

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky



Bakalářská práce

Ondřej Vlček

OPTIMALIZACE (ÚLOHY NA EXTRÉMY)

Olomouc 2014

Vedoucí bakalářské práce:

Doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jen uvedenou literaturu a zdroje.

V Olomouci dne 7. 5. 2014

.....

Poděkování

Rád bych poděkoval Doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc. za její čas, připomínky, cenné rady a hlavně za trpělivost během vedení mé bakalářské práce.

OBSAH

ÚVOD.....	5
1 SPOJITOST FUNKCE	7
1.1 Definice spojité funkce	7
1.2 Věty o spojitých funkcích	8
2 MONOTÓNNOST.....	10
2.1 Podmínky monotónnosti	10
3 LOKÁLNÍ EXTRÉMY	15
3.1 Definice lokálních extrémů.....	15
3.2 Nutná podmínka existence lokálního extrému.....	16
3.2.1 Stacionární bod.....	16
3.3 Postačující podmínka existence lokálního extrému.....	19
4 GLOBÁLNÍ EXTRÉMY	22
4.1 Definice globálních extrémů.....	22
5 OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY	25
5.1 Slovní úlohy na extrémy	25
5.2 Sbírka řešených úloh.....	26
5.2.1 Úlohy z geometrie	26
5.2.1.1 Úlohy s rovinnými útvary	26
5.2.1.2 Úlohy s prostorovými útvary	34
5.2.2 Úloha z fyziky	45
5.2.3 Ostatní úlohy	46
5.2.4 Sbírka neřešených úloh s uvedeným výsledkem.....	52
5.2.5 Sbírka neřešených úloh bez uvedeného výsledku.....	55
ZÁVĚR	59
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	60
SEZNAM POUŽITÝCH INTERNETOVÝCH ZDROJŮ	62
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	65
ANOTACE	66

ÚVOD

Bakalářskou práci na téma Optimalizace (úlohy na extrémy) jsem si vybral, protože svým obsahem spadá do matematické analýzy, kterou považuji za velice atraktivní matematickou disciplínu, zejména potom diferenciální počet.

Průběh funkce a vyšetřování extrémů funkcí jsou považovány za jedny z nejdůležitějších částí v diferenciálním počtu. Aplikace znalostí extrémů funkcí můžeme využít i v běžném životě.

Samotné téma optimalizace je velice rozsáhlé, proto jsem se ve své práci zaměřil pouze na optimalizační extrémní slovní úlohy. Z hlediska charakteru se rozlišují problémy statické a dynamické optimalizace. Optimalizačních metod a problému existuje nepřehledné množství, ať už se jedná o problémy kombinatorické, diskrétní, lineární nebo celočíselné optimalizace. Ovládání a umění řešit optimalizační problém, patří dnes mezi schopnosti úspěšného počítačového programátora. Optimalizační metody v současnosti hojně využívají velké finanční korporace za účelem minimalizace nákladů a maximalizace vlastních zisků.

Cílem mé bakalářské práce bylo seznámit čtenáře se základními pojmy a postupy k úspěšnému řešení úloh, v nichž se využívá vyšetřování extrémů funkcí jedné proměnné. Dále jsem se pokusil sestavit sbírku vzorově vyřešených úloh v rámci daného tématu. Sbírkou také obsahuje různé typy příkladů k samostatnému řešení. U některých úloh je uveden správný výsledek pro kontrolu řešení. Od čtenáře této práce se očekávají základní znalosti z diferenciálního počtu, jde zejména o pojmy derivace, limita a další, které nebudou blíže vysvětleny.

V první kapitole se čtenář seznámí s pojmem spojitě funkce a také s tzv. větami o spojitých funkcích, tzn. 1. a 2. Weierstrassova věta a Bolzanova mezihodnotová věta, které mají význam pro vyšetřování extrémů funkcí.

Druhá kapitola se věnuje pojmu monotónnost. Jsou zde zmíněny podmínky, za kterých je funkce monotónní. Vlastností monotónních funkcí se využívá při hledání extrémů funkcí.

Třetí a čtvrtá kapitola se věnují pojmům jako lokální extrém, globální (absolutní) extrém, stacionární bod, nutná podmínka existence lokálního extrému a postačující podmínka existence lokálního extrému.

Poslední kapitola je věnována aplikaci vyšetřování extrémů v praktických slovních úlohách (zejména v geometrických, ale také ve fyzikálních a ostatních druzích úloh). Tato kapitola má čtyři stěžejní části: návod, jak postupovat při řešení těchto slovních úloh, sbírku řešených slovních úloh, sbírku neřešených slovních úloh s uvedeným výsledkem a sbírku neřešených slovních úloh bez uvedeného výsledku.

1 SPOJITOST FUNKCE

1.1 Definice spojité funkce

DEFINICE 1.1: Funkce f je v bodě $a \in \mathbb{R}$ spojitá, právě když existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a platí: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (Vošický, 2007, s. 169).

DEFINICE 1.2: Funkci f nazýváme spojitou zprava, resp. zleva, v bodě a , jestliže $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ (Laitochová, 2007, s. 29).

Geometricky spojitost funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ mj. znamená, že graf funkce f je v bodě $x = a$ „nepřerušný“, tzn. obsahuje bod $[a; f(a)]$. Lze dokázat, že všechny elementární funkce (např. polynommická, logaritmická, exponenciální, mocninná, goniometrická) jsou spojitě v bodech, které patří s příslušným okolím do jejich definičního oboru (Vošický, 2007, s. 169).

Platí:

- 1) Je-li funkce f v bodě a spojitá a $f(a)$ je její funkční hodnota v tom bodě, pak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

- 2) Je-li funkce $u = g(x)$ spojitá v bodě a , tj. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ a funkce $y = f(u)$

spojitá v bodě $g(a)$, tj. $\lim_{x \rightarrow a} f(u) = f[g(a)]$, pak existuje $\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)]$ a

$$\text{platí: } \lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right] = f[g(a)].$$

DEFINICE 1.3: Funkce se nazývá nespojitá v bodě a , není-li v něm definována, nebo v tom bodě nemá limitu, nebo se v tom bodě její limita nerovná funkční hodnotě (Laitochová, 2007, s. 30).

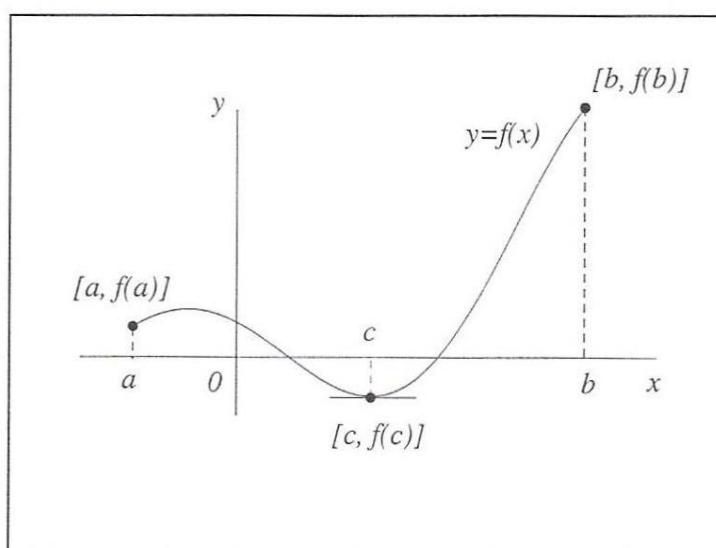
1.2 Věty o spojitých funkcích

VĚTA 1.1: 1. Weierstrassova věta

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je na něm ohraničená (Laitochová, 2007, s. 31).

VĚTA 1.2: 2. Weierstrassova věta

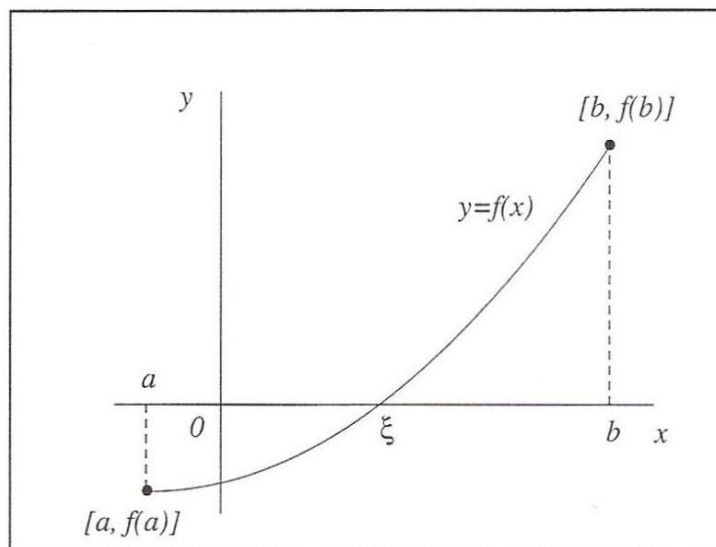
Je-li funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, pak v něm nabývá (alespoň v jednom bodě) své nejmenší a největší hodnoty (Laitochová, 2007, s. 32).



Obr. 1.1 (Laitochová, 2007, s. 31)

VĚTA 1.3: Bolzanova mezihodnotová věta

Funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$, kde $f(a) \neq f(b)$. Speciálně, je-li $f(a)f(b) < 0$, pak existuje alespoň jedno číslo $\xi \in (a, b)$ tak, že $f(\xi) = 0$ (Laitochová, 2007, s. 32).



Obr. 1.2 (Laitochová, 2007, s. 32)

VĚTA 1.4: Necht' funkce $f(x)$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak nabývá každé hodnoty mezi svým absolutním minimem a absolutním maximem (Laitochová, 2007, s. 32).

2 MONOTÓNNOST

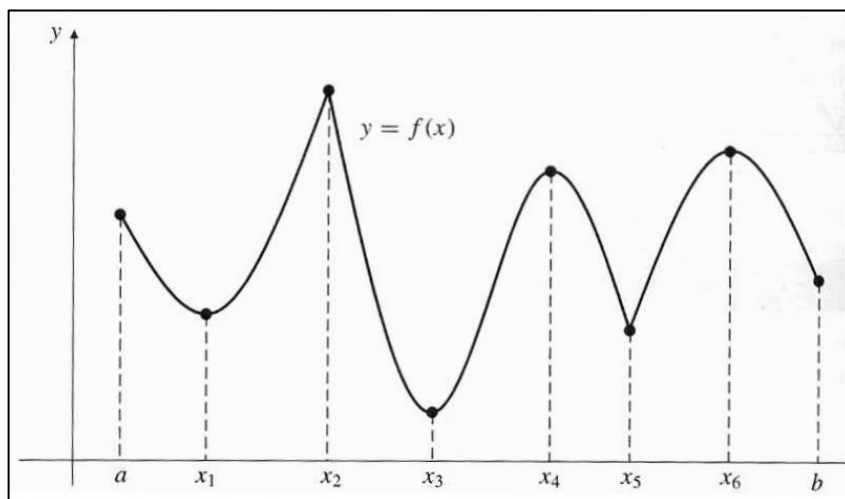
Monotónnost je vlastnost funkce, metodami matematické analýzy lze určit intervaly, v nichž je funkce konstantní, rostoucí, resp. klesající příp. nerostoucí resp. neklesající a stanovit její extrémy. Nejlépe jde tato vlastnost vyčíst z grafu, jestliže máte pocit, že graf klesá, jedná se o funkci klesající, roste-li funkce, je to funkce rostoucí.

2.1 Podmínky monotónnosti

Postačující podmínku ryzí monotónnosti funkce na intervalu udává věta:

VĚTA 2.1: Nechť má funkce f na otevřeném intervalu $(a;b)$ vlastní derivaci. Pak platí:

1. Funkce f je neklesající na $(a;b)$ právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na $(a;b)$.
2. Funkce f je rostoucí na $(a;b)$ právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na $(a;b)$, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu (a,b) (Vošický, 2007, s. 172).



Obr. 2.1 (Gurka, 2011, s. 2, [online])

Funkce f roste na intervalech: $\langle x_1, x_2 \rangle$, $\langle x_3, x_4 \rangle$, $\langle x_5, x_6 \rangle$ a klesá na intervalech $\langle a, x_1 \rangle$, $\langle x_2, x_3 \rangle$, $\langle x_4, x_5 \rangle$, $\langle x_6, b \rangle$.

