

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

Teorie hromadné obsluhy a její aplikace na model  
křižovatky



Vedoucí diplomové práce:  
RNDr. Tomáš Fůrst, Ph.D.  
Rok odevzdání: 2010

Vypracoval:  
Bc. Josef Vetchý  
AME, II. ročník

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně za vedení a pomoci Tomáše Fürsta a výhradně s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 19. března 2010

### Poděkování

Děkuji Tomáši Fürstovi za vedení diplomové práce, za odbornou pomoc, cenné rady, připomínky, podněty a čas strávený při konzultacích.

Děkuji Richardovi Andrášikovi za pomoc a časté diskuze týkající se praktické části této práce, děkuji firmě PATRIOT s.r.o. za poskytnutá data a firmě Služby města Jihlava s.r.o. za odborné informace. Také bych chtěl poděkovat rodině a přátelům, že mě po celou dobu podporovali.

# Obsah

Úvod.....	4
1. Stochastický proces.....	5
2. Markovovy řetězce.....	7
2.1. Homogenní Markovovy řetězce.....	8
2.1.1. Klasifikace stavů a geometrická interpretace.....	12
3. Markovovy procesy se spojitým časem.....	15
3.1. Homogenní Markovovy procesy se spojitým časem.....	17
3.2. Konečné a spočetné homogenní Markovovy procesy se spojitým časem.....	18
4. Poissonův proces.....	20
5. Základní prvky a charakteristiky systému hromadné obsluhy.....	23
6. Klasifikace modelů hromadné obsluhy.....	27
6.1. Exponenciální modely hromadné obsluhy.....	28
6.1.1. Exponenciální rozdělení dob mezi příchody požadavků.....	29
6.2. Exponenciální model jednoduché obsluhy M/M/1.....	30
6.3. Exponenciální model s paralelní obsluhou M/M/m.....	37
6.4. Exponenciální model jednoduché obsluhy s omezenou kapacitou M/M/1/k.....	42
6.5. Exponenciální systém vícenásobné obsluhy s omezenou kapacitou M/M/m/k.....	45
6.6. Uzavřené systémy hromadné obsluhy.....	46
6.6.1. Uzavřený exponenciální model jednoduché obsluhy M/M/1/.r.....	47
6.6.2. Uzavřený exponenciální model vícenásobné obsluhy M/M/m/.r.....	48
6.7. Systémy hromadné obsluhy s netrpělivostí požadavků.....	49
6.8. Systémy hromadné obsluhy s prioritami.....	50
7. Optimalizační modely.....	51
7.1. Nákladově orientovaná kriteriální funkce.....	51
8. Příklad.....	55
8.1. Jednosměrná silnice se semaforem.....	56
8.2. Jednosměrná křižovatka typu T.....	59
8.3. Křižovatka typu T.....	62
8.3.1. Křižovatka typu T, situace 1.....	63
8.3.2. Křižovatka typu T, situace 2.....	64
8.4. Na závěr příkladu.....	65
Závěr.....	66
Literatura.....	67
Přílohy.....	68
Příloha 1.....	68
Příloha 2.....	71
Příloha 3.....	77
Příloha 4.....	83

## Úvod

Předmětem této práce je pochopit a zpracovat teorii stochastických procesů, zejména Markovových procesů. Tuto teorii následně použít pro matematický popis systémů hromadné obsluhy a vyřešit závěrečný příklad (kapitola 8), kde bude vytvořen model jedné z velkých křižovatek v Karviné. U čtenáře se předpokládají základní znalosti z oblasti pravdě-podobnostního počtu uvedené např. [8] či [10]. Věty jsou většinou uvedeny bez důkazů, jelikož důkazy jsou často poměrně technicky náročné, a proto se spíše budeme na ně odvolávat do uvedené literatury na konci práce. Celou práci lze rozdělit na tři tematické části: přípravná, teoretická a praktická. Uvedené procesy v přípravné části budou „stavebním základem“ pro modely hromadné obsluhy. Teoretická a praktická část prostupuje celým textem. Teoretická část bude do jisté míry prokládána praktickou částí a praktická část (především závěrečný úkol) se bude opírat o část teoretickou.

Celá práce je rozdělena do osmi kapitol. První kapitola je věnována definici stochastického procesu. Speciálním případem stochastického procesu je Markovův řetězec a Markovův proces, pro které platí tzv. *markovská podmínka* (kapitola 2 a 3). Čtvrtá kapitola je věnována konkrétnímu případu Markovova procesu, Poissonův proces, který bude následně užíván v dalších kapitolách. Následující tři kapitoly se zabývají již teorií hromadné obsluhy (= teorie front, modely front či modely hromadné obsluhy). Uvedená teorie je zaměřena pouze na tzv. *exponenciální systémy* (viz. kapitola 5). Teorie bude využita v závěrečném příkladu, kde úkolem bude na základě dat týkajících se hustoty provozu optimálně nastavit světelné signalizace na křižovatce typu T, aby se na této křižovatce tvořila co možná nejmenší kolona automobilů.

# 1. Stochastický proces

Stochastické modely jsou založeny na aplikaci pravděpodobnostního počtu. U těchto modelů vycházíme z předpokladu, že k určitým změnám nějakého systému dochází s určitými pravděpodobnostmi; tzn. budeme pracovat s náhodnými veličinami. Se zkoumáním množiny těchto náhodných veličin souvisí pojem *náhodný proces*. Obecně lze náhodný proces definovat jako množinu náhodných veličin, závislých na určitém počtu parametrů. V ekonomických aplikacích se vyskytují především procesy s jedním parametrem a tím je čas. Takové náhodné procesy se nazývají *stochastické procesy*.

Pro seznámení se základními pojmy pravděpodobnostního počtu (jako je např. náhodná veličina) lze doporučit literaturu [8].

**Definice 1:** Stochastický proces je množina náhodných veličin  $\{X_t\}_{t \in T}$ , kde  $T$  chápeme jako množinu jistých parametrů.

**Poznámka 1:** Náhodné veličiny z definice 1 jsou definované na stejném pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .  $T$  se často chápe jako množina časových okamžiků.

Obecně stochastickým procesem  $\{X_t\}_{t \in T}$ , který lze zapisovat i takto  $\{X(t), t \in T\}$ , rozumíme posloupnost náhodných proměnných.

Definiční obor  $T$ , definovaného stochastického procesu, budeme chápat jako množinu časových okamžiků (časových indexů). Na základě charakteru této množiny lze rozdělit stochastické procesy na dva typy. Jestliže je množina  $T$  konečnou nebo spočetnou množinou, mluvíme o tzv. stochastickém procesu s diskrétním časem. V případě, kdy definiční obor  $T$  je nespočetnou množinou, se jedná o stochastické procesy se spojitým časem.

Obor hodnot stochastického procesu se nazývá *stavový prostor*, resp. *prostor stavů* (množina stavů). Stavem stochastického procesu se rozumí určitá hodnota (obvykle číslo), která je namodelována na základě zkoumaného procesu, tj. oborem funkčních hodnot je číselná množina. Náhodný charakter stochastického procesu spočívá v tom, že v určitém časovém okamžiku  $t \in T$  se vyskytuje jeden z možných stavů stavu  $i$  s určitou

pravděpodobností  $p$ . I zde lze rozdělit na základě charakteru množiny stavů stochastický proces na dva typy. Jestliže množina stavů spočetná (diskrétní), hovoříme o *stavově diskrétním stochastickém procesu*, v opačném případě o *stavově spojitém stochastickém procesu*.

My se zde budeme zabývat speciálně stochastickými procesy, kde výskyt stavu v určitém časovém okamžiku  $t \in T$  je závislý pouze na předchozím časovém okamžiku  $t-1 \in T$ . Jestliže v této situaci je množina  $T$  diskrétní, pak se stochastický proces nazývá *Markovovův řetězec (markovský řetězec)*, jinak se hovoří o *Markovově procesu se spojitým časem*. Tyto dva procesy je možné využít k popisu řady ekonomicko-matematických modelů jako i u našich modelů hromadné obsluhy.

Příklady stochastických procesů budou uvedeny v následujících kapitolách. Pro zájemce lze doporučit literaturu [13] kapitola *Příklady stochastických procesů*.

**Poznámka 2:** Použitá literatura pro tuto kapitolu [4], [7], [9] a [13].

## 2. Markovovy řetězce

Do speciálního případu stochastickým procesů uvedeného v závěru předchozí kapitoly patří Markovovy řetězce.

Vezměme stochastický proces s diskrétním parametrem (časem). Množina  $T$  je konečná, resp. spočetná množina. Bez omezení obecnosti předpokládejme, že

$$T = \{0, 1, 2, \dots, N\}, \text{ resp. } T = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Nechť dále množina  $S$  je nejvýše spočetnou množinou stavů. Stavy očíslovíme  $0, 1, 2, \dots$ . Řekneme, že stochastický proces  $X_t$  je v čase  $t$  ve stavu  $i \in S$ , jestliže  $X_t = i$ .

**Definice 2:** Posloupnost  $\{X_t\}_{t \in T}$  nezáporných celočíselných náhodných veličin nazveme *Markovovým řetězcem (markovským řetězcem)*, kde spočetná množina  $T$  je diskrétní čas, jestliže splňuje *markovskou vlastnot*, tj.

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = j | X_t = i_t)$$

a hodnoty, kterých náhodné veličiny nabývají, jsou prvky z *množiny stavů*  $S$ .

**Poznámka 3:** Markovská vlastnost (Markovova podmínka) nám říká: Je-li Markovův řetězec ve stavu  $n$ , tak jeho budoucí vývoj stavů je určen pouze okamžitým stavem  $n$  a nezáleží na tom, jak se do tohoto stavu dostal.

**Příklad 1:** Možným příkladem Markovova řetězce je karetní hra mezi dvěma hráči, ve které je v oběhu předem daný počet mincí (každý hráč má určitý počet mincí). Pokud jeden z hráčů jednu konkrétní partii prohraje, je nucen dát svému soupeři jednu minci a následně pokračují v další partii. Množina stavů jednoho hráčů je počet mincí, které zrovna vlastní. Hráči hrají hru (partie) tak dlouhou, dokud jeden z nich nevlastní všechny mince, které jsou ve hře.



Chování systému popsaného typu je určeno:

1. vektorem absolutních pravděpodobností v určitém okamžiku

$\mathbf{p}(t) = [p_0(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_N(t), \dots]$  pro okamžiky  $t = 0, 1, 2, \dots$ , kde  $p_i(t)$ ,

$i = 0, 1, 2, \dots, N, \dots$ , značí pravděpodobnost, že řetězec je v okamžiku  $t$  ve stavu  $i$ , tj.

$$p_i(t) = P(X_t = i) \text{ a}$$

2. maticí pravděpodobností přechodů  $\mathbf{P}(t) = [p_{ij}(t)]$ , kde  $i = 0, 1, 2, \dots, N, \dots$

a  $j = 0, 1, 2, \dots, N, \dots$ . Pravděpodobnost  $p_{ij}(t)$  budeme nazývat pravděpodobností

přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$ , k němuž dojde mezi okamžiky  $t$  a  $t+1$ ,

tj.  $p_{ij}(t) = P(X_{t+1} = j / X_t = i)$ .

**Poznámka 4:** Vektor absolutních pravděpodobností pro  $t=0$  má tvar  $\mathbf{p}(0) = [p_0(0), p_1(0), p_2(0), \dots, p_N(0), \dots]$  a nazývá vektor počátečních rozdělení pravděpodobností. Tedy  $p_i(0)$ , kde  $i = 0, 1, 2, \dots, N, \dots$ , značí pravděpodobnost, že řetězec je v nultém okamžiku ve stavu  $i$ .

Pro každé  $t$  musí platit  $\sum_{i \in S} p_i(t) = 1$ , protože v nějakém stavu řetězec být musí (tedy platí i pro  $t = 0$ ). Dále  $\forall t$  platí  $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1 \quad \forall i \in S$ , protože z každého stavu někam přejít musíme. Jestliže pravděpodobnosti  $p_{ij}(t)$  nezávisí na okamžiku  $t$ , tak příslušný Markovův řetězec nazýváme *homogenní*. V případě, kdy pravděpodobnosti  $p_{ij}(t)$  na čase závisí, mluvíme *nehomogenním* Markovově řetězci.

## 2.1. Homogenní Markovovy řetězce

**Definice 3:** Markovův řetězec, pro který pravděpodobnosti  $p_{ij}(t)$  nezávisí na  $t$  (tj.  $p_{ij}(t) = p_{ij} \quad \forall i, j \in S$ ), se nazývá *homogenní Markovův řetězec*.

**Definice 4:** Maticí pravděpodobností přechodů  $\mathbf{P}$ , tzv. *stochastická matice*, má tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = (p_{ij}).$$

Tato matice je čtvercového typu a její rozměr odpovídá stavům v množině  $S$ . Tedy např. prvek  $p_{21}$  znamená pravděpodobnost přechodu po jednom kroku (mezi nějakými okamžiky  $t$  a  $t+1 \quad \forall t \in T$ ) ze stavu 2 do stavu 1. Vlastností stochastické matice je, že při sumarizaci pravděpodobností libovolného řádku matice je součet roven 1, tj.

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in S.$$

Předchozí matice znázorňovala pravděpodobnosti přechodu po jednom kroku. Nyní se podíváme, jak je tomu při více krocích. Vezměme homogenní Markovův řetězec  $X_t$  s počátečním rozdělením pravděpodobnosti  $p_i(0)$  a se stochastickou maticí  $\mathbf{P} = (p_{ij})$ . Začneme situací, kdy rozdíl mezi časovými indexy je roven 2. Pravděpodobnost přechodu po 2 krocích ze stavu  $i$  do stavu  $j$  budeme značit  $p_{ij}^{(2)}$ . Na odvození užitíme větu o úplné pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(2)} = P(X_{t+2} = j | X_t = i) &= \sum_{k \in S} P(X_{t+1} = k | X_t = i) \cdot P(X_{t+2} = j | X_{t+1} = k) = \\ &= \sum_{k \in S} p_{ik} \cdot p_{kj}. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost  $p_{ij}^{(2)}$  je prvkem  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce matice  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$ . Tento závěr lze obecně vyjádřit pro libovolný  $n$  počet kroků a symbolicky lze zapisovat

$$(p_{ij}^{(n)}) = \mathbf{P}^n = (p_{ij})^n,$$

označíme-li  $p_{ij}^{(n)}$  pravděpodobnost přechodu homogenního Markovova procesu ze stavu  $i$  do stavu  $j$  po  $n$  krocích. Na diagonále matice  $\mathbf{P}^n$  dostáváme pravděpodobnosti návratu do téhož stavu po  $n$  časových okamžicích  $(p_{ii}^{(n)})$ .

**Věta 1:** Rozložení pravděpodobností homogenního Markovova řetězce  $X_t$  v čase  $t$ , tzv. *absolutní rozložení pravděpodobnosti*  $\{p_i(t)\}_{i \in S}$ , je pro všechna  $i \in S$  dáno vztahem

$$p_i(t) = P(X_t = i) = \sum_{j \in S} P(X_0 = j) \cdot P(X_t = i / X_0 = j) = \sum_{j \in S} p_j(0) \cdot p_{ij}^{(t)}.$$

**Důkaz:** Pro vektor absolutních pravděpodobností homogenního Markovova řetězce  $X_t$  v čase  $t = 1, 2, 3, \dots$  platí:

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(1) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^2$$

$$\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(2) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^3$$

...

kde  $\mathbf{p}(0)$  je vektor počátečních rozdělení pravděpodobností.

**Příklad 2 (Model havarijního pojištění):** Pro pojištění motorových vozidel používá pojišťovna 3 kategorie pojistného:

0...základní pojistné

1...bonus 30%

2...bonus 50%.

V prvním pojistném období (roce) platí pojištěný základní pojistné. Jestliže pojistné období má bezškodný průběh, je pojištěný v dalším pojistném období zařazen do kategorie vyšší (získá bonus). Pokud ale pojištěný uplatní jeden pojistný nárok, je v příštím období zařazen o kategorii níže. Při uplatnění více než jednoho pojistného nároku je zařazen zpět do kategorie základního pojištění. Počet výskytů pojistné události v  $n$ -tém pojistném období je náhodná veličina  $Y_n$ . Předpokládáme, že náhodné veličiny  $Y_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

jsou nezávislé a mají Poissonovo rozdělení s parametrem  $\lambda$ , tj.  $Y_n = 0, 1, 2, \dots \sim \text{Po}(\lambda)$ ,

$$P(Y_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Necht'  $X_n$  značí kategorii pojištěného v  $n$ -tém pojistném období, tedy  $X_n$  bude nabývat hodnot  $0, 1, 2$ .  $\{X_n\}$  je homogenní Markovovův řetězec s množinou stavů  $S = \{0, 1, 2\}$  a  $\mathbf{p}(1) = (1, 0, 0)$  jsou jednotlivé pravděpodobnosti stavů v prvním období.

Pro období  $n+1$  zřejmě platí:  $Y_n = 0$ , nebo  $Y_n = 1$  a nebo  $Y_n > 1$ .

Pro stochastickou matici platí:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P(Y_n > 0) & P(Y_n = 0) & 0 \\ P(Y_n > 0) & 0 & P(Y_n = 0) \\ P(Y_n > 1) & P(Y_n = 1) & P(Y_n = 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}$$

Předpokládejme, že byl odhadnut pomocí výběrového průměru parametr  $\lambda = 1$ . Určeme absolutní rozdělení pravděpodobnosti  $\mathbf{p}(2)$  a  $\mathbf{p}(3)$ .

Stochastická matice má tedy tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-1} & e^{-1} & 0 \\ 1 - e^{-1} & 0 & e^{-1} \\ 1 - e^{-1} - \lambda e^{-1} & e^{-1} & e^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}(1) = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(1) \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{p}(2) = (1 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 - e^{-1} & e^{-1} & 0 \\ 1 - e^{-1} & 0 & e^{-1} \\ 1 - e^{-1} - \lambda e^{-1} & e^{-1} & e^{-1} \end{pmatrix} = (1 - e^{-1} \ e^{-1} \ 0)$$

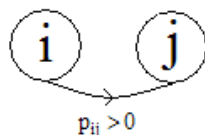
$$\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(2) \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{p}(3) = (1 - e^{-1} \ e^{-1} \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 - e^{-1} & e^{-1} & 0 \\ 1 - e^{-1} & 0 & e^{-1} \\ 1 - e^{-1} - \lambda e^{-1} & e^{-1} & e^{-1} \end{pmatrix} = (1 - e^{-1} \ e^{-1} - e^{-2} \ e^{-2}).$$

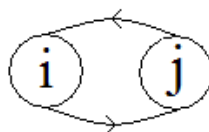
### 2.1.1. Klasifikace stavů a geometrická interpretace

Jedno z nejpoužívanějších geometrických znázornění pro jednotlivé stavy, které si zde ukážeme, je znázornění potlačující časový faktor. Každý stav Markovova řetězce označíme právě jedním kroužkem a jednotlivé přechody mezi stavy s nenulovou pravděpodobností bude označovat spojnicí se šipkou dle směru přechodu. Následně lze z tohoto znázornění dobře odvodit, ze kterých stavů lze každý daný stav dosáhnout a do kterých stavů je možno se dostat.

**Definice 5:** Stav  $j \in S$  je *dosažitelný* ze stavu  $i \in S$ , existuje-li takové přirozené  $n$ , že  $p_{ij}^{(n)} > 0$ .



**Definice 6:** Stav  $i \in S$  je *sousledný* se stavem  $j \in S$ , když  $j$  je dosažitelný z  $i$  a naopak.



Jsou-li  $i, j, k \in S$  libovolné stavy takové, že  $j$  je dosažitelné z  $i$  a  $k$  je dosažitelné z  $j$ , pak  $k$  je dosažitelné z  $i$ , jelikož existuje  $m, n$  tak, že

$$p_{ij}^{(m)} > 0, p_{jk}^{(n)} > 0 \Rightarrow p_{ik}^{(m+n)} \geq p_{ij}^{(m)} \cdot p_{jk}^{(n)} > 0.$$

**Definice 7:** Stav  $i \in S$  je *podstatný*, je-li sousledný s každým stavem  $j$  z něho dosažitelným. Stav, který není podstatný, nazýváme *nepodstatným*.

**Definice 8:** Stav  $i \in I$  je *absorbční*, platí-li  $p_{ii} = 1$ .

**Definice 9:** Stav  $i \in I$  nazýváme *periodický* s periodou  $d_i$ , jestliže je sousledný sám se sebou a největší společný dělitel čísel  $n > 1$ , pro něž  $p_{ii}^{(n)} > 0$ , je  $d_i$ .

**Definice 10:** Řekneme, že stav  $i \in S$  tvoří sám *třidu*, když neexistuje jiný stav s ním sousledný. Stav, pro které existuje sousledný stav, se rozdělí do množin vzájemně sousledných stavů. Každá taková množina tvoří *třidu stavů*. Třidu stavů obsahující stav  $i \in S$  označíme  $C(i)$ .

**Definice 11:** Množina stavů  $M \subset S$  je *uzavřená*, když pro každé  $i \in M$  platí

$$\sum_{j \in M} p_{ij} = 1.$$

**Definice 12:** Řekneme, že Markovův řetězec je *nerozložitelný*, neexistuje-li v něm žádná jiná uzavřená množina kromě množiny stavů  $S$ .

**Věta 2:** Bud'  $\mathbf{P} = (p_{ij})$  stochastická matice homogenního Markovova řetězce s konečným počtem  $N$  stavů. Jestliže pro některé přirozené  $m$  má stochastická matice  $(p_{ij}^{(m)})$  alespoň jeden sloupec kladný, pak pro libovolné stavy  $i, j \in S = \{1, 2, \dots, N\}$  existuje limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j.$$

**Poznámka 5:** Pravděpodobnost  $p_j$  nazýváme *limitní (stacionární) pravděpodobnosti* Markovova řetězce.

**Věta 3:** Mějme nerozložitelný, neperiodický homogenní Markovův řetězec s konečným počtem stavů  $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$  a se stochastickou maticí  $\mathbf{P} = (p_{ij})$ . Potom existují stacionární rozdělení  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_N$  tak, že  $\forall i \in S$  platí

$$p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N$$

a jsou jediným řešením lineárních rovnic

$$p_i = \sum_{k \in I} p_k \cdot p_{ki}, \quad \forall i \in S$$

s vlastností  $\sum_{i \in S} p_i = 1$ .

**Poznámka 6:** Důkazy uvedených vět jsou např. v literatuře [10]. Pro další příklady týkajících se Markovových řetězců lze doporučit např. literaturu [2] či [9]. Pro tuto kapitolu byla použita literatura [2], [4], [7], [8], [9], [10] a [13].

### 3. Markovovy procesy se spojitým časem

Markovovy procesy se liší od Markovových řetězců množinou  $T$ . Zde množinou  $T$  budeme rozumět množinu všech nezáporných reálných čísel, tedy nespočetnou množinu  $T = \langle 0; \infty \rangle$ . Dále budeme předpokládat, že množina stavů  $S$  je nejvýše spočetná. Markovovými procesy lze popsat procesy, u kterých může docházet ke změnám v libovolný časový okamžik. Markovské procesy mají značné uplatnění v modelech hromadné obsluhy, kdy okamžiky vstupu požadavků do systému či jejich výstupu ze systému mohou nastat kdykoli.

**Definice 13:** Systém  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  nazveme *Markovovým procesem se spojitým časem*, jestliže platí *Markovova podmínka*:

$$P(X_{t+\Delta t} = j | X_t = i, X_{t_r} = i_r, \dots, X_{t_0} = i_0) = P(X_{t+\Delta t} = j | X_t = i)$$

$\forall t_0 < t_1 < \dots < t_r < t < t + \Delta t \in T$  a  $\forall$  přirozená  $i_0, i_1, \dots, i_r, i, j \in S$ .

Následně si uvedeme několik podobných pojmů, které jsme si zaváděli také u markovského řetězce s diskretním časem. *Počáteční rozdělení pravděpodobnosti* a *absolutní rozdělení (rozložení) pravděpodobností* je definované stejně jako v předchozí kapitole.

**Definice 14:**  $p_{ij}(t; t + \Delta t) \geq 0$  s vlastností  $\sum_{j \in S} p_{ij}(t; t + \Delta t) = 1$ , pro libovolná  $t + \Delta t, t \in T$

a  $i \in S$ , rozumíme *pravděpodobnost přechodu*, tj. pravděpodobnost toho, že Markovův proces bude v čase  $t + \Delta t$  ve stavu  $j$ , když v čase  $t$  byl ve stavu  $i$ , přičemž  $t + \Delta t > t$ .

#### Intenzity pravděpodobnosti přechodu:

Dochází-li ke změnám (změny stavů) v okamžicích, lišících se časově o  $\Delta t$ , potom pro tento časový interval musíme sledovat i pravděpodobnosti přechodu.



**Definice 15:** Předpokládejme, že existuje následující limita

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t; t + \Delta t)}{\Delta t} \quad i \neq j \in S.$$

Potom  $\mu_{ij}(t)$  pro  $i \neq j$  definované vztahem

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t; t + \Delta t)}{\Delta t}$$

nazveme *intenzitou pravděpodobnosti přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$* . Dále  $\mu_i(t)$  definované vztahem

$$\mu_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t; t + \Delta t)}{\Delta t}$$

nazveme *intenzitou pravděpodobnosti přechodu ze stavu  $i$* .

Podle předchozích vzorců platí:

$$\sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} \mu_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} \frac{p_{ij}(t; t + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t; t + \Delta t)}{\Delta t} = \mu_i(t).$$

Pro dostatečně malé  $\Delta t$  platí  $p_{ij}(t; t + \Delta t) \approx \mu_{ij}(t)\Delta t$ . Položíme-li  $\mu_{ii}(t) = -\mu_i(t)$  dostaneme  $\sum_{j \in S} \mu_{ij}(t) = 0$ . Intenzity pravděpodobností s množinou stavů  $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ ,

resp.  $S = \{0, 1, 2, \dots, N, \dots\}$  sestavujeme často do matic

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \mu_{00}(t) & \mu_{01}(t) & \dots & \mu_{0N}(t) \\ \mu_{10}(t) & \mu_{11}(t) & \dots & \mu_{1N}(t) \\ & & \dots & \\ \mu_{N0}(t) & \mu_{N1}(t) & \dots & \mu_{NN}(t) \end{pmatrix},$$

resp. s nekonečnou množinou stavů

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \mu_{00}(t) & \mu_{01}(t) & \dots & \mu_{0N}(t) & \dots \\ \mu_{10}(t) & \mu_{11}(t) & \dots & \mu_{1N}(t) & \dots \\ & & \dots & & \\ \mu_{N0}(t) & \mu_{N1}(t) & \dots & \mu_{NN}(t) & \dots \\ & & \dots & & \dots \end{pmatrix}.$$

Součet každého řádku matice  $\mathbf{A}(t)$  je roven nule.

### 3.1. Homogenní Markovovy procesy se spojitým časem

V další části (a ve zbylých částí kapitoly 3) se budeme zabývat speciálním případem Markovových procesů se spojitým časem a to homogenními Markovovými procesy se spojitým časem.

**Definice 16:** Markovovův proces se spojitým časem se nazývá *homogenní*, jestliže pravděpodobnosti přechodu závisejí pouze na  $\Delta t$ , nikoli na  $t$ . Značíme je pak  $p_{ij}(\Delta t)$ .

**Věta 4 (Chapman-Kolmogorovova rovnost):** Platí

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{v \in S} p_{iv}(s) \cdot p_{vj}(t) \quad \forall i, j \in S \text{ a } \forall s, t \geq 0,$$

kde  $s, t$  chápeme jako časové intervaly.

**Důkaz:** K důkazu potřebujeme definici podmíněné pravděpodobnosti a větu o úplné pravděpodobnosti (viz. [8]):

Položme  $A = [X_{t^*+s+t} = j]$ ,  $B_v = [X_{t^*+s} = v]$  a  $C = [X_{t^*} = i]$ . Pak máme podle věty o úplné pravděpodobnosti

$$P(X_{t^*+s+t} = j | X_{t^*} = i) = \sum_v P(X_{t^*+s+t} = j | X_{t^*+s} = v, X_{t^*} = i) P(X_{t^*+s} = v | X_{t^*} = i).$$

Z definice Markovova procesu však plyne, že

$$P(X_{t^*+s+t} = j | X_{t^*+s} = v, X_{t^*} = i) = P(X_{t^*+s+t} = j | X_{t^*+s} = v).$$

Přepíšeme-li pomocí pravděpodobností přechodu tento vztah, dostaneme tvrzení věty.

□

Chapman-Kolmogorova rovnost lze psát také maticově:

$$\mathbf{P}(s+t) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t), \quad s, t \geq 0.$$

### 3.2. Konečné a spočetné homogenní Markovovy procesy se spojitým časem

Homogenní Markovovy procesy se spojitým časem lze rozdělit na dva typy. V případě kdy množina stavů je konečná, tj.  $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ , mluvíme o konečném homogenním Markovově procesu se spojitým časem. Je-li množina stavů množinou spočetnou, tj.  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ , hovoříme o spočetném homogenním Markovově procesu se spojitým časem. Dále budeme předpokládat spojitost pravděpodobností přechodu zprava, tj.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} p_{ij}(\Delta t) = \delta_{ij} \text{ (když } i = j \text{ tak } 1 \text{ jinak } 0) \quad \forall i, j \in S.$$

**Věta 5** ([3]):

1.  $\forall i \in S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$  platí, že  $p_{ii}(t) > 0$ ,  $t \geq 0$
2.  $\forall i, j \in S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$  a  $i \neq j$  je buď  $p_{ij}(t) > 0$  pro  $t > 0$ , tj. dosažitelné kdykoli nebo  $p_{ij}(t) = 0$  pro  $t \geq 0$ , tj. dosažitelné nikdy.

Intenzity přechodu u homogenního Markovova procesu lze obdobně definovat jako u v definici 15 s tím rozdílem, že nezávisí na čase  $t$ .

**Věta 6:** Předpokládejme, že  $S$  je nejvýše spočetná množina. Necht'  $\mu_i > 0$ , potom doba setrvání ve stavu  $i$  (tj. doba od vstupu do  $i$  do výstupu z  $i$ ) má exponenciální rozdělení s parametrem  $\mu_i$ , tj.

$$P(X_\xi = i, \xi \in \langle t; t+h \rangle | X_t = i) = e^{-\mu_i h} \quad \forall t \geq 0, \quad \forall h > 0 \text{ a } i \in S.$$

**Důkaz:** Důkaz této věty vychází z podmíněné pravděpodobnosti a věty, která zde není ani uvedena. Proto z důvodu pracnosti je důkaz této věty vynechán. Pro zájemce viz. [3]. Vztah z uvedené věty nám říká: pravděpodobnost, že systém, který je ve stavu  $i$  již po nějakou dobu  $s$ , ve stavu  $i$  setrvá ještě alespoň po dobu  $h$ , je rovna  $e^{-\mu_i h}$ , nezávisle na  $s$ , neboli označíme-li dobu setrvání jako  $T$  (náhodná veličina  $T \sim \exp(\mu_i)$ ):

$$\begin{aligned}
P(T > s+h | T > s) &= \frac{P(T > s+h \ \& \ T > s)}{P(T > s)} = \frac{P(T > s+h)}{P(T > s)} = \frac{1-F(s+h)}{1-F(s)} = \\
&= \frac{e^{-\mu(s+h)}}{e^{-\mu s}} = \frac{e^{-\mu s} e^{-\mu h}}{e^{-\mu s}} = e^{-\mu h},
\end{aligned}$$

kde  $F$  je distribuční funkce náhodné veličiny  $T$ .

**Poznámka 7:** Intenzity přechodu u homogenního Markovova procesu lze budeme opět zapisovat do matice  $\mathbf{A}$ , jejíž prvky už nebudou záviset na čase.

Tak jak jsme v případě homogenních Markovových řetězců zaváděli stacionární (limitní) rozdělení, tak i zde si v této kapitole ono rozdělení zavedeme (budeme tento pojem využívat dále v modelech hromadné obsluhy).

**Definice 17:** Existují-li limity  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = p_j > 0$  pro  $j = 0, 1, 2, \dots$  nezávislé na počáteční rozložení pravděpodobnosti (je jedno z jakého stavu vyjdeme), nazveme je limitní (stacionární) pravděpodobnosti. Jejich souhrn nazýváme limitní (stacionární) rozložení pravděpodobnosti.

**Poznámka 8:** Řadů příkladů k této kapitole lze najít např. v literatuře [3]. K vypracování této kapitoly bylo čerpáno z literatury [3], [7], [8], [10] a [13].

## 4. Poissonův proces

Poissonův proces je speciálním typem stochastických procesů, které se mimo jiné používají v modelech hromadné obsluhy. Jedná se o takový proces, u kterého jsou změny stavů možné jen přechodem do nejbližšího stavu. V následujícím textu si popíšeme stručně problematiku Poissonova procesu.

Uvažujme nějakou událost, která se vyskytuje v krátkém čase  $(t; t + \Delta t)$  (např. počet hromů při bouřce za nějaký časový okamžik). V časovém intervalu  $(t; t + \Delta t)$  nastane právě jedna událost s pravděpodobností  $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$  a více než jedna s pravděpodobností  $o(\Delta t)$  nezávisle na  $t$  a na počtu událostí nastalých v intervalu  $(0; t)$ . Necht' náhodná veličina  $X_t$  je počet výskytu určitých událostí (např. počet hromů) v časovém intervalu  $(0; t)$ , pak  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  je spočetný Markovův proces s množinou stavů  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$  a s počátečním rozdělením  $p_0(0) = 1$  a  $p_i(0) = 0$  pro stav  $i \neq 0$ . Poissonův proces např. představuje příchody zákazníků do nějakého systému obsluhy, tok hovorů na telefonním přístroji, tok poruch zařízení atd.

Pro Poissonův proces jsou tedy charakteristické následující znaky:

1. *Nezávislost* – počet jevů připadající na určitý časový interval nezávisí na počtu jevů v libovolném jiném časovém intervalu.
2. Intenzity pravděpodobností přechodu (nezávisí na čase)

$$\mu_{ij} = \lambda \text{ pro } j = i + 1$$

$$\mu_{ij} = 0 \text{ pro } j \neq i, i + 1$$

$$\mu_{ij} = -\lambda \text{ pro } j = i$$

3. Při dostatečně malém  $\Delta t$  a konstantní hodnotě  $\lambda$  se pravděpodobnosti přechodu ze stavu  $n$  do stavu  $n + 1$  v intervalu  $(t; t + \Delta t)$  rovnají

$$p_{n,n+1}(t; t + \Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Pro pravděpodobnost setrvání ve stejném stavu v časovém intervalu  $(t; t + \Delta t)$  platí

$$p_{n,n}(t; t + \Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

Pravděpodobnost ostatních přechodů je v porovnání s předešlými zanedbatelná a je

$$\sum_{j=i+2}^{\infty} p_{ij}(t + \Delta t) = o(\Delta t).$$

Připomeňme, že funkce  $A(\Delta t)$  je řádu „malého  $\Delta t$ “, jestliže  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{A(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ , což značíme  $A(\Delta t) \sim o(\Delta t)$  a  $\Delta t$  je nějaký krátký časový úsek. Tato definice nám říká, že  $A(\Delta t)$  jde k nule rychleji než lineárně.

Matice intenzit pravděpodobnosti přechodu má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Na základě výše uvedených vlastností platí pro pravděpodobnosti  $p_n(t + \Delta t)$ , což je pravděpodobnost, že systém je v době  $(t + \Delta t)$  ve stavu  $n$ , vztahy

$$1) p_0(t + \Delta t) = [1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)] \cdot p_0(t) \text{ a}$$

$$2) p_n(t + \Delta t) = [1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)] \cdot p_n(t) + [\lambda \Delta t + o(\Delta t)] \cdot p_{n-1}(t) \text{ pro } n > 0,$$

kde  $[1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)]$  je pravděpodobnost setrvání po dobu  $\Delta t$  ve stejném stavu a  $[\lambda \Delta t + o(\Delta t)]$  je pravděpodobnost, že se ve stejném časovém intervalu ocitnu ve stavu vyšším.

Po úpravě 1) a 2) dostanu:

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot p_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \cdot p_0(t)$$

a

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot p_n(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \cdot p_n(t) + \lambda \cdot p_{n-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \cdot p_{n-1}(t)$$

Při  $\Delta t \rightarrow 0$  dostanu:

$$p_0'(t) = -\lambda \cdot p_0(t)$$

a

$$p_n'(t) = -\lambda \cdot p_n(t) + \lambda \cdot p_{n-1}(t) \text{ pro } n > 0.$$

Tyto rovnice představují rekurentní soustavu diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami  $p_0(0) = 1$  a  $p_n(0) = 0$  pro  $n > 0$ . Řešením je

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

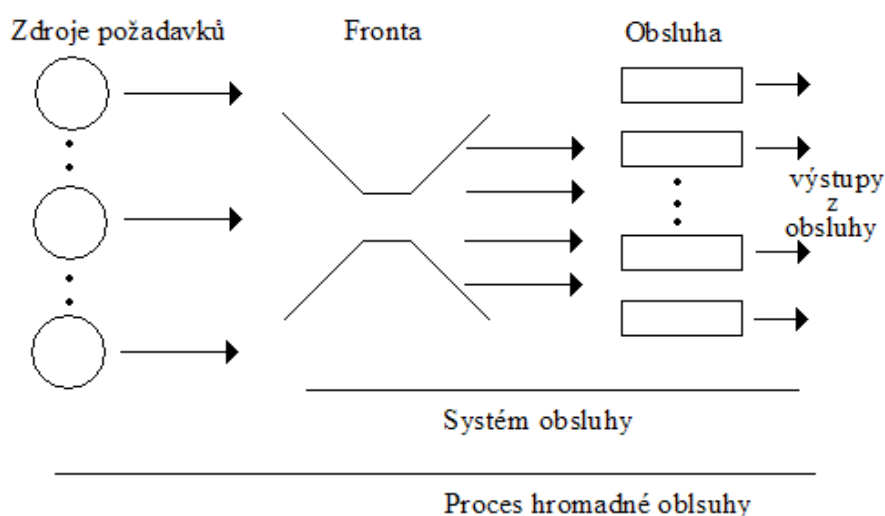
Na základě výše uvedeného postupu lze konstatovat – pravděpodobnost, že v okamžiku  $t$  se proces  $X_t$  nachází ve stavu  $n$  (tj.  $X_t = n$ ) má *Poissonovo rozdělení* s parametrem  $\lambda t$ . Lze také říci, že Poissonovo rozdělení je zde rozdělením počtu změn za dobu  $t$ . Člen  $p_0(t)$  tohoto rozdělení udává pravděpodobnost, že v období délky  $t$  nedojde ke změně.

**Poznámka 9:** V tomto případě je:  $E(X_t) = \lambda t$  a  $\text{var}(X_t) = \lambda t$ .

Zdroje pro tuto kapitolu jsou: [3], [7], [9] a [13].

## 5. Základní prvky a charakteristiky systému hromadné obsluhy

Základním problémem hromadné obsluhy je určit hlavní rysy popisovaného modelu (některé budou dané, některé budeme chtít určit). Z těchto rysů budeme následně vycházet (např. intenzita obsluhy obsluhujícího zařízení), kdežto ostatní (nepodstatné) budeme považovat pro zjednodušení za zanedbatelné (např. životnost obslužného zařízení). Úkolem je specifikovat vstupní proud požadavků, způsob a mechanismus obsluhy požadavků včetně počtu a uspořádání obsluhujících zařízení (režim obsluhy), charakter a chování ve frontě, pořadí, v jakém vstupují požadavky do obsluhy (režim fronty), způsob výstupu a charakter dob trvání obsluhy. Od okamžiku, kdy požadavek vstoupí do systému, dále pokračuje přes frontu a obsluhu až po výstup, je tento prvek součástí systému hromadné obsluhy. Systém hromadné obsluhy je možné ve zjednodušené formě znázornit následovně:



Zásadní fází modelování systému hromadné obsluhy je statistická analýza jeho jednotlivých prvků. Jedná se o získání a zpracování vhodných dat, pomocí nichž např. dovedeme popsat rozdělení intervalů mezi vstupujícími požadavky nebo rozdělení dob trvání obsluhy.

Máme-li k dispozici potřebná statistická data, můžeme dále přistoupit k popisu systému hromadné obsluhy pomocí matematického modelu. Jeho výsledkem jsou tzv.



charakteristiky systému hromadné obsluhy, např. průměrná doba čekání ve frontě, průměrná délka fronty, průměrná doba pobytu požadavku v systému, pravděpodobnost, že požadavek nebude ve frontě vůbec čekat, popř. že čekání nepřekročí určitý daný limit, vytížení a prostoje jednotlivých zařízení obsluhy, průměrný počet požadavků čekajících na obsluhu atd.

### **Vstupní proud požadavků:**

Požadavky vstupující do systému mají nejčastěji z hlediska okamžiku náhodný charakter. Délky intervalů mezi jejich příchody představují hodnoty náhodných veličin. V některých intervalech totiž přichází relativně málo a v jiných relativně hodně jednotek do systému. Nejčastější předpoklad o rozdělení četností (počtu) vstupních požadavků za určitý interval je ten, že rozdělení má tvar Poissonova rozdělení (tento předpoklad se opírá o výsledky řady testů týkajících se rozdělení uvedené náhodné veličiny; test Poissonova rozdělení viz. [5]). Mají-li počty požadavků, které vstupují do MHO během doby  $t$  Poissonovo rozdělení, pak mají doby mezi dvěma po sobě následujícími vstupujícími požadavky (chápané jako náhodné veličiny) exponenciální rozdělení. Toto tvrzení platí také obráceně. Důkaz viz. [11]. Takové systémy nazýváme *exponenciální systémy*.

Vstupní proud požadavků lze také rozdělit z hlediska jejich zdroje na *omezený* a *neomezený*. V případě požadavků neomezeného zdroje se jedná např. o vstup zákazníků do prodejny (uvažujeme-li že počet osob je „neomezeného“ počtu), v opačné situaci např. potřeba opravy výrobního stroje na jedné dílně (množství strojů na dílně je v omezeném počtu).

### **Doba trvání obsluhy:**

Časový interval obsluhy jednotlivých požadavků ovlivňuje řada náhodných vlivů. I zde lze tedy dobu obsluhy považovat za náhodnou veličinu a rozdělení dob trvání obsluhy jednoho požadavku se také obvykle řídí exponenciální rozdělením (důvod stejný jako výše).

### **Disciplína čekání ve frontě:**

První dělení systému z hlediska fronty lze rozdělit na *system bez čekání* a *system s čekáním*. V prvním případě je vstupující požadavek s ohledem na plně obsazenou obsluhu „znehucen“ čekat ve frontě a do systému ani nevstoupí. Ve druhém případě si požadavek vybírá, zda je ochoten na obsluhu trpělivě vyčkat ve frontě, nebo zda po určité době vypršení jeho trpělivosti bez obslužení opustí systém.

Systém můžeme dělit také z hlediska délky fronty na systémy *s omezenou kapacitou fronty* a *neomezenou kapacitou fronty*. Při omezené délce fronty může do systému vstoupit jen určitý maximální počet požadavků. Dosáhne-li počet požadavků tuto mez, nebude již dalším požadavkům umožněn vstup do systému. Při neomezené délce fronty jsou naopak všechny požadavky, které přicházejí do systému a jsou ochotny čekat, obslouženy.

### **Režim fronty:**

Jedná se v podstatě o pravidla, podle kterých fronta vzniká či postupuje. Nejčastěji bývá, že požadavky jsou obsluhovány v pořadí, v jakém přišly; tzv. FIFO (first in first out), např. fronta u pokladny v obchodě. Jindy jsou požadavky obslouženy v opačném pořadí, než v jakém přišly; tzv. LIFO (last in first out), např. odběr součástek z hromady. Systémy obsluhy s pevně stanoveným pořadím se označují jako systémy *s uspořádanou frontou*. Další možností je, že požadavky jsou obsluhovány v náhodném pořadí; tzv. SIRO (selection in random order), např. test jakosti. K obsluze lze také přistupovat buď s přihlédnutím k důležitosti nebo naléhavosti jejich obsluhy vyjádřených různým stupněm priority; tzv. PRI (priority), např. obsluha pacientů na pohotovosti. Režim SIRO a PRI jsou systémy *s neuspořádanou frontou*.

### **Systémy hromadné obsluhy:**

- 1) Jednakanálové – obsluha probíhá pouze v jednom zařízení (kanálu)
  - a) Neomezený počet míst ve frontě (např. silnice se semaforem, ke kterému postupně přijíždějí řidiči a řadí se za sebou do fronty)

- b) Omezený počet míst ve frontě (např. pacienti čekající na vyšetření u lékaře v čekárně, která má omezenou kapacitu za předpokladu, že pacienti nečekají nikde jinde)
- 2) Vícekanálové – lze obsluhovat několik požadavků současně
    - a) Paralelní – kanály uspořádány vedle sebe (např. pečení chleba v pekárnách, kde se peče několik bochníků najednou)
    - b) Sériové – kanály uspořádány za sebou (vícefázové systémy, nebo-li Erlangový režim obsluhy, např. výroba automobilu, jeden stroj automobil natírá, druhý montuje elektroniku)
- 3) Síť obslužných kanálů (propojení výše uvedeného)

Modely hromadné obsluhy lze obecně použít dvojím způsobem:

1. Popis funkce systému hromadné obsluhy a vyjádření různých pravděpodobnostních charakteristik, které po numerickém vyčíslení podávají řadu informací o příslušném systému. V tomto případě hovoříme o tzv. *deskriptivním modelu* (viz kapitola 6).
2. Řízení a optimalizace systému hromadné obsluhy podle jistých kritérií. V tomto případě hovoříme o tzv. *optimalizačním modelu* (viz kapitola 7).

**Poznámka 10:** Kapitola byla zpracována za pomoci literatury [1], [4], [6], [7], [9], [12] a [13].

## 6. Klasifikace modelů hromadné obsluhy

Konkrétní modely (systémy) hromadné obsluhy lze klasifikovat z různých hledisek. Nejčastěji používanými kritérii jsou charakter a typ rozdělení vstupního proudu požadavků, charakter a typ rozdělení dob obsluhy, disciplína čekání a počet míst ve frontě, režim fronty, režim a struktura obsluhy. Standardně se používá ale značení zavedené D. G. Kendalllem (např. [1]), které budeme také my zde užívat. Budeme využívat trojmístného kódu, založeném na kombinaci dvou písmen a jedné číslice v podobě  $A/B/s$ , kde

A...označuje rozdělení intervalů mezi příchody požadavků

B...označuje rozdělení dob trvání obsluhy

s...udává počet paralelních zařízení obsluhy systému

Oba symboly A, B mohou nabývat znakových hodnot:

D...deterministické rozdělení (= nepravděpodobnostní)

M...exponenciální rozdělení (Markovova typu; mající Markovovu vlastnost)

$E_k$ ...Erlangovo k-fázové rozdělení

GI...obecné nezávislé rozdělení

G...obecné rozdělení

Někdy se také i používá k značení modelů hromadné obsluhy místo třímístného kódu pětímístný kód  $A/B/s/x/y$ , kde  $x$  označuje maximální počet míst v systému a  $y$  režim fronty. Nebo také někdy  $x$  znamená počet míst ve frontě a  $y$  velikost zdroje požadavků. Je-li některý s deskriptorů  $x$  nebo  $y$  vynechán, předpokládá se, že jeho hodnota je nekonečná.

Při modelování systémů hromadné obsluhy nachází velké uplatnění Markovovy procesy se spojitým časem. U těchto procesů se předpokládá, že přechody z libovolného stavu  $S_n$  jsou pouze možné do sousedních stavů  $S_{n+1}$  a  $S_{n-1}$ . Přejít ze stavu  $S_n$  do stavu  $S_{n+1}$  znamená příchod jednoho požadavku do systému obsluhy a obdobně přechod ze stavu  $S_n$  do stavu  $S_{n-1}$  znamená výstup jednoho požadavku ze systému obsluhy.

V další části textu se budu zabývat některými nejdůležitějšími typy modelů.

## 6.1. Exponenciální modely hromadné obsluhy

V této části bude popsán konkrétní případ procesu hromadné obsluhy, kdy rozdělení náhodných vzájemně nezávislých veličin, tj. dob obsluhy a dob mezi příchody, má exponenciální charakter. V celém následujícím textu budeme používat následující značení:

$\lambda$  ... průměrná intenzita vstupu či příchodů (průměrný počet požadavků, které vstupují do systému za určitý časový interval)

$\mu$  ... průměrná intenzita obsluhy (průměrný počet požadavků obslužených za časový interval)

$\frac{1}{\lambda}$  ... průměrná délka intervalu mezi dvěma příchody

$\frac{1}{\mu}$  ... průměrná doba obsluhy.

Za předpokladu Poissonova rozdělení počtu vstupujících požadavků do systému, resp. počtu obslužených požadavků, je možno pravděpodobnost vstupu  $n$  jednotek, resp.  $n$  obslužených jednotek, v intervalu  $T = (0, t)$  vyjádřit ve tvaru

$$p_n(T) = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}, \text{ resp. } p_n(T) = \frac{(\mu T)^n}{n!} e^{-\mu T}$$

a obdobně, odpovídá-li rozdělení dob mezi příchody, resp. dob mezi obsluhou požadavků, exponenciálnímu rozdělení, pak pro hustotu rozdělení dostaneme

$$q(T) = \lambda e^{-\lambda T}, \text{ resp. } q(T) = \mu e^{-\mu T}.$$

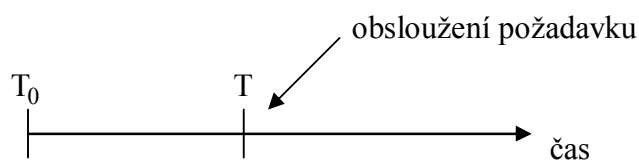
Při konstrukci modelu hromadné obsluhy je nutné testovat (např. pomocí  $\chi^2$  testů, např. [5]), zda zjištěná naměřená rozdělení dob mezi příchody, resp. dob trvání obsluhy, vyhovují předpokladu exponenciálního rozdělení, případně Poissonova rozdělení pro počet vstupujících a obslužených požadavků. My ale budeme v následujícím textu předpokládat z hlediska rozdělení, že se jedná v případě dob trvání obsluhy a dob mezi příchody požadavků o rozdělení exponenciální. Následně ukážeme alespoň blíže exponenciální rozdělení délky intervalu mezi dvěma příchody požadavků (pro doby trvání obsluhy by to bylo obdobné).

### 6.1.1. Exponenciální rozdělení dob mezi příchody požadavků

Lze-li s dostatečnou přesností hustotu pravděpodobnosti mezi dvěma příchody aproximovat exponenciální křivkou  $\lambda e^{-\lambda t}$  pro  $t \geq 0$ , kde  $\lambda > 0$  je parametr, pak to vede ke značnému zjednodušení modelů hromadné obsluhy. Toto rozdělení má střední hodnotu i směrodatnou odchylku rovnou  $\frac{1}{\lambda}$ .

Dále předpokládejme, že náhodná proměnná  $X$  je délka intervalu mezi dvěma příchody.

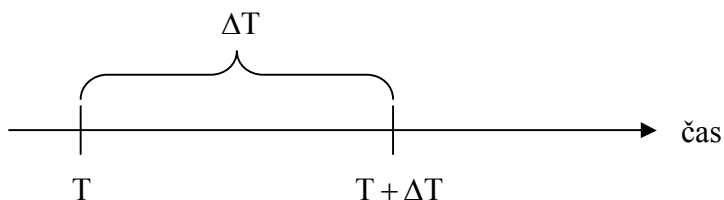
**Příklad 3:** Označme dobu  $T_0 = 0$  jako začátek uvažovaného systému (MHO). Chceme určit pravděpodobnost, že první požadavek do systému vstoupí až po uplynutí doby  $T$  (viz. následující obrázek).



$P(X \geq T)$  ... tuto pravděpodobnost chceme určit

$$P(X \geq T) = \int_T^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_T^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda k} - \left( -\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda T} \right] = [0 - e^{-\lambda T}] = e^{-\lambda T}.$$

**Příklad 4:** Určit pravděpodobnost, že požadavek nevstoupí do systému během časového intervalu  $\Delta T$  za podmínky, že do něj nevstoupil do doby  $T$ .



$$P(X \geq T + \Delta T / X > T) = \frac{P(X \geq T + \Delta T)}{P(X > T)} = \frac{\int_{T+\Delta T}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_T^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{e^{-\lambda(T+\Delta T)}}{e^{-\lambda T}} = e^{-\lambda \Delta T}.$$

Z předchozího příkladu tedy plyne, že „exponenciální rozdělení nemá paměť“, tzn. že pravděpodobnost obslužení nezávisí na počátečním čase  $T$ .

Nyní odvodíme dle Taylorova rozvoje a na základě předchozího příkladu následující pravděpodobnosti:

$$e^{-\lambda \Delta T} = 1 - \lambda \Delta T + o(\Delta T),$$

kde  $o(\Delta T)$  zanedbáme. Výsledná hodnota  $1 - \lambda \Delta T$  je pravděpodobnost, že během intervalu  $\Delta T$  nevstoupí do systému žádný požadavek. Obdobně lze určit i následující pravděpodobnosti:

$1 - \mu \Delta T$  ...pravděpodobnost, během  $\Delta T$  není v systému obslužen žádný požadavek.

$\lambda \Delta T$  ...pravděpodobnost, že během intervalu  $\Delta T$  vstoupí do systému právě jeden požadavek

$\mu \Delta T$  ...pravděpodobnost, že během intervalu  $\Delta T$  bude obslužen právě jeden požadavek.

## 6.2. Exponenciální model jednoduché obsluhy M/M/1

Jde o nejjednodušší případ exponenciálního modelu:

- jeden obslužný kanál (obslužné zařízení), tj.  $s = 1$
- intervaly mezi příchody požadavků i dob obsluhy mají exponenciální rozdělení
- velikost fronty není omezena
- otevřený systém, tj. zdroj požadavků je neomezený
- velikost fronty není omezena
- všechny požadavky trpělivě čekají ve frontě na obsluhu, i když nedostačuje kapacita obslužného zařízení
- FIFO

Označme  $S_n$  stav, kdy v systému (ve frontě a obsluze) je právě  $n$  jednotek. Připomeňme dále, že stav systému v libovolném časovém okamžiku  $t$ , který je určen číslem  $n$ , udávajícím počet jednotek v systému, nezávisí kromě stavu předcházejícího na žádném z předešlých stavů, tudíž že proces hromadné obsluhy má charakter Markovova procesu. Pravděpodobnost, že v okamžiku  $t$  je v systému právě  $n$  jednotek označme  $p_n(t)$ . Nechť  $\Delta t$  je velmi malý časový interval. Potom stejně, jak tomu bylo v kapitole 6.1.1., je pravděpodobnost vstupu jednoho požadavku  $\lambda\Delta t$  a  $\mu\Delta t$  pravděpodobnost obsluhy jednotky během intervalu délky  $\Delta t$ .

Stav  $S_n$  může během časového intervalu  $\Delta t$  přejít do stavu  $S_{n+k}$ . Protože je ale okamžik  $\Delta t$  velmi malý, přechody mohou existovat jen mezi sousedními stavy, tj. nenulové pravděpodobnosti mohou být pouze u přechodů  $S_n \rightarrow S_{n-1}$ ,  $S_n \rightarrow S_{n+1}$  a  $S_n \rightarrow S_n$ . Jednotlivé pravděpodobnosti změn stavu v systému M/M/1 jsou v následujícím schématu:

Změna stavu	Pravděpodobnosti přechodu
$S_0 \rightarrow S_0$	$1 - \lambda\Delta t$
$S_0 \rightarrow S_1$	$\lambda\Delta t$
$S_n \rightarrow S_n \quad n \geq 1$	$1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t$
$S_n \rightarrow S_{n-1} \quad n \geq 1$	$\mu\Delta t$
$S_n \rightarrow S_{n+1} \quad n \geq 1$	$\lambda\Delta t$

### Vysvětlení:

1.  $S_0 \rightarrow S_0$  Žádná jednotka nevstupuje.

V systému se nenachází žádná jednotka a po uplynutí doby  $\Delta t$  tam také žádná jednotka není. Takovéto situace lze dosáhnout jen tehdy, když do systému žádná jednotka nevstoupí, tj. s pravděpodobností  $1 - \lambda\Delta t$ .

2.  $S_0 \rightarrow S_1$  Vstupuje jedna jednotka.

V systému se nenachází žádná jednotka, ale po uplynutí doby  $\Delta t$  bude v systému jedna jednotka. Stav  $S_1$  lze z nulového stavu dosáhnout jedině tak, že do systému vstoupí jedna jednotka, tj. s pravděpodobností  $\lambda\Delta t$ .



3.  $S_n \rightarrow S_n$  Jedna jednotka vstoupí a jedna je obsloužena, nebo se nic nestane.

Výsledná pravděpodobnost je součtem obou dílčích pravděpodobností:

$(1 - \lambda\Delta t)(1 - \mu\Delta t) + \lambda\Delta t\mu\Delta t = 1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t + \lambda\mu(\Delta t)^2 + \lambda\mu(\Delta t)^2$ , kde  $\lambda\mu(\Delta t)^2$  zanedbáme.

4.  $S_n \rightarrow S_{n-1}$  Jedna jednotka je obsloužena a žádná nevstoupí.

$$(1 - \lambda\Delta t)\mu\Delta t = \mu\Delta t - \lambda\mu(\Delta t)^2 = \mu\Delta t$$

5.  $S_n \rightarrow S_{n+1}$  Jedna jednotka vstupuje a žádná není obsloužena.

$$(1 - \mu\Delta t)\lambda\Delta t = \lambda\Delta t - \lambda\mu(\Delta t)^2 = \lambda\Delta t$$

Matice pravděpodobnosti přechodu  $\mathbf{P}$  se stavy  $S = (0, 1, 2, \dots)$  má nekonečně mnoho řádků a sloupců:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda\Delta t & \lambda\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu\Delta t & 1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t & \lambda\Delta t & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu\Delta t & 1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t & \lambda\Delta t & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu\Delta t & 1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t & \lambda\Delta t & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

### Rovnice systému M/M/1

Připomeňme, že  $p_n(t)$  označuje pravděpodobnost, že v okamžiku  $t$  je v systému právě  $n$  jednotek. Jako  $p_n(t + \Delta t)$  označíme pravděpodobnost, že v systému je  $n$  jednotek v okamžiku  $t + \Delta t$ . Tyto pravděpodobnosti  $p_n(t + \Delta t)$  spočteme pomocí Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnice:

$$\mathbf{p}(t + \Delta t) = \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{P},$$

kde  $\mathbf{p}(t + \Delta t)$  a  $\mathbf{p}(t)$  jsou řádkové vektory, obsahující pravděpodobnosti  $p_n(t + \Delta t)$  a  $p_n(t)$  pro  $n = 0, 1, 2, \dots$  (vektory absolutních pravděpodobností) a  $\mathbf{P}$  je matice pravděpodobností přechodu.

Maticové rovnice  $\mathbf{p}(t + \Delta t) = \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{P}$  si lze následně rozepsat:

$$\begin{aligned}
p_0(t + \Delta t) &= p_0(t)(1 - \lambda\Delta t) + p_1(t)\mu\Delta t \\
p_1(t + \Delta t) &= p_0(t)\lambda\Delta t + p_1(t)(1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t) + p_2(t)\mu\Delta t \\
p_2(t + \Delta t) &= p_1(t)\lambda\Delta t + p_2(t)(1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t) + p_3(t)\mu\Delta t \\
&\dots\dots\dots \\
p_n(t + \Delta t) &= p_{n-1}(t)\lambda\Delta t + p_n(t)(1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t) + p_{n+1}(t)\mu\Delta t \\
&\dots\dots\dots \\
&\text{atd.}
\end{aligned}$$

První rovnici soustavy nekonečně mnoha rovnic upravíme na tvar:

$$\begin{aligned}
p_0(t + \Delta t) &= p_0(t) - \lambda p_0(t)\Delta t + p_1(t)\mu\Delta t \\
p_0(t + \Delta t) - p_0(t) &= -\lambda p_0(t)\Delta t + p_1(t)\mu\Delta t / \div \Delta t \\
\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)
\end{aligned}$$

a přejdeme-li k limitě  $\Delta t \rightarrow 0$  dostaneme diferenciální rovnici

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t). \quad (1)$$

Podobně se upravují také zbývající rovnice pro  $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
p_n(t + \Delta t) &= \lambda p_{n-1}(t)\Delta t + p_n(t) - \lambda p_n(t)\Delta t - \mu p_n(t)\Delta t + \mu p_{n+1}(t)\Delta t \\
\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} &= \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t)
\end{aligned}$$

Přechodem k limitě pro  $\Delta t \rightarrow 0$  dostáváme diferenciální rovnice

$$p'_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t) \text{ pro } n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

K takto odvozené soustavě nekonečně mnoha diferenciálních rovnic pro  $n = 0, 1, 2, \dots$  připojíme normovací podmínku

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1.$$

Integrovaní této soustavy je sice možné, ale je spojeno jistými výpočtovými obtížemi. Její řešení se zjednoduší, když se systém stabilizuje a nemění své vlastnosti v průběhu času, tj. pravděpodobnost stavů  $p_n(t)$  nezávisí na čase  $t$ . Také v praxi se většinou spokojujeme s tím, že hledáme řešení pro v čase stabilizovaný systém hromadné obsluhy. Podmínkou stabilizace zkoumaného systému je platnost vztahu  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = p_n$  pro  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

přičemž alespoň jeden z výrazů  $p_n$  je různý od nuly. V podstatě se jedná o stacionární (limitní) rozdělení Markovova procesu probírané v předchozích kapitolách. Ze soustavy diferenciálních rovnic (1) a (2) se na základě této podmínky stane soustava algebraických rovnic:

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \quad (3)$$

$$(\lambda + \mu) p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$p_0 + p_1 + \dots + p_n + \dots = 1.$$

Rozepsáním rovnic (3) a (4) dostaneme vztahy

$$p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0, \quad p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0, \quad \dots, \quad p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \quad \dots$$

a dosadíme-li do normovací podmínky postupně  $p_1, p_2, \dots$  (pravděpodobnost  $p_0$  převedeme na pravou stranu a vytkneme  $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ ):

$$p_0 \left[ \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \dots \right] = 1 - p_0$$

nebo

$$1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n.$$

Označme dále pro zjednodušení podíl  $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$  a předpokládejme, že  $\lambda < \mu$  (vyplývá z nerovnosti  $\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| < 1$ , tj. podmínka stabilizace). Pak  $p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$  je nekonečná geometrická řada

s kvocientem  $\rho$ , která konverguje a má součet  $\frac{p_0}{1-\rho}$ . Takže

$$p_0 = 1 - \rho.$$

Z tohoto vztahu a rozepsaných rovnic (3) a (4) dostaneme zbývající pravděpodobnosti

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$ :

$$p_1 = (1-\rho)\rho, \quad p_2 = (1-\rho)\rho^2, \quad p_3 = (1-\rho)\rho^3, \quad \dots, \quad p_n = (1-\rho)\rho^n, \quad \dots$$

**Definice 18:** Necht' systém hromadné obsluhy M/M/1 má intenzitu vstupu  $\lambda$  a intenzitu obsluhy  $\mu$ . Potom podíl

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

nazýváme *intenzitou provozu* systému hromadné obsluhy typu M/M/1.

**Věta 7:** Necht' systém hromadné obsluhy M/M/1 má intenzitu vstupu  $\lambda$  a intenzitu obsluhy  $\mu$ . Necht' intenzita provozu systému je dána  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  a platí  $\rho < 1$ , tj.  $\lambda < \mu$ . Potom počet jednotek ve stabilizovaném systému má *geometrické rozdělení* pravděpodobnosti:

$$p_0 = 1 - \rho$$
$$p_n = (1 - \rho)\rho^n \text{ pro } n = 1, 2, \dots$$

**Důkaz:** viz. výše.

**Poznámka 11:** Intenzita provozu  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  vyjadřuje vytíženost obslužného kanálu a pro zajištění systému musí být menší než 1, tzn. že kanál obsluhy musí mít vždy nějakou rezervu. Pokud by  $\rho = 1$ , tj. obsluha by byla využita na 100%, musel by být v každém okamžiku v systému alespoň jeden požadavek. V praktických aplikacích se nedoporučuje intenzita provozu větší než 0,8. Pro vysoké hodnoty intenzity provozu se výrazně zvyšuje doba, pro kterou musí požadavek čekat ve frontě a samozřejmě také délka fronty.

Z předchozích vztahů lze odvodit základní charakteristiky systému M/M/1 používané k posouzení efektivnosti systému jak z hlediska obsluhovaných požadavků, tak z hlediska využití obslužných zařízení. Z těchto charakteristik se jedná zejména o průměrný počet požadavků v systému, průměrný počet požadavků ve frontě, průměrná doba čekání v systému, průměrná doba čekání ve frontě apod.

### Průměrný počet požadavků v systému

Mějme náhodnou veličinu  $N$ , která představuje počet požadavků (jednotek) v systému. Pak pro její střední hodnotu platí

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \sum_{n=0}^{\infty} np_n = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = (1-\rho)\rho(1+2\rho+3\rho^2+\dots) = \otimes \\ (1+2\rho+3\rho^2+\dots) &= \left[ \int_0^{\rho} (1+2\bar{\rho}+3\bar{\rho}^2+\dots) d\bar{\rho} \right]' = (\rho+\rho^2+\rho^3+\dots)' = \left( \frac{\rho}{1-\rho} \right)' = \frac{1}{(1-\rho)^2} \\ \otimes &= (1-\rho)\rho \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.\end{aligned}$$

Dosadíme-li za  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ , dostaneme  $\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ .

Zbylé charakteristiky spočítám na základě Littleových vztahů (viz. např. literatura[9]):

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \bar{T}\lambda \\ \bar{N}_f &= \bar{T}_f\lambda \\ \bar{T} &= \bar{T}_f + \frac{1}{\mu},\end{aligned}$$

kde  $\bar{T}$  je průměrná doba setrvání jednotky v systému,  $\bar{T}_f$  je průměrná doba jednotky ve frontě a  $\bar{N}_f$  je průměrný počet požadavků ve frontě.

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \\ \bar{T}_f &= \bar{T} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \\ \bar{N}_f &= \bar{T}_f\lambda = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}.\end{aligned}$$

**Příklad 5:** Uvažujme jednosměrnou silnici, na které je umístěn kvůli bezpečnosti přes vozovku zpomalovací práh (nazvěme křižovatkou). Předpokládejme, že:

- zpomalovací práh je schopen obsloužit v během hodiny cca 450 automobilů (počet automobilů, které projedou průměrnou rychlostí přes zpomalovací práh) a doba mezi dvěma příjezdy automobilů je 12 sekund.

b) doba mezi dvěma příjezdy automobilů se zvětší na 20 sekund

Úkolem je určit  $N$ ,  $\bar{N}_f$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{T}_f$ ,  $p_0$  a  $\rho$ .

a) Ze zadání plyne, že  $\mu = 450$  a po převodu ze sekund na hodiny a na počty auto je  $\lambda = 300$ . Nejdříve je nutné ověřit, zda  $\rho < 1$ .

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{300}{450} = \frac{2}{3} < 1 \dots \text{vytíženost systému (křižovatky)}$$

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{2/3}{1/3} = 2 \dots \text{průměrně počet jednotek (automobily) v systému}$$

$$\bar{T} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{450 - 300} = \frac{1}{150} \dots \text{automobil je průměrně 24 sekund v systému}$$

$$\bar{T}_f = \bar{T} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{150} - \frac{1}{450} = \frac{1}{225} \dots \text{automobil čeká průměrně 18 sekund ve frontě}$$

$$\bar{N}_f = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{300^2}{450(450 - 300)} = \frac{4}{3} \dots \text{ve frontě čeká průměrně 1 automobil}$$

$p_0 = 1 - \rho = 1 - 2/3 = 1/3 \dots$ pravděpodobnost, že bude automobil obslužen bez čekání.

b)  $\mu = 450$ ,  $\lambda = 180$ ,  $\rho = \frac{180}{450} = 0,4 < 1$ ,  $\bar{N} = 0,67$  (0 až 1 automobil),  $\bar{T} \doteq 13$  sekund,

$\bar{T}_f \doteq 5$  sekund,  $\bar{N}_f = 0,27$  (spíše 0 automobilů) a  $p_0 = 0,6$ .

### 6.3. Exponenciální model s paralelní obsluhou M/M/m

Tento případ se v praxi vyskytuje častěji:

- m paralelně uspořádaných homogenních (stejnorodých) obslužných kanálů, z nichž každý má intenzitu obsluhy  $\mu$
- jedná se o otevřený systém, tzn. zdroj požadavků je neomezený
- velikost fronty není omezena
- všechny požadavky trpělivě ve frontě čekají na obsluhu, i když nedostačuje kapacita obslužného kanálu; požadavky vstupují do systému s konstantní intenzitou  $\lambda$

- FIFO

Intenzity vstupu jsou konstantní pro všechna  $n$ , zatímco intenzity obsluhy požadavků  $\mu$  nikoliv. Pokud je tento systém hromadné obsluhy ve stavech  $S_0, \dots, S_m$ , tzn., že je v něm  $n = 0, 1, \dots, m$  požadavků, pak  $\mu_n$  závisí na počtu požadavků v systému hromadné obsluhy, a pokud je v něm požadavků více než  $m$ , pak už zůstává intenzita obsluhy konstantní a všechna zařízení obsluhují, tj. platí

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$\mu_n = n\mu, \quad n = 0, 1, \dots, m \text{ a}$$

$$\mu_n = m\mu, \quad n = m + 1, m + 2, \dots$$

Fronta se v systému začne vytvářet až tehdy, pokud do systému vstoupí  $(m+1)$ -ní požadavek. Podmínka stabilizace systému hromadné obsluhy má nyní tvar  $\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$ , tj.

intenzita vstupu musí být menší než intenzita obsluhy všech zařízení.

Matice pravděpodobností přechodu bude mít tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\lambda\Delta t & \lambda\Delta t & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \mu\Delta t & 1-(\lambda+\mu)\Delta t & \lambda\Delta t & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu\Delta t & 1-(\lambda+2\mu)\Delta t & \dots & 0 & 0 & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-[\lambda+(m-1)\mu]\Delta t & \lambda\Delta t & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m\mu\Delta t & 1-(\lambda+m\mu)\Delta t & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m\mu\Delta t & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & & & \dots \end{pmatrix}$$

Stejně jako v případě systému hromadné obsluhy modelu M/M/1 platí

$$\mathbf{p}(t + \Delta t) = \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{P},$$

kde  $\mathbf{p}(t) = [p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t), \dots]$ . Rozepsáním tohoto vztahu dostaneme

$$p_0(t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)p_0(t) + \mu\Delta t p_1(t),$$

$$p_n(t + \Delta t) = \lambda\Delta t p_{n-1}(t) + [1 - (\lambda + n\mu)\Delta t]p_n(t) + (n + 1)\mu\Delta t p_{n+1}(t), \quad 1 \leq n < m \text{ a}$$

$$p_n(t + \Delta t) = \lambda\Delta t p_{n-1}(t) + [1 - (\lambda + m\mu)\Delta t]p_n(t) + m\mu\Delta t p_{n+1}(t), \quad n \geq m.$$

Po vydělení těchto rovnic  $\Delta t$  a po přechodu k limitě pro  $\Delta t \rightarrow 0$  pak platí

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t), \quad 1 \leq n < m \text{ a}$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + m\mu) p_n(t) + m\mu p_{n+1}(t), \quad n \geq m.$$

Dostaneme tak soustavu homogenních lineárních diferenciálních rovnic pravděpodobností  $p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t), \dots$ . Za předpokladu stabilizace zkoumaného systému  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = p_n$  pro  $n = 0, 1, \dots$  můžeme soustavu psát ve tvaru:

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$(\lambda + n\mu) p_n = \lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1}, \quad 1 \leq n < m$$

$$(\lambda + m\mu) p_n = \lambda p_{n-1} + m\mu p_{n+1}, \quad n \geq m.$$

Veličiny  $p_n$  lze ze soustavy stanovit postupným dosazováním a dostaneme

$$p_n = p_0 \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n = p_0 \frac{(m\rho)^n}{n!}, \quad 1 \leq n < m$$

$$p_n = p_0 \frac{\rho^n m^m}{m!} = p_0 \frac{1}{m! m^{n-m}} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n, \quad n \geq m.$$

Veličinu  $p_0$  získáme opět z podmínky  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ , tj.

$$\sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{m! m^{n-m}} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 = 1.$$

Druhou sumu upravíme

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{m! m^{n-m}} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 &= \frac{p_0}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{m^{n-m}} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \frac{p_0}{m!} \left[ \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^m + \frac{1}{m} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{m+1} + \frac{1}{m^2} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{m+2} + \dots \right] = \\ &= \frac{p_0}{m!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^m \left[ 1 + \frac{1}{m} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) + \frac{1}{m^2} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + \dots \right] = \otimes \end{aligned}$$



V hranaté závorce je nekonečná geometrická řada s kvocientem  $\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$  a  $a_1 = 1$ , za pod-

mínky, že  $\left| \frac{\lambda}{m\mu} \right| = \left| \frac{\rho}{m} \right| < 1$  (podmínka stability).

$$\otimes = \frac{p_0}{m!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{m\mu}} = \frac{p_0}{m!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{m\mu}{m\mu - \lambda} = \frac{p_0}{(m-1)!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{\mu}{m\mu - \lambda}$$

Dosadíme-li tedy znovu po předchozí úpravě do podmínky  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ , dostaneme pro  $p_0$

tvar

$$p_0 = \left[ \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{\mu}{m\mu - \lambda} \right]^{-1} = \left[ \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} \right]^{-1}.$$

Nyní stanovíme některé základní charakteristiky systému M/M/m.

Pro průměrnou nevytíženost (nevyžitost) systému  $\bar{M}$  pro  $m > n$  platí

$$\bar{M} = \sum_{n=0}^{m-1} (m-n) p_n = \sum_{n=0}^{m-1} (m-n) \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0,$$

průměrná vytíženost (vyžitost) systému

$$\bar{U} = m - \bar{M} = m - \sum_{n=0}^{m-1} (m-n) \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0,$$

průměrný počet jednotek ve frontě

$$\begin{aligned} \bar{N}_f &= \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-m) p_n = \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-m) \frac{1}{m! m^{n-m}} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 = \\ &= \frac{p_0}{m!} \left[ \frac{1}{m} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{m+1} + \frac{2}{m^2} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{m+2} + \frac{3}{m^3} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{m+3} + \dots \right] = \frac{p_0}{m!} \frac{1}{m} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{m+1} \left[ 1 + 2 \left( \frac{\lambda}{m\mu} \right)^1 + 3 \left( \frac{\lambda}{m\mu} \right)^2 + \dots \right] = \end{aligned}$$

$$\text{substituce } t = \frac{\lambda}{m\mu}, \text{ kde } \left| \frac{\lambda}{m\mu} \right| < 1$$

$$= \frac{p_0}{m!} \frac{1}{m} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{m+1} [1 + 2t + 3t^2 + \dots] = \otimes$$

$$\left[ \int_0^t (1 + 2\bar{t} + 3\bar{t}^2 + \dots) d\bar{t} \right]' = (t + t^2 + t^3 + \dots)' = \left( \frac{t}{1-t} \right)' = \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{m\mu}\right)^2}$$

$$\otimes = \frac{p_0}{m!m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{m\mu}\right)^2} = \frac{p_0}{(m-1)!m^2} \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{m^2\mu^2}{(m\mu - \lambda)^2} = \frac{p_0}{(m-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{\lambda\mu}{(m\mu - \lambda)^2}.$$

Zbylé charakteristiky určíme z Littleových vztahů

$$\bar{T}_f = \frac{\bar{N}_f}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{p_0}{(m-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{\lambda\mu}{(m\mu - \lambda)^2} = \frac{p_0}{(m-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{\mu}{(m\mu - \lambda)^2},$$

$$\bar{T} = \bar{T}_f + \frac{1}{\mu}$$

a

$$\bar{N} = \lambda \bar{T} = \lambda \left( \bar{T}_f + \frac{1}{\mu} \right).$$

**Příklad 6:** V počítačové učebně, do které přicházejí náhodně studenti, je 10 počítačů. Za hodinu přijde 12 studentů. Doba práce každého studenta je v průměru 45 minut. Je-li počítač obsazen, student čeká, než se nějaký uvolní. Určete:

- pravděpodobnost, že všechny počítače pracují
- průměrný počet obsazených počítačů

$$\frac{1}{\mu} = 45 \Rightarrow \mu = \frac{1}{45}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{60}{12} = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}, \quad m = 10, \quad \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{45} \cdot 10} = \frac{9}{10} < 1 \dots \text{tj. podmínka}$$

stabilizace je splněna

ad a)

$$p_{10} + p_{11} + p_{12} + \dots = \sum_{n=10}^{\infty} p_n = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{m!m^{n-m}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = 1 - \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = 0,668$$

kde např.  $p_{11}$  je pravděpodobnost, že v systému pracuje 10 studentů a 1 čeká a

$$p_0 = \left[ \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{\mu}{m\mu - \lambda} \right]^{-1} \doteq 6,96 \cdot 10^{-5}$$

n	1	2	3	4	5
$p_n$	$6,26 \cdot 10^{-4}$	$28,19 \cdot 10^{-4}$	$84,56 \cdot 10^{-4}$	$19,03 \cdot 10^{-3}$	$34,25 \cdot 10^{-3}$
n	6	7	8	9	
$p_n$	$51,37 \cdot 10^{-3}$	$66,05 \cdot 10^{-3}$	$74,31 \cdot 10^{-3}$	$74,31 \cdot 10^{-3}$	

ad b)

$$\text{průměrná nevytíženost } \bar{M} = \sum_{n=0}^9 (10-n)p_n = \sum_{n=0}^{10} (m-n) \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 \doteq 1$$

n	0	1	2	3	4
$(10-n)p_n$	$6,96 \cdot 10^{-4}$	$56,37 \cdot 10^{-4}$	$22,55 \cdot 10^{-3}$	$59,19 \cdot 10^{-3}$	0,114
n	5	6	7	8	9
$(10-n)p_n$	0,171	0,205	0,198	0,149	0,074

$$\text{tj. průměrná vytíženost je } \bar{U} = m - \bar{M} = m - \sum_{n=0}^{m-1} (m-n) \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 = 10 - 1 = 9$$

#### 6.4. Exponenciální model jednoduché obsluhy s omezenou kapacitou M/M/1/k

Tento model je speciálním případem modelu M/M/1, kde nebyla kapacita systému hromadné obsluhy omezena. V tomto případě se jedná o *systém se ztrátami*, neboť je-li systém plně obsazen (tj. v tomto případě je 1 požadavek obsluhován a  $(k-1)$  požadavků čeká ve frontě), není možný vstup dalších požadavků do tohoto systému.

Vlastnosti modelu M/M/1/k

- $s = 1$ , tj. jeden obslužný kanál
- otevřený systém
- ve frontě může být maximálně  $(k-1)$  požadavků
- všechny požadavky trpělivě čekají ve frontě na obsluhu, i když nedostačuje kapacita obsluhy

- FIFO

Pro stacionární pravděpodobnosti platí

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, \quad n \leq k$$

$$p_n = 0, \quad n > k.$$

Stacionární pravděpodobnost  $p_0$  určíme z podmínky  $\sum_{n=0}^k p_n = 1$ . Dále opět označíme  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

( $\rho$  nemusí být v tomto případě menší než 1).

$$\sum_{n=0}^k p_n = \sum_{n=0}^k p_0 \rho^n = p_0 (\rho^0 + \rho^1 + \rho^2 + \dots + \rho^k) = p_0 \frac{1 - \rho^{k+1}}{1 - \rho} = 1$$

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}}, \quad \rho \neq 1$$

$$p_0 = \frac{1}{k+1}, \quad \rho = 1.$$

Základní charakteristiky modelu M/M/1/k:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_{n=0}^k n p_n = \sum_{n=0}^k n \rho^n \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} \sum_{n=0}^k n \rho^n = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} (0 + 1\rho + 2\rho^2 + \dots + k\rho^k) = \\ &= \frac{(1 - \rho)\rho}{1 - \rho^{k+1}} (1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots + k\rho^{k-1}) = \otimes \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^\rho (1 + 2\bar{\rho} + 3\bar{\rho}^2 + \dots + k\bar{\rho}^{k-1}) d\bar{\rho} \right]' &= [1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k]' = \left[ \frac{1 - \rho^{k+1}}{1 - \rho} \right]' = \\ &= \frac{-(k+1)\rho^k (1 - \rho) - (1 - \rho^{k+1})(-1)}{(1 - \rho)^2} = \frac{-k\rho^k - \rho^k + k\rho^{k+1} + \rho^{k+1} + 1 - \rho^{k+1}}{(1 - \rho)^2} = \frac{1 - \rho^k (k+1) + k\rho^{k+1}}{(1 - \rho)^2} \end{aligned}$$

$$\otimes = \frac{\rho(1 - \rho^k (k+1) + k\rho^{k+1})}{(1 - \rho)(1 - \rho^{k+1})}, \quad \rho \neq 1$$

a

$$\bar{N} = \sum_{n=0}^k n p_n = \sum_{n=0}^k n \rho^n \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} (1 + 2 + \dots + k) = \frac{1}{k+1} \frac{(1+k)k}{2} = \frac{k}{2}, \quad \rho = 1.$$

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{\bar{N}}{\lambda^*} = \frac{\bar{N}}{\lambda(1-p_k)} = \frac{1}{\lambda \left(1 - \rho^k \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}\right)} \frac{\rho(1-\rho^k(k+1) + k\rho^{k+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{k+1})} = \\ &= \frac{1}{\lambda \frac{1-\rho^{k+1}-\rho^k+\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}} \frac{\rho(1-\rho^k(k+1) + k\rho^{k+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{k+1})} = \frac{\rho(1-\rho^k(k+1) + k\rho^{k+1})}{\lambda(1-\rho)(1-\rho^k)}, \rho \neq 1\end{aligned}$$

a

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda^*} = \frac{\bar{N}}{\lambda(1-p_k)} = \frac{\frac{k}{2}}{\lambda \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)} = \frac{k(k+1)}{2\lambda(k+1-1)} = \frac{k+1}{2\lambda}, \rho = 1,$$

kde  $\lambda^*$  je průměrný počet požadavků, které skutečně vstoupí do systému.

$$\bar{T}_f = \bar{T} - \frac{1}{\mu} \text{ a } \bar{N}_f = \bar{T}_f \lambda^*.$$

Průměrná vytíženost systému:

$$\begin{aligned}1-p_0 &= 1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} = \frac{1-\rho^{k+1}-1+\rho}{1-\rho^{k+1}} = \frac{\rho(1-\rho^k)}{1-\rho^{k+1}}, \rho \neq 1 \\ 1-p_0 &= 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}, \rho = 1.\end{aligned}$$

**Příklad 7 (viz. příklad 5):** Uvažujme jednosměrnou silnici, na které je umístěn kvůli bezpečnosti přes vozovku zpomalovací práh (nazvěme křižovatkou). Předpokládejme, že zpomalovací práh je schopen obsloužit během hodiny celkem 450 automobilů počet automobilů, které projedou přiměřenou rychlostí přes zpomalovací práh), doba mezi dvěma příjezdy automobilů ke zpomalovacímu prahu je 12 sekund a celkem v tomto systému může být 10 automobilů (11. automobil a další po něm následující automobily již nemohou do systému vstoupit, dokud se neuvolní místo).

$$k = 10, \lambda = 300, \mu = 450, \rho = 2/3 \neq 1,$$

$$p_0 = \frac{1-2/3}{1-(2/3)^{11}} \doteq 0,34, \quad 1-p_0 = 0,66, \quad p_k = (300/450)^{10} 0,34 \doteq 5,9 \cdot 10^{-3},$$

$$\bar{T} = \frac{2/3(1-2/3^{10} \cdot 11 + 10 \cdot 2/3^{11})}{300(1-2/3)(1-2/3^{10})} \doteq 23 \text{ sekund}, \quad \bar{T}_f = 23 - 8 = 15 \text{ sekund},$$

$$\bar{N} = \frac{2/3(1-2/3^{10} \cdot 11 + 10 \cdot 2/3^{11})}{(1-2/3)(1-2/3^{11})} \doteq 2 \dots \text{tj. průměrně 2 automobily jsou v systému a}$$

$$\bar{N}_f = \frac{1}{12}(1 - 5,9 \cdot 10^{-3})15 \doteq 1 \dots \text{tj. průměrně 1 automobil je ve frontě.}$$

Porovnáme-li tento příklad s příkladem 5 částí a), můžeme vidět, že pravděpodobnost obsluhy automobilu bez čekání se zvýšila, průměrná doba automobilu v systému a průměrná doba automobilu ve frontě se snížila a počty automobilů zůstaly stejné.

## 6.5. Exponenciální systém vícenásobné obsluhy s omezenou kapacitou M/M/m/k

I zde se jedná jako v předchozím modelu o *systém se ztrátami*. Vlastnosti tohoto modelu jsou podobné modelu M/M/m:

- m paralelně řazených homogenních obslužných zařízení, kde každé má intenzitu obsluhy  $\mu$
- v systému může být maximálně k požadavků a maximálně zbývajících  $k - m$  požadavků je ve frontě
- otevřený systém
- požadavky trpělivě čekají ve frontě, i když nedostačuje kapacita obsluhy
- FIFO

Intenzity vstupu  $\lambda$  jsou konstantní pro všechna  $n < k$  a pro  $n \geq k$  je nulová, protože požadavky do systému nemohou dále vstupovat. Intenzita obsluhy  $\mu$  je podobně jako u M/M/m proměnná. Tyto intenzity vyjádříme takto:

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, \dots, k-1,$$

$$\lambda_n = 0, \quad n = k, k+1, \dots,$$

$$\mu_n = n\mu, \quad n = 0, 1, \dots, m \text{ a}$$

$$\mu_n = m\mu, n = m + 1, m + 2, \dots$$

Stacionární pravděpodobnosti  $p_n$  za předpokladu  $\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$  budou mít tvar:

$$p_n = p_0 \frac{(m\rho)^n}{n!}, 1 \leq n < m,$$

$$p_n = p_0 \frac{\rho^n m^m}{m!}, m \leq n \leq k \text{ a}$$

$$p_0 = \left[ \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \sum_{n=m}^k \frac{m^m \rho^n}{m!} \right]^{-1}.$$

**Poznámka 12:** Speciálním případem modelu M/M/m/k je situace, když  $m = k$ , tj. v systému není čekání vůbec přípustné. V této situaci udává  $p_m$  pravděpodobnost, že je v systému hromadné obsluhy právě  $m$  požadavků, ale také pravděpodobnost, že vstupující požadavek nebude z kapacitních omezení obslužen. Příslušný vzorec

$$p_m = p_0 (\lambda/\mu)^m (1/m!)$$

bývá v literatuře označován jako tzv. *Erlangův vzorec ztrát*.

Základní charakteristiky systému mají podobu:

$$\bar{N}_f = p_0 \frac{m^m \rho^{m+1}}{m!(1-\rho)^2} \left[ 1 - \rho^{k-m+1} - (1-\rho)(k-m+1)^{k-m} \right] \text{ (viz. [1]), } \bar{T}_f = \frac{\bar{N}_f}{\lambda^*},$$

$$\text{kde } \lambda^* = \lambda(1-p_k), \bar{T} = \bar{T}_f + \frac{1}{\mu} \text{ a } \bar{N} = \lambda^* \bar{T}.$$

## 6.6. Uzavřené systémy hromadné obsluhy

V celé předchozí části textu jsme předpokládali, že zdroj požadavků je neomezený. Tudiž následkem tohoto předpokladu byla nezávislost intenzity vstupu požadavků na stavu, ve kterém se systém nacházel. V případě *uzavřených (cyklických)* systémů hromadné obsluhy, které si zde pro zajímavost ukážeme, je zdroj požadavků omezen respektive jinak řečeno, obslužené požadavky znovu přecházejí do zdroje požadavků. Jelikož se tedy

požadavky po obsluze opět stávají potenciálními požadavky ve zdroji požadavků (jdou znova do obsluhy), intenzita obsluhy ovlivňuje intenzitu vstupu požadavků.

V praxi se lze setkat s uzavřenými modely hromadné obsluhy například v oblastech opravárenství a údržby různých strojů a zařízení. Typickým příkladem je stanovení počtu strojů, které bude v nějaké firmě opravovat či udržovat jeden (jednoduchá obsluha) nebo více (vícenásobná obsluha) pracovníků. Požadavek, který vyžaduje při poruše nebo selhání zásah pracovníka, se po skončení obsluhy opět stává potenciálním požadavkem.

### 6.6.1. Uzavřený exponenciální model jednoduché obsluhy M/M/1/.r

Vlastnosti modelu M/M/1/.r jsou blízké vlastnostem modelu M/M/1:

- $s = 1$ , tj. jedno obslužné zařízení
- uzavřený systém, tj. zdroj požadavků je omezený  $r$  požadavky
- v rámci tohoto modelu M/M/1/.r není fronta v podstatě omezena
- všechny požadavky trpělivě čekají ve frontě na obsluhu, i když nedostačuje kapacita obsluhy
- FIFO

Vyjádření závislosti intenzity vstupu požadavků na počtu požadavků v systému (stavu, ve kterém je systém hromadné obsluhy) je založeno na známé intenzitě vstupu požadavků  $\lambda$  otevřeného modelu M/M/1:

$$\lambda_n = \lambda(r - n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, r,$$

$$\lambda_n = 0, \quad n = r + 1, r + 2, \dots,$$

$$\mu_n = \mu, \quad n = 1, 2, \dots$$

Za podmínky stabilizace systému hromadné obsluhy  $\rho = \lambda/\mu < 1$  platí pro pravděpodobnosti  $p_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (odvozeno např. v [1]):

$$p_n = p_0 \frac{\rho^n r!}{(r - n)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, r,$$

$$p_n = 0, \quad n > r,$$



$$p_0 = \left( \sum_{n=0}^r \frac{\rho^n r!}{(r-n)!} \right)^{-1}$$

**Poznámka 13:** Ve frontě je  $(r-1)$  míst.

Základní charakteristiky (viz. [9]):

$$\bar{N} = r - \frac{(1-p_0)}{\rho}, \quad \bar{N}_r = r - \frac{(1-p_0)}{(1+1/\rho)}, \quad \bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda(1-p_0)/\rho} \quad \text{a} \quad \bar{T}_r = \frac{\bar{N}_r}{\lambda(1-p_0)/\rho}.$$

### 6.6.2. Uzavřený exponenciální model vícenásobné obsluhy M/M/m/.r

Vlastnosti modelu M/M/m/.r jsou blízké vlastnostem modelu M/M/m:

- m paralelních homogenních obslužných zařízení s celkovou intenzitou obsluhy  $m\mu$
- uzavřený systém, tj. zdroj požadavků je omezený r požadavky
- v rámci tohoto modelu M/M/m/.r není fronta v podstatě omezena
- všechny požadavky trpělivě čekají ve frontě na obsluhu, i když nedostačuje kapacita obsluhy
- FIFO

Pro intenzity platí:

$$\lambda_n = \lambda(r-n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, r,$$

$$\lambda_n = 0, \quad n = r+1, r+2, \dots,$$

$$\mu_n = n\mu, \quad n = 1, 2, \dots, m$$

$$\mu_n = m\mu, \quad n = m+1, m+2, \dots$$

Za podmínky stabilizace systému hromadné obsluhy  $\rho = \lambda/(m\mu) < 1$  platí pro pravděpodobnosti  $p_n, n = 0, 1, 2, \dots$  (odvozeno např. v [9]):

$$p_n = p_0 \frac{(\lambda/\mu)^n r!}{n!(r-n)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m,$$

$$p_n = p_0 \frac{(\lambda/\mu)^n r!}{m^{n-m} m!(r-n)!}, \quad n = m+1, m+2, \dots, r,$$

$$p_n = 0, \quad n > r,$$

Pravděpodobnost  $p_0$  lze určit z podmínky  $\sum_{n=0}^r p_n = 1$ .

Základní charakteristiky (viz [7]):

$$\bar{N} = p_0 \left[ \sum_{n=0}^{m-1} \binom{r}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=m}^r \binom{r}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{n!}{m! m^{n-m}} \right], \quad \bar{N}_f = \bar{N} - m + p_0 \sum_{n=0}^{m-1} (m-n) \binom{r}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n,$$

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda(r-\bar{N})} \quad \text{a} \quad \bar{T}_f = \frac{\bar{N}_f}{\lambda(r-\bar{N})}.$$

## 6.7. Systémy hromadné obsluhy s netrpělivostí požadavků

Tento systém hromadné obsluhy je speciálním případem otevřeného systému hromadné obsluhy, kdy požadavky přicházející do systému jsou do jisté míry netrpělivý v systému zůstat. Netrpělivost se může projevat dvojím různým způsobem. Častějším způsobem je tzv. *apriorní netrpělivost*, kdy požadavek se rozhodne, zda do systému vstoupí na základě délky fronty či předpokládané doby čekání na obsluhu nebo dle počtu požadavků v systému. Apriorní netrpělivost se modeluje pomocí proměnlivých hodnot  $\lambda_n$  závislých na stavu systému. Druhým způsobem netrpělivosti je tzv. *aposteriorní netrpělivost*, kdy požadavek do systému vstoupí, ale po čase se rozhodne, zda v systému zůstane nebo systém opustí. Aposteriorní netrpělivost se modeluje pomocí proměnných hodnot  $\mu_n$  závislých na stavu systému. V obou způsobech netrpělivosti jde o *systém se ztrátami*.

Pro zájemce lze doporučit např. literaturu [7] nebo [9].

## 6.8. Systémy hromadné obsluhy s prioritami

Všechny předchozí modely systému hromadné obsluhy se vyznačovali tím, že požadavky byly obsluhovány v tom pořadí, ve kterém do systému přišli, tzv. FIFO. V některých případech ale rozlišujeme prvky vstupující do systému obsluhy tak, že jednotlivým požadavkům dáváme různé stupně priority k obsluze, tzv. PRI. Požadavky s vyšším stupněm priority jsou obsluhovány přednostně před požadavky s prioritou nižší bez ohledu na to, kdy do systému vstoupily. U prioritních řádů front rozlišujeme dva případy priorit:

- a) absolutní – zde požadavek s vyšší prioritou okamžitě přerušuje obsluhu požadavku s nižší prioritou,
- b) relativní – požadavek s relativní prioritou je obslužen, až je dokončena obsluha požadavku s nižší prioritou.

Řešení matematických modelů hromadné obsluhy s prioritami je ovšem značně složitější než v např. v případě LIFO či FIFO. Pro zájemce lze doporučit např. literaturu [7], [9], [12] či [13].

**Poznámka 14:** Celá tato kapitola byla zpracována s využitím literatury [1], [6], [7], [9], [12] a [13].

## 7. Optimalizační modely

Vedle deskriptivního modelu hromadné obsluhy existuje také model optimalizační. Tento model má za cíl sloužit jako nástroj rozhodování a optimalizace při určování nejvhodnějších charakteristik modelovaných systému vzhledem k zvolenému kritériu.

K optimalizaci systémů hromadné obsluhy je nutno stanovit některé předpoklady. Je nutno připustit, že některé (nebo všechny) charakteristiky (veličiny), které popisují a specifikují konkrétní model, jsou proměnné. Dále je třeba mít k dispozici konkrétní *kritériální funkci* definovanou pomocí příslušných proměnných veličin, která vyjadřuje jistý vytyčený cíl.

Již když jsme se zabývali jednoduchým exponenciálním modelem, mohli jsme si všimnout, že např. délka fronty závisí na intenzitě obsluhy, např. při malé intenzitě obsluhy se vytváří velká fronta. V tomto případě dochází k tomu, že požadavek v systému je zatěžován čekáním na obsluhu nebo také k té situaci, že požadavek znechucen čekáním ve frontě se rozhodne systém opustit. Na druhou stranu ani velká intenzita obsluhy není vhodná. Vznikají totiž okamžiky, kdy obsluha není využita i když musí být k dispozici. Za této situace vznikají určité náklady, kterým bezprostředně neodpovídají žádné tržby.

Kritériální funkce, jejíž extrém (minimum či maximum) chceme optimalizací systému hromadné obsluhy docílit, je orientována:

- nákladově,
- ziskově,
- jinak – většinou stanovením nějaké kritické hodnoty pro některé pravděpodobnostní charakteristiky efektivity fungování systému hromadné obsluhy (např. stanovení kritické hodnoty délky fronty, čekání na obsluhu, průměrného využití či prostoje obslužného zařízení).

### 7.1. Nákladově orientovaná kritériální funkce

Cílem této optimalizace je dosažení minima očekávaných celkových nákladů systému hromadné obsluhy. Nákladová bilance stacionárního fungování systému

hromadné obsluhy se většinou provádí za nějakou zvolenou dobu a konkrétní nákladové koeficienty nákladové kritériální funkce jsou definovány buď jako příslušné náklady anebo ztráty vztažené na jeden požadavek.

U otevřených systémů hromadné obsluhy existuje několik typických a nejčastějších případů nákladové kritériální funkce:

$$C_1(\rho, m) = c_1 \bar{N} + c_2 \bar{M},$$

$$C_2(\rho, m) = c_1 \bar{N}_f + c_2 \bar{M},$$

$$C_3(\rho, m) = c_1 \bar{N} + c_2 m,$$

$$C_4(\rho, m) = c_1 \bar{N}_f + c_2 m,$$

kde

$\rho$  - intenzita provozu

$\bar{N}$  - průměrný počet požadavků v systému

$\bar{N}_f$  - průměrný počet požadavků ve frontě

$m$  - počet obslužných zařízení

$\bar{M}$  - průměrný počet volných obslužných míst

$c_1$  - náklady, nebo ztráty spojené s pobytem v systému, nebo s čekáním ve frontě vztažené na jeden požadavek a na konkrétní časovou jednotku

$c_2$  - náklady, nebo ztráty spojené s provozem, nebo s nevyužitím jednoho obslužného místa a na konkrétní časovou jednotku

Pro stabilizovaný exponenciální model M/M/1 lze vyjádřit nákladovou kritériální funkci v tzv. smíšeném tvaru, který obsahuje kromě nákladové složky i člen s pravděpodobnostmi:

$$C(\rho) = \gamma_0 p_0 + \gamma_1 \sum_{n=1}^{\infty} p_n + c_1 \bar{N} = \gamma_0 (1-\rho) + \gamma_1 \rho + \frac{c_1 \rho}{1-\rho},$$

kde

$\gamma_0$  - ztráta při nevyužití kanálu obsluhy

$\gamma_1$  - náklad na obsluhu jednoho požadavku.

Výraz  $C(\rho)$  je funkce proměnné  $\rho = \lambda/\mu$ , kterou lze měnit zpravidla pouze pomocí  $\mu$ , jelikož intenzitu vstupu  $\lambda$  nelze ovlivnit (je předem dána). Při optimalizaci této úlohy hledáme takovou hodnotu spojité proměnné  $\rho \in (0,1)$ , pro kterou  $C(\rho)$  dosáhne minima. Protože je  $\rho$  spojitá proměnná, je možno stanovit minimum  $C(\rho)$  pomocí derivace podle  $\rho$ , kterou položíme rovnu nule:

$$\frac{dC(\rho)}{d\rho} = -\gamma_0 + \gamma_1 + \frac{c_1}{(1-\rho)^2} = 0$$

$$\rho^{\text{opt}} = 1 - \sqrt{\frac{c_1}{\gamma_0 - \gamma_1}}.$$

Hledaný bod  $\rho^{\text{opt}}$  je opravdu bodem, kdy funkce  $C(\rho)$  nabývá svého minima, poněvadž

$$\frac{d^2C}{d\rho^2}(\rho^{\text{opt}}) = \frac{2c_1}{\left(\sqrt{\frac{c_1}{\gamma_0 - \gamma_1}}\right)^3} > 0.$$

Obdobně lze také optimalizovat model M/M/m. Zde již ale je optimalizační úloha značně komplikovanější a to nejen s ohledem na komplikovanější vyjádření kritériální funkce, ale důvodem je především diskrétní proměnná počtu paralelně uspořádaných obslužných homogenních kanálů.

Nákladová kritériální funkce tohoto modelu může vypadat např.:

$$C(m) = c_1 \bar{N}_f + c_2 \bar{M},$$

kde význam koeficientů byl vysvětlen již dříve.

Ze vztahu  $C(m)$  plyne, že při konstantních  $c_1$  a  $c_2$  jeho hodnota závisí na počtu zařízení obsluhy  $m$ . Při optimalizaci nákladů je tedy cílem určit optimální počet obslužných zařízení  $m^{\text{opt}}$ , aby celkové očekávané náklady byly minimální.

V tomto případě se tedy jedná o kritériální funkci nespojitě proměnné  $m$  a tudíž nelze použít k hledání minima derivace. Musíme se zde spokojit s iterativním aproximativním postupem. Optimální počet obslužných kanálů  $m^{\text{opt}}$  hledáme po příslušném vyjádření  $\bar{N}_f$  a  $\bar{M}$  postupným dosazováním za  $m$  do výrazu

$$C(m) = \frac{c_1 p_0 \lambda \mu (\lambda/\mu)^m}{(m-1)! (\mu m - \lambda)^2} + c_2 (m - \lambda/\mu),$$

při neměnném  $\lambda$  i  $\mu$ , přičemž  $\rho = \lambda/\mu < 1$ .

**Poznámka 15:** Tato kapitola byla vypracována za pomoci literatury [7] a [9].

## 8. Příklad

V této závěrečné kapitole se budeme zabývat konkrétním příkladem z praxe týkajícího se modelů hromadné obsluhy založeném na skutečných naměřených datech. Máme-li obecně za úkol studovat systém, jenž svojí povahou patří do části hromadné obsluhy, je nejdříve za potřebí se ujistit, zda model lze aproximovat nějakým známým modelem hromadné obsluhy uvedených např. výše (např. M/M/1). Pokud ano, tak jsme dospěli ke značnému zjednodušení studovaného systému, jelikož k získání hodnot přírodních charakteristik systému stačí jen dosadit do výše uvedených vztahů (např. veličiny  $\bar{N}$ ,  $\bar{N}_f$ ,  $\bar{T}$  či  $\bar{T}_f$ ). Bohužel, jak už tomu často v praxi bývá, většinou ony systémy, se kterými se setkáváme, nemají toto analytické řešení známé. Analytický přístup nejčastěji znesnadňují následující okolnosti:

1. specifické typy rozdělení náhodných veličin (studovali jsme pouze exponenciální modely; existují také modely i s jinými rozděleními náhodných veličin, např. modely s normálně rozdělenými veličinami)
2. komplikovanější pravidla činností systému (priority, omezené kapacity front, přerušovaných chod zařízení atd.)
3. složitá struktura sítě obslužných kanálů.

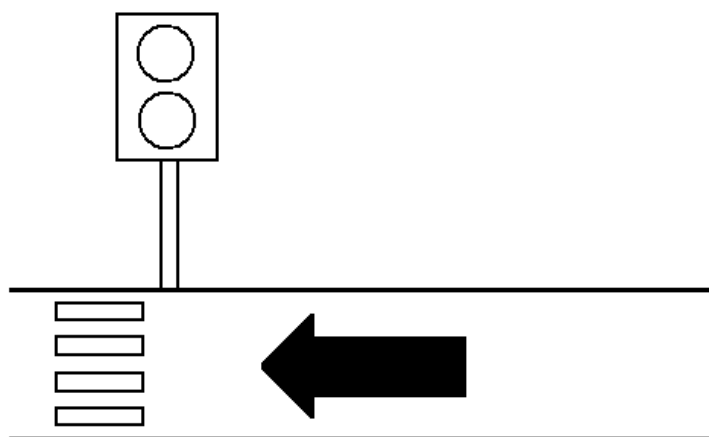
Klasická teorie hromadné obsluhy studuje speciální případy jednoduchých modelů hromadné obsluhy, které se liší typy rozdělení náhodných veličin (my jsme se zabývali pouze exponenciálními modely).

Nyní již přistoupíme k onomu zmiňovanému příkladu. Budeme chtít na základě dat (viz. příloha 2) nastavit „optimálně“ doby trvání zelené v jednotlivých směrech u světelné signalizace křižovatky typu „T“ (viz. příloha 4) v závislosti na hustotě provozu. Řešit tento problém budeme postupně od méně složitých křižovatek až po onu cílovou křižovatku pomocí modelu M/M/1. Nejprve budeme modelovat jednosměrnou silnici, na které je kvůli přechodu přes vozovku umístěn semafor.



## 8.1. Jednosměrná silnice se semaforem

Jedná o nejjednodušší možnost křižovatky se světelným zařízením, která se může v praxi vyskytnout. Prostřednictvím této křižovatky bude popsán algoritmus, který bude tvořit základ v dalším modelování složitějších případů křižovatek.



Mějme jednosměrnou silnici se semaforem, na kterém po dobu  $(0; t_1)$  svítí zelená a po dobu  $(t_1; t_2)$  svítí červená. Doby zelené a červené se neustále periodicky opakují. Necht' je pravděpodobnost příjezdu  $n$  aut do této silnice za nějaký časový interval náhodná veličina s Poissonovým rozdělením. Potom (viz. strana 29) pravděpodobnost, že v čase od 0 do  $t$  přijelo  $n$  aut, je rovna  $\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ , kde  $\lambda$  lze odhadnout z průměrné hustoty provozu, tedy  $\lambda$  je průměrný počet aut za jednotku času.

Předpokládejme, že se semafor chová jako obsluha s parametrem  $\mu$ , který je (pokud svítí zelená) o dost větší než  $\lambda$  (také zde předpokládáme z hlediska obsluhy Poissonovo rozdělení). Parametr  $\mu$  lze odhadnout z maximálního možného počtu obslužených aut na této silnici za určitý čas. Pokud svítí červená, je  $\mu = 0$  (tj. intenzita obsluhy se střídá). Počáteční rozložení pravděpodobnosti  $p_n$  ( $p_n$  je pravděpodobnost, že je v systému  $n$  aut) je vektor  $\mathbf{p}(0)$ .

Pro řešení takto popsaného systému využijí vztahy (1) a (2) ze strany 33:

$$\left. \begin{aligned} p'_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p'_n(t) &= \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + \mu) p_n(t) + \mu p_{n+1}(t) \end{aligned} \right\} (*)$$

Pro  $n = 1, 2, 3, \dots$ , s počáteční podmínkou  $\mathbf{p}(0) = (p_0(0), p_1(0), p_2(0), \dots)$ , kde  $t \in (0; t_1)$ , tj. řešíme systém jako soustavu  $N$  rovnic (od určitého  $N$  soustavu ořízneme, udává maximálně uvažovaný počet aut v systému za dobu jednoho cyklu, tj. doba trvání zelené + doba trvání červené) a výsledkem bude nějaké „finální“ rozložení stavů v čase  $t_1$   $\mathbf{p}(t_1) = [p_0(t_1), p_1(t_1), \dots, p_N(t_1)]$ . Dále změníme intenzitu obsluhy na  $\mu = 0$  a řešíme dál:

$$\left. \begin{aligned} p'_0(t) &= -\lambda p_0(t) \\ p'_n(t) &= \lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t) \end{aligned} \right\} (**)$$

pro  $t \in (t_1; t_2)$  s počáteční podmínkou  $\mathbf{p}(t_1) = [p_0(t_1), p_1(t_1), \dots, p_{N-1}(t_1)]$ . Výsledkem bude  $\mathbf{p}(t_2) = [p_0(t_2), p_1(t_2), \dots, p_{N-1}(t_2)]$ . Celý tento postup opakujeme dále v závislosti na tom, kolik cyklů chceme modelovat.

Soustavu (\*) lze zapsat i takto:

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{p}(t),$$

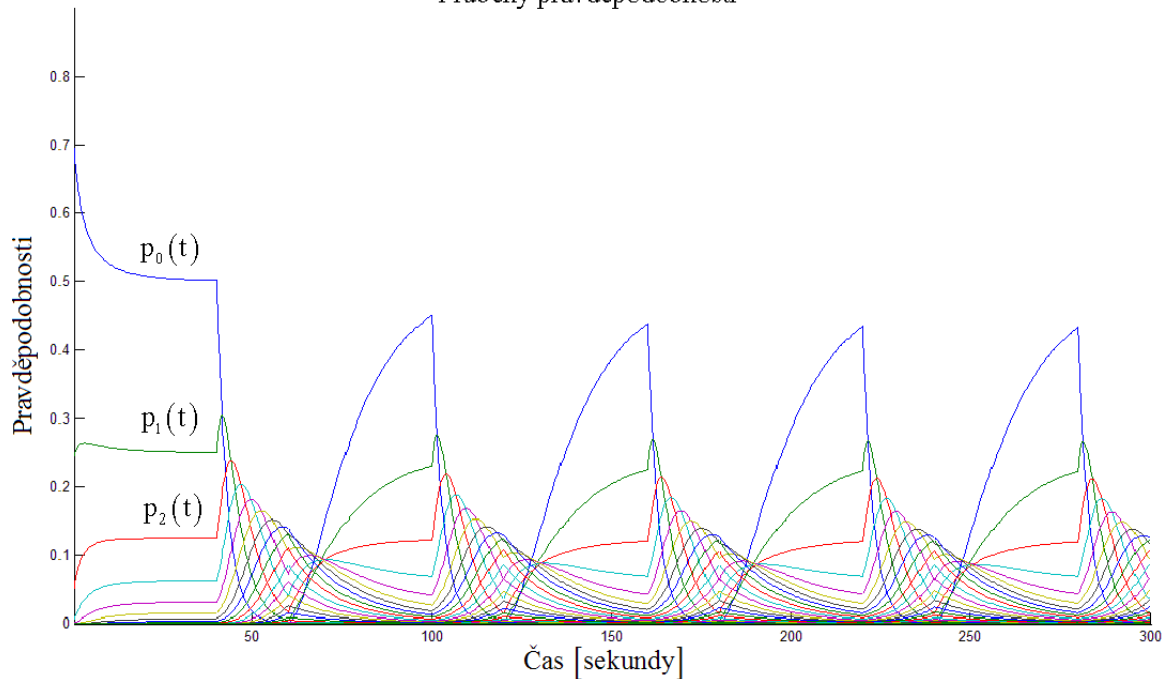
kde  $\mathbf{p}(t) = [p_0(t), p_1(t), \dots, p_{N-1}(t)]^T$  a  $\mathbf{A}$  je matice soustavy typu  $N \times N$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -(\lambda + \mu) & \mu & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -(\lambda + \mu) & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & -(\lambda + \mu) \end{pmatrix},$$

tedy řešením je  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)\exp(\mathbf{A}t)$ . Pro  $\mu = 0$  lze postupovat obdobně a následně postup opět opakujeme.

V software MATLAB si vytvoříme řešící m-fily tohoto algoritmu (viz. příloha 3.1) a dostaneme výsledné průběhy pravděpodobností v čase  $p_0(t), p_1(t), \dots, p_{N-1}(t)$ , kde čas představuje počtu cyklů, viz. následující obrázek:

## Průběhy pravděpodobností

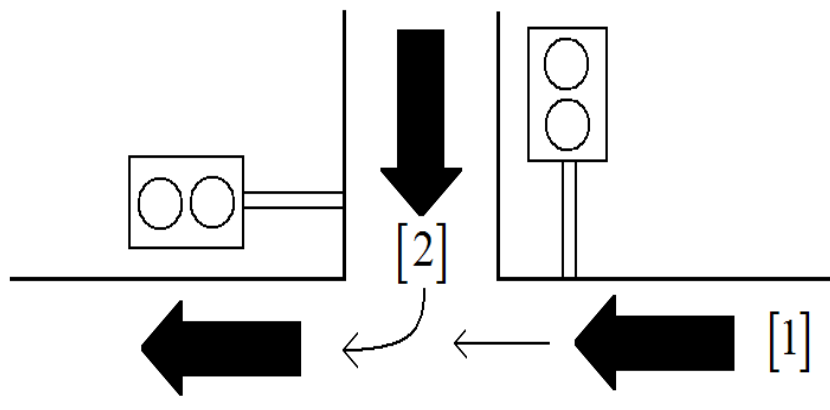


Průběhy jednotlivých pravděpodobností počtu aut na křižovatce v čase se střídáním červené a zelené barvy na semaforu

Z obrázku lze vypočítat průběhy jednotlivých pravděpodobností po dobu 300 sekund ( $N = 100$ ) v závislosti na opakujícím se střídání zelené ( $t_1 = 40$  sekund) a červené barvy ( $t_2 = 20$ ) na semaforu. Intenzita vstupu byla volena  $\lambda = 20$  aut za minutu a intenzita obsluhy  $\mu = 40$  aut za minutu. Jednotlivé pravděpodobnosti se nezávisle na počátečním vektoru pravděpodobností postupem času stabilizují. Zde byl vektor počátečních pravděpodobností vektor pravděpodobností Poissonova rozdělení s parametrem  $\lambda$  (lze ale např. jako vektor počátečních pravděpodobností volit vektor  $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, \dots)$ ). Čím delší dobu trvání zelené nastavíme, tím menší bude střední hodnota počtu aut v systému.

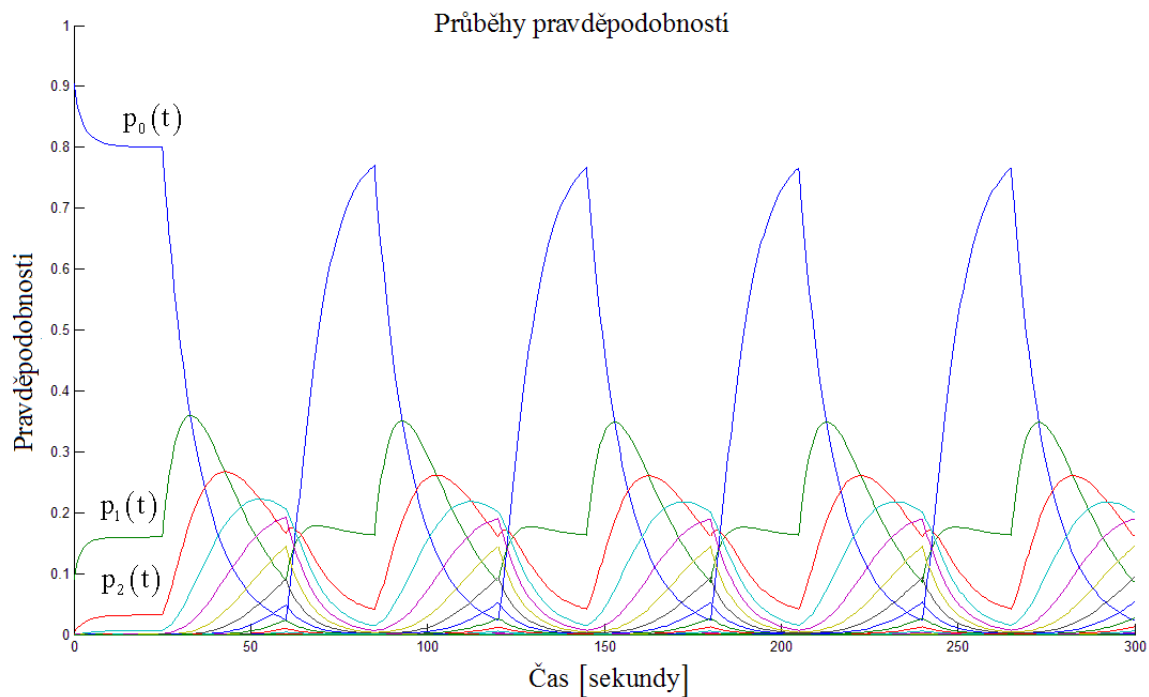
Algoritmus tohoto příkladu, pro zobrazení pravděpodobností, budeme užívat také v následujících složitějších modelech křižovatek.

## 8.2. Jednosměrná křižovatka typu T

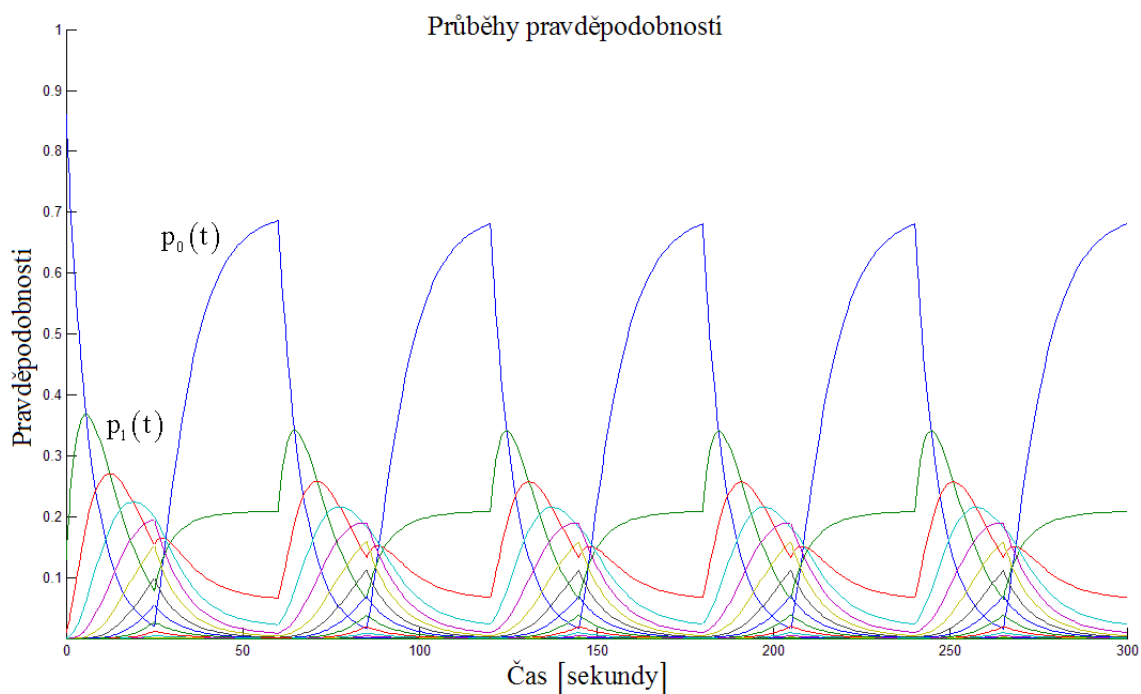


Naším úkolem na této křižovatce bude optimálně nastavit doby trvání zelené na světelných signalizacích v jednotlivých směrech tak, aby bylo v systému (křižovatce) co možná nejméně automobilů. Budeme zde využívat zavedené pojmy z předchozí kapitoly 8.1.

Nejdříve si opět ukážeme situaci, jak budou vypadat pravděpodobnosti počtu aut v systému  $p_0(t), p_1(t), \dots, p_{N-1}(t)$ , tak jak tomu bylo v předchozí kapitole 8.1., v jednotlivých směrech [1] a [2] pro pevně dané časy  $t_1$  a  $t_2$ . Čas  $t_1$  je dobou, po jakou svítí zelená ve směru [1] (a červená ve směru [2]) a čas  $t_2$  je dobou, po kterou svítí zelená ve směru [2] (a červená ve směru [1]). Algoritmus pro výpočet těchto pravděpodobností je uveden v příloze 3.2 Např.: intenzita vstupu pro směr [1] bude  $\lambda_1 = 6$  aut za minutu a intenzita vstupu pro směr [2] bude  $\lambda_2 = 9$  aut za minutu. Maximální přípustný počet aut v systému bude  $N = 100$ . Maximální obsluha semaforu (svítí-li zelená) je pro oba směry stejná,  $\mu = 30$ . Časy nastavíme na  $t_1 = 25$  sekund a  $t_2 = 35$  sekund. Pravděpodobnosti pro jednotlivé směry tedy jsou:



Průběhy jednotlivých pravděpodobností počtu aut směru [1] v čase  
se střídáním červené a zelené barvy na semaforu



Průběhy jednotlivých pravděpodobností počtu aut směru [2] v čase  
se střídáním červené a zelené barvy na semaforu

Při různých hodnotách doby trvání zelené v jednotlivých směrech, se také mění pravděpodobnosti  $p_0(t), p_1(t), \dots, p_{N-1}(t)$ . Nyní tedy budeme chtít najít časy  $t_1$  a  $t_2$  tak, aby počet automobilů v systému byl co možná nejmenší. Otázkou je, jak tento celkový počet aut minimalizovat. Budeme postupovat přes střední hodnoty. Úkolem bude minimalizovat funkci  $f$  (střední počet aut systému v obou směrech při obou posledních přepnutích signalizace), která má předpis:

$$f = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} n p_n^1[(m-1)C + t_1]}_{\text{směr[1]}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} n p_n^2[(m-1)C + t_1]}_{\text{směr[2]}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} n p_n^1[mC]}_{\text{směr[1]}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} n p_n^2[mC]}_{\text{směr[2]}}$$

kde  $C = t_1 + t_2$  je délka jednoho cyklu v sekundách a  $m$  je počet cyklů, které chceme modelovat. Např.  $p_n^1[(m-1)C + t_1]$  je pravděpodobnost, že v prvním směru je v čase  $(m-1)C + t_1$  v systému  $n$  automobilů.

Pro nalezení minimální hodnoty funkce  $f$  použijeme užití příkazu *fminsearch* (viz. příloha 3.3). Vstupem tohoto algoritmu je opět  $\lambda_1$  aut za minutu,  $\lambda_2$  aut za minutu,  $\mu$  aut za minutu,  $N$ ,  $C$  v sekundách, jenž představuje délku cyklu ( $C = t_1 + t_2$ ) a počet cyklů, po kterých chceme systém zkoumat. Výstupem je čas  $t_1$  ( $t_2 = C - t_1$ ), při kterém funkce  $f$  nabývá svého minima, neboli v systému je nejmenší střední počet aut.

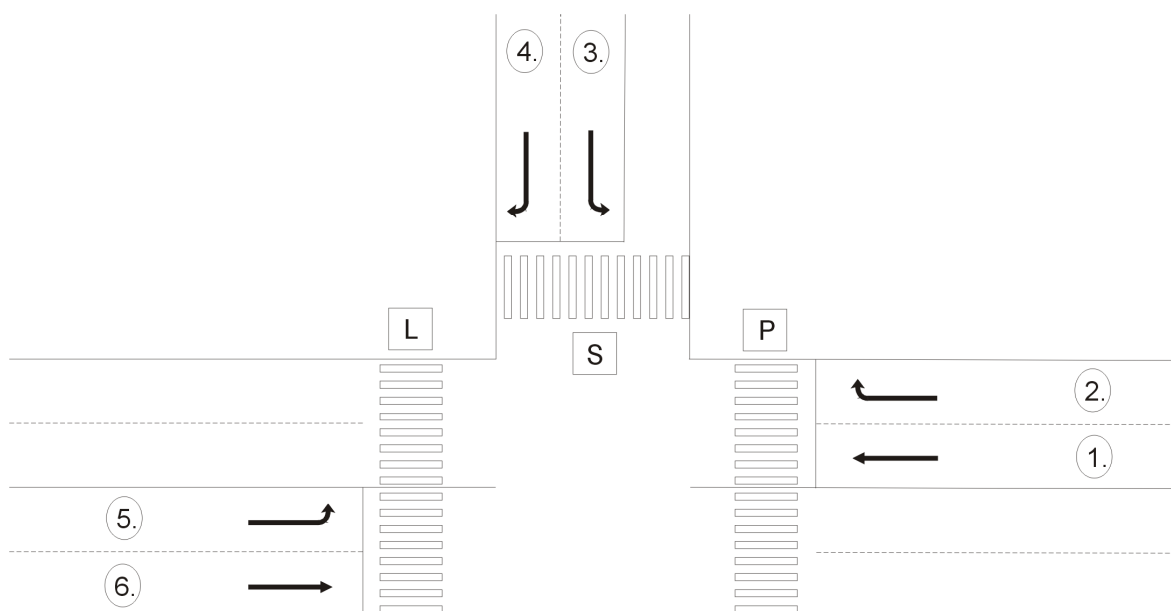
Zde je pro dané hodnoty vstupu  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = 9$ ,  $\mu = 30$ ,  $N = 100$ ,  $C = 60$  a počet uvažovaných cyklů je 5. Výstupem jsou časy  $t_1 = 23.8473$  sekund,  $t_2 = 36.1527$  sekund a střední hodnota počtu aut v systému při posledních dvou přepnutích je 8.98457 (tj. minimální hodnota funkce  $f$ ).

Je logické, že poměr  $t_1/t_2$  je blízký poměru  $\lambda_1/\lambda_2$ . V tomto případě nebylo potřeba (z hlediska optimálního nastavení časů) ani takto jednoduchý systém modelovat. Tato kapitola slouží pro ilustraci, že postup lze použít na složitější případy.

### 8.3. Křižovatka typu T

Zde se bude konkrétně jednat o jednu křižovatku z Karviné, ve které je 8 obslužných kanálů (viz. příloha 4, projektová dokumentace). Úkol bude stejný, jako tomu bylo v kapitole 8.2., tj. úkolem na této křižovatce bude optimálně nastavit doby trvání zelené na světelných signalizacích v jednotlivých směrech tak, aby bylo v systému (křižovatce) co možná nejméně automobilů. Budeme zde opět užívat pojmy zavedené v předchozích kapitolách.

My si tuto křižovatku ještě trochu zjednodušíme. Místo 8 obslužných kanálů, jako tomu je v projektové dokumentaci, budeme mít pouze 6 jedno obslužných, viz. následující obrázek:



kde L,P,S jsou označení pro semaforey.

Reálná data, která máme k dispozici, nám uvádějí počty aut, které vstoupí (projedou nějakým čidlem dostatečně vzdáleném od středu křižovatky) do křižovatky za dobu deseti minut. Jednotlivé desetiminutové intervaly jsou uváděny za celý jeden den a těchto dnů máme celkem sedm (pondělí až neděle), tj. v každém směru máme  $6 \cdot 24 \cdot 7 = 1008$  dat a celkem máme  $6 \cdot 1008 = 6048$  dat. My ale tento počet dat poněkud zmenšíme. Z původních 10 minutových intervalů uděláme hodinové intervaly (viz. příloha 2). Tyto data si na základě histogramů udávajících hustotu provozu, uvedených v příloze 1, rozdělíme dle času na čtyři části:

5:00 – 14:00...“ranní provoz“,  
 14:00 – 17:00...“odpolední provoz“,  
 17:00 – 21:00...“večerní provoz“ a  
 21:00 – 5:00...“provoz bez semaforu“.

Z uvedeného rozdělení nás budou zajímat pouze první tři části, tj. části, ve kterých jsou semafony zapnuty. Počet vstupních dat si ještě nakonec zmenšíme pomocí aritmetického průměru a to tak, že budeme mít během jednoho dne pouze tři vstupy (za ranní provoz, za odpolední provoz a za večerní provoz). Např. ranní provoz určíme jako součet počtu aut, které přijedou od 5:00 do 14:00 a vydělíme počtem hodin, tj. 9 (viz. příloha 2). Takto upravené průměrné počty automobilů vstupujících do křižovatky v jednotlivých směrech v průběhu jedné hodiny označíme  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ .

Nejprve je potřeba zvolit vhodné pořadí, v jakém se budou světelná zařízení rozsvěcovat a následně pak optimálně nastavit délky jednotlivých časových intervalů, kdy bude svítit zelená. Dle dvou možných situací, jak budou světelná zařízení na křižovatce rozsvěcována, rozdělíme řešení příkladu na dvě části

### 8.3.1. Křižovatka typu T, situace 1

První možné nastavení zelené barvy pro směry 1 až 6 následující, kde  $t_1$  je doba po kterou svítí zelená na semaforu P,  $t_2$  je doba po kterou svítí zelená na semaforu S a  $t_3$  je doba, po kterou svítí zelená na semaforu L:

	$t_1$	$t_2$	$t_3$
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Optimalizační algoritmus (příloha 3.4) zde je značně podobný optimalizačnímu algoritmu z kapitoly 8.2.. Bude se lišit hlavně tím, že místo 2 nastavovaných časů budeme



mít časy 3 a místo 2 vstupů zde bude vstupů 6. Výsledné časy při délce jednoho cyklu 60 sekund jsou pro pondělní ranní provoz:

$t_1 = 24.2393$ ,  $t_2 = 15.4097$  a  $t_3 = 20.3510$  se středním počtem automobilů po posledních třech přepnutích 28.1686.

Pro ostatní rozdělení by se postupovalo obdobně, jen by se měnily vstupní hodnoty a mohly by se případně měnit doby jednoho cyklu. Kdybychom např. chtěli navazovat v pondělním odpoledním provozu na ranní provoz, je vhodné v algoritmu změnit počáteční pravděpodobnost na pravděpodobnost, kterou skončil ranní provoz.

### 8.3.2. Křižovatka typu T, situace 2

Druhé možné nastavení zelené barvy je pro směry 1 až 6 následující:

	$t_1$	$t_2$	$t_3$
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Optimalizační algoritmus (příloha 3.5) je zde značně podobný optimalizačnímu algoritmu z kapitoly 8.3.1. Liší se pouze nastavením, kdy budou auta v jednotlivých směrech obsluhována a kdy budou stát. Výsledné časy při délce jednoho cyklu 60 sekund jsou pro pondělní ranní provoz:

$t_1 = 33.1855$ ,  $t_2 = 15.1373$  a  $t_3 = 11.6772$  se středním počtem automobilů po posledních třech přepnutích 21.3437. Porovnáme-li tento střední počet automobilů se středním počtem automobilů z kapitoly 8.3.1. zjistíme, že nastavení pořadí zelených barev je díky nižšímu střednímu počtu automobilů na křižovatce vhodnější z této kapitoly:

Porovnání situace 1 a 2 za pondělí  
(délka cyklu je všude 60 sekund)

situace 1	$t_1$	$t_2$	$t_3$	střední počty aut
ranní provoz v pondělí	24,2393	15,4097	20,3510	28,1686
odpolední provoz v pondělí	20,9079	14,7035	24,3886	41,4168
večerní provoz v pondělí	21,4795	13,0419	25,4786	16,7377

situace 2	$t_1$	$t_2$	$t_3$	střední počty aut
ranní provoz v pondělí	33,1855	15,1373	11,6772	21,3437
odpolední provoz v pondělí	32,0743	16,1332	11,7925	29,4238
večerní provoz v pondělí	39,7749	11,5130	8,7121	12,0404

Závěrem lze tedy říci, že je vhodnější tuto křižovatku modelovat druhým způsobem, jelikož střední počty aut v systému jsou menší.

#### 8.4. Na závěr příkladu

V předchozích příkladech byl počáteční vektor pravděpodobností stanoven jako vektor pravděpodobností Poissonova rozdělení s parametrem  $\lambda$ . Důvodem tomu bylo to, abychom co možná nejlépe vystihly předpoklady systému (počty vstupů a obslužených aut za určitý okamžik odpovídají Poissonově rozdělení) a aby se nám systém co možná nejrychleji stabilizoval. Se stabilizací souvisí také počet cyklů, které jsme modelovali. Zde jsme předpokládali, že se systém stabilizuje zhruba po 10 cyklech, ale pro přesnější výpočty je v některých situacích i vhodné počet cyklů zvýšit.

Pro optimální nastavení světelných signalizací lze používat i jiné minimalizační funkce než tomu bylo zde (funkce  $f$ ). Minimalizaci je možno také provádět např. prostřednictvím nějaké funkce, která nám vyjadřuje střední dobu čekání automobilu v systému.

V praxi se k nastavení světelných signalizací, které bylo zde uvedeno, přistupuje jen zřídka. V praxi je optimalizačních metod několik v různých variantách a jejich použití vždy závisí na stavebně technických podmínkách konkrétní křižovatky a dalších okrajových podmínkách (třeba koordinace).

## Závěr

Diplomová práce je zaměřena nejen na obecnou teorii modelů hromadné obsluhy, ale i na praktické využití teorie v praxi.

Samozřejmě zde není celá problematika uvedena, jelikož její obsah je velice široký. V praxi se vyskytuje i řada dalších systémů, než jsou pouze systémy exponenciální (např. systémy s Gama rozdělením, Erlangovým rozdělením, Gaussovým normálním rozdělením či Rayleighovým rozdělením). Důležité postavení v teorii hromadné obsluhy mají také simulační modely.

V závěrečné kapitole je uvedeno, jak by se optimálně nastavily světelné signalizace na křižovatce typu T s využitím modelu hromadné obsluhy  $M/M/1$ , aby se na této křižovatce tvořily co možná nejmenší kolony. V praxi se samozřejmě vyskytují také složitější křižovatky, které mohou mít i více obslužných kanálů v jednom směru. V takovémto případě by se mohl místo modelu  $M/M/1$  použít model  $M/M/m$ , tedy exponenciální model s paralelní obsluhou.

Text byl připraven pomocí počítačového softwaru Microsoft® Word 2007 a MathType Version 6.0. Na tvorbu obrázku byl použit software MATLAB® 7.0 a Microsoft® Malování. Pro složitější výpočty byl použit také MATLAB® 7.0.

## Literatura

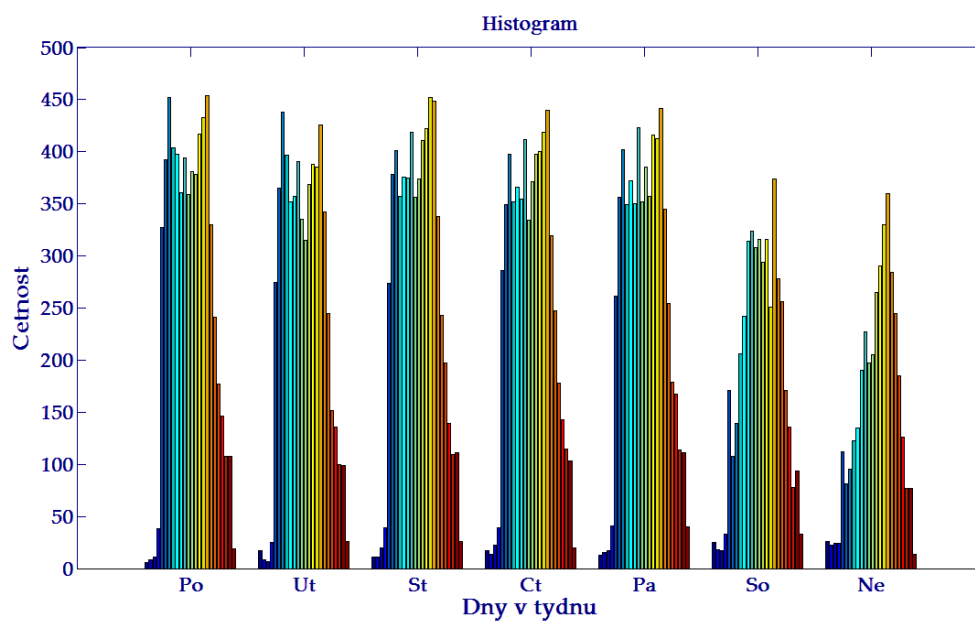
- [1] Dömeová, L., Beránková, M.: *Systémy hromadné obsluhy I*, 1. vydání, Česká zemědělská univerzita v Praze, Praha, 2004
- [2] Dupač, V., Dupačová, J.: *Markovovy procesy I*, 2. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980
- [3] Dupač, V., Dupačová, J.: *Markovovy procesy II*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980
- [4] Hillier, F., S., Liberman, G., J.: *Introduction to Stochastic Models In Operations Research*, Mc Graw-Hill, 1990
- [5] Hromadná obsluha [online], dostupné z: <http://mant.upol.cz/soubory/OdevzdanePrace/B08/b08-02-di.pdf>, [citováno 1.3.2010]
- [6] Kluvánek, P., Brandalík, F.: *Operační analýza I, Teorie hromadné obsluhy*, 1. vydání, Vysoká škola dopravy a spojov v Žilině, Bratislava, 1982
- [7] Kořenář, V.: *Stochastické procesy*, 1. vydání, Vysoká škola ekonomická v Praze, Praha, 2002
- [8] Kunderová, P.: *Základy pravděpodobnosti a matematické statistiky*, 1. vydání, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2004
- [9] Lukáš, L.: *Pravděpodobnostní modely některých manažerských úloh*, 1.vydání, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2005
- [10] Maixner, L.: *Markovovy procesy a jejich aplikace*, 1. vydání, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 1991
- [11] Poisson process [online], dostupné z: [http://en.wikipedia.org/wiki/Poisson\\_process](http://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_process), [citováno 8.3.2010]
- [12] Walter, J.: *Modely hromadné obsluhy*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1973
- [13] Walter, J.: *Stochastické modely v ekonomii*, 1. vydání, SNTL, Praha, 1970

# Přílohy

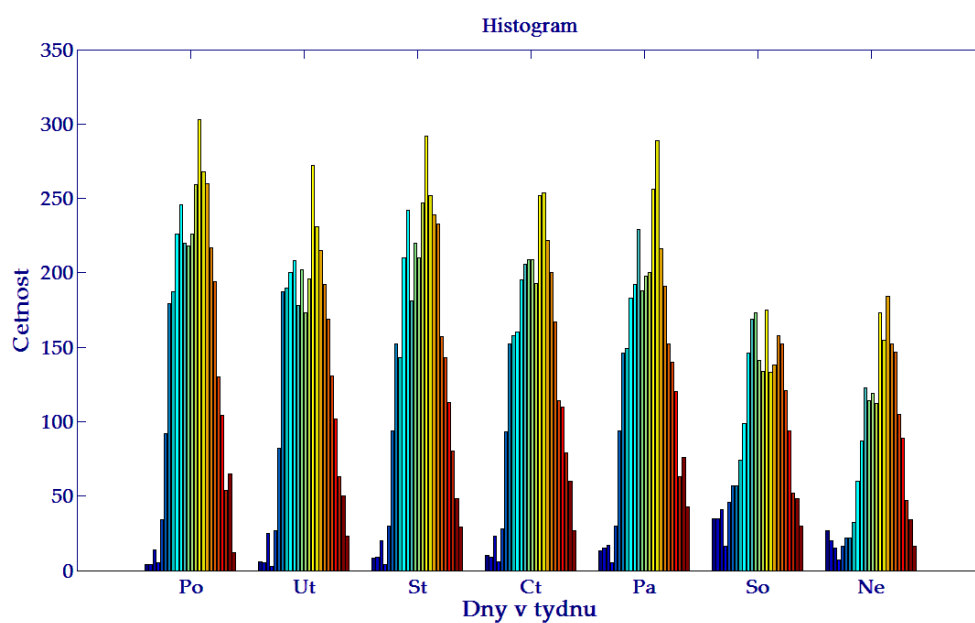
## Příloha 1

Histogramy – počty vstupujících aut během 24 hodin za jeden týden:

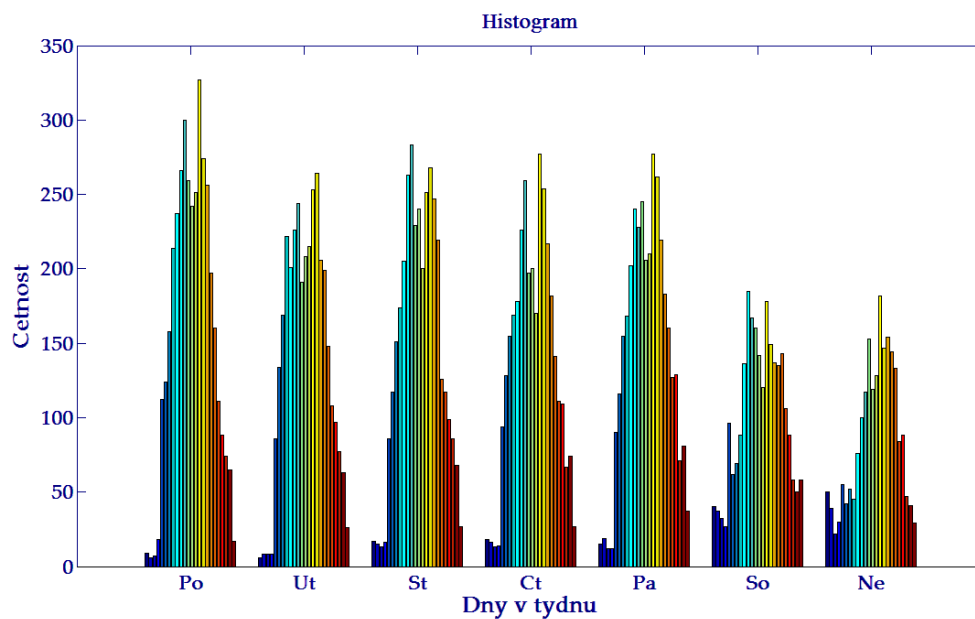
Směr 1



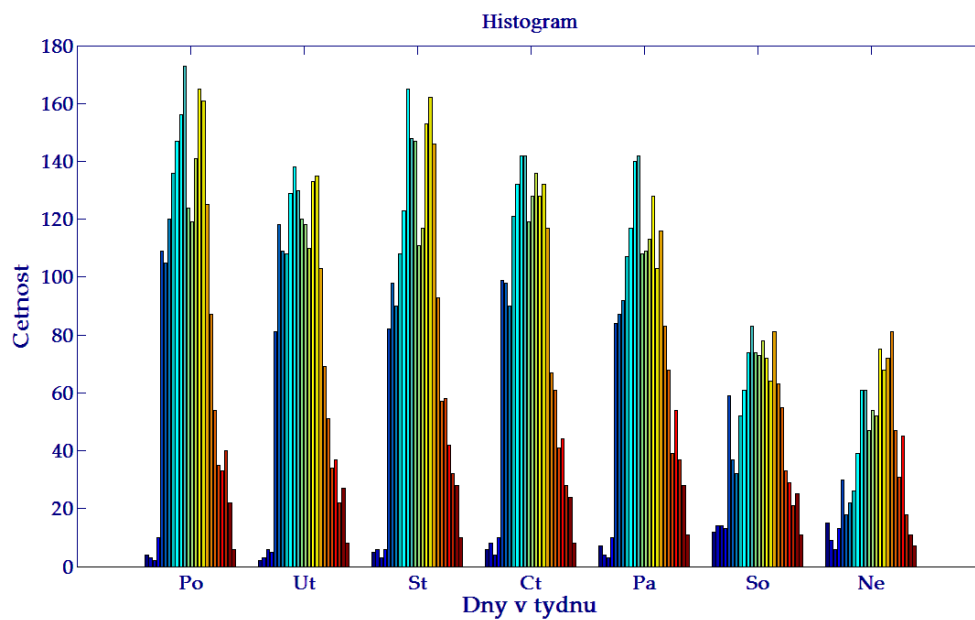
Směr 2



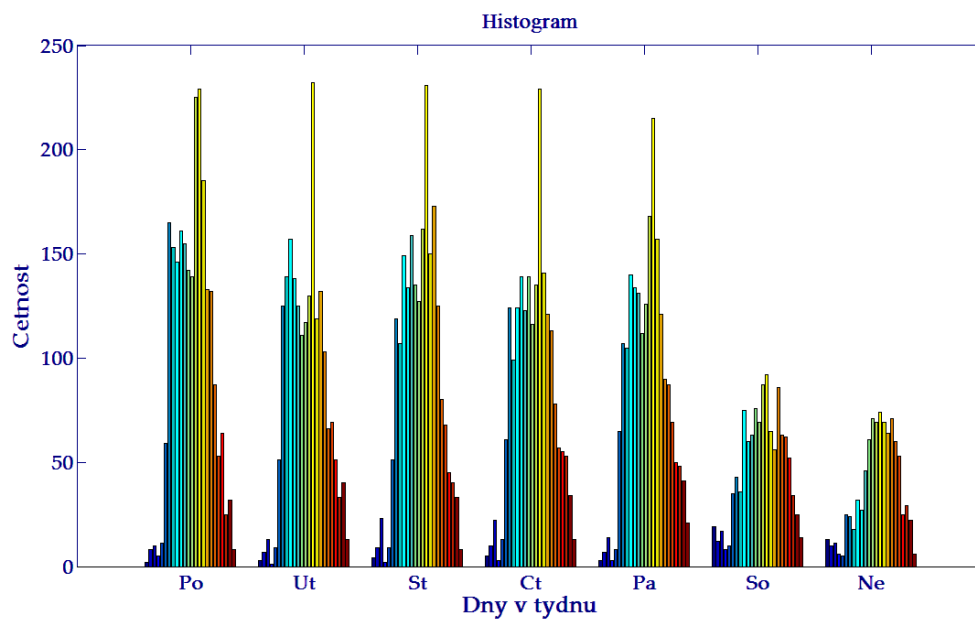
### Směr 3



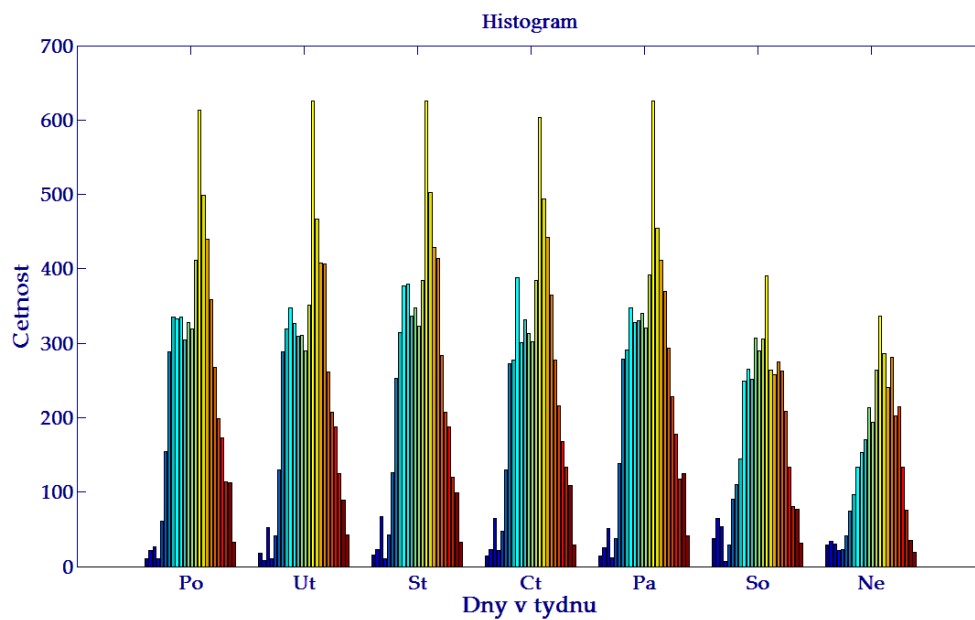
### Směr 4



## Směr 5



## Směr 6



## Příloha 2

Počty aut vstupujících do křižovatky během hodiny za jeden týden

### Směr 1

	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
0:00 - 1:00	6	17	11	17	13	25	26
1:00 - 2:00	8	8	11	14	15	18	22
2:00 - 3:00	11	7	20	22	17	17	24
3:00 - 4:00	38	25	39	39	41	33	24
4:00 - 5:00	327	275	274	286	261	171	112
5:00 - 6:00	392	365	378	349	356	108	81
6:00 - 7:00	452	438	401	398	402	139	95
7:00 - 8:00	404	397	357	352	349	206	123
8:00 - 9:00	398	352	376	366	372	242	135
9:00 - 10:00	361	357	375	355	350	314	190
10:00 - 11:00	394	391	419	412	423	324	227
11:00 - 12:00	359	335	356	334	352	308	197
12:00 - 13:00	381	315	374	371	385	316	205
13:00 - 14:00	378	369	411	398	357	294	265
14:00 - 15:00	417	388	422	400	416	316	290
15:00 - 16:00	433	385	452	419	413	251	330
16:00 - 17:00	454	426	449	440	442	374	360
17:00 - 18:00	330	342	338	319	345	278	284
18:00 - 19:00	241	245	243	247	254	256	245
19:00 - 20:00	177	152	197	178	179	171	185
20:00 - 21:00	146	136	139	143	167	136	126
21:00 - 22:00	108	100	109	115	114	78	77
22:00 - 23:00	108	99	111	103	111	94	77
23:00 - 0:00	19	26	26	20	40	33	14

### Směr 1 průměrně vstupy za hodinu

	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
5:00 - 14:00	391,0	368,8	383,0	370,6	371,8	250,1	168,7
14:00 - 17:00	434,7	399,7	441,0	419,7	423,7	313,7	326,7
17:00 - 21:00	223,5	218,8	229,3	221,8	236,3	210,3	210,0



## Směr 2

	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
0:00 - 1:00	4	6	8	10	13	35	27
1:00 - 2:00	4	5	9	9	15	35	20
2:00 - 3:00	14	25	20	23	17	41	15
3:00 - 4:00	5	3	4	6	5	16	7
4:00 - 5:00	34	27	30	28	30	46	16
5:00 - 6:00	92	82	94	93	94	57	22
6:00 - 7:00	179	187	152	152	146	57	22
7:00 - 8:00	187	190	143	158	149	74	32
8:00 - 9:00	226	200	210	160	183	99	60
9:00 - 10:00	246	208	242	195	192	146	87
10:00 - 11:00	220	178	181	206	229	169	123
11:00 - 12:00	218	202	220	209	188	173	114
12:00 - 13:00	226	173	210	209	198	141	119
13:00 - 14:00	259	196	247	193	200	134	112
14:00 - 15:00	303	272	292	252	256	175	173
15:00 - 16:00	268	231	252	254	289	133	155
16:00 - 17:00	260	215	239	222	216	138	184
17:00 - 18:00	217	192	233	200	191	158	152
18:00 - 19:00	194	169	157	167	152	152	147
19:00 - 20:00	130	131	143	114	140	121	105
20:00 - 21:00	104	102	113	110	120	94	89
21:00 - 22:00	54	63	80	79	63	52	47
22:00 - 23:00	65	50	48	60	76	48	34
23:00 - 0:00	12	23	29	27	43	30	16

## Směr 2 průměrně vstupy za hodinu

	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
5:00 - 14:00	205,4	179,6	188,8	175,0	175,4	116,7	76,8
14:00 - 17:00	277,0	239,3	261,0	242,7	253,7	148,7	170,7
17:00 - 21:00	161,3	148,5	161,5	147,8	150,8	131,3	123,3

### Směr 3

	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
0:00 - 1:00	9	6	17	18	15	40	50
1:00 - 2:00	6	8	15	16	19	37	39
2:00 - 3:00	7	8	13	13	12	32	22
3:00 - 4:00	18	8	16	14	12	27	30
4:00 - 5:00	112	86	86	94	90	96	55
5:00 - 6:00	124	134	117	128	116	62	42
6:00 - 7:00	158	169	151	155	155	69	52
7:00 - 8:00	214	222	174	169	168	88	45
8:00 - 9:00	237	201	205	178	202	136	76
9:00 - 10:00	266	226	263	226	240	185	100
10:00 - 11:00	300	244	283	259	228	167	117
11:00 - 12:00	259	191	229	197	245	160	153
12:00 - 13:00	242	208	240	200	206	142	119
13:00 - 14:00	251	215	200	170	210	120	128
14:00 - 15:00	327	253	251	277	277	178	182
15:00 - 16:00	274	264	268	254	262	149	147
16:00 - 17:00	256	206	247	217	219	137	154
17:00 - 18:00	197	199	219	182	183	135	144
18:00 - 19:00	160	148	126	141	160	143	133
19:00 - 20:00	111	108	117	111	127	106	84
20:00 - 21:00	88	97	99	109	129	88	88
21:00 - 22:00	74	77	86	67	71	58	47
22:00 - 23:00	65	63	68	74	81	50	41
23:00 - 0:00	17	26	27	27	37	58	29

### Směr 3 průměrně vstupy za hodinu

	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
5:00 - 14:00	227,9	201,1	206,9	186,9	196,7	125,4	92,4
14:00 - 17:00	285,7	241,0	255,3	249,3	252,7	154,7	161,0
17:00 - 21:00	139,0	138,0	140,3	135,8	149,8	118,0	112,3

#### Směr 4

	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
0:00 - 1:00	4	2	5	6	7	12	15
1:00 - 2:00	3	3	6	8	4	14	9
2:00 - 3:00	2	6	3	4	3	14	6
3:00 - 4:00	10	5	6	10	10	13	13
4:00 - 5:00	109	81	82	99	84	59	30
5:00 - 6:00	105	118	98	98	87	37	18
6:00 - 7:00	120	109	90	90	92	32	22
7:00 - 8:00	136	108	108	121	107	52	26
8:00 - 9:00	147	129	123	132	117	61	39
9:00 - 10:00	156	138	165	142	140	74	61
10:00 - 11:00	173	130	148	142	142	83	61
11:00 - 12:00	124	120	147	119	108	74	47
12:00 - 13:00	119	118	111	128	109	73	54
13:00 - 14:00	141	110	117	136	113	78	52
14:00 - 15:00	165	133	153	128	128	72	75
15:00 - 16:00	161	135	162	132	103	64	68
16:00 - 17:00	125	103	146	117	116	81	72
17:00 - 18:00	87	69	93	67	83	63	81
18:00 - 19:00	54	51	57	61	68	55	47
19:00 - 20:00	35	34	58	41	39	33	31
20:00 - 21:00	33	37	42	44	54	29	45
21:00 - 22:00	40	22	32	28	37	21	18
22:00 - 23:00	22	27	28	24	28	25	11
23:00 - 0:00	6	8	10	8	11	11	7

#### Směr 4 průměrně vstupy za hodinu

	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
5:00 - 14:00	135,7	120,0	123,0	123,1	112,8	62,7	42,2
14:00 - 17:00	150,3	123,7	153,7	125,7	115,7	72,3	71,7
17:00 - 21:00	52,3	47,8	62,5	53,3	61,0	45,0	51,0

### Směr 5

	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
0:00 - 1:00	2	3	4	5	3	19	13
1:00 - 2:00	8	7	9	10	7	12	10
2:00 - 3:00	10	13	23	22	14	17	11
3:00 - 4:00	5	1	2	3	3	8	6
4:00 - 5:00	11	9	9	13	8	10	5
5:00 - 6:00	59	51	51	61	65	35	25
6:00 - 7:00	165	125	119	124	107	43	24
7:00 - 8:00	153	139	107	99	105	36	18
8:00 - 9:00	146	157	149	124	140	75	32
9:00 - 10:00	161	138	134	139	134	60	27
10:00 - 11:00	155	125	159	123	131	63	46
11:00 - 12:00	142	111	135	139	112	76	61
12:00 - 13:00	139	117	127	116	126	69	71
13:00 - 14:00	225	130	162	135	168	87	69
14:00 - 15:00	229	232	231	229	215	92	74
15:00 - 16:00	185	119	150	141	157	65	69
16:00 - 17:00	133	132	173	121	121	56	64
17:00 - 18:00	132	103	125	113	90	86	71
18:00 - 19:00	87	66	80	78	87	63	60
19:00 - 20:00	53	69	68	57	69	62	53
20:00 - 21:00	64	51	45	55	50	52	25
21:00 - 22:00	25	33	40	53	48	34	29
22:00 - 23:00	32	40	33	34	41	25	22
23:00 - 0:00	8	13	8	13	21	14	6

### Směr 5 průměrně vstupy za hodinu

	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
5:00 - 14:00	149,4	121,4	127,0	117,8	120,9	60,4	41,4
14:00 - 17:00	182,3	161,0	184,7	163,7	164,3	71,0	69,0
17:00 - 21:00	84,0	72,3	79,5	75,8	74,0	65,8	52,3

### Směr 6

	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
0:00 - 1:00	10	18	15	14	14	38	29
1:00 - 2:00	21	8	23	23	25	65	34
2:00 - 3:00	27	52	67	65	51	53	30
3:00 - 4:00	10	10	10	22	12	7	21
4:00 - 5:00	61	41	43	47	37	29	23
5:00 - 6:00	154	130	126	130	138	91	41
6:00 - 7:00	289	288	253	273	279	110	75
7:00 - 8:00	335	319	314	278	291	144	97
8:00 - 9:00	333	348	377	388	348	249	133
9:00 - 10:00	335	327	379	301	328	265	153
10:00 - 11:00	305	310	337	332	330	251	170
11:00 - 12:00	328	311	347	313	340	307	214
12:00 - 13:00	319	290	323	302	320	290	194
13:00 - 14:00	411	351	385	385	392	306	264
14:00 - 15:00	613	625	626	603	626	390	337
15:00 - 16:00	499	467	503	494	455	264	286
16:00 - 17:00	440	408	429	442	412	258	241
17:00 - 18:00	359	407	414	365	370	275	281
18:00 - 19:00	267	261	284	277	293	263	202
19:00 - 20:00	199	207	207	216	228	208	215
20:00 - 21:00	173	188	187	168	178	134	134
21:00 - 22:00	114	125	120	133	118	80	76
22:00 - 23:00	113	89	99	109	125	77	35
23:00 - 0:00	33	42	33	29	41	31	19

### Směr 6 průměrně vstupy za hodinu

	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
5:00 - 14:00	312,1	297,1	315,7	300,2	307,3	223,7	149,0
14:00 - 17:00	517,3	500,0	519,3	513,0	497,7	304,0	288,0
17:00 - 21:00	249,5	265,8	273,0	256,5	267,3	220,0	208,0

## Příloha 3

### Příloha 3.1

Definování soustavy (\*) a matice A:

```
function vysl = mat1(t,p,l,m)
lam = l; mu = m; N = length(p);
mat = diag(-(lam+mu)*ones(1,N),0) + diag(mu*ones(1,N-1),1) + diag(lam*ones(1,N-1),-1);
mat(1,1)=-lam;
vysl = mat*p;
```

Příkazy na kreslení obrázků zde nejsou uváděny...

vstupy: průměrný počet vstupujících aut do systému za minutu; průměrná obsluha aut za minutu; čas po který svítí zelená; čas po který svítí červená:

```
lam = 20; mu = 40; t1 = 40; t2 = 20;
```

převody na sekundy:

```
lam = lam/60; mu = mu/60;
```

maximální uvažovaný počet automobilů v systému:

```
N = 100; % velikost matice
```

```
x = 0:1:N-1;
```

počáteční vektor pravděpodobností Poissonova rozdělení s parametrem lambda (lam)

```
p0 = poisspdf(x,lam);
```

přes cykly křižovatky:

```
for krok = 0:1:4 tj. přes cykly křižovatky
```

```
cas = krok*(t1+t2);
```

řešení diferenciální rovnice mat1 v časech cas a cas+t1 s počáteční pravděpodobností p0, když svítí zelená; výsledkem je vektor časů T a matice pravděpodobností P v těchto časech (matice typu počet časů krát počet pravděpodobností)

```
[T P] = ode45(@mat1(t,p,lam,mu),[cas,cas+t1],p0);
```

vezmu poslední řádek pravděpodobností z matice P (tj. v čase cas+t1)

```
[m,n] = size(P);
```

```
p1 = P(m,:);
```

řešení diferenciální rovnice mat1 v časech cas+t1 a cas+t1+t2 s počáteční pravděpodobností p1, když svítí červená; výsledkem je vektor časů T1 a matice pravděpodobností P1 v těchto časech (matice typu počet časů krát počet pravděpodobností)

```
[T1 P1] = ode45(@mat1(t,p,lam,0),[cas+t1,cas+t1+t2],p1);
```

vezmu poslední řádek pravděpodobností z matice P1 (tj. v čase cas+t1+t2)

```
[m,n] = size(P1);
```

```
p0 = P1(m,:);
```

```
end
```

Opakuje na základě počtu cyklů, které chceme namodelovat.

### Příloha 3.2

*Funkce dostane jeden argument t1, druhy se dopočítá jako C – t1, kde C je doba cyklu v sekundách; t1 je doba po kterou svítí zelená ve směru 1 a t2 je doba po kterou svítí zelená ve směru 2; výsledkem bude střední hodnota počtu aut v systému po jistém počtu cyklů semaforu. Je zde o jeden vstup více (lam2). Příkazy na kreslení obrázků zde nejsou uváděny...*

*Vstupem funkce čekani je čas t1, čas t2 se dopočítá do cyklu C*

```
function vysl = cekani(t)
```

```
C = 60;          t1 = t;          t2 = C-t;
```

*vstupy počtů aut za sekundu jsou:*

```
lam1 = 6/60; lam2 = 9/60;
```

*intenzita vstupu počtu aut za sekundu je pro oba směry stejná:*

```
mu = 30/60;
```

*počet pravděpodobností, které budu modelovat, resp. maximální možný počet aut v systému; počet cyklů, které chci namodelovat*

```
N = 100;          cyklu = 4;          x = 0:1:N-1;
```

*vektory počátečních rozdělení pravděpodobností Poissonova rozdělení sparamterem lam1 pro směr 1 a parametrem 2 pro směr 2:*

```
p01 = poisspdf(x, lam1);          p02 = poisspdf(x, lam2);
```

*Přes cykly křižovatky :*

```
for krok = 0:1:cyklu
```

*začátek aktuálního cyklu:*

```
cas = krok*(t1+t2);
```

*Směr 1 má zelenou a směr 2 má červenou; opět řešíme diferenciální rovnice v jednotlivých časech;*

*výsledkem je vektor časů T matice P pravděpodobností počtu aut v systému v časech T*

```
[T1 P1] = ode45(@(t,p) mat1(t,p, lam1, mu), [cas, cas+t1], p01);          směr1
```

```
[T2 P2] = ode45(@(t,p) mat1(t,p, lam2, 0), [cas, cas+t1], p02);          směr2
```

*Poslední řádek matice P1, tj. jednotlivé pravděpodobnosti počtů aut v prvním směru (celkem jich je N) v čase cas+t1*

```
[m,n] = size(P1);          p11 = P1(m,:);
```

*Poslední řádek matice P2, tj. jednotlivé pravděpodobnosti počtů aut v druhém směru (celkem jich je N) v čase cas+t1*

```
[m,n] = size(P2);          p12 = P2(m,:);
```

*Součet všech pravděpodobností počtů aut v systému by měl být zhruba 1, pokud tomu tak není je potřeba zvýšit N*

```
if sum(p11)<.999
```

```
    error('ve smeru 1 mizi auta')
```

```
end
```

```
if sum(p12)<.999
```

```
    error('ve smeru 2 mizi auta')
```

```

end
Směr 2 má zelenou a směr 1 má červenou; opět řešíme diferenciální rovnice v jednotlivých časech;
výsledkem je vektor časů T matice P pravděpodobností počtu aut v systému v časech T
[T1 P1] = ode45(@(t,p) mat1(t,p,lam1,0),[cas+t1,cas+t1+t2],p11);      směr1
[T2 P2] = ode45(@(t,p) mat1(t,p,lam2,mu),[cas+t1,cas+t1+t2],p12);    směr2
Poslední řádek matice P1, tj. jednotlivé pravděpodobnosti počtů aut v prvním směru (celkem jich je N) v čase
cas+t1+t2
[m,n] = size(P1);      p01 = P1(m,:);
Poslední řádek matice P2, tj. jednotlivé pravděpodobnosti počtů aut druhém směru (celkem jich je N) v čase
cas+t1+t2
[m,n] = size(P2);      p02 = P2(m,:);
if sum(p01)<.999
    error('ve smeru 1 mizi auta')
end
if sum(p02)<.999
    error('ve smeru 2 mizi auta')
end
end
end
Střední hodnoty počtů aut v systému v dobách dvou posledních přepnutí signalizace
vysl1 = sum(x.*p01) + sum(x.*p02);
vysl2 = sum(x.*p11) + sum(x.*p12);
vysl = vysl1 + vysl2;

```

### Příloha 3.3

Pro nalezení optimálních dob trvání zelené v jednotlivých směrech příkazem `fminsearch`:  
Nastavení (necháme vypisovat jednotlivé iterace; ukončovací kritérium je 0.0001):  
`options = optimset('TolX',0.0001,'display','iter')`  
Počáteční nastavení  $t1$  je na 20 sekund ( $t2 = C-t1$ ):  
`x = fminsearch(@(t) cekani(t),[20],options)`

### Příloha 3.4

Funkce dostane dva argumenty  $t1$  a  $t2$ , třetí se dopočítá jako  $t3=C-t1-2$ , kde  $C$  je doba cyklu v sekundách;  $t1$  je doba po kterou svítí zelená na semaforu  $P$  (v ostatních semaforech svítí červená)  $t2$  je doba po kterou svítí zelená na semaforu  $S$  (v ostatních semaforech svítí červená) a  $t3$  je doba po kterou svítí zelená na semaforu  $L$  (v ostatních semaforech svítí červená); výsledkem bude střední hodnota počtu aut v systému po jistém počtu cyklů semaforu. Máme zde celkem 6 směrů charakterizující počty aut vstupujících do systému ( $lam1$  až  $lam6$ ). Úkolem je najít časy  $t1$ ,  $t2$  a  $t3$  aby byl střední počet aut v systému v posledních třech přepnutí signalizace nejmenší.



```
function vysl = cekani1(t)
```

```
C = 60; t1 = t(1); t2 = t(2); t3 = C-t1-t2;
```

*Vstupy jsou počty vstupujících automobilů za hodinu (následně se dělí 3600, aby se převedly na vstupy za sekundu); intenzita vstupu pro všechny směry stejná (je následně také převedena na počty obslužených aut za sekundu):*

```
lam1 = 391/3600; lam2 = 205/3600; lam3 = 228/3600; lam4 = 136/3600; lam5 = 149/3600;
```

```
lam6 = 312/3600; mu = 30/60;
```

```
N = 100; % velikost matice
```

```
cyklu = 10;
```

```
x = 0:1:N-1;
```

*Počátečních vektorů pravděpodobností je zde 6 (máme 6 směrů)*

```
p01 = poisspdf(x, lam1); p02 = poisspdf(x, lam2); p03 = poisspdf(x, lam3); p04 = poisspdf(x, lam4);
```

```
p05 = poisspdf(x, lam5); p06 = poisspdf(x, lam6);
```

```
for krok = 0:1:cyklu % pres cykly krizovatky
```

```
cas = krok*C; % zacatek aktualniho cyklu
```

*Zde máme celkem 6 diferenciálních rovnic (6 směrů); v této situaci svítí na semaforu P zelená a na ostatních červená:*

```
[T1 P1] = ode45(@(t,p) mat1(t,p, lam1, mu), [cas, cas+t1], p01); směr1
```

```
[T2 P2] = ode45(@(t,p) mat1(t,p, lam2, mu), [cas, cas+t1], p02); směr2
```

```
[T3 P3] = ode45(@(t,p) mat1(t,p, lam3, 0), [cas, cas+t1], p03); směr3
```

```
[T4 P4] = ode45(@(t,p) mat1(t,p, lam4, 0), [cas, cas+t1], p04); směr4
```

```
[T5 P5] = ode45(@(t,p) mat1(t,p, lam5, 0), [cas, cas+t1], p05); směr5
```

```
[T6 P6] = ode45(@(t,p) mat1(t,p, lam6, 0), [cas, cas+t1], p06); směr6
```

```
[m,n] = size(P1); p11 = P1(m,:); finální stav smer1
```

```
[m,n] = size(P2); p12 = P2(m,:); finální stav smer2
```

```
[m,n] = size(P3); p13 = P3(m,:); finální stav smer3
```

```
[m,n] = size(P4); p14 = P4(m,:); finální stav smer4
```

```
[m,n] = size(P5); p15 = P5(m,:); finální stav smer5
```

```
[m,n] = size(P6); p16 = P6(m,:); finální stav smer6
```

*Ověření, zda součet pravděpodobností je 1:*

```
if sum(p11+p12+p13+p14+p15+p16)<6*.999
```

```
error('nekde mizi auta')
```

```
end
```

*6 diferenciálních rovnic (6 směrů); v této situaci svítí na semaforu S zelená a na ostatních červená:*

```
[T1 P1] = ode45(@(t,p) mat1(t,p, lam1, 0), [cas+t1, cas+t1+t2], p11); směr1
```

```
[T2 P2] = ode45(@(t,p) mat1(t,p, lam2, 0), [cas+t1, cas+t1+t2], p12); směr2
```

```

[T3 P3] = ode45(@(t,p) mat1(t,p,lam3,mu),[cas+t1,cas+t1+t2],p13);      směr3
[T4 P4] = ode45(@(t,p) mat1(t,p,lam4,mu),[cas+t1,cas+t1+t2],p14);      směr4
[T5 P5] = ode45(@(t,p) mat1(t,p,lam5,0),[cas+t1,cas+t1+t2],p15);      směr5
[T6 P6] = ode45(@(t,p) mat1(t,p,lam6,0),[cas+t1,cas+t1+t2],p16);      směr6
[m,n] = size(P1); p21 = P1(m,:);                                       finální stav smer1
[m,n] = size(P2); p22 = P2(m,:);                                       finální stav smer2
[m,n] = size(P3); p23 = P3(m,:);                                       finální stav smer3
[m,n] = size(P4); p24 = P4(m,:);                                       finální stav smer4
[m,n] = size(P5); p25 = P5(m,:);                                       finální stav smer5
[m,n] = size(P6); p26 = P6(m,:);                                       finální stav smer6
if sum(p21+p22+p23+p24+p25+p26)<6*.999
    error('nekde mizi auta')
end

```

*6 diferenciálních rovnic (6 směrů); v této situaci svítí na semaforu L zelená a na ostatních červená:*

```

[T1 P1] = ode45(@(t,p) mat1(t,p,lam1,0),[cas+t1+t2,cas+C],p21);      směr1
[T2 P2] = ode45(@(t,p) mat1(t,p,lam2,0),[cas+t1+t2,cas+C],p22);      směr2
[T3 P3] = ode45(@(t,p) mat1(t,p,lam3,0),[cas+t1+t2,cas+C],p23);      směr3
[T4 P4] = ode45(@(t,p) mat1(t,p,lam4,0),[cas+t1+t2,cas+C],p24);      směr4
[T5 P5] = ode45(@(t,p) mat1(t,p,lam5,mu),[cas+t1+t2,cas+C],p25);      směr5
[T6 P6] = ode45(@(t,p) mat1(t,p,lam6,mu),[cas+t1+t2,cas+C],p26);      směr6
[m,n] = size(P1); p01 = P1(m,:);                                       finální stav smer1
[m,n] = size(P2); p02 = P2(m,:);                                       finální stav smer2
[m,n] = size(P3); p03 = P3(m,:);                                       finální stav smer3
[m,n] = size(P4); p04 = P4(m,:);                                       finální stav smer4
[m,n] = size(P5); p05 = P5(m,:);                                       finální stav smer5
[m,n] = size(P6); p06 = P6(m,:);                                       finální stav smer6
if sum(p01+p02+p03+p04+p05+p06)<6*.999
    error('nekde mizi auta')
end
end

```

*Výpočet střední hodnoty počtů aut v jednotlivých třech směrech v posledních třech přepnutích světelné signalizace*

```

vysl1 = sum(x.*p01) + sum(x.*p02) + sum(x.*p03) + sum(x.*p04) + sum(x.*p05) + sum(x.*p06);
vysl2 = sum(x.*p11) + sum(x.*p12) + sum(x.*p13) + sum(x.*p14) + sum(x.*p15) + sum(x.*p16);
vysl3 = sum(x.*p21) + sum(x.*p22) + sum(x.*p23) + sum(x.*p24) + sum(x.*p25) + sum(x.*p26);
vysl = vysl1 + vysl2 + vysl3;

```

*Pro nalezení optimálních dob trvání zelené v jednotlivých směrech příkazem fminsearch:*

```
options = optimset('TolX',0.0001,'display','iter')
```

Počáteční nastavení  $t_1$  i  $t_2$  je na 20 sekund ( $t_3 = C - t_1 - t_2$ ):

$x = \text{fminsearch}(@t) \text{cekani}(t), [20 \ 20], \text{options})$

### Příloha 3.5

Tento algoritmus je stejný jako v příloze 3.4, akorát se zde mění nastavení, kdy budou svítit na jednotlivých semaforech zelené barvy, tj. změna je v následujícím:

6 diferenciálních rovnic (6 směrů); v této situaci svítí zelená ve směru 1, 2 a 6:

[T1 P1] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam1,mu),[cas,cas+t1],p01);	směr1
[T2 P2] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam2,mu),[cas,cas+t1],p02);	směr2
[T3 P3] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam3,0),[cas,cas+t1],p03);	směr3
[T4 P4] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam4,0),[cas,cas+t1],p04);	směr4
[T5 P5] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam5,0),[cas,cas+t1],p05);	směr5
[T6 P6] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam6,mu),[cas,cas+t1],p06);	směr6

6 diferenciálních rovnic (6 směrů); v této situaci svítí zelená ve směrech 2, 3 a 4:

[T1 P1] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam1,0),[cas+t1,cas+t1+t2],p11);	směr1
[T2 P2] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam2,mu),[cas+t1,cas+t1+t2],p12);	směr2
[T3 P3] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam3,mu),[cas+t1,cas+t1+t2],p13);	směr3
[T4 P4] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam4,mu),[cas+t1,cas+t1+t2],p14);	směr4
[T5 P5] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam5,0),[cas+t1,cas+t1+t2],p15);	směr5
[T6 P6] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam6,0),[cas+t1,cas+t1+t2],p16);	směr6

6 diferenciálních rovnic (6 směrů); v této situaci svítí zelená ve směrech 4 a 5:

[T1 P1] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam1,0),[cas+t1+t2,cas+C],p21);	směr1
[T2 P2] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam2,0),[cas+t1+t2,cas+C],p22);	směr2
[T3 P3] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam3,0),[cas+t1+t2,cas+C],p23);	směr3
[T4 P4] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam4,mu),[cas+t1+t2,cas+C],p24);	směr4
[T5 P5] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam5,mu),[cas+t1+t2,cas+C],p25);	směr5
[T6 P6] = ode45(@t,p) mat1(t,p,lam6,0),[cas+t1+t2,cas+C],p26);	směr6

## Příloha 4

Projektová dokumentace křižovatky v Karviné:

