UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Lucie Růžičková

Přirozené číslo ve výuce na 1. stupni základní školy

Olomouc 2015 Vedoucí práce: RNDr. Martina Uhlířová, Ph.D.

Prohlašuji, že diplomovou práci jsem vypracovala samostatně na základě uvedených zdrojů.

V Olomouci dne 15. dubna 2015 …………………………………….

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucí mé diplomové práce RNDr. Martině Uhlířové, Ph.D. za vstřícné a odborné vedení diplomové práce, a především za trpělivost a ochotu, se kterou mi udělovala cenné rady a podnětné připomínky. Dále bych chtěla poděkovat za spolupráci třídním učitelům a žákům 5. ročníků, konkrétně třídním kolektivům 5.A i 5.B ZŠ Olomouc, Demlova a třídě 5.B ZŠ Žďár nad Sázavou, Palachova.

OBSAH

ÚVOD

Potřeba zapisovat nebo jiným způsobem zaznamenávat čísla provází člověka od pradávna. Vývoj numerace je velice pestrý a zajímavý, což bylo jedním z důvodů, proč jsem se rozhodla jej zpracovávat v diplomové práci. Zajímalo mě, zda je možné historické zápisy čísel využít jako motivační prvek ve výuce matematiky na 1. stupni základní školy.

Pro diplomovou práci jsou vytyčeny následující cíle. Cíle teoretické části práce jsou:

- shrnout základní teoretické přístupy k zavedení přirozeného čísla,
- vymezit pojmy přirozené číslo, numerace a numerační soustava,
- zpracovat přehled vybraných historických zápisů čísel s možnostmi jejich zařazení do výuky matematiky na 1. stupni ZŠ i v rámci RVP.

Praktická část diplomové práce si klade tyto cíle:

- vytvořit soubor pracovních listů s tematikou historických zápisů čísel,
- ověřit vhodnost jejich koncepce ve školské praxi a vyhodnotit jejich míru motivace ve výuce matematiky.

Následné zhodnocení by mělo především ukázat, zda je přínosné zařazovat historické zápisy čísel do výuky matematiky na 1. stupni.

Struktura diplomové práce koresponduje s výše uvedenými cíli. Člení se na teoretickou a praktickou část.Teoretická část diplomové práce je rozdělena do dvou kapitol. První kapitola přibližuje přirozené číslo z filozofického pohledu, vymezuje a zavádí pojem přirozené číslo, dále se zabývá numerací a numeračními soustavami a rozpracovává ukázky historických zápisů čísel. Druhá kapitola se zabývá stručnou charakteristikou Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání, postavením matematiky v rámci RVP ZV a možnostmi zařazení zápisu čísel a numeračních soustav do výuky matematiky.

Praktická část, která se člení na tři kapitoly, charakterizuje soubor vytvořených pracovních listů s tematikou historických zápisů čísel, ověřuje vhodnost jeho pojetí v 5. ročnících základních škol a přináší zpětnou vazbu k provedenému výzkumnému šetření. V této části bude zpracována analýza výzkumného šetření společně se závěry, které vyplynuly z tohoto šetření.

TEORETICKÁ ČÁST

1 PŘIROZENÉ ČÍSLO

Čísla jsou nedílnou součástí našeho života. Setkáváme se s nimi při pohledu na ciferník hodinek, na cenovkách zboží v obchodě, na bankovkách, při vytáčení telefonního čísla, tedy téměř na každém kroku. Na první pohled se nám mohou jevit jako něco banálního a samozřejmého. Často si ani neuvědomujeme, jak dlouhá cesta vedla k zavedení pojmu čísla, a jak úzce jsou dějiny čísel spjaty s dějinami člověka, jeho kulturou, jeho náboženstvím. (Betz, 2002)

Je důležité nezaměňovat významy slov číslo a číslice. Přirozené číslo je abstraktní pojem. Tudíž není konkrétní věcí, příp. objektem nacházejícím se v našem okolí, který bychom mohli vnímat našimi smysly. Čísla chápeme jako umělé, ideální objekty, které vznikly abstrakcí z vlastností konečných množin a vlastností seřazování těchto prvků. (Novák, 1999) K tomu, abychom mohli s čísly pracovat, je nutné pojmenovat je nějakým názvem a označit je znakem či symbolem. K zápisu čísel užíváme soustavu symbolů, neboli číselných znaků, které nazýváme číslice, též cifry. Příkladem nám mohou být číslice 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 v desítkové soustavě, které běžně užíváme. Nyní je patrné, že čísla, na rozdíl od zápisu čísel, spatřit nemůžeme. (Jelínek, 1974)

1.1 Filozofický pohled na přirozené číslo

Pro antického člověka nepředstavovala čísla pouze abstraktní útvary, které slouží výhradně pro výpočet, ale byla vnímána i pocitová hodnota čísel. Tak jako v přírodě, v krystalických formách, v magnetickém poli, ve formě listu a květu u rostlin existují určité struktury, které se stále opakují, protože jsou nanejvýš účelné a krásné, např. včelí plástve, tak i v lidském životě existují číselné vztahy, které mu odpovídají. Čísla člověku pomáhají lépe pochopit skutečnost našeho světa. Objasňují určité vztahy, pomáhají uspořádat rozmanitosti věcí a popsat vztahy mezi věcmi. Čísla nejen kvantifikují, tedy neudávají pouze anonymní množství, ale také kvalifikují, resp. hodnotí či kladou měřítka. (Betz, 2002)

Nebudeme-li na čísla nahlížet pouze jako na hodnoty udávající množství, dojdeme k tomu, že čísla vyjadřují i určité vlastnosti. Symbolikou čísel se zabýval řecký filozof Pythagoras již v 6. stol. př. n. l., který v Krotonu v jižní Itálii založil významnou filozofickou a náboženskou školu, jejíž jádro tvořili tzv. mathematikoi. Pythagoras byl přesvědčen, že ideje matematiky, filozofie a náboženství jsou spolu provázané. Pythagorejci věřili, že čísla jsou klíčem k pochopení vesmíru. Vztah mezi desítkou a prvními čtyřmi čísly byl zásadní pro vytvoření jejich filozofie. Celá pythagorejská filozofie zvaná tetrakys, která je založena na deseti sadách pojmů po čtyřech pojmech, se stala jejich způsobem vysvětlení a chápání světa. Bentley (2013) ve své knize rozepisuje, co pythagorejská tetrakys obsahuje:

- Čísla: 1 + 2 + 3 + 4
- Objemy: bod, přímka, plocha, těleso
- Elementy: voda, země, oheň, vzduch
- Tělesa: pyramida, osmistěn, dvacetistěn, krychle
- Živé věci: semeno, růst do délky, do šířky, do tloušťky
- Společnost: člověk, vesnice, město, národ
- Způsobilosti: příčina, znalost, názor, pocit
- Roční období: jaro, léto, podzim, zima
- Období života: dětství, mládí, dospělost, stáří
- Složky živých věcí: tělo, tři části duše

Tímto desaterem se pythagorejci řídili. Bylo pro ně objasněním světa, pomáhalo jim nalézat pravdu a omezovat nežádoucí chování. Není náhodou, že Pythagoras uctíval právě deset čtveřic. Symbolem tetrakysu je trojúhelník, kde jsou první čtyři čísla napsána pod sebe pomocí deseti teček. Číslo deset je čtvrté trojúhelníkové číslo, tzn. 1 + 2 + 3 + 4 = 10. (Bentley, 2013)

Se symbolikou čísel se sekáváme často, aniž bychom si to nějak výrazně uvědomovali. Pro představu uvedu několik příkladů. Jednička neboli monáda je symbolem jednoty, představuje nejen nedělitelnou součást a základ každého čísla, ale i Boží atribut. Dvojka je spojena s protiklady, ale i s partnerstvím. Pythagorejci považovali dvojku za první erotické číslo, tj. číslo sudé a ženské. Významnou myšlenku dvojakosti dále rozvíjeli v četné řadě čistých protikladů (uvažovali v rovině četných dvojic čistých protikladů) např. ženský x mužský, sudý x lichý, pravý x levý, kladný x záporný náboj, výdech x nádech. (Lundyová, 2011)

Číslovku tři často nacházíme v příbězích, pohádkách, např. tři sudičky, tři vlasy děda Vševěda, atd. Trojice je často znázorňována jako trojúhelník, který je nejprostším a strukturálně nejstabilnějším mnohoúhelníkem definujícím prostor. (Lundyová, 2011) Trojka je především číslem božím. Nejen v křesťanství je uctívána Svatá Trojice, ale i hinduisté ctí trojici Bráhma, Višnu, Šiva. V řeckém pantheonu se o vládu dělili bratři Zeus, Poseidon a Hádes, Egypťany byla uctívána trojice Isis, Osiris a Hór. Původně byla trojka symbolem tří měsíčních bohyň, které ztělesňují tři fáze Měsíce, přibývající, úplněk a ubývající, stejně jako narození, život a smrt vyjadřující věčné kolo času, tedy i minulost, přítomnost a budoucnost. (Banzhaf, 2010) Betz (2002) ve své knize uvádí Aristotelovu větu: *„Tři je první liché a dokonalé číslo, protože v čísle tři je začátek, střed a konec.“* Zároveň i Aristotelův sylogismus je členěn na tři části, tj. předpoklad, univerzální princip a závěr. (Betz, 2002)

Symbolem pozemské skutečnosti a viditelného světa je číslo čtyři. Nejjednodušším trojrozměrným tělesem je tetraedr, který je základem trojrozměrného prostoru. Rozlišujeme čtyři světové strany, čtyři živly (oheň, voda, vzduch, země). (Lundyová, 2011) Platón s Aristotelem učili čtvero ctností, tj. moudrost, statečnost, uměřenost, spravedlnost. Vymezujeme čtyři typy temperamentu, zda je někdo sangvinik, cholerik, flegmatik či melancholik. Zakladatel analytické psychologie Carl Gustav Jung zavedl typologii, která přispívá k rozlišování podstatných charakterových vlastností. Jungovým předpokladem je čtvernost. Zaměřuje se na různé funkce vědomí, tj. myšlení, cítění, vnímání a intuice, přičemž všechny mají pro člověka svůj význam, ale jsou rozvinuty v různé míře. Jung rozlišuje psychologický typ myslivý, citový, vnímavý a intuitivní, které dále dělí na extrovertní a introvertní. (Betz, 2002)

Pět jako je počet prstů jedné ruky nebo jako pět smyslů (sluch, zrak, čich, hmat, chuť). Pět je i platónských těles, tj. čtyřstěn (tetraedr), osmistěn (oktaedr), krychle, dvacetistěn (ikosaedr), dvanáctistěn (dodekaedr). Pětka je vyobrazována jako pěticípá hvězda, která představuje člověka stojícího na zemi s rozpaženýma rukama, zatímco hlava směřuje k nebi, jak ji známe z kreseb Leonarda da Vinciho. Člověk je totiž jediný tvor, který v sobě nese ducha (nebe) a přírodu (země). Ovšem nesmíme pěticípou hvězdu zaměnit za pentagram, též muří nohu, která je symbolem zla a černé magie. (Banzhaf, 2010)

Pythagorejci v šestce viděli první dokonalé číslo, protože součtem i součinem prvních tří čísel, tedy 1 + 2 + 3 = 6, a zároveň platí 1 . 2 . 3 = 6, tzn. že je šestka součet svých dělitelů. Pythagorejský trojúhelník se stranami tři, čtyři a pět je zase zajímavý tím, že má obsah a polovinu obvodu šest. (Bentley, 2013) Šestka vyobrazená jako šesticípá hvězda představuje sjednocení protikladů ohně a vody. Šestiúhelník je ideálním stavebním kamenem v přírodě, který můžeme najít např. ve včelích plástvích, sněhové vločce či struktuře krystalů. (Banzhaf, 2010)

Sedmička jako svaté číslo symbolizuje celek a dokonalost, protože se skládá z boží trojky a pozemské čtyřky, čímž spojuje Boha se světem. Díky tomu křesťané rozlišují sedm smrtelných hříchů a proti nim stojících sedm ctností. Sedmička se vyskytuje i v sedmeru svobodných umění složených z trivia (logiky, rétoriky, gramatiky) a quadrivia (aritmetiky, hudby, geometrie, astronomie). Sedm je dnů v týdnu i počet tónů stupnice. (Banzhaf, 2010)

Dalším často v literatuře užívaným číslem je devítka (např. za devatero horami, devatero řekami a devatero lesy). Desítka značí počet prstů rukou, stejně jako desatero křesťanských přikázání. Desítka již byla zmíněna ve spojení s pythagorejskou tetrakys. Číslo dvanáct je stejně jako sedmička ideální číslo, vzniklé z boží trojky a pozemské čtyřky, které symbolizuje boží hranici času na zemi. Dvanáctku nalezneme ve dvanácti měsících roku, ve dvanácti znameních zvěrokruhu nebo na hodinovém ciferníku, který je rozdělen na dvakrát dvanáct hodin. (Banzhaf, 2010)

1.2 Zavedení pojmu přirozené číslo

Přirozená čísla řadíme k nejstarším matematickým pojmům. Přirozené číslo je jedním ze základních, klíčových pojmů školské matematiky. Ovšem proces osvojení si a pochopení skutečného pojmu přirozeného čísla není jednoduchý. (Novák, 1999)

Hejný (1989, str. 58–60) i Novák (2003, str. 18–19) člení proces osvojování matematických pojmů do pěti fází:

1. Výchozí v tomto procesu je fáze motivace. Motivací se rozumí touha dítěte vyřešit problém, silná touha po poznání, např. v podnětné hře, úlohách, zajímavých diskuzích.
2. První představy dítěte, které se vážou k budoucímu pojmu, mají předmětný charakter. Dítě je schopno rozlišit čtyři kola auta, čtyři nohy stolu, čtyři hrušky, čtyři princezny atd. díky hledání společných kvalitativních znaků. Třídí věci na základě vlastností prvků (tvar, barva, velikost…), nikoli podle počtu, jelikož neví, co „čtyři" představuje samo o sobě. Čtyři nohy stolu a čtyři hrušky vnímá dítě rozdílně, i když je jich stejný počet. Ve vědomí dítěte se utváří jednotlivé, konkrétní představy odděleně, separovaně. Druhou fázi tedy nazýváme etapou separovaných modelů budoucího pojmu přirozeného čísla.
3. V etapě univerzálního modelu dochází k nalézání výsledků, především společné podstaty separovaných modelů a jejich souvislostí. Díky zobecnění přechází žák od separovaných modelů k univerzálním modelům kvantity, kdy je schopen konkrétní předměty (čtyři nohy stolu) nahradit např. čtyřmi prsty či kuličkami na počitadle.
4. K etapě abstraktního poznatku se žák dostává až po načerpání velkého množství zkušeností, kdy dojde ke zvnitřnění dosavadních představ a zkušeností, tedy interiorizaci abstraktního pojmu přirozeného čísla. V případě oproštění se od

předmětných představ mnohosti hraje významnou roli abstrakční zdvih neboli abstrakce. Pro tuto etapu je charakteristické užívání specifického jazyka k označování pojmu čísla, matematické terminologie a symboliky. Žák tedy chápe rozdíl mezi číslem a zápisem čísla. Jak píše Hejný (1989): *„Dieťa pochopilo, že tri, to sú tri prsty bez prstov.“*

5. V rámci závěrečné etapy krystalizace se naučí žák pracovat s abstraktním pojmem, aplikovat ho při řešení úloh a situací matematického i praktického charakteru v životní praxi. Výsledkem etapy je soubor přesných definic charakterizujících pojem přirozeného čísla.

Novák (1999) uvádí, že ve školské matematice se setkáváme se třemi podobami přirozeného čísla, tj. číslo jako mnohost, operátor či adresa.

1. Číslo chápeme jako kvantitu, mnohost, početnost konečné množiny. Konečnou množinu můžeme určit buď celkovým, globálním vjemem, tedy jako kardinální číslo, např. počet teček na hrací kostce, nebo počítáním po jedné, jako číslo ordinální, např. počet polí, o který se máme posunout na hracím plánu.
2. Číslo jako operátor zastupuje příkaz či poskytuje instrukci k provedení jisté změny, např. odečti trojku. Šipka může zastupovat grafické znázornění čísla jako operátoru, např. u různých početních řetězců.
3. Číslo reprezentuje adresu, je nositelem pořadí, uspořádání, např. den v měsíci, sedadlo v divadle, popisné číslo domu. Zjevným představitelem čísla jako adresy je bod na číselné ose.

Ve školské matematice k zavedení pojmu přirozeného čísla využíváme tři přístupy, tj. kardinální, ordinální a peanovský.

1.2.1 Kardinální čísla

Při zavádění kardinálních čísel budeme uvažovat dostatečně velkou neprázdnou základní množinu **M**, jejíž prvky jsou disjunktní podmnožiny množiny **M**. Existuje-li mezi množinami **A** a **B** ze systému množin **M** vzájemně jednoznačné zobrazení, neboli bijekce, je množina **A** ekvivalentní s množinou **B**, tedy **A** ~ **B**. (Eberová, 2005) Jedná se tedy o relaci „být ekvivalentní“ mezi množinami, jejímiž vlastnostmi jsou reflexivnost, symetričnost a tranzitivita. Relace ekvivalence na množině **M** způsobuje rozklad základní množiny **M**

(**M**/~) na třídy rozkladu, v nichž jsou navzájem ekvivalentní množiny. Každou třídu tohoto rozkladu nazýváme kardinálním číslem. (Kopka, 2006) (Drábek, Křižalkovič, Liška, Viktora, 1985)

Vybereme-li např. množinu **A** ze systému množin **M** jako reprezentanta třídy rozkladu **M**/~, kardinální číslo množiny **A** z **M** je třída rozkladu, v níž je množina **A** a všechny množiny ze systému **M**, které jsou s ní ekvivalentní. Kardinální číslo množiny A značíme card(**A**). Pro kardinální číslo množiny se též může užívat označení mohutnost množiny. (Kopka, 2006) (Eberová, 2005)

Uvažujeme-li konečné množiny obsažené v systému množin **M**, potřebujeme třídy rozkladu vhodně pojmenovat. Využijeme vlastnosti „mít stejný počet prvků“, která je společná všem množinám jedné třídy rozkladu. Početnost konečné množiny budeme označovat symboly, které nazýváme přirozenými čísly. Např. tříprvková množina **A** = {k, l, m} reprezentuje třídu rozkladu systému množin **M**, která má kardinální číslo card(**A**) = 3, tzn. přirozené číslo 3 je kardinální číslo všech tříprvkových množin. Z příkladu vyplývá, že kardinální čísla konečných množin se nazývají přirozená čísla. (Eberová, 2005)

V systému množin **M** jsou zahrnuty i nekonečné množiny, které nemají konečný počet prvků. Příkladem může být množina **N** všech přirozených čísel, jejíž početnost nemůžeme vyjádřit přirozeným číslem, jelikož je nekonečnou množinou. Pro vyjádření mohutnosti spočetných nekonečných množin zavádíme symbol alef nula $\aleph_0$. Platí tedy card(**N**) = $\aleph_0$, protože množina všech přirozených čísel **N** je nekonečnou množinou, tudíž její kardinální číslo není přirozené. (Kopka, 2006) (Eberová, 2005)

1.2.2 Ordinální čísla

Při vyvození ordinálních čísel budeme vycházet z dostatečně velké neprázdné množiny **M**, která jako své prvky obsahuje disjunktní dobře uspořádané podmnožiny systému množin **M**. Existuje-li mezi uspořádanými množinami $\lfloor\mathbf{A}\rfloor$ a $\lfloor\mathbf{B}\rfloor$ podobné zobrazení, je to zobrazení prosté, tj. vzájemně jednoznačné, uspořádané množiny $\lfloor\mathbf{A}\rfloor$ na uspořádanou množinu $\lfloor\mathbf{B}\rfloor$. Mezi uspořádanými množinami $\lfloor\mathbf{A}\rfloor$ a $\lfloor\mathbf{B}\rfloor$ zavádíme relaci „být podobný“, kterou zapisujeme $\lfloor\mathbf{A}\rfloor \approx \lfloor\mathbf{B}\rfloor$ a která je relací ekvivalence s vlastnostmi reflexivnosti, symetričnosti a tranzitivnosti. Relaci ekvivalence „být podobný“ na množině **M** přísluší rozložení tohoto systému množin (**M**/≈) na třídy rozkladu, ve kterých jsou navzájem podobné množiny. (Eberová, 2005) Každou třídu rozkladu nazýváme ordinálním typem. Ordinálním číslem označujeme ordinální typy dobře uspořádaných čísel. (Kopka, 2006) (Drábek, Křižalkovič, Liška, Viktora, 1985)

