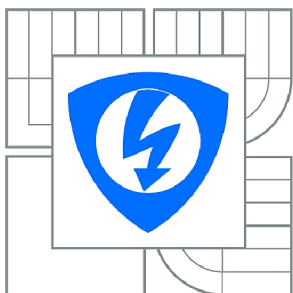




VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH  
TECHNOLOGIÍ

ÚSTAV TELEKOMUNIKACÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF TELECOMMUNICATIONS

## ROZKLAD SIGNÁLU POMOCÍ TRANSFORMACE TYPU EMD

SIGNAL DECOMPOSITION USING EMD TRANSFORM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

ZDENĚK MŽOUREK

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. ZDENĚK SMÉKAL, CSc.

BRNO 2012



VYSOKÉ UČENÍ  
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky  
a komunikačních technologií

Ústav telekomunikací

# Bakalářská práce

bakalářský studijní obor  
Teleinformatika

**Student:** Zdeněk Mžourek

**ID:** 125559

**Ročník:** 3

**Akademický rok:** 2011/2012

## NÁZEV TÉMATU:

**Rozklad signálu pomocí transformace typu EMD**

## POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Pro efektivní zpracování nestacionárního signálu používáme různé typy ortogonálních a ortonormálních transformací. Nejvíce používané metody jsou fourierovská analýza, vlnková analýza, nebo analýza základních komponent (PCA). Další možností je rozklad signálu s využitím Hilbertovy transformace a IMF bázevých funkcí. Tento rozklad signálu je nazýván transformací typu EMD. Cílem bakalářské práce je porovnání vlastností jednotlivých typů známých transformací s transformací typu EMD a použití této transformace pro analýzu nestacionárních signálů v různých aplikacích.

## DOPORUČENÁ LITERATURA:

- [1] RILLING, G., FLANDRIN, P., GONCALVES, P.: Empirical Mode Decomposition as a Filter Bank. IEEE Sig. Proc. Lett. 2003 □
- [2] HUANG, N.E. et al: The Empirical Mode Decomposition and Hilbert Spectrum for Nonlinear and Nonstationary Time Series. Proc. Roy. Soc. London A, Vol. 454, pp.903-995, 1998. □
- [3] SMÉKAL, Z.: Signály a soustavy (BASS). Elektronické texty VUT v Brně.

**Termín zadání:** 6.2.2012

**Termín odevzdání:** 31.5.2012

**Vedoucí práce:** prof. Ing. Zdeněk Smékal, CSc.

**Konzultanti bakalářské práce:**

**prof. Ing. Kamil Vrba, CSc.**

*Předseda oborové rady*

## UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

## ABSTRAKT

Cílem této práce je představit empirickou modální dekompozici jako metodu pro rozklad libovolně složitých nelineárních a nestacionárních signálů na takzvané vlastní modální funkce. Použitím Hilbertovy transformace získáme okamžitý kmitočet, který nám pomůže k sestavení Hilbertova spektra a následné analýze v časově-kmitočtové oblasti. Dále poukazujeme na některé nedostatky této metody a uvádíme několik způsobů, jak různými úpravami algoritmu empirické modální dekompozice můžeme získat lepší výsledky rozkladu signálu. Na závěr je názorně ukázán rozklad signálu pomocí empirické modální dekompozice.

## KLÍČOVÁ SLOVA

empirická modální dekompozice, okamžitý kmitočet, Hilbertovo spektrum, vlastní modální funkce, kubický splajn, časově-kmitočtová analýza

## ABSTRACT

Aim of this thesis is to introduce empiric mode decomposition as a method for decomposing arbitrarily nonlinear and non-stationary signal into intrinsic mode functions. Using empiric modal decomposition together with Hilbert transform produces instantaneous frequency. We can use this instantaneous frequency to create a Hilbert spectrum and use it for analysis in time-frequency domain. In next part we show several drawbacks of this method. We also present several ways how to improve empirical mode decomposition algorithm to obtain better results. An example of decomposition by empiric mode decomposition is made to illustrate how the whole procedure works.

## KEYWORDS

empiric mode decomposition, Hilbert spectrum, instantaneous frequency, intrinsic mode functions, cubic splajn, time-frequency analysis

MŽOUREK, Zdeněk *Rozklad signálu pomocí transformace typu EMD*: bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav telekomunikací, 2012. 44 s. Vedoucí práce byl prof. Ing. Zdeněk Smékal, CSc.

## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma „Rozklad signálu pomocí transformace typu EMD“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno .....

.....

(podpis autora)

Na tomto místě bych rád poděkoval prof. Ing. Zdeňku Smékalovi, CSc. za vedení bakalářské práce a také za užitečné rady a cenné připomínky při zpracování této bakalářské práce. Dále bych rád velmi poděkoval svým rodičům za podporu při studiu.

# OBSAH

Úvod	8
<b>1 Hilbert-Huangova transformace</b>	<b>9</b>
1.1 Definice okamžitého kmitočtu . . . . .	9
1.1.1 Výpočet okamžitého kmitočtu . . . . .	10
1.1.2 Fyzikální význam . . . . .	11
1.2 Vlastní modální funkce . . . . .	12
1.3 Empirická modální dekompozice . . . . .	13
1.3.1 Postup rozkladu . . . . .	13
1.3.2 Kritéria pro zastavení iterace . . . . .	16
1.3.3 Interpolace obálek $e_{min}$ a $e_{max}$ . . . . .	17
1.3.4 Vzorkovací kmitočet . . . . .	19
1.3.5 EMD jako banka filtrů . . . . .	20
1.3.6 Výpočetní náročnost . . . . .	21
1.4 Příklad rozložení signálu pomocí EMD . . . . .	22
1.5 Hilbertovo spektrum . . . . .	26
1.5.1 Hilbertovo amplitudové spektrum . . . . .	26
1.5.2 Hilbertovo energetické spektrum . . . . .	27
1.5.3 Hustota okamžité energie . . . . .	27
<b>2 Aplikace EMD</b>	<b>28</b>
2.1 Možnosti využití . . . . .	28
2.2 Odstranění šumu . . . . .	28
2.2.1 Úvod . . . . .	28
2.2.2 Prahování . . . . .	29
2.2.3 Odstranění šumu pomocí EMD . . . . .	30
2.2.4 Srovnání s vlnkovou transformací . . . . .	36
<b>3 Závěr</b>	<b>39</b>
Seznam symbolů, veličin a zkratk	43

# SEZNAM OBRÁZKŮ

1.1	Průběhy fáze a kmitočtu pro různé hodnoty $\alpha$ . . . . .	12
1.2	Typická vlastní modální funkce se symetrií horní a spodní obálky $e_{max}, e_{min}$ vůči časové ose. . . . .	13
1.3	Ukázka postupu při rozkladu signálu $s(t)$ . . . . .	14
1.4	Rozložení signálu na jednotlivé IMF komponenty pomocí uvedeného postupu pro realizaci empirické modální dekompozice. . . . .	15
1.5	Ukázka použití upraveného postupu při dekompozici. . . . .	19
1.6	Ukázka obálek signálu s nízkým vzorkovacím kmitočtem . . . . .	20
1.7	Harmonické funkce $s_1(t)$ a $s_2(t)$ . . . . .	22
1.8	Analyzovaný signál $s(t)$ . . . . .	22
1.9	Vlastní modální funkce $c_1(t)$ a $c_2(t)$ získané ze signálu $s(t)$ . . . . .	23
1.10	Srovnání vlastních modálních funkcí $c_1(t)$ a $c_2(t)$ s harmonickými funkcemi $s_1(t)$ a $s_2(t)$ . . . . .	24
1.11	Rozbalená fáze jednotlivých IMF $c_1(t)$ a $c_2(t)$ . . . . .	24
1.12	Okamžitá amplituda jednotlivých IMF $c_1(t)$ a $c_2(t)$ . . . . .	25
1.13	Okamžitý kmitočet vypočítaný z rozbalených fází jednotlivých IMF $c_1(t)$ a $c_2(t)$ . . . . .	25
1.14	Srovnání spektrogramu s Hilbertovým amplitudovým spektrem . . . . .	26
2.1	Vstupní signály . . . . .	32
2.2	Zašuměné vstupní signály s odstupem signál-šum 10 dB . . . . .	33
2.3	Vyfiltrované signály pomocí klasické EMD . . . . .	34
2.4	Vyfiltrované signály pomocí modifikované EMD . . . . .	35
2.5	Vyfiltrované signály pomocí měkkého prahování . . . . .	38

# ÚVOD

Cílem této práce je popsat empirickou modální dekompozici jako další metodu pro analýzu nelineárních a nestacionárních signálů.

V první kapitole jsou uvedeny základní pojmy, úvod do teorie, postup pro realizaci empirické modální dekompozice a možnosti jejího vylepšení. Dále se vysvětlí, co je to Hilbertovo spektrum, a ukáže se příklad na rozklad signálu pomocí EMD včetně výpočtu okamžitých kmitočtů a Hilbertova amplitudového spektra.

Druhá kapitola se věnuje ukázce praktické aplikace EMD při odstraňování šumu a na sadě testovacích signálů je porovnána účinnost různě upravených algoritmů EMD a metody prahování pomocí diskrétní vlnkové transformace.

Práce byla vysázena systémem  $\text{\LaTeX}$ . Grafy byly vytvořeny pomocí programu *R project* [25] a balíku *pgfplots* pro systém  $\text{\TeX}$ .



# 1 HILBERT-HUANGOVA TRANSFORMACE

Hilbert-Huangova transformace (HHT) je nová metoda pro analýzu nelineárních a nestacionárních signálů, která se skládá ze dvou částí. První je empirická modální dekompozice (EMD), na kterou se tato práce hlavně zaměřuje, a druhá je tzv. Hilbertovo spektrum (distribuce energie v časově-kmitočtové oblasti), které vznikne pomocí Hilbertovy transformace. EMD rozkládá analyzovaný signál na vlastní modální funkce (IMF), které jsou založeny na lokálních vlastnostech signálu. To umožňuje fyzikálně smysluplně definovat okamžitý kmitočet, a tedy odstraňuje nutnost použití často „nežádoucích“ harmonických funkcí k reprezentaci nelineárních a nestacionárních signálů, jak se často stává například u krátkodobé Fourierově transformace.

Na začátku této části jsou objasněny základní pojmy, které je nutné znát pro správné pochopení EMD, a toho co reprezentují jednotlivé extrahované složky (IMF). Postup dekompozice a způsob získání Hilbertova spektra je názorně ukázán na jednoduchých příkladech. Na závěr je srovnáno Hilbertovo amplitudové spektrum se spektrogramem získaným pomocí krátkodobé Fourierovy transformace.

## 1.1 Definice okamžitého kmitočtu

V klasické Fourierově analýze je kmitočet definován jako funkce sinu nebo kosinu s konstantní amplitudou trvající po celou délku naměřeného souboru dat. Pro určení kmitočtu je potřebná alespoň jedna celá perioda, takže s kratším úsekem dat není možné kmitočet určit. Tímto způsobem definovaný kmitočet nemá pro nestacionární data velký význam, a proto se zavádí tzv. okamžitý kmitočet.

K tomu, aby se mohl okamžitý kmitočet definovat je nejdříve potřebné zavést tzv. analytický signál. S jeho pomocí je možné určit okamžitý kmitočet v libovolném bodě.

Analytický signál  $z(t)$  je komplexní veličina a definujeme ji následujícím způsobem:

$$z(t) = s(t) + j\tilde{s}(t) = r(t)e^{j\varphi(t)}, \quad (1.1)$$

kde  $s(t)$  je analyzovaný signál,  $\tilde{s}(t)$  je Hilbertův obraz signálu  $s(t)$ ,  $r(t)$  je okamžitá amplituda (modul komplexní funkce  $z(t)$ ) a  $\varphi(t)$  je okamžitá fáze

$$r(t) = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}, \quad \varphi(t) = \arctg \frac{s(t)}{\tilde{s}(t)}. \quad (1.2)$$

Imaginární část analytického signálu se získá pomocí Hilbertovy transformace původního signálu  $s(t)$  [11].

Se zavedeným analytickým signálem  $z(t)$  můžeme okamžitý kmitočet  $\omega(t)$  jednoznačně definovat jako

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad (1.3)$$

kde  $\varphi(t)$  je okamžitá fáze analytického signálu  $z(t)$ .

### 1.1.1 Výpočet okamžitého kmitočtu

Výpočet okamžitého kmitočtu  $\omega(t)$  přímo z (1.3) se ukazuje jako nepraktické. Hodnoty fáze  $\varphi(t)$  jsou v intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ , a tím pádem jsou v jejím průběhu nespojitosti. Kvůli těmto nespojitostem je nutné fázi nejdříve takzvaně „rozbalit“, což zbytečně zvyšuje výpočetní náročnost. Častěji se proto používá způsob výpočtu odzvozený přímo z (1.3)

$$\omega(t) = \frac{s(t)\tilde{s}'(t) - s'(t)\tilde{s}(t)}{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)}, \quad (1.4)$$

kde čárka (') značí diferenci podle času. Hodnota takto vypočteného okamžitého kmitočtu může převyšovat Nyquistův kmitočet [2]. Pokud místo dvou diferencí v (1.4) použijeme aproximaci okamžitého kmitočtu, tak dosáhneme dalšího zrychlení výpočtu. Zběžně je zde uvedeno několik různých způsobů, jak okamžitý kmitočet aproximovat, a krátce popsány jejich vlastnosti. Uvedené vzorce jsou ve tvaru vhodném pro počítačové zpracování.

