



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

ANALÝZA VLIVU LISOVACÍ SÍLY PLECHŮ ROTOROVÉHO PAKETU NA KRITICKÉ OTÁČKY ELEKTROMOTORU

ANALYSIS OF THE ROTOR PACKET PRESTRESS ON THE ROTOR CRITICAL SPEED

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Filip Lekeš

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Petr Lošák, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Bc. Filip Lekeš
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce:	Ing. Petr Lošák, Ph.D.
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Analýza vlivu lisovací síly plechů rotorového paketu na kritické otáčky elektromotoru

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Rotory některých elektrických stojů strojů jsou tvořeny rotorovým paketem z plechů stažených závitovými tyčemi. Paket je nalisován na hřídeli. Při výpočtovém modelování se často rotorový paket nahrazuje pouze hmotnými body, čímž se nebere v potaz ohybová tuhost paketu. Toto má negativní vliv na kritické otáčky stroje. Vhodnější přístup je nahradit paket válcem s homogenního izotropního materiálu s ekvivalentní hustotou a ekvivalentním modulem pružnosti. Velikost ekvivalentního modulu pružnosti závisí na velikosti utahovacího momentu matic na závitových tyčích stahujících plechy. Hodnota ekvivalentního modulu pružnosti pak přímo ovlivňuje hodnotu kritických otáček. Cílem této práce je analyzovat vliv lisovací síly plechů rotorového paketu na hodnotu ekvivalentního modulu pružnosti, což souvisí s velikostí kritických otáček.

Cíle diplomové práce:

1. Rešeršní studie současných přístupů k modelování rotorového paketu v dynamických výpočtech.
2. Pomocí zkoušky čtyřbodovým ohybem stanovit hodnoty ohybové tuhosti rotorového paketu pro různé hodnoty lisovací síly.
3. Pomocí experimentální modální analýzy stanovit vlastní frekvence a vlastní tvary rotorového paketu.
4. Na základě naměřených dat stanovit různými metodami ekvivalentní moduly pružnosti pro různé hodnoty lisovací síly.
5. Stanovit kritické otáčky rotoru s paketem pro vypočítané hodnoty ekvivalentního modulu pružnosti.

Seznam doporučené literatury:

Brepta, R., Půst, L., Turek, F., Mechanické kmitání. Praha: Sobotáles, 1994. Technický průvodce, sv.71. ISBN 80-901684-8-5.

Muszyńska, A. Rotordynamics. Boca Raton: Taylor & Francis, 2005. Mechanical engineering (Taylor & Francis), 156. ISBN isbn0824723996.

Friswell, M., Penny, J., Garvey, S., Lees, A. (2010). Dynamics of Rotating Machines (Cambridge Aerospace Series). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511780509

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Předkládaná diplomová práce se zabývá modelováním rotorového paketu v dynamických výpočtech a analýzou vlivu lisovací síly paketu na kritické otáčky elektromotoru. Práci je možné rozdělit na tři hlavní části. První část pojednává o současné úrovni modelování rotorových paketů v dynamických výpočtech a dále se zabývá analytickými teoriemi pro následné experimentální zkoušky. V druhé části je popsána realizace dvou experimentů k stanovení ekvivalentních modulů pružnosti. Prvním experimentem je zkouška čtyřbodovým ohybem a druhým experimentální modální analýza. Třetí část slouží k porovnání dosažených výsledků z experimentálních zkoušek a popisuje výpočet kritických otáček rotorového paketu nalisovaného na hřídeli metodou konečných prvků.

Abstract

The presented diploma thesis deals with the modeling of the rotor packet in dynamic calculations and analysis of the influence of the packing pressing force on the critical speed of the electric motor. The thesis can be divided into three main parts. The first part discusses the current level of rotor packet modeling in dynamic calculations and also deals with analytical theories for subsequent experimental tests. The second part describes the implementation of two experiments to determine the equivalent modulus of elasticity. The first experiment is a four-point bending test and the second is an experimental modal analysis. The third part is used for comparing the results obtained from experimental tests and describes the calculation of the critical speed of the rotor package pressed on the shaft by the finite element method.

Klíčová slova

Rotor, rotorový paket, ekvivalentní modul pružnosti, kritické otáčky, vlastní frekvence, vlastní tvary, předpětí, lisovací síla.

Keywords

Rotor, rotor packet, equivalent modulus of elasticity, critical speed, natural frequencies, natural shapes, preload, pressing force.

Bibliografická citace

LEKEŠ, F. *Analýza vlivu lisovací síly plechů rotorového paketu na kritické otáčky elektromotoru* [online]. Brno, 2020 [cit. 2020-06-26]. Dostupné z <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/125766>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Petr Lošák.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem předkládanou diplomovou prací na téma *Analýza vlivu lisovací síly plechů rotorového paketu na kritické otáčky elektromotoru* vypracoval samostatně a s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu literatury.

V Brně,
dne 26. června 2020

.....
Bc. Filip Lekeš

Poděkování

Rád bych poděkoval svému vedoucímu diplomové práce Ing. Petrovi Lošákovi Ph.D. za cenné rady, čas, ochotu a předané znalosti při vypracování předkládané diplomové práce. Dále bych rád poděkoval firmě TES Vsetín s.r.o. za poskytnutí rotorového paketu pro akademické účely. Velké poděkování patří mojí rodině, která mě vždy podporovala po celou dobu mého studia a přítelkyni za trpělivost a podporu ve studiu.

Obsah

1	Úvod	15
2	Problémová situace	17
2.1	Popis problémové situace	17
2.2	Formulace problému	17
2.3	Cíle řešení problému	17
2.4	Systém podstatných veličin	18
2.4.1	Aplikace systému podstatných veličin	19
2.5	Volba metody řešení problému	21
3	Rešeršní studie	23
3.1	Modely rotorů založené na diferenciálním přístupu	23
3.1.1	Model s jedním stupněm volnosti	24
3.1.2	Jeffcottův (Lavalův) rotor	24
3.2	Konečnoprvkové modely rotorového paketu	25
3.2.1	Homogenní izotropní model materiálu	26
3.2.2	Transverzálně ortotropní model materiálu	26
4	Teoretický základ	27
4.1	Výpočet osového kvadratického momentu rotoru	27
4.1.1	Analytické řešení kvadratického momentu	27
4.1.2	Numerické řešení kvadratického momentu	31
4.2	Čtyřbodový ohyb	33
4.2.1	Uvolnění prutu	33
4.2.2	Výsledné vnitřní účinky	34
4.2.3	Průhybová čára	35
4.3	Ohybové kmitání	38
4.3.1	Volné kmitání nosníku	38
5	Experimentální modelování	43
5.1	Zkouška čtyřbodovým ohybem	43
5.1.1	Výpočet vstupních parametrů	44
5.1.2	Realizace experimentu	47
5.1.3	Zpracování naměřených dat	50
5.2	Experimentální modální analýza	53
5.2.1	Popis experimentu	53
5.2.2	Analýza naměřených dat	54
5.3	Porovnání výsledků	59

6	Výpočtové modelování	61
6.1	Modely geometrie	61
6.2	Modely materiálu	62
6.3	Diskretizované modely	62
6.4	Statická analýza	63
6.4.1	Průhyby rotorového paketu	64
6.5	Modální analýza I	65
6.5.1	Vlastní tvary a frekvence rotorového paketu	65
6.6	Modální analýza II	67
6.6.1	Kritické otáčky rotorového paketu	67
6.7	Porovnání výsledků	70
7	Závěr	73
	Seznam použité literatury	75
	Seznam použitých symbolů a zkratek	79
	Seznam obrázků	83
	Seznam tabulek	85
	Seznam příloh	87
	Příloha A	89
	Příloha B	93

1 Úvod

Stanovení kritických otáček patří k jednomu z nejdůležitějších výpočtů při návrhu každého točivého stroje. Při dosažení těchto otáček dochází k rezonanci konstrukce, což může vést k celkové destrukci zařízení. Snahou konstruktérů a výpočtářů je dosáhnout takového stavu, aby byl stroj provozován s dostatečnou rezervou od kritických otáček.

Opomenutí nebo neznalost podstatných veličin, které přímo i nepřímo ovlivňují fungování stroje, může způsobit značné podhodnocení výsledků, kdy rezonanční stav konstrukce nastane při nižších otáčkách než se původně očekávalo. Z těchto důvodů se často provádějí různé analýzy a studie, které zjišťují vlivy konkrétních parametrů na kritické otáčky.

Nejznámějším točivým komponentem stroje ve strojírenském průmyslu je rotor. Pod tímto pojmem si lze představit otáčející se součást, která bývá uložena na hřídeli u různých strojů především ve formě generátorů a motorů [1]. Z konstrukčního hlediska se u některých elektrických strojů používají rotory, které jsou složeny z rotorových plechů staženými závitovými tyčemi nebo izolovanými pryskyřicí, popřípadě lepenými a jako celek tvoří rotorový paket.