Zvolíme-li např. množinu $\lfloor \mathbf{A} \rfloor$ ze systému množin jako představitele třídy rozkladu $\mathbf{M}/\approx$, ordinální číslo množiny $\lfloor \mathbf{A} \rfloor$ z M označuje třídu rozkladu, do které patří dobře uspořádaná množina $\lfloor \mathbf{A} \rfloor$ z neprázdného systému dobře uspořádaných množin **M** a všechny dobře uspořádané množiny podobné s dobře uspořádanou množinou $\lfloor \mathbf{A} \rfloor$. Ordinální číslo množiny $\lfloor \mathbf{A} \rfloor$ zapisujeme ord($\lfloor \mathbf{A} \rfloor$). Ordinální číslo dobře uspořádané množiny udává početnost množiny, přičemž nezáleží na tom, které prvky obsahuje. (Eberová, 2005)

Do systému množin **M** patří nejen dobře uspořádané konečné množiny, ale i dobře uspořádané nekonečné množiny. Konečné množiny systému množin **M** členíme do tříd rozkladu pomocí vlastnosti „mít stejný počet prvků“, jež je společná všem dobře uspořádaným množinám jedné třídy rozkladu. Ordinální čísla konečných dobře uspořádaných množin nazýváme přirozená čísla. (Kopka, 2006) (Eberová, 2005)

Za reprezentanta nekonečné množiny ze systému množin **M** uvedeme množinu **N** všech přirozených čísel v přirozeném uspořádání, jejímž ordinálním číslem nemůže být číslo přirozené. Z tohoto důvodu pro vyjádření ordinálního čísla nekonečné přirozeně uspořádané množiny zavádíme znak omega ω, který není přirozené číslo, platí tedy ord($\lfloor \mathbf{N} \rfloor$) = ω. Je zřejmé, že číslo ω je ordinálním číslem přirozeně uspořádané množiny všech čísel přirozených $\lfloor \mathbf{N} \rfloor$ a každé jiné množiny $\lfloor \mathbf{X} \rfloor$, pro kterou platí, že $\lfloor \mathbf{N} \rfloor \approx \lfloor \mathbf{X} \rfloor$. (Eberová, 2005)

1.2.3 Peanova množina

Italskému matematikovi Giuseppe Peanovi se kolem roku 1900 podařilo položit základy teorie množin. Peanova aritmetika přirozených čísel je dobrým příkladem axiomatické výstavby matematiky. Axiomy jsou výroky, jež přijímáme jako pravdivé a nedokazujeme je. Vhodným systém axiomů zavádíme tzv. axiomatické či základní pojmy dané teorie, které se nedefinují. Všechny ostatní pojmy musí být vymezeny na základě základních nebo dříve definovaných pojmů. (Kopka, 2006) (Bělík, Svoboda, 1998)

V Peanově teorii přirozených čísel neboli v Peanově aritmetice přirozených čísel se využívá jedné vlastnosti přirozených čísel, která je pro ně typická, a to principu matematické indukce. Peanova množina, tedy množina přirozených čísel s nulou, je charakterizována pomocí Peanových axiomů. (Bělík, Svoboda, 1998) (Blažková, Matoušková, Vaňurová, 1995)

Drábek, Křižalkovič, Liška, Viktora (1985) uvádí, že množinu **P** nazveme Peanovou množinou, splňuje-li všechny tyto vlastnosti:

1. $(\forall x \in \mathbf{P})\ (\exists!\ x' \in \mathbf{P})\ x \neq x'$

   Ke každému prvku x ∈ **P** existuje právě jeden prvek x′∈ **P**, kde x′ nazýváme následovníkem prvku x. Každý prvek Peanovy množiny je různý od svého následovníka.

2. $(\exists! e \in \mathbf{P})\ (\forall x \in \mathbf{P})\ e \neq x'$

   V množině **P** existuje prvek e, který není následovníkem žádného prvku množiny **P**. Prvek e je jediným prvkem Peanovy množiny, který není následovník některého prvku Peanovy množiny.

3. $(\forall x, y \in \mathbf{P})\ x \neq y \Rightarrow x' \neq y'$

   Každé dva navzájem různé prvky z množiny **P** mají různé následovníky.

4. Princip matematické indukce:

   $\mathbf{M} \subset \mathbf{P}$: $(\exists\ e \in \mathbf{M}) \wedge (\forall x \in \mathbf{M})\ (\exists!\ x' \in \mathbf{M})\ x \neq x' \Rightarrow (\forall x \in \mathbf{P})\ (\exists!\ x' \in \mathbf{P})\ x \neq x'$

   Platí-li pro nějakou množinu **M**, že obsahuje prvek e a s každým prvkem x ∈ **P** obsahuje i jeho následovníka x′∈ **P**, potom též platí, že množina **M** obsahuje všechny prvky množiny **P**.

Dalšími důležitými Peanovými axiomy jsou:

5. $(\forall x, y \in \mathbf{P})\ x + h = x$, kde h je neutrální prvek pro sčítání.

   Přičteme-li zprava nulu k libovolnému číslu, číslo se nezmění.

6. $(\forall x, y \in \mathbf{P})\ x + y' = (x + y)'$

   Přičteme-li k libovolnému číslu následovníka libovolného čísla y, dostaneme číslo stejné, jako kdybychom k číslu x + y našli následovníka.

7. $(\forall x, y \in \mathbf{P})\ x\ .\ j = x$, kde j je neutrální prvek pro násobení

8. $(\forall x, y \in \mathbf{P})\ x\ .\ y' = x\ .\ y + x$

   Násobíme-li libovolné číslo x následovníkem libovolného čísla y, dostaneme číslo x . y + x.

   (Kopka, 2006)

Peanova množina je množinou nekonečnou, záleží však na uspořádání prvků množiny. Množina **N** přirozených čísel je v lineárním uspořádání Peanovou množinou. Pomocí úseků Peanovy množiny, tj. vhodných podmnožin Peanovy množiny, můžeme porovnávat konečné množiny. Na Peanově množině můžeme díky binární relaci „být menší“ (obecně „být před“)

definovat ostré lineární uspořádání Peanovy množiny. (Drábek, Křižalkovič, Liška, Viktora, 1985)

1.3 Numerace a numerační soustavy

Jelínek (1974) vysvětluje význam cizího termínu numerace jako pojmenovávání a zapisování čísel. Termín numerace lépe vystihuje podstatu věci než u nás zavedené pojmenování číselná soustava, jelikož v něm není vyjádřeno, že se jedná o systém, jak zapisovat čísla. Blažková, Matoušková, Vaňurová (1995) chápou numeraci jako proces, jehož cílem je osvojení si pojmu přirozeného čísla. Úkoly numerace shrnuly do dílčích cílů, tj. naučit žáky:

- číst a psát číslice a správně vyslovovat názvy čísel,
- číst a zapisovat čísla v desítkové soustavě a rozumět podstatě numerační soustavy,
- nahlížet na přirozená čísla jako na kvantifikátory, tzn. dokázat určit počet prvků dané množiny nebo skupiny předmětů, a dokázat vytvořit množinu o daném počtu prvků,
- uspořádat čísla v přirozeném uspořádání i užívat uspořádání při porovnávání přirozených čísel.

Různé numerační soustavy či systémy vznikaly, protože lidé hledali vhodný způsob, jak zapisovat a pojmenovávat přirozená čísla tak, aby je mohli lépe využívat např. při porovnávání a zaokrouhlování čísel, při zavádění matematických operací jako sčítání, odčítání, násobení, dělení… (Jelínek, 1974) Novák (1999) se o numerační (číselné) soustavě vyjadřuje jako o určité konvenci, kterou je nutno přijmout k vyjádření přirozených čísel. Numerační soustavu chápe jako soubor dohodnutých používaných znaků nazývaných číslice neboli cifry, spolu s vymezením pravidel pro zápis přirozených čísel. Forma zápisu čísla přitom závisí na volbě číselné soustavy.

1.4 Poziční numerační soustavy

Lidé od pradávna vyjadřovali přirozená čísla pomocí kamínků nebo vrypů do hole či kosti. Velkým pokrokem bylo, když pro zpřehlednění zápisu, začali vruby seskupovat do skupin o stejném počtu. Příkladem může být i věstonická vrubovka ze starší doby kamenné, což je holenní kost vlka s 55 zářezy, které jsou sdruženy po pěti. (Novák, 2005) Později zjistili matematikové, že je výhodné označit vzniklou skupinku novým znakem. Tímto způsobem se vyvíjela myšlenka číselných soustav.

Číselnou soustavu nazveme poziční, když význam téhož znaku (číslice) závisí na jeho umístění (pozici) v zápise čísla. (Bělík, 1999) Jelínek (1974, str. 38) shrnuje hlavní zásady, na kterých jsou budovány poziční numerační soustavy:

1. Určujeme-li větší počet prvků, sdružujeme je do skupin s n prvky. Počtu prvků v jedné plné skupině říkáme základ soustavy.
2. Pokud je těchto skupin více, opět je seskupujeme při stejném základu do větších skupin a dle potřeby takto postupujeme dále.
3. Při sdružování může vzniknout skupinka prvků menší, než je základ, podle nějž se sdružuje. Případné zbytky v těchto neúplných skupinách označujeme znaky, které nazýváme číslicemi, tj. 0, 1, 2, …, n – 1. Počet číslic je roven základu.
4. Číslo nula označuje, že ve skupině není žádný prvek.
5. Pro každou číslici zápisu čísla je přesně vymezené místo. Číslice má místní hodnotu, protože znamená podle svého umístění počet skupin určitého řádu.
6. Pro poziční soustavu není velikost základu rozhodující. Kupříkladu naše desítková soustava je z matematického hlediska náhodná, i když předpokládáme, že vznikla proto, že máme deset prstů na rukou.

Libovolné přirozené číslo v kterékoliv soustavě můžeme zapsat pomocí zobecněného zápisu rozvoje čísla v soustavě o základu z. Kopka (2006) i Mačát (1971) se shodují, že platí:

Nechť z je přirozené číslo ≥ 2. Pak každé nenulové přirozené číslo x lze právě jedním způsobem vyjádřit ve tvaru z-adického mnohočlenu:

$$x = a_n . z^n + a_{n-1}. z^{n-1} + a_{n-2} . z^{n-2} + \ldots + a_1 . z^1 + a_0 . z^0,$$

stručněji lze zapsat:

$$x = (a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1\, a_0)_z,$$

kde n je přirozené číslo nebo nula, koeficienty a_n, a_{n-1}, …,a_1, a_0 (neboli a_i) jsou přirozená čísla, pro něž platí $0 \leq a_i < 10$, pro každé i = 0, 1, 2, …, n a $a_n \neq 0$. Čísla a_0, a_1, …, a_n nazýváme číslice, příp. cifry z-adické číselné soustavy. O číslici a_i říkáme, že je i- tého řádu a o čísle x tvrdíme, že je n + 1 ciferné. Přirozené číslo z nazýváme základ číselné soustavy, též základ z-adické číselné soustavy. V soustavě o základu z platí, že z jednotek nižšího řádu tvoří jednu jednotku řádu nejblíže vyššího.

Samozřejmě je možné převádět zápis přirozeného čísla z jedné číselné soustavy do druhé. Chceme-li zapsat přirozené číslo x v numerační soustavě o základu z′, $z' \neq z$, $z' \geq 2$, nejprve vyjádříme přirozené číslo x v desítkové numerační soustavě. Poté převedeme zápis čísla x z desítkové soustavy do číselné soustavy o základu z´, tj. postupným dělením. (Drábek, Křižalkovič, Liška, Viktora, 1985)

1.4.1 Desítková (dekadická) numerační soustava

Desítková poziční soustava vznikala mezi 6. a 8. stoletím n. l. v Indii, kvůli potřebě indických matematiků vyjadřovat a počítat s velkými čísly. Z Indie se tato soustava rozšířila do celého světa. Do Evropy ji v 7. –8. století n. l. přinesli Arabové, proto také užíváme termínu arabské číslice. Trvalo několik století než desítkovou numerační soustavu Evropa přijala. Významným propagátorem dekadické numerační soustavy byl ve 12. století italský matematik Fibonacci. Ve své knize o počtech Liber abaci užíval arabské číslice. (Kopka, 2006)

Námi běžné užívaná desítková numerační soustava je příkladem poziční numerační soustavy o základu 10. K zápisu čísel používáme deset symbolů, tj. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Podstatou desítkové soustavy je sdružování prvků do skupin po deseti. Přičemž platí, že 10 jednotek nižšího řádu tvoří 1 jednotku nejblíže vyššího řádu, např. deset jednotek tvoří desítku, deset desítek představuje stovku atd. (Novák, 1999) Vzhledem k tomu, že dekadická číselná soustava nám je nejbližší, zavádíme na ní matematické operace (sčítání, odčítání, násobení, dělení), abychom lépe pochopili algoritmus těchto operací, a poté jej mohli aplikovat na numeračních soustavách o jiných základech.

Každé přirozené číslo v desítkové numerační soustavě můžeme vyjádřit ve tvaru rozvinutého či zkráceného pozičního zápisu, jak uvádí Kopka (2006) i Mačát (1971):

Každé nenulové přirozené číslo x lze právě jedním způsobem vyjádřit ve tvaru mnohočlenu:

$x = a_n \,.\, 10^n + a_{n-1}.\, 10^{n-1} + a_{n-2} \,.\, 10^{n-2} + \ldots + a_1 \,.\, 10^1 + a_0 \,.\, 10^0,$

zkráceně lze zapsat:

$x = a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1\, a_0,$

kde n je přirozené číslo, jež vyjadřuje řád čísla. Koeficienty a_n, a_{n-1}, …,a_1, a_0 (neboli a_i) jsou přirozená čísla, pro něž platí $0 \leq a_i < z$, pro každé i = 0, 1, 2, …, n a $a_n \neq 0$, která nazýváme číslice, příp. cifry.

Převádíme-li číslo z dekadické numerační soustavy do numerační soustavy o jiném základu, využíváme algoritmu postupného dělení. Vychází z toho, že číslo x dělíme základem z, poté vzniklý neúplný podíl opět dělíme číslem z atd. V dělení pokračujeme, dokud nezískáme nulový neúplný podíl. Ze získaných zbytků při dělení potom vytvoříme uvedený rozvoj. Postup si ukážeme na příkladu, kdy převedeme číslo 14 z desítkové soustavy do trojkové soustavy:

$14 = 3 . 4 + 2$

$4 = 3 . 1 + 1$

$1 = 3 . 0 + 1$

Získané zbytky dělení vypíšeme zdola nahoru. Zjistíme, že platí $(14)_{10} = (112)_3$. (Kopka, 2006)

1.4.2 Dvojková (binární) numerační soustava

Dvojková (binární) je poziční numerační soustava o základu 2. Binární numerační soustava využívá k zápisu čísel pouze dva symboly, tj. čísla 0 a 1. Číslo zapsané ve dvojkové soustavě se nazývá binární číslo. Uvedeme příklad zápisu čísla $(10)_{10}$ ve dvojkové numerační soustavě:

$(1010)_2 = 1 . 2^1 + 1 . 2^3 = 2 + 8 = 10$

Moderní digitální počítače pracují se symboly, resp. čísly (0 a 1) binární numerační soustavy, které jsou nejvýhodnější pro konstrukci, spolehlivost a údržbu stroje. Počítače využívají při své činnosti dvouhodnotových signálů. Tyto signály odpovídají jednoduše rozdělitelným stavům elektrického obvodu, tj. obvodem prochází či neprochází elektrický proud. (Mačát, 1971)

1.5 Nepoziční numerační soustavy

Na příkladu si ukážeme, jakým způsobem mohlo dojít ke vzniku nepozičních aditivních numeračních soustav. Čárky budeme sdružovat po pěti, pro skupinku pěti čárek zvolíme znak P, tudíž můžeme číslo 8 zapsat několika způsoby: P///, /P//, //P/, ///P. Pro zpřehlednění zápisu čísel opět seskupíme vzniklé skupinky do větších skupin o stejném počtu a zvolíme další symbol, kterým tuto skupinku budeme značit atd. (Kopka, 2006)

V nepoziční aditivní numerační soustavě má každý znak svoji hodnotu a nezáleží na pořadí, ve kterém jsou znaky napsány. Číslo určujeme sečtením hodnot všech znaků. Nevýhodou nepozičních numeračních soustav je délka zápisu čísel, která může výrazně převyšovat hodnotu nejvyššího symbolu soustavy. Určité znaky nepoziční numerační soustavy nese i římská soustava. (Kopka, 2006)

1.6 Historické zápisy čísel

Následující kapitoly se věnují nikoli historii matematiky jako takové, ale týkají se vývoje numerace, tj. pojmenovávání a zapisování čísel. Jednotlivé kapitoly jsou zaměřeny na historické zápisy čísel u vybraných numeračních soustav. Je v nich uvedeno, jakým způsobem vyjadřovaly zápisy čísel různé kultury v minulosti.

1.6.1 Zápis čísel v Egyptě

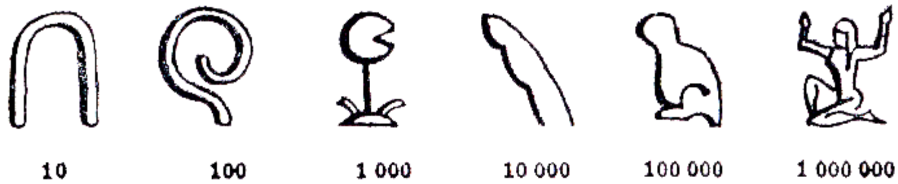
Jednou z nejstarších numeračních soustav je soustava starověkého Egypta, která byla užívána již před 5000 lety, tedy kolem roku 3000 př. n. l. Staří Egypťané žili v severovýchodní Africe na území kolem řeky Nil. Jejich numerační soustava se vyvinula i díky potřebě zaměřit pole na březích Nilu po záplavách, které každoročně přinášely úrodnou půdu. Egypťané uplatňovali zápisy čísel nejen v zeměměřičství, ale i v obchodu, stavitelství, astronomii atd. Záznamy čísel pomocí obrázkového písma, tzv. hieroglyfů, zapisovali Egypťané na papyrové svitky nebo je tesali do kamenů. (Ball, 2006) (Koval, 1968)

Egyptský zápis čísel vychází z jednoduchého zápisu čísel, tedy pomocí čárek, které tvoří skupiny po deseti. Z toho tedy vyplývá, že základem této numerační soustavy je číslo deset. Egyptský zápis čísel využívá k označení skupin čárek sedm obrázkových znaků, tj. hieroglyfů. Původně měly hieroglyfy význam podle toho, jaký předmět zobrazovaly, což je patrné i z Obrázku 1. Pravděpodobný význam hieroglyfů, kterými byla zapisována čísla v numerační soustavě starověkého Egypta:

číslo 1 – čára, kost, měřící hůl,
číslo 10 – kraví pouta na nohy či ruku,
číslo 100 – svitek, svinutý palmový list nebo stočený měřící provazec k vyměřování polí po povodních
číslo 1000 – lotosový květ, který kvetl po povodních na březích Nilu (symbol hojnosti)
číslo 10000 – prst, ukazovák
číslo 100000 – žába nebo pulec, kterých se objevovalo velké množství po záplavách na Nilu
číslo 1000000 – bůh, „žasnoucí muž“

(Novák, 2005) (Jelínek, 1974)

Obrázek 1: Ukázka egyptského zápisu čísel (Historie a vývoj čísel. [online]. [cit. 2015-04-1]. Dostupné z: http://www.geneze.info/pojmy/subdir/historie_cisel.htm)



Egyptská numerační soustava má výrazně aditivní charakter, tzn. spočívá ve sčítání. Je tedy jednoduché v uvedené soustavě sčítat a odčítat. Symboly sdružují prvky do skupin po deseti, protože tato numerační soustava je vystavěna na základu deset. Díky opakování těchto symbolů jsme schopni zapisovat i velká čísla. Teoreticky by soustava vyžadovala nekonečné množství číselných znaků pro zápisy symbolů větších a větších čísel. Egypťané nepotřebovali znak pro nulu, jelikož zvládali bez obtíží zapisovat čísla, kde je v naší numeraci nula nutná.