#### FIR derivátor 2. řádu

- Okamžitý kmitočet není vyšší než Nyquistův kmitočet,
- způsobuje zpoždění půl vzorku.

$$f_a(t) = \frac{1}{2\pi T_{vz}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{s(t)\tilde{s}(t + T_{vz}) - s(t + T_{vz})\tilde{s}(t)}{s(t)s(t + T_{vz}) + \tilde{s}(t)\tilde{s}(t + T_{vz})} \right] \quad (1.5)$$

#### FIR derivátor 3. řádu

- Okamžitý kmitočet není vyšší než Nyquistův kmitočet,
- nezpůsobuje zpoždění.

$$f_b(t) = \frac{1}{4\pi T_{vz}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{s(t - T_{vz})\tilde{s}(t + T_{vz}) - s(t + T_{vz})\tilde{s}(t - T_{vz})}{s(t - T_{vz})s(t + T_{vz}) + \tilde{s}(t - T_{vz})\tilde{s}(t + T_{vz})} \right] \quad (1.6)$$

#### Claerboutova aproximace

- Okamžitý kmitočet může být vyšší než Nyquistův kmitočet,
- způsobuje zpoždění půl vzorku.

$$f_c(t) = \frac{2}{\pi T_{vz}} \left[ \frac{s(t)\tilde{s}(t + T_{vz}) - s(t + T_{vz})\tilde{s}(t)}{(s(t) + s(t + T_{vz}))^2 + (\tilde{s}(t) + \tilde{s}(t + T_{vz}))^2} \right] \quad (1.7)$$

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\omega(t)$  a  $T_{vz}$  je vzorkovací perioda. Více informací o těchto aproximacích lze nalézt v [2].

### 1.1.2 Fyzikální význam

Definice okamžitého kmitočtu  $\omega(t)$  podle (1.3) představuje funkci jedné proměnné závislé na čase  $t$ , a proto v libovolném čase existuje právě jedna hodnota kmitočtu. Kdybychom chtěli získat okamžitý kmitočet z obecného signálu  $s(t)$  (tzn. nejsou na něm aplikované žádné restriktivní podmínky), tak se může stát, že okamžitý kmitočet  $\omega(t)$  bude dosahovat i záporných hodnot.

Proto, aby výsledný okamžitý kmitočet dával fyzikální smysl, musí se na vstupní signál  $s(t)$  použít určitá omezení [11], a to taková aby analyzovaný signál obsahoval právě jednu kmitočtovou komponentu. Jako globální kritérium se používá podmínka, aby reálná část Fourierova spektra obsahovala pouze kladné kmitočty, ale potřebné kritérium je takové, které by bylo možné aplikovat lokálně kvůli nestacionaritě signálu  $s(t)$ .

Tento problém je pro názornost ukázán na příkladu funkce:

$$s(t) = \sin t, \quad (1.8)$$

jejíž Hilbertova transformace je funkce  $\cos t$ , takže analytická funkce vychází:

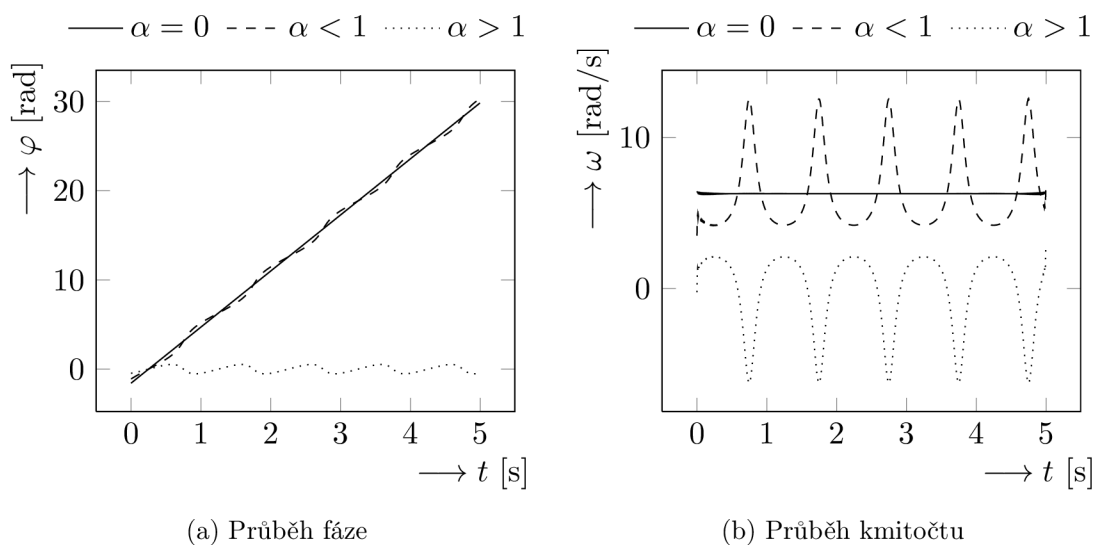
$$z(t) = \sin t + j \cos t, \quad (1.9)$$

a fázová rovina je reprezentována kružnicí se středem v nule. Přidá-li se konstanta  $\alpha$  tak, že

$$s(t) = \sin t + \alpha, \quad (1.10)$$

tak po výpočtu analytického signálu  $z(t)$  střed kružnice ve fázové rovině posune o tuto konstantu. Vliv velikosti konstanty  $\alpha$  je možné vidět na obrázku 1.1.

Správný průběh okamžitého kmitočtu je možné získat pouze pro případ, kdy se  $\alpha = 0$ . U hodnoty  $\alpha < 1$  bude okamžitý kmitočet obsahovat nežádoucí stejnosměrnou složku a u  $\alpha > 1$  budou hodnoty okamžitého kmitočtu dosahovat dokonce záporných hodnot. Z toho plyne podmínka pro smysluplný okamžitý kmitočet, a to že lokální střední hodnota musí být rovna nule.



Obr. 1.1: Průběhy fáze a kmitočtu pro různé hodnoty  $\alpha$

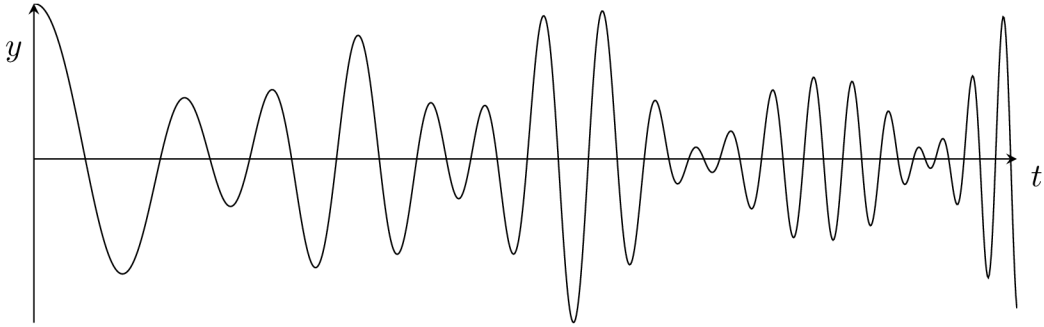
## 1.2 Vlastní modální funkce

Vlastní modální funkce vychází z výše uvedené podmínky pro fyzikálně smysluplný kmitočet, a proto musí splňovat následující podmínky:

1. symetrii obálek tvořených lokálními maximy a minimy vůči nulové střední hodnotě (tzn. vůči „časové“ ose),
2. počet lokálních extrémů musí odpovídat počtu průsečíků s časovou osou.

Na místo podmínky uvedené výše (lokální střední hodnota se musí rovnat nule) je zde použita symetrie zmíněných obálek. Tato aproximace je nutná, protože u nestacionárního signálu není možné lokální střední hodnotu definovat [11]. Vliv této aproximace si můžeme představit jako nelineárně deformovanou vlnu, a kvůli jejímu použití není teoreticky zaručen perfektní výsledný okamžitý kmitočet, který si ale i za velmi špatných podmínek dokáže zachovat svůj fyzikální význam. Ukázka průběhu vlastní modální funkce je vidět na obrázku 1.2.

IMF je také možné si představit jako kmitočtově a amplitudově modulovaný signál, který může být dokonce i nestacionární.



Obr. 1.2: Typická vlastní modální funkce se symetrií horní a spodní obálky  $e_{max}$ ,  $e_{min}$  vůči časové ose.

### 1.3 Empirická modální dekompozice

Většinu běžně získaných dat nelze považovat za vlastní modální funkce. Navíc vstupní data mohou obecně obsahovat více než jednu oscilační složku, a proto by jejich zpracování pomocí Hilbertovy transformace nemělo valný význam, protože by výsledky byly při nejmenším nepřesné a neposkytovaly by kompletní popis všech kmitočtových složek. Empirická modální dekompozice je metoda pro rozklad libovolných dat na vlastní modální funkce, která zvládá velmi dobře zpracovat jak nelineární, tak i nestacionární data (viz [11],[23]). EMD je definována pomocí algoritmu namísto analytické formulace, což znesnadňuje její teoretickou analýzu [26].

Tato metoda je založena na těchto předpokladech [11]:

1. Signál má alespoň dva lokální extrémy (minimum a maximum),
2. charakteristické časové rozmezí je definováno jako časová prodleva mezi extrémy.

#### 1.3.1 Postup rozkladu

Při postupu u této metody se víceméně vychází z definice IMF, to znamená nalezení lokálních extrémů a vytvoření příslušných obálek, ze kterých můžeme spočítat střední hodnotu  $m(t)$  jako

$$m(t) = \frac{e_{min}(t) + e_{max}(t)}{2}, \quad (1.11)$$

kde  $e_{min}$  a  $e_{max}$  jsou jednotlivé obálky. Obálkami se myslí spojení všech lokálních minim, resp. maxim pomocí interpolace. Bližší detaily o interpolaci obálek jsou popsány v části 1.3.3.

Střední hodnota  $m(t)$  se posléze odečte od zpracovávaného signálu  $s(t)$  a tím vznikne první složka  $h_1(t)$

$$s(t) - m_1(t) = h_1(t). \quad (1.12)$$

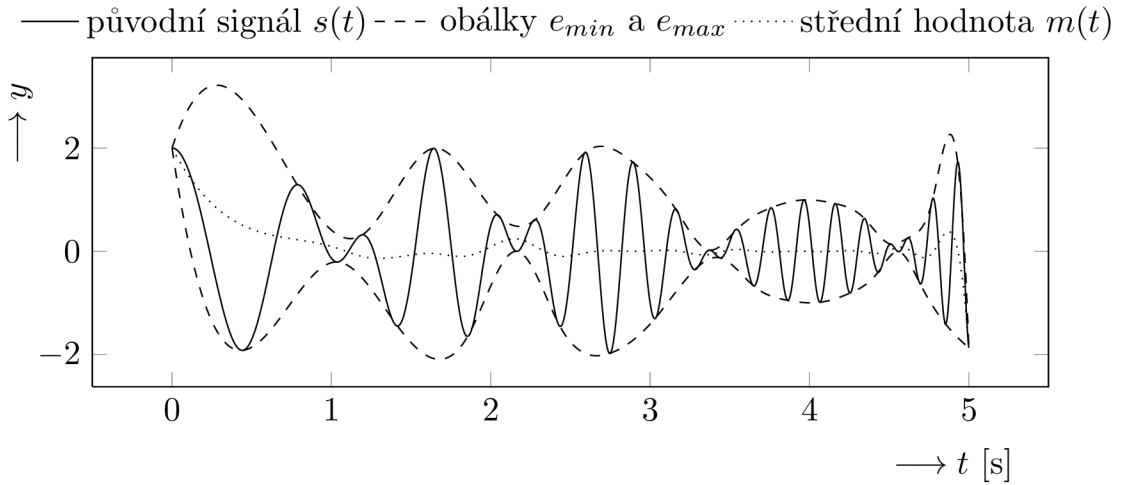
Ideálně bychom  $h_1(t)$  označili jako IMF, ale bohužel se často nestává, aby složka  $h_1(t)$  splňovala podmínky uvedené pro IMF, a proto se musí tento proces opakovat

$$h_1(t) - m_{11}(t) = h_{11}(t), \quad (1.13)$$

tedy obecněji

$$h_{i(k-1)}(t) - m_{ik}(t) = h_{ik}(t), \quad (1.14)$$

kde  $k$  označuje index iterace, a  $i$  index extrahované IMF. Příklad postupu lze vidět na obrázku 1.3.



Obr. 1.3: Ukázka postupu při rozkladu signálu  $s(t)$ .