Hlavní výhodou těchto paketů je výrazné snížení ztrát, které způsobují vířivé proudy, které mají negativní vliv na účinnost motoru. V případě použití rotorových paketů dochází k přerozdělení vířivých proudů v jednotlivých vrstvách do menších smyček, když celkový součet těchto proudů je mnohonásobně menší než u rotoru v celku [1]. Velikost vířivých proudů výrazně ovlivňuje tloušťka použitých plechů, protože ztráty rostou s kvadrátem tloušťky.

Největší problém u rotorových paketů nastává při určování materiálových charakteristik, především se jedná o ekvivalentní modul pružnosti v tahu E_{eq} . Tento modul je používán při modelování paketu homogenním izotropním válcem a přímo se podílí na velikosti ohybové tuhosti rotoru a kritických otáček, tudíž jeho hodnota je klíčová při výpočtech. Hodnotu ekvivalentního modulu pružnosti značně ovlivňuje velikost utahovacího momentu matic aplikovaného na závitové tyče stahující plechy. Utahovací moment závisí na velikosti lisovací síly plechů paketu.

Hlavním cílem předkládané diplomové práce je stanovit ekvivalentní moduly pružnosti pro rozdílné hodnoty lisovacích sil a na základě těchto modulů vypočítat kritické otáčky rotoru. Studie vlivu lisovací síly na hodnotě ekvivalentního modulu pružnosti může objevit nové závislosti na kritických otáčkách a najít vhodné metody k stanovení ekvivalentního modulu pružnosti.

2 Problémová situace

Problémovou situací je označována nestandardní situace, která vyžaduje k řešení použít informační, tvůrčí a rozhodovací činnosti. [2]

V této kapitole je popsán proces řešení problémové situace v souladu se systémovým pojetím, kterým se podrobně zabývá literatura [2] a zároveň se v ní čtenář seznámí se základními informacemi o zobecněné teorii systémů.

2.1 Popis problémové situace

Stanovení kritických otáček rotorů elektrických strojů patří v dnešní době mezi aktuální problematiku mnoha strojírenských firem vyrábějící točivé stroje. K snížení tepelných ztrát, které způsobují vířivé proudy, lze použít z konstrukčního hlediska tzv. rotorové pakety. Ty jsou složeny z plechů stažených závitovými tyčemi, které se jako celek lisují na hřídel.

Problém nastává při výpočtovém modelování, kdy je rotorový paket většinou nahrazen hmotnými body. Tento přístup nezohledňuje ohybovou tuhost paketu, proto by vypočítaná hodnota kritických otáček stroje byla nižší než skutečná. Vhodnější způsob je nahradit paket válcem s homogenním izotropním modelem materiálu s ekvivalentním modulem pružnosti. Protože velikost ekvivalentního modulu pružnosti závisí na hodnotě lisovací síly plechů paketu, bude její velikost přímo ovlivňovat hodnotu kritických otáček.

Analýza vlivu lisovací síly plechů rotorového paketu (obr. 2.1) pro rozdílné hodnoty ekvivalentních modulů pružnosti může podhalit nové závislosti s velikostí kritických otáček a stanovit optimální metodu k určování ekvivalentního modulu pružnosti.



Obrázek 2.1: Rotorový paket

2.2 Formulace problému

Výpočet kritických otáček rotorového paketu pro rozdílné hodnoty lisovacích sil, který zahrnuje ohybovou tuhost paketu.

2.3 Cíle řešení problému

Aplikací vhodných experimentálních zkoušek určit hodnoty ohybové tuhosti rotorového paketu pro odlišné lisovací síly. Pro tyto hodnoty vypočítat různými metodami ekviva-

lentní modul pružnosti a kritické otáčky rotoru nalisovaného na hřídeli.

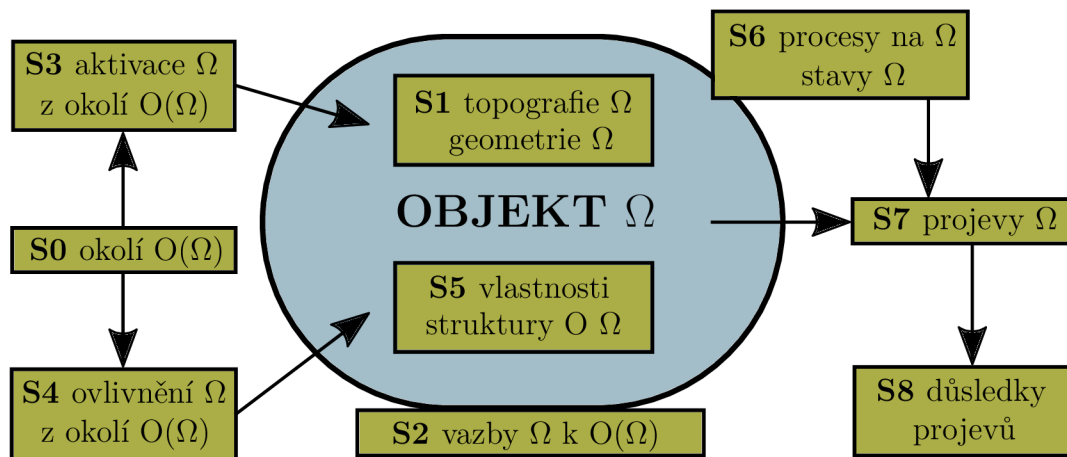
Pro řešení daného problému lze formulovat dílčí cíle následovně:

1. Rešeršní studie současných přístupů k modelování rotorového paketu v dynamických výpočtech.
2. Pomocí experimentální zkoušky čtyřbodovým ohybem stanovit ohybové tuhosti rotorového paketu pro různé velikosti lisovací síly.
3. Pomocí experimentální modální analýzy stanovit vlastní frekvence a vlastní tvary rotorového paketu.
4. Z naměřených dat použitých experimentálních zkoušek vypočítat různými metodami ekvivalentní moduly pružnosti pro různé velikosti lisovací síly.
5. Z vypočítaných hodnot ekvivalentního modulu pružnosti stanovit kritické otáčky rotoru.

2.4 Systém podstatných veličin

Pod pojmem systém podstatných veličin $\Sigma(\Omega)$ na objektu se rozumí množina všech podstatných charakteristik entity, která souvisí s řešením problému na dané rozlišovací úrovni [2]. Existence tohoto systému je podmíněna vždy ve vztahu ke konkrétnímu objektu Ω , proto systém podstatných veličin nemůže existovat sám o sobě. Na tento systém lze pohlížet jako na abstraktní systémový objekt, na který se aplikuje systémový přístup. Smyslem procesu vytváření systému podstatných veličin $\Sigma(\Omega)$ je hledání optimální volby metody řešení uvažovaného problému.

Struktura systému podstatných veličin (obr. 2.2) je rozdělena do 9 podmnožin S0 až S8. Jak uvádí odborná literatura [2], všechny děje probíhající na systému podstatných veličin mají příčinný charakter. Každý objekt se charakterizuje svojí geometrií (má konkrétní tvar), která v okolí zaujímá určitou polohu (topologii). Objekt je s okolím svázán vazbami, které ho ovlivňují a aktivují. To má za následek vyvolání procesů, které mění jeho stavy. Vzniklé projevy objektu do okolí vyvolávají určité důsledky.



Obrázek 2.2: Podmnožiny systému podstatných veličin. Předloha z [2, s. 60-A]

2.4.1 Aplikace systému podstatných veličin

Podmnožina S0 – okolí objektu $O(\Omega)$:

- Prázdná množina $\rightarrow S0 = \emptyset$ – veličiny popisující okolí objektu nejsou definovány pro daný typ problému

Podmnožina S1 – geometrie a topologie objektu Ω :

- Tvar a rozměry zadaného rotorového paketu
- Geometrie stahovacích desek

Geometrie objektu je dána výkresovou dokumentací výrobce TES Vsetín s.r.o., která není součástí této diplomové práce. Pouze jsou převzaty patřičné rozměry paketu a stahovacích desek (obr. 2.3).

Podmnožina S2 – podstatné vazby objektu Ω v okolí $O(\Omega)$:

- Závitové tyče, které spojují stahovací desky s rotorovými plechy
- Hřídel, na kterém je nalisován rotorový paket
- Ložiska, ve kterých je uložena hřídel

Hřídel je modelována jako tzv. pružný rotor, který zohledňuje ohybovou tuhost [3]. Ložiska jsou modelována jako dokonale tuhé vazby.

Podmnožina S3 – aktivace objektu Ω z okolí $O(\Omega)$:

- Hlavní pohyb rotoru – rotace
- Síly silové soustavy působící na rotorový paket

Rotačního pohybu se docílí aplikací úhlové rychlosti na objekt nebo předepsáním otáček rotoru.

Podmnožina S4 – ovlivňování objektu Ω z okolí $O(\Omega)$:

- Uložení rotorových plechů
- Utahovací moment na závitových tyčích

Silová soustava ovlivňuje uložení jednotlivých rotorových plechů. Použitý utahovací moment značně ovlivňuje ohybovou tuhost a otáčky objektu.