POZNÁMKA 2.1: Platnost předchozí věty lze rozšířit na interval $\langle a; b \rangle$ libovolného typu. Stačí předpokládat, že f je spojitá na $\langle a; b \rangle$ a f' existuje uvnitř $\langle a; b \rangle$. Věta dokonce platí, i když f má někde nevlastní derivaci, pokud se předpokládá, že je f spojitá.

PŘÍKLAD 2.1: Určete intervaly monotónnosti funkce $f : y = x^3 + 3x^2 - 9x$.

ŘEŠENÍ:

Nejprve vypočítáme první derivaci zadané funkce:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9.$$

Potom funkci upravíme a zjednodušíme:

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3.$$

Nyní zjistíme intervaly, ve kterých je tato derivace kladná resp. záporná. Řešíme nerovnici pomocí metody nulových bodů (jedná se o spojitou funkci).

Zjistíme kořeny rovnice:

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -3$$

Nulovými body jsou 1 a -3, z toho nám vzniknou tři intervaly $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$, $(1; \infty)$.

V intervalu $(-\infty; -3)$ je derivace kladná, to ověříme dosazením např. $x = -5$ do první derivace.

$$f'(-5) = 36 > 0$$

Funkce f je tedy v intervalu $(-\infty; -3)$ rostoucí.

V intervalu $(-3; 1)$ je derivace je záporná, to ověříme dosazením $x = 0$ do první derivace.

$$f'(0) = -9 < 0$$

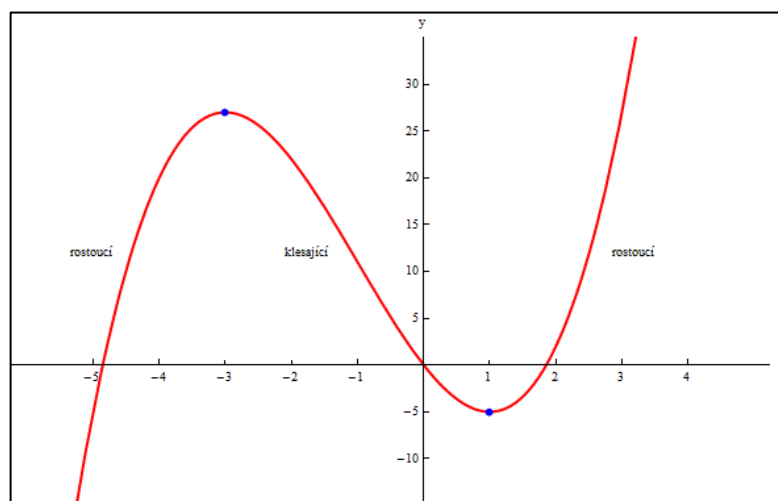
Funkce f je tedy v intervalu $(-3; 1)$ klesající.

V intervalu $(1; \infty)$ je derivace kladná, to ověříme dosazením $x = 3$ do první derivace.

$$f'(3) = 36 > 0$$

Funkce f je tedy v intervalu $(1; \infty)$ rostoucí.

ZÁVĚR: Funkce $f : y = x^3 + 3x^2 - 9x$ je rostoucí v intervalech $(-\infty; -3)$ a $(1; \infty)$, klesající v intervalu $(-3; 1)$.



Obr. 2.2 (vlastní zpracování, 2014)

Z věty 2.1 vyplývá jednoduchá postačující podmínka pro monotónnost funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$.

VĚTA 2.2: Necht' funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$ a má v každém bodě $x \in (a; b)$ derivaci $f'(x)$. Pak platí:

Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a; b)$, je funkce f **rostoucí** na $\langle a; b \rangle$.

Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (a; b)$, je funkce f **klesající** na $\langle a; b \rangle$

(Vošický, 2007, s. 172).

POZNÁMKA 2.2: Obrácená věta k větě 2.2 neplatí. Je-li funkce v bodě x rostoucí a existuje-li v tomto bodě derivace $f'(x)$, pak nemusí ještě platit nerovnost $f'(x) > 0$ (Jirásek a kolektiv, 1981, s. 473).

CVIČENÍ 2.1: Určete intervaly monotónnosti funkcí:

a) $y = 3x^4 - 8x^3 - 48x^2$

[rostoucí v $\langle -2; 0 \rangle$, $\langle 4; \infty \rangle$, klesající v $(-\infty; -2)$, $\langle 0; 4 \rangle$]

b) $y = 5x^6 - 6x^5 - 15x^4$

[rostoucí v $\langle -1; 0 \rangle$, $\langle 2; \infty \rangle$, klesající $\langle -\infty; -1 \rangle$, $\langle 0; 2 \rangle$]

c) $y = x + \frac{1}{x}$

[rostoucí v $(-\infty; -1)$, $\langle 1; \infty \rangle$, klesající $\langle -1; 0 \rangle$, $(0; 1)$]

d) $y = \frac{x}{1-x^2}$

[rostoucí v $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; \infty)$]

e) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

[rostoucí v $(0; e^2)$, klesající v $(e^2; \infty)$]

f) $y = \cos 2x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

[rostoucí v $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, klesající $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, v bodě 0 lokální maximum 1]

3 LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Rozlišujeme lokální extrém, kdy vyšetřujeme největší a nejmenší hodnoty funkce v „malém“ (předem neurčeném) okolí posuzovaného bodu, a globální extrém, kdy hledáme extrémální hodnoty na předem dané množině.

3.1 Definice lokálních extrémů

Důsledkem věty 2.1 je nutná podmínka pro lokální extrém spojitě funkce na otevřeném intervalu $(a; b)$. Lokální extrém může nastat jen v těch bodech, kde je tečna rovnoběžná s osou x (tedy $f'(x) = 0$, nebo v bodech, pro které graf funkce tečnu nemá ($f'(x)$ neexistuje). Druh extrému určuje postačující podmínka existence lokálního extrému.

VĚTA 3.1: Necht' funkce f je v bodě x_0 spojitá a má v okolí x_0 derivaci (přičemž v x_0 derivace existovat může, ale nemusí). Pak:

1. Funkce f má v x_0 ostré lokální maximum, je-li pro $x < x_0$ $f'(x) < 0$ a pro $x > x_0$ $f'(x) > 0$.
2. Funkce f má v x_0 ostré lokální minimum, je-li pro $x < x_0$ $f'(x) > 0$ a pro $x > x_0$ $f'(x) < 0$.
3. Jestliže funkce $f(x)$ nemění v x_0 znaménko, nemá funkce f v x_0 extrém.

POZNÁMKA 3.1: Výraz ostrý lokální extrém ještě nutně neznamená, že funkce $f(x)$ má v daném bodě jakýsi „hrot“. Výrazu ostrý lokální extrém využíváme k rozlišení od případů, kdy v jakkoli malém okolí bodu x_0 platí $f(x) = f(x_0)$ také pro některá $x \neq x_0$ (Knichal a kolektiv, 1965, s. 431).

3.2 Nutná podmínka existence lokálního extrému

VĚTA 3.2: (Nutná podmínka existence lokálního extrému). Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace $f'(x_0)$, platí $f'(x_0) = 0$ (Knichal a kolektiv, 1965, s. 431).

DŮKAZ: viz Knichal a kolektiv, 1965, s. 431

3.2.1 Stacionární bod

Při vyšetřování lokálních extrémů budeme postupovat následujícím způsobem. Ze zjištění, že $f'(x) = 0$ nutně nevyplývá, že funkce má v bodě x_0 lokální extrém. Ovšem určení první derivace je prvním krokem k nalezení lokálních extrémů.

Má-li funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 derivaci a je-li $f'(x) = 0$, pak bod x_0 nazýváme nulovým bodem první derivace nebo také stacionárním bodem funkce f . Tyto stacionární body jsou řešením rovnice $f'(x) = 0$. V těchto bodech může, ale nemusí mít funkce lokální extrémy. Tyto body jsou pouze „podezřelé z extrémů“.

DEFINICE 3.1: Necht' funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(x)$. Body, pro které platí $f'(x) = 0$ nazveme stacionární body.

Bylo by jistě nepraktické, kdybychom lokální extrémy vyšetřovali pomocí funkčních hodnot v jejich ryzím okolí. Přesto je to možné, pokud si uvědomíme vazbu na růst a klesání funkce a tím pádem i na znaménko první derivace (tj. $\text{sgn } f'(x)$). Velký pozor si ovšem musíme dát na body, ve kterých první derivace neexistuje. I to jsou potenciální adepti na extrém (Ústav matematiky FSI VUT Brno, 2014, [online]).

PŘÍKLAD 3.1: Určete lokální extrémy funkce:

a) $f : y = \frac{x^2}{1-x}$

První derivace funkce f :

$$f'(x) = \frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2}{(1-x)^2} = -\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Nutná podmínka pro extrém je splněna pro:

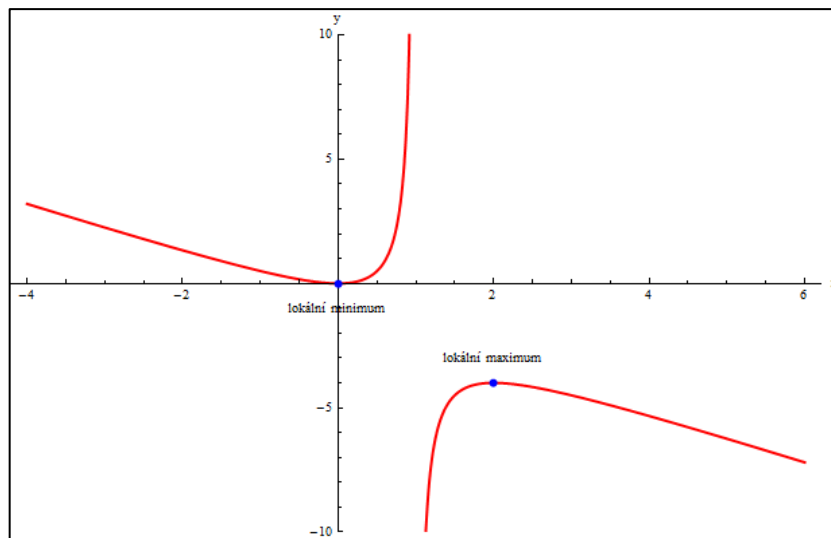
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} &= 0 \end{aligned}$$

Odtud dostaneme:

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x &= 0 \\ -x(x-2) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Jelikož pro $x < 0$ je $f'(x) > 0$ (funkce klesá) a pro $x > 0$ je $f'(x) < 0$ (funkce roste), mění první derivace v bodě $x = 0$ znaménko a funkce má v bodě $x = 0$ ostré lokální minimum.

Jelikož pro $x < 2$ je $f'(x) < 0$ (funkce klesá) a pro $x > 2$ je $f'(x) > 0$ (funkce roste), mění první derivace v bodě $x = 2$ znaménko a funkce má v bodě $x = 2$ ostré lokální maximum.



Obr. 3.1 (vlastní zpracování, 2014)

b) $f : y = 3x^3 - 1$

První derivace funkce f :

$$f'(x) = 9x^2$$

Nutná podmínka pro extrém je splněna pro:

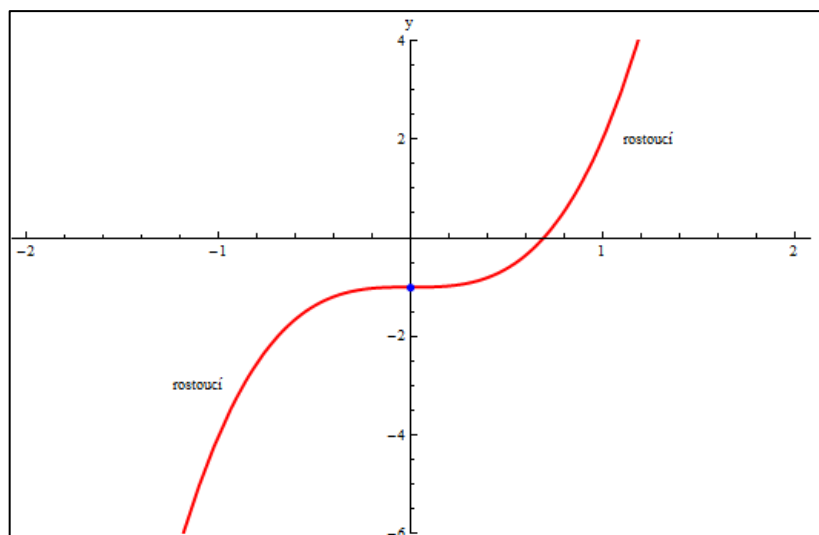
$$f'(x) = 0$$

$$9x^2 = 0$$

Odtud dostaneme:

$$x = 0$$

Jelikož funkce má pro $x < 0$ i pro $x > 0$ stejnou hodnotu, první derivace $f'(x) > 0$, není splněna postačující podmínka pro extrém a funkce v bodě $x = 0$ extrém nemá.