Opakovat tento postup je možné teoreticky tak dlouho, dokud by velikost signálu  $h_{1k}(t)$  nebyla konstantní, ale to by se ztratila část informací, kterou poskytuje velikost získané IMF složky. Kvůli tomuto důvodu se zavádí kritérium, která slouží k určení okamžiku, ve kterém se má iterace zastavit, i když nebylo dosaženo symetrie obálek  $e_{min}(t)$  a  $e_{max}(t)$ . Různými kritérii se zabývá část 1.3.2. Po splnění podmínek stanovených pro IMF se získá první IMF složka

$$c_i(t) = h_{ik}(t). \quad (1.15)$$

Po extrahování první vlastní modální funkce  $c_1(t)$  se výše zmíněný postup zopakuje, ale místo  $s(t)$  se použije reziduum  $r_i(t)$ , které vznikne jako rozdíl signálu  $s(t)$  a poslední získané IMF  $c_i(t)$ , tedy

$$r_i(t) = s(t) - c_i(t), \quad (1.16)$$

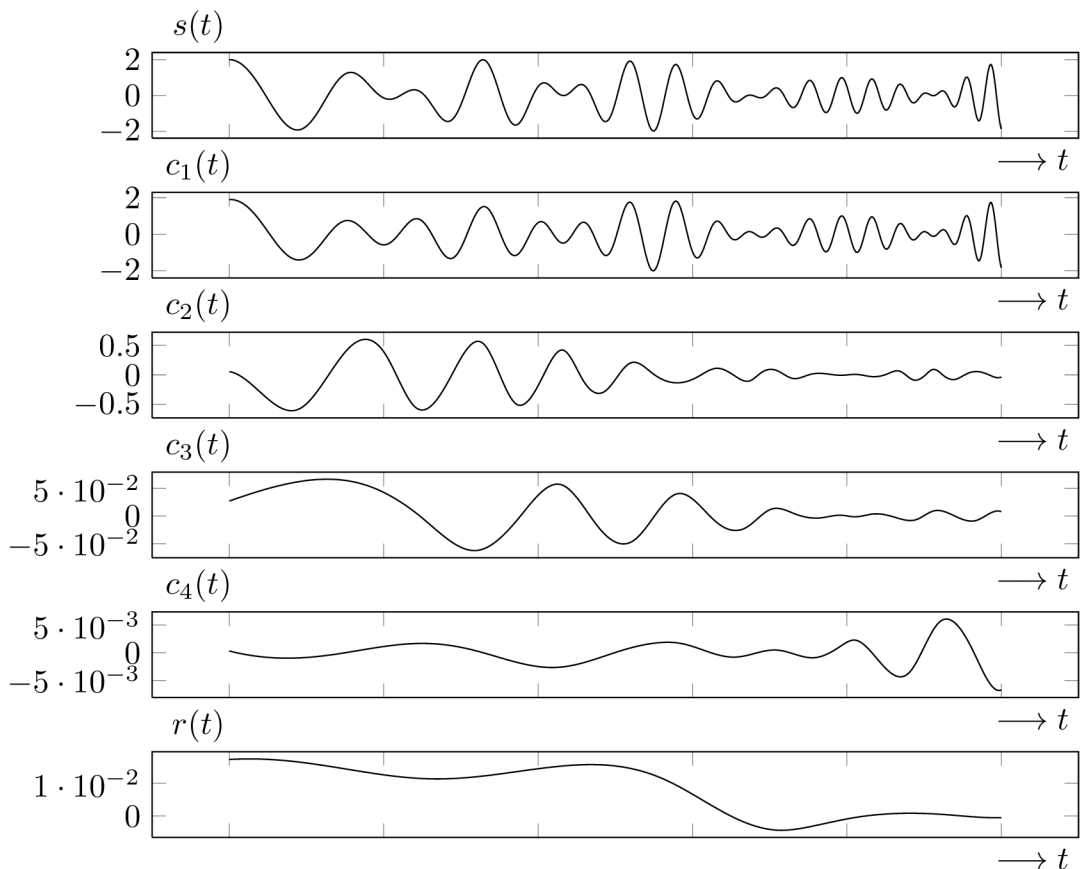
kde  $i$  značí index extrahované IMF.

Dekompozice se ukončí, pokud se z rezidua  $r_i(t)$  už nedá vyextrahovat další IMF komponenta. Zda reziduum  $r_i(t)$  obsahuje další oscilační složky či nikoliv se

pozná podle toho, zda je  $r_i(t)$  monotónní funkce. Pokud  $r_i(t)$  monotónní funkce není, tak obsahuje ještě jednu či více oscilačních složek, a může se pokračovat dále v dekompozici. Další podmínka pro zastavení dekompozice může být zanedbatelná velikost poslední vyextrahované komponenty  $c_i(t)$  nebo rezidua  $r_i(t)$ .

Po úplném dokončení EMD je původní signál  $s(t)$  rozložen do  $n$  IMF komponent a případně i rezidua  $r_n(t)$ . Původní signál  $s(t)$  získáme zpátky sečtením všech extrahovaných složek

$$s(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) + r_n(t). \quad (1.17)$$



Obr. 1.4: Rozložení signálu na jednotlivé IMF komponenty pomocí uvedeného postupu pro realizaci empirické modální dekompozice.

Z obrázku 1.4 si můžeme všimnout jedné ze základních výhod toho způsobu dekompozice, a to že množství IMF složek dosahuje konečného a obvykle velmi malého počtu. Při rozkladu pomocí Fourierovy transformace se obecně získá nekonečně mnoho složek pro úplný popis signálu. Tento rozdíl je způsobem tím, že EMD je adaptivní metoda, neboli bázevé funkce (IMF) se přizpůsobují obsahu signálu  $s(t)$ ,

narozdíl od Fourierovy transformace kde jsou jako bázové funkce použity funkce sinus a kosinus.

Tento postup se aplikuje na celou délku signálu  $s(t)$ , ale existuje i modifikace, kterou je možné použít na části signálu  $s(t)$ . Tato metoda se nazývá „online EMD“ [26]. Vstupní signál se rozdělí na dílčí části, které obsahují dostatek lokálních extrémů k tomu, aby bylo možné provést interpolaci. Tyto bloky se poté zpracují postupem popsáním výše s tím rozdílem, že na každý blok musí být aplikován stejný počet iterací. Jelikož není možné předem určit dostatečný počet iterací (celý vstupní signál není znám), tak se počet iterací stanoví předem. Obvykle stačí použít méně jak 10 iterací [26].

### Zpracování obrazu

Zde uvedený postup platí pro jednorozměrné signály, ale lze rozšířit i tak, aby platil pro dvourozměrný signál například obraz [4]. Je potřeba indetifikovat lokální extrémy v dvourozměrném prostoru a tyto body interpolovat. Namísto křivek bude algoritmus pracovat s plochami, takže i výsledné IMF složky budou dvourozměrné funkce.

### Zpracování komplexního signálu

Takto popsaný postup pro realizování EMD umožňuje pouze zpracovat signál, jehož hodnoty pochází z oboru reálných čísel. Občas může být užitečné zpracovávat vstupní data, která patří do oboru komplexních čísel a proto bylo vyvinuto několik různých metod, které jsou schopny s komplexními čísly pracovat. Tyto metody jsou blíže popsány v [6].

## 1.3.2 Kritéria pro zastavení iterace

Různá kritéria pro zastavení iterace se zavědí proto, aby nedocházelo ke ztrátě informací, které poskytuje modulová část IMF. Zde je popsáno několik nejčastěji používaných kritérií.

### Odhad směrodatné odchylky

Odhad směrodatné odchylky definujeme následovně [11]:

$$\sigma = \sum_{t=0}^T \left[ \frac{|h_{k-1}(t) - h_k(t)|^2}{h_{k-1}^2(t)} \right]. \quad (1.18)$$

Doporučená hodnota směrodatné odchylky  $\sigma$ , při které se má iterace zastavit, se podle [11] pohybuje od 0,2–0,3. Jakmile se dosáhne požadované hodnoty směrodatné



odchylky  $\sigma$ , tak se složka  $h_k(t)$  označí jako IMF složka  $c(t)$ , a v dekompozici se pokračuje dále.

### Ohodnocení fluktuace střední hodnoty

Další kritérium pro zastavení dekompozice je blíže popsáno v [26]. V tomto kritériu se počítá s dvěma „prahovými“ hodnotami  $\theta_1$  a  $\theta_2$ . Pro tento účel zavádíme takzvaný modul módu  $a(t)$  jako

$$a(t) = \frac{e_{max}(t) - e_{min}(t)}{2}, \quad (1.19)$$

a funkci pro ohodnocení fluktuace střední hodnoty

$$\delta(t) = \left| \frac{m(t)}{a(t)} \right|. \quad (1.20)$$

Iterace se zastaví, pokud  $\delta(t) < \theta_1$  pro úsek o délce  $(1 - \alpha)$  z celkové délky signálu a  $\delta(t) < \theta_2$  pro zbylou část signálu  $s(t)$ . Typické hodnoty dle [26] jsou  $\alpha \approx 0.05$ ,  $\theta_1 \approx 0.05$  a  $\theta_2 \approx 10\theta_1$ .

### Lokální empirická modální dekompozice

Lokální empirická modální dekompozice [26] není kritériem pro zastavení iterace v pravém slova smyslu, ale spíše doplněním pro lepší zachování informace v signálu. Může se totiž stát, že jen určitá oblast signálu  $s(t)$ , na které se provádí rozklad pomocí EMD, nesplňuje kritérium pro velikost střední hodnoty. Kvůli této oblasti se musí další iterace provádět na celém signálu  $s(t)$ , a to vede ke zbytečné ztrátě informací. Metoda spočívá v nalezení a izolování části signálu, která neodpovídá daným kritériím a další iterace se provádí pouze na tomto intervalu.

#### 1.3.3 Interpolace obálek $e_{min}$ a $e_{max}$

Při vytváření obálek  $e_{min}(t)$  a  $e_{max}(t)$  se nejčastěji používá takzvaný kubický splajn, protože se z několika různých interpolačních metod experimentálně potvrdil jako nejefektivnější [30].

Mějme  $n + 1$  bodů  $x_0, \dots, x_n$  (uzlové body), pro které platí  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  a ve kterých známe hodnoty  $f(x_0), \dots, f(x_n)$ . Funkce  $S(x)$ , která je na každém z intervalů  $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$  polynomem  $k$ -tého stupně, který prochází body  $(x_i, f(x_i))$ , a která má na celém intervalu  $\langle x_0, x_n \rangle$  spojité derivace až do řádu  $k - 1$  včetně, se nazývá splajn řádu  $k$ .

Splajn třetího řádu neboli kubický splajn můžeme definovat takto:

$$S(x) = \sum_{i=1}^n S_i(x), \text{ kde } S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i. \quad (1.21)$$

Existuje několik druhů kubického splinu, které se liší v zadaných okrajových podmínkách, co musí splňovat. Uvedeme si zde několik nejznámějších spolu s popisem jejich okrajových podmínek [24].

**Přirozený splajn**  $S_1''(x_0) = S_n''(x_n) = 0$

**Periodický splajn**  $S_1'(x_0) = S_n'(x_n)$  a zároveň  $S_1''(x_0) = S_n''(x_n)$

### Interpolace dílčích intervalů

Při použití některého z výše zmíněných kubických splinů vznikají jisté jevy, které se nazývají překmit a podkmit. Podle [30] tyto jevy mohou zásadně ovlivnit výsledky empirické modální dekompozice, a tak snížit kvalitu extrahovaných dat. Upravením podmínek kubického splinu můžeme tyto nedostatky prakticky eliminovat.

Abychom docílili odstranění těchto jevů, tak budeme požadovat, aby první derivace v uzlových bodech byly nulové. Díky této podmínce se dosáhne toho, že na intervalu  $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$  nastávají lokální extrémy v krajních bodech, a tudíž je splajn na tomto intervalu monotónní funkce. Uvědomme si, že pokud bychom použili splajn řádu vyššího než tři, monotónnost bychom přidáním této podmínky nezaručili, a tím pádem by k těmto jevům mohlo docházet dál.

Z úpravené definice kubického splinu lze snadno odvodit následující rovnice pro výpočet koeficientů kubického splinu (viz [26]):

$$a_i = -2L_i, \quad (1.22)$$

$$b_i = 3(x_{i-1} + x_i)L_i, \quad (1.23)$$

$$c_i = -6x_{i-1}x_iL_i, \quad (1.24)$$

$$d_i = f(x_{i-1}) + x_{i-1}^2(3x_i - x_{i-1})L_i, \quad (1.25)$$

kde  $L_i$  je

$$L_i = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.26)$$

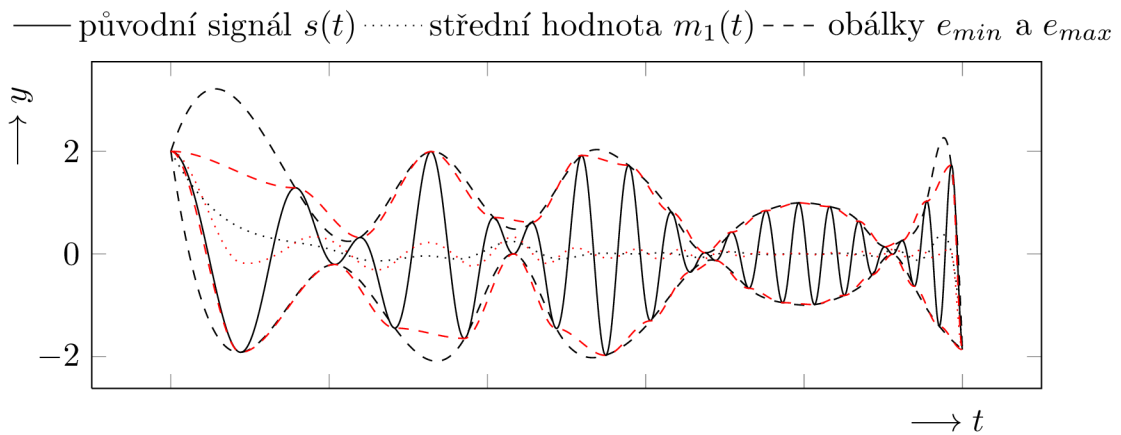
### Určení počátečního a koncového bodu

Pokud hodnoty  $f(x_0)$  nebo  $f(x_n)$  (krajní uzlové body) nejsou známe, tak splajn na intervalu  $\langle x_0, x_1 \rangle$  nebo  $\langle x_{n-1}, x_n \rangle$  je prakticky prodloužením splajnu v následujícím, resp. předchozím intervalu. Může se tím pádem stát, že splajn v těchto intervalech bude nežádoucím způsobem ovlivňovat tvar obálek  $e_{min}$  a  $e_{max}$ , které jsou zásadní pro rozklad pomocí EMD.

Existuje několik různých způsobů, jak odstranit tento jev, ale všechny mají společné to, že definují krajní body  $f(x_0), f(x_n)$ . Pro EMD je důležité, aby při odstraňování toho jevu nedošlo k ovlivnění původních dat, proto se hodnoty v krajních uzlových bodech  $x_0, x_n$  musí zvolit tak, aby se této situaci zamezilo. Podle [30] je

vhodné volit krajní uzlové body pro kubický splajn tak, aby byly zároveň první, resp. poslední body signálu  $s(t)$ . Tímto se docílí odstranění tohoto nežádoucího jevu bez toho, aby se negativně ovlivnil tvar obálek a jejich střední hodnoty  $m(t)$ . Takto zadané krajní uzlové body také způsobí, že obálky  $e_{min}$  a  $e_{max}$  vytvoří uzavřenou křivku a také zaručí, že vytvořené obálky pomocí této metody mají stejný počet bodů jako signál  $s(t)$ , a tedy i jako jejich střední hodnota, což je výhodné pro výpočet EMD.