Podmnožina S5 – vlastnosti prvků struktury objektu Ω :

- Smluvní mez pevnosti v tahu $R_{p0,02}$
- Youngův modul pružnosti v tahu E

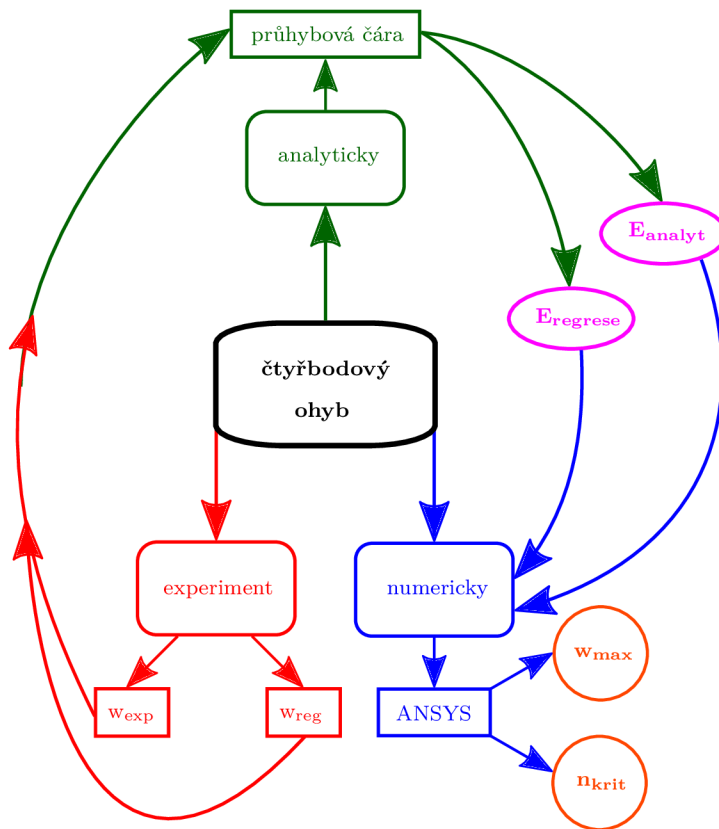
2.5 Volba metody řešení problému

Problémy předkládané diplomové práce jsou řešeny pomocí experimentálního modelování a výpočtového modelování na rotorovém paketu vyrobeném speciálně pro účely testování. Použití experimentálního modelování slouží k získání vstupních údajů pro řešení konkrétního problému [2]. Proto je realizován reálný experiment, kde subjekt provádí experiment na aktivovaném reálném objektu. Na základě vytvořeného systému podstatných veličin je vybrána pro výpočtové modelování nejvhodnější metoda jako metoda konečných prvků (MKP).

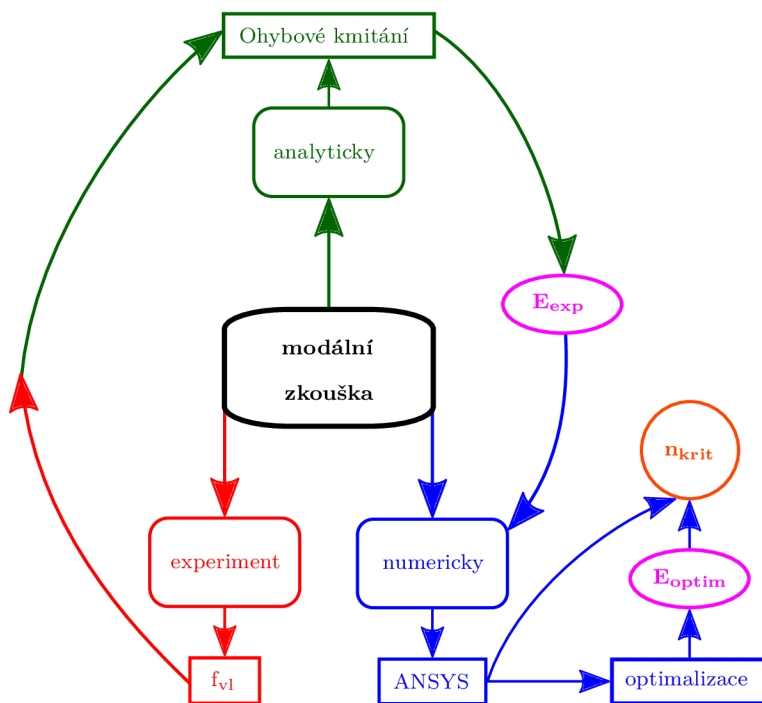
Pro řešení problému jsou sestaveny 2 algoritmy z důvodu lepší názornosti a orientaci v provedených zkouškách při zpracování dat. V prvním algoritmu (obr. 2.4) je znázorněna zkouška čtyřbodovým ohybem, když jsou z experimentálního modelování použita vstupní data do analyticky odvozené rovnice průhybové čáry. Z této rovnice jsou inverzně vypočítány hodnoty ekvivalentních modulů pružnosti. Tato data poslouží jako vstupní údaje do výpočtového modelování, z kterého jsou určeny hodnoty maximálního průhybu a pomocí modální analýzy jsou stanoveny kritické otáčky.

Druhý algoritmus (obr. 2.5) popisuje modální zkoušku, která je v této práci zvolena modální analýza. Experimentální modální analýza (EMA) slouží k určení vlastních tvarů a vlastních frekvencí objektu. Vstupní hodnoty do analytické rovnice ohybového kmitání jsou experimentálně zjištěné vlastní frekvence rotorového paketu, z kterých jsou inverzně stanoveny hodnoty ekvivalentních modulů pružnosti. Tyto hodnoty jsou implementovány jako vstupy do výpočtového modelování, které jsou optimalizovány a následně jsou použity k výpočtu kritických otáček.

Zpracování experimentálních dat je provedeno v programovacím jazyce *Matlab*. Numerické výpočty jsou realizovány v programu *ANSYS Workbench*.



Obrázek 2.4: Algoritmus zkoušky čtyřbodovým ohybem



Obrázek 2.5: Algoritmus modální zkoušky

3 Rešeršní studie

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře se současným stavem poznání problematiky rotorových paketů, a to především v používaných přístupech modelování paketů v dynamických výpočtech.

V technické literatuře se problematice výpočtového modelování rotorového paketu nevěnuje velká pozornost, ale vychází se ze známých a ověřených modelů rotorů. Níže jsou uvedeny základní typy modelů, které mohou být použity pro popis paketu v dynamických výpočtech:

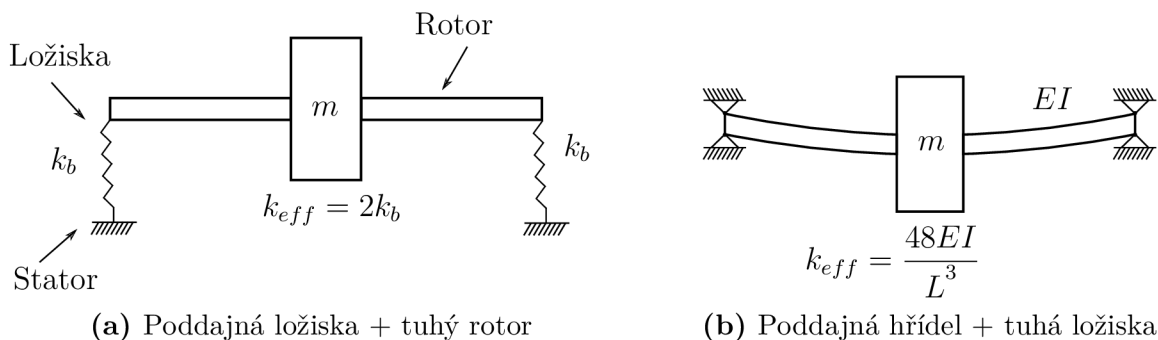
1. Modely rotorů založené na diferenciálním přístupu
 - Model s jedním stupněm volnosti
 - Jeffcottův (Lavalův) rotor
2. Konečnoprvkové modely rotorového paketu s
 - Homogenním izotropním modelem materiálu
 - Transverzálně ortotropním modelem materiálu (kompozit)

Z předchozího členění je patrné, že lze rozdělit modely do dvou kategorií založených na diferenciálním přístupu a metodě konečných prvků.

U každého modelu je posouzena vhodnost použití pro aplikovaný rotorový paket v předkládané diplomové práci.

3.1 Modely rotorů založené na diferenciálním přístupu

Pro tento typ modelů je charakteristické, že se vyznačují malým počtem stupňů volnosti a pro většinu případů existuje analytické řešení. Rotor v těchto modelech bývá uvažován jako hmotný bod, tuhý disk nebo tuhá hřídel. Problematikou rotorových strojů se podrobně zabývá například literatura [3], kde je i výčet dalších modelů, které v předkládané práci nejsou zmíněny nebo podrobně popsány.

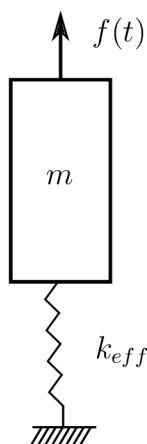


Obrázek 3.1: Model s jedním stupněm volnosti. Předloha z [3, s. 22]

3.1.1 Model s jedním stupněm volnosti

Jedná se o nejjednodušší model rotoru, pomocí něhož lze stanovit kritické otáčky, který může být rozdělen na dvě varianty (obr. 3.1) [3]. V prvním případě (obr. 3.1a) jsou ložiska modelována jako poddajná s tuhostí k_b a rotor, který se skládá z hřídele a disku jako tuhé těleso. V druhé variantě (obr. 3.1b) je hřídel modelována jako poddajná s ohybovou tuhostí EI a ložiska spolu s diskem jako tuhá tělesa. V obou případech je uvažovaná hmotnost rotoru soustředěna do hmotnosti disku m , který je uložen na nehmotné hřídeli.