Obr. 3.2 (vlastní pracování, 2014)

3.3 Postačující podmínka existence lokálního extrému

V praxi se často využívá k určení extrému tzv. druhá věta o postačujících podmínkách pro lokální extrémy.

VĚTA 3.3: (Postačující podmínka existence lokálního extrému). Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 hodnotu derivace $f'(x_0) = 0$ a existuje-li druhá derivace $f''(x_0)$, pak:

1. Je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 lokální minimum.
2. Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 lokální maximum.
3. Je-li $f''(x_0) = 0$, nelze o existenci extrému rozhodnout pomocí druhé derivace (Knichal a kolektiv, 1965, s. 436).

DŮKAZ: viz (Knichal a kolektiv, 1965, s. 436).

PŘÍKLAD 3.2: Určete lokální extrémy funkce $f : y = (x^2 - 1)^2$

První derivace funkce f :

$$f'(x) = 4x \cdot (x^2 - 1)$$

Nutná podmínka pro extrém je splněna pro:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\4x \cdot (x^2 - 1) &= 0\end{aligned}$$

Odtud dostaneme:

$$\begin{aligned}4x \cdot (x+1) \cdot (x-1) &= 0 \\x_1 &= 0 \\x_2 &= -1 \\x_3 &= 1\end{aligned}$$

Druhá derivace funkce f :

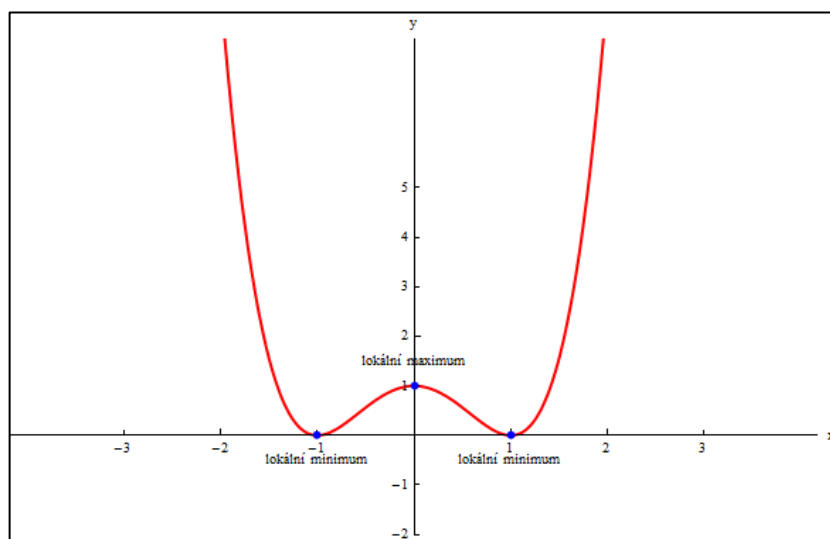
$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

Platí:

$$f''(0) = 12 \cdot 0 - 4 = -4 < 0 \dots \text{funkce má v bodě } x = 0 \text{ lokální maximum}$$

$$f''(-1) = 12 \cdot 1 - 4 = 8 > 0 \dots \text{funkce má v bodě } x = -1 \text{ lokální minimum}$$

$$f''(1) = 12 \cdot 1 - 4 = 8 > 0 \dots \text{funkce má v bodě } x = 1 \text{ lokální minimum}$$



Obr. 3.3 (vlastní zpracování, 2014)

CVIČENÍ 3.1: Určete lokální extrémy funkcí:
--

a) $y = 2x^2 - x^4$

[lokální minimum $y = 0$ v bodě $x = 0$, lokální maximum $y = 1$ v bodech $x = \pm 1$]

b) $y = (x-1)^3$

[nemá lokální extrémy]

c) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$

[lokální minimum $y = 0$ v bodě $x = 1$, lokální maximum $y = \frac{4}{e^2} = 0,541$ v bodě
 $x = e^2 = 7,389$]

4 GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Kromě lokálních extrémů jsou důležité při studiu průběhu funkce extrémy funkce v jejím definičním oboru, popř. nějaké jeho podmnožině. Lokální maximum, resp. lokální minimum, kterých funkce nabývá v jistém uzavřeném intervalu, nemusí být vždy největší, resp. nejmenší hodnotu funkce v tomto intervalu.

4.1 Definice globálních extrémů

DEFINICE 4.1: Funkce f má v bodě $x_0 \in M \subset D(f)$ minimum na množině M , jestliže pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq f(x_0)$. Funkce f má v bodě $x_0 \in M \subset D(f)$ maximum na množině M , jestliže pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq f(x_0)$. Má-li funkce f v bodě x_0 minimum, resp. maximum na množině $D(f)$, říkáme též, že má v bodě x_0 globální maximum, resp. globální minimum (Riečan, 1987, s. 48).

VĚTA 4.1: Nechť funkce f má na intervalu (a, b) spojitou derivaci a $x_0 \in (a, b)$ je jediný bod ve kterém $f'(x_0) = 0$. Má-li f v bodě x_0 lokální minimum, pak má v bodě x_0 minimum na množině (a, b) . Má-li f v bodě x_0 lokální maximum, pak má v bodě x_0 maximum na množině (a, b) (Riečan, 1987, s. 49).

DŮKAZ: viz Riečan, 1987, s. 49

VĚTA 4.2: Spojitá funkce f má v intervalu $\langle a; b \rangle$ globální (absolutní) extrém v bodě x_0 právě tehdy, je-li x_0 bodem, v němž nastává lokální extrém nebo krajním bodem intervalu $\langle a; b \rangle$. Globální extrémy určíme porovnáním hodnot $f(a)$, $f(b)$ a funkčních hodnot $f(x_0)$ v bodech x_0 , ve kterých má funkce lokální extrémy (Vošický, 2007, s. 174).

PŘÍKLAD 4.1: Najděte globální a lokální extrémy funkce $f : y = x^3 - 3x + 20$ v intervalu $\langle -3; 3 \rangle$.

Vypočítáme první derivaci funkce f :

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Zjistíme stacionární body tak, že položíme první derivaci rovnu nule:

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Zjistíme, že v bodě $x = -1$ nabývá funkce lokálního maxima,

$$f(-1) = 22$$

a v bodě $x = 1$ nabývá funkce lokálního minima,

$$f(1) = 18$$

Dále zjistíme, jakých hodnot nabývá funkce v krajních bodech intervalu:

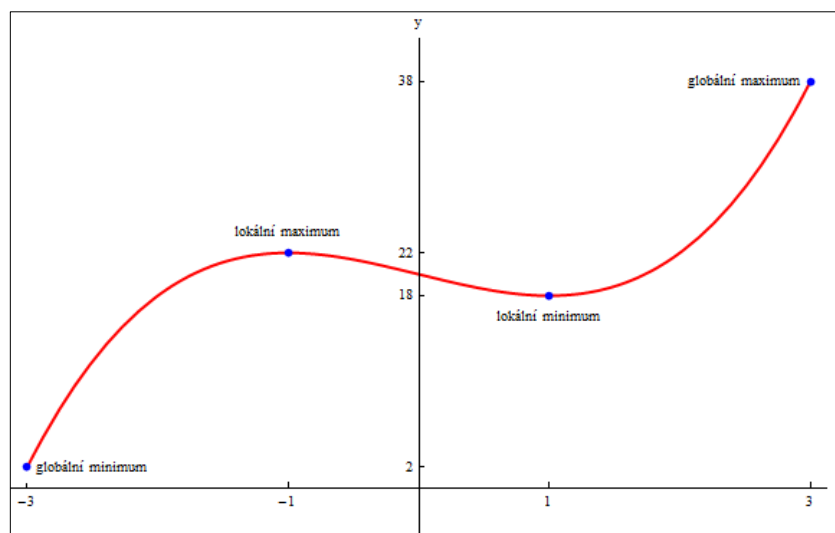
$$f(-3) = 2$$

$$f(3) = 38$$

Porovnáním funkčních hodnot nalezneme globální maximum a minimum funkce:

$$f(-3) = 2 < f(1) = 18 < f(-1) = 22 < f(3) = 38$$

Funkce f nabývá v bodě $x = -3$ globálního minima, v bodě $x = 3$ globálního maxima, v bodě $x = -1$ lokálního maxima a v bodě $x = 1$ lokálního minima.



Obr. 4.1 (vlastní zpracování, 2014)

CVIČENÍ 4.1: Najděte globální extrémy funkcí:

a) $y = x^2 - 3x + 4$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$

$$\left[\text{globální minimum } y = \frac{7}{4} \text{ v bodě } x = \frac{3}{2}, \text{ globální maximum } y = 4 \text{ v bodě } x = 0 \right]$$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$

$$[\text{globální minimum } y = -20 \text{ v bodě } x = 2, \text{ globální maximum } y = 0 \text{ v bodě } x = 0]$$

c) $y = x^2 - 3x + 4$ na intervalu $(2, 3)$

[nemá globální extrémy]

5 OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY

„Matematická úloha optimalizace je snahou o nalezení takových hodnot proměnných, pro které daná cílová či účelová funkce nabývá minimální nebo maximální hodnoty. Mnoho teoretických úloh i úloh z reálného světa vede na řešení úlohy optimalizace. Často se vyskytuje při modelování fyzikálních jevů, kde cílová funkce f má význam energie fyzikálního systému, která má v rovnovážném stavu systému být minimální“ (Wikipedia: the free encyclopedia, 2013, [online]).

5.1 Slovní úlohy na extrémy

Slovní úlohy na extrémy se zabývají problémy určit absolutní extrém funkce jedné proměnné na určitém intervalu, na kterém je funkce spojitá a má uvnitř celého intervalu derivaci (Vošický, 2007, s. 176).

Při řešení slovních úloh:

1. Nejprve přeformulujeme na úlohu hledání globálního extrému nějaké funkce na určité množině.
2. Dále vyřešíme matematickou úlohu.
 - a. Volba proměnné a určení jejího oboru.
 - b. Vyjádření extremalizované veličiny jako funkce zvolené proměnné.
 - c. Vyšetření extrému funkce v daném oboru.
 - d. Kontrola, zda se jedná o požadovaný extrém.
3. Nakonec výsledek interpretujeme v původní úloze.

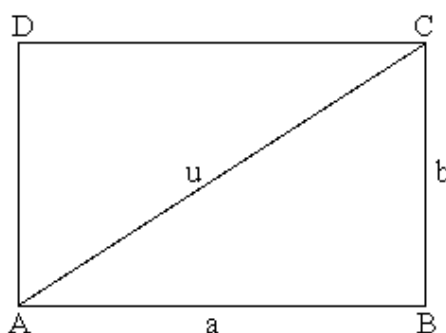
5.2 Sbírka řešených úloh

5.2.1 Úlohy z geometrie

5.2.1.1 Úlohy s rovinnými útvary

PŘÍKLAD 5.1: Najděte pravoúhelník, který má při daném obvodu maximální obsah (Riečan, 1987, s. 51).

ŘEŠENÍ:



Obr. 5.1 (tahaky.lam.cz, 2014, [online])

Vzorec pro výpočet obsahu pravoúhelníka:

$$S = a \cdot b$$

Vzorec pro výpočet obvodu pravoúhelníka:

$$o = 2a + 2b$$

Ze vzorce pro obvod pravoúhelníka si vyjádříme vztah pro výpočet např. strany a :

$$a = \frac{o - 2b}{2} = \frac{o}{2} - b$$

Tento vztah dosadíme do vzorce pro obsah:

$$S = \left(\frac{o}{2} - b \right) \cdot b = \frac{ob}{2} - b^2$$

Získanou funkci zderivujeme:

$$S'(b) = \frac{o}{2} - 2b$$

Výsledek položíme roven nule, abychom získali bod (y) podezřelý z extrému:

$$S'(b) = 0$$

$$\frac{o}{2} - 2b = 0$$

$$2b = \frac{o}{2}$$

$$b = \frac{o}{4}$$

Pomocí druhé derivace zkontrolujeme, zda se opravdu jedná o maximum:

$$S''(b) = -2 < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

Na závěr dosadíme hodnotu b do vzorce a určíme velikost strany a :

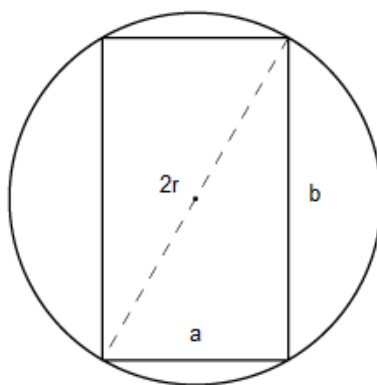
$$a = \frac{o}{2} - b = \frac{o}{2} - \frac{o}{4} = \frac{o}{4}$$

ZÁVĚR: Maximální obsah při daném obvodu má pravoúhelník o rozměrech $a = \frac{o}{4}$ a

$b = \frac{o}{4}$ tzn. čtverec.