V egyptské numeraci nezáleží na seskupení, v jakém jsou znaky uspořádány. Egypťané však dodržovali určité zvyklosti při zapisování čísel, např. znaky umisťovali do geometrických tvarů, do čtvercového uspořádání. Je zřejmé, že egyptská numerační soustava je tedy příkladem nepoziční numerační soustavy. (Jelínek, 1974)

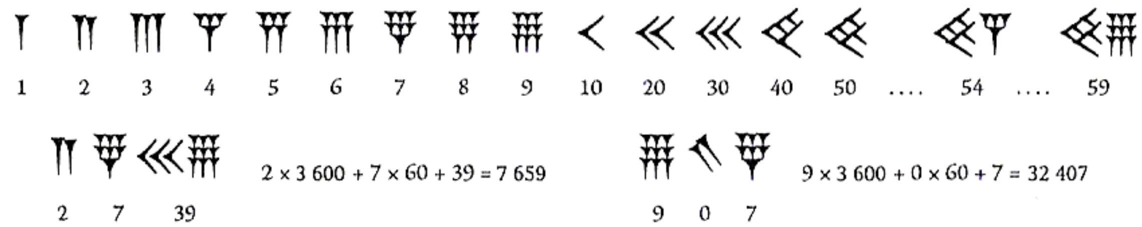
1.6.2 Zápis čísel v Mezopotámii

Sumerové žijící v jižní Mezopotámii vytvořili asi kolem roku 3000 př. n. l. nejstarší nám známé písmo, zvané klínové. Sumerové psali do měkkých hliněných tabulek pomocí dřevěných tyčinek s koncem ve tvaru klínku či hrotů seříznutých rákosových stvolů. Po Sumerech převzali klínové písmo Babyloňané, kteří ovládli Mezopotámii kolem roku 1800 př. n. l., proto se někdy užívá pojem babylonský zápis čísel. Babyloňané přebrali také šedesátkovou numerační soustavu, tedy soustavu se základem šedesát. (Lundyová, 2011)

Babylonská numerační soustava je vybudována na dvou základech, tj. 10 a 60, přičemž soustava se základem 10 je starší. Kombinace obou základů umožňuje zapisovat i velká čísla. Babyloňané tak zavedli jako první tzv. poziční numerační soustavu. V této soustavě se uplatňují dva číselné symboly pro zapsání jakkoli velkého čísla, přičemž umístění a seřazení těchto znaků hraje rozhodující úlohu. Značka  vytisknutá do měkkého jílu dřevěnou tyčinkou představuje číslo jedna. Těmito klíny, resp. značkami, vyjádříme čísla od jedné do devíti. Pro číslo deset je zaveden číselný znak . Opakováním obou číselných znaků zapíšeme čísla od jedné do padesáti devíti. Podle pozice znaků v zápisu čísla vyjadřují číselné znaky jednotky, desítky, šedesátky a vyšší skupiny. Z toho vyplývá, že čísla od jedné do padesáti byla jednotkami řádu prvního, šedesát jednotek prvního řádu dávalo jednotku řádu druhého atd. (Konforovič, 1989) Babyloňané sice neznali nulu, ale již kolem roku 400 př. n. l. se pokoušeli k vyjádření čísla nula užít mezery či dvou klínů obtištěných do hlíny jako symbol „prázdného místa“. Bohužel tento zápis způsoboval značné problémy v četbě zápisů čísel, obzvláště proto, že na konci zápisu se mezery nevkládaly. (Jelínek, 1974)

I my dnes využíváme něco z dědictví Sumerů. Pomocí šedesátkové soustavy měříme cykly a kruhy. Při měření času užíváme jednotek 60 sekund, 60 sekund je rovno 1 minutě, hodina má 60 minut. Velikost úhlů měříme ve stupních, kdy víme, že kruh má 360 úhlových stupňů. (Bentley, 2013)

Obrázek 2: Ukázka zápisu čísel v Mezopotámii (Lundyová, 2011)

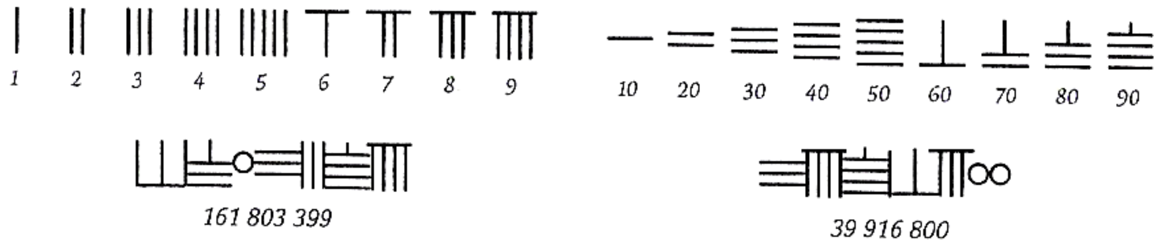


1.6.3 Zápis čísel v Číně

Rozmach společnosti a vznik státních útvarů starověku kolem roku 5000 př. n. l. přinesl Číně, stejně jako jiným státním útvarům té doby, rozvoj matematiky. Zavedení numerace souviselo s praktickými potřebami společnosti. Zápisy čísel byly využívány v praktických výpočtech např. při obchodování, v zemědělství, ve stavitelství, při výpočtu kalendáře apod. (Novák, 2005)

Číňané se zařadili mezi první národy, které užívaly dekadickou (desítkovou) numerickou soustavu, jež se se třinácti základními znaky užívá více než 3000 let. Na Obrázku 3 vidíme čínský zápis čísel pomocí hůlek. Hůlky, též tyčinky, nebyly delší než 15 cm a silnější než půl cm, vyráběly se ze dřeva, litiny, příp. slonoviny. Číňané dokonce využívali hůlky barevné. Červenými tyčinkami vyjadřovali na počítacích tabulkách čísla kladná a černými tyčinkami zaznamenávali záporná čísla, např. dluhy. (Klán, 2014) Je patrné, že tento způsob numerace patří k pozičním numeračním soustavám. V hůlkovém systému je zahrnuta i malá nula, která se v Číně užívá už od roku 200 př. n. l. Později původní počítací desku pracující s hůlkami nahradilo čínské kuličkové počitadlo, které využíváme i dnes. (Juškevič, 1978)

Obrázek 3: Ukázka čínského zápisu čísel (Lundyová, 2011)



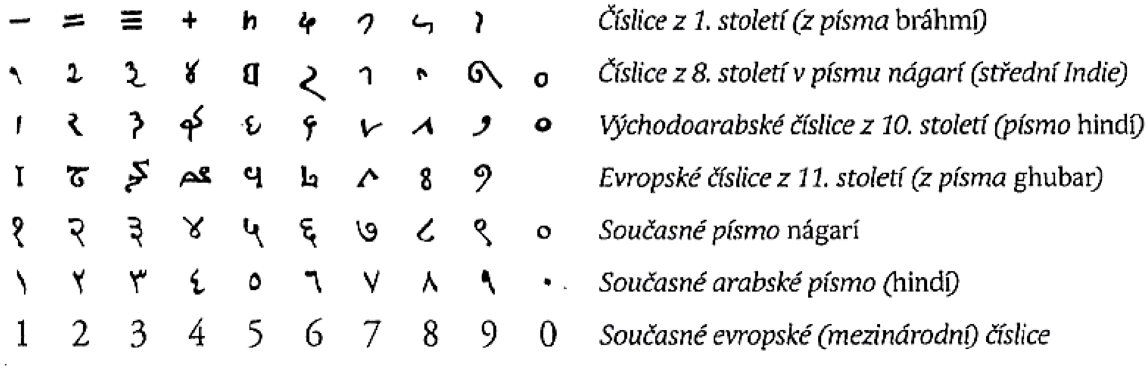
1.6.4 Indický zápis čísel

Indové rovněž patřili ke starověkým národům, které se již kolem roku 5000 př. n. l. zabývaly matematikou a s ní spojenou numerací. Čísla mají výrazné zastoupení v mnohých indických posvátných textech. Indové stejně jako Číňané počítali v dekadické numerační soustavě. (Novák, 2005)

Indická numerace má původ v písmu bráhmí, které k zápisu čísel používalo čtyřicet pět znaků pro čísla od jedné do devadesáti tisíc. Potřeby indických matematiků si však vynutily systém nový, který kombinoval názvy pro prvních devět číslic s mocninami deseti. Tímto jednoduchým způsobem mohli bez omezení zapisovat i velká čísla. Tedy již v roce 300 př. n. l používali indičtí matematikové odlišné znaky pro číslice jedna až devět. Do roku 600 př. n. l. vynalezli poziční numerační systém a zavedli nulu, vyjadřující bez jakýchkoli zmatků nezastoupenou mocninu deseti. (Lundyová, 2011) Na Obrázku 4 je zřejmý vývoj indického zápisu čísel. Díky tomu, že Indové psali číslice plynulým tahem ruky inkoustem na palmový list, vznikly zaoblené číselné znaky. Kupříkladu z původních samostatných vodorovných čar nad sebou značících číslo 2 a 3, vznikly rychlým psaním propojené znaky, které jsou velmi podobné dnešním číslicím 2 a 3. (Ball, 2006)

Právě z Indie se prostřednictvím arabských kupců v 7. –8. století př. n. l. rozšířila dekadická numerační soustava do Evropy. Šíření indických čísel i nuly napomohl perský matematik Al-Chwárizmí svou knihou o matematice, ve které mj. zavádí pojmy algebra, algoritmus či aritmetika. Jelikož do Evropy indická čísla přinesli Arabové, ujal se pro ně název arabské číslice. V Evropě se tedy až kolem roku 1200 začaly zavádět arabské číslice společně s desítkovou numerační soustavou.

Obrázek 4: Ukázka vývoje zápisu čísel od indického bráhmí po současné evropské číslice (Lundyová, 2011)



1.6.5 Mayský zápis čísel

Mayové byli původními obyvateli jižního Mexika a Střední Ameriky, kteří od roku 2500 př. n. l. obývali poloostrov Yucatan. Byli nejen skvělými zemědělci, ale i matematiky, kteří dokázali vytvořit lepší číselnou soustavu než Egypťané. Mayové stejně jako Egypťané využívali obrázkové písmo, které bylo složitější než hieroglyfy. Písemné údaje většinou tesali do kamene. Mayští astronomové dokázali sestavit kalendáře, které byly velmi přesné a spolehlivé. Dokonce vypočítali, že rok má 365,242 dne. (Ball, 2006) (Jelínek, 1974)

Mayská numerační soustava je poziční soustavou se základem dvacet a s pozůstatkem dřívější pětkové soustavy. Díky této kombinaci lze pomocí pouhých tří symbolů zapsat jakkoli velké číslo, namísto dvaceti symbolů, které by vyžadovala soustava dvacítková. Těmito symboly jsou pro:

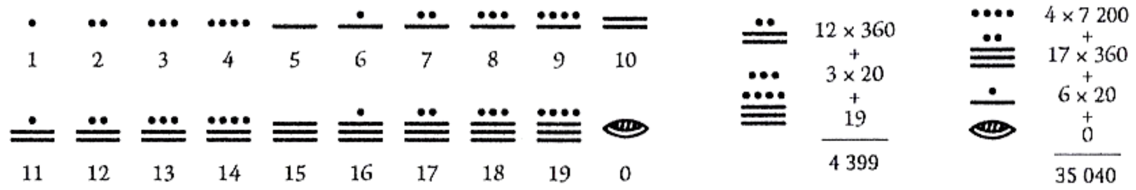
číslo 0 –  obrázek zobrazující mušli, lasturu

číslo 1 – • tečka jako symbol kakaového bobu, oblázku, fazole

číslo 5 – ▬ ležatá čára představující dřívko.

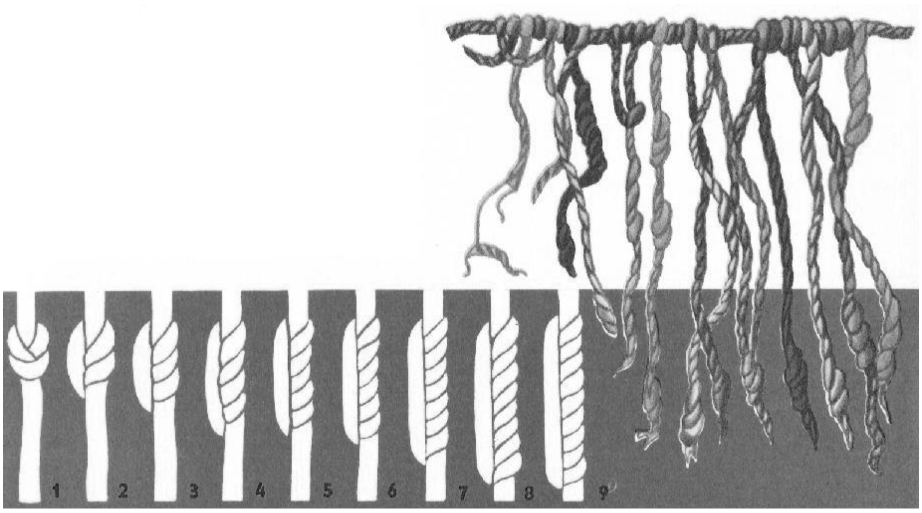
Čísla se v mayské numerační soustavě nezapisují vodorovně do řádků, jak jsme zvyklí, ale svisle do sloupců zdola nahoru. Základní místo je spodní vrstva vyznačující jednotky. Nad vrstvu s jednotkami se zapisují skupiny řádu prvního, druhého atd., tedy skupiny značící 20^1 (dvacítky), 20^2 (čtyřstovky) atd. Na Obrázku 5 vidíme, jak jednoduše se Mayové vypořádali se zápisem čísla nula. (Jelínek, 1974)

Obrázek 5: Ukázka mayského zápisu čísel (Lundyová, 2011)



Mayové, stejně jako další civilizace žijící ve Střední a Jižní Americe, používali uzlové písmo zvané quipu. Na pestrobarvených provázcích z vlny lam či lýka rostliny agáve splétali zruční vazači uzlů velmi složité zprávy, např. výkazy o narození a úmrtí, žních, stavu vojska, dokonce i sbírky zákonů. Zapletení jednotlivých uzlů znázorňovalo různé zprávy. To platilo i u vyjadřování různých čísel, kdy od jedné do devíti byly jednotlivé uzly různě vázané a pro vyjádření větších čísel se přidávaly další příslušné uzly. Na Obrázku 6 vidíme, že na hlavním tlustém provazu dlouhém i několik metrů, byly přivázány barevné provázky jako třásně s uzly. (Koval, 1968)

Obrázek 6: Ukázka uzlového zápisu, tzv. quipu (Koval, 1968)



1.6.6 Zápis čísel ve starověkém Řecku

Ve starověkém Řecku se konstituovala matematika jako vědní obor. Je tedy s podivem, že Řekové nepřispěli ke způsobu zapisování čísel ničím novým. Nepochopili výhody poziční babylonské soustavy, jednoduchou egyptskou desítkovou soustavu komplikovali vkládáním nových číselných znaků. (Jelínek, 1974)

Řekové používali tzv. jónský způsob zápisu čísel. Obrázek 7 poskytuje přehled řecké abecedy a hodnoty, kterým se jednotlivá písmena abecedy rovnala. Jsou zde uvedena i stará řecká písmena digamma pro číslo šest a koppa pro číslo devadesát, jichž se už neužívá. (Lundyová, 2011) Řekové přirozená čísla označovali dvaceti sedmi malými písmeny řecké abecedy, ke kterým připisovali čárku nebo pruh k odlišení od písmen. Pomocí apostrofu na prvních devíti znacích vyjadřovali tisíce, např. $\alpha' = 1000$, $\beta' = 2000$, $\gamma' = 3000$ atd. Desetitisíce značili pomocí velkého písmene M, např. $M^{\beta} = 20000$. Řecké zápisy čísel byly komplikované, např. $\beta' \rho\ \lambda\ \alpha$ je 2131. Je zřejmé, že i početní výkony nebyly jednoduché, a proto Řekové nevynikli v aritmetice tak výrazně jako v geometrii, kterou jako první začali budovat deduktivně. (Jelínek, 1974)

Dnešní matematika se bez řecké abecedy samozřejmě neobejde. S písmeny řecké abecedy se běžně setkáváme ve vzorcích i matematických výpočtech z nejrozmanitějších oborů. (Koval, 1968)

Obrázek 7: Ukázka řeckých číselných znaků (Lundyová, 2011)

Řecká abeceda			Hodnota
alfa	Α	α	1
beta	Β	β	2
gamma	Γ	γ	3
delta	Δ	δ	4
epsilon	Ε	ε	5
digamma	Ϝ	ς	6
zéta	Ζ	ζ	7
éta	Η	η	8
théta	Θ	θ	9
ióta	Ι	ι	10
kappa	Κ	κ	20
lambda	Λ	λ	30
mí	Μ	μ	40
ný	Ν	ν	50
ksí	Ξ	ξ	60
omikron	Ο	ο	70
pí	Π	π	80
koppa	Ϙ	ϙ	90
ró	Ρ	ρ	100
sigma	Σ	σ	200
tau	Τ	τ	300
ypsilon	Υ	υ	400
fí	Φ	φ	500
chí	Χ	χ	600
psí	Ψ	ψ	700
omega	Ω	ω	800
san	Ϡ	ϡ	900
			1000

1.6.7 Římský zápis čísel

Římská čísla se po Evropě i střední Asii šířila v období říše římské, tedy od roku 500 př. n. l. Římané byli zdatní stavitelé a dobří matematikové. Římského způsobu zapisování čísel pro praktické účely, v obchodě či v bankovnictví se v Evropě užívalo dlouhou dobu, v podstatě až do 16. století. (Jelínek, 1974)

Římané k zápisu čísel užívají sedm písmen, viz Obrázek 8. Značka pro jedničku může být obrazem jednoho vztyčeného prstu. Pětka může zpodobňovat obraz ruky s odstávajícím palcem a malíčkem. Desítka jsou v podstatě části dvou spojených pětek. Písmeno C je počátečním písmenem slova centum, které značí číslo sto. Písmeno M ze slova mille označuje tisíc. Násobky tisíce znázorňuje vodorovná čárka nad číselným znakem, např. $\overline{X}$ = 10000.