Použití upraveného kubického splinu (červeně) můžeme vidět na obrázku 1.5. Můžeme zde také vidět, jak velký vliv může mít typ splajnu na výslednou střední hodnotu.



Obr. 1.5: Ukázka použití upraveného postupu při dekompozici.

### Optimalizace pomocí genetických algoritmů

Pro lepší pochopení chování interpolace byl v [15] představen způsob, jak pomocí genetických algoritmů zjistit optimální průběh obálek. Optimální průběh obálek je možné sestavit, pokud je použit vhodný signál složený z několika předem známých kmitočtových komponent. Tím pádem jsou známy i přesné polohy jednotlivých lokálních extrémů a pomocí genetických algoritmů je možné na dílčích intervalech získat optimální průběh jako polynomickou funkci. Takto získané obálky jsou velkou pomocí při porovnávání různých způsobů dekompozice pomocí EMD [16].

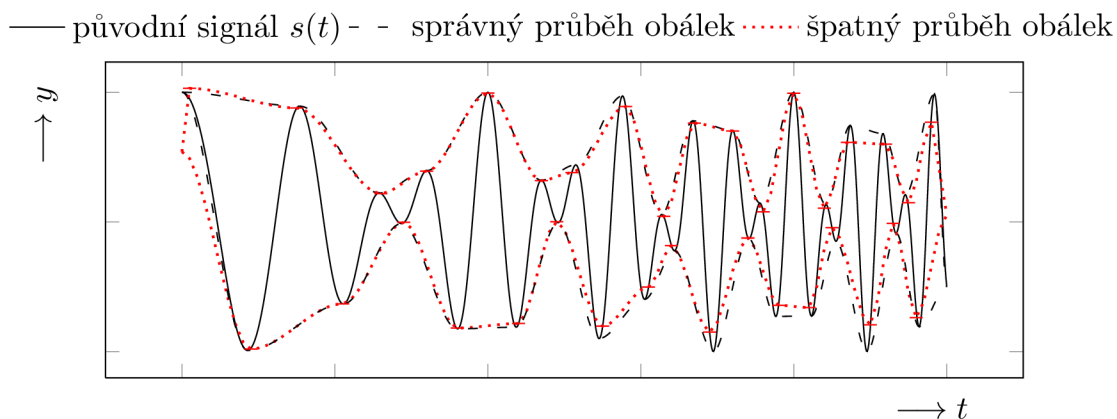
#### 1.3.4 Vzorkovací kmitočet

Pro správnou interpolaci jednotlivých obálek je dále důležité, aby byly jednotlivé lokální extrémy správně určeny. EMD prakticky pracuje pouze s diskretními signály, a proto je potřeba ke správné identifikaci jednotlivých extrémů použít daleko větší

vzorkovací kmitočet než určuje Nyquistův teorém [9]

$$f_{vz} > 2f_{max}. \quad (1.27)$$

Pokud by byl vzorkovací kmitočet nedostatečný k určení polohy lokálního extrému s rozumnou přesností, tak by extrahované bázové složky nemusely odpovídat obsahu analyzovaných dat.



Obr. 1.6: Ukázka obálek signálu s nízkým vzorkovacím kmitočtem

Na obrázku 1.6 můžeme vidět vliv obálek vytvořený pro průběh nedostatečně velkým vzorkovacím kmitočtem ve srovnání se správným průběhem obálek. Čím větší je kmitočet analyzovaného signálu, tak tím větší nepřesnosti vznikají. Indetifikované lokální extrémy jsou pro přehlednost na obrázku vyznačeny jako červené vodorovné úsečky.

### 1.3.5 EMD jako banka filtrů

Podle [5] si lze chování empirické modální dekompozice představit jako banku dyadických (oktávových) filtrů. Toto tvrzení bylo ověřeno pomocí analýzy bílého šumu. Z toho plyne, že empirická modální dekompozice má problémy s rozlišením úzkopásmových signálů, které obsahují několik komponent [28]. Zda empirická modální dekompozice dokáže rozlišit více komponent v jednom úzkopásmovém signálu či nikoliv, záleží na tom, zda tyto komponenty náležejí do jedné oktávy. Pokud komponenty nespádají do jedné oktávy, tak je empirická modální dekompozice schopna je rozlišit. Pokud ale patří do jedné oktávy, tak je není možné pomocí klasické empirické modální dekompozice oddělit.

Jedna z metod, která tento problém řeší je uvedena v [28], a spočívá v použití maskovacího signálu. Tato metoda je navržena pro nízkokmitočtové signály, konkrétně pro analýzu oscilací v silových rozvodech.

Postup by se dal shrnout v následujících krocích:

1. Pomocí Fourierovy transformace signálu  $s(t)$  určíme kmitočtové komponenty  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , kde  $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n$ .
2. Vytvoříme maskovací signály  $m_2(t), m_3(t), \dots, m_n(t)$ , kde

$$m_k(t) = M_k \sin(2\pi(f_k + f_{k-1})t).$$

$M_k$  je podle doporučení v [28] 5,5 krát větší než velikost kmitočtové složky  $f_k$ . Tato hodnota je určena empiricky.

3. Vypočítáme dva signály  $s(t) + m_n(t)$  a  $s(t) - m_n(t)$ . Na tyto dva signály použijeme empirickou modální dekompozici a získáme jejich první IMF komponentu. Výslednou IMF komponentu  $c_1$  získáme jako střední hodnotu těchto dvou předchozích.
4. Získáme reziduum  $r_1(t) = s(t) - c_1(t)$ .
5. Postup opakujeme, ale místo signálu  $s(t)$  použijeme právě získané reziduum  $r_1(t)$ . Iterujeme tak dlouho, dokud neobdržíme  $n - 1$  IMF komponent obsahujících kmitočtové komponenty  $f_2, f_3, \dots, f_n$ . Poslední reziduum  $r_n(t)$  bude obsahovat zbývající komponentu  $f_1$ .

Na chování EMD se dá také pohlížet jako na adaptivní horní propust, jejíž mezní kmitočet se řídí obsahem právě dekomponovaných dat. Postupným získáváním jednotlivých IMF od nejvyššího po nejnižší kmitočet se také stupňuje výskyt chyb, které jsou způsobeny nepřesnostmi při interpolaci obálek. Ve většině případů (například při zpracovávání řeči) se užitečné informace skrývají právě v nižších kmitočtech, a proto může být občas žádoucí extrahovat nižší kmitočty jako první. Pomocí postupu uvedeného v [18] je možné algoritmus upravit tak, aby EMD fungovalo jako adaptivní dolní propust a to nám umožní získat IMF s nižším kmitočtem jako první. Tento postup je například vhodné použít pro zpracování řeči, EEG signálů nebo radarových signálů.

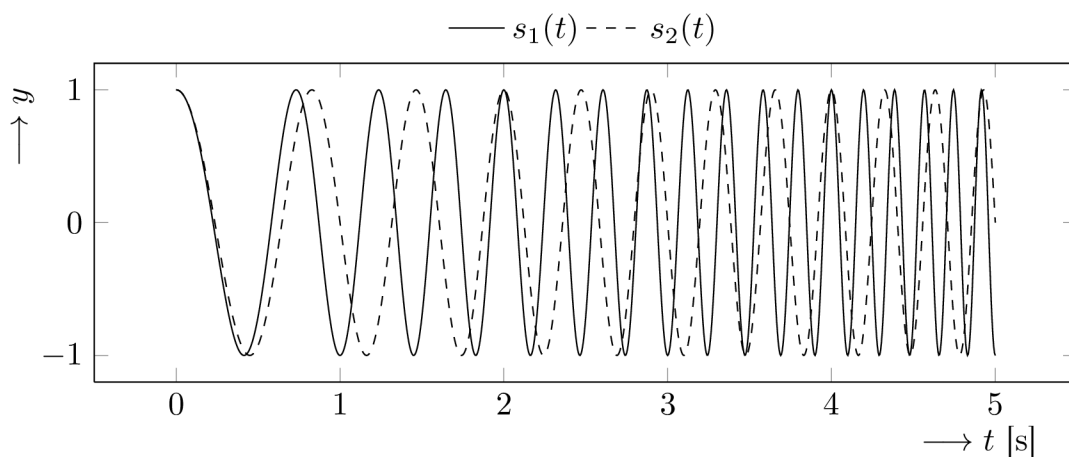
### 1.3.6 Výpočetní náročnost

Při použití různých metod pro analýzu signálů je mimo jiné také důležité znát výpočetní náročnost algoritmu. U běžně používaných metod jako je diskrétní Fourierova transformace nebo časově diskrétní vlnková transformace je možné výpočetní náročnost stanovit přesně. Bohužel u EMD situace není tak jednoduchá, jak by se na první pohled mohlo zdát. Kvůli své adaptivní podstatě může EMD extrahovat různé množství IMF složek  $c_i(t)$ , a tím pádem se může výpočetní náročnost pro různá data o stejné délce výrazně lišit [26]. Dále také záleží na počtu iterací, které se provedou pro každou získanou IMF složku, počtu lokálních extrémů a samozřejmě na množství dat.

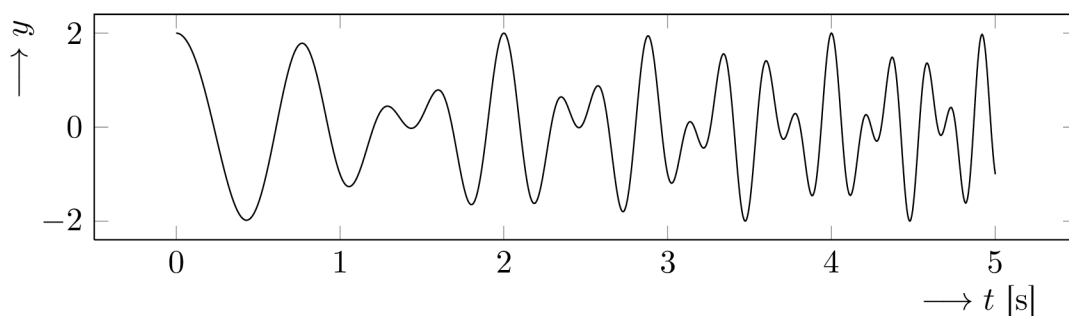
Na základě těchto informací není možné výpočetní náročnost přesně určit. Jediné co lze udělat je omezení maximální délky trvání rozkladu, a to omezením maximálního počtu iterací a extrahovaných složek. Musí se ale dát pozor, aby nedošlo ke snížení kvality extrahovaných informací.

## 1.4 Příklad rozložení signálu pomocí EMD

V této části se ukáže, jak vypadá rozklad signálu  $s(t)$  na vlastní modální funkce a získání okamžitých kmitočtů pro každou komponentu. Uvedený signál  $s(t)$  je uměle vytvořený jako součet dvou kmitočtově modulovaných harmonických funkcí  $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ . Použité funkce  $s_1(t)$  a  $s_2(t)$  jsou zobrazeny na obrázku 1.7. Signál  $s(t)$  je ukázán na obrázku 1.8. Za tímto signálem se neskrývá žádný fyzikální jev a je použit pouze pro ukázkou rozkladu pomocí empirické modální dekompozice.



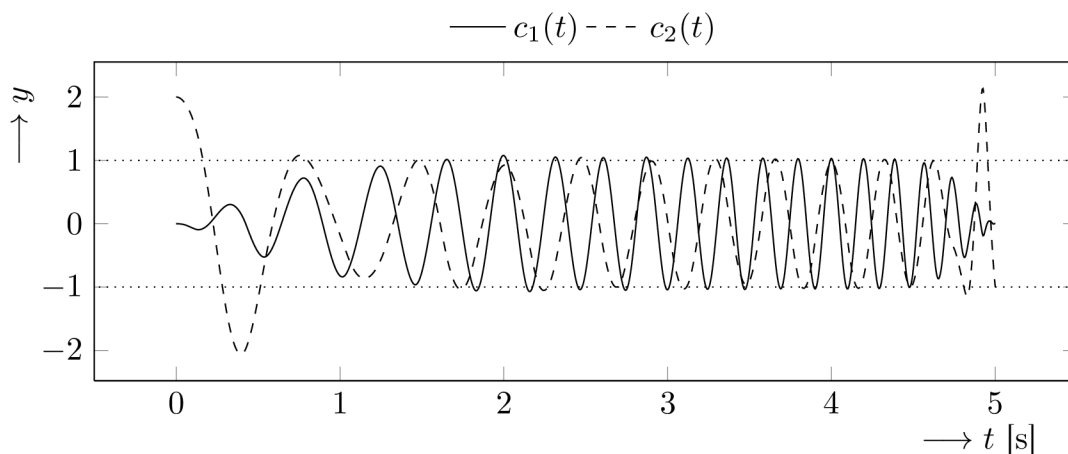
Obr. 1.7: Harmonické funkce  $s_1(t)$  a  $s_2(t)$



Obr. 1.8: Analyzovaný signál  $s(t)$

Signál  $s(t)$  rozložíme pomocí empirické modální dekompozice na jednotlivé vlastní modální funkce. Pro rozklad bylo využito druhé zde uvedené kritérium (sekce 1.3.2,

2. paragraf) využívající „prahové“ hodnoty  $\theta_1$  a  $\theta_2$  (viz [26]). Dále je místo „klasického“ kubického splinu použit upravený kubický splajn podle sekce 1.3.3. Po aplikování empirické modální dekompozice vznikly dvě IMF komponenty, které můžeme vidět na obrázku 1.9.