PŘÍKLAD 5.2: Do kruhu o poloměru r vepište pravoúhelník maximálního obsahu (Hrubý a Kubát, 2001, s. 141).

ŘEŠENÍ:



Obr. 5.2 (vlastní zpracování, 2014)

Vzorec pro výpočet obsahu pravoúhelníka:

$$S = a \cdot b$$

Za pomoci Pythagorovy věty si určíme vztah pro výpočet úhlopříčky pravoúhelníka:

$$4r^2 = a^2 + b^2$$

Z daného vztahu si vyjádříme stranu a :

$$a = \sqrt{4r^2 - b^2}$$

Tu dosadíme do vzorce pro výpočet obsahu pravoúhelníka:

$$S = a \cdot b = b\sqrt{4r^2 - b^2} = \sqrt{4r^2b^2 - b^4}$$

Získali jsme funkci S , kterou derivujeme podle proměnné b :

$$S'(b) = \frac{1}{2}(4r^2b^2 - b^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (8br^2 - 4b^3)$$

Získanou funkci derivujeme a následně pokládáme rovnu nule a řešíme získanou rovnici s cílem určit stacionární body funkce S .

$$S'(b) = 0$$

$$\frac{1}{2}(4r^2b^2 - b^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (8br^2 - 4b^3) = 0$$

$$\frac{8br^2 - 4b^3}{4\sqrt{r^2b^2 - b^4}} = 0$$

$$8br^2 - 4b^3 = 0$$

$$4b^3 = 8br^2$$

$$b^2 = 2r^2$$

$$b = r\sqrt{2}$$

Na závěr je potřeba ověřit, zdali funkce $S(b)$ nabývá v tomto bodě svého maxima.

Pro $0 \leq b < r\sqrt{2}$ platí:

$$\frac{1}{2} \cdot (4r^2b^2 - b^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (8br^2 - 4b^3) > 0 \Rightarrow S'(b) > 0$$

a pro $r\sqrt{2} < b < 2r$ platí:

$$\frac{1}{2} \cdot (4r^2b^2 - b^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (8br^2 - 4b^3) < 0 \Rightarrow S'(b) < 0$$

Funkce $S(b)$ nabývá v bodě $b = r\sqrt{2}$ svého maxima.

Dosadíme hodnotu b do vztahu pro stranu a pravoúhelníka:

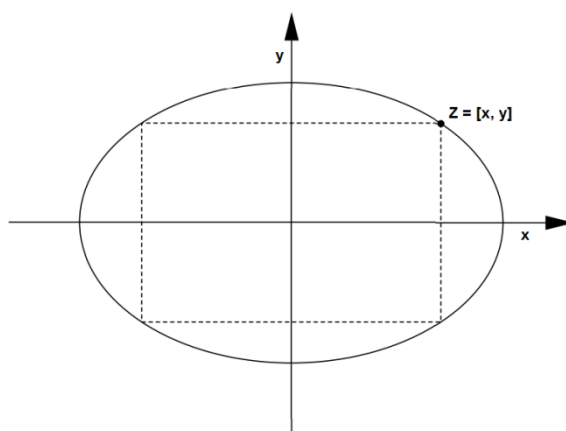
$$a = \sqrt{4r^2 - b^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$$

ZÁVĚR: Pravoúhelník maximálního obsahu získáme, pokud bude mít rozměry

$a = r\sqrt{2}$ a $b = r\sqrt{2}$, tzn. čtverec.

PŘÍKLAD 5.3: Do elipsy $4x^2 + 9y^2 = 36$ vepište obdélník maximálního obsahu. Určete jeho rozměry (Petáková, 1998, s. 161).

ŘEŠENÍ:



Obr. 5.3 (vlastní zpracování, 2014)

Bod Z má souřadnice:

$$Z = [x, y]$$

Obsah obdélníku určíme jako:

$$S = 4xy$$

Bod Z leží na elipse, určíme y -ovou souřadnici z rovnice elipsy:

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$9y^2 = 36 - 4x^2$$

$$y^2 = 4 - \frac{4x^2}{9}$$

$$y = \sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}$$

Dále vyjádříme obsah vepsaného obdélníku jako funkci jedné proměnné:

$$S = 4x\sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}$$

Funkci S derivujeme podle proměnné x :

$$\begin{aligned} S'(x) &= 4 \cdot \left[\sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}} + \frac{x}{2\sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}} \left(-\frac{8x}{9} \right) \right] = 4 \cdot \left(\sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}} - \frac{4x^2}{9\sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}} \right) = \\ &= 4 \cdot \frac{9\left(4 - \frac{4x^2}{9}\right) - 4x^2}{9\sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}} = 4 \cdot \frac{36 - 8x^2}{9\sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}} = \frac{144 - 32x^2}{9\sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}} \end{aligned}$$

Určíme stacionární body funkce S tak, že položíme první derivaci rovnu nule:

$$\begin{aligned} S'(x) &= 0 \\ \frac{144 - 32x^2}{9\sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}} &= 0 \\ 144 - 32x^2 &= 0 \\ 32x^2 &= 144 \\ x^2 &= \frac{9}{2} \\ x &= \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Upravíme:

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Na závěr je potřeba ověřit, zdali funkce $S(x)$ nabývá v tomto bodě svého maxima.

Pro $0 \leq x < \frac{3\sqrt{2}}{2}$ platí:

$$\frac{144 - 32x^2}{9\sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}} > 0 \Rightarrow S'(x) > 0$$

a pro $\frac{3\sqrt{2}}{2} < x < 3$ platí:

$$\frac{144 - 32x^2}{9\sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}} < 0 \Rightarrow S'(x) < 0$$

Funkce $S(x)$ nabývá v bodě $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ svého maxima.

Dosadíme hodnotu x do vztahu y -ovou souřadnici:

$$y = \sqrt{4 - \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{2}}$$

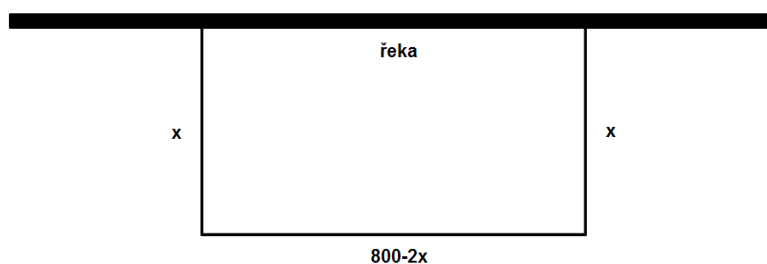
$$y = \sqrt{4 - \frac{36}{18}}$$

$$y = \sqrt{2}$$

ZÁVĚR: Ideální rozměry obdélníka jsou $x = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ a $y = 2\sqrt{2}$.

PŘÍKLAD 5.4: Na břehu řeky třeba opлотit zahradu obdélníkového tvaru (jednu stranu obdélníku tvoří řeka) pletivem dlouhým $l = 800$ m. Jaké rozměry musí mít zahrada, aby jí výměra byla maximální (Přklady.eu, 2014, [online])?

ŘEŠENÍ:



Obr. 5.4 (vlastní zpracování, 2014)

Nejprve si vyjádříme jednotlivé strany zahrady:

Strana a :

$$x$$

Strana b :

$$800 - 2x$$

Vzorec pro obsah zahrady, do kterého dosadíme za jednotlivé strany:

$$S = a \cdot b = x \cdot (800 - 2x) = 800x - 2x^2$$

Vypočítáme první derivaci podle x :

$$S'(x) = 800 - 4x$$

Určíme stacionární body funkce S tak, že položíme první derivaci rovnu nule:

$$S'(x) = 0$$

$$800 - 4x = 0$$

$$4x = 800$$

$$x = 200$$

Vypočítáme druhou derivaci podle x , abychom zjistili, zda se jedná o požadovaný extrém:

$$S''(x) = -4 < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

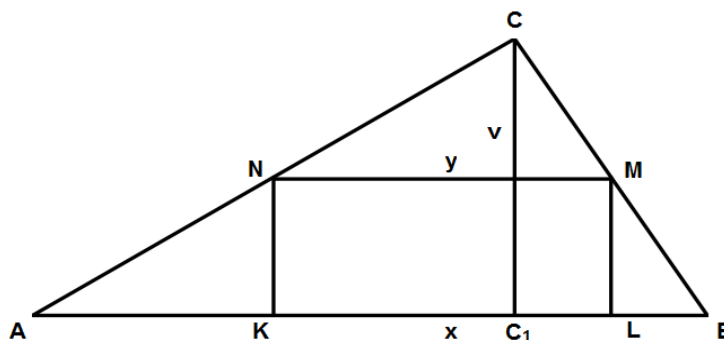
Dosadíme hodnotu x do vztahu pro stranu b :

$$800 - 2x = 800 - 400 = 400$$

ZÁVĚR: Zahradu s maximální výměrou získáme, pokud budou její rozměry $200 \text{ m} \times 400 \text{ m}$.

PŘÍKLAD 5.5: Z desky tvaru ostroúhlého trojúhelníku, jehož jedna strana má délku a , výška k této straně je v , má být vyříznuta obdélníková deska, přičemž jedna strana obdélníku má být částí dané strany trojúhelníku. Určete rozměry obdélníku tak, aby jeho obsah byl maximální (Bušek, 1999, s. 585).

ŘEŠENÍ:



Obr. 5.5 (vlastní zpracování, 2014)

Obsah obdélníku:

$$S = x \cdot y$$

Trojúhelníky NMC a ABC jsou podobné, z toho vyplývá:

$$\frac{x}{a} = \frac{v-y}{v}$$

Vyjádříme si vztah pro x :

$$x = a \cdot \frac{v-y}{v}$$

Tento vztah dosadíme do vzorce pro obsah obdélníka:

$$S = a \cdot \frac{v-y}{v} \cdot y$$

Upravíme:

$$S = ay - \frac{ay^2}{v}$$

Vypočítáme první derivaci funkce S podle proměnné y :

$$S'(y) = a - \frac{2ay}{v}$$

Určíme stacionární body tím, že položíme první derivaci rovnu nule:

$$S'(y) = 0$$

$$a - \frac{2ay}{v} = 0$$

$$av - 2ay = 0$$

$$2ay = av$$

$$y = \frac{v}{2}$$

Pomocí druhé derivace zkontrolujeme, zda se jedná o maximum.

$$S''(y) = -\frac{2a}{v} < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

Dosadíme hodnotu y do vzorce pro výšku a vypočítáme její velikost.

$$x = a \cdot \frac{v - \frac{v}{2}}{v}$$

$$x = \frac{\frac{av}{2}}{v}$$

$$x = \frac{av}{2v}$$

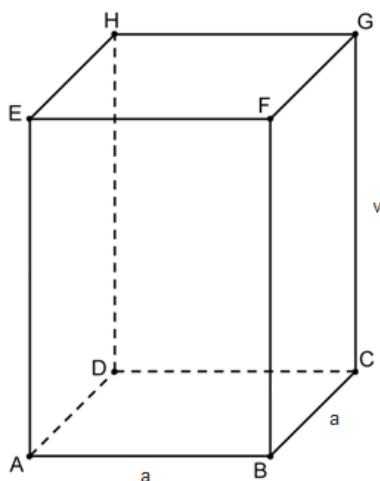
$$x = \frac{a}{2}$$

ZÁVĚR: Obdélník maximálního obsahu získáme pro $x = \frac{a}{2}$ a $y = \frac{v}{2}$.

5.2.1.2 Úlohy s prostorovými útvary

PŘÍKLAD 5.6: Najděte pravidelný čtyřboký hranol, který má při daném povrchu maximální objem (Hrubý a Kubát, 2001, s. 138).