Obě varianty lze redukovat na jednohmotový model (obr. 3.2) s jedním stupněm volnosti, kterým lze popsat ohybové kmitání, kde k_{eff} je efektivní tuhost ložisek nebo hřídele a $f(t)$ je vnější síla vzniklá od nevyváhy disku.



Obrázek 3.2: Jednohmotový model s jedním stupněm volnosti. Předloha z [3, s. 22]

Odvození pohybových rovnic pro kmitání, výpočet vnější síly $f(t)$ nebo modifikovaný model s jedním stupněm volnosti, ve kterém je uvažováno tlumení, lze nalézt v technické literatuře [3].

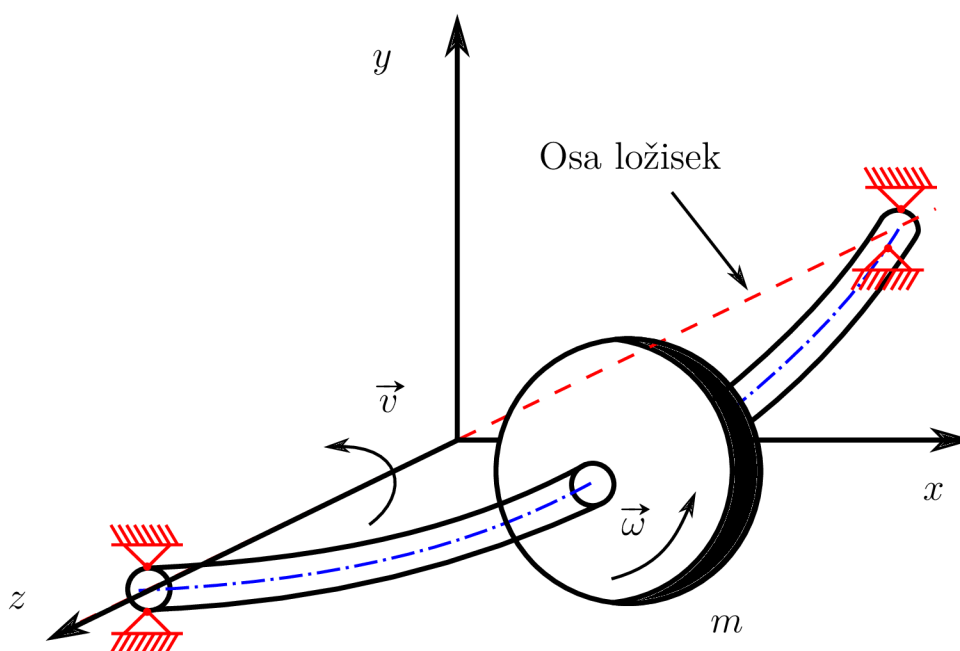
Model s jedním stupněm volnosti a jeho modifikace nejsou vhodné použít k modelování rotorového paketu v této diplomové práci, protože žádná z nich nezohledňuje ohybovou tuhost rotoru, ale pouze hřídele. Nezahrnutí ohybové tuhosti paketu ve výpočtech negativně ovlivňuje velikost kritických otáček stroje.

3.1.2 Jeffcottův (Lavalův) rotor

Ve Spojených státech amerických se standardně používá označení Jeffcottův rotor [4], zatímco v evropských zemích naopak Lavalův rotor, přičemž se jedná o identický model rotoru. Za zmínku stojí, že Jeffcott použil ve své vědecké práci označení Lavalův rotor v roce 1919 [5], ale v pozdějších publikacích se začal hojně používat termín Jeffcottův rotor.

Tento model rotoru (obr. 3.3) je složen z nehmotné poddajné hřídele se stejnou ohybovou tuhostí jako u modelu s jedním stupněm volnosti (viz kapitola 3.1.1) [4]. Dále pak z hmotného a tuhého disku, který je uložen symetricky mezi ložisky, která jsou nepoddajná. Střed disku je excentricky posunut o vzdálenost e oproti osy hřídele. Hřídel se otáčí úhlovou rychlostí ω a vytváří kruhový (eliptický) orbit. Za předpokladu, že se disk otáčí konstantní úhlovou rychlostí, lze redukovat model na dva stupně volnosti k popisu ohybového kmitání.

Protože Jeffcottův rotor nezohledňuje ohybovou tuhost disku podobně jako model s jedním stupněm volnosti, není v této práci použit k modelování rotorového paketu. Nicméně pomocí tohoto modelu lze demonstrovat různé dynamické jevy, jako je anizotropní¹ uložení ložisek nebo nesymetrické uložení disku, které způsobují gyroskopické účinky. Tyto účinky zapříčiňují rozdělení kritických otáček v navzájem kolmých rovinách. Všechny modifikace Jeffcottova (Lavalova) rotoru s detailním odvození pohybových rovnic jsou dostupné v literaturách [4] a [3].



Obrázek 3.3: Jeffcottův (Lavalův) rotor. Předloha z [3, s. 39]

3.2 Konečnoprvkové modely rotorového paketu

Jak plyne z názvu kapitoly, tyto modely jsou založeny na metodě konečných prvků, která vychází z variačního přístupu. Základní principy této metody jsou popsány např. v [6], kde jsou taktéž řešeny fundamentální úlohy konkrétní variační metodou.

Při modelování rotorových paketů je důležité rozlišovat, zda se jedná o paket, který má plechy izolované v pryskyřici, popřípadě v jiné látce, nebo paket bez izolace. Z těchto důvodů lze rozdělit modely materiálu v konečnoprvkovém programu na homogenní izotropní pro variantu bez izolace a transverzálně ortotropní v případě s izolací.

Výše zmíněné způsoby modelování paketů jsou pouze jednou z možností, jak přistupovat k problematice rotorových paketů v dynamických výpočtech metodou konečných prvků. V poslední době se začíná věnovat této problematice větší pozornost (viz publikace [7] a [8]) a zůstává pouze na řešiteli, jakým způsobem a na jaké rozlišovací úrovni se rozhodne modelovat příslušný paket.

¹Jestliže tuhost ložisek v horizontálním a vertikálním směru je rozdílná, hovoří se o tzv. anizotropním uložení. [3]

3.2.1 Homogenní izotropní model materiálu

Paket je modelován jako válec s homogenním izotropním modelem materiálu s ekvivalentní hustotou a ekvivalentním modulem pružnosti v tahu. Tento modul lze stanovit kombinací různých experimentálních zkoušek, které jsou doplněny příslušnou analytickou teorií. Níže jsou vypsané typy zkoušek, které jsou použity v této diplomové práci:

1. Experimentální zkouška čtyřbodovým ohybem – Čtyřbodový ohyb prutového² tělesa
2. Experimentální modální analýza – Ohybové kmitání volného nosníku

Modelování paketu jako homogenního celku místo jednotlivých plechů vede k značnému snížení stupňů volnosti a výpočetního času, přestože je model materiálu definován pouze dvěma elastickými konstantami, zahrnuje ve výpočtu ohybovou tuhost paketu.

Analyzovaný paket v předkládané práci neobsahuje vinutí a plechy jsou stažené závitovými tyčemi, tudíž se jedná o variantu bez izolace, a proto bude použit v konečnoprvkovém programu homogenní izotropní model materiálu.

3.2.2 Transverzálně ortotropní model materiálu

Paket je uvažován jako jednosměrný kompozit, který se skládá z matrice a výztuže [10], kde každá vrstva kompozitu (tzv. lamina) je modelována ortotropním modelem materiálu. Obecný ortotropní materiál je definován pomocí tří hlavních ortotropních os 1, 2, a 3, které jsou navzájem ortogonální [11]. Jestliže existuje jedna hlavní ortotropní rovina, ve které jsou mechanické vlastnosti izotropní, jedná se o transversálně ortotropní model materiálu.

Tyto vlastnosti jsou splněny u jednosměrného dlouhovláknového kompozitu, za který lze považovat rotorový paket s izolací nebo statorový paket složený z plechů, které jsou slisovány s pryskyřicí, použitý ve vědeckém článku [8]. Při výpočtu materiálových charakteristik kompozitu se vychází z klasické laminační teorie, která je detailně popsána v literatuře [10], ale v této práci není rozebrána.

Výhodou tohoto modelu je, že není potřeba experimentální zkouška k zjišťování ekvivalentního modulu pružnosti, ale vystačí se s klasickou laminační teorií. Při modelování jednotlivých vrstev kompozitu se mnohonásobně zvýší počet stupňů volnosti a výpočetní čas konečnoprvkového modelu, což lze považovat za hlavní nevýhodu tohoto modelování.

²Válcové těleso nemůže být použito z toho důvodu, že by nebyly splněny předpoklady o zatížení [9], které musí být válcového charakteru.