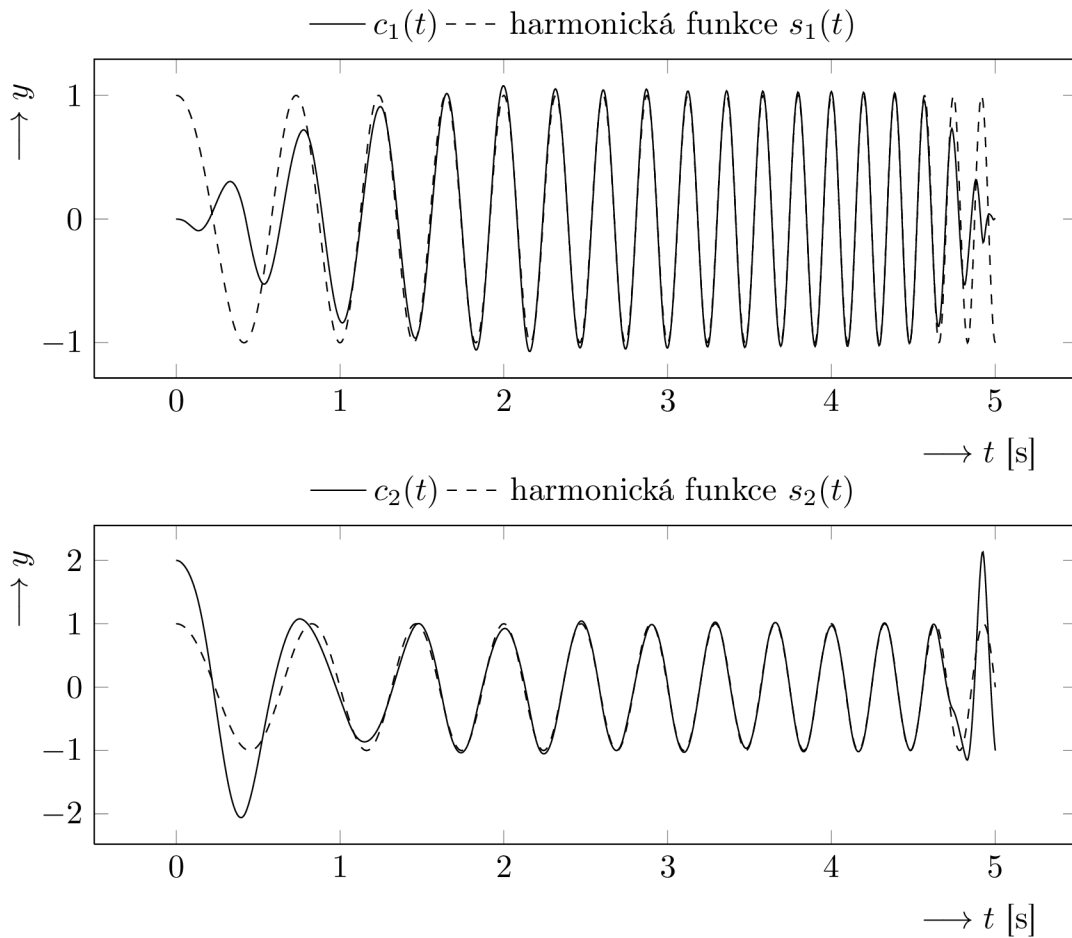
Obr. 1.9: Vlastní modální funkce  $c_1(t)$  a  $c_2(t)$  získané ze signálu  $s(t)$ .

Když se na získané vlastní modální funkce podíváme blíže a porovnáme je s harmonickými funkcemi  $s_1(t)$  a  $s_2(t)$  zobrazenými na obrázku 2.5, lze vidět, že jsou si do jisté míry podobné. Zásadně se liší pouze v okrajových částech průběhu. Tato odlišnost je způsobena „náhlým“ začátkem a koncem signálu  $s(t)$ . Blíže je tento jev popsán v [30]. Podrobnější srovnání extrahovaných vlastních modálních funkcí  $c_1(t)$  a  $c_2(t)$  s harmonickými funkcemi  $s_1(t)$  a  $s_2(t)$  najdeme na obrázku 1.10.

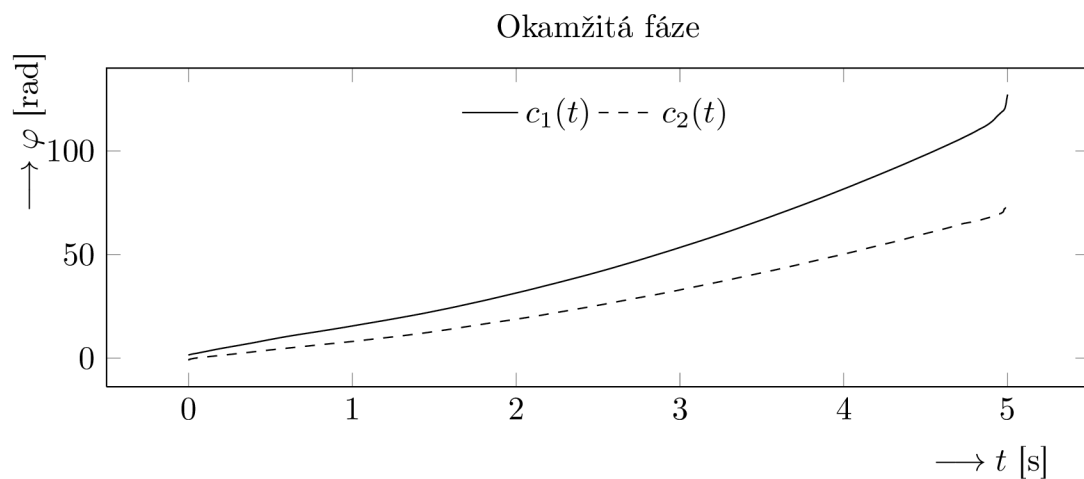
Z obrázku 1.10 vyplývá, že empirická modální dekompozice byla v tomto konkrétním případě schopna odhalit dva kmitočtově modulované signály  $s_1(t)$  a  $s_2(t)$ , ze kterých se analyzovaný signál  $s(t)$  skládá. Obecně nelze říci, že se při dekompozici odhalí všechny komponenty, které signál  $s(t)$  obsahuje (záleží na použitém typu interpolační funkce, nastavená kritéria pro zastavení iterace, vzorkovacím kmitočtu, musí se vzít v potaz funkce EMD jako banky filtrů, atd.). Záleží na konkrétním signálu  $s(t)$  a konkrétní podobě algoritmu pro empirickou modální dekompozici.

Nyní, když se extrahovaly IMF komponenty ze signálu  $s(t)$ , lze pomocí Hilbertovy transformace vytvořit analytický signál  $z(t)$  a pomocí rovnice (1.2) získat jeho fázi  $\varphi(t)$ . Pro výpočet okamžitého kmitočtu pomocí rovnice (1.3) je potřeba použít tzv. rozbalenou fázi. Průběh okamžité fáze, okamžité amplitudy a okamžitého kmitočtu pro každou IMF komponentu můžeme vidět na obrázcích 1.11, 1.12 a 1.13.

Z průběhu okamžité amplitudy a okamžitého kmitočtu každé IMF komponenty lze usoudit, že se kmitočet s časem zvyšuje a amplituda zůstává konstatní.

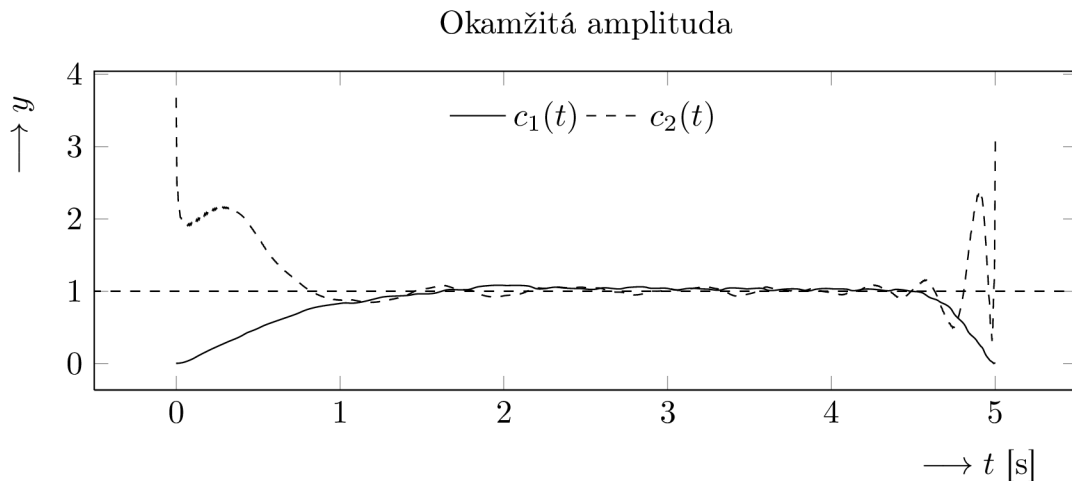


Obr. 1.10: Srovnání vlastních modálních funkcí  $c_1(t)$  a  $c_2(t)$  s harmonickými funkcemi  $s_1(t)$  a  $s_2(t)$ .

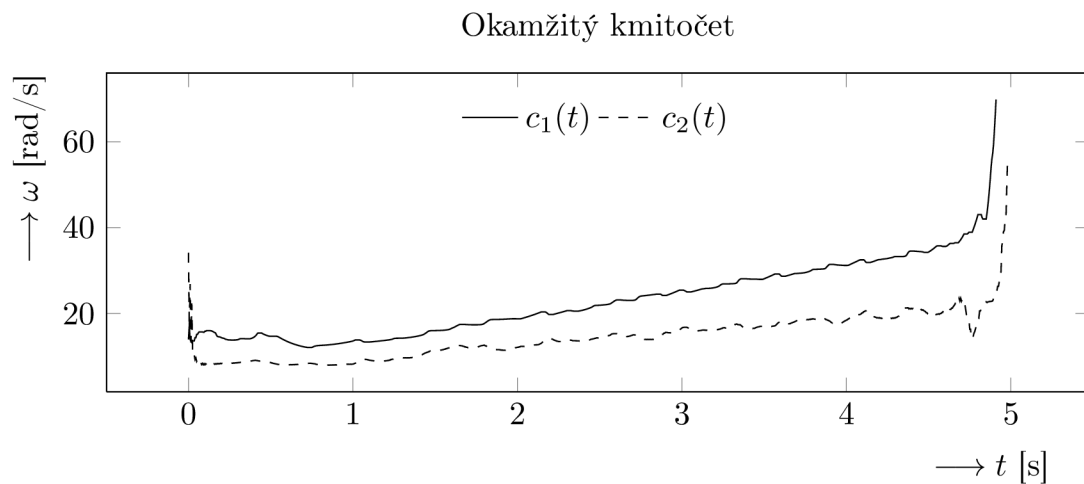


Obr. 1.11: Rozbalená fáze jednotlivých IMF  $c_1(t)$  a  $c_2(t)$ .





Obr. 1.12: Okamžitá amplituda jednotlivých IMF  $c_1(t)$  a  $c_2(t)$ .



Obr. 1.13: Okamžitý kmitočet vypočítaný z rozbalených fází jednotlivých IMF  $c_1(t)$  a  $c_2(t)$ .

Pokud se podíváme na obrázek 1.7, tak zjistíme, že tyto průběhy skutečně odpovídají harmonickým funkcím  $s_1(t)$  a  $s_2(t)$ .

## 1.5 Hilbertovo spektrum

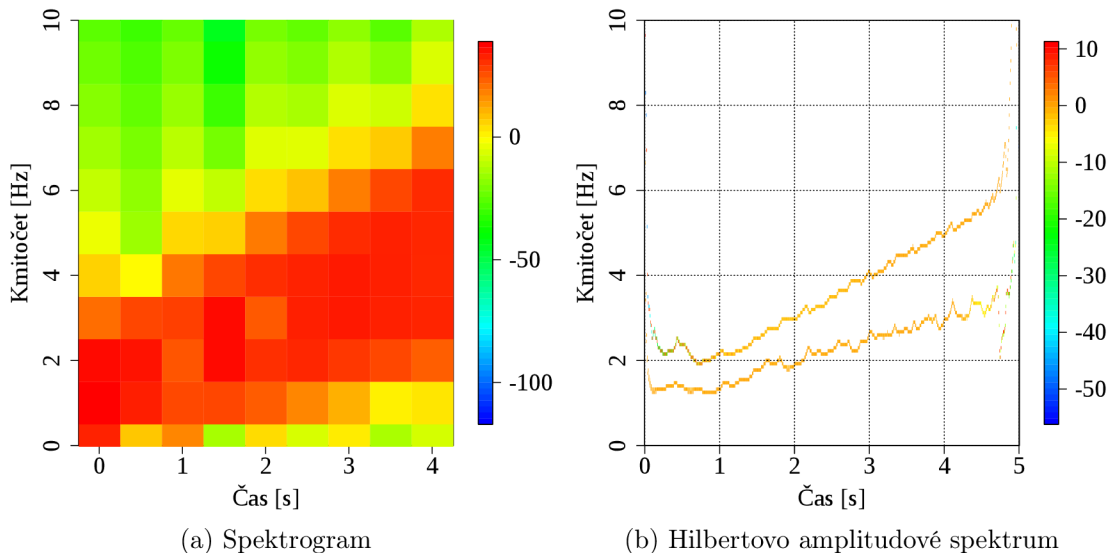
Pomocí EMD se získají vlastní modální funkce, na které lze bez problémů aplikovat Hilbertovu transformaci a posléze vypočítat okamžitý kmitočet. Po aplikování Hilbertovy transformace na každou IMF komponentu, můžeme data vyjádřit původní signál  $s(t)$  následovně:

$$s(t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) e^{j \int \omega_k(t) dt + \theta_k}. \quad (1.28)$$

Reziduum  $r_n$  se vynechává účelově (viz [11]), i když lze použít Hilbertovu transformaci i na něj (monotónní trend můžeme považovat za část oscilace). Může se ale zahrnout, pokud k tomu existuje nějaké fyzikální opodstatnění.