Obrázek 8: Římské číslice (Jelínek, 1974)

1	5	10	50	100	500	1000
I	V	X	L	C	D	M

Římská numerační soustava začíná vyjadřovat čísla opakováním stejného znaku, tj. písmena I. Pro větší číslice se pak užívají další písmena V, X, L, C, D, M. Pořadí číslic je stanoveno, tudíž se číslice zapisují zleva doprava podle velikostí, jež označují, např. MDCCCCLXXXVIII = 1988. Zápis čísel se řídí ještě dalšími pravidly, např. IV = 4 (jednička před pětkou říká, že jedničku od pětky odečítáme), ale VI = 6 (naopak jednička za pětkou vede ke sčítání). Výjimku tvoří číslice devět a všechna čísla s devítkou. Tato čísla se píší číslicí řádově vyšší, před níž se napíše číslice, která značí rozdíl mezi oběma čísly, např. IX = 9, XC = 90, CM = 900, XM = 990 atd. Římská číselná soustava nese určité prvky nepoziční (adiční) numerační soustavy. (Koval, 1968)

S římskou numerační soustavou jsme dobře obeznámeni. Dodnes se setkáváme s římským způsobem zápisu na cifernících hodin, při číslování kapitol knih, ve jménech panovníků, při uvádění letopočtů na budovách, v chronogramech a jinde. (Ball, 2006)

2 RÁMCOVÝ VZDĚLÁVACÍ PROGRAM

Rámcový vzdělávací program (dále jen RVP) společně s Národním programem rozvoje vzdělávání (tzv. Bílou knihou) definuje v České republice školství na nejvyšší úrovni. Kurikulární dokumenty jsou vytvářeny ve dvou úrovních, tj. státní a školní. Národní program vzdělávaní i RVP program reprezentují v systému kurikulárních dokumentů úroveň státní. Národní program vzdělávání zastřešuje počáteční vzdělávání jako celek, na rozdíl od RVP, který stanovuje rámce vzdělávání pro dílčí úrovně erudice členěné na předškolní, základní a střední. Školní úroveň vzdělávání zastupují Školní vzdělávací programy (dále jen ŠVP), podle kterých probíhá vzdělávání na jednotlivých školách. ŠVP vycházející z RVP si vytvářejí školy samostatně. (RVP ZV, 2013)

2.1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

V této kapitole stručně charakterizujeme kurikulární dokument Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV), který vešel v platnost 1. září 2007. Dále se zaměříme na vzdělávací oblast Matematika a její aplikace.

RVP ZV navazuje svým obsahem na RVP PV (Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání) a zároveň je východiskem pro koncepci rámcové vzdělávací programy pro střední vzdělávání. RVP ZV vymezuje vše potřebné v povinném vzdělávání žáků, tudíž vymezuje vzdělávací obsah ve formě očekávaných výstupů a učiva, specifikuje úroveň klíčových kompetencí, kterých by měli žáci dosáhnout na konci základního vzdělávání atd. Od roku 2013 stanovuje standardy pro základní vzdělávání, jejichž smyslem je účinně napomáhat při dosahování cílů stanovených v PRV ZV.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání je členěn do devíti vzdělávacích oblastí:

- Jazyk a jazyková komunikace
- Matematika a její aplikace
- Informační a komunikační technologie
- Člověk a jeho svět
- Člověk a společnost
- Člověk a příroda
- Umění a kultura
- Člověk a zdraví

- Člověk a svět práce

RVP ZV vychází z toho, že základní vzdělávání má žákům poskytnout nejen spolehlivý základ všeobecného vzdělávání, které je orientováno na praktické životní situace, ale pomoc při utváření a rozvíjení klíčových kompetencí. Základní vzdělávání si v rámci RVP ZV (2013) vymezuje tyto cíle:

- *„umožnit žákům osvojit si strategie učení a motivovat je pro celoživotní učení*
- *podněcovat žáky k tvořivému myšlení, logickému uvažování a k řešení problémů*
- *vést žáky k všestranné, účinné a otevřené komunikaci*
- *rozvíjet u žáků schopnost spolupracovat a respektovat práci a úspěchy vlastní i druhých*
- *připravovat žáky k tomu, aby se projevovali jako svébytné, svobodné a zodpovědné osobnosti, uplatňovali svá práva a naplňovali své povinnosti*
- *vytvářet u žáků potřebu projevovat pozitivní city v chování, jednání a v prožívání životních situací; rozvíjet vnímavost a citlivé vztahy k lidem, prostředí i k přírodě*
- *učit žáky aktivně rozvíjet a chránit fyzické, duševní a sociální zdraví a být za ně odpovědný*
- *vést žáky k toleranci a ohleduplnosti k jiným lidem, jejich kulturám a duchovním hodnotám, učit je žít společně s ostatními lidmi*
- *pomáhat žákům poznávat a rozvíjet vlastní schopnosti v souladu s reálnými možnosti a uplatňovat je spolu s osvojenými vědomostmi a dovednostmi při rozhodování o vlastní životní a profesní orientaci."*

2.2 Postavení předmětu matematiky v rámci RVP ZV

V RVP ZV je předmět matematika začleněn do vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Tato vzdělávací oblast se zaměřuje především na aktivní činnosti, které jsou charakteristické pro práci s matematickými objekty i pro uplatnění matematiky v reálných životních situacích. Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace uděluje žákům dovednosti a vědomosti využitelné v praktickém životě, čímž jim zprostředkovává získávání matematické gramotnosti. Dále matematické vzdělávání zdůrazňuje nezbytnost přesného porozumění jak základním myšlenkovým postupům i pojmům matematiky, tak i jejich vzájemným vztahům. Přičemž si žáci postupně osvojují matematické pojmy, algoritmy, terminologii a symboliku i s jejich způsoby užití. Zároveň se žáci seznamují s výhodami a možnostmi využití prostředků výpočetní techniky, tj. kalkulátory, pro výuku vhodné počítačové softwary či určité typy výukových programů, přitom si zdokonalují schopnosti práce s různými informačními zdroji, např. internetem. Jelikož má matematika ve vzdělávání nenahraditelnou roli a prostupuje celým základním vzděláváním, je zřejmé, že buduje předpoklady pro další studium. (RVP ZV, 2013)

RVP ZV rozděluje vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace na 1. a 2. stupeň. Učivo 1. stupně je rozděleno do čtyř tematických okruhů, jež jsou dále členěny na 1. období, které zahrnuje 1. až 3. ročník, a 2. období, do něhož spadá 4. a 5. ročník. V rámci těchto okruhů jsou pomocí očekávaných výstupů formulovány dovednosti, které by měl žák zvládat na konci období. (RVP ZV, 2013)

Tematickými okruhy vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace tedy jsou:

- Čísla a početní operace zahrnující přirozená, celá a desetinná čísla, zlomky, zápis čísla v desítkové soustavě i jeho zaznamenávání, např. na číselnou osu, model atd., násobilku, vlastnosti početních operací s čísly a písemné algoritmy početních operací;
- Závislosti, vztahy a práce s daty věnující jednoduchým závislostem z praktického života a jejich vlastnostem, orientaci a práci s diagramy, grafy, tabulkami a jízdními řády;
- Geometrie v rovině a v prostoru zabývající se základními útvary roviny (lomenou čárou, přímkou, polopřímkou, úsečkou, čtvercem, kružnicí, obdélníkem, trojúhelníkem, kruhem, čtyřúhelníkem, mnohoúhelníkem) i základními útvary prostoru (kvádrem, krychlí, jehlanem, koulí, kuželem, válcem), obvody a obsahy obrazců, délkou úsečky, jednotkami délky a jejich převody, vzájemnou polohou dvou přímek v rovině a osově souměrnými útvary;
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy, které se zaměřují na slovní úlohy, obrázkové a číselné řady, magické čtverce a prostorovou představivost.

(RVP ZV, 2013)

2.3 Zařazení numeračních soustav do výuky matematiky na 1. stupni ZŠ

Z rozčlenění vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace vyplývá, že pojem přirozeného čísla a zápisu čísel v dekadické numerační soustavě je zahrnut do tematického okruhu Číslo a početní operace. O dalších zápisech čísel, dokonce ani o římském zápise čísel, který je na školách vyučován, není v RVP ZV zmínka. V této kapitole budou tedy zkoumány možnosti implementace numerace a numeračních soustav či historických zápisů čísel do výuky matematiky na 1. stupni základní školy.

2.3.1 Mezipředmětové vztahy

Numerační soustavy by bylo možno do výuky začlenit v rámci mezipředmětových vztahů velmi snadno. Je zřejmé, že různé historické zápisy čísel překračují rámec pouze jediného předmětu. Tyto zápisy zaštiťují poznatky nejen matematické, ale i historické, společenskovědní či výtvarné a kulturní.

Průcha, Walterová, Mareš (1995, str. 118–119) v pedagogickém slovníku vymezují mezipředmětové vztahy jako *„vzájemné souvislosti mezi jednotlivými předměty, chápání příčin a vztahů přesahujících předmětový rámec, prostředek mezipředmětové integrace. V předmětovém kurikulu jsou vyjadřovány v učebních osnovách jednotlivých předmětů jako tzv. mezipředmětová témata.“*

Mezipředmětové vztahy můžeme chápat jako vztahy umožňující propojování poznatků různých oborů. Dochází tak ke sjednocování učiva díky odbourávání izolace jednotlivých vyučovacích předmětů. Tyto vztahy popisují souvislosti mezi jevy, pojmy či situacemi a jejich následné promítnutí do učebních předmětů. Propojování jednotlivých vědních oborů je nezbytné zejména z důvodů objektivnosti a komplexnosti poznatků. Mezipředmětové vztahy jsou prostředkem systematického rozvíjení logického myšlení, protože umožňují celistvé chápání společenských a přírodních skutečností, a tak propojují teorii s praxí. (Plch, 1987)

Problematika mezipředmětových vztahů je v RVP ZV zahrnuta do mezipředmětové integrace, která umožňuje propojování jednotlivých oborů a vytváření jednoho předmětu z několika oborů či naopak. Tyto předměty jsou do RVP ZV zařazeny jako tzv. průřezová témata, která procházejí napříč vzdělávacími oblastmi a propojují vzdělávací obsahy oborů, např. Multikulturní výchova, Environmentální výchova, Mediální výchova atd. (RVP ZV, 2013)

V odborné literatuře místo pojmu mezipředmětové vztahy častěji setkáváme s přesnějším termínem interdisciplinární vztahy, které už spadají do integrované výuky.

2.3.2 Zápis čísel jako nestandardní úloha

Vzhledem k tomu, že tematický okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy je důležitou součástí matematického vzdělávání, mohly by být numerační soustavy do vyučování zahrnuty právě v jeho rámci. Historické zápisy čísel představují pro žáky netradiční úlohy. Při těchto zápisech se žáci setkávají s jinými způsoby numerace, než na které nejsou zvyklí.

V RVP ZV jsou Nestandardní aplikační úlohy a problémy charakterizovány jako úlohy s řešením, do jisté míry nezávislém na dovednostech a znalostech školské matematiky, při nichž je nezbytné uplatnit logické myšlení a úsudek. Úlohy tohoto typu by měly být zařazeny do všech tematických okruhů během celého základního vzdělávání. Žáci se díky nestandardním úlohám připravují na řešení běžných životních problémů a úloh, přičemž se snaží problémovou situaci pochopit a analyzovat, utřídit údaje a najít optimální řešení.

Nestandardní úlohy mají výrazný motivační charakter, jehož účelem je představit matematiku jako zajímavý předmět. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, může jak posilovat žákovou víru ve vlastní schopnosti logického uvažování, tak podchytit i žáky méně úspěšné v matematice. (RVP ZV, 2013)

2.3.3 Zápis čísel jako motivační prvek ve výuce matematiky

Hrabal, Man, Pavelková (1989, str. 24) chápou motivaci ve výchovně vzdělávacím procesu ve dvojím smyslu:

1. *„jako prostředek zvyšování efektivity učební činnosti žáků – otázky motivování žáků ve vyučování,*
2. *jako jeden z významných cílů výchovně vzdělávacího působení školy – otázky rozvoje motivační sféry žáků.“*

Motivace učení je jedním z aspektů aktivní činnosti žáků v procesu vyučování. V průběhu učení se může motivace žáka proměňovat, prohlubovat atd. (Skalková, 2007)

Motivační metody výuky využívají možností žáků využívat jejich poznatky v oblastech, které je zajímají, a následně tak rozvíjet jejich nápady. Přitom je důležité, aby si žáci uvědomili, že získané vědomosti budou moci uplatit jak při dalším studiu, tak v praktickém či profesním životě. Pokud žák zjistí, že školní učivo má návaznost na praxi, je zpravidla ochoten věnovat pozornost i teorii.

Vhodným motivačním prvkem může být i zařazování numeračních soustav do výuky matematiky na 1. stupni. Římský zápis čísel je většinou na školách žákům předkládán tak, že si žáci sami uvědomují, kde všude se s římskými číslicemi dodnes setkáváme, např. při zápisech letopočtů, významných dat atd. Při předkládání zápisů čísel dalších starověkých národů (Egypťanů, Sumerů, Mayů…) zdůrazňujeme to, co se nám z těchto soustav zachovalo dodnes. Běžně užíváme k měření času jednotek času, tj. vteřin, minut, hodin, které mají základ v numerační soustavě o základu 60. Zajisté většina žáků bude rozumět i dalším pozůstatkům numeračních soustav, např. pár = 2, tucet = 12, mandel = 15, kopa = 60, veletucet = 144). (Novák, 2005)

2.4 Rozvoj klíčových kompetencí

RVP ZV klíčové kompetence formuluje jako soubor vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot nezbytných jak pro osobní rozvoj, tak pro uplatnění každého člena společnosti. Klíčové kompetence staví na základních hodnotách a pravidlech společnosti. Osvojování klíčových kompetencí je dle RVP ZV dlouhodobým procesem, který začíná v předškolním vzdělávání a probíhá celý život. Získané klíčové kompetence jsou považovány za neopomenutelný základ, který pomáhá žákům v dalším vzdělávání, ve vstupu do běžného života i do pracovního procesu. Ve vzdělávacím obsahu RVP ZV je učivo chápáno jako prostředek k osvojení činnostně zaměřených očekávaných výstupů, které se postupně propojují a vytvářejí předpoklady k účinnému a komplexnímu využívání získaných schopností a dovedností. (RVP ZV, 2013)

Při zavádění numeračních soustav do výuky matematiky by mohly být uplatněny tyto strategie vedoucí k naplnění klíčové kompetence:

- k učení – žák vyhledává a třídí informace o numeračních soustavách, které propojuje a využívá jak v dalším procesu učení, tak v praktickém životě, samostatně pracuje s termíny, symboly a znaky numeračních soustav, vyvozuje závěry, které uvádí do souvislostí,
- k řešení problémů – žák se učí řešit problémy samostatně, vyhledává shodné, podobné či odlišné znaky mezi historickými způsoby zápisu čísel a námi užívaným zápisem v soustavě dekadické, tyto získané vědomosti aplikuje při řešení úkolů s tematikou historických zápisů čísel, čímž rozvíjí i kritické myšlení,
- komunikativní – žák rozumí záznamům v podobě historických zápisů čísel, přemýšlí o nich, dokáže písemně vyjádřit čísla pomocí zmíněných způsobů zápisu, zvládá formulovat a svými slovy vyjádřit základní údaje, které o numeraci a numeračních soustavách získal,

- občanské – žák se seznamuje s různými způsoby zápisů čísel s historickou tematikou nejen z pohledu matematického, ale i v širším kontextu, je veden k pochopení různých kulturních souvislostí, zvyků a tradic a respektu k nim.

(RVP ZV, 2013)

PRAKTICKÁ ČÁST

Praktická část této diplomové práce se věnuje vytvořenému souboru pracovních listů s tematikou historických zápisů čísel, které by mohly být využívány ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ. Vhodnost koncepce pracovních listů byla prověřena jejich použitím ve školské praxi. Následné výzkumné šetření zhodnotilo efektivitu použití pracovních listů jako motivačního prvku ve výuce matematiky na 1. stupni základní školy.

3 PRACOVNÍ LISTY S UKÁZKAMI ZÁPISŮ ČÍSEL V RŮZNÝCH NUMERAČNÍCH SOUSTAVÁCH

V rámci této kapitoly budou představeny tři pracovní listy, které se zabývají egyptským, římským a mayským způsobem zápisu čísel. Každý z pracovních listů obsahuje časovou osu a mapku, do nichž si žáci vyznačí časové období a území, ve kterých se probírané civilizace vyskytovaly. Žáci se tak lépe zorientují v dějinách lidstva. Další součástí pracovního listu je oddíl seznamující žáky se samotným způsobem zápisu čísla. Poslední část pracovního listu obsahuje čtyři úlohy, na kterých si žáci vyzkouší dané zápisy čísel.

Jednotlivé pracovní jsou sestaveny tak, aby mohly být velmi snadno a jednoduše použity ve výuce. Přesto jsou ke každému pracovnímu listu uvedeny obsahové cíle, časová náročnost, organizační formy, didaktické pomůcky, metodický postup a předpokládaný průběh práce s listem, mezipředmětové vztahy a průřezová témata, které učiteli usnadňují vhled do struktury pracovního listu.

3.1 Pracovní list – Egyptský zápis čísel

Obsahové cíle:

- obeznámit žáky s obecnými poznatky o kultuře starověkého Egypta,
- objasnit význam jednotlivých symbolů pro číslice,
- umět zapsat číslo pomocí hieroglyfů,
- naučit se sčítat a odčítat s čísly, které jsou zapsané pomocí hieroglyfů

Časová náročnost: vyučovací hodina (45 minut)

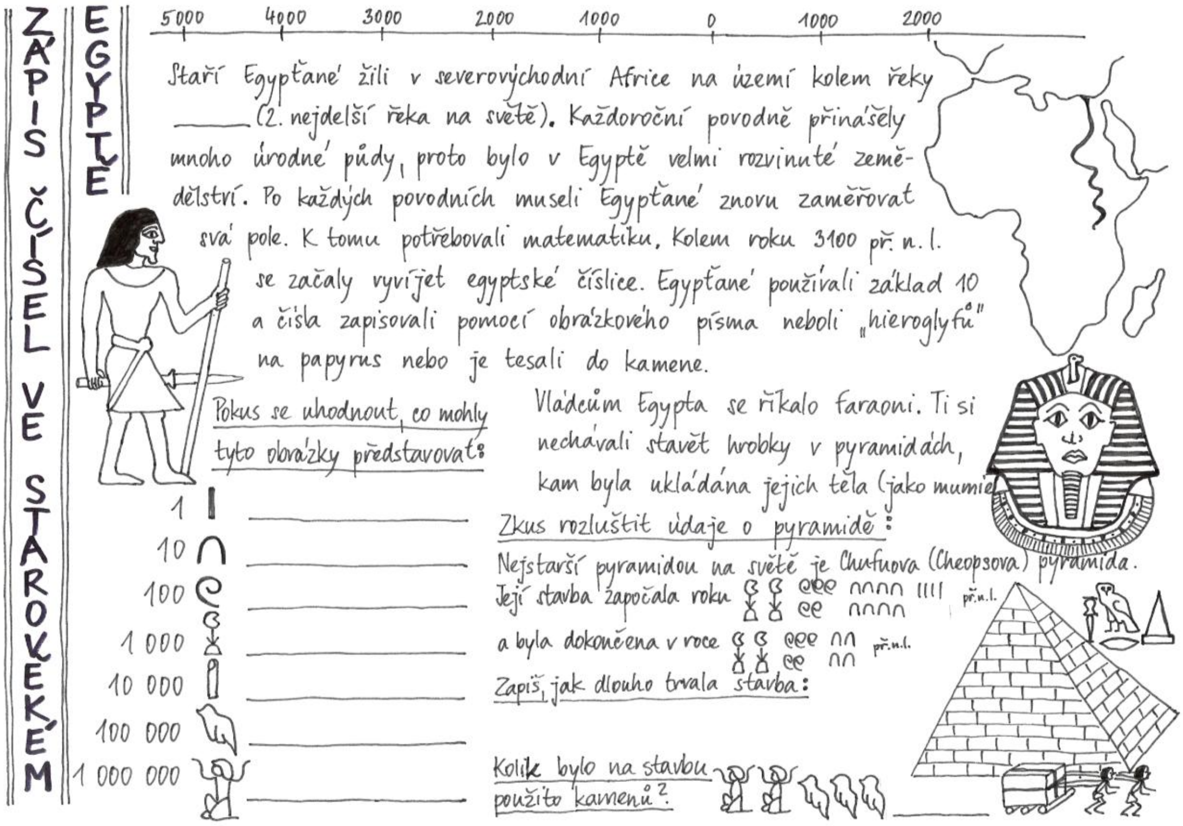
Organizační forma: frontální, samostatná práce

Didaktické pomůcky:

- počítač, dataprojektor – prezentace powerpoint, interaktivní tabule, příp. tabule

- kopie pracovního listu pro každého žáka (viz Obrázek 9) s dotazníkem, pastelky, psací potřeby

Obrázek 9: Pracovní list- Zápis čísel ve starověkém Egyptě



Metodický postup a předpokládaný průběh činnosti:

- Každý žák obdrží kopii pracovního listu s dotazníkem. Nejprve se učitel zeptá žáků, jestli ví, kde leží egyptský stát, příp. na kterém kontinentu se nachází. Dále učitel zjišťuje, jaké ponětí mají žáci o civilizaci starověkého Egypta. S podporou prezentace s názvem „Zápis čísel ve starověkém Egyptě" učitel se žáky společně utřídí základní poznatky o kultuře starověkého Egypta.
- Na časovou osu žáci zaznačí rozmezí existence civilizace starověkého Egypta a přibližný letopočet, od nějž se datují zmínky o egyptských hieroglyfech, užívaných při zápisech čísel.
- Do mapky v pracovním listu žáci podle obrázků z prezentace vybarví pastelkami území, kde se přibližně rozkládala Egyptská říše.
- Po společném úvodu se žáci začnou věnovat plnění úkolů z pracovního listu. Učitel nejprve úkol žákům vysvětlí, dá jim prostor pro řešení úlohy. Následuje společná

kontrola a teprve pak mohou přejít žáci k dalšímu úkolu. Uvedený postup je stejný pro řešení následujících úloh z pracovního listu.