4 Teoretický základ

V této kapitole je vypočítán osový kvadratický moment stahovací desky rotorového paketu, který je aplikován v odvozených rovnicích čtyřbodového ohybu a ohybového kmitání prutu. Tyto rovnice slouží k stanovení ekvivalentních modulů pružnosti při experimentálně zjištěných vstupů.

4.1 Výpočet osového kvadratického momentu rotoru

Kvadratické momenty patří do skupiny geometrických charakteristik, které popisují příčný průřez. Významně ovlivňují napětí a deformace v ohybu [12]. Obecný vztah odpovídá tvaru

$$J_y = \int_{\psi} z^2 dS, \quad [\text{mm}^4] \quad (4.1)$$

kde z je kolmá souřadnice k ose y a dS element plochy příčného průřezu na oblasti ψ .

V dnešní době dokáže většina CAD a FEM programů vypočítat kvadratické momenty libovolných geometrických tvarů. Rozhodně by se nemělo zapomínat na analytické řešení, kdy je zkoumaná geometrie rozdělena na primitivní útvary jako trojúhelník, obdelník nebo kruh atd. Výsledné kvadratické momenty jsou získány superpozicí dílčích momentů. Jakou metodu se rozhodne zvolit řešitel, je jenom na něm a jeho možnostech.

Pro ilustraci obou metod je proveden výpočet osového kvadratického momentu rotorového paketu.

4.1.1 Analytické řešení kvadratického momentu

Příčný průřez (obr. 4.1) stahovací desky je rozdělen na 3 geometrické útvary:

1. 2x trojúhelník
2. 2x kruhová výseč
3. 4x díra ϕd a 1x díra ϕD

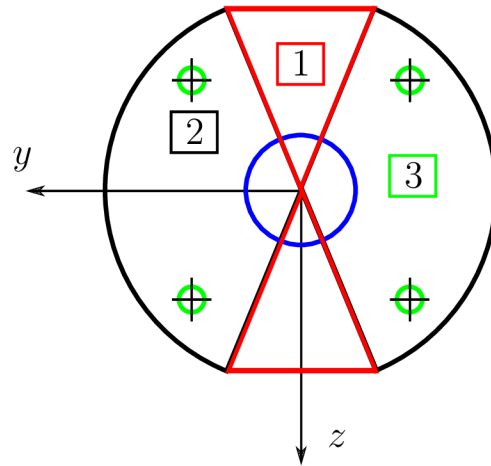
Jednotlivé kvadratické momenty jsou počítány k posunutým osám (obr. 4.1) y a z aplikací Steinerovy věty [12]

$$J_y = J_{yT} + b^2 S, \quad [\text{mm}^4] \quad (4.2)$$

kde J_{yT} ³ je kvadratický moment základního útvaru k těžišti, b ⁴ kolmá vzdálenost k ose y a S plocha základního útvaru.

³Kvadratické momenty základních tvarů průřezů nejsou odvozeny, ale jsou převzaty z literatury [13], kde jsou detailně popsány a vysvětleny. Konkrétně se jedná o trojúhelník a kruh.

⁴Protože vzdálenost b roste s druhou mocninou, bude posunutý kvadratický moment vždycky nabývat vyšších hodnot než centrální. [12]

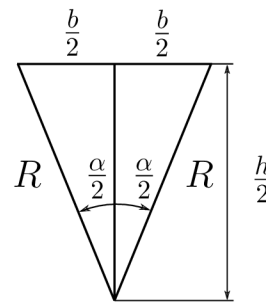


Obrázek 4.1: Příčný průřez stahovací desky rozdělen na jednotlivé části

Trojúhelníky

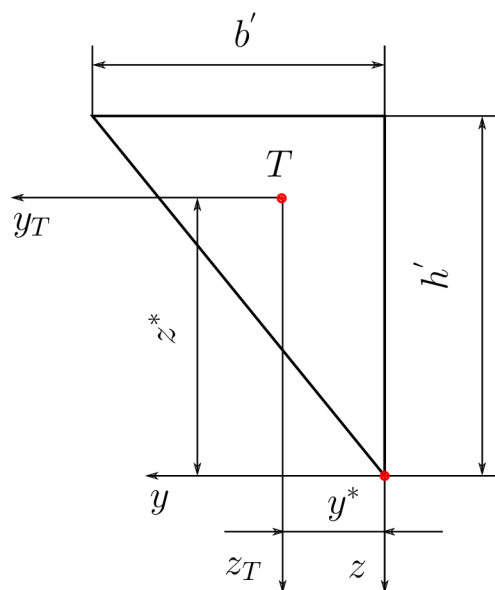
Z obr. 4.2 je patrné, že se jedná o rovnoramenný trojúhelník. Před samostatným výpočtem kvadratického momentu je spočítána základna b užitím Pythagorovy věty

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} &= \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} \\ \frac{b}{2} &= \sqrt{55^2 + \left(\frac{105}{2}\right)^2} \\ \frac{b}{2} &= 16,4 \text{ mm} \Rightarrow b = 32,8 \text{ mm.} \end{aligned} \quad (4.3)$$



Obrázek 4.2: Detail trojúhelníku

Pro jednoduchost je dále počítáno pouze s polovinou trojúhelníku – viz obr. 4.3



Obrázek 4.3: Výpočet J_y trojúhelníku k posunutým osám

kde

$$\begin{aligned} b' &= \frac{b}{2} & y^* &= \frac{1}{3}b', \\ h' &= \frac{h}{2} & z^* &= -\frac{2}{3}h'. \end{aligned}$$

Dosazením do Steinerovy věty (4.2) vyjde J_y jednoho pravoúhlého trojúhelníku jako

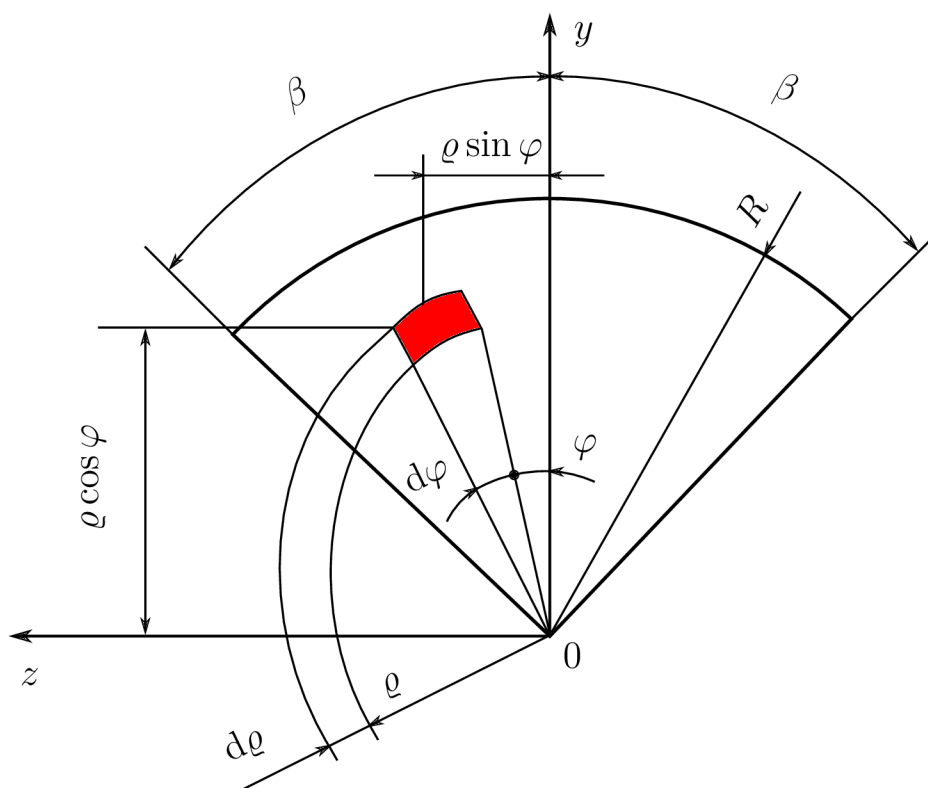
$$\begin{aligned} J_y^{\textcircled{1}} &= \overbrace{\frac{b'h'^3}{36}}^{J_{yT}} + \overbrace{\left(-\frac{2}{3}h'\right)^2}^{b^2} \overbrace{\frac{b'h'}{2}}^S \\ J_y^{\textcircled{1}} &= \frac{b'h'^3}{36} + \frac{2b'h'^3}{9} = \frac{b'h'^3 + 8b'h'^3}{36} = \frac{b'h'^3}{4}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

a celkový kvadratický moment prvního útvaru je vypočítán sumací jednotlivých příspěvků

$$J_{y\Delta}^{\textcircled{1}} = 4J_y^{\textcircled{1}} = 4 \frac{b'h'^3}{4} = b'h'^3 = 16,4 \cdot 52,5^3 \doteq 2\,372\,204,6 \text{ mm}^4. \quad (4.5)$$

Kruhové výseče

Výpočet kvadratického momentu setrvačnosti je proveden v pootočeném kartézském systému $y - z$ o 90° (obr. 4.4) aplikací polárních souřadnic ϱ a φ .