### 1.5.1 Hilbertovo amplitudové spektrum

Rovnice (1.28) rovněž umožňuje vyjádřit okamžitou amplitudu  $a(t)$  a okamžitý kmitočet  $\omega(t)$  jako funkci času, a tak vyjádřit amplitudu jako funkci kmitočtu a času, která se značí jako  $H(\omega, t)$  a vynést ji do 3-rozměrného grafu. Tento graf nazýváme Hilbertovým amplitudovým spektrem a vyjadřuje distribuci energie v časově-kmitočtové rovině.



Obr. 1.14: Srovnání spektrogramu s Hilbertovým amplitudovým spektrem

Srovnání se spektrogramem můžeme vidět na obrázku 1.14. V tomto případě dosahuje Hilbertovo amplitudové spektrum daleko přesnější lokalizaci energie v časově-kmitočtové rovině než spektrogram.

### 1.5.2 Hilbertovo energetické spektrum

Hilbertovo energetické spektrum je odvozeno od Hilbertova amplitudového spektra a můžeme ho definovat jako

$$h(\omega) = \int_0^T H(\omega, t) dt. \quad (1.29)$$

Hilbertovo energetické spektrum zobrazuje celkovou energii jednotlivých kmitočtů. Toto spektrum má zcela jiný význam než Fourierovo spektrum [11].

### 1.5.3 Hustota okamžité energie

Tato distribuce vyjadřuje závislost hustoty energie v čase. Může být použita například k pozorování fluktuace energie signálu. Definuje se jako

$$IE(t) = \int_{\omega} H^2(\omega, t) d\omega. \quad (1.30)$$

## 2 APLIKACE EMD

V této části se popisují některé z různých aplikací EMD a ukazuje se její použití při odstraňování šumu.

### 2.1 Možnosti využití

EMD má spoustu různých využití. Zde je vyjmenováno jen několik málo způsobů využití, které se zaměřují na zpracování zvuku. Konkrétně se jedná o:

- extrahování vlastních oscilací neboli periodicky opakující se události [3],[18],
- automatické rozlišování hlasu [1],
- určení základního tónu hlasu [10],
- kódování audio signálu a hlasu [17],
- vymezení hlasové části ve velmi zašuměném signálu [20],
- extrakce akcentu z emociálně zabarvené řeči [29].

Další možností využití je přímo odstraňování šumu. Existuje několik různých metod ([12], [13], [14], [21], [31]), my se zde ale zaměříme na nejspíš nejjednodušší způsob odstraňování šumu pro jeho jednoduchost a názornost.

### 2.2 Odstranění šumu

Tato část se konkrétně zaměřuje na použití EMD při odstraňování šumu. Toto použití EMD bylo vybráno především kvůli možnosti srovnání s metodou prahování u vlnkové transformace.

#### 2.2.1 Úvod

Při zpracování signálů pomocí různých zařízení je žádoucí, aby podíl šumu v přijímaném signálu byl co nejmenší. Jeden z nejběžněji využívaných způsobů, jak vyjádřit je takzvaný odstup signálu od šumu udávaný v decibelech a vyjadřuje podíl výkonu žádaného signálu ku výkonu šumu.

Odstup signál-šum (SNR) můžeme definovat jako

$$L_{\text{dB}} = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_s}{P_n}, \quad (2.1)$$

kde  $P_s$  je výkon signálu a  $P_n$  je výkon šumu.

SNR se občas vyjadřuje také jako bez rozměrné číslo

$$L = \frac{P_s}{P_n} = 10^{\frac{L_{\text{dB}}}{10}}. \quad (2.2)$$

Výpočet výkonu diskretního signálu  $s(n)$  zavedeme jako

$$P_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s^2(i) \quad (2.3)$$

V tomto příkladě budeme jako šum uvažovat takzvaný bílý šum. Jako bílý šum se často aproximuje například rádiové rušení a nebo šumění zesilovače, a proto ho použijeme i zde. Bílý šum může být definován jako stacionární náhodný proces, jehož spektrální hustota výkonu je konstatní. Z toho mimo jiné plyne, že střední hodnota bílého šumu je nulová [7].

### 2.2.2 Prahování

Prahování je metoda, která se běžně používá například k odstraňování šumu nebo ke kompresi videa. Princip spočívá v tom, že se signál rozloží pomocí vlnkové transformace, provede se úprava obdržených koeficientů a pomocí inverzní transformace se získá modifikovaný signál [8]. Konkrétně při odstraňování šumu je snaha vynulovat malé koeficienty, které přísluší šumu a zachovat velké koeficienty, které popisují vlastní signál.

Existuje několik různých prahovacích metod, zde jsou uvedeny dvě nejpoužívanější.

#### Tvrdé prahování

Tvrdé prahování „nuluje“ všechny koeficienty, které jsou menší než stanovený práh  $\delta$ . Funkci lze zapsat jako

$$y = \begin{cases} x & \text{pro } |x| \geq \delta \\ 0 & \text{pro } |x| < \delta \end{cases} \quad (2.4)$$

#### Měkké prahování

Měkké prahování podobně jako tvrdé prahování nuluje koeficienty jejichž hodnota pod prahem  $\delta$ , ale narozdíl od něj zmenšuje ostatní koeficienty o hodnotu prahu  $\delta$ , neboli je posunuje blíže nule. Z toho plyne, že odstraňuje šum ze všech koeficientů. Funkci můžeme zapsat jako

$$y = \begin{cases} \text{sign}(x)(|x| - \delta) & \text{pro } |x| \geq \delta \\ 0 & \text{pro } |x| < \delta \end{cases} \quad (2.5)$$

Nevýhodou této metody je, že dochází ke ztrátám většího množství energie, než je tomu u tvrdého prahování.

## Určení prahu $\delta$

Existují různé metody pro určení prahové hodnoty. Mezi nejčastěji používané patří takzvané univerzální prahování [8]

$$\delta = \sigma \sqrt{2 \log N}, \quad (2.6)$$

kde  $\sigma$  je směrodatná odchylka šumu.

### 2.2.3 Odstranění šumu pomocí EMD

U odstraňování šumu s použitím EMD se využívá faktu, že bílý šum se rovnoměrně rozprostírá po celém kmitočtovém spektru, a že většina signálů obsahuje podstatné informace v nižších nebo středních kmitočtech [13]. Tím pádem zde lze s výhodou využít funkci EMD jako adaptivní horní propusti. První extrahované IMF nesou informace o vysokofrekvenčních složkách signálu  $s(n)$ , a tím pádem je možné předpokládat, že obsahují převážně šum.

Na tyto vysokofrekvenční IMF složky můžeme použít metodu podobnou výše zmíněnému měkkému prahování [19]

$$c'_i(n, \delta) = \text{sign}(c_i(n)) \cdot \max\{0, |c_i(n)| - \delta\}, \quad (2.7)$$

kde  $c_i(n)$  je IMF složka, a  $\delta$  je prahovací hodnota.

## Určení prahu $\delta$

Prah  $\delta$  určíme podle vzorce [19]

$$\delta = \frac{\sqrt{2 \log N} \sigma}{\ln(i + 1)}. \quad (2.8)$$

Proměnná  $i$  ve vzorci (2.7) a (2.8) značí index IMF složek. Ze vzorce (2.8) tím pádem plyne, že čím vyšší je index zpracovávané IMF složky, tak tím nižší je hodnota prahu. Proměnná  $\sigma$  zde značí směrodatnou odchylku šumu, a je potřebná pro nastavení správné prahovací hodnoty  $\delta$ .  $N$  zde označuje délku zpracovávaného signálu.

## Určení směrodatné odchylky $\sigma$

Při praktickém využití většinou není znám průběh nezkresleného signálu a hodnota SNR, takže se musí použít nějaká metoda pro odhad směrodatné odchylky [22]. Může se využít faktu, že první extrahovaná IMF složka aproximuje průběh šumu a použít ji k odhadu jeho energie obsaženém ve vstupním signálu [12].

V našem případě je nezkreslený signál a hodnota SNR známá, takže lze využít toho, že bílý šum, který zde použijeme k zarušení signálu, má nulovou střední hodnotu. Rozptyl šumu se může spočítat jako

$$\sigma^2 = E(s_n^2) - \mu^2, \quad (2.9)$$

kde  $\mu$  je střední hodnota šumu, která je v našem případě nulová, a proto můžeme říct, že

$$\sigma^2 = E(s_n^2). \quad (2.10)$$

Při porovnání s (2.3) můžeme vidět, že pro tento konkrétní případ platí

$$P_n = \sigma^2. \quad (2.11)$$

Tím pádem můžeme z (2.2) odvodit vztah pro směrodatnou odchylku

$$\sigma = \sqrt{\frac{P_s}{L}}. \quad (2.12)$$

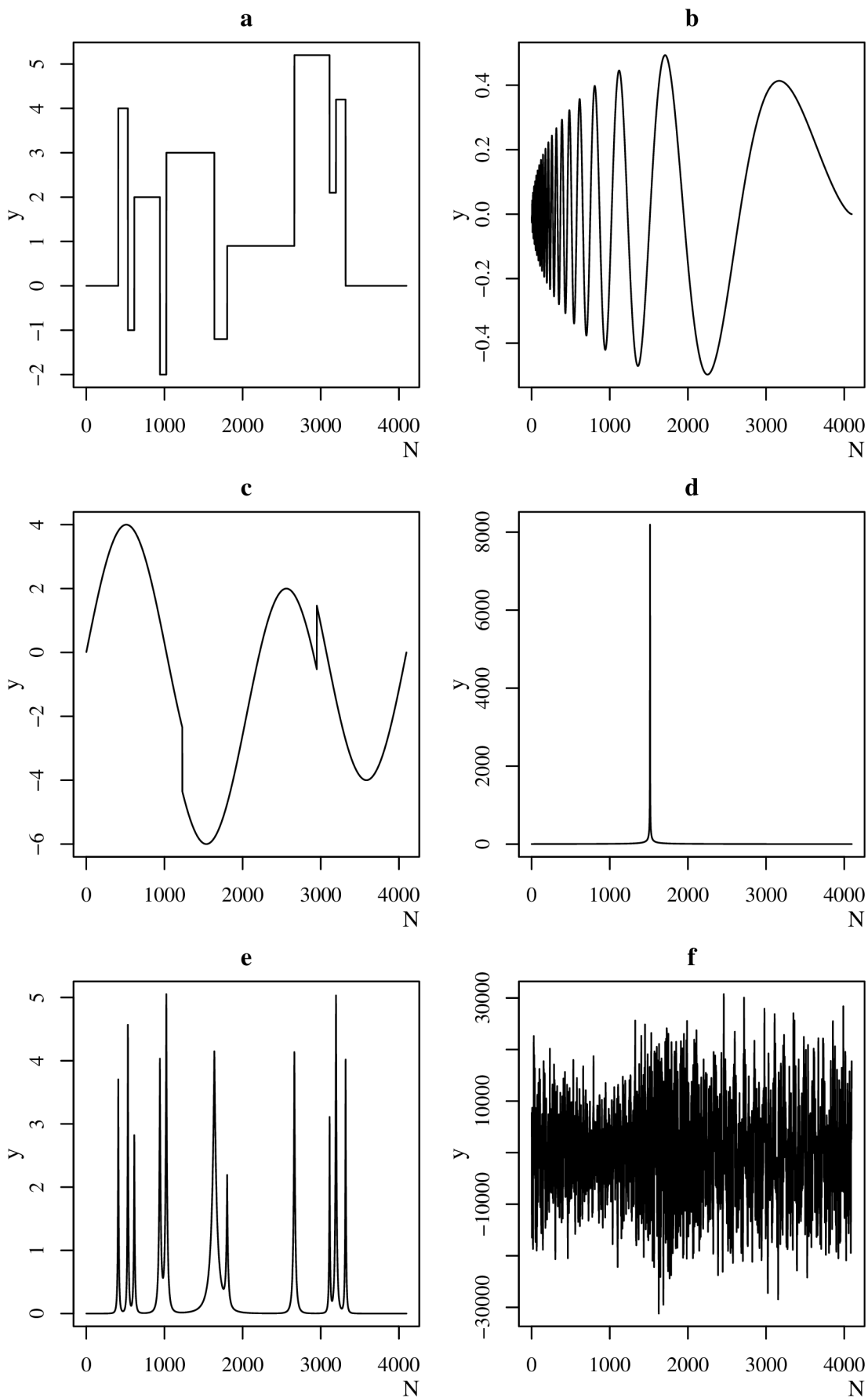
## Aplikace metody

Jelikož stačí metodu upraveného měkkého prahování aplikovat pouze na několik prvních vysokofrekvenčních IMF složek, tak z toho plyne, že dekompozici pomocí EMD lze zastavit po extrahování dostatečného počtu IMF složek. Kompletní rozložení zarušeného signálu není nutné, protože při zpětné rekonstrukci bychom všechny extrahované složky znovu sečetli podle (1.17).

V této metodě může být problém vybrat správný počet IMF složek, na kterých se má prahování provést. V našem případě vybíráme optimální počet experimentálně, ale pro praktické použití by bylo potřeba stanovit lepší postup.