ŘEŠENÍ:



Obr. 5.6 (vlastní zpracování, 2014)

Povrch pravidelného čtyřbokého hranolu:

$$S = 2a^2 + 4av,$$

z tohoto vzorce si vyjádříme výšku v .

$$v = \frac{S - 2a^2}{4a}$$

Objem pravidelného čtyřbokého hranolu:

$$V = a^2 \cdot v,$$

do tohoto vzorce dosadíme výšku v , kterou jsme si již vyjádřili.

$$V = a^2 \cdot \frac{S - 2a^2}{4a} = \frac{aS - 2a^3}{4} = \frac{aS}{4} - \frac{a^3}{2}$$

Vypočítáme první derivaci funkce V , podle proměnné a

$$V'(a) = \frac{S}{4} - \frac{3a^2}{2},$$

první derivaci položíme rovnu nule a nalezneme stacionární body.

$$V'(a) = 0$$

$$\frac{S}{4} - \frac{3a^2}{2} = 0$$

$$S - 6a^2 = 0$$

$$6a^2 = S$$

$$a = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

Pomocí druhé derivace zkontrolujeme, zda se jedná o maximum.

$$V''(a) = -3a$$

$$V''\left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right) = -3\sqrt{\frac{S}{6}} < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

Dosadíme hodnotu a do vzorce pro výšku a vypočítáme její velikost.

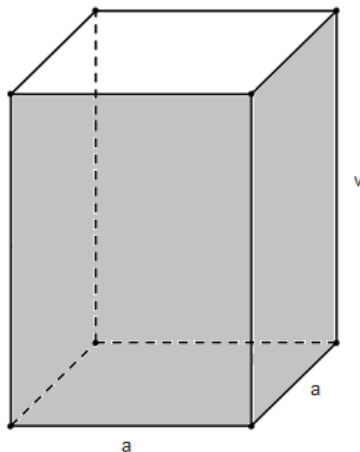
$$v = \frac{S - 2a^2}{4a} = \frac{S - 2 \cdot \frac{S}{6}}{4\sqrt{\frac{S}{6}}} = \frac{S - \frac{S}{3}}{\sqrt{\frac{16S}{6}}} = \frac{\frac{2S}{3}}{\frac{4\sqrt{S}}{\sqrt{6}}} = \frac{S\sqrt{6}}{6\sqrt{S}} = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

ZÁVĚR: Ideální rozměry pravidelného čtyřbokého hranolu jsou $v = a = \sqrt{\frac{S}{6}}$, z čeho

vyplývá, že se jedná o krychli.

PŘÍKLAD 5.7: Určete takové rozměry odkrytého bazénu (se čtvercovou podstavou) o objemu $V = 32 \text{ m}^3$, aby na obložení jeho čtyř bočních stěn a dna se spotřebovalo nejméně materiálu (Jirásek a kolektiv, 1981, s. 528).

ŘEŠENÍ:



Obr. 5.7 (vlastní zpracování, 2014)

Povrch pravidelného čtyřbokého hranolu s jednou podstavou:

$$S = a^2 + 4av$$

Objem bazénu a vzorec pro jeho výpočet:

$$V = 32 \text{ m}^3 = a^2 \cdot v,$$

z předešlého vzorce si vyjádříme vztah pro výšku v .

$$v = \frac{32}{a^2}$$

Vztah pro výšku v dosadíme do vzorce pro výpočet povrchu pravidelného čtyřbokého hranolu.

$$S = a^2 + 4a \cdot \frac{32}{a^2} = a^2 + \frac{128}{a}$$

Vypočítáme první derivaci funkce S , podle proměnné a

$$S'(a) = 2a - \frac{128}{a^2},$$

první derivaci položíme rovnu nule a nalezneme stacionární body.

$$\begin{aligned}S'(a) &= 0 \\2a - \frac{128}{a^2} &= 0 \\2a &= \frac{128}{a^2} \\a^3 &= 64 \\a &= 4 \text{ m}\end{aligned}$$

Pomocí druhé derivace zkontrolujeme, zda se jedná o minimum.

$$\begin{aligned}S''(a) &= 2 + \frac{256}{a^3} \\S''(4) &= 2 + \frac{256}{64} = 6 > 0 \Rightarrow \text{minimum}\end{aligned}$$

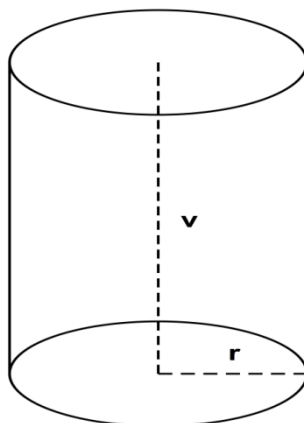
Dosadíme hodnotu a do vzorce pro výšku a vypočítáme její velikost.

$$v = \frac{32}{a^2} = \frac{32}{16} = 2$$

ZÁVĚR: Abychom na stavbu bazénu o objemu 32 m^3 použili co nejmenší množství materiálu, musel by tento bazén mít rozměry $4 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 2 \text{ m}$.

PŘÍKLAD 5.8: Najděte válec, který má při daném povrchu maximální objem (Hrubý a Kubát, 2001, s. 141).

ŘEŠENÍ:



Obr. 5.8 (vlastní zpracování, 2014)

Vzorec pro výpočet povrchu rotačního válce:

$$S = 2\pi r \cdot (r + v) = 2\pi r^2 + 2\pi r v,$$

z tohoto vzorce si vyjádříme výšku v :

$$v = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}.$$

Vzorec pro výpočet objemu rotačního válce:

$$V = \pi r^2 v,$$

Do tohoto vzorce dosadíme za výšku v , kterou jsme si vyjádřili ze vzorce pro objem:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = r \cdot \frac{S - 2\pi r^2}{2} = \frac{rS}{2} - \pi r^3,$$

dostáváme funkci pro objem V , kterou budeme derivovat podle proměnné r :

$$V'(r) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$$

Dále musíme zderivovanou funkci položit rovnu nule a nalézt stacionární bod (y):

$$V'(r) = 0$$

$$\frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0$$

$$6\pi r^2 = S$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

Využijeme druhé derivace, abychom zjistili, zda se jedná o požadované maximum:

$$V''(r) = -6\pi r$$

$$V''\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right) = -6\pi \sqrt{\frac{S}{6\pi}} < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

Dosadíme do vzorce pro výšku a určíme její velikost:

$$v = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{S - 2\pi \cdot \frac{S}{6\pi}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = \frac{\frac{S}{3}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{S}{6\pi}}},$$

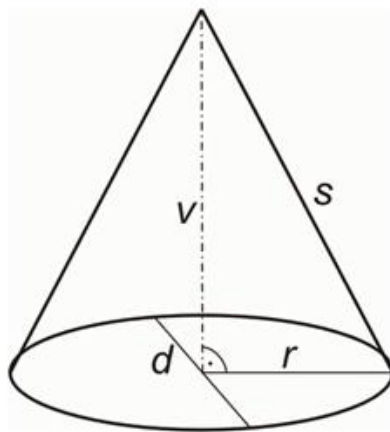
nakonec výsledek ještě upravíme:

$$v = \frac{\frac{S}{3}}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{S}{6\pi}}}{\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = \frac{\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}}{2\pi \cdot \frac{S}{6\pi}} = \frac{\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}}{\frac{S}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

ZÁVĚR: Válec maximálního objemu při daném povrchu získáme, bude-li platit vztah $r = 2v$.

PŘÍKLAD 5.9: Najděte kužel, který má při daném povrchu maximální objem (Hrubý a Kubát, 2001, s. 141).

ŘEŠENÍ:



Obr. 5.9 (absolventi.gymcheb.cz, 2008, [online])

Využijeme vzorce pro výpočet povrchu rotačního kužele:

$$S = \pi r \cdot (r + s),$$

dále budeme také potřebovat vzorec pro objem rotačního kužele:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

Za pomoci znalosti Pythagorovy věty si vyjádříme vztah pro velikost strany kužele s :

$$s^2 = v^2 + r^2$$

$$s = \sqrt{v^2 + r^2},$$

tento vztah posléze dosadíme do vzorce pro povrch:

$$S = \pi r \cdot (r + s)$$

$$S = \pi r^2 + \pi r s$$

$$S = \pi r^2 + \pi r \sqrt{v^2 + r^2}$$

Získanou rovnici upravíme tak, abychom získali vztah pro velikost výšky rotačního kuželu:

$$S - \pi r^2 = \pi r \sqrt{v^2 + r^2}$$

$$\frac{S - \pi r^2}{\pi r} = \sqrt{v^2 + r^2}$$

$$\frac{S^2 - 2S\pi r^2 + \pi^2 r^4}{\pi^2 r^2} = v^2 + r^2$$

$$\frac{S^2 - 2S\pi r^2 + \pi^2 r^4}{\pi^2 r^2} - r^2 = v^2$$

$$\frac{S^2 - 2S\pi r^2 + \pi^2 r^4 - \pi^2 r^4}{\pi^2 r^2} = v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{S^2 - 2S\pi r^2}{\pi^2 r^2}}$$

Pokud dosadíme vztah pro velikost výšky do vzorce pro objem, získáváme funkci, kterou jsme schopni derivovat a následně určit její extrém:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{\frac{S^2 - 2S\pi r^2}{\pi^2 r^2}}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{\frac{S^2 - 2S\pi r^2}{\pi r}},$$

$$V = \frac{1}{3} r \sqrt{S^2 - 2S\pi r^2}$$

$$V = \frac{1}{3} \sqrt{S^2 r^2 - 2S\pi r^4}$$

dostali jsme funkci V , kterou budeme derivovat podle proměnné r :

$$V'(r) = \frac{1}{6} (S^2 r^2 - 2S\pi r^4)^{-\frac{1}{2}} (2S^2 r - 8S\pi r^3)$$

Dále položíme první derivaci rovnu nule, za účelem nalezení stacionárních bodů:

$$V'(r) = 0,$$

a vyřešíme rovnici:

$$\frac{1}{6} \left(S^2 r^2 - 2S\pi r^4 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2S^2 r - 8S\pi r^3) = 0$$

$$\frac{2S^2 r - 8S\pi r^3}{6\sqrt{S^2 r^2 - 2S\pi r^4}} = 0$$

$$2S^2 r - 8S\pi r^3 = 0$$

$$8S\pi r^3 = 2S^2 r$$

$$r^2 = \frac{S}{4\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

Na závěr je potřeba ověřit, zdali funkce $V(r)$ nabývá v tomto bodě svého maxima:

pro $0 \leq r < \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$ platí:

$$\sqrt{\frac{S}{4\pi}} > 0 \Rightarrow V'(r) > 0$$

a pro $\sqrt{\frac{S}{4\pi}} < r < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ platí:

$$\sqrt{\frac{S}{4\pi}} < 0 \Rightarrow V'(r) < 0$$

Funkce $V(r)$ nabývá v bodě $r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$ svého maxima.

Nakonec dosadíme velikost poloměru do vztahu pro výšku a určíme její velikost:

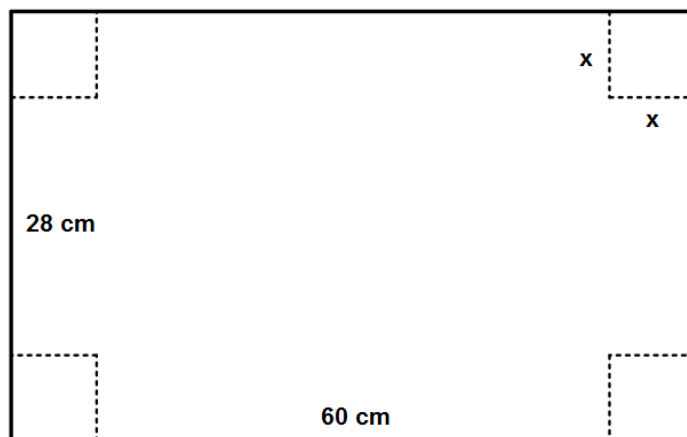
$$v = \sqrt{\frac{S^2 - 2S\pi r^2}{\pi^2 r^2}} = \frac{\sqrt{S^2 - 2S\pi \cdot \frac{S}{4\pi}}}{\pi \sqrt{\frac{S}{4\pi}}} = \frac{\sqrt{S^2 - \frac{S^2}{2}}}{\pi \sqrt{\frac{S}{4\pi}}} = \sqrt{\frac{\frac{S^2}{2}}{\frac{S\pi^2}{4\pi}}} = \sqrt{\frac{2S}{\pi}}$$

ZÁVĚR: Kužel maximálního objemu při daném povrchu získáme, bude-li poloměr

roven $\sqrt{\frac{S}{4\pi}}$ a výška rovna $\sqrt{\frac{2S}{\pi}}$.