Obrázek 4.4: Výpočet J_y kruhové výseče k natočeným osám. Předloha z [14, s. 12]

Pro kruhovou výseč je odvozen základní vztah pro kvadratický moment J_y vytknutím elementárního prvku a dosazením do definičního vztahu (4.1) v integrální podobě

$$\begin{aligned}
 J_y^{\textcircled{2}} &= \overbrace{2}^{2 \times \nabla} \int_0^\beta \int_0^R \overbrace{(\varrho \sin \varphi)^2}^{z^2} \overbrace{d\varphi d\varrho}^{dS} = 2 \int_0^\beta \int_0^R \varrho^3 d\varrho \sin^2 \varphi d\varphi = 2 \overbrace{\int_0^R \varrho^3 d\varrho}^{I_1} \overbrace{\int_0^\beta \sin^2 \varphi d\varphi}^{I_2} \\
 I_1 &= \int_0^R \varrho^3 d\varrho = \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{4} R^4 \\
 I_2 &= \int_0^\beta \sin^2 \varphi d\varphi = \int_0^\beta \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^\beta = \frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} \\
 J_y^{\textcircled{2}} &= 2 I_1 I_2 = 2 \frac{1}{4} R^4 \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} \right) = \frac{R^4}{4} \left(\beta - \frac{\sin 2\beta}{2} \right), \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

kde

$$\beta^\circ = 90^\circ - \frac{\alpha^\circ}{2} \Rightarrow \frac{\alpha^\circ}{2} = \arccos\left(\frac{h'}{R}\right) = \arccos\left(\frac{52,5}{55}\right) \Rightarrow \frac{\alpha^\circ}{2} \doteq 17^\circ 20' \quad \text{viz (obr. 4.2)}$$

$$\beta^\circ = 90^\circ - 17^\circ 20' \doteq 72^\circ 40'$$

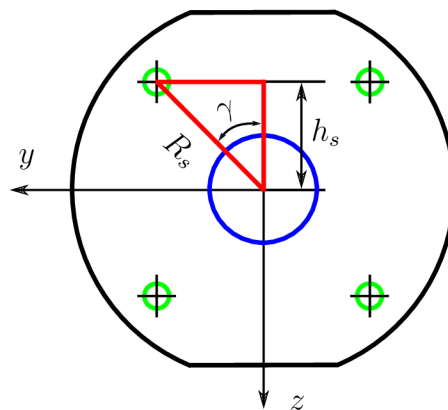
$$\hat{\beta} = \frac{\beta^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{72^\circ 40' \pi}{180^\circ} \approx 1,27 \text{ rad.}$$

Celkový kvadratický moment druhého útvaru je vypočítán podobně jako u předchozího, tedy sumací jednotlivých příspěvků

$$J_{y\nabla}^{\textcircled{2}} = 2 J_y^{\textcircled{2}} = 2 \frac{R^4}{4} \left(\beta - \frac{\sin 2\beta}{2} \right) = \frac{55^4}{4} \left(1,27 - \frac{\sin(2 \cdot 1,27)}{2} \right) \doteq 4\,500\,341,9 \text{ mm}^4. \tag{4.7}$$

Díry

Předešlé výpočty kvadratických momentů jsou k posunutým osám y a z . Malé díry s průměrem ϕd jsou taktéž spočítány k posunutým osám (obr. 4.5), zatímco velká díra s průměrem ϕD leží v těžišti těchto os.



Obrázek 4.5: Výpočet J_y malých děr ϕd k natočeným osám

K výpočtu J_y jedné díry je zapotřebí stanovit výšku h_s zvýrazněného trojúhelníka na obr. 4.5, kde úhel γ svírá s poloměrem roztečné kružnice 45°

$$\cos \gamma = \frac{h_s}{R_s} \Rightarrow h_s = R_s \cos \gamma = 45 \cdot \cos(45) \doteq 31,8 \text{ mm.} \quad (4.8)$$

Nejprve jsou vypočítány kvadratické momenty děr pro závitové tyče užitím Steinerovy věty

$$J_y^{\textcircled{3}} = \frac{\overbrace{\pi d^4}^{J_{yT}}}{64} + \overbrace{h_s^2}^b \frac{\overbrace{\pi d^2}^S}{4}$$

$$J_y^{\textcircled{3}} = \frac{\pi d^2}{4} \left(\frac{d^2}{16} + h_s^2 \right) = \frac{\pi 8,5^2}{4} \left(\frac{8,5^2}{16} + 31,8^2 \right) \doteq 57\,710,6 \text{ mm}^4, \quad (4.9)$$

poté kvadratický moment díry, která je určena pro hřídel

$$J_y^{\textcircled{4}} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi 30^4}{64} \doteq 39\,760,8 \text{ mm}^4, \quad (4.10)$$

a na závěr celkový kvadratický moment všech děr

$$J_{y\textcircled{O}}^{\textcircled{3}} = 4J_y^{\textcircled{3}} + J_y^{\textcircled{4}} = 4 \cdot 57\,710,6 + 39\,760,8 \doteq 270\,603,2 \text{ mm}^4. \quad (4.11)$$

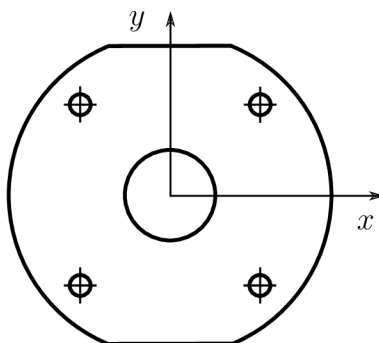
Kvadratický moment stahovací desky

Celkový kvadratický moment příčného průřezu stahovací desky je spočítán jako součet momentů od prvních dvou příspěvků (trojúhelníky a kruhové výseče), od kterých je odečten příspěvek s dírami

$$J_{yAn} = J_{y\Delta}^{\textcircled{1}} + J_{y\triangleright}^{\textcircled{2}} - J_{y\textcircled{O}}^{\textcircled{3}} = 2\,372\,204,6 + 4\,500\,341,9 - 270\,603,2 \doteq \underline{\underline{6\,601\,943,3 \text{ mm}^4}}. \quad (4.12)$$

4.1.2 Numerické řešení kvadratického momentu

K výpočtu kvadratického momentu stahovací desky je použit program *Autocad Mechanical 2017* pomocí příkazu *massprop*. Podmínkou správného určení geometrických charakteristik je, aby těleso (obr. 4.6) bylo jeden celek, s kterým lze dále pracovat.



Obrázek 4.6: Příčný průřez stahovací desky v programu *Autocad Mechanical*

Následující tab. 4.1 ukazuje obdržené geometrické charakteristiky příčného průřezu stahovací desky po použití příkazu *massprop*.

Tabulka 4.1: Geometrické charakteristiky příčného průřezu stahovací desky

Area:		8 459.6821		
Perimeter:		545.6251		
Bounding box:	X:	-106.4289	–	3.5711
	Y:	191.3782	–	296.3782
Centroid:	X:	-51.4289		
	Y:	243.8782		
Moments of inertia:	X:	509 754 804.7372		
	Y:	29 285 632.0631		
Product of inertia:	XY:	106 104 609.8451		
Radii of gyration:	X:	245.4730		
	Y:	58.8370		
Principal moments and	I:	6 601 943.4078	along	[1.0000 0.0000]
X-Y directions about centroid:	J:	6 910 347.9384	along	[0.0000 1.0000]

Hledaná hodnota kvadratického momentu je v ose x podle výchozího souřadného systému v programu *Autocad Mechanical*.

Porovnání analytických a numerických hodnot momentů zobrazuje tab. 4.2.

Tabulka 4.2: Výsledky analytického a numerického řešení kvadratických momentů

Osový kvadratický moment J		
Analyticky [mm ⁴]	Numericky [mm ⁴]	Odchylka [%]
6 601 943,3	6 601 943,4	$1,5 \cdot 10^{-6}$

Porovnání metod

Obě metody prokázaly dobrou shodu výsledků kvadratických momentů (viz tab. 4.2). Při stanovení hodnoty J_y v analytickém řešení je použit programovací jazyk *Matlab R2015a*. Odlišnost s numerickým řešením vznikla v rovnici (4.11) při sumaci děr pro šrouby. Jestliže jsou provedeny všechny matematické operace v jazyku *Matlab*, bude analytické řešení identické s numerickým.

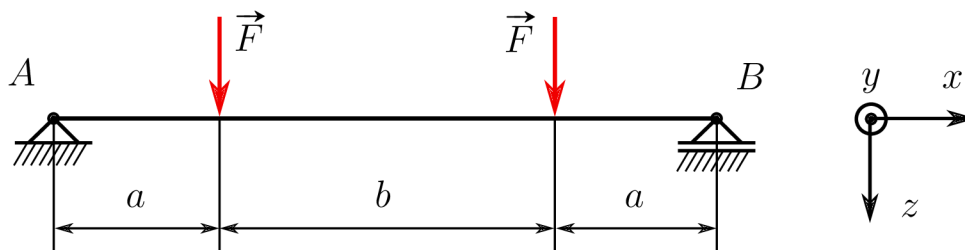
Do tab. 4.3 jsou zapsány hlavní výhody (+) a nevýhody (–) obou metod.

Tabulka 4.3: Výhody a nevýhody metod stanovení kvadratických momentů

	Výhody	Nevýhody
Analyticky	+ Názorná výuková metoda	– Znalost analytické matematiky
	+ Parametrizace modelu	– Časově náročné pro složitou geometrii
Numericky	+ Rychlá a přesná metoda	– Znalost CAD nebo jiného programu
	+ Libovolná geometrie	– Odlišené značení momentů

4.2 Čtyřbodový ohyb

Schéma čtyřbodového ohybu nosníku ukazuje obr. 4.7 s příčným průřezem (obr. 4.1). Pro stanovení průhybu v libovolném bodě střednice je potřeba určit rovnici průhybové čáry. K tomu se použijí výsledné vnitřní účinky (VVÚ).



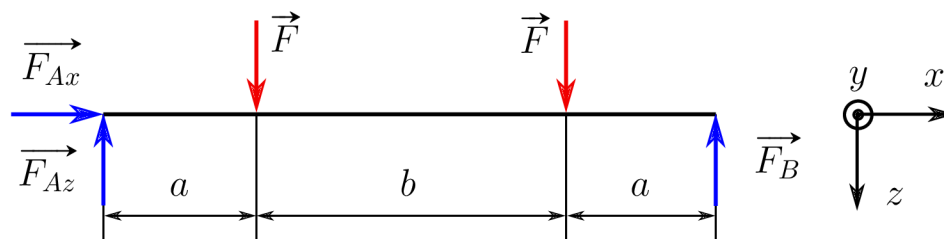
Obrázek 4.7: Čtyřbodový ohyb nosníku

Nejdříve jsou vypočítány velikosti reakčních sil vazeb A a B. Poté je prut rozdělen na tři oblasti kvůli změně zatížení po délce. V každém řezu je stanoven ohybový moment, jehož dosazením do diferenciální rovnice průhybové čáry [12] (4.13) pro malé deformace a postupnou integrací je obdržen průhyb pro daný úsek nosníku.

$$w'' = -\frac{M_{oy}}{EJ_y} \quad (4.13)$$

4.2.1 Uvolnění prutu

Vazba A (rotační vazba) odebírá dva stupně volnosti, zatímco B (podpora) pouze jeden. Uvolněný prut (obr. 4.8) má 3 neznámé parametry: F_{Ax} , F_{Az} , F_B .



Obrázek 4.8: Uvolnění střednice prutu

Na první pohled je patrné, že ve směru osy x nepůsobí žádná vnější síla, tudíž síla F_{Ax} je rovna nule. K výpočtu zbylých sil jsou použity rovnice statické rovnováhy

$$\sum F_z = 0, \quad (4.14)$$

$$\sum M_{yA} = 0, \quad (4.15)$$

po dosazení vyjde systém lineárních rovnic o dvou neznámých parametrech

$$\sum F_z = 0 : F_{Az} - F - F + F_B = 0, \quad (4.16)$$

$$\sum M_{yA} = 0 : Fa + F(a + b) - F_B(2a + b) = 0. \quad (4.17)$$

Z rovnice (4.16) lze vyjádřit sílu F_B , která je následně dosazena do (4.17).

$$F_B = \frac{F(2a + b)}{2a + b} = F \quad (4.18)$$

$$F_{Az} = 2F - F_B = 2F - F = F \quad (4.19)$$

V obou vazbách působí identické síly o velikosti F .

4.2.2 Výsledné vnitřní účinky

Při určování VVÚ diferenciálním nebo integrálním přístupem nezáleží, jestli je řez prutu proveden z levé nebo z pravé strany. Výjimkou je vazba typu vetknutí, kde je nezbytné začít od volného konce. Naopak při sestavení průhybové čáry je zapotřebí zachovat pouze jeden směr. Základní pravidla pro vyšetřování průběhů VVÚ u přímých prutů jsou sepsána v literatuře [13] spolu s algoritmem určování těchto účinků. V této práci je zvolen integrální přístup k určení výsledných vnitřních účinků.

Z uvolněného prutu (obr. 4.8) je zřejmé, že jedinými nenulovými složkami VVÚ jsou posouvající síla T a ohybový moment M_o .

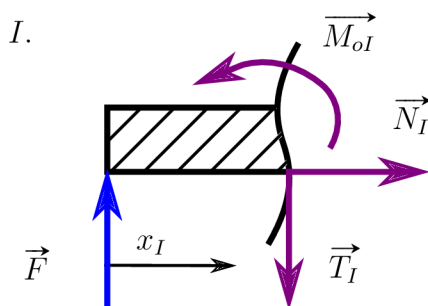
I. řez

Interval hodnot prvního řezu (4.9) je v rozsahu $x_I \in (0, a)$. Posouvající síla a ohybový moment jsou určeny jako

$$T_I = F, \quad (4.20)$$

$$M_{oI} = Fx_I. \quad (4.21)$$

Dosazením ohybového momentu do rovnice průhybové čáry (4.13) a postupným integrováním vyjde hledaný průhyb



Obrázek 4.9: VVÚ I. řezu

$$EJ_y w_I'' = -M_{oI}, \quad (4.22a)$$

$$EJ_y w_I'' = -Fx_I, \quad (4.22b)$$

$$EJ_y w_I' = -F \frac{x_I^2}{2} + C_1, \quad (4.22c)$$

$$EJ_y w_I = -F \frac{x_I^3}{6} + C_1 x_I + C_2. \quad (4.22d)$$

Identicky jsou určeny složky VVÚ zbylých dvou řezů a sestaveny rovnice průhybu.

II. řez

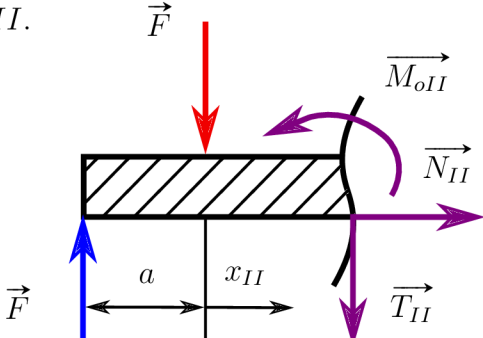
Interval hodnot druhého řezu (4.10) je v rozsahu $x_{II} \in (0, b)$. Posouvající síla a ohybový moment jsou určeny jako

$$T_{II} = F - F = 0, \quad (4.23)$$

$$M_{oII} = F(a + x_{II}) - Fx_{II}, \quad (4.24)$$

po integraci vyjde průhyb ve tvaru

II.



$$EJ_y w''_{II} = -M_{oII}, \quad (4.25a)$$

$$EJ_y w''_{II} = -F(a + x_{II}) + Fx_{II}, \quad (4.25b)$$

$$EJ_y w'_{II} = -Fax_{II} + C_3, \quad (4.25c)$$

$$EJ_y w_{II} = -Fa\frac{x_{II}^2}{3} + C_3x_{II} + C_4. \quad (4.25d)$$

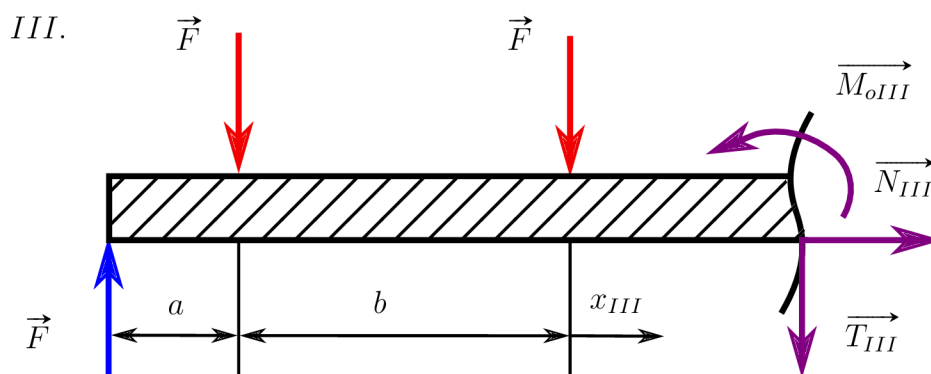
Obrázek 4.10: VVÚ II. řezu

III. řez

Interval hodnot třetího řezu (4.11) je v rozsahu $x_{III} \in (0, a)$. Posouvající síla a ohybový moment jsou určeny jako

$$T_{III} = F - F + F = F, \quad (4.26)$$

$$M_{oIII} = F(a + b + x_{III}) - F(b + x_{III}), \quad (4.27)$$



Obrázek 4.11: VVÚ III. řezu

po dosazení ohybového momentu do rovnice (4.13) a integraci vyjde průhyb ve tvaru

$$EJ_y w''_{III} = -M_{oIII}, \quad (4.28a)$$

$$EJ_y w''_{III} = F(x_{III} - a), \quad (4.28b)$$

$$EJ_y w'_{III} = F\frac{x_{III}^2}{2} - ax_{III} + C_5, \quad (4.28c)$$

$$EJ_y w_{III} = F\left(\frac{x_{III}^3}{6} - a\frac{x_{III}^2}{2}\right) + C_5x_{III} + C_6. \quad (4.28d)$$

4.2.3 Průhybová čára

Pro každý řez jsou stanoveny dvě okrajové podmínky. Celkově je zapsáno 6 okrajových podmínek pro 6 konstant C_1 až C_6 .

K sestavení průhybové čáry jsou použity okrajové podmínky dvojího druhu – vazbové podmínky (4.29a a 4.29b) a podmínky plynoucí z geometrických prutových předpokladů (hladkost střednice (4.29d a 4.29f) a spojitost střednice (4.29c a 4.29e)).

$$\begin{aligned}
 w_I(x_I = 0) &= 0 & (4.29a) & & w_I(x_I = a) &= w_{II}(x_{II} = 0) & (4.29c) \\
 w_{III}(x_{III} = a) &= 0 & (4.29b) & & w'_I(x_I = a) &= w'_{II}(x_{II} = 0) & (4.29d) \\
 & & & & w_{II}(x_{II} = b) &= w_{III}(x_{III} = 0) & (4.29e) \\
 & & & & w'_{II}(x_{II} = b) &= w'_{III}(x_{III} = 0) & (4.29f)
 \end{aligned}$$

Dosazením okrajových podmínek (4.29) do odvozených rovnic průhybu, respektive první derivace (4.22), (4.25) a (4.28) vznikne systém lineárních rovnic o šesti neznámých parametrech.

$$\begin{aligned}
 & \boxed{C_2 = 0} & (4.30a) \\
 F\left(\frac{a^3}{6} - a\frac{a^2}{2}\right) + C_5a + C_6 = 0 & \implies \boxed{C_6 + C_5a = \frac{a^3}{3}F} & (4.30b) \\
 -F\frac{a^2}{2} + C_1 = C_3 & \implies \boxed{C_3 - C_1 = -F\frac{a^2}{2}} & (4.30c) \\
 -Fab + C_3 = C_5 & \implies \boxed{C_3 - C_5 = Fab} & (4.30d) \\
 -F\frac{a^3}{6} + C_1a = C_4 & \implies \boxed{C_1a - C_4 = F\frac{a^3}{6}} & (4.30e) \\
 -Fa\frac{b^2}{2} + C_3b + C_4 = C_6 & \implies \boxed{C_4 + C_3b - C_6 = Fa\frac{b^2}{2}} & (4.30f)
 \end{aligned}$$

Protože se ve všech okrajových podmínkách vyskytuje nulová pravá strana nebo je rovna další okrajové podmínce, konstanty E a J_y se neobjeví v řešení.

K výpočtu konstant (4.31) je použit program *Maple 17*.

$$C_1 = \frac{1}{2}Fa^2 + \frac{1}{2}Fab \quad (4.31a)$$

$$C_2 = 0 \quad (4.31b)$$

$$C_3 = \frac{1}{2}Fab \quad (4.31c)$$

$$C_4 = \frac{1}{3}Fa^3 + \frac{1}{2}Fa^2b \quad (4.31d)$$

$$C_5 = -\frac{1}{2}Fab \quad (4.31e)$$

$$C_6 = \frac{1}{3}Fa^3 + \frac{1}{2}Fa^2b \quad (4.31f)$$

Výsledné rovnice průhybu pro jednotlivé intervaly vypadají v následujícím tvaru

$$EJ_y w_I = -F \frac{x_I^3}{6} + \left(\frac{1}{2} F a^2 + \frac{1}{2} F a b \right) x_I, \quad x_I \in (0, a) \quad (4.32)$$

$$EJ_y w_{II} = -F a \frac{x_{II}^2}{2} + \frac{1}{2} F a b x_{II} + \frac{1}{3} F a^3 + \frac{1}{2} F a^2 b, \quad x_{II} \in (0, b) \quad (4.33)$$

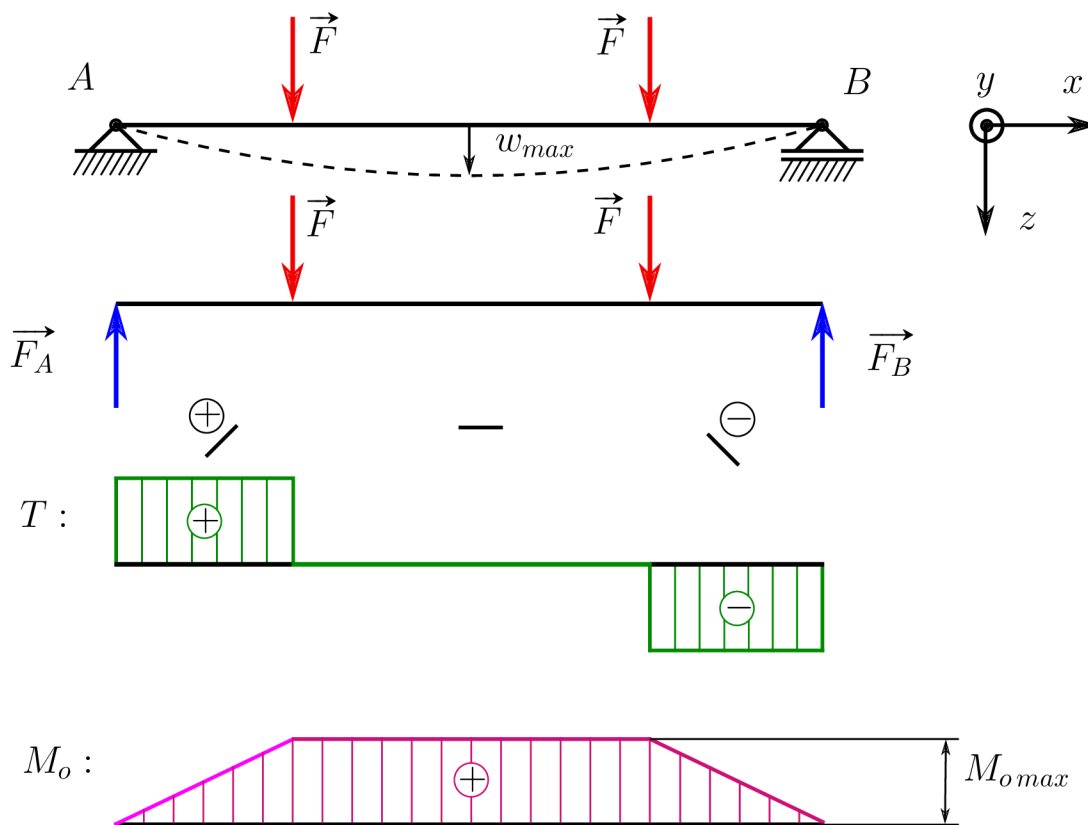
$$EJ_y w_{III} = F \left(\frac{x_{III}^3}{6} - a \frac{x_{III}^2}{2} \right) - \frac{1}{2} F a b x_{III} + \frac{1}{3} F a^3 + \frac{1}{2} F a^2 b, \quad x_{III} \in (0, a) \quad (4.34)$$

kde maximální průhyb w_{max} leží v druhém intervalu ve vzdálenosti $x_{II} = \frac{b}{2}$

$$w_{II}(x_{II} = \frac{b}{2}) = \frac{1}{EJ_y} \left(-F a \frac{b^2}{8} + \frac{1}{2} F a b \frac{b}{2} + \frac{1}{3} F a^3 + \frac{1}{2} F a^2 b \right)$$

$$w_{II}(x_{II} = \frac{b}{2}) = \frac{1}{EJ_y} \left(\frac{1}{8} F a b^2 + \frac{1}{3} F a^3 + \frac{1}{2} F a^2 b \right). \quad (4.35)$$

Průběhy VVÚ nenulových složek s průhybovou čarou jsou vykresleny do obr. 4.12.



Obrázek 4.12: Průběhy VVÚ nosníku s deformovaným tvarem střednice

Ke stejným výsledkům průběhů T a M_o by se došlo aplikací Schwendlerovy věty [12] (4.36), která je založena na diferenciálním přístupu určování VVÚ

$$\frac{dM_o(x)}{dx} = T(x). \quad (4.36)$$

4.3 Ohybové kmitání

Pro popis ohybového kmitání prutů existuje v technické literatuře řada teorií. Bernoulliho-Eulerova teorie [15] efektivně popisuje ohybové kmitání prímých nosníků pro lineárně elastický materiál (tzv. Hookeův), proto bude použita v této práci.

Tato teorie musí bezpodmínečně splňovat následující předpoklady, které jsou převzaty z literatur [15] a [16]:

- Prímý nosník, respektive štíhlý nosník zvolna se měnícího průřezu
- Osový moment setrvačnosti je malý, a proto rotační setrvačnost uvolněného elementu není podstatná z hlediska řešení daného problému
- Nosník kmitá v jedné rovině hlavní osy setrvačnosti
- Úhlová přetvoření od posouvajících sil⁵ jsou nepodstatná z hlediska řešení daného problému na zvolené úrovni řešení
- Příčné průřezy zůstávají po deformacích kolmé na střednici