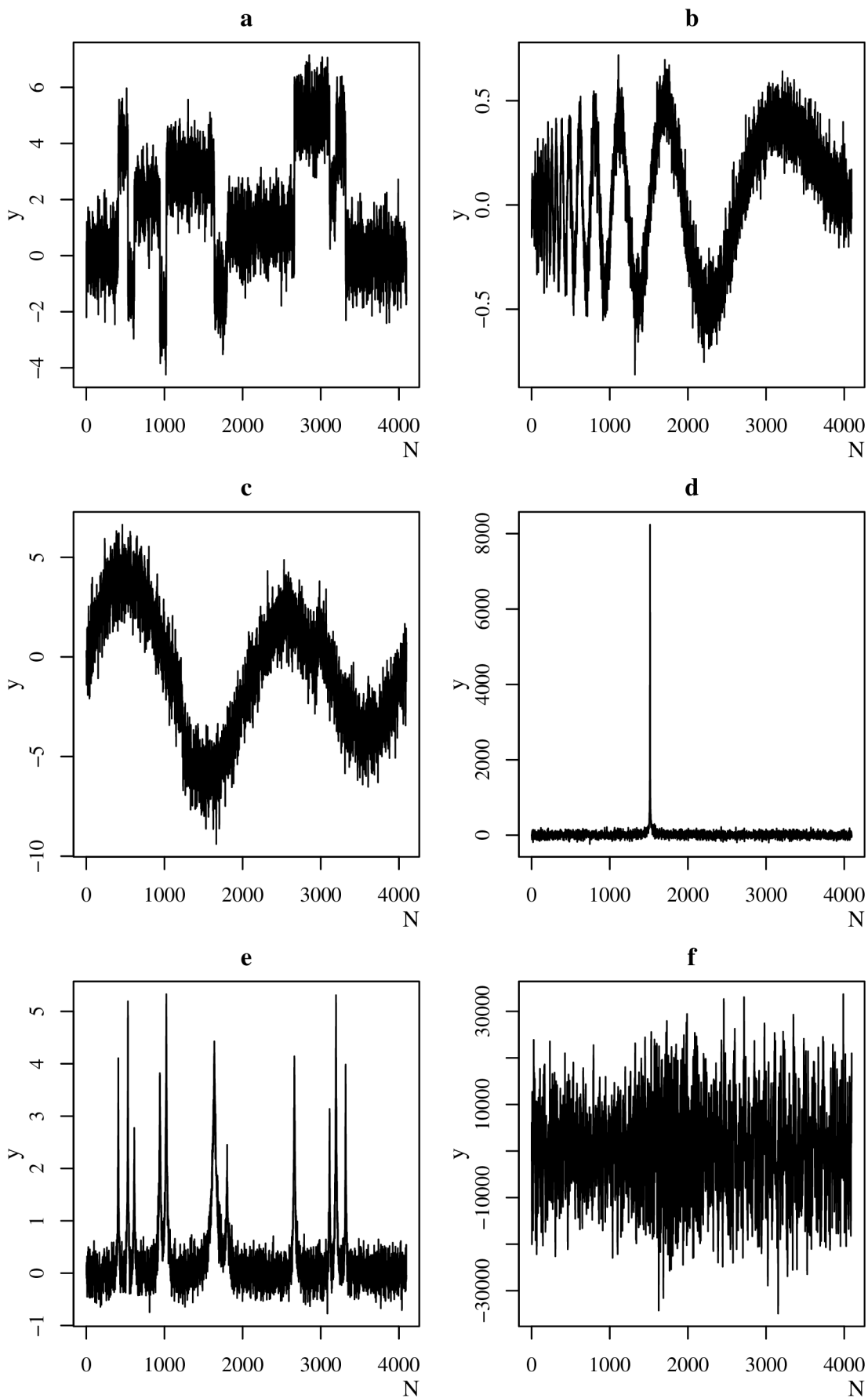
Aby bylo možné prověřit vlastnosti EMD při odstraňování šumu, tak bylo vybráno šest různých druhů signálu, které můžeme vidět na obrázku 2.1. Tyto signály byly vybírány tak, aby bylo pokryto pokud možno co nejvíce běžně se vyskytujících průběhů jako je například obdélníkový signál, impulzový signál nebo řečový signál. Zášuměné signály můžeme vidět na obrázku 2.2.

Pro demonstraci důležitosti zvoleného typu interpolační funkce a zastavovacího kritéria byl také použit upravený algoritmus pro EMD (dále značený jako MEMD), který využívá výše zmíněný upravený kubický splajn a jako kritérium fluktuaci střední hodnoty. Klasický algoritmus pro EMD používá periodický kubický splajn a standardní odchylku. Rozdíly mezi jednotlivými typy EMD můžeme vidět na obrázcích 2.3 a 2.4.

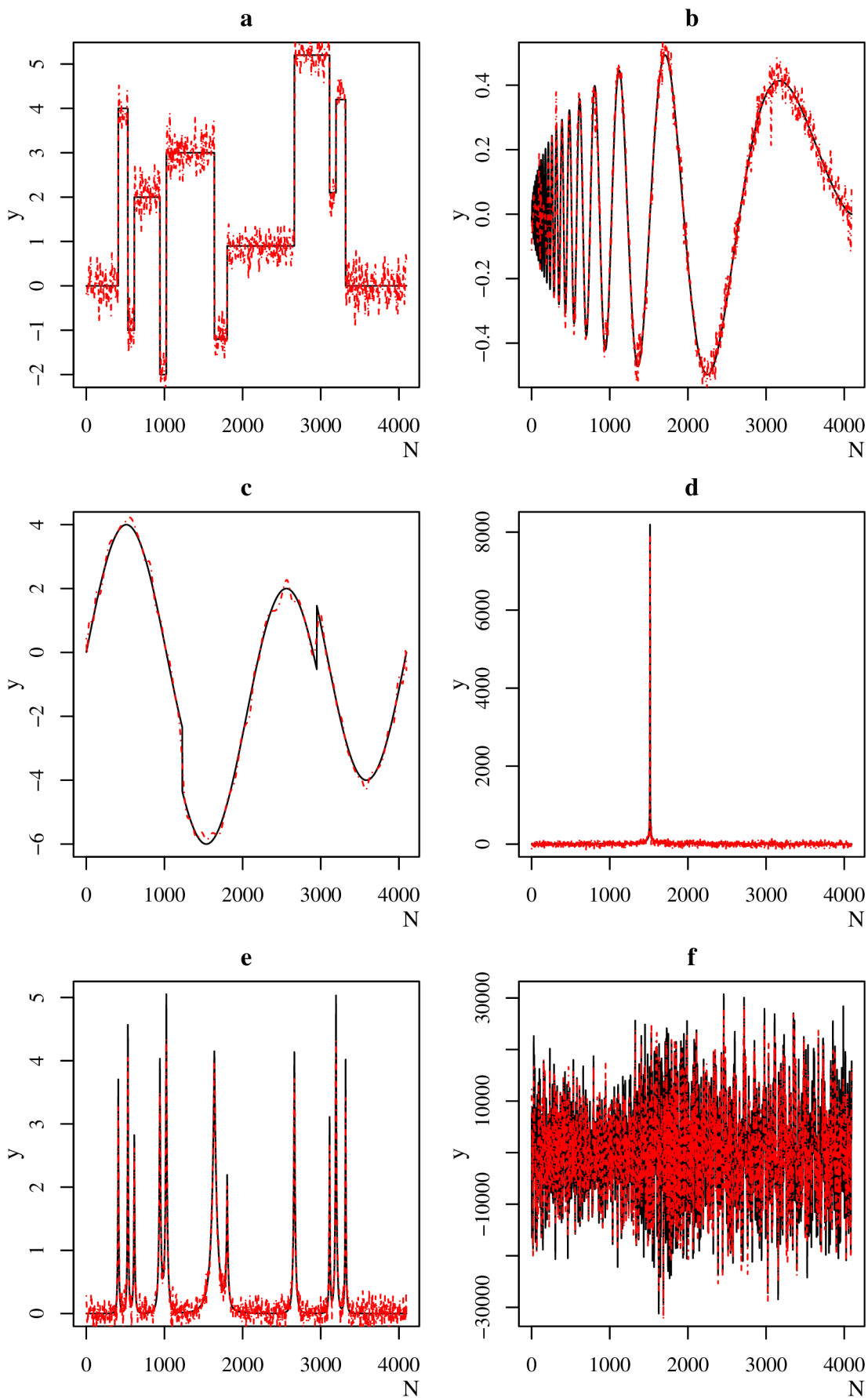


Obr. 2.1: Vstupní signály

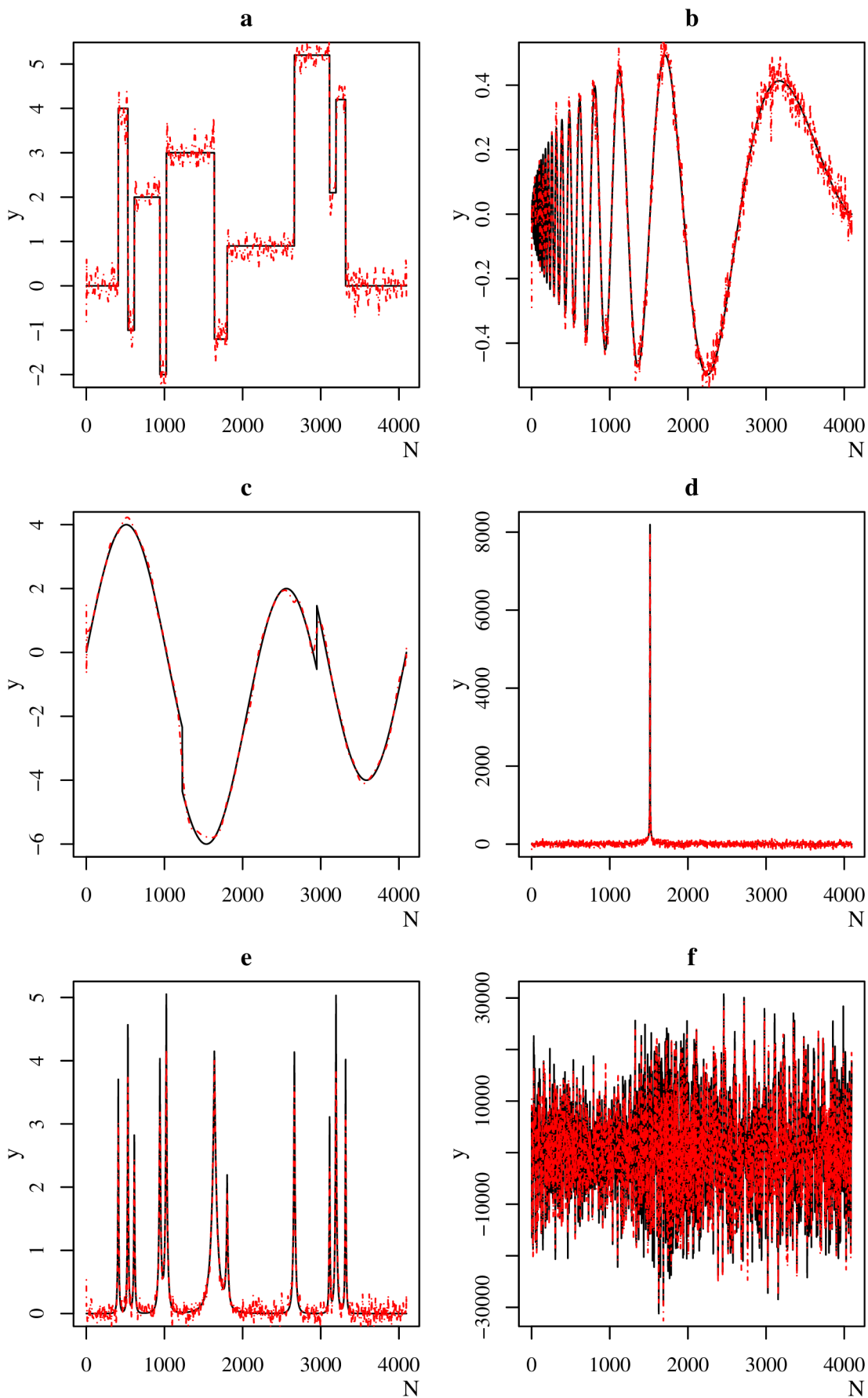




Obr. 2.2: Zašuměné vstupní signály s odstupem signál-šum 10 dB



Obr. 2.3: Vyfiltrované signály pomocí klasické EMD



Obr. 2.4: Vyfiltrované signály pomocí modifikované EMD

## 2.2.4 Srovnání s vlnkovou transformací

Aby bylo možné vyhodnotit účinnost výše popsané metody pro odstranění šumu, tak provedeme srovnání s takzvaným měkkým prahováním, které se pro odstraňování šumu běžně používá [8]. Pro dekompozici pomocí diskretní vlnkové transformace byla použita Daubechiesová vlnka D6. Pro filtraci byl použit balík `rwt` [27] z programu R.

### Srovnání dosažených výsledků

Každý testovací signál byl zarušen s různým odstupem signál-šum, abychom si ověřili chování všech výše zmíněných metod. Zvolené odstupy jsou  $-10$ ,  $-3$ ,  $0$ ,  $3$  a  $10$  dB. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce. Hodnoty představují výsledný odstup signál-šum v dB.

Tab. 2.1: Tabulka vypočtených hodnot SNR pro různé typy vstupních signálů

SNR	a			b			c		
	DWT	EMD	MEMD	DWT	EMD	MEMD	DWT	EMD	MEMD
-10	9,63	11,23	12,86	10,52	11,34	12,07	18,37	25,79	22,93
-3	15,34	21,56	21,68	17,52	19,01	19,78	26,81	22,36	34,5
0	19,72	23,6	24,5	21,86	22,91	25,07	33,26	37,79	38,45
3	23,2	27,83	28,19	25,36	27,53	28,26	32,91	36,08	44,17
10	31,21	34,84	36,49	34,34	34,18	35,46	46,23	47,46	50,12

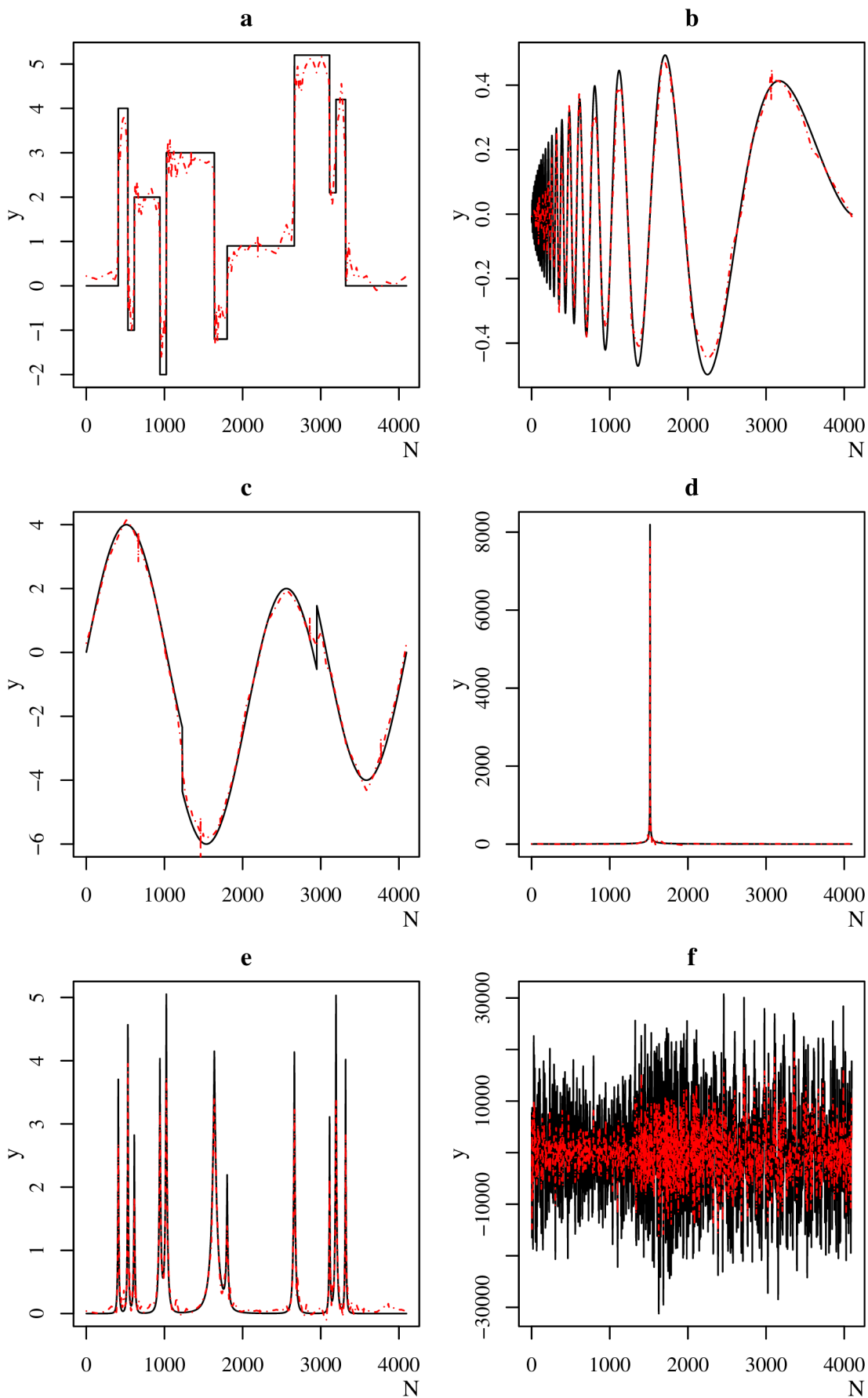
SNR	d			e			f		
	DWT	EMD	MEMD	DWT	EMD	MEMD	DWT	EMD	MEMD
-10	6,81	-1,79	2,13	3,06	5,97	6,51	0,11	-13,86	-10,65
-3	19,5	5,76	8,9	10,77	13,68	15,43	0,82	0,69	0,47
0	25,07	9,8	12,79	13,9	18,25	19,07	1,67	5,52	5,56
3	28,78	8,23	16,16	18,51	22,27	25,02	2,76	10,93	11,53
10	39,95	11,01	17,27	28,78	30,43	31,78	7,2	15,14	17,84

Hodnoty SNR v tabulce jsou počítány následujícím způsobem. Protože známe vstupní signál  $s(n)$ , tak můžeme určit průběh šumu jako

$$s_n(n) = s_f(n) - s(n), \quad (2.13)$$

kde  $s_n(n)$  je šum a  $s_f(n)$  je vyfiltrovaný signál. Pomocí vztahu (2.3) pak můžeme vypočítat výkon pro vstupní signál a šum a tyto hodnoty posléze dosadit do vztahu (2.1), a tak získat hodnotu SNR.

Z hodnot tabulky můžeme vidět, že upravený algoritmus EMD (MEMD) je ve většině případů efektivnější než standardní postup při rozkladu a v nejhorším případě je s ním srovnatelný. Pro většinu testovacích signálů se EMD jeví jako efektivnější metoda pro odstranění šumu než je měkké prahování pomocí vlnkové transformace. Jediné případy, kdy byla vlnková transformace efektivnější, jsou signály „impulzového typu“ a velmi zašuměná řeč. Porovnání měkkého prahování a odstranění šumu pomocí EMD odpovídá výsledkům v [19]. Navíc jsme si na tomto příkladě ověřili, že MEMD je ve většině případů při dekompozici efektivnější než klasické EMD [26].



Obr. 2.5: Vyfiltrované signály pomocí měkkého prahování

### 3 ZÁVĚR

Na začátku práce jsou uvedeny a vysvětleny základní pojmy nutné pro pochopení empirické modální dekompozice. V další části je popsán základní postup pro realizaci empirické modální dekompozice. Jsou zde rozebrány jednotlivé kroky postupu včetně možností jejich vylepšení. Dále je na příkladě ukázán rozklad signálu složeného ze dvou harmonických funkcí pomocí empirické modální dekompozice. Je vypočítán okamžitý kmitočet jednotlivých vlastních modálních funkcí a následně je vytvořeno Hilbertovo amplitudové spektrum. Toto spektrum je posléze srovnáno se spektrogramem. Z toho srovnání lze vidět, že pomocí Hilbertova spektra jsme schopni přesněji lokalizovat distribuci energie v časově-kmitočtovém spektru.

Ve druhé části je vyjmenováno několik různých využití empirické modální dekompozice zejména v oblasti zpracování zvuku. Dále je ukázán způsob odstranění šumu z různých průběhů signálů pomocí empirické modální dekompozice. Pro demonstraci důležitosti zvolených parametrů dekompozice jako je například interpolační funkce a zastavovací kritérium, je filtrace provedena dvěma různými postupy. Pro srovnání empirické modální dekompozice je filtrace šumu provedena také pomocí metody měkkého prahování. Ze srovnání vychází, že empirická modální dekompozice překonává ve většině případů metodu měkkého prahování. Dále z výsledků plyne, že je rozdíl mezi jednotlivými způsoby dekompozice, neboli způsob, u kterého byl předpoklad, že bude efektivnější, se skutečně jako efektivnější ukázal.

## LITERATURA

- [1] AMBIKAIRAJAH, E. Emerging Features for Speaker Recognition. In *Information, Communications & Signal Processing, 2007 6th International Conference on*, s. 1–7. IEEE, 2007. ISBN 978-1-4244-0983-9.
- [2] BARNES, A. E. *The calculation of instantaneous frequency and instantaneous bandwidth. Geophysics.* 1992, 57, 11, s. 1520–1524.
- [3] BARNHART, B. L.; EICHINGER, W. E. *Analysis of Sunspot Variability Using the Hilbert-Huang Transform. Solar Physics.* 2011, 269, 2, s. 439–449. ISSN 00380938.
- [4] DONGHOH, K.; HEE-SEOK, O. *EMD: A Package for Empirical Mode Decomposition and Hilbert Spectrum. The R Journal.* 2009, 1, s. 40–46. ISSN 2073-4859.
- [5] FLANDRIN, P.; RILLING, G.; GONCALVES, P. *Empirical mode decomposition as a filter bank. Signal Processing Letters, IEEE.* 2004, 11, 2, s. 112–114.
- [6] GAO, Y.; SANG, E.; SHEN, Z. *Comparison of EMD and Complex EMD in Signal Processing. 2008 Congress on Image and Signal Processing.* 2008, s. 141–145.
- [7] GIROD, B.; RABENSTEIN, R.; STENGER, A. *Signals and systems.* New York : Wiley, 2001. ISBN 9780471988007.
- [8] GOSWAMI, J. C.; CHAN, A. K. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications.* Wiley Series in Microwave and Optical Engineering. New York : Wiley, 1999. ISBN 9780471197485.
- [9] HUANG, D.; XU, Y. Problem of insufficient sampling rate in EMD. In *Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC), 2011 IEEE*, s. 1–6. IEEE, 2011. ISBN 9781424479351.
- [10] HUANG, H.; PAN, J. *Speech pitch determination based on Hilbert-Huang transform. Signal Processing.* 2006, 86, 4, s. 792–803. ISSN 01651684.
- [11] HUANG, N. E. et al. *The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. Proceedings of the Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences.* 1998, 454, 1971, s. 903–995. ISSN 13645021.



- [12] JUN-CHANG, Z.; LI, Z. *A Speech Denoising Method Based on Improved EMD. 2011 International Conference on Multimedia and Signal Processing.* May 2011, s. 305–309.
- [13] KHALDI, K.; ALOUANE, M. T.-H. *A new EMD denoising approach dedicated to voiced speech signals. Signals, Circuits and.* 2008, s. 1–5.
- [14] KHALDI, K.; ALOUANE, M.; BOUDRAA, A. *Speech denoising by Adaptive Weighted Average filtering in the EMD framework. In Signals, Circuits and Systems, 2008. SCS 2008. 2nd International Conference on,* 1, s. 1–5. IEEE, 2008. ISBN 9781424426287.
- [15] KOPSINIS, Y. *Investigation of the empirical mode decomposition based on genetic algorithm optimization schemes. Acoustics, Speech and Signal.* 2007.
- [16] KOPSINIS, Y.; MCLAUGHLIN, S. *Improved EMD Using Doubly-Iterative Sifting and High Order Spline Interpolation. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing.* 2008, 2008, s. 1–9. ISSN 16876172.
- [17] LI, X.-m.; BAO, C.-c. *A sinusoidal audio and speech analysis/synthesis model based on improved EMD by adding pure tone. for Signal Processing (MLSP), 2011 IEEE.* 2011.
- [18] LIN, L.; HONGBING, J. *Signal feature extraction based on an improved EMD method. Measurement.* 2009, 42, 5, s. 796–803. ISSN 02632241.
- [19] LIU, L.; CHEN, G. *The application of Hilbert-Huang Transform in speech enhancement. Computer, Mechatronics, Control and.* 2010, 5, s. 207–210.
- [20] LU, Z.; LIU, B. *Speech endpoint detection in strong noisy environment based on the Hilbert-Huang Transform. Mechatronics and Automation, 2009.* 2009, s. 4322–4326.
- [21] MAHMOODI, S.; SHARIF, B. *Signal segmentation and denoising algorithm based on energy optimisation. Signal Processing.* 2004, 85, 9, s. 6.
- [22] MAKOVOZ, D. *Noise variance estimation in signal processing. Signal Processing and Information Technology,*. 2006, s. 364–369.
- [23] MŽOUREK, Z. *Signal decomposition using EMD transformation. In Proceedings of the 18th Conference STUDENT EEICT 2012,* 1, s. 46–48. VUT v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií a Fakulta informačních technologií, 2012. ISBN 978-80-214-4460-7.

- [24] QUARTERONI, A.; SACCO, R.; SALERI, F. *Numerical mathematics*. Texts in applied mathematics. New York : Springer, 2007. ISBN 9783540346586.
- [25] R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2012. ISBN 3-900051-07-0.
- [26] RILLING, G. et al. On empirical mode decomposition and its algorithms. In *IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing NSIP*, 3, s. 8–11, 2003.
- [27] ROEBUCK, P.; GROUP, R. U. D. *rwt: Rice Wavelet Toolbox wrapper*, 2009. R package version 0.9.2.
- [28] SENROY, N. *Inter-area Oscillations in Power Systems*. Transform. 2009.
- [29] SHEN, Z. et al. *Accent extraction of emotional speech based on modified ensemble empirical mode decomposition*. *Conference (I2MTC), 2010*. 2010, 1, 60874054.
- [30] SI-SHENG, L.; ZHANG, T.; FENG, L. *Causes and solutions of overshoot and undershoot and end swing in Hilbert-Huang transform*. *Acta Seismologica Sinica*. 2005, 18, 5, s. 602–610. ISSN 1000-9116.
- [31] XIN-XIA, L.; FU-LIAN, H.; JIN-GUI, W. Wavelet Extended EMD Noise Reduction Model for Signal Trend Extraction. In *Image and Signal Processing, 2009. CISP'09. 2nd International Congress on*, s. 1–5. IEEE, 2009. ISBN 9781424441310.

# SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

IMF	vlastní modální funkce (intristic mode function)
EMD	empirická modální dekompozice (empiric modal decomposition)
$t$	spojitý čas, $t \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$s(t)$	původní signál
$\tilde{s}(t)$	Hilbertův obraz spojitého signálu $s(t)$
$z(t)$	analytický signál
$r(t)$	okamžitá amplituda
$\varphi(t)$	okamžitá fáze
$e$	Eulerovo číslo
$\omega(t)$	okamžitý kmitočet
FIR	filtr s konečnou impulzní odezvou
$T_{vz}$	vzorkovací perioda
$e_{min}(t)$	spodní obálka při interpolaci
$e_{max}(t)$	horní obálka při interpolaci
$c_i(t)$	vlastní modální funkce, $i \in \mathbb{N}$
$m(t)$	aritmetický průměr
$h(t)$	složka vznikající při iteraci
SNR	odstup signál-šum (signal to noise ratio)
$L_{dB}$	odstup signál-šum v decibelech
$L$	odstup signál-šum jako bezrozměrné číslo
$\sigma$	směrodatná odchylka
$\sigma^2$	rozptyl

$\mu$	statistická střední hodnota
$s_n(n)$	šum
$s_f(n)$	vyfiltrovaný signál
$P_s$	výkon signálu $s(n)$
$P_n$	výkon šumu
$N$	celková délka (počet vzorků) diskrétního signálu
$\delta$	prahovací hodnota
MEMD	upravený algoritmus empirické modální dekompozice (modified empiric modal decomposition)
DWT	diskrétní vlnková transformace (discrete wavelet transformation)