PŘÍKLAD 5.10: Tvrdý papír tvaru obdélníku má rozměry $60 \text{ cm} \times 28 \text{ cm}$. V rozích se odstříhnou stejné čtverce a zbytek se ohne do tvaru otevřené krabice. Jak dlouhá musí být strana odstřižených čtverců, aby objem krabice byl největší (Knotová, 2006, s. 16)?

ŘEŠENÍ:



Obr. 5.10 (vlastní zpracování, 2014)

Nejprve si vyjádříme jednotlivé strany:

Strana a :

$$60 - 2x$$

Strana b :

$$28 - 2x$$

Strana c (výška):

$$x$$

Vzorec pro výpočet objemu kváдру:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Dále dosadíme jednotlivé délky stran do vzorce pro objem a upravíme:

$$V = (60 - 2x) \cdot (28 - 2x) \cdot x$$

$$V = (1680 - 120x - 56x + 4x^2) x$$

$$V = 1680x - 120x^2 - 56x^2 + 4x^3$$

$$V = 4x^3 - 176x^2 + 1680x$$

Získali jsme funkci, kterou zderivujeme dle proměnné x :

$$V'(x) = 12x^2 - 352x + 1680$$

Položíme rovno nule, abychom určili stacionární body:

$$\begin{aligned}V'(x) &= 0 \\12x^2 - 352x + 1680 &= 0 \\3x^2 - 88x + 420 &= 0 \\x_{1,2} &= \frac{88 \pm \sqrt{7744 - 4 \cdot 3 \cdot 420}}{6} = \frac{88 \pm 52}{6} \\x_1 &= \frac{88 + 52}{6} = \frac{140}{6} = \frac{70}{3} \\x_2 &= \frac{88 - 52}{6} = \frac{36}{6} = 6\end{aligned}$$

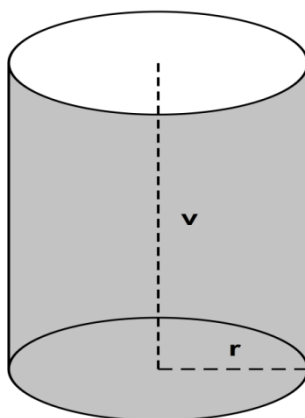
Pomocí druhé derivace určíme charakter extrému:

$$\begin{aligned}V''(x) &= 24x - 352 \\V''\left(\frac{70}{3}\right) &= 24 \cdot \frac{70}{3} - 352 = \frac{1680}{3} - 352 = 560 > 0 \Rightarrow \text{minimum} \\V''(6) &= 24 \cdot 6 - 352 = 144 - 352 = -208 < 0 \Rightarrow \text{maximum}\end{aligned}$$

ZÁVĚR: Abychom získali největší objem, musí být strana odstřižených čtverců dlouhá 6 cm.

PŘÍKLAD 5.11: Nahoře otevřená nádoba tvaru válce má objem $V = 3140 \text{ cm}^3$. Určete rozměry válce (r, v) tak, aby na vytvoření této nádoby se minulo nejméně materiálu (Příklady.eu, 2014, [online]).

ŘEŠENÍ:



Obr. 5.11 (vlastní zpracování, 2014)

Vzorec pro výpočet objemu rotačního válce:

$$V = \pi r^2 v,$$

do vzorce dosadíme hodnotu pro objem, která je známá:

$$3140 = \pi r^2 v,$$

a z tohoto vzorce si potom vyjádříme výšku:

$$v = \frac{3140}{\pi r^2}$$

Vzorec pro výpočet povrchu rotačního válce:

$$S = \pi r^2 + 2\pi r v,$$

do tohoto vzorce dosadíme za výšku, kterou jsme si již vyjádřili:

$$S = \pi r^2 + 2\pi r v = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{3140}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{6280}{r}$$

Funkci S zderivujeme podle proměnné r :

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{6280}{r^2},$$

položíme rovno nule a vyřešíme rovnici, abychom získali stacionární body:

$$S'(r) = 0$$

$$2\pi r - \frac{6280}{r^2} = 0$$

$$2\pi r = \frac{6280}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{6280}{2\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6280}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6280}{6,28}} = 10 \text{ cm}$$

Pomocí druhé derivace ověříme, zda se jedná o požadovaný extrém:

$$S''(r) = 2\pi + \frac{12560}{r^3}$$

$$S''(10) = 6,28 + \frac{12560}{1000} = 18,84 > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

Na závěr ještě dopočítáme hodnotu výšky:

$$v = \frac{3140}{\pi r^2} = \frac{3140}{3,14 \cdot 100} = 10 \text{ cm}$$

ZÁVĚR: Abychom na výrobu válcové nádoby o objemu $V = 3140 \text{ cm}^3$ spotřebovali co nejmenší množství materiálu, musela by mít rozměry $r = 10 \text{ cm}$ a $v = 10 \text{ cm}$.

5.2.2 Úloha z fyziky

PŘÍKLAD 5.12: Pořizovací náklady elektrického vedení jsou závislé na průřezu S vedení a na ztrátách elektrického proudu ve vedení vztahem $y = k_1 S + \frac{k_2}{S}$, kde k_1, k_2 jsou kladné konstanty. Určete průřez S tak, aby pořizovací náklady byly minimální (Riečan, 1987, s. 78).

ŘEŠENÍ:

Vztah pro pořizovací náklady elektrického vedení:

$$y = k_1 S + \frac{k_2}{S}$$

Funkci y budeme derivovat podle proměnné S , (k_1, k_2 jsou konstanty):

$$y'(S) = k_1 - \frac{k_2}{S^2}$$

Následně funkci položíme rovnu nule, vyřešíme rovnici, abychom získali body podezřelé z extrému:

$$y'(S) = 0$$

$$k_1 - \frac{k_2}{S^2} = 0$$

$$k_1 = \frac{k_2}{S^2}$$

$$S^2 = \frac{k_2}{k_1}$$

$$S = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

Pomocí druhé derivace se snažíme zjistit charakter extrému:

$$y''(S) = \frac{2k_2}{S^3}$$

$$y''\left(\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\right) = \frac{2k_2}{\left(\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\right)^3} > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

ZÁVĚR: Aby pořizovací náklady elektrického vedení byly co nejmenší, musí být

průřez vedení roven $\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$.

5.2.3 Ostatní úlohy

PŘÍKLAD 5.13: Číslo 16 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální (Vošický, 2007, s. 184).

ŘEŠENÍ:

První sčítanec:

$$x$$

Druhý sčítanec:

$$16 - x$$

Součin si vyjádříme jako funkci:

$$y = x \cdot (16 - x)$$

Upravíme:

$$y = 16x - x^2$$

Vypočítáme první derivaci podle x :

$$y'(x) = 16 - 2x$$

Ted' musíme funkci položit rovnu nule, abychom získali stacionární body:

$$y'(x) = 0$$

$$16 - 2x = 0$$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$

Vypočítáme druhou derivaci podle x :

$$y''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

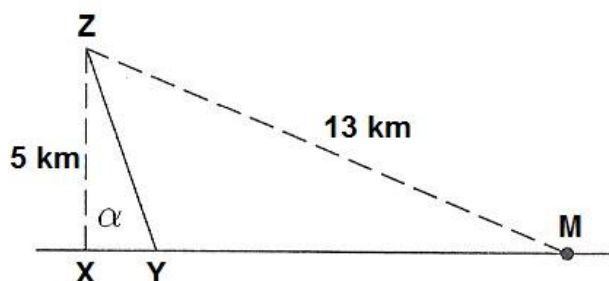
Ještě zbývá určit hodnotu druhého sčítance:

$$16 - x = 16 - 8 = 8$$

ZÁVĚR: Abychom získali maximální součin, musíme číslo 16 rozložit na sčítance 8 a 8.

PŘÍKLAD 5.14: Průmyslový závod je vzdálen 5 km od silnice vedoucí do města M . Vzdálenost závodu Z od města M je 13 km. Určete, pod jakým úhlem α je třeba vybudovat cestu k silnici, aby doprava materiálu ze Z do M byla nejlevnější. Předpokládané náklady na přepravu 1 t materiálu na 1 km jsou po silnici 5 Kč a po vybudované cestě 15 Kč (Hrubý a Kubát, 2001, s. 142).

ŘEŠENÍ:



Obr. 5.12 (vlastní zpracování, 2014)

Nejprve musíme zjistit vzdálenosti mezi jednotlivými body na obr. 5.12, abychom mohli následně sestavit funkci, jejíž pomocí určíme ideální úhel.

Jako první vypočítáme velikost úsečky MX pomocí Pythagorovy věty:

$$|MX| = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ km},$$

dále určíme vztah pro velikost úsečky YZ pomocí goniometrických funkcí:

$$\sin \alpha = \frac{5}{|YZ|},$$

$$|YZ| = \frac{5}{\sin \alpha}$$

vztah pro velikost úsečky XY :

$$\cotg \alpha = \frac{|XY|}{5}$$

$$|XY| = 5 \cotg \alpha$$

Pomocí toho, co jsme již zjistili, určíme vztah pro velikost úsečky MY :

$$|MY| = 12 - 5 \cotg \alpha$$

Ted' již můžeme sestavit funkci pro výpočet ideálního úhlu cesty v závislosti na nákladech:

$$\begin{aligned} y &= 15 \cdot |YZ| + 5 \cdot |MY| \\ y &= 15 \cdot \frac{5}{\sin \alpha} + 5 \cdot (12 - 5 \cotg \alpha) \\ y &= \frac{75}{\sin \alpha} + 60 - 25 \cotg \alpha \end{aligned}$$

Vypočítáme první derivaci funkce y , kterou jsme právě sestavili, podle proměnné α :

$$\begin{aligned} y'(\alpha) &= -\frac{75 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{25}{\sin^2 \alpha}, \\ y'(\alpha) &= \frac{25}{\sin^2 \alpha} \cdot (1 - 3 \cos \alpha) \end{aligned}$$

první derivaci položíme rovnu nule a vyřešíme vzniklou goniometrickou rovnici:

$$\begin{aligned} \frac{25}{\sin^2 \alpha} \cdot (1 - 3 \cos \alpha) &= 0 \\ 1 - 3 \cos \alpha &= 0 \\ 3 \cos \alpha &= 1 \\ \cos \alpha &= \frac{1}{3} \\ \alpha = 70^\circ 30' &= \frac{47}{120} \pi \end{aligned}$$

Na závěr je potřeba ověřit, zdali funkce $y(\alpha)$ nabývá v tomto bodě svého minima.

Pro $0 \leq \alpha < \frac{47}{120} \pi$ platí:

$$\frac{25}{\sin^2 \alpha} \cdot (1 - 3 \cos \alpha) < 0 \Rightarrow y'(\alpha) < 0$$

a pro $\frac{47}{120} \pi < \alpha < \pi$ platí:

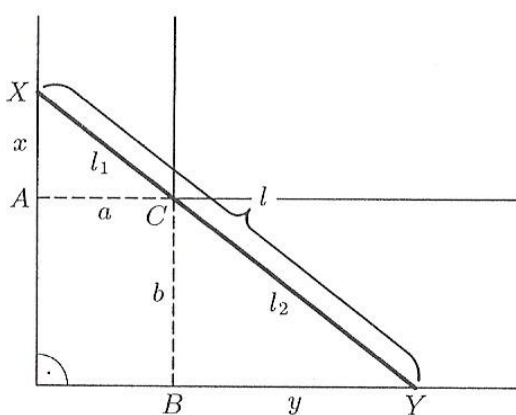
$$\frac{25}{\sin^2 \alpha} \cdot (1 - 3 \cos \alpha) > 0 \Rightarrow y'(\alpha) > 0$$

Funkce $y(\alpha)$ nabývá v bodě $\alpha = \frac{47}{120} \pi$ svého maxima.

ZÁVĚR: Aby doprava materiálu ze Z do M byla nejlevnější je potřeba vybudovat novou cestu pod úhlem $\alpha = 70^\circ 30'$.

PŘÍKLAD 5.15: Z kanálu šířky a vychází pod pravým úhlem kanál šířky b . Vypočtěte největší délku dřeva, které je možno splavit z jednoho kanálu do druhého (Jirásek a kolektiv, 1981, s. 481).