- V prvním úloze se žáci pokouší uhodnout, jaký význam mohly představovat uvedené symboly. Následně učitel žákům odhalí předpokládané významy hieroglyfů.
- Poté co se žáci seznámili s hieroglyfy, které se užívají k zápisu čísel, učitel žákům objasní principy, na nichž stojí egyptský zápis čísel. Hlavně zdůrazní podobnost s námi běžně užívanou dekadickou numerační soustavou, protože obě soustavy mají stejný základ, tj. deset. Dále uvede, že se jedná o numerační soustavu nepoziční, tudíž nezáleží, na jaké pozici jsou jednotlivé symboly napsány.
- K procvičení hieroglyfických zápisů čísel učitel zvolí jednoduchou aktivitu, v níž žáci učiteli zadají číslo, a on jej zapíše na tabuli. Samozřejmě žáci zkouší na zadní stranu pracovního listu zapisovat číslo společně s učitelem.
- Ve druhé aktivitě žáci luští a zapíší arabskými číslicemi letopočty, kdy započala a byla dokončena stavba Cheopsovy pyramidy. Následuje společná kontrola.
- Ve třetí úloze žáci využijí údaje získané ve druhé aktivitě. Žáci vypočítají, jak dlouho trvala stavba Cheopsovy pyramidy, a výsledek zapíší pomocí egyptských hieroglyfů.
- Posledním úkolem je rozluštit zápis čísla, ze kterého se dozví, kolik kamenů bylo na stavbu Cheopsovy pyramidy použito. Výsledek bude opět společně zkontrolován.
- Každý žák po vypracování pracovního listu vyplní přiložený dotazník (Příloha 1) skládající se z 6 otázek, přičemž poslední otázka je doplňující a tedy dobrovolná.

Mezipředmětové vztahy:

- Výtvarná výchova – Obrázkové písmo v sobě skrývá velký výtvarný potenciál, proto jej lze jednoduše využít jako námět různorodých činností ve výtvarné výchově, např. perokresba, kresba suchým i mastným pastelem atd.
- Člověk a jeho svět

Průřezová témata:

- Multikulturní výchova
- Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech
- Výchova demokratického občana

3.2 Pracovní list – Římský zápis čísel

Obsahové cíle:

- poskytnout žákům stručný přehled informací o starověkém Římu,
- vysvětlit principy římského zápisu čísel,
- umět zapsat číslo pomocí římských číslic,
- naučit se odčítat římské číslice.

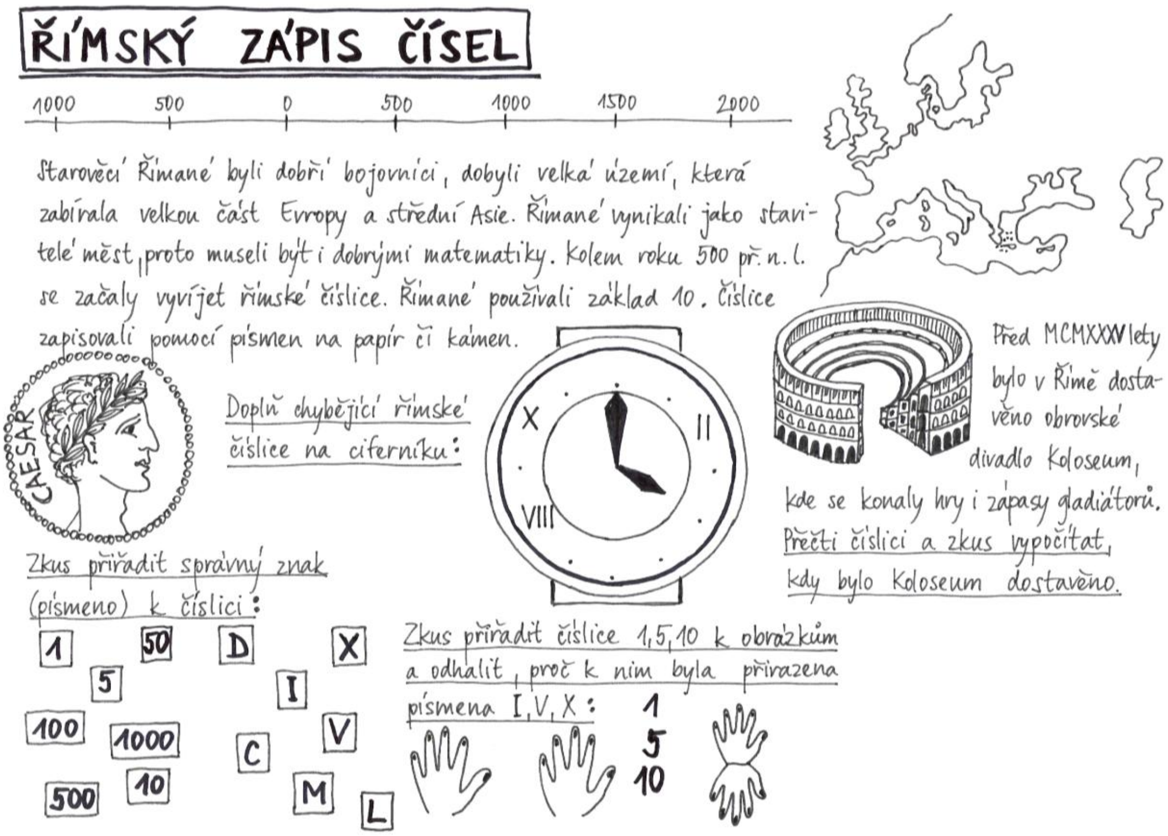
Časová náročnost: vyučovací hodina (45 minut)

Organizační forma: frontální, samostatná práce

Didaktické pomůcky:

- počítač, diaprojektor – prezentace powerpoint, interaktivní tabule, příp. tabule
- kopie pracovního listu pro každého žáka (viz Obrázek 10) s dotazníkem, pastelky, psací potřeby

Obrázek 10: Pracovní list- Římský zápis čísel



Metodický postup a předpokládaný průběh činnosti:

- Každý žák dostane kopii pracovního listu s dotazníkem. Učitel na začátku hodiny zjišťuje, co všechno vědí žáci o kultuře starověkého Říma, např. polohu města Řím, název poloostrova, na němž se Řím nalézá, atd. Učitel pomáhá žáků utřídit si získané informace o římské kultuře, činí tak s přispěním prezentace „Římský zápis čísel“.

- Žáci vymezí na časové ose úsek, který zobrazuje přibližnou délku trvání římské civilizace. Dále zaznačí rok, od kdy se začínají čísla zaznamenávat římským zápisem čísel.
- Žáci pastelkami dle obrázků z prezentace vybarví v mapce místa, na nichž se římská říše rozprostírala.
- Samotné plnění úkolů z pracovního listu navazuje na úvodní společnou část hodiny. Učitel nejdříve objasní zadání úkolu, žáci pak zkoušejí řešit úlohu samostatně a nakonec jsou výsledky hromadně zkontrolovány. I nadále je dodržen postup, kdy všichni žáci řeší zároveň jednu úlohu, a teprve po společné kontrole mohou přistoupit k řešení následujících cvičení.
- V první úloze žáci zkoušejí k sobě správně přiřadit římské a arabské číslice.
- Jakmile žáci znají správné přiřazení římských číslic k jejich arabským ekvivalentům, seznámí učitel žáky s principy římského zápisu čísel. Učitel žáky upozorní na to, že pracují s numerační soustavou o základu deset, která nese prvky nepoziční číselné soustavy. Zároveň žákům určitá specifika zápisu římských čísel, např. psaní čísel IX, XI či IV a VI, atd.
- Žáci si procvičí římské zápisy čísel společně s učitelem, kterého u tabule zkouší, zda umí zapsat jimi zadané číslo římskými číslicemi. Žáci si kontrolují své zápisy dle tabule.
- V rámci druhého úkolu doplní žáci chybějící čísla ciferníku hodin.
- Ve třetí úloze žáci zkoušejí odhalit, jakým způsobem asi byla přiřazena písmena I, V, X k jejich arabským ekvivalentům.
- Ve čtvrté úloze žáci nejprve zapíší příklad pomocí římských číslic a následně se snaží tuto úlohu na odčítání vypočítat.
- V závěru hodiny vyplní každý žák po vypracování pracovního listu přiložený dotazník (Příloha 2), který se skládá se z 6 otázek. V poslední otázce se mohou žáci vyjádřit, k čemu by jim mohla být znalost římského zápisu čísla platná.

Mezipředmětové vztahy:

- Výtvarná výchova
- Člověk a jeho svět

Průřezová témata:

- Multikulturní výchova
- Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech
- Výchova demokratického občana

3.3 Pracovní list – Mayský zápis čísel

Obsahové cíle:

- seznámit žáky se základními poznatky o mayské civilizaci,
- objasnit zásady mayského zápisu čísel,
- vysvětlit principy dvacítkové numerační soustavy,
- umět zapsat číslo pomocí mayských znaků pro zápis čísel,
- naučit se sčítat v mayské numerační soustavě,
- naučit se číst uzlové písmo quipu.

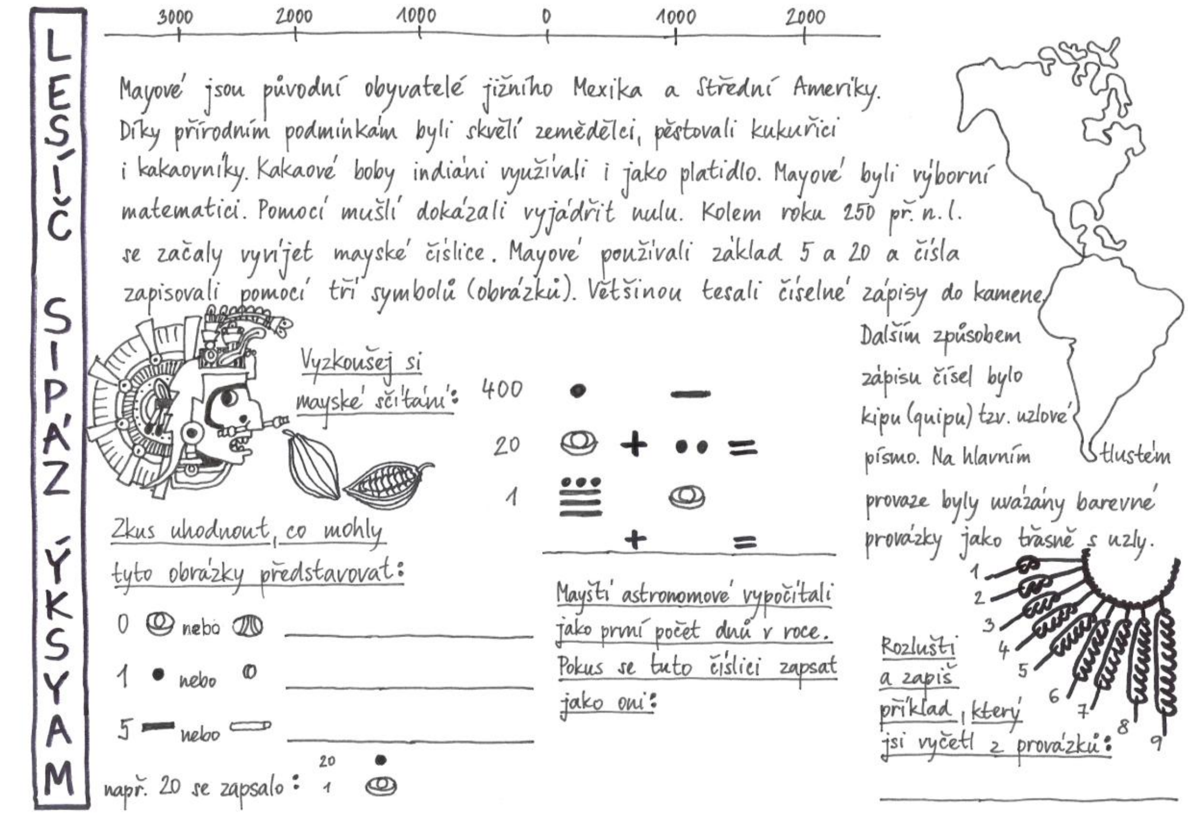
Časová náročnost: vyučovací hodina (45 minut)

Organizační forma: frontální, samostatná práce

Didaktické pomůcky:

- počítač, diaprojektor – prezentace powerpoint, interaktivní tabule, příp. tabule, ukázka uzlového zápisu quipu
- kopie pracovního listu pro každého žáka (viz Obrázek 11) s dotazníkem, pastelky, psací potřeby

Obrázek 11: Pracovní list- Mayský zápis čísel



Metodický postup a předpokládaný průběh činnosti:

- Každý žák dostane kopii pracovního listu s dotazníkem. V úvodu hodiny učitel zjistí, zda vůbec mají žáci nějaké povědomí o existenci mayské civilizace. Pomocí prezentace s názvem „Mayský zápis čísel“ učitel doplní žákům poznatky o mayské kultuře.
- Žáci v pracovním listu na časovou osu zaznačí rozmezí, ve kterém existovala mayská civilizace. Na osu ještě vyznačí časový údaj, který značí dobu vzniku mayského zápisu čísel.
- V mapce, která je součástí pracovního listu, žáci vybarví území obývané Mayi. Oporou jim jsou obrázky v prezentaci „Mayský zápis čísel“.
- Po úvodní části hodiny přistoupí žáci k úkolům z pracovního listu. Žáci si nejprve vyslechnou zadání úlohy, aby pak mohli ji samostatně řešit. Vždy je provedena společná kontrola výsledků aktivity.
- V první úloze žáci tipují významy třech symbolů zastupujících číslice.
- Poté co jsou žáci obeznámeni s významy symbolů mayských číslic, seznámí učitel žáky s principy, na nichž stojí mayský zápis čísel. Učitel zdůrazní, že jedná

o dvacítkovou poziční numerační soustavou a ukáže žákům, jakým způsobem se tato čísla zapisují.

- Ve druhé úloze si žáci vyzkoušejí sčítání mayských čísel ve dvacítkové soustavě.
- V rámci třetího úkolu žáci zapíší mayským způsobem zápisu čísel počet dnů v roce.
- Při řešení poslední úlohy se žáci seznámí s uzlovým písmem quipu. Úkolem žáků je přečíst a vypočítat takto zapsaný příklad.
- Každý žák vyplní po vypracování pracovního listu v závěru přiložený dotazník (Příloha 3), který se skládá se z 6 otázek. Poslední otázka je doplňující a žáci v ní mohou vyjádřit názor, k čemu se jim bude hodit znalost mayského zápisu čísel.

Mezipředmětové vztahy:

- Výtvarná výchova
- Pracovní činnosti – Žáci by mohli zkoušet tesat do pórovitých materiálů (např. Ytong) mayské hieroglyfy.
- Člověk a jeho svět

Průřezová témata:

- Multikulturní výchova
- Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech
- Výchova demokratického občana

4 REALIZACE A PRŮBĚH PRÁCE S PRACOVNÍMI LISTY S RŮZNÝMI ZÁPISY ČÍSEL S ŽÁKY 5. ROČNÍKŮ ZŠ

V této kapitole jsou zpracovány praktické zkušenosti z využití pracovních listů ve výuce matematiky. Dále se zaobírá popisem postupu práce s pracovním listem.

Každý pracovní list byl koncipován do jedné vyučovací hodiny. Po společném úvodu, ve kterém byli žáci seznámeni se základními principy zápisu čísel, mohli žáci přistoupit k řešení jednotlivých úloh. Při řešení úkolů pracovali žáci samostatně. Poté, co byly výsledky úkolu společně zkontrolovány, mohli žáci přistoupit k další úloze. Popsaný postup byl použit u všech pracovních listů. Ke každému pracovnímu listu byla navíc vytvořena instruktážní prezentace, která provázela žáky po celou dobu práce s pracovním listem. Během výuky byla uplatněna jak frontální organizační forma výuky, tak i samostatná práce žáka.

4.1 Pracovní list – Egyptský zápis čísel

Jako první v pořadí byl ve výuce použit pracovní list s námětem egyptského zápisu čísla. Reakce na tuto novou, netradiční aktivitu byla ve všech pátých ročnících stejná. Z počátku byli žáci trochu zaskočeni, jak netradičním tématem hodiny matematiky, tak i přítomností jiného učitele. Po opadnutí počátečního ostychu se ale velmi ochotně zapojili do všech činností. S nadšením a chutí pracovali celou vyučovací hodinu.

Žáky nejvíce oslovila první úloha, v níž hádali významy hieroglyfů. Při řešení této úlohy byli žáci velmi kreativní a vymýšleli vskutku originální významy obrázků. Jelikož si nebývale rychle osvojili symboly pro egyptský zápis čísel, bylo pro ně řešení další úkolů z pracovního listu poměrně snadné. Egyptský zápis čísel tedy rozhodně splnil předpoklad motivačního prvku ve výuce matematiky.

4.2 Pracovní list – Římský zápis čísel

Při zařazení v pořadí druhého pracovního listu s tematikou římského zápisu čísla nebylo odezvou takové nadšení jako u egyptského zápisu čísel. Téma vyučovací hodiny pro žáky totiž nepředstavovalo úplnou novinku, jako tomu bylo u egyptského zápisu čísel, jelikož se již se zápisem římských číslic v rámci výuky matematiky setkali. Žáci se i přesto snažili svědomitě plnit úkoly z pracovního listu.

Společné pro všechny tři třídy 5. ročníků bylo, že nebyli tolik pozorní při vysvětlování základních principů způsobu římského zápisu čísel. Díky tomu nebyli žáci tak úspěšní při řešení úloh v pracovním listu, jak by se dalo předpokládat, i když se v podstatě jednalo o opakování. Většina chyb však byla způsobena nepozorností, protože se žáci snažili co nejrychleji vyřešit úlohy, aby předvedli, že římský zápis čísel již zvládají.

Překvapivým zjištěním byl rozpor mezi 5. ročníky FZŠ Olomouc, Demlova a 5. ročníkem ZŠ Žďár nad Sázavou, Palachova. Žáky olomoucké školy bavilo řešení úkolů z pracovního listu s tematikou římského zápisu čísel mnohem více než žáky žďárské školy.

4.3 Pracovní list – Mayský zápis čísel

Posledním ve výuce uplatněným pracovním listem byl list s tématem mayského zápisu čísla. Jelikož bylo téma nové, žáky zaujalo. Výhodou v rámci výuky bylo, že žáci již znali koncepci, se kterou byly utvářeny pracovní listy, tudíž byl průběh hodiny svižnější a plynulejší a učiteli ušetřil mnohé vysvětlování.

Žáky nejvíce oslovila první a poslední aktivita. V první aktivitě mohli zapojit svoji tvořivost při objasňování původních významů symbolů mayských číslic. Dokonce většinou i správně tipovali významy symbolů. Čtvrtý úkol byl spojen s luštěním uzlového písma quipu. Za velkým úspěchem této aktivity stojí fakt, že si žáci mohli ukázku uzlového písma prohlédnout, osahat a jednoduše pak spočítat počet smyček jednotlivých uzlíků. I tento pracovní list s tematikou mayského zápisu čísel potvrdil předpoklad, že by byl vhodným motivačním prvkem ve výuce matematiky.

