 1. *Délka těžnice (Bartsch, 2006)*

Délka těžnice přes tři strany	Délka těžnice přes dvě strany a úhel mezi nimi
$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$	$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}$
$t_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$	$t_b = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos\beta}$
$t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$	$t_c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}$

1.6 Výška trojúhelníku

Výška trojúhelníku je spojnice vrcholu trojúhelníku se středem protější strany. Každý trojúhelník má tři vrcholy, a proto v každém trojúhelníku existují tři výšky. Pro výšku trojúhelníku uvedeme dvě definice od různých autorů. V první je výška definovaná jako přímka a ve druhé jako úsečka. Dále se budeme soustředit na polohu průsečíku výšek v různých trojúhelnících a na délku výšky. Důkazy vět v celé kapitole neprovádíme, jsou zřejmé.

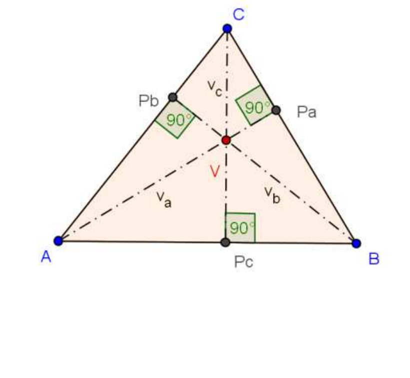
Definice 1.6 „Označme po řadě v_a, v_b, v_c kolmice vedené vrcholy A, B, C trojúhelníka ABC k přímkám BC, AC, AB. Přímky v_a, v_b, v_c nazýváme *výšky trojúhelníka* ABC.“ (Francová, 1995, s. 47)

Definice 1.7 „Úsečka s krajními body, jimiž jsou vrchol trojúhelníku a pata kolmice vedené tímto vrcholem k jeho protější straně, se nazývá *výška trojúhelníku* příslušná k této straně.“ (Polák, 2008, s. 434)

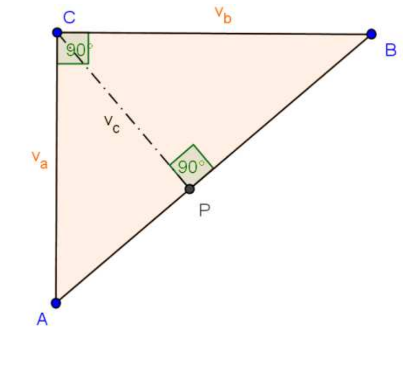
Věta 1.10 Všechny tři výšky libovolného trojúhelníku se vždy protnou v jednom bodě V - *průsečíku výšek*, tzv. *ortocentru.* (Kadleček, 1996)

Na obrázku máme postupně narýsované výšky pro ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý trojúhelník. Úsečky AP_a, BP_b, CP_c trojúhelníku ABC značíme postupně v_a, v_b, v_c.

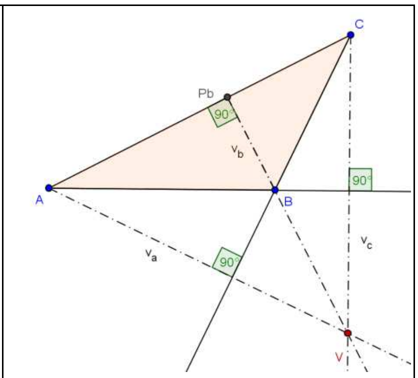
Věta 1.11 Ortocentrum v ostroúhlém trojúhelníku leží vždy uvnitř trojúhelníku, viz obrázek 7, v pravoúhlém trojúhelníku splývá s vrcholem pravého úhlu, viz obrázek 8, v tupoúhlém trojúhelníku leží vně tohoto trojúhelníku, viz obrázek 9. (Polák, 2008)



Obrázek 7. *Ortocentrum v ostroúhlém trojúhelníku*



Obrázek 8. *Ortocentrum v pravoúhlém trojúheníku*



Obrázek 9. *Ortocentrum v tupoúhlém trojúhelníku*

Poznámka. Pojem výška trojúhelníku má trojí význam. V definici 1.6 je výška trojúhelníku definovaná jako přímka. Podle definice 1.7 je za výšku trojúhelníku uvažována úsečka. Velikost této úsečky se nazývá také výška. Délkou výšky se budeme zabývat v následujícím textu.

1.6.1 Délka výšky trojúhelníku

Vztah, který platí pro délky výšek a stran trojúhelníku, uvedeme ve větě 1.12. Délku výšky vypočítáme podle věty 1.13 a vztahů podle Bartsche (2006).

Věta 1.12 Pro délky stran trojúhelníku ABC: a, b, c a délky příslušných výšek v_a, v_b, v_c platí:

$$v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$ (Polák, 2008)

Užitím goniometrických funkcí vypočítáme délky výšek za předpokladu, že známe velikosti stran a úhlů trojúhelníku.

Věta 1. 13 Mějme ΔABC a v něm výšky v_a, v_b, v_c, pak

pro $sin\,\gamma = \frac{v_a}{|AC|}$ a $sin\,\beta = \frac{v_a}{|AB|}$, platí $v_a = b\,sin\,\gamma = c\,sin\,\beta$,

pro $sin\,\gamma = \frac{v_b}{|BC|}$ a $sin\,\alpha = \frac{v_b}{|AB|}$, platí $v_b = a\,sin\,\gamma = c\,sin\,\alpha$,

pro $sin\,\beta = \frac{v_c}{|BC|}$ a $sin\,\alpha = \frac{v_c}{|AC|}$, platí $v_c = a\,sin\,\beta = b\,sin\,\alpha$. (Bartsch, 2006)

1.7 Kružnice trojúhelníku opsaná

V následujícím textu se budeme soustředit na kružnici trojúhelníku opsanou, která má zajímavé vlastnosti. Nejprve si však musíme definovat osy stran trojúhelníku.

Definice 1.8 „Osami stran trojúhelníka ABC nazýváme osy úseček AB, BC a AC.“ (Francová, 1995, s. 47)

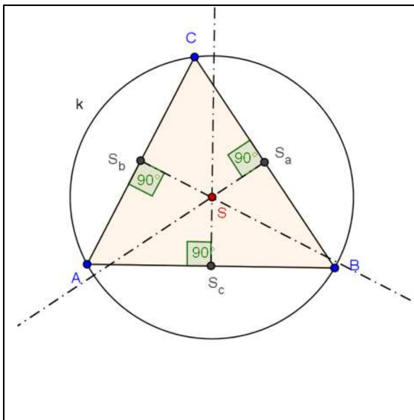
Věta 1. 14 Osy stran každého trojúhelníku se protínají v jednom bodě, který je středem *kružnice trojúhelníku opsané*. Vzdálenosti tohoto bodu od všech tří vrcholů trojúhelníku jsou si rovny. (Polák, 2008)

Poznámka. Důkaz věty 1.14 je zřejmý.

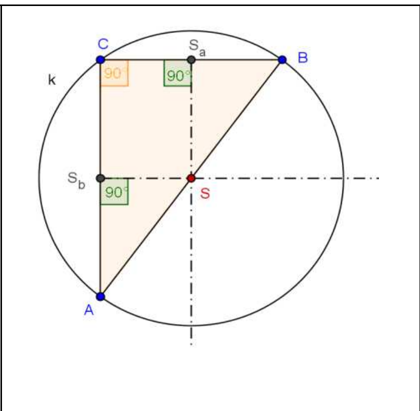
Kružnice trojúhelníku opsaná prochází všemi vrcholy trojúhelníku, má střed v bodě S a poloměr r. Bod S leží vně ostroúhlého trojúhelníku, ve středu přepony pravoúhlého trojúhelníku nebo vně tupoúhlého trojúhelníku, viz obrázky 10, 11 a 12. Na obrázcích vidíme, že poloměr $r = |SA| = |SB| = |SC|$.

Symbolický zápis: $k\ (S;\ r)$.

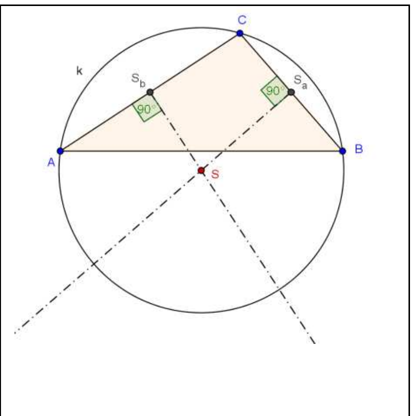
Poznámka. Kružnice pravoúhlému trojúhelníku opsaná a *Thaletova kružnice* (viz kapitola 1.10) jsou shodné.



Obrázek 10. *Kružnice ostroúhlému trojúhelníku opsaná*



Obrázek 11. *Kružnice pravoúhlému trojúhelníku opsaná*



Obrázek 12. *Kružnice tupoúhlému trojúhelníku opsaná*

1.8 Kružnice trojúhelníku vepsaná

Kružnice trojúhelníku vepsaná je další kružnicí, kterou se budeme blíže zabývat. Je třeba si nejdříve definovat osy úhlů trojúhelníku.

Definice 1. 9 Osami úhlů trojúhelníku ABC nazýváme osy úhlů ABC, BCA a CAB.

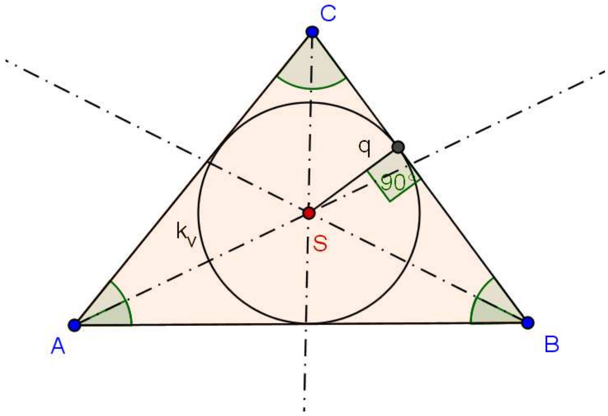
Věta 1. 15 Osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají v jednom bodě, který je středem *kružnice trojúhelníku vepsané*. (Pomykalová, 2007)

Poznámka. Důkaz věty 1.15 je zřejmý.

Kružnice trojúhelníku vepsaná se dotýká všech tří stran trojúhelníku, má střed v bodě S a poloměr q. Střed S kružnice vepsané je vždy vnitřním bodem trojúhelníku, viz obrázek 13.

Symbolický zápis: $k_v(S; q)$.

Poznámka. Máme-li rovnostranný trojúhelník, zjistíme, že středy S kružnice opsané i vepsané, průsečík výšek V a těžiště T splývají.



Obrázek 13. *Kružnice trojúhelníku vepsaná*

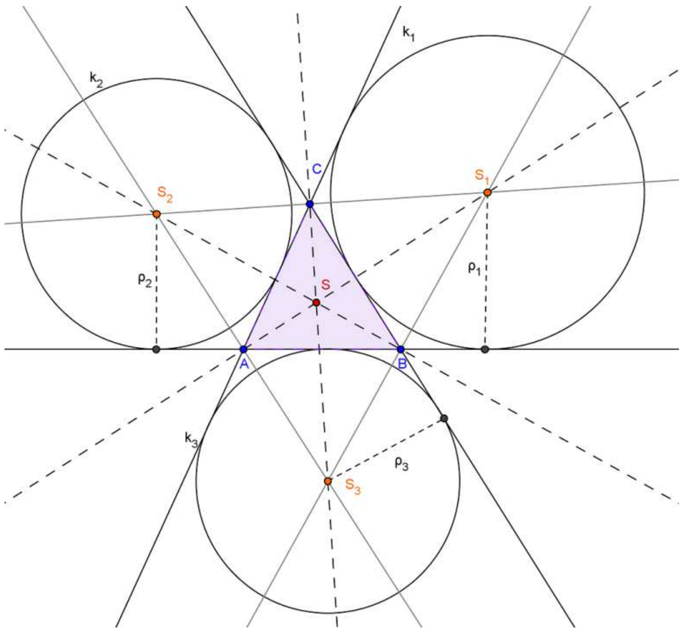
1.9 Kružnice trojúhelníku připsaná

Kromě kružnice trojúhelníku opsané a vepsané existuje kružnice trojúhelníku připsaná. Tento pojem nyní vymezíme podle Švrčka (1988).

Věta 1.16 „Osy vnějších úhlů při dvou vrcholech trojúhelníka a osa vnitřního úhlu při třetím vrcholu procházejí týmž bodem. Vzdálenost každého takového bodu (jsou tři) od všech tří přímek BC, CA, AB jsou stejné.“ (Švrček, 1988, s. 39)

Poznámka. Důkaz věty 1.16 neuvádíme, je zřejmý.

Kružnice k_1, k_2, k_3 trojúhelníku ABC připsané mají postupně středy S_1, S_2, S_3 a poloměry ρ_1, ρ_2, ρ_3, viz obrázek 14.



Obrázek 14. *Kružnice trojúhelníku připsané*

1.10 Thaletova kružnice

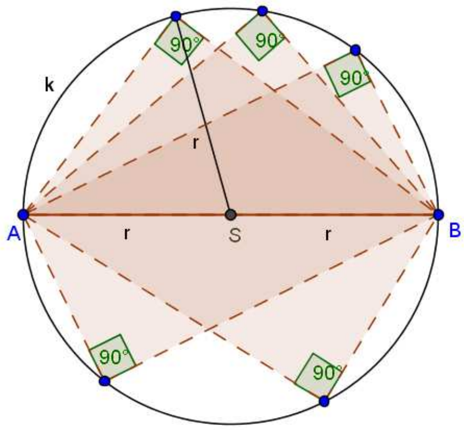
Thalés z Milétu (620-546 př. n. l.) byl řecký filozof, kterému je připisováno mnoho objevů z oblasti geometrie. Základy geometrie získal v Egyptě, kde byl inspirován pyramidami. Mezi jeho další oblíbené disciplíny patřila například astronomie, historie a zeměpis. (Askew, 2012)

Základem pro vymezení pojmu *Thaletova kružnice* je znění Thaletovy věty. Můžeme se setkat s různými formulacemi. Uvedeme jen jednu z nich. Důkaz neprovádíme, je zřejmý.

Thaletova věta

„Každý bod kružnice opsané nad průměrem AB je třetím vrcholem pravoúhlého trojúhelníku s přeponou AB."(Kadleček, 1996, s. 87)

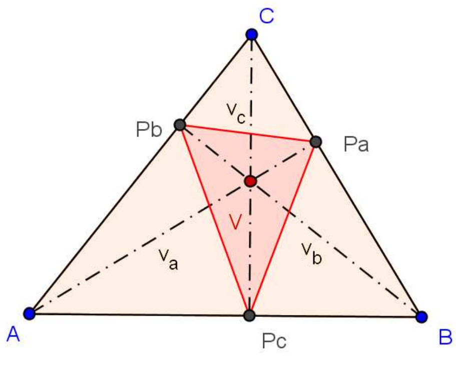
Pojem *Thaletova kružnice* vymezíme podle Davidové (2005) jako kružnici s průměrem AB a množinou vrcholů pravých úhlů nad úsečkou AB, viz obrázek 15.



Obrázek 15. *Thaletova kružnice*

1.11 Ortický trojúhelník

Ortický trojúhelník můžeme využít pro rozšíření základních znalostí o výškách trojúhelníku. Sestrojení tohoto trojúhelníku je jednoduché, protože je tvořen spojnicemi pat výšek trojúhelníku. (Švrček, 1988) Podle obrázku 16. leží v ostroúhlém trojúhelníku ABC ortický trojúhelník $P_aP_bP_c$. Upravíme-li trojúhelník ABC posunutím jeho vrcholů v programu GeoGebra tak, že vznikne pravoúhlý trojúhelník, pak *ortický trojúhelník* zmizí. V případě tupoúhlého trojúhelníku bude *otrtický trojúhelník* ležet z části mimo trojúhelník ABC.



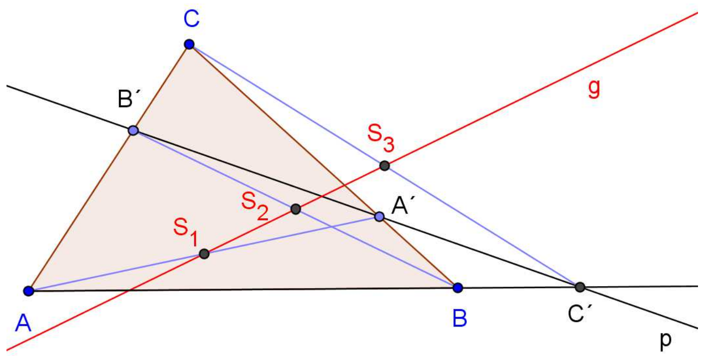
Obrázek 16. *Ortický trojúhelník*

1.12 Gaussova přímka

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) byl německý matematik a vědec. Již od útlého mládí byl velmi nadaným žákem. Rychlost, s jakou splnil úkol sečíst všechna celá čísla od jedné do sta, který mu zadal jeho učitel, je toho důkazem. Později dokonce přišel na to, jak sestrojit pravidelný sedmnáctiúhelník pouze za pomoci pravítka a kružítka, což se předtím nepovedlo nikomu jinému. Za celý život učinil mnoho významných matematických objevů. (Askew, 2012)

V trojúhelníku můžeme najít několik přímek zajímavých vlastností. Jednou z nich je *Gaussova přímka*. Tento pojem vymezíme v následujícím texu a doplníme ho názorným obrázkem.

Jestliže libovolný trojúhelník ABC protíná přímka p, pak středy úseček, jejichž koncové body spojují vrchol trojúhelníku ABC a průsečík přímky p se stranou (rozšířenou stranou) trojúhelníku ABC, leží na jedné přímce g, tzv. *Gaussova přímka*, viz obrázek 17. (Warendorff, 2015)



Obrázek 17. *Gaussova přímka*

1.13 Simsonova přímka

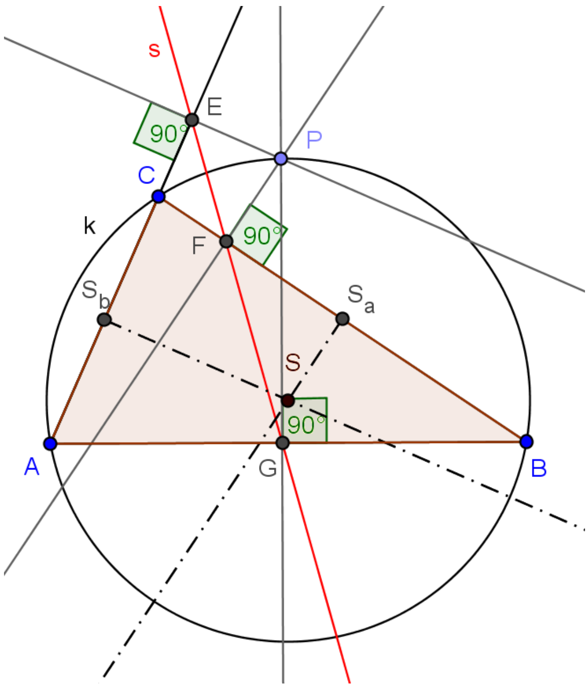
Robert Simson (1687-1768) byl skotským matematikem. Studoval na univerzitě v Glasgow, kde se po čase stal profesorem. Velmi se zajímal o díla řeckých myslitelů s tématikou geometrie. (Carlyle, 2004)

V následujícím textu se budeme věnovat vymezení pojmu *Simsonova přímka*. Předložíme větu 1.17, jejíž důkaz neprovádíme, je zřejmý.

Uvažujeme trojúhelník ABC a nějaký další libovolný bod P, pak paty kolmic vedené tímto bodem ke stranám (rozšířeným stranám) trojúhelníka ABC postupně označíme písmeny E, F, G.

Věta 1.17 Body E, F, G leží na přímce, právě když bod P leží na kružnici trojúhelníku ABC opsané. (Švrček, 1998)

Poznámka. Tuto přímku nazýváme *Simsonova přímka* příslušná bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC. Na obrázku 18 je *Simsonova přímka* označena písmenem s.



Obrázek 18. *Simsonova přímka*

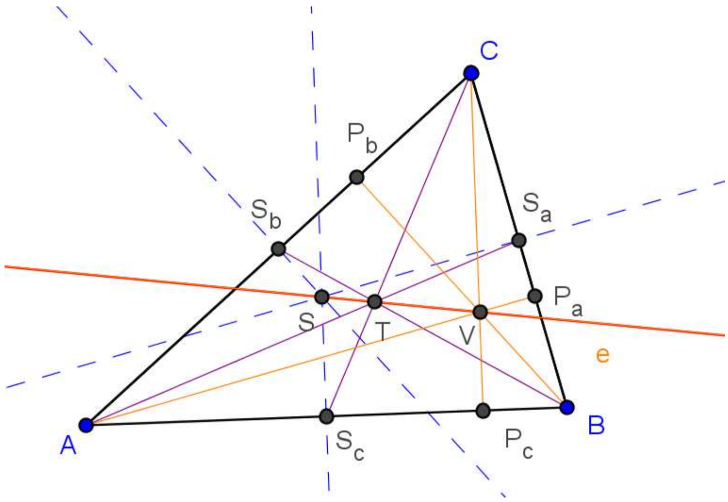
1.14 Eulerova přímka

Leonard Euler (1707-1783) byl žákem švýcarského matematika Bernoullia. Bylo vydáno na 886 jeho knih, ve kterých mimo jiné dokázal existenci Eulerovy přímky a zabýval se dělením mnohoúhelníků na trojúhelníky. (Askew, 2012)

V trojúhelníku existuje mnoho bodů zajímavých vlastností, např. střed S kružnice opsané nebo vepsané; těžiště T, ortocentrum V, atd. Euler dokázal, že některé z těchto bodů leží na jedné přímce. Pro následující větu důkaz neuvádíme, je zřejmý.

Věta 1.18 Buď trojúhelník ABC, pak existuje přímka, která prochází středem S kružnice jemu opsané, těžištěm T a ortocentrem V, tzv. *Eulerova přímka* (na obrázku 15 je označena e). Platí, že bod T leží mezi body S a V, kdy $|TS| = \frac{1}{2}|VT|$. (Švrček, 1998; Vyšín, 1970)

Poznámka. V rovnostranném trojúhelníku body S, T, V splynou v jeden.



Obrázek 19. *Eulerova přímka*

1.15 Feuerbachova kružnice devíti bodů

Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) byl středoškolským učitelem. V roce 1882 dokázal, že zdánlivě náhodně rozmístěné body trojúhelníku, tj. středy stran, paty výšek a středy úseček spojující vrcholy s ortocentrem, leží na jedné kružnici- tzv. *Feuerbachova kružnice*. (Askew, 2012)

Poznámka. Důkazy následujících vět neprovádíme, jsou zřejmé.

Věta 1.19 Buď trojúhelník ABC, potom středy jeho stran, paty jeho výšek a středy A_1, B_1, C_1 úseček AV, BV, CV leží na kružnici. (Švrček, 1998)

Symbolický zápis: $f\ (F;\ r_f)$.

Poznámka. Pokud je trojúhelník ABC pravoúhlý, splynou dvě z pat výšek. Pokud je trojúhelník ABC rovnoramenný (ne rovnostranný), na jeho základně splyne střed strany s patou výšky na tuto stranu. V rovnostranném trojúhelníku ABC splynou středy stran s patami výšek na všech stranách.

Věta 1.20 Buď trojúhelník ABC, který není rovnostranný, pak střed S kružnice opsané tomuto trojúhelníku, těžiště T, ortocentrum V a střed F *Feuerbachovy kružnice*, leží na jedné přímce v pořadí V, F, T, S tak, že platí

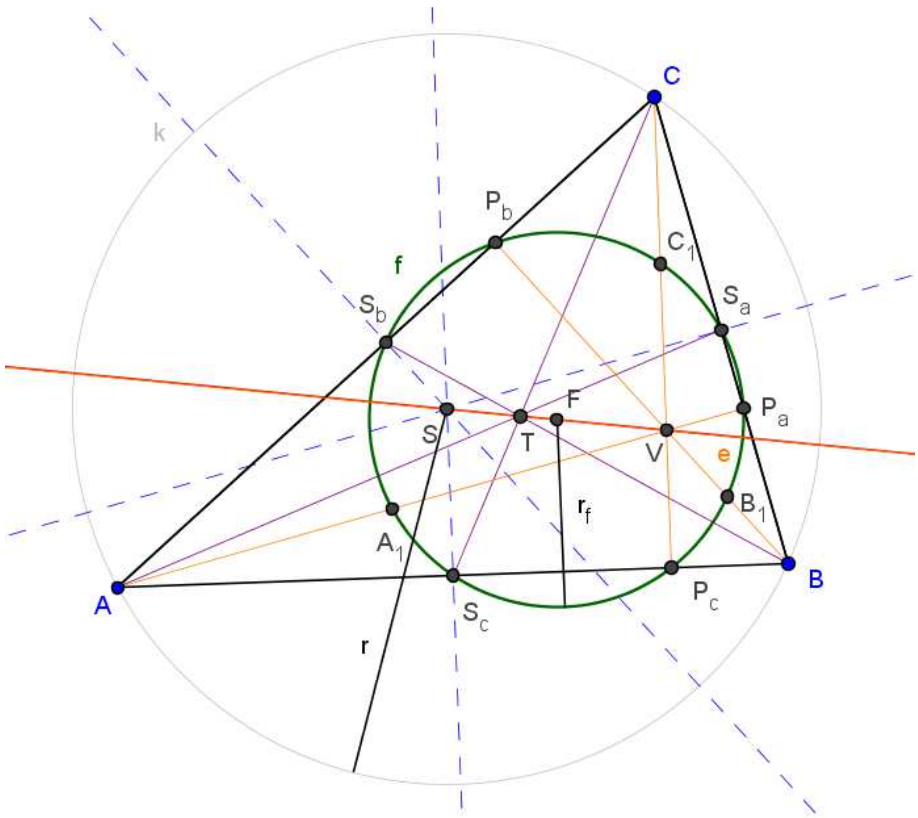
$$|TS| = \frac{1}{3}|VS|, |FT| = \frac{1}{4}|VT|.$$

Dále můžeme vypočítat, že

$$|FS| = |FT| + |TS| = \frac{1}{4}\ |VT| + \frac{1}{3}|VS| = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}|VS| + \frac{1}{3}|VS| = \frac{1}{2}|VS|.$$

Pro poměr velikostí poloměrů kružnice opsané danému trojúhelníku a kružnice devíti bodů platí $r_f = \frac{1}{2}r$. (Švrček, 1988)

Poznámka. V rovnostranném trojúhelníku bude *Feuerbachova kružnice* zároveň kružnicí vepsanou tomuto trojúhelníku.

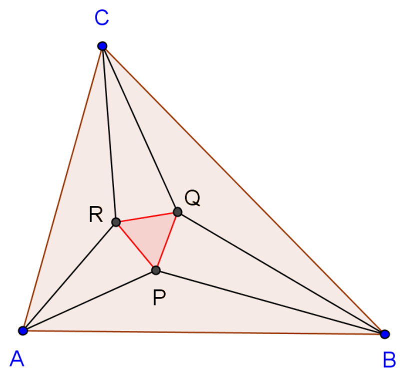


Obrázek 20. *Feuerbachova kružnice*

1.16 Morleyova věta

Frank Morley (1860-1937) byl anglický matematik. V roce 1899 vyslovil hypotézu, že polopřímky dělící vnitřní úhly libovolného trojúhelníku na třetiny, se protínají ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku. (Kuřina, 1996) Uvedeme originální znění Morleyovi věty: *„If the angles of any triangle be trisected, the triangle, formed by the meets of pairs of trisectors, each pair being adjacent to the same side, is equilateral.“* (O'Connor, 2003)

Na základě Morleyovi věty jsme narýsovaly libovolný trojúhelník ABC a rozdělily jeho vnitřní úhly na třetiny. Polopřímky, které po řadě vycházejí ze sousedních vrcholů trojúhelníku ABC, se protnou ve vrcholech P, Q, R rovnoramenného trojúhelníku PQR, viz obrázek 21.



Obrázek 21. *Morleyova věta*

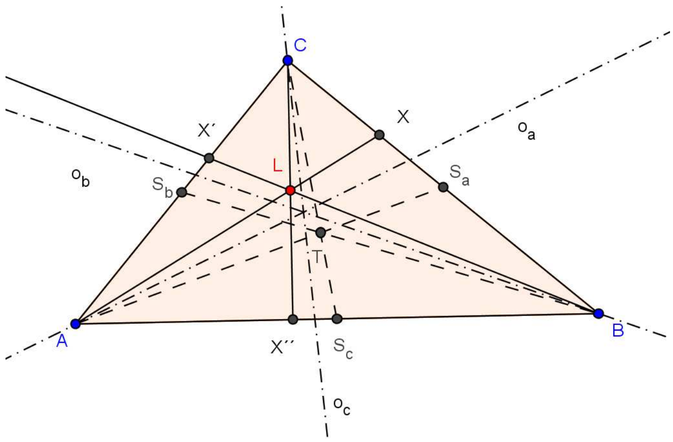
1.17 Lemoinův bod a Lemoinova kružnice

Posledním rozšiřujícím tématem, které jsme vybrali z oblasti konstrukčních úloh trojúhelníku, bude vymezení pojmu *Lemoinův bod* a *Lemoinova kružnice*.

Základem pro nalezení *Lemoinova bodu* je tzv. *symediána*- přímka osově souměrná podle osy příslušného vrcholového úhlu trojúhelníku s těžnicí z tohoto vrcholu. V trojúhelníku existují tři *symediány*, které se protínají v jednom bodě- *Lemoinův bod.* (Švrček, 1998)

Na obrázku 22 je narýsovaný ostroúhlý trojúhelník ABC. Sestrojením symedián těžnic z vrcholů A, B, C podle os příslušných vnitřních úhlů trojúhelníku, najdeme jejich průsečík.

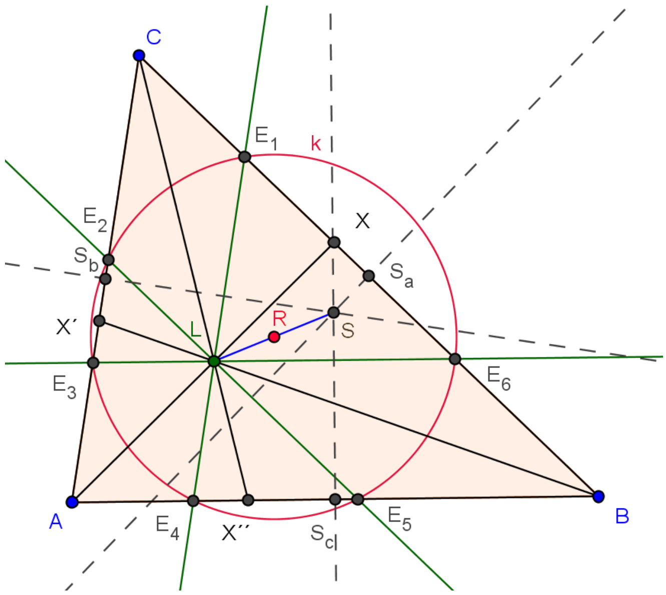
Označíme ho písmenem L. Posouváním vrcholů trojúhelníku ABC v programu GeoGebra snadno zjistíme, že *Lemoinův bod* leží vždy uvnitř trojúhelníku.



Obrázek 22. *Lemoinův bod*

Vedeme-li *Lemoinovým bodem* rovnoběžky ke všem stranám příslušného trojúhelníku, pak průsečíky těchto rovnoběžek se stranami trojúhelníku leží na jedné kružnici- *Lemoinova kružnice*. Střed R této kružnice leží ve středu spojnice *Lemoinova bodu* a středu kružnice trojúhelníku opsané, viz obrázek 23. (Švrček, 1988)

Poznámka. V případě rovnostranného trojúhelníku *Lemoinův bod* splyne se středem kružnice trojúhelníku opsané. Přesvědčit se o tom můžeme opět vhodným posunutím vrcholů trojúhelníku v počítačovém programu GeoGebra.



Obrázek 23. *Lemoinova kružnice*

2 Shodnost trojúhelníků

V této kapitole uvedeme několik definic pro shodnost trojúhelníků od různých autorů. Postupně předložíme věty o shodnosti trojúhelníků a věty o určenosti trojúhelníků. Dále provedeme důkazy pro vybraná tvrzení a závěrem se budeme soustředit na rozlišení přímé a nepřímé shodnosti trojúhelníků.

Definice 2.1 Trojúhelníky považujeme za *shodné*, pokud je lze přemístit (položit na sebe) tak, že se úplně kryjí. (Molnár, 2001)

Definice 2.2 „Řekneme-li o trojúhelnících ABC a $A'B'C'$, že jsou *shodné*, znamená to, že při přemístění přejde bod A do bodu A', bod B do bodu B' a bod C do bodu C'." (Pomykalová, 2007, s. 31)

Definice 2.3 Dva trojúhelníky jsou *shodné*, jestliže se shodují ve všech třech odpovídajících si stranách a vnitřních úhlech. (Můžeme dokázat použitím průsvitky.) Symbolicky zapisujeme shodnost trojúhelníků ABC a $A'B'C$ takto $\Delta ABC \cong \Delta\, A'B'C'$, přičemž $A'B' \cong AB$, $B'C' \cong BC$, $C'A' \cong CA$, a tedy $|A'B'| \cong |AB|$, $|B'C'| \cong |BC|$, $|C'A'| \cong |CA|$; $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta, \gamma' = \gamma$.(Polák, 2008)

Trojúhelníky nemusíme přemisťovat nebo ověřovat zda jsou shodné všechny tři strany a všechny tři úhly daného trojúhelníku. Abychom zjistili, zda jsou trojúhelníky shodné, stačí, když bude splněno některé z následujících tvrzení o shodnosti trojúhelníků.

Věty o shodnosti trojúhelníků

Každé dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když se shodují:

- ve třech stranách (věta *sss*),
- ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném (věta *sus*),
- v jedné straně a ve dvou úhlech k ní přilehlých (věta *usu*),
- ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich (věta *Ssu*). (Molnár, 2001)

Trojúhelník lze sestrojit, pokud platí některá z vět o určenosti trojúhelníků. Důkaz těchto vět můžeme provést na základě vět o shodnosti trojúhelníků.

Věty o určenosti trojúhelníků

Trojúhelník je určen, tzn. lze ho sestrojit, jsou-li dány:

- tři jeho strany splňující trojúhelníkové nerovnosti,
- dvě strany a konvexní vnitřní úhel, který tyto strany svírají,
- dvě strany a konvexní úhel proti větší z nich,
- jedna strana a dva konvexní vnitřní úhly, jejichž grafický součet je menší než úhel přímý. (Polák, 2008)

Věty o shodnosti trojúhelníků se dále využívají při důkazech následujících tvrzení, jak uvádí Kadleček (1996):

Věta 2.1 V trojúhelníku proti shodným vnitřním úhlům leží shodné strany.

Důkaz. Buď trojúhelník ABC, pak označme znovu jeho vrcholy tak, že $A' = B, B' = A$ a $C' = C$. V původním ΔABC platí $\alpha = \beta$. Dále podle věty *usu* platí $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, protože trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ mají stejnou stranu c a k ní přilehlé úhly shodné. Ze shodnosti vyplývá, že $|A'C'| = |AC|$, kde $|A'C'| = a$ a zároveň $|AC| = b$. Dokázali jsme, že $a = b$.

Věta 2.2 V trojúhelníku proti shodným stranám leží shodné vnitřní úhly.

Důkaz. Mějme trojúhelník ABC, pak označme znovu jeho vrcholy tak že $A' = B$, $B' = A\ a\ C' = C$. Předpokládejme, že $a = b$. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou shodné podle věty *sss*, protože mají shodné odpovídající si strany. Platí, že $|\angle CAB| = |\angle C'A'B'|$, kde $|\angle CAB| = \alpha$ a $|\angle C'A'B'| = |\angle CBA| = \beta$. Dokázali jsme, že $\alpha = \beta$.

Věta 2.3 Pokud je $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ a zároveň $\Delta A'B'C' \cong \Delta A''B''C''$, pak také $\Delta ABC \cong \Delta A''B''C''$. (Vlastnost zvaná tranzitivnost)

Důkaz. Jsou-li ΔABC a $\Delta A'B'C'$ shodné, pak $|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'|, |CA| = |C'A'|$. Ze shodnosti $\Delta A'B'C'$ a $\Delta A''B''C''$ vyplývají rovnosti $|A'B'| = |A''B''|, |B'C'| = |B''C''|$, $|C'A'| = |C''A''|$. Spojíme-li rovnosti, dostáváme $|AB| = |A'B'| = |A''B''|, |BC| = |B'C'| = |B''C''|, |CA| = |C'A'| = |C''A''|$. Dokázali jsme, že trojúhelníky ABC a $A''B''C''$ jsou shodné podle věty *sss*.

2.1 Přímá a nepřímá shodnost trojúhelníků

Rozlišujeme přímo a nepřímo shodné trojúhelníky či jiné rovinné útvary.

Věta 2.4 Nechť existují dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Trojúhelník ABC překreslíme na fólii (průsvitku) a posunutím fólie po papíře se pokusíme překrýt trojúhelník $A'B'C'$. Pokud $\Delta\, A'B'C'$ dokonale překryje $\Delta\, ABC$ a je zachován směr obíhání odpovídajících si vrcholů, pak se jedná o *přímo shodné trojúhelníky*. Je-li třeba fólii s $\Delta\, ABC$ při překrývání $\Delta\, A'B'C'$ obrátit spodní stranou nahoru, aby se překryli, pak jde o *nepřímo shodné trojúhelníky*. (Kadleček, 1996)

Poznámka. Důkaz věty 2.3 neuvádíme, je zřejmý.

3 Podobnost trojúhelníků

Mezi neshodnými útvary můžeme někdy najít soulad, kterému říkáme podobnost. Jde například o podobu trojúhelníku narýsovaného na školní tabuli a v sešitě, kdy v sešitě je trojúhelník zmenšenou kopií trojúhelníku na tabuli.

Definice 3.1 „Dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou *podobné*, právě tehdy když existuje takové reálné číslo $k > 0$ (tzv. *koeficient podobnosti*), že platí:

$$|A'B'| = k \cdot |AB|, |B'C'| = k \cdot |BC|, |A'C'| = k \cdot |AC|;$$

tj. $\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = k$.“ (Polák, 2008, s. 436)

Podobnost trojúhelníků symbolicky zapisujeme $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Pro $k > 1$ jde o podobnost *zvětšení*, pro $0 < k < 1$ jde o podobnost *zmenšení* a trojúhelníky jsou shodné když $k = 1$. Při zjišťování podobnosti trojúhelníků je třeba, aby bylo splněno některé z následujících tvrzení o podobnosti trojúhelníků. (Pomykalová, 2007)

Věty o podobnosti trojúhelníků

Každé dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, když se shodují:

- poměry velikostí všech tří odpovídajících si stran (věta *sss*),
- v poměru velikostí dvou stran a vnitřním úhlu jimi sevřeném (věta *sus*),
- ve dvou úhlech (věta *uu*),
- v poměru velikostí dvou dvojic sobě odpovídajících si stran a zároveň mají oba trojúhelníky stejně velký úhel proti větší z těchto stran (věta *Ssu*). (Molnár, 2001; Kadleček, 1996)

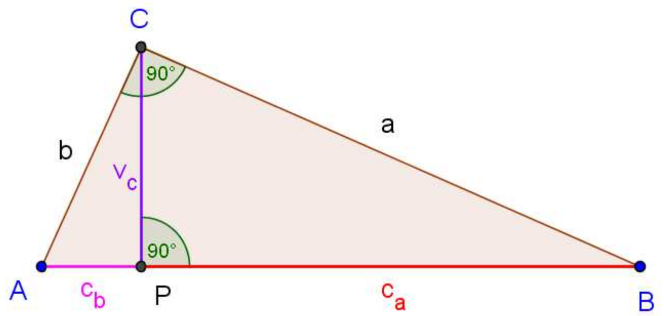
Z vět o podobnosti trojúhelníků plyne následující poznámka.

Poznámka. „Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v jednom ostrém úhlu nebo v poměru velikostí dvou odpovídajících si stran. Dva rovnoramenné trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v úhlu při základně nebo v úhlu při vrcholu. Každé dva rovnoramenné trojúhelníky jsou si podobné.“ (Polák, 2008, s. 437)

4 Metrické vztahy v pravoúhlém trojúhelníku

V textu předložíme tři významné planimetrické věty týkající se pravoúhlého trojúhelníku, které vyslovíme vždy dvěma způsoby, geometricky a metricky. Důkazy uvedeme jen u některých z nich. Dále vymezíme pojem *pythagorejská čísla*. Nejprve, ale musíme zavést označení prvků pravoúhlého trojúhelníku, které užijeme v celé následující kapitole.

Nechť trojúhelník ABC je pravoúhlý, s pravým vnitřním úhlem při vrcholu C, pak délky jeho odvěsen (svírající pravý úhel) označíme a, b, přeponu (stranu ležící proti pravému úhlu) c a výšku k přeponě v_c. Bod P (pata výšky v_c) dělí přeponu c na dvě úsečky- tzv. *úseky přepony*, kde délka úseku přepony přilehlého k odvěsně a se značí c_a a délka úseku přepony přilehlého k odvěsně b se značí c_b. (Molnár, 2001)



Obrázek 24. *Pravoúhlý trojúhelník ABC*

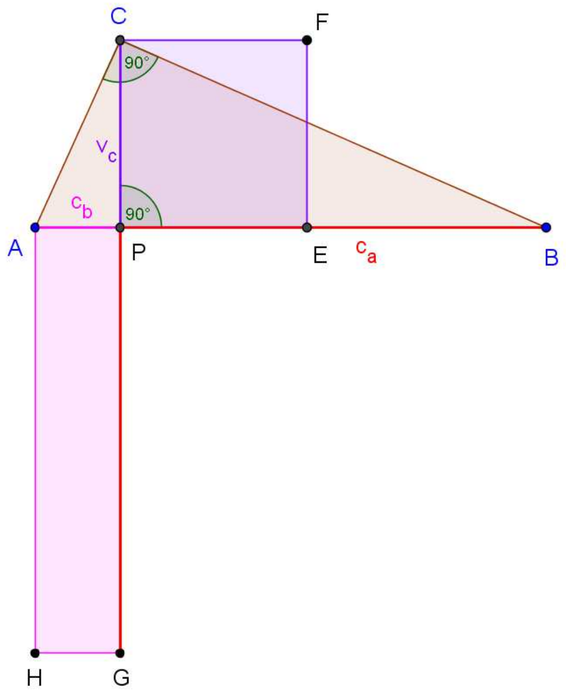
4.1 Eukleidova věta o výšce

Eukleidés (325 př. n. l. -260 př. n. l.) vyučoval matematiku v Egyptě v Alexandrii. V jeho nejvýznamnějším díle *Základy* (starořecky: *Stoicheia*), které obsahovalo třináct svazků, z nichž šest se stalo základem naší školní geometrie, popsal systém rovinné geometrie, která byla považována až do 19. století za vůbec jedinou geometrii, tzv. *eukleidovská geometrie*. (Askew, 2012; Struik, 1963)

Věta 4.1 Obsah čtverce nad výškou na přeponu pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou délky úseček, na které je přepona rozdělena patou výšky. (Voráčová, 2012)

Věta 4.2 V pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina výšky k přeponě rovna součinu délek obou úseků přepony. Platí tedy vztah $v_c^2 = c_a \cdot c_b$. (Pomykalová, 1993)

Důkaz. Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, pak trojúhelníky ACP a CBP jsou podobné podle věty *uu*. Platí tedy rovnice $\frac{c_b}{v_c} = \frac{v_c}{c_a}$. Po úpravě dostaneme $v_c^2 = c_a \cdot c_b$.



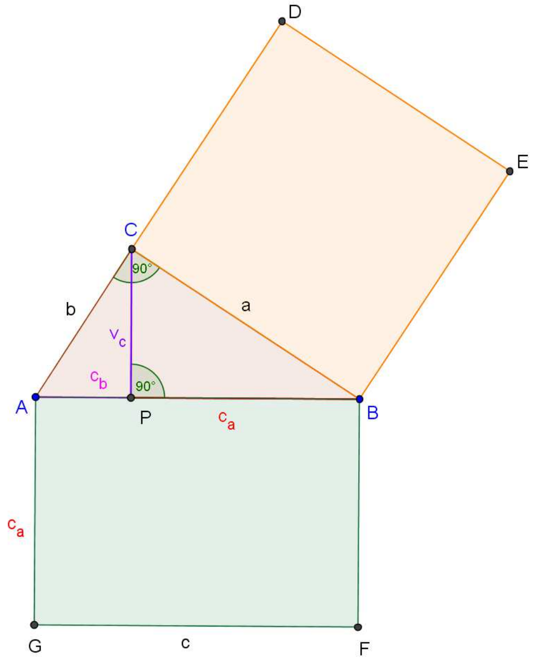
Obrázek 25. *Eukleidova věta o výšce*

4.2 Eukleidova věta o odvěsně

Věta 4.3 Obsah čtverce nad odvěsnou je roven obsahu obdélníku, jehož delší stranu tvoří přepona a kratší stranu část přepony, která vznikne rozdělením přepony patou výšky na přeponu, přiléhající k dané odvěsně. (Voráčová, 2012)

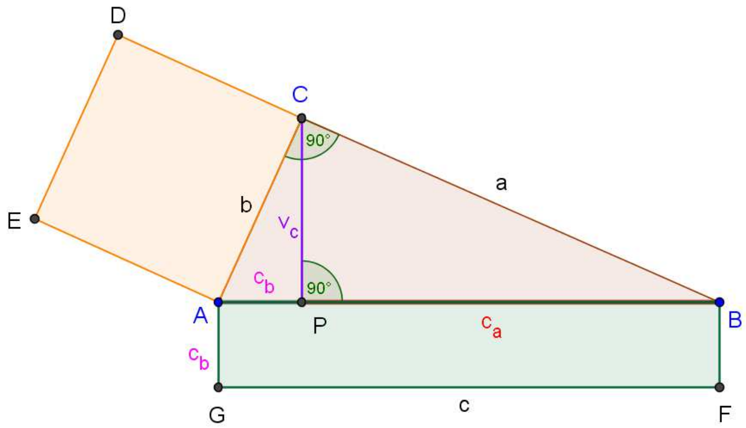
Věta 4.4 V pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky odvěsny rovna součinu délek přepony a přilehlého úseku. Platí vztahy $a^2 = c \cdot c_a$, $b^2 = c \cdot c_b$.

Důkaz. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Trojúhelníky ABC a CBP jsou podobné podle věty *uu*. Porovnáme-li odpovídající si strany, získáme rovnici: $\frac{a}{c_a} = \frac{c}{a}$, odtud $a^2 = c \cdot c_a$.



Obrázek 26. *Eukleidova věta o odvěsně: odvěsna a*

Trojúhelníky ABC a ACP jsou podobné. Porovnáme-li odpovídající si strany, získáme rovnici $\frac{b}{c_b} = \frac{c}{b}$, odtud $b^2 = c \cdot c_b$.



Obrázek 27. *Eukleidova věta o odvěsně: odvěsna b*

Poznámka. Sečteme-li oba vztahy vyjadřující *Eukleidovy věty o odvěsně*, získáme vztah pro velikosti stran pravoúhlého trojúhelníku $a^2 + b^2 = c(c_a + c_b)$, tj. $a^2 + b^2 = c^2$ (viz. 4.3 Pythagorova věta). (Pomykalová, 1993)

4.3 Pythagorova věta

Pythagoras ze Samu byl filozof a matematik, který žil v 6. stol. př. n. l. v Řecku. Založil školu, ve které se vyučovalo kvadrivium (geometrie, aritmetika, astronomie a muzika). Žáci tzv. pythagorejci se vyznačovali velkou vzdělaností a díky tomu se zde zrodilo mnoho významných objevů. (Struik, 1963)

Následující věty platí pro pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým vnitřním úhlem při vrcholu C.

Věta 4.5 V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami. (Voráčová, 2012)

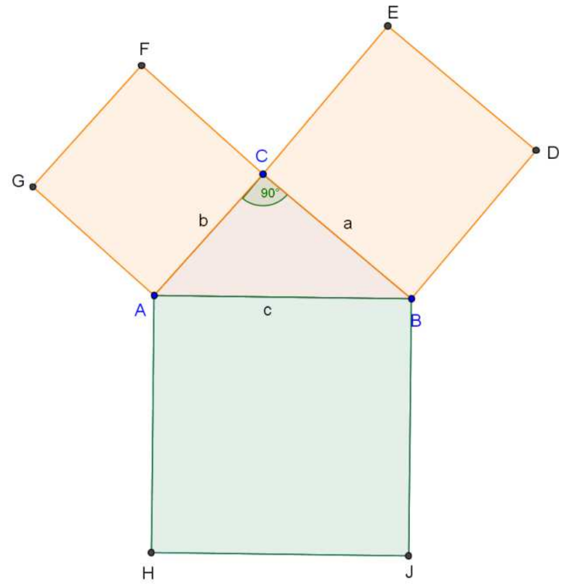
Věta 4.6 V pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen. Platí vztah: $c^2 = a^2 + b^2$. (Pomykalová, 1993)

Platí i věta obrácená:

Věta 4.7 Jestliže pro velikosti stran a, b, c trojúhelníku platí vztah $c^2 = a^2 + b^2$, je tento trojúhelník pravoúhlý a c je velikost jeho přepony. (Slouka, 1993)

Pythagorova věta lze dokázat mnoha způsoby. My nastíníme pouze tři z nich.

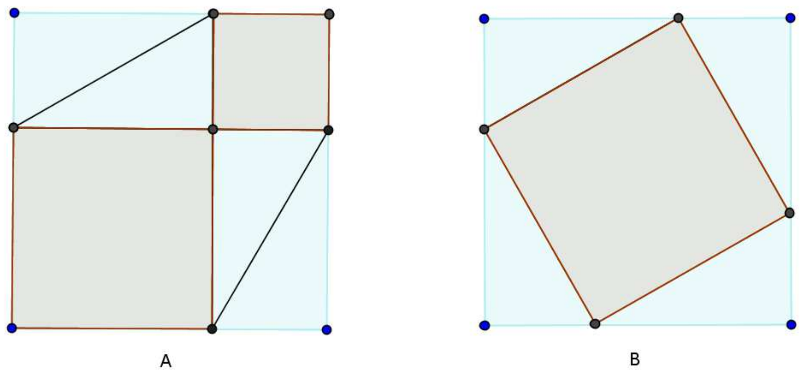
Důkaz. a) Základní geometrický důkaz



Obrázek 28. *Pythagorova věta*

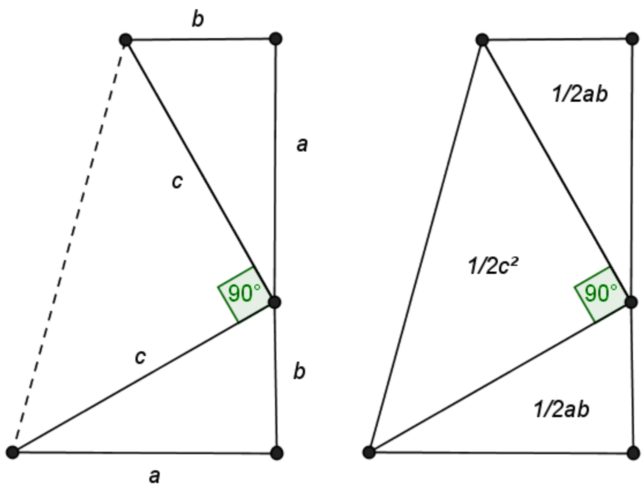
b) *Důkaz beze slov*

Součet obsahů dvou čtverců ve čtverci A je stejný jako obsah „nakloněného“ čtverce v B.



Obrázek 29. *Důkaz beze slov*

c) *Garfieldův důkaz*



Obrázek 30. *Garfieldův důkaz*

Máme dvě kopie pravoúhlého trojúhelníka, které se stýkají v jednom bodě a jejich odvěsny leží na jedné přímce, viz obrázek 30. Mezeru mezi nimi překleneme úsečkou a vytvoříme tak lichoběžník. Obsah lichoběžníku se rovná součtu obsahů všech tří trojúhelníků. (Obsah lichoběžníku se rovná průměru délky horní a dolní základny vynásobené jejich vzdáleností: $\frac{1}{2}(a+b)\cdot(a+b)$.) Tedy: $\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}(a+b)\cdot(a+b)$, upravíme $ab+\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)$, vynásobíme dvěma $2ab+c^2=a^2+2ab+b^2$, odečteme $2ab$ a dostaneme $c^2=a^2+b^2$. (Askew, 2012)

Poznámka. *Pythagorovu větu* lze zobecnit následujícím způsobem. Buď trojúhelník ABC, jehož strany a, b nesvírají pravý úhel při vrcholu C, pak musíme tento úhel zohlednit ve vztahu tak, že výsledná rovnice bude mít tvar $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Viz *kosinová věta* kapitola 6.2.

4.4 Pythagorejská čísla

Vymezíme pojem pythagorejská čísla podle Bartsche (2006).

„*Pythagorejskými čísly* nazýváme všechny členy uspořádané trojice $[a, b, c]$ celých čísel, která jsou řešením rovnice $c^2 = a^2 + b^2$. Jsou-li čísla $p, q \in Z$, pak čísla

$$a = 2pq, \qquad b = p^2 - q^2 \qquad\qquad c = p^2 + q^2$$

jsou pythagorejskými čísly. Jsou-li a, b, c pythagorejskými čísly, pak čísla $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ ($\lambda \in Z$) jsou také pythagorejskými čísly. Proto jestliže všechny členy kterékoli uspořádané trojice $[a, b, c]$ z Tabulky 1 vynásobíme číslem $\lambda \in Z$, dostaneme další uspořádanou trojici pythagorejských čísel.

Tabulka 2. *Pythagorejská čísla* (Bartsch, 2006)

p	q	a	b	c
2	1	4	3	5
3	1	6	8	10
4	1	8	15	17
5	1	10	24	26
3	2	12	5	13
…	…	…	…	…

Jsou-li délky stran trojúhelníku pythagorejskými čísly, pak tento trojúhelník je pravoúhlý.“

5 Základní vzorce

V této kapitole uvedeme stručný přehled vzorců pro výpočet obvodu a obsahu trojúhelníku. Dále předložíme vzorce pro výpočet poloměru kružnice opsané a vepsané trojúhelníku. Pro přehlednost řadíme vzorce do tabulek podle klasifikace trojúhelníků.

Obecný trojúhelník

Strany v obecném trojúhelníku se nerovnají $a \neq b \neq c$ a úhly α, β, γ mají různou velikost.

Obvod: $o = a + b + c$
Obsah: $S = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}$ $S = \frac{1}{2}\,ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$ $S = \frac{abc}{4r}$ $S = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
Heronův vzorec pro obsah: $S = \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$, kde $s = \frac{o}{2} = \frac{a+b+c}{2}$
Poloměr kružnice opsané: $r = \frac{abc}{4S} = \frac{a}{2\,sin\alpha}$
Poloměr kružnice vepsané: $q = \frac{S}{s} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

Rovnostranný trojúhelník

Strany v rovnostranném trojúhelníku se rovnají: $a = b = c$. Úhly mají stejnou velikost: $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.

Obvod: $o = 3a$
Obsah: $S = \frac{1}{2}av = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Poloměr kružnice opsané: $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
Poloměr kružnice vepsané: $q = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
Výška: $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
Těžnice: $t = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Rovnoramenný trojúhelník

Pro strany v rovnoramenném trojúhelníku platí $a = b \neq c$. Pro úhly platí $\alpha = \beta \neq \gamma$

Obvod: $o = 2a + c$
Obsah: $S = \frac{cv_c}{2}$
Poloměr kružnice opsané: $r = \frac{a}{2\cos\frac{\gamma}{2}}$
Poloměr kružnice vepsané: $q = \frac{c}{2} tg \frac{\alpha}{2}$

Pravoúhlý trojúhelník

Pro úhly v pravoúhlém trojúhelníku platí $\alpha + \beta = 90°, \gamma = 90°$

Obvod: $o = a + b + c$
Obsah: $S = \frac{ab}{2}$ $S = \frac{cv_c}{2}$
Poloměr kružnice opsané: $r = \frac{c}{2}$

6 Trigonometrie

„Trigonometrie jest oddíl geometrie, který jedná o tom, jak ze tří číselně daných určovacích prvků trojúhelníka lze vypočítati prvky ostatní. T. dochází důležitého upotřebení v geometrii theoretické i praktické; slouží zejména v geodaesii všude, kde z délek neb úhlů přímo měřených mají býti vypočítány jiné délky neb úhly, výšky a vzdálenosti; jest též základem výpočtů v mathematické geografii a zvláště ve sférické astronomii“ (Otto, 1906, s. 745)

Trigonometrie v rovině využívá při řešení úloh o trojúhelnících goniometrických funkcí pro popis vztahů mezi velikostmi stran a úhlů v trojúhelníku. Nachází uplatnění v planimetrii, stereometrii nebo i v oblasti fyziky a techniky. (Horák, 1982; Polák, 2008)

Poznámka. Učivu goniometrických vzorců se věnovat nebudeme, předpokládáme jejich znalost.

6.1 Trigonometrie pravoúhlého trojúhelníku

K řešení pravoúhlého trojúhelníku se využívá Eukleidových vět, Pythagorovy věty a goniometrických funkcí. Goniometrické funkce ostrého úhlu α (popř. β) v pravoúhlém trojúhelníku jsou definovány pro $0° < \alpha < 90°$. Na základě věty o podobnosti trojúhelníků *uu* můžeme dokázat, že každé dva pravoúhlé trojúhelníky s ostrým úhlem α jsou podobné. (Polák, 2008; Slouka, 1993)

Definice 6.1 Hodnoty goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens velikosti ostrého úhlu α pravoúhlého trojúhelníku ABC

Sinus α je poměr délky protilehlé odvěsny a délky přepony $sin\,\alpha = \frac{a}{c}$

Kosinus α je poměr délky přilehlé odvěsny a délky přepony $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

Tangens α je poměr délky protilehlé a délky přilehlé odvěsny $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

Kotangens α je poměr délky přilehlé a délky protilehlé odvěsny $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a}$

V *Prehľadu matematiky* uvádí Horák (1982) tyto rovnosti

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{b}{c}$$

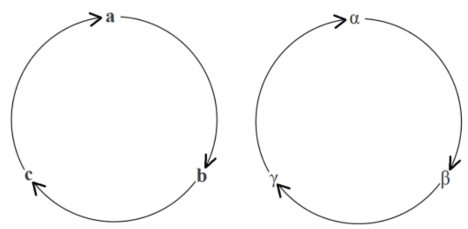
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$$

6.2 Trigonometrie obecného trojúhelníku

Řešíme-li trigonometrické úlohy pro obecný trojúhelník, využíváme věty sinové, kosinové, tangentové nebo věty o polovičních úhlech trojúhelníku.

Poznámka. Tzv. *cyklická záměna* prvků nám umožňuje určit pomocí každého ze vzorců v následujících větách, zbývající dva vzorce. (Odvárko, 2008)



Obrázek 31. *Cyklická záměna prvků*

Věta sinová

Věta 6.1 „Pro každý trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany a, b, c, platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

kde r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku.“ (Polák, 2008)

Při řešení úloh se používá sinová věta ve tvaru, kdy poměr délek stran trojúhelníku se rovná poměru sinů velikostí protilehlých úhlů

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \ \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \ \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Použití při řešení trojúhelníku, jsou-li dány:

- velikosti dvou úhlů a délka jedné strany
- délka dvou stran a velikost úhlů proti jedné z nich

Důkaz. Pro $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Budeme uvažovat postupně ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý trojúhelník ABC. Bod P je pata kolmice vedené bodem C ke straně AB.

a) Bod A leží na polopřímce BP, vně úsečky PB; úhel α je ostrý:
$|CP| = |AC|\, sin\, \alpha = b\, sin\, \alpha$,
$|CP| = |BC|\, sin\, \beta = a\, sin\, \beta$.

Porovnáme pravé strany rovnic: $b\, sin\, \alpha = a\, sin\, \beta$.

Upravíme $\frac{b}{sin\,\beta} = \frac{a}{sin\,\alpha}$.

b) Bod A splývá s bodem P a úhel α je pravý:

$|CP| = |AC| = b = b\, sin\frac{\pi}{2} = b\, sin\, \alpha$.
$|CP| = |BC|\, sin\, \beta = a\, sin\, \beta$.

Stejným způsobem jako v a) porovnáme pravé strany rovnic.

c) Bod A leží uvnitř úsečky PB a úhel α je tupý:

$|CP| = |AC|\, sin(\pi - \alpha) = b\, sin(\pi - \alpha)$,
$|CP| = |BC|\, sin\, \beta = a\, sin\, \beta$.

Podle součtového vzorce pro sinus je

$sin(\pi - \alpha) = sin\, \pi\, cos\, \alpha - cos\, \pi\, sin\, \alpha = sin\, \alpha$.

Opět porovnáním pravých stran rovnic dospějeme ke vztahu $\frac{b}{sin\,\beta} = \frac{a}{sin\,\alpha}$.

Provedeme-li cyklickou záměnu písmen ve vztahu $\frac{a}{sin\,\alpha} = \frac{b}{sin\,\beta}$, dostaneme

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. (Odvárko, 2008)

Věta kosinová

Věta 6.2 Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikosti α, β, γ, platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cos\, \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\, cos\, \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cos\, \gamma.$$

Důkaz. Pro $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cos\, \gamma$. Budeme uvažovat postupně ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý trojúhelník ABC. Bod P je pata kolmice vedené bodem A ke straně BC.

a) Úhel $\gamma < 90°$: Podle Pythagorovy věty platí v pravoúhlém trojúhelníku ABP $c^2 = |AP|^2 + |BP|^2$ *(1)*, kde $|BP| = |CB| - |CP|$ *(2)*. V trojúhelníku APC platí pro $|CP| = b\cos\gamma$ *(3)*, $|AP| = b\sin\gamma$ *(4)*. Dosazením vztahu *(3)* do rovnice *(2)* získáme $|BP| = a - b\cos\gamma$. Nakonec vhodným dosazením výrazů do rovnice *(1)*, dostaneme $c^2 = (b\sin\gamma)^2 + (a - b\cos\gamma)^2$. Upravíme a výsledná rovnice má tvar $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

b) Úhel $\gamma = 90°$. Podle Pythagorovy věty je $c^2 = a^2 + b^2$. Jelikož $\cos\gamma = 0$ platí $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

c) Úhel $\gamma > 90°$: Podle Pythagorovy věty platí v pravoúhlém trojúhelníku ABP $c^2 = |AP|^2 + |BP|^2$ *(5)*, kde $|BP| = |CB| + |CP|$ *(6)*. V trojúhelníku APC platí pro $|CP| = b\cos(\pi - \gamma)$ *(7)*, $|AP| = b\sin(\pi - \gamma)$ *(8)*. Podle součtových vzorců je $\cos(\pi - \gamma) = \cos\pi\cos\gamma + \sin\pi\sin\gamma = -\cos\gamma$,
$\sin(\pi - \gamma) = \sin\pi\cos\gamma - \cos\pi\sin\gamma = \sin\gamma$. Vztahy *(7)* a *(8)* tedy vyjádříme jako $|CP| = -b\cos\,\gamma$ *(9)*, $|AP| = b\sin\gamma$ *(10)*. Do rovnice *(6)* dosadíme vztah *(9)*, získáme $|BP| = a - b\cos\gamma$. Nakonec vhodným dosazením výrazů do rovnice *(5)*, dostaneme $c^2 = (b\sin\gamma)^2 + (a - b\cos\gamma)^2$. Výsledná rovnice bude mít po úpravě opět tvar $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. (Odvárko, 2008)

Poznámka. V důkazu jsme nastínili speciální případ kosinové věty, kdy uvažujeme rovnici $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cos\, \gamma$, kde úhel pak $\cos\gamma = 0$, po dosazení do rovnice platí $c^2 = a^2 + b^2$- *Pythagorova věta*, viz kapitola 4.3. Kosinova věta se někdy nazývá také rozšířená věta Pythagorova. (Vyšín, 1970)

Kosinovu větu můžeme použít při řešení úloh, pokud známe délky dvou stran a velikost úhlu mezi nimi. Dále užijeme tuto větu, potřebujeme-li určit velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku za předpokladu, že známe délky všech jeho stran.

Věta tangentová

Věta 6.3 V každém trojúhelníku ABC platí: $\frac{a-b}{a+b} = \frac{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}, \frac{b-c}{b+c} = \frac{tg\frac{\beta-\gamma}{2}}{tg\frac{\beta+\gamma}{2}}, \frac{a-c}{a+c} = \frac{tg\frac{\alpha-\gamma}{2}}{tg\frac{\alpha+\gamma}{2}}.$

Důkaz. Předpokládáme znalost goniometrických vzorců a sinové věty. Podle Poláka (2008) dokážeme větu 6.3 takto: $\frac{a-b}{a+b} = \frac{a-a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}}{a+a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}.$

Poznámka. *Cyklickou záměnou* prvků můžeme dokázat zbylá vyjádření tangentové věty.

Pomocí věty tangentové můžeme řešit úlohu, pokud známe délky dvou stran a velikosti úhlu jimi sevřeného.

Věta o polovičních úhlech trojúhelníku

Tato věta popisuje vztahy mezi velikostmi vnitřních úhlů a délky stran trojúhelníku. Důkaz věty 6.4 neprovádíme.

Věta 6.4 V každém trojúhelníku ABC platí pro hodnoty goniometrických funkcí polovin velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku vztahy z tabulky 3.

Tabulka 3. *Vztahy mezi vnitřními úhly a stranami trojúhelníku* (Bartsch, 2006; Polák, 2008)

$sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$	$sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$	$sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$
$cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$	$cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$	$cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$
$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{q}{s-a} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$	$tg\frac{\beta}{2} = \frac{q}{s-b} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$	$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{q}{s-c} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$
$cotg\frac{\alpha}{2} = \frac{s-a}{q} = \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$		

Závěr

Bakalářská práce se věnuje pojmu „trojúhelník“ v učivu matematiky na druhém stupni základních škol. Díky snaze rozšířit toto téma o učivo nad rámec učebních plánů, stává se tato problematika velmi rozsáhlá, proto jsme se snažila soustředit se jen na vybrané pojmy z geometrie v rovině. Tím jsem vytvořila prostor pro další zkoumání vztahů v trojúhelníku. Zpracování souboru obrázků korespondujícího s textem v interaktivním počítačovém programu GeoGebra se stává výbornou předlohu pro vizualizaci.

Práce si kladla za cíl na základě prostudované literatury shrnout základní poznatky o trojúhelníku probírané na druhém stupni základních škol s přesahem učiva pro žáky středních škol, popřípadě nadané žáky základních škol. Dalším cílem práce bylo vytvoření souboru obrazového materiálu v programu GeoGebra, který přispěl k názorné ukázce problematiky, a díky vhodně zvolenému barevnému provedení může přispět k lepšímu porozumění. Domnívám se, že cíle mé bakalářské práce se podařily splnit. Výsledný text a obrázky je možné použít jako inspiraci do hodin matematiky na základních školách nebo jako východisko pro další závěrečnou práci.

Hlavním záměrem bakalářské práce bylo podpořit využití interaktivní a dynamické geometrie jako formu moderní výuky geometrie na základních školách. Věřím, že práce poslouží nejen učitelům, ale i jejich žákům.

Seznam použitých pramenů a literatury

ASKEW, Mike a Sheila EBBUTTOVÁ. *Geometrie bez (m)učení*. Praha: Grada Publishing, a.s., 2012. ISBN 978-80-247-4125-3.

BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce*. Praha: Academia, 2006. ISBN 80-200-1448-9.

CARLYLE, E. I. Simson, Robert (1687–1768). In: *Oxford Dictionary of National Biography* [online]. Oxford University Press, 2004 [cit. 2015-03-29]. Dostupné z: http://odnb2.ifactory.com/view/article/25606/

DAVIDOVÁ, Eva. *Řešení planimetrických konstrukčních úloh* [online]. Ostrava: Gymnázium, Ostrava- Poruba, Čs. exilu 669, 2005 [cit. 2015-03-29]. ISBN 80-903647-1-3. Dostupné z: http://www.google.cz/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CCwQFjAC&url=http%3A%2F%2Fwww.sgo.cz%2Fshow-file%2F446%2F&ei=gf4XVZKTForpUuOMg8AD&usg=AFQjCNFRtZCKDvpYHKKqU31GxV-GWdiRHA&bvm=bv.89381419,d.d2s

FRANCOVÁ, Marta, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Texty k základům elementární geometrie: pro studium učitelství 1. stupně ZŠ*. Brno: Vydavatelství Masarykovy univerzity, 1995. ISBN 80-210-0880-6.

HERMAN, Jiří. *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií: Trojúhelníky a čtyřúhelníky*. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-86-0.

HOLOUŠOVÁ, Drahomíra a Milena KROBOTOVÁ. *Diplomové a závěrečné práce*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2008. ISBN 80-244-1237-3.

HORÁK, P a NIEPEL L´. *Prehľad matematiky*. Bratislava: Alfa, 1982. ISBN chybí.

CHAJDA, Radek. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. Praha: OTTOVO NAKLADATELSTVÍ, s. r. o., 2012. ISBN 978-80-7451-222-3.

KADLEČEK, Jiří. *Geometrie v rovině a v prostoru: pro střední školy*. Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-017-9.

KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii*. Praha: Matematický ústav Akademie věd České republiky, 1996. ISBN 80-85823-21-7.

MOLNÁR, Josef. *Planimetrie*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2001. ISBN 80-244-0370-6.

O'CONNOR, J. J. a E. F. ROBERTSON. Frank Morley. In: *JOC/EFR* [online]. 2003 [cit. 2015-03-30]. Dostupné z:http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Morley.html

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Goniometrie*. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 94-21-094.

OTTO, Jan. *Ottův slovník naučný: ilustrovaná encyklopedie obecných vědomostí, dvacátýpátý díl* [online]. Praha: Nakladatelství J. Otty, 1906 [cit. 2015-03-02]. Dostupné z: https://archive.org/details/ottvslovnknauni12ottogoog

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia- Planimetrie*. Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-174-1.

STOPENOVÁ, Anna. *Matematika II.: Geometrie s didaktikou.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 1999. ISBN 80-7067-978-6.

STRUIK, Dirk J. *Dějiny Matematiky*. Praha: Orbis, 1963. ISBN 11-123-63.

ŠVRČEK, Jaroslav; VANŽURA, Jiří. *Geometrie trojúhelníka*. Praha: SNTL- Nakladatelství technické literatury, 1988. ISBN 04-017-88.

ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka*. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 8024608146.

TKAČÍKOVÁ, Daniela. Bibliografické citace. *JAK zpracovávat bibliografické citace podle normy ČSN ISO 690* [online]. Ostrava: Ústřední knihovna VŠB-TUO, 1998-2014, 2014-09-02 [cit. 2015-02-22]. Dostupné z: http://knihovna.vsb.cz/kurzy/index.html

VORÁČOVÁ, Šárka. *Atlas geometrie: Geometrie krásná a užitečná*. Praha: Academia, 2013. ISBN 978-80-200-1575-4.

VYŠÍN, Ján, Ernest JUCOVIČ, Jiří KUST a Iva ROHLÍČKOVÁ. *Geometria pre pedagogické fakulty: II. DIEL*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, n.p., 1970. ISBN 67-022-70.

WARENDORFF, Jay. Gauss´s line. In: *Wolfram Demonstrations Project* [online]. 2015 [cit. 2015-03-29]. Dostupné z: http://demonstrations.wolfram.com/GausssLine/

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Anotace

Jméno a příjmení:	Jitka Nedbalová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	RNDr. Martina Uhlířová, Ph.D.
Rok obhajoby:	2015

Název práce:	Trojúhelník v učivu matematiky na 2. stupni základních škol
Název v angličtině:	Triangle in the Mathematics Curriculum of the Lower Secondary School
Anotace práce:	Bakalářská práce se zabývá problematikou trojúhelníku v učivu matematiky na druhém stupni základních škol. Na základní poznatky o trojúhelníku navazuje vybrané rozšiřující učivo určené pro nadané žáky základních škol nebo pro studenty středních škol. Dále tato práce obsahuje soubor obrazového materiálu vytvořeného v matematickém programu GeoGebra.
Klíčová slova:	Trojúhelník, geometrie, planimetrie, shodnost trojúhelníků, podobnost trojúhelníků, trigonometrie
Anotace v angličtině:	This bachelor thesis summarizes the theory of triangle in mathematics lessons at the lower secondary school. The basic knowledge of triangle is followed up with extended curriculum for talented pupils of lower secondary school or pupils of secondary school. The thesis also contains a collection of pictures created with mathematics software GeoGebra.
Klíčová slova v angličtině:	Triangle, geometry, plane geometry, congruent triangles, similar triangles, trigonometry
Přílohy vázané v práci:	CD ROM
Rozsah práce:	50
Jazyk práce:	Český jazyk