ŘEŠENÍ:



Obr. 5.13 (Bušek, 1999, s. 593)

Délku dřeva si označíme l , skládá se ze dvou částí l_1 a l_2 :

$$l = l_1 + l_2,$$

pomocí Pythagorovy věty si určíme velikosti obou částí:

$$l_1 = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$l_2 = \sqrt{b^2 + y^2},$$

a dosadíme do prvního vztahu:

$$l = l_1 + l_2 = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{b^2 + y^2}$$

Na základě podobnosti trojúhelníků ACX a BYC platí vztah:

$$\frac{y}{b} = \frac{a}{x},$$

odkud si vyjádříme y :

$$y = \frac{ab}{x},$$

a dosadíme ho do vztahu pro výpočet délky dřeva:

$$l = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{b^2 + \frac{a^2 b^2}{x^2}},$$

tuto rovnici ještě upravíme:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{b^2 + \frac{a^2 b^2}{x^2}} \\ l &= \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{\frac{b^2 x^2 + a^2 b^2}{x^2}} \\ l &= \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{\frac{b^2}{x^2} (x^2 + a^2)} \\ l &= \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{b}{x} \sqrt{(x^2 + a^2)} \\ l &= \sqrt{x^2 + a^2} \left(1 + \frac{b}{x} \right) \end{aligned}$$

Vypočítáme první derivaci funkce l podle proměnné x :

$$\begin{aligned} l'(x) &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \left(1 + \frac{b}{x} \right) + \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \left(-\frac{b}{x^2} \right) = \frac{x \cdot \left(1 + \frac{b}{x} \right) + (x^2 + a^2) \cdot \left(-\frac{b}{x^2} \right)}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \\ &= \frac{x + b - b - \frac{a^2 b}{x^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{\frac{x^3 - a^2 b}{x^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x^3 - a^2 b}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \end{aligned}$$

Vyřešíme rovnici $l'(x) = 0$ a najdeme stacionární body:

$$\begin{aligned} l'(x) &= 0 \\ \frac{x^3 - a^2 b}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} &= 0 \\ x^3 - a^2 b &= 0 \\ x^3 &= a^2 b \\ x &= \sqrt[3]{a^2 b} \end{aligned}$$

Na závěr je potřeba ověřit, zdali funkce $l(x)$ nabývá v tomto bodě svého maxima.

Pro $0 \leq x < \sqrt[3]{a^2b}$ platí:

$$\frac{x^3 - a^2b}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}} > 0 \Rightarrow l'(x) > 0$$

a pro $\sqrt[3]{a^2b} < x < \infty$ platí:

$$\frac{x^3 - a^2b}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}} < 0 \Rightarrow l'(x) < 0$$

Funkce $l(x)$ nabývá v bodě $x = \sqrt[3]{a^2b}$ svého maxima.

Jako poslední věc dosadíme hodnotu maxima do vztahu pro délku dřeva a určíme jeho velikost:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^2 + a^2} \cdot \left(1 + \frac{b}{\sqrt[3]{a^2b}}\right) = \sqrt{a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} + a^2} \cdot \left(1 + \frac{b}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}\right) = \\ &= \sqrt{a^2 \cdot \left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} + 1\right)} \cdot \left(1 + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right) = \left[a^2 \cdot \left(\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right) = \\ &= a \cdot \left(1 + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right) = a \cdot \left(\frac{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} = a \cdot \left(1 + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right) = \\ &= \frac{a \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{a} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

ZÁVĚR: Největší délka dřeva, které je možné splavit z jednoho kanálu do druhého je

$$l = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

5.2.4 Sbírka neřešených úloh s uvedeným výsledkem

PŘÍKLAD 5.16: Najděte takové kladné číslo tak, aby součet tohoto čísla a jeho převrácené hodnoty byl minimální (Riečan, 1987, s. 79).

$$\left[f(x) = x + \frac{1}{x}, f'(x) = 0, \text{ je-li } x = 1 \right]$$

PŘÍKLAD 5.17: Jak daleko je třeba umístit předmět od tenké spojné čočky o ohniskové délce f , aby vzdálenost jeho skutečného obrazu od předmětu byla nejkratší (Hrubý a Kubát, 2001, s. 142)?

$$[\text{vzdálenost} = 2f]$$

PŘÍKLAD 5.18: Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální (Hrubý a Kubát, 2001, s. 141).

$$[\text{první sčítanec} = 14, \text{druhý sčítanec} = 14]$$

PŘÍKLAD 5.19: Zdroj světla je ve vzdálenosti a od středu kulové plochy s poloměrem r . Pro jaký poloměr r osvětluje zdroj světla kulový vrchlík s největším obsahem (Riečan, 1987, s. 52)

$$\left[r = \frac{2a}{3} \right]$$

PŘÍKLAD 5.20: Z kruhu o poloměru 6 cm oddělte kruhovou úseč, která má výšku 5 cm. Do této kruhové úseče vepište obdélník maximálního obsahu. Určete jeho rozměry (Petáková, 1998, s. 162).

$$\left[a = 3\sqrt{7} \text{ cm}, b = \frac{7}{2} \text{ cm} \right]$$

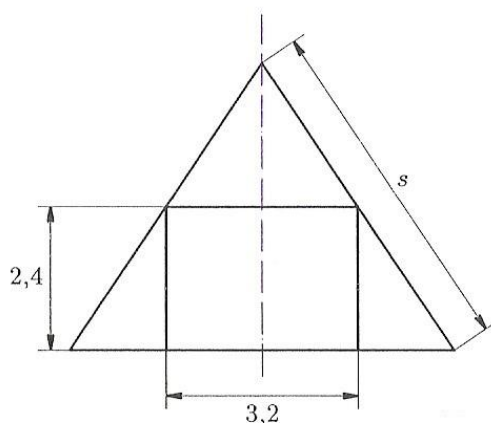
PŘÍKLAD 5.21: Vypočítejte vzdálenost bodu $[1;1]$ od přímky $2x - y + 3 = 0$ (řešte jako úlohu na určení extrému) (Riečan, 1987, s. 79).

$$\left[v = \sqrt{(2x+2)^2 + (x-1)^2}, v' = 0, \text{ je-li } x = -\frac{3}{5}, v = \frac{4\sqrt{5}}{5} \right]$$

PŘÍKLAD 5.22: Najděte minimální vzdálenost bodů paraboly $2x^2 - 2y - 9 = 0$ od počátku soustavy souřadnic (Riečan, 1987, s. 79).

$$\left[v = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{9}{2}\right)^2}, v' = 0, \text{ je-li } x = -2, 0, 2; \text{ hledaný bod je } \left[2; -\frac{1}{2}\right], v = \frac{\sqrt{17}}{2} \right]$$

PŘÍKLAD 5.23: V podkroví chaty je umístěná místnost šířky 3,2 m a výšky 2,4 m. Určete nejkratší možnou délku s krokve v metrech s přesností na dvě desetinná místa. (Krokev je trám položený ve směru největšího spádu střechy) (Bušek, 1999, s. 601)



Obr. 5.14 (Bušek, 1999, s. 601)

$$\left[s = \frac{8}{5} \cdot \left(1 + \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{3}{2}} = 5,62 \right]$$

PŘÍKLAD 5.24: Z papíru ve tvaru čtverce $40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ vystříhneme ve všech rozích stejné čtverečky a složíme krabičku. Určete stranu čtverečku tak, aby tato krabička měla maximální objem (Petáková, 1998, s. 161).

$$\left[x = \frac{20}{3} \text{ cm} \right]$$

PŘÍKLAD 5.25: Určete rozměry obdélníku tak, aby při daném obsahu 16 cm^2 měl minimální obvod (Petáková, 1998, s. 161).

$$\left[a = b = 4 \text{ cm} \right]$$

PŘÍKLAD 5.26: Z kruhového kusu papíru vystříhneme výseč o středovém úhlu β . Ze zbývajících výsečí (o středovém úhlu $\alpha = 2\pi - \beta$) můžete sestavit filtr, tj. plášť kužele. Najděte α tak, aby objem kužele byl co největší (Jarník, 1963, s. 258).

$$\left[\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \right]$$

PŘÍKLAD 5.27: Do koule s poloměrem R opište rotační válec s nejmenším objemem (Jirásek a kolektiv, 1981, s. 528).

$$\left[r = R\sqrt{\frac{2}{3}}, v = R \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}, V = R^3 \cdot \frac{4\pi\sqrt{3}}{9} \right]$$

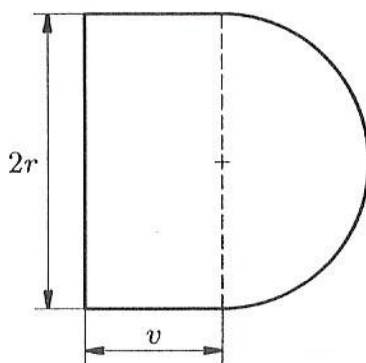
PŘÍKLAD 5.28: Těleso se skládá z válce zakončeného polokoulí stejného poloměru. Pro jaké hodnoty poloměru a výšky válce bude při daném objemu V povrch tohoto tělesa minimální (Demidovič, 2003, s. 138)?

$$\left[r = v = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}} \right]$$

PŘÍKLAD 5.29: Nádrž na věži se skládá z válce o výšce a a poloměru podstavy r a kužele o též poloměru podstavy r a o straně délky $3a$. Určete výšku x kužele a poloměr r tak, aby nádrž měla maximální objem (Hrubý a Kubát, 2001, s. 142).

$$\left[x = a, r = 2a\sqrt{2} \right]$$

PŘÍKLAD 5.30: Půdorys divadelního jeviště je sjednocením obdélníku a kruhu. Obvod půdorysu jeviště je 40 m. Určete rozměry půdorysu v metrech s přesností na dvě desetinná místa, víte-li, že byly stanoveny tak, aby obsah půdorysu jeviště byl největší (Bušek, 1999, s. 599).



Obr. 5.15 (Bušek, 1999, s. 599)

$$\left[v = r = \frac{40}{\pi + 4} = 5,60 \right]$$

5.2.5 Sbírka neřešených úloh bez uvedeného výsledku

PŘÍKLAD 5.31: Do koule o poloměru r vepište rotační válec maximálního objemu (Hrubý a Kubát, 2001, s. 142).

PŘÍKLAD 5.32: Do rovnoramenného trojúhelníku vepište pravoúhelník maximálního obsahu (Riečan, 1987, s. 51).

PŘÍKLAD 5.33: Do polokoule s poloměrem R vepište pravidelný čtyřboký hranol s největším objemem (Jirásek a kolektiv, 1981, s. 528).

PŘÍKLAD 5.34: Najděte minimální vzdálenost bodů hyperboly $x^2 - y^2 + 4 = 0$ od bodu $[1; 0]$ (Riečan, 1987, s. 79).

PŘÍKLAD 5.35: Najděte kruhovou výseč, která má při daném obvodu $2s$ maximální obsah (Hrubý a Kubát, 2001, s. 141).

PŘÍKLAD 5.36: Výška šikmého vrhu je dána rovnicí $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$. Urči okamžik, ve kterém se vržený předmět nachází v maximální výšce (Slovní úlohy na hledání extrémů, 2010, s. 1, [online]).

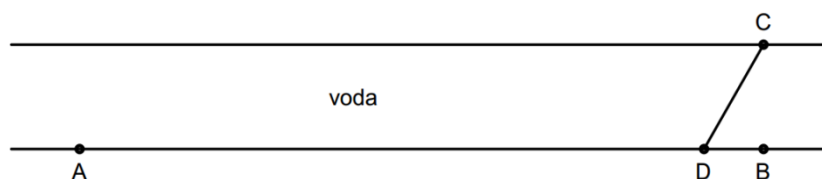
PŘÍKLAD 5.37: Na parabole o rovnici $2x^2 - 2y - 9 = 0$ najděte bod, jehož vzdálenost od počátku soustavy souřadnic je minimální (Hrubý a Kubát, 2001, s. 142).

PŘÍKLAD 5.38: Trosečníka na voru unáší mořský proud rychlostí $7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Kolmo na směr proudu pluje obchodní loď rychlostí $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ (vzhledem k povrchu Země). V jeden okamžik je námořní loď vzdálena od místa, kde se protínají jejich trajektorie 100 km a trosečník 10 km. V jaké nejmenší vzdálenosti se minou? Zachrání loď trosečníka, když předměty jeho velikosti vidí na vzdálenost 20 km (Slovní úlohy na hledání extrémů, 2010, s. 5, [online])?

PŘÍKLAD 5.39: Výkon elektrického spotřebiče zapojeného do stejnosměrného obvodu je dán vztahem $P = I^2 R$, kde I je proud v obvodu a R odpor spotřebiče. Pokud nezanedbáváme vnitřní odpor zdroje, platí pro velikost proudu vztah $I = \frac{U_e}{R + R_i}$, kde R_i je vnitřní odpor zdroje a U_e jeho elektromotorické napětí. Urči, jaký musí být vztah mezi R a R_i , aby byl výkon spotřebiče maximální (Slovní úlohy na hledání extrémů, 2010, s. 2, [online]).

PŘÍKLAD 5.40: Uvažujme šikmý vrh ve vzduchoprázdnu s elevačním úhlem α a počáteční rychlostí v_0 . Při kterém elevačním úhlu α (v_0 je daná konstanta) bude vodorovná délka l vrhu největší (Knichal a kolektiv, 1965, s. 444)?

PŘÍKLAD 5.41: Přímý vodní kanál je 150 m široký. Místa A a B ležící na jednom z břehů mají vzdálenost 1 km, místo C je na druhém břehu přesně naproti místu B . Z A se má do C vést potrubí, jehož první (přímý) úsek povede z A do jistého místa D na spojnici AB a jehož druhý (také přímý) úsek spojí D s C . Položení 1 m potrubí na břehu stojí 800 Kč, přes kanál je cena dvojnásobná. Jak daleko má být D od A , aby cena celého potrubí byla co nejmenší? Jaká bude jeho délka zaokrouhlená na decimetry a cena zaokrouhlená na celé koruny? Jaký úhel budou svírat úsečky DB a DC (Slovní úlohy na extrémy, 2014, s. 128, [online])?



Obr. 5.16 (Slovní úlohy na extrémy, 2014, s. 128, [online])

PŘÍKLAD 5.42: Dvě auta se pohybují po přímých navzájem kolmých drahách stálou rychlostí $v = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ směrem ke křižovatce. V čase $t_0 = 0 \text{ s}$ je jedno auto vzdáleno od křižovatky 100 m, druhé 200 m (Bušek, 1999, s. 600).

- Určete čas t v sekundách, ve kterém bude vzdálenost aut nejmenší.
- Určete minimální vzdálenost aut d v metrech (výsledek zaokrouhlete na celé metry).

PŘÍKLAD 5.43: Místo B leží na louce ve vzdálenosti b od přímé silnice. Z místa A , které je na této silnici, se můžeme dostat do místa B například tak, že jdeme a metrů po silnici a pak odbočíme kolmo k silnici a jdeme b metrů po louce. Vyjádřete pomocí a , b , v jaké vzdálenosti x od místa A je třeba silnice odbočit, abychom se dostali do místa B v nejkratší době, jdeme-li po silnici rychlostí $1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a po louce rychlostí $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (Bušek, 1999, s. 601)?

PŘÍKLAD 5.44: Určete při jaké hodnotě odporu R zapojeného sériově s odporem R_0 bude na odporu R_0 maximální výkon. (Odpor R_0 a napětí U_0 baterie pokládáme za konstantní) (Riečan, 1987, s. 75).

PŘÍKLAD 5.45: Kanál má průřez tvaru rovnoramenného lichoběžníku. Je naplněn vodou do výšky h , plošný obsah průřezu části kanálu naplněné vodou je S . Při jakém úhlu φ mezi bočními stěnami a vodorovnou rovinou bude mokrá část obvodu průřezu kanálu minimální (Demidovič, 2003, s. 138)?

ZÁVĚR

Ve své bakalářské práci jsem vytvořil sbírku řešených i neřešených slovních úloh na aplikaci jednoho ze stěžejních témat diferenciálního počtu - vyšetřování extrémů funkcí jedné proměnné. Tuto aplikaci jsem využil v tzv. optimalizačních slovních úlohách na extrémy. Ve své práci jsem se zabýval pouze úlohami na extrémy funkce jedné proměnné, avšak existuje i spousta úloh na extrémy funkcí dvou a více proměnných, k jejichž řešení lze využít podobných principů a zákonitostí jako v úlohách funkcí jedné proměnné.

V úvodních kapitolách jsem se čtenáři snažil přiblížit základní pojmy a poznatky, které jsou nápomocny k řešení optimalizačních extrémálních úloh. Každá kapitola obsahuje množství definic a matematických vět, ale také v každé kapitole nalezneme minimálně jeden vyřešený příklad na danou tematiku, který je doprovázen následným cvičením, aby si čtenář mohl ověřit nově nabyté poznatky.

Sbírka slovních úloh obsahuje patnáct vzorově vyřešených příkladů, které jsou doprovázeny podrobným komentářem jednotlivých kroků. Ty příklady, ve kterých je nutné zapojit určitou míru představivosti, jsou doplněny o názorné obrázkové ilustrace.

Věřím, že tuto práci budou moci využít při svých studiích žáci středních, středních odborných škol a gymnázií, ale také studenti některých bakalářských studijních programů.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 3. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 631 s. ISBN 80-719-6140-X.
- [2] DEMIDOVICH, Boris Pavlovič. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. 1. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003, 460 s. ISBN 80-720-0587-1.
- [3] DOŠLÁ, Zuzana a Jaromír KUBEN. *Diferenciální počet jedné proměnné*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2003, 209 s. ISBN 80-210-3121-2.
- [4] HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia: diferenciální a integrální počet*. 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 210 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6210-4.
- [5] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet I*. 5. vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1963, 390 s.
- [6] JIRÁSEK, František, Zdeněk TICHÝ a Eduard KRIEGELSTEIN. *Sbírka řešených příkladů z matematiky: logika a množiny, lineární a vektorová algebra, analytická geometrie, posloupnosti a řady, diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné*. 2. nezměn. vyd. Praha: SNTL, 1981, 817 s.
- [7] KNICHAL, Vladimír, Alfons BAŠTA, Milan PIŠL a Karel REKTORYS. *Matematika I*. 5. vyd. Praha: SNTL, 1965, 544 s.
- [8] LAITCHOVÁ, Jitka. *Matematická analýza 1: diferenciální počet*. 2., (upr.) vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2007. ISBN 978-802-4417-394.
- [9] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.
- [10] RIEČAN, Beloslav. *Matematika pro IV. ročník gymnázií*, SPN, Praha 1987. 357 s. ISBN 14-591-87.

- [11] VOŠICKÝ, Zdeněk. *Matematika v kostce: pro střední školy*. 1. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 2007, 195 s. V kostce (Fragment). ISBN 978-802-5301-913.

SEZNAM POUŽITÝCH INTERNETOVÝCH ZDROJŮ

- [1] BLÁHOVÁ, Pavla. *Optimalizační úlohy* [online]. Plzeň, 2012 [cit. 2014-03-12]. Dostupné z:
<https://otik.uk.zcu.cz/bitstream/handle/11025/5578/Optimalizacni%20ulohy%20-%20Bc.%20Pavla%20Blahova.pdf?sequence=1>. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni
- [2] GURKA, Petr. Monotonie, lokální a globální extrémy funkce. *Petr Gurka (osobní stránky)* [online]. 2011 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: <http://petrg.wz.cz/czu/downloads/vyuka/AF/AF03.pdf>
- [3] HESTERIC, Roman. Extrémy - slovní úlohy. *Priklady.eu - matematika a fyzika pro střední školy* [online]. 2014 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: <http://www.priklady.eu/cs/Matematika/Derivace/Extremy-slovni-ulohy.alej>
- [4] HRNČIŘÍK, Zdeněk. *Aplikace diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné ve slovních úlohách* [online]. Brno, 2008 [cit. 2014-03-12]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/73244/pedf_m/DP.pdf. Diplomová práce. Masarykova univerzita v Brně.
- [5] JELÍNKOVÁ, Michaela. *Aplikační úlohy z diferenciálního počtu jedné proměnné* [online]. České Budějovice, 2013 [cit. 2014-03-12]. Dostupné z: http://theses.cz/id/776duo/Aplikan_lohy_z_diferencilneho_potu_jedn_promnn.pdf. f. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- [6] KNOTOVÁ, Miroslava. *Užití diferenciálního a integrálního počtu v praxi* [online]. Tábor, 2005-2006 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: http://www.kpsoft.eu/_techinfo/00137/Dif_int_pocet.pdf. Závěrečná ročníková práce. Střední průmyslová škola strojnická Tábor.
- [7] KOS, Václav. *Matika krokem (4. lekce - Průběh funkce). Moje škola - škola hrou pro každého a nonstop* [online]. 2014 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: http://www.mojeskola.cz/Vyuka/Php/Learning/Derivace/matika_krokem4.php

- [8] KRYNICKÝ, Martin. Úlohy na hledání extrémů. *www.realisticky.cz* [online]. 2010 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: <http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20S%C5%A0/10%20Diferenci%C3%A1ln%C3%AD%20a%20integr%C3%A1ln%C3%AD%20po%C4%8Det/02%20Derivace/15%20Slovn%C3%AD%20%C3%BAlohy%20na%20hled%C3%A1n%C3%AD%20extr%C3%A9m%C5%AF.pdf>
- [9] KYJOVSKÝ, Tomáš. Extrémy funkce. *Tomáš Kyjovský - osobní webové stránky* [online]. 2008 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: http://www.tomaskyjovsky.cz/studia/manualy/matematika/extremy_funkce.pdf
- [10] MAŘÍK, Robert a Lenka PŘIBYLOVÁ. Obecný postup – Globální a lokální extrémy funkce jedné proměnné. *Matematika (Kate Morris)* [online]. 2012 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: <http://www.matematika-lucerna.cz/matalyza/jedna-promenna/globex/globex-navod.pdf>
- [11] MAŘÍK, Robert. Lokální extrémy, průběh funkce. *Mendelova univerzita v Brně* [online]. 2012 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: <http://user.mendelu.cz/marik/mat-web/mat-webse6.html>
- [12] Monotónnost a extrémy funkce. *Ústav matematiky FSI VUT Brno* [online]. 2005 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=921
- [13] Optimalizace (matematika). *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-2013 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: [http://cs.wikipedia.org/wiki/Optimalizace_\(matematika\)](http://cs.wikipedia.org/wiki/Optimalizace_(matematika))
- [14] Slovní úlohy na extrémy. *Matematika.cuni.cz* [online]. 2014 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: <http://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/AA08.pdf>
- [15] TRNKA, Karel. *Derivace a její aplikace ve středoškolské matematice s využitím internetu* [online]. Praha, 2012 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/karel.trnka/derivace/?page=title>. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze.

- [16] VOJÁČEK, Jakub. Průběh funkce - Hledání extrémů. *Matematika pro každého* [online]. 2009 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: <http://maths.cz/clanky/prubeh-funkce-hledani-extremu.html>
- [17] VOJÁČEK, Jakub. Využití derivace - Optimalizační úlohy. *Matematika pro každého* [online]. 2010 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: <http://maths.cz/clanky/vyuziti-derivace-optimalizacni-ulohy.html>
- [18] ZEMÁNEK, Petr a Petr HASIL. Aplikace diferenciálního počtu ve slovních úlohách. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I* [online]. 2012 [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: <http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/aplikace-dif-poctu.html>

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

SYMBOL	VÝZNAM
$\mathbb{R}$	obor reálných čísel
f	funkce f
x	proměnná x
M	množina M
$f(x)$	funkce f jedné reálné proměnné
(a,b)	otevřený interval
$\langle a,b \rangle$	uzavřený interval
$f'(x)$	první derivace funkce f podle proměnné x
$f''(x)$	druhá derivace funkce f podle proměnné x
$D(f)$	definiční obor

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Ondřej Vlček
Katedra:	Katedra matematiky Pedagogické fakulty UP
Vedoucí práce	Doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Rok obhajoby:	2014

Název práce:	Optimalizace (úlohy na extrémy)
Název v angličtině:	Optimization tasks to extrema
Anotace práce:	Bakalářská práce je pojata zejména jako sbírka optimalizačních slovních úloh na extrémy. Sbírká obsahuje různé typy úloh, které mají rozdílnou obtížnost. V teoretické části jsou popsány a vysvětleny pojmy z diferenciálního počtu, které jsou k řešení těchto typů úloh potřebné.
Klíčová slova:	Spojitosť, monotónnosť, intervaly monotónnosti, derivace, lokální extrém, stacionární bod, globální extrém, maximum, minimum, optimalizace, slovní úloha na extrém
Anotace v angličtině:	The thesis is conceived as a collection of optimization problems to extrema. The collection includes a variety of problems of different difficulty levels. The theoretical part describes the concepts of differential calculus, which are necessary to solve the specified problems.
Klíčová slova v angličtině:	Continuity, monotony, monotony interval, derivative, local extrema, global extrema, maximum, minimum, optimization, task to extrema
Přílohy vázané v práci:	
Rozsah práce:	66 stran
Jazyk práce:	Český jazyk