5 VÝZKUMNÉ ŠETŘENÍ

V této kapitole se seznámíme s výzkumem, který byl proveden na základě dotazníkového šetření a pozorování žáků při práci s pracovními listy.

5.1 Cíle výzkumného šetření

V rámci výzkumného šetření byly stanoveny tyto cíle:

- zjistit, zda žáci jeví zájem o zařazování aktivit tohoto typu do běžné výuky matematiky,
- porovnat čtyři typově shodné úlohy, které se vyskytovaly ve všech vytvořených pracovních listech a najít aktivitu, resp. úlohu, která byla v rámci jednotlivých pracovních listů mezi žáky neoblíbenější,
- ověřit, zda jsou žáci schopni prakticky využít získané vědomosti, tj. zapisovat čísla různými způsoby,
- zjistit, jak často by žáci chtěli zařazovat tyto aktivity do běžné výuky.

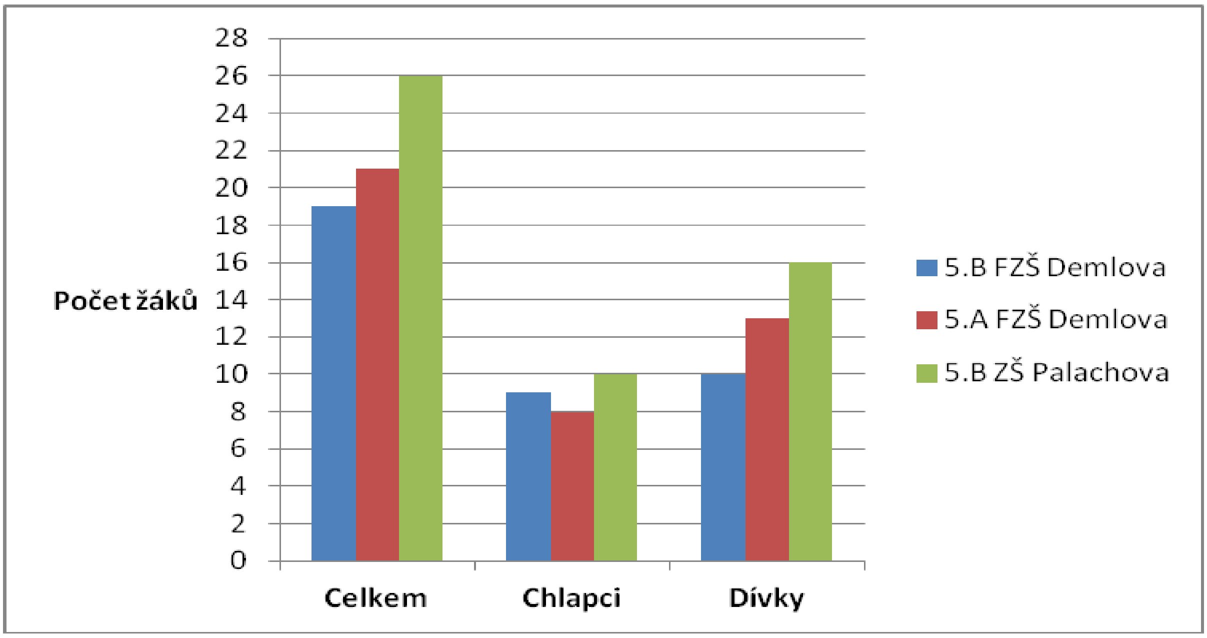
5.2 Výzkumný vzorek

Výzkumným vzorkem bylo celkem 66 žáků třech tříd 5. ročníků základních škol. Ve třídě 5. B FZŠ Olomouc, Demlova se výzkumu zúčastnilo 19 žáků, z toho 9 chlapců a 10 dívek. Ve třídě 5. A FZŠ Olomouc, Demlova se výzkumu zúčastnilo 21 žáků, z toho 8 chlapců a 13 dívek. Ve třídě 5. B ZŠ Žďár nad Sázavou, Palachova se výzkumu zúčastnilo 26 žáků, z toho 10 chlapců a 16 dívek. Procentuální zastoupení chlapců a dívek je shrnuto v Tabulce 1 a v Grafech 1 a 2.

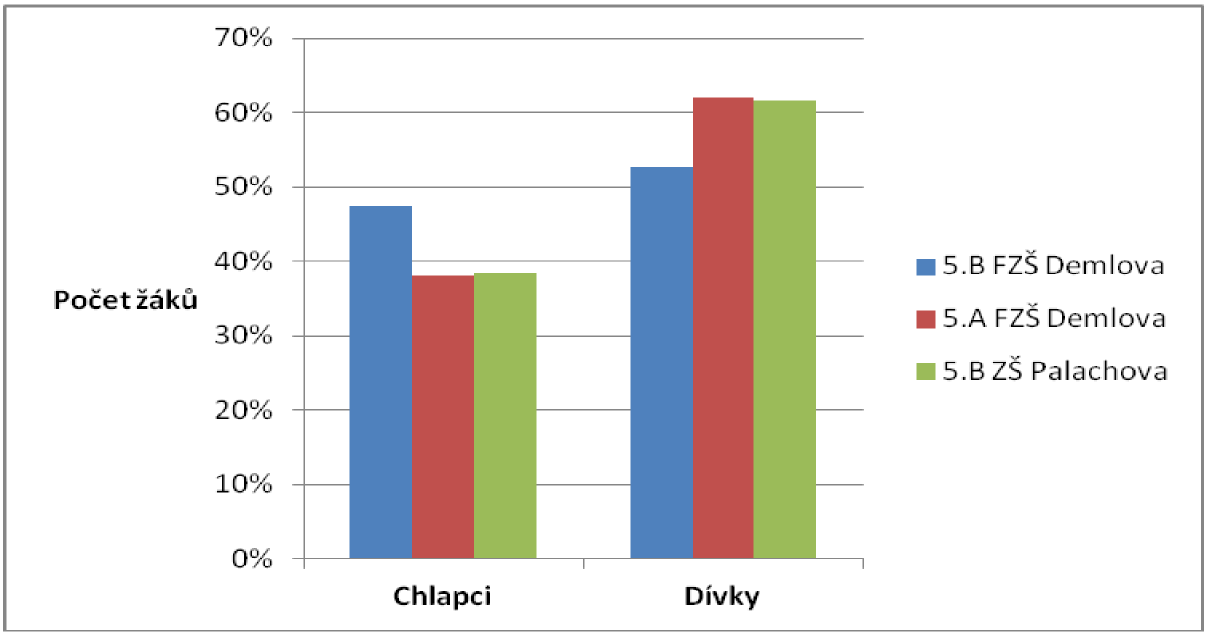
Tabulka 1: Zastoupení počtu žáků v 5. ročnících

Třídy	Celkem	Chlapci	Dívky
5.B FZŠ Demlova	19	9	10
		47 %	53 %
5.A FZŠ Demlova	21	8	13
		38 %	62 %
5.B ZŠ Palachova	26	10	16
		38 %	62 %

Graf 1: Počet žáků v 5. ročnících. Graf vyjadřuje početné zastoupení chlapců a dívek v jednotlivých třídách.



Graf 2: Procentuální zastoupení žáků v 5. ročnících. Graf vyjadřuje procentuální zastoupení chlapců a dívek v jednotlivých třídách.



5.3 Metody výzkumného šetření

Výzkumné šetření bylo ve školské praxi realizováno formou dotazníkového šetření zvlášť pro každý pracovní list s tematikou historických zápisů čísel. Každé dotazníkové šetření bylo rozděleno do šesti položek, které se vztahovaly k aktivitám vykonávaným při práci s pracovním listem. V dotazníkovém šetření byly užity otázky faktografické, uzavřené, polozavřené a otevřené. Dotazník, jehož časová dotace nepřesahovala pět minut, vyplňovali žáci vždy na konci vyučovací hodiny po zpracování pracovního listu. Prostřednictvím tohoto dotazníku žáci vyjadřovali svoje postoje a názory na dané aktivity v pracovním listu a celkovou zpětnou vazbu.

5.4 Analýza výzkumného šetření

V rámci výzkumného šetření byly rozpracovány tři dotazníky (Příloha 4, 5, 6), pomocí nichž byly vyhodnoceny pracovní listy. Každá položka dotazníku je popsána tabulkou, grafickým znázorněním výsledků a shrnutím získaných informací.

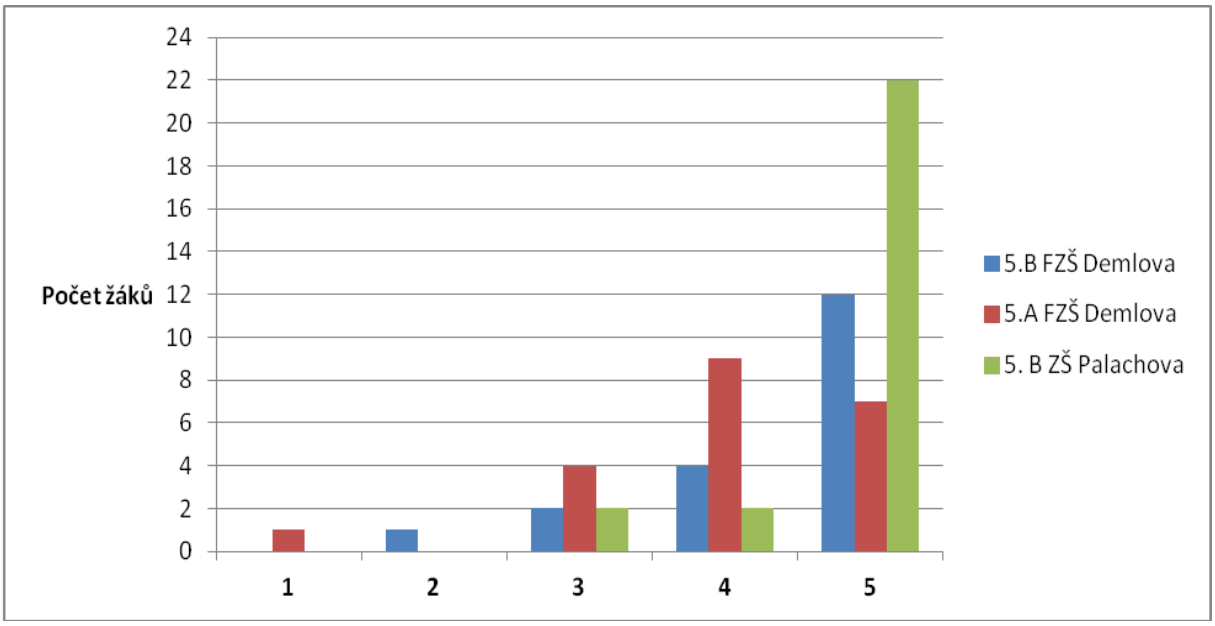
5.5 Hodnocení pracovního listu – Egyptský zápis čísel

Dotazník č. 1 – 2. položka „Bavilo Tě egyptské počítání?“

Tabulka 2: Hodnocení 2. položky „Bavilo Tě egyptské počítání?

2. otázka	1	2	3	4	5
5.B FZŠ Demlova	0	1	2	4	12
5.A FZŠ Demlova	1	0	4	9	7
5. B ZŠ Palachova	0	0	2	2	22

Graf 3: Hodnocení 2. položky „Bavilo Tě egyptské počítání?“



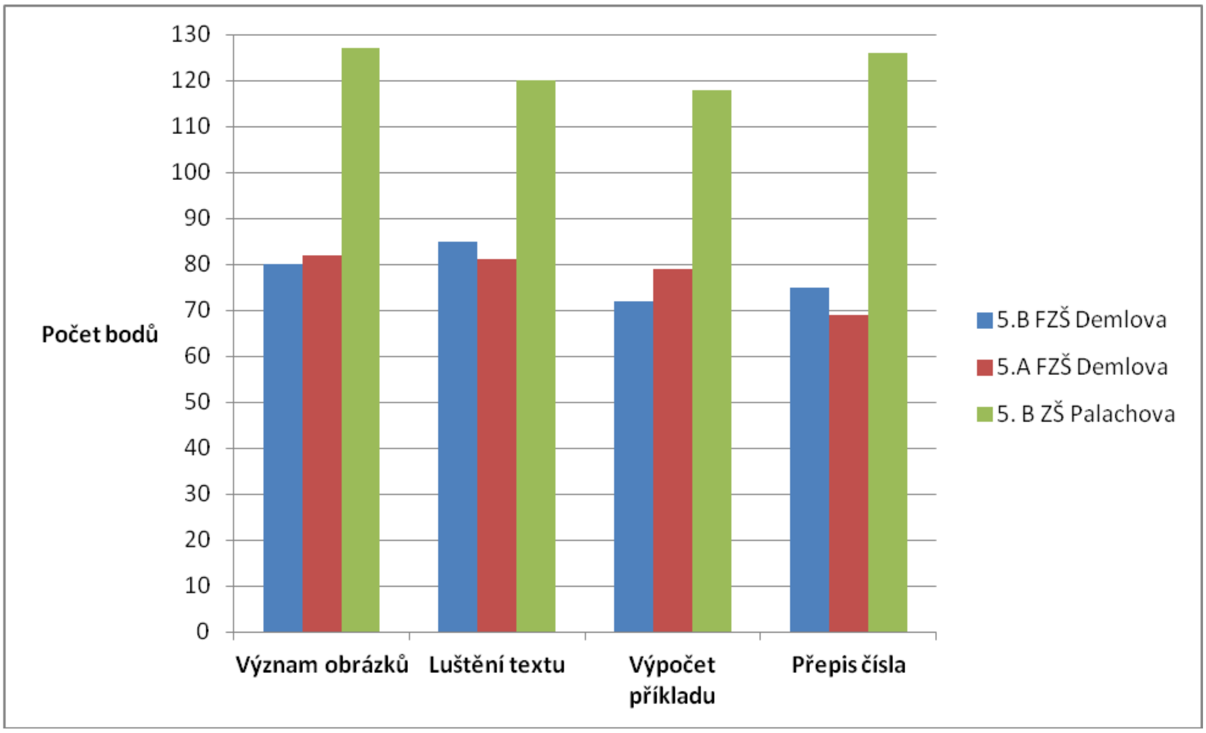
Z Grafu 3 jasně vyplývá, že žáky 5. ročníků bavily aktivity spojené se způsobem egyptského zápisu čísla. Z 26 žáků 5.B ZŠ Žďár n./Sáz. udělilo 22 nejvyšší počet bodů této činnosti, čím se shodli s žáky 5.B FZŠ Olomouc, Demlova, z nich většina, tj. 12 z 19, hodnotila aktivitu 4 body.

Dotazník č. 1 – 3. položka „Která z dnešních aktivit Tě zaujala nejvíce?“

Tabulka 3: Hodnocení 3. položky „Která z dnešních aktivit Tě zaujala nejvíce?“

3. otázka	Význam obrázků	Luštění textu	Výpočet příkladu	Přepis čísla
5.B FZŠ Demlova	80	85	72	75
5.A FZŠ Demlova	82	81	79	69
5. B ZŠ Palachova	127	120	118	126

Graf 4: Hodnocení 3. položky „Která z dnešních aktivit Tě zaujala nejvíce?“



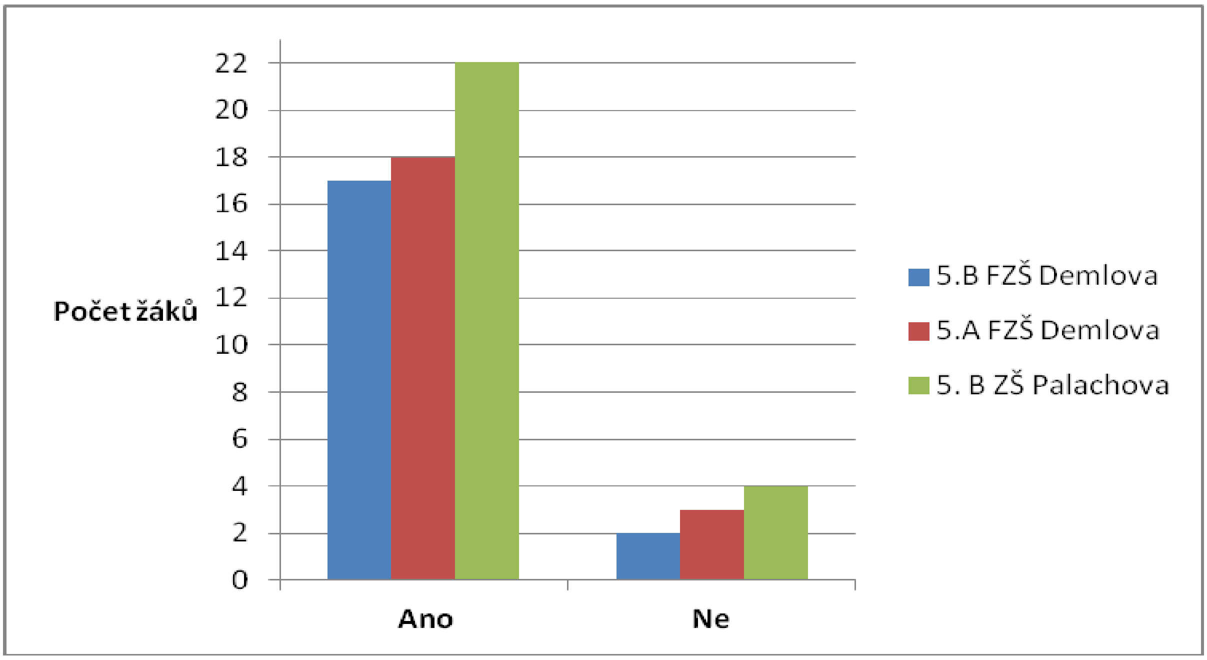
Graf 4 ukazuje, že žáci považovali na nejzajímavější první aktivitu, při níž měli uhodnout významy obrázkových symbolů pro zápis čísla. Z Grafu 4 je také patrné, že všechny aktivity byly žáky 5. ročníků hodnoceny vysokým počtem bodů, proto můžeme tvrdit, že všechny úkoly z pracovního listu byly pro žáky zajímavé.

Dotazník č. 1 – 4. položka „Zkus zapsat číslo 110 000 jako ve starověkém Egyptě."

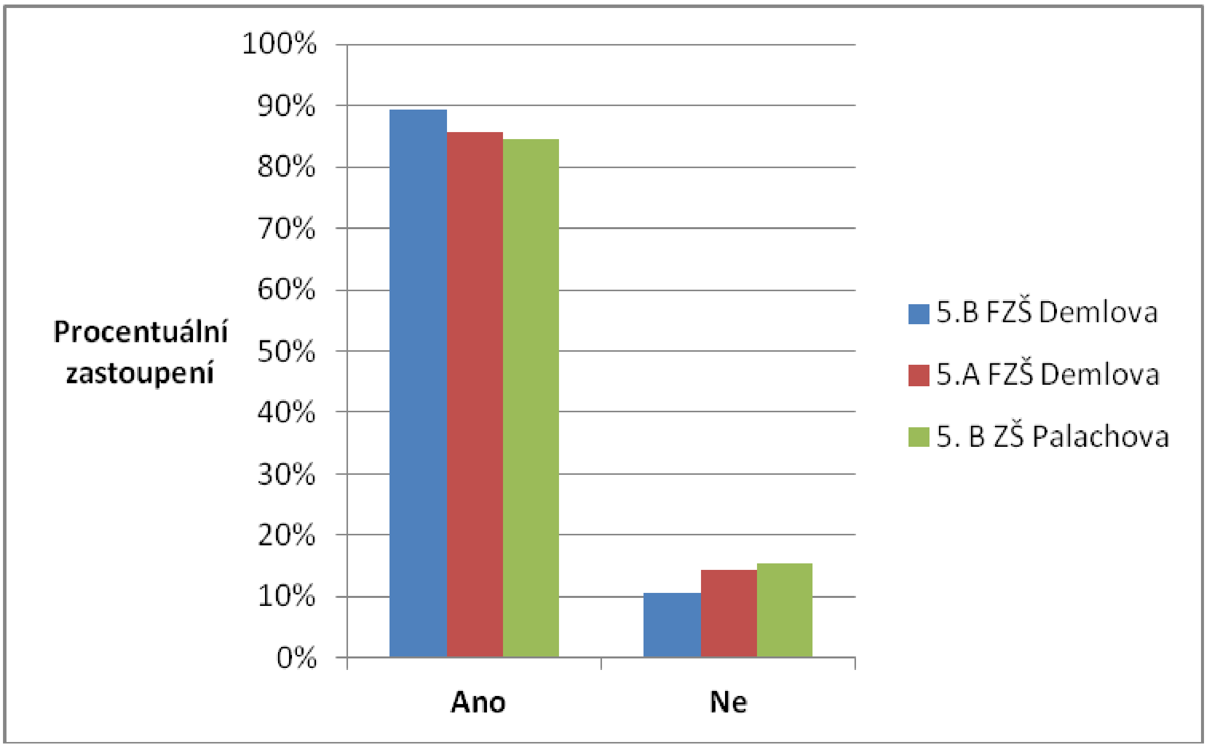
Tabulka 4: Hodnocení 4. položky „Zkus zapsat číslo 110 000 jako ve starověkém Egyptě."

4. otázka	**Ano**	**Ne**
5.B FZŠ Demlova	17	2
	89%	11%
5.A FZŠ Demlova	18	3
	86%	14%
5.B ZŠ Palachova	22	4
	85%	15%

Graf 5: Hodnocení 4. položky „Zkus zapsat číslo 110 000 jako ve starověkém Egyptě."



Graf 6: Hodnocení 4. položky „Zkus zapsat číslo 110 000 jako ve starověkém Egyptě." Procentuální zastoupení úspěšnosti řešení



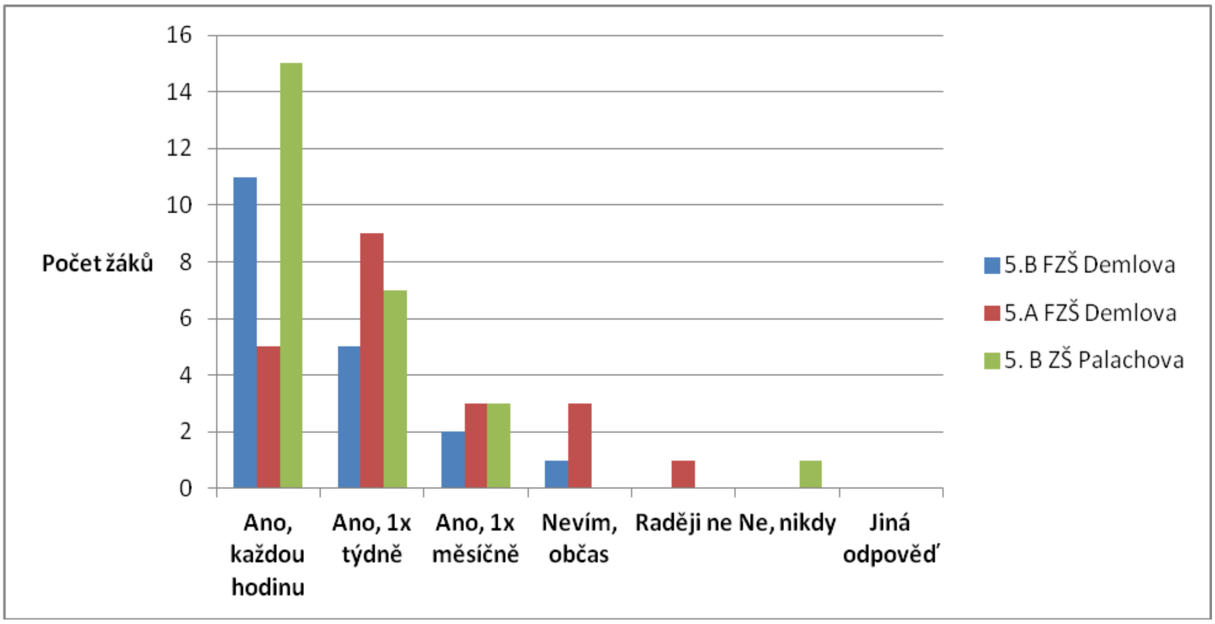
Z Grafu 5 vidíme, že z třídy 5.B FZŠ Olomouc, Demlova se podařilo zapsat egyptským způsobem zápisu číslo 110 000 17 žákům, 18 žákům z třídy 5.A FZŠ Olomouc, Demlova a 22 žákům třídy 5.B ZŠ Žďár n./Sáz., Palachova. Na první pohled vidíme procentuální zastoupení úspěšnosti řešení je pro všechny třídy podobně, tedy kolem 85 %, což znázorňuje Graf 6.

Dotazník č. 1 – 5. položka „Chtěl bys v hodinách matematiky řešit podobné úkoly? Jak často?“

Tabulka 5: Hodnocení 5. položky „Chtěl bys v hodinách matematiky řešit podobné úkoly? Jak často?“

5. otázka	Ano, každou hodinu	Ano, 1x týdně	Ano, 1x měsíčně	Nevím, občas	Raději ne	Ne, nikdy	Jiná odpověď
5.B FZŠ Demlova	11	5	2	1	0	0	0
5.A FZŠ Demlova	5	9	3	3	1	0	0
5. B ZŠ Palachova	15	7	3	0	0	1	0

Graf 7: Hodnocení 5. položky „Chtěl bys v hodinách matematiky řešit podobné úkoly? Jak často?“



Graf 7 ukazuje, že žáci 5. ročníků by rádi v hodinách matematiky počítali s egyptskými číslicemi. Vidíme, že 11 žáků 5.B FZŠ Olomouc, Demlova a 15 žáků třídy 5.B ZŠ Žďár n./Sáz. hlasovalo, že by se egyptskému zápisu čísel chteli věnovat každou hodinu matematiky a 9 žáků 5.A FZŠ Olomouc, Demlova by se jim rádo věnovalo 1x týdně.

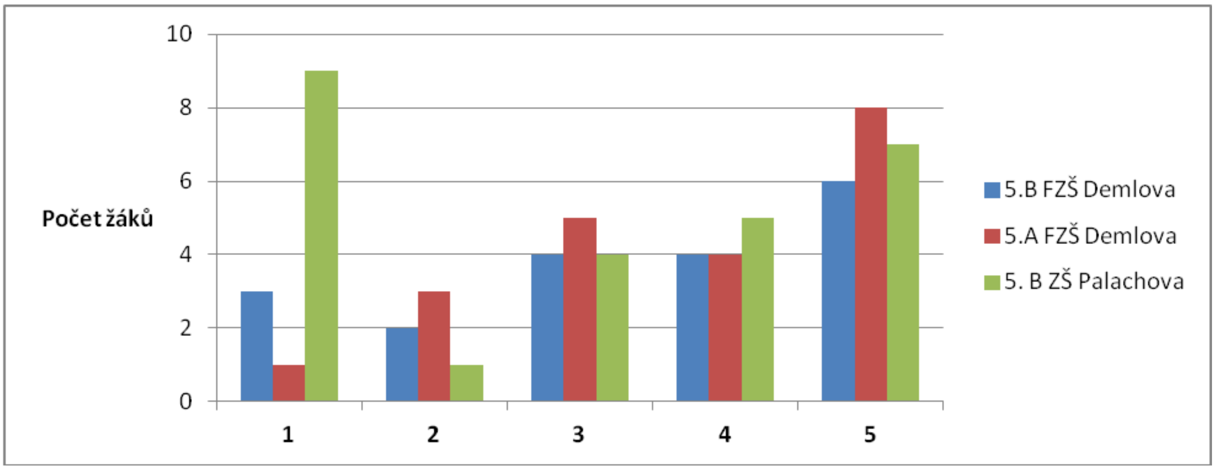
5.5.1 Hodnocení pracovního listu – Římský zápis čísel

Dotazník č. 2 – 2. položka „Bavilo Tě počítání s římskými číslicemi?“

Tabulka 6: Hodnocení 2. položky „Bavilo Tě počítání s římskými číslicemi?“

2. otázka	1	2	3	4	5
5.B FZŠ Demlova	3	2	4	4	6
5.A FZŠ Demlova	1	3	5	4	8
5. B ZŠ Palachova	9	1	4	5	7

Graf 8: Hodnocení 2. položky „Bavilo Tě počítání s římskými číslicemi?“



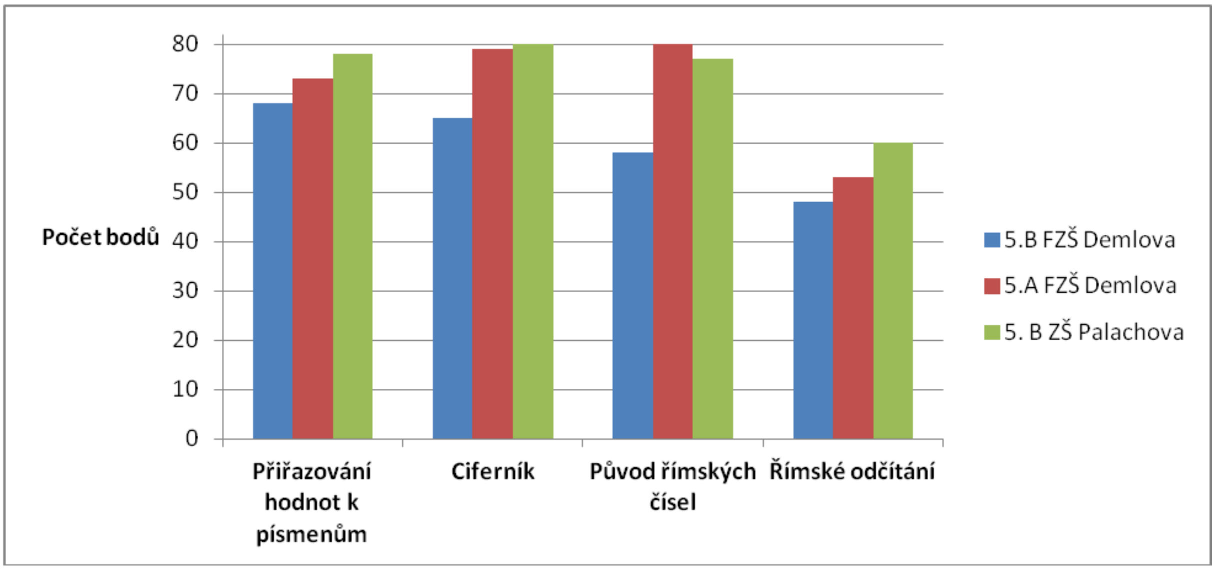
Grafu 8 ukazuje, že plných 5 bodů aktivitám s římskými číslicemi dalo 6 žáků 5.B FZŠ Olomouc, Demlova a 7 žáků 5.A FZŠ Olomouc, Demlova. Olomoucké žáky bavilo počítání s římskými číslicemi. 9 žďárských žáků dalo aktivitám po jednom bodu, a tudíž můžeme usuzovat, že nebyli příliš nakloněni římskému zápisu čísel.

Dotazník č. 2 – 3. položka „Která z dnešních aktivit Tě zaujala nejvíce?“

Tabulka 7: Hodnocení 3. položky „Která z dnešních aktivit Tě zaujala nejvíce“

3. otázka	Přiřazování hodnot k písmenům	Ciferník	Původ římských čísel	Římské odčítání
5.B FZŠ Demlova	68	65	58	48
5.A FZŠ Demlova	73	79	80	53
5. B ZŠ Palachova	78	80	77	60

Graf 9: Hodnocení 3. položky „Která z dnešních aktivit Tě zaujala nejvíce?“



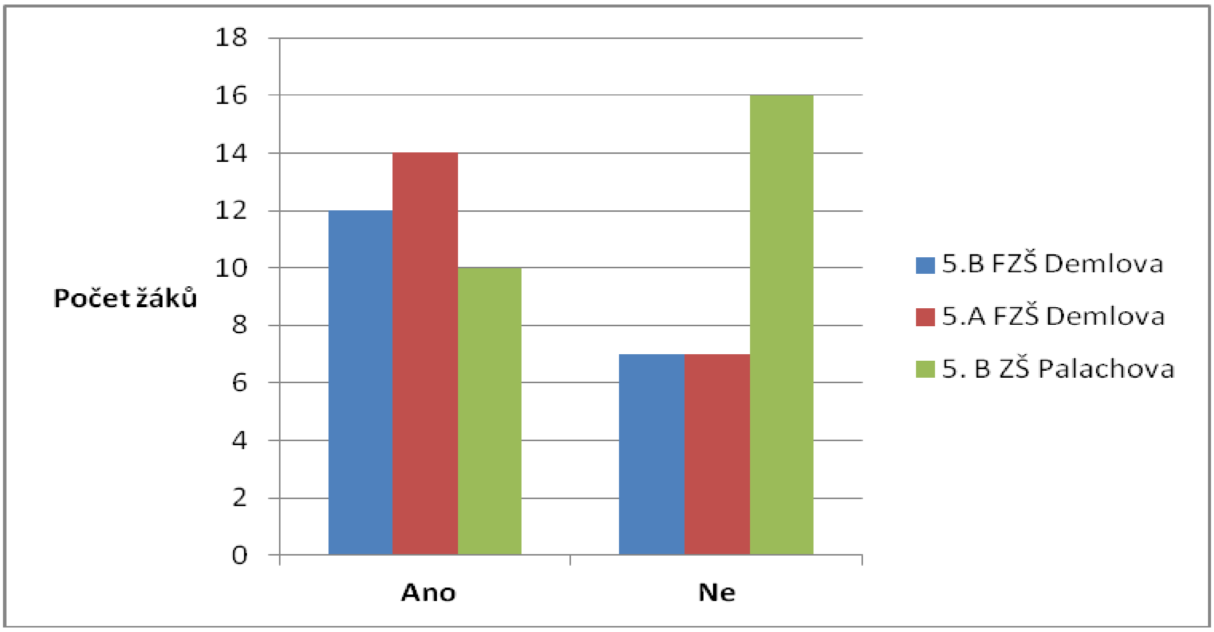
Z Grafu 9 lze vyčíst, že žáci 5.B ZŠ Žďár n./Sáz., Palachova považovali za nejzajímavější aktivitu doplňování římských číslic na hodinový ciferník, což ocenili 80 body stejně jako žáci 5.A FZŠ Olomouc, Demlova. Pro žáky 5.B FZŠ Olomouc, Demlova bylo nejzejímavější přiřazování hodnot k pímenům, resp. římským číslicím. Aktivitou, která propadla, bylo římské odčítání, což bylo zřejmě způsobeno přílišnou náročností úkolu.

Dotazník č. 2 – 4. položka „Zkus zapsat číslo 4862 stejně jako Římané.“

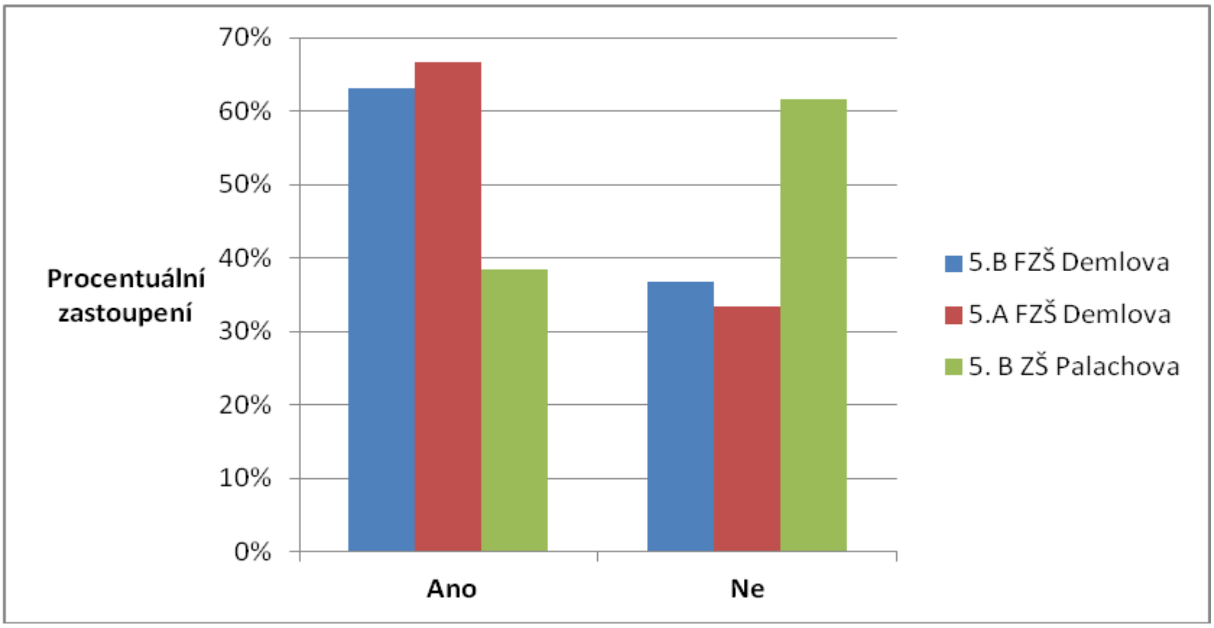
Tabulka 8: Hodnocení 4. položky „Zkus zapsat číslo 4862 stejně jako Římané.“

4. otázka	Ano	Ne
5.B FZŠ Demlova	12	7
	63%	37%
5.A FZŠ Demlova	14	7
	67%	33%
5. B ZŠ Palachova	10	16
	38%	62%

Graf 10: Hodnocení 4. položky „Zkus zapsat číslo 4862 stejně jako Římané.“



Graf 11: Hodnocení 4. položky „Zkus zapsat číslo 4862 stejně jako Římané.“ Procentuální zastoupení úspěšnosti řešení



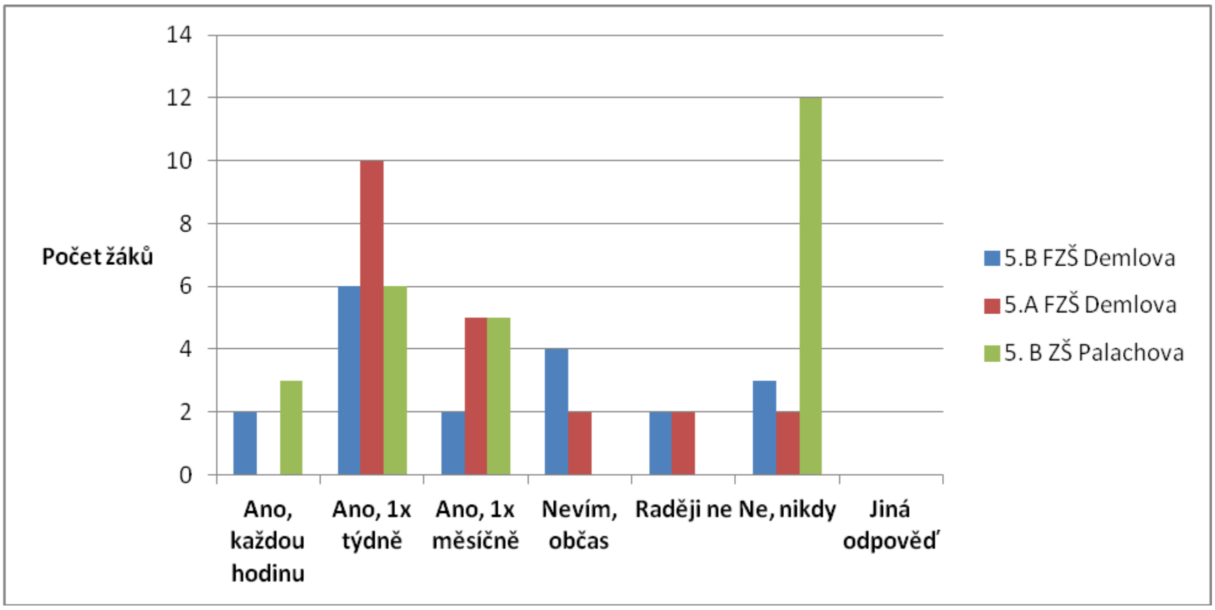
Z Grafů 10 a 11 vidíme, že římský zapis čísla 4862 se nepovedel 16 žákům třídy 5.B ZŠ Žďár n./Sáz., Palachova, což činí celých 62 %. Naopak při zapisu čísla 4862 uspělo 12 (63 %) žáků třídy 5.B FZŠ Olomouc, Demlova a 14 (67 %) žáků z 5. A FZŠ Olomouc, Demlova.

Dotazník č. 2 – 5. položka „Chtěl bys v hodinách matematiky řešit podobné úkoly? Jak často?“

Tabulka 9: Hodnocení 5. položky „Chtěl bys v hodinách matematiky řešit podobné úkoly? Jak často?“

5. otázka	Ano, každou hodinu	Ano, 1x týdně	Ano, 1x měsíčně	Nevím, občas	Raději ne	Ne, nikdy	Jiná odpověď
5.B FZŠ Demlova	2	6	2	4	2	3	0
5.A FZŠ Demlova	0	10	5	2	2	2	0
5. B ZŠ Palachova	3	6	5	0	0	12	0

Graf 12: Hodnocení 5. položky „Chtěl bys v hodinách matematiky řešit podobné úkoly? Jak často?“



Na základě Grafu 12 můžeme usuzovat, že žáci nebyli nadšeni pro římský zápis čísel tak jako pro egyptský. 10 žáků 5. A FZŠ Olomouc, Demlova s 6 žáky 5. B FZŠ Olomouc, Demlova hlasovalo pro zařazení římského zápisu čísel 1x týdně. Oproti tomu 12 žáků 5.B ZŠ Žďár n./Sáz., Palachova, by jej nezařazovalo vůbec.

5.6 Závěr výzkumného šetření

Výzkumné šetření mé práce proběhlo podle předem připraveného plánu. Podařilo se mi využít všechny tři vytvořené pracovní listy s historickou tématikou ve výuce matematiky. Vhodnost zařazení koncepce pracovních listů byla ověřena pomocí dotazníků, které žáci vyplňovali po vyřešení pracovních listů.

Díky výtečné spolupráci žáků třech pátých tříd, kteří se s chutí a nadšením zapojovali po netradičních aktivit spojených s historickými zápisy čísel, se mi podařilo naplnit cíle výzkumného šetření. Z vyhodnocených dotazníkových položek vyšly velmi zajímavé závěry, které potvrdily mé předpoklady. Žáci pátých ročníků mají zájem o zařazování aktivit spojených různými způsoby zápisů čísel do běžné výuky. Žáci by přivítali, kdyby byly aktivity a činnosti zapojovány do běžné výuky alespoň 1 x týdně či měsíčně. Obzvláště velký zájem jeví o egyptský zápis čísel, který měl největší úspěch ve všech 5. ročnících.

ZÁVĚR

Diplomová práce s názvem „Přirozené číslo ve výuce matematiky na 1. stupni základní školy“ pojednává o přirozeném čísle, jeho numeraci a možnostech implementace numeračních soustav do výuky matematiky na prvním stupni. Hlavním cílem práce bylo zjistit, zda je možné využít různé způsoby historických zápisů čísel jako motivačního prvku pro výuku matematiky na 1. stupni základní školy.

Teoretická část diplomové práce se věnuje různým přístupům k zavádění přirozeného čísla, numeraci a numeračním soustavám. Zabývá se také možnostmi uplatnění numeračních soustav ve výuce primární matematiky a jejich začleněním do Rámcového vzdělávacího systému pro základní vzdělávání. V praktické části práce byl vytvořen soubor pracovních listů s tematikou historických zápisů čísel, který prověřil využití různých druhů numerace jako netradičního motivačního prvku v edukačním procesu matematiky.

V diplomové práci se zdařilo naplnit stanovené cíle. V teoretické části byl vysvětlen pojem přirozené číslo a bylo objasněno, jakým způsobem ho lze zavádět v běžné výuce. Dále byly ozřejměny pojmy numerace a numerační soustava a sestaven přehled vybraných historických zápisů čísel. Výstupem praktické části práce je soubor pracovních listů zaměřených na egyptský, římský a mayský způsob zápisu čísel. Tyto pracovní listy byly použity ve výuce matematiky ve třech třídách 5. ročníků základních škol. Pomocí těchto pracovních listů se podařilo ověřit, že seznámení se s historickými zápisy čísel je přínosné ve smyslu motivace žáků ve výuce matematiky.

Z reakcí žáků na práci se zmíněnými pracovními listy s tematikou historických zápisů čísel vyplynulo, že jejich zařazení do výuky matematiky je žádoucí pro motivaci žáků a zvýšení jejich obliby tohoto předmětu. Výsledky výzkumného šetření ukazují, že žáci by ocenili průběžné začleňování těchto aktivit do běžné výuky. Zajímavým závěrem šetření je skutečnost, že z představených způsobů zápisů čísel zaujal žáky nejvíce egyptský zápis, na čemž se shodly všechny tři kolektivy nezávisle na sobě. Lze se tedy domnívat, že výsledky diplomové práce by mohly sloužit jako motivace pedagogů k častějšímu zařazování netradičních aktivit do výuky matematiky na 1. stupni základní školy.

SEZNAM POUŽITÝCH PRAMENŮ A LITERATURY

BALL, Johnny. *Mysli si číslo*. 1. české vyd. Praha: Slovart, 2006, 96 s. ISBN 80-720-9801-2.

BANZHAF, Hajo. *Symbolika čísel a numerologie*. Vyd. 1. Olomouc: Fontána, 2010, 251 s. ISBN 978-80-7336-565-3.

BĚLÍK, Miroslav. *Poziční číselné soustavy*. Vyd. 1. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem, 1999, 60 s. Skripta (Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem). ISBN 80-704-4260-3.

BĚLÍK, Miroslav a Josef SVOBODA. *Peanova aritmetika přirozeného čísla*. Vyd. 1. v Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Pedagogická fakulta, 1998, 57 s. Skripta (Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem). ISBN 80-7044-209-3.

BENTLEY, Peter. *Kniha o číslech: tajemství čísel a jejich vliv na náš svět*. 1. vyd. Překlad Marek Chvátal. Dobřejovice: Rebo Productions, 2013, 272 s. ISBN 978-80-255-0649-3.

BETZ, Otto. *Tajemný svět čísel: mytologie a symbolika*. Vyd 1. v Praze: Vyšehrad, 2002, 157 s. ISBN 80-702-1546-1.

BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1992, 78 s. ISBN 80-210-0468-1.

DRÁBEK, Jaroslav, Karol KŘIŽALKOVIČ, Jan LIŠKA a Václav VIKTORA. *Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. 1. vyd. Praha: SPN, 1985, 224 s.

EBEROVÁ, Jindřiška. *Základy matematiky 4*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2004 [i.e. 2005], 76 s. ISBN 80-244-0954-2.

HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990, 554 s. ISBN 80-080-1344-3.

HRABAL, Vladimír, František MAN a Isabella PAVELKOVÁ. *Psychologické otázky motivace ve škole*. 2. upravené vyd. Praha: SPN, 1989, 232 s. ISBN 80-042-3487-9.

HRÁBEK, Martin. Geneze.info: Historie a vývoj čísel. [online]. [cit. 2015-04-1]. Dostupné z: http://www.geneze.info/pojmy/subdir/historie_cisel.htm

CHRÁSKA, Miroslav. *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu*. Vydání 1. Praha: Grada Publishing, 2007, 265 s. ISBN 978-80-247-1369-4.

JELÍNEK, Miloš. *Numerační soustavy*. 1. vyd. Praha: SPN, 1974, 127 s.

JUŠKEVIČ, Adolf Pavlovič. *Dějiny matematiky ve středověku*. 1. vyd. Praha: Academia, 1978, 446 s.

KLÁN, Petr. *Čísla: vztahy, vhledy a věčné inspirace*. Vydání 1. Praha: Academia, 2014, 246 s. ISBN 80-200-2137-3.

KONFOROVIČ, Andrej Grigorjevič. *Významné matematické úlohy*. 1. vyd. Praha: SPN, 1989, 208 s.

KOPKA, Jan. *Přirozená čísla*. Vyd. 1. V Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně, Přírodovědecká fakulta, 2006, 96 s. ISBN 80-704-4815-6.

KOVAL, Václav. *Kamarádi čísla*. 1. vyd. Praha: SPN, 1969, 188 s.

LUNDYOVÁ, Miranda. *Posvátná čísla*. 1. vyd. v českém jazyce. Překlad Stanislav Pavlíček. Praha: Dokořán, 2011, 66 s. Pergamen, sv. 6. ISBN 978-807-3633-905.

MAČÁT, Miloslav. *Číselné soustavy*. 1. vyd. Praha: SPN, 1971, 144 s.

NOVÁK, Bohumil. *Matematika III.: několik kapitol z didaktiky matematiky*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, Pedagogická fakulta, 1999, 79 s. ISBN 80-706-7979-4.

NOVÁK, Bohumil. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky: (pro studium učitelství pro 1. stupeň ZŠ)*. 2. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2005, 66 s. ISBN 80-244-1068-0.

NOVÁK, Bohumil. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky 1: pro učitelství 1. stupně ZŠ*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2003, 67 s. Skripta (Univerzita Palackého). ISBN 80-244-0691-8.

PLCH, Jaromír. *Mezipředmětové vztahy a specifika výchovně vzdělávacího procesu.* 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova, 1987, 67 s.

SKALKOVÁ, Jarmila. *Obecná didaktika: vyučovací proces, učivo a jeho výběr, metody, organizační formy vyučování*. 2., rozš. a aktualiz. vyd., [V nakl. Grada] vyd. 1. Praha: Grada, 2007, 322 s. ISBN 978-80-247-1821-7.

SEZNAM TABULEK

SEZNAM GRAFŮ

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha 1

ZÁPIS ČÍSEL VE STAROVĚKÉM EGYPTĚ

5000 4000 3000 2000 1000 0 1000 2000

Staří Egypťané žili v severovýchodní Africe na území kolem řeky ______ (2. nejdelší řeka na světě). Každoroční povodně přinášely mnoho úrodné půdy, proto bylo v Egyptě velmi rozvinuté zemědělství. Po každých povodních museli Egypťané znovu zaměřovat svá pole. K tomu potřebovali matematiku. Kolem roku 3100 př. n. l. se začaly vyvíjet egyptské číslice. Egypťané používali základ 10 a čísla zapisovali pomocí obrázkového písma neboli „hieroglyfů“ na papyrus nebo je tesali do kamene.

Pokus se uhodnout, co mohly tyto obrázky představovat:

1 ______

10 ______

100 ______

1 000 ______

10 000 ______

100 000 ______

1 000 000 ______

Vládcům Egypta se říkalo faraoni. Ti si nechávali stavět hrobky v pyramidách, kam byla ukládána jejich těla (jako mumie).

Zkus rozluštit údaje o pyramidě:

Nejstarší pyramidou na světě je Chufuova (Cheopsova) pyramida.

Její stavba započala roku ... př. n. l.

a byla dokončena v roce ... př. n. l.

Zapiš, jak dlouho trvala stavba:

Kolik bylo na stavbu použito kamenů? ______

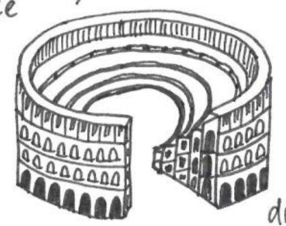
Příloha 2

ŘÍMSKÝ ZÁPIS ČÍSEL

1000 500 0 500 1000 1500 2000

Starověcí Římané byli dobří bojovníci, dobyli velká území, která zabírala velkou část Evropy a střední Asie. Římané vynikali jako stavitelé měst, proto museli být i dobrými matematiky. Kolem roku 500 př. n. l. se začaly vyvíjet římské číslice. Římané používali základ 10. Číslice zapisovali pomocí písmen na papír či kámen.

Doplň chybějící římské číslice na ciferníku:



Před MCMXXXV lety bylo v Římě dostavěno obrovské divadlo Koloseum, kde se konaly hry i zápasy gladiátorů. Přečti číslici a zkus vypočítat, kdy bylo Koloseum dostavěno.

Zkus přiřadit správný znak (písmeno) k číslici:

1 50 D X 5 I 100 1000 V C 500 10 M L

Zkus přiřadit číslice 1, 5, 10 k obrázkům a odhalit, proč k nim byla přiřazena písmena I, V, X:

1
5
10

Příloha 3

LESÍČ SIPÁZ ÝKSYAM

3000 2000 1000 0 1000 2000

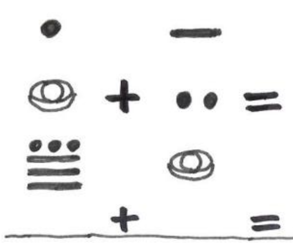
Mayové jsou původní obyvatelé jižního Mexika a Střední Ameriky. Díky přírodním podmínkám byli skvělí zemědělci, pěstovali kukuřici i kakaovníky. Kakaové boby indiáni využívali i jako platidlo. Mayové byli výborní matematici. Pomocí mušlí dokázali vyjádřit nulu. Kolem roku 250 př. n. l. se začaly vyvíjet mayské číslice. Mayové používali základ 5 a 20 a čísla zapisovali pomocí tří symbolů (obrázků). Většinou tesali číselné zápisy do kamene.

Vyzkoušej si mayské sčítání:

400

20

1



Zkus uhodnout, co mohly tyto obrázky představovat:

0 nebo __________

1 nebo __________

5 nebo __________

např. 20 se zapsalo: 20 1

Mayští astronomové vypočítali jako první počet dnů v roce. Pokus se tuto číslici zapsat jako oni:

Dalším způsobem zápisu čísel bylo kipu (quipu) tzv. uzlové písmo. Na hlavním tlustém provaze byly uvázány barevné provázky jako třásně s uzly.

Rozlušti a zapiš příklad, který jsi vyčetl z provázků:

____

Příloha 4

DOTAZNÍK Č. 1
ZÁPIS ČÍSEL VE STAROVĚKÉM EGYPTĚ

1. Zaškrtni, kdo vyplňuje dotazník:

   dívka chlapec

2. Bavilo Tě egyptské počítání? Oboduj.
   (Čím více bodů, tím více se Ti počítání líbilo.)

   1 2 3 4 5

3. Která z dnešních aktivit Tě zaujala nejvíce? Zatrhni a oboduj.

   - určování významu obrázků egyptských číslic 1 2 3 4 5
   - luštění textu o pyramidě s egyptskými číslicemi 1 2 3 4 5
   - výpočet příkladu a egyptský zápis čísel 1 2 3 4 5
   - přečtení egyptského čísla (počet kamenů) 1 2 3 4 5

4. Zkus zapsat číslo 110 000 jako ve starověkém Egyptě.

5. Chtěl bys v hodinách matematiky řešit podobné úkoly? Jak často? Zatrhni.
   - ano, nejlépe každou hodinu matematiky
   - ano, 1x týdně
   - ano, 1x měsíčně
   - nevím, občas (např. 4x ročně)
   - raději ne
   - ne, nikdy
   - jiná odpověď: ____

6. Myslíš, že Ti něco z dnešní hodiny bude k něčemu hodit? Napiš.
   Příloha 5

Příloha 5

DOTAZNÍK Č. 2
ŘÍMSKÝ ZÁPIS ČÍSEL

1. Zaškrtni, kdo vyplňuje dotazník:

   dívka   chlapec

2. Bavilo Tě počítání s římskými číslicemi? Oboduj.
   (Čím více bodů, tím více se Ti počítání líbilo.)

   1 2 3 4 5

3. Která z dnešních aktivit Tě zaujala nejvíce? Zatrhni a oboduj.

   - přiřazování správné hodnoty k římským číslicím 1 2 3 4 5
   - doplňování římských číslic na ciferníku 1 2 3 4 5
   - odhalení vzniku římských číslic I, V, X 1 2 3 4 5
   - římské odčítání 1 2 3 4 5

4. Zkus zapsat číslo 4862 stejně jako Římané.

5. Chtěl bys v hodinách matematiky řešit podobné úkoly? Jak často? Zatrhni.
   - ano, nejlépe každou hodinu matematiky
   - ano, 1x týdně
   - ano, 1x měsíčně
   - nevím, občas (např. 4x ročně)
   - raději ne
   - ne, nikdy
   - jiná odpověď: ____

6. Myslíš, že Ti něco z dnešní hodiny bude k něčemu hodit? Napiš.

Příloha 6

DOTAZNÍK Č. 3
MAYSKÝ ZÁPIS ČÍSEL

1. Zaškrtni, kdo vyplňuje dotazník:

   dívka chlapec

2. Bavilo Tě mayské počítání? Oboduj.
   (Čím více bodů, tím více se Ti počítání líbilo.)

   1 2 3 4 5

3. Která z dnešních aktivit Tě zaujala nejvíce? Zatrhni a oboduj.

   - určování významu obrázků mayských číslic 1 2 3 4 5
   - mayské sčítání 1 2 3 4 5
   - mayský zápis čísla (počet dnů v roce) 1 2 3 4 5
   - rozluštění a zápis příkladu z uzlového písma 1 2 3 4 5

4. Zkus zapsat číslo 555 stejně jako Mayové.

5. Chtěl bys v hodinách matematiky řešit podobné úkoly? Jak často? Zatrhni.
   - ano, nejlépe každou hodinu matematiky
   - ano, 1x týdně
   - ano, 1x měsíčně
   - nevím, občas (např. 4x ročně)
   - raději ne
   - ne, nikdy
   - jiná odpověď: ____

6. Myslíš, že Ti něco z dnešní hodiny bude k něčemu hodit? Napiš.

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Lucie Růžičková
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	RNDr. Martina Uhlířová, Ph.D
Rok obhajoby:	2015

Název práce:	Přirozené číslo v matematice na 1. stupni základní školy
Název v angličtině:	Natural Number Concept in Primary Mathematics
Anotace práce:	Diplomová práce s názvem „Přirozené číslo ve výuce matematiky na 1. stupni základní školy“ pojednává o přirozeném čísle a jeho numeraci. Teoretická část se věnuje přístupům k zavádění přirozeného čísla, numeraci a rozpracovává vybrané numerační soustavy. Dále se zabývá možnostmi využití numeračních soustav ve výuce primární matematiky a jejich zařazením v rámci systému RVP ZV (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání). Praktická část popisuje vytvoření pracovních listů s tematikou historických zápisů čísel a zkoumá vhodnost jejich koncepce jako motivačního prvku ve výuce matematiky na 1. stupni základních škol.
Klíčová slova:	Přirozené číslo, numerace, poziční a nepoziční numerační soustavy, historické zápisy čísel, mezipředmětové vztahy, motivace, nestandardní úloha
Anotace v angličtině:	Diploma thesis titled Natural Number Concept at Primary Mathematics discourses of natural number and its numeration system. Theoretical part depicts different approaches in natural number implementing, numeration and develops selected numeral systems. This part of the thesis also devotes potentiality of numeral systems at primary mathematics tutorial and its insertion in the field of Framework Educational

	Programme for Elementary Education. Applied part of the thesis describes the formation of working sheets with historical number notations topics. This part also explores the pertinence of working sheets conception as a motivation element in teaching mathematics at primary grammar schools.
Klíčová slova v angličtině:	Natural Number, Numeration System, Positional and Non-positional Numeral System, Historical numbers Notation, Interdisciplinary Relations Motivation, Non-standard Task
Přílohy vázané v práci:	Příloha 1- Pracovní list- Egyptský zápis čísel Příloha 2- Pracovní list- Římský zápis čísel Příloha 3- Pracovní list- Mayský zápis čísel Příloha 4- Dotazník č. 1 Příloha 5- Dotazník č. 2 Příloha 6- Dotazník č. 3
Rozsah práce:	65 stran
Jazyk práce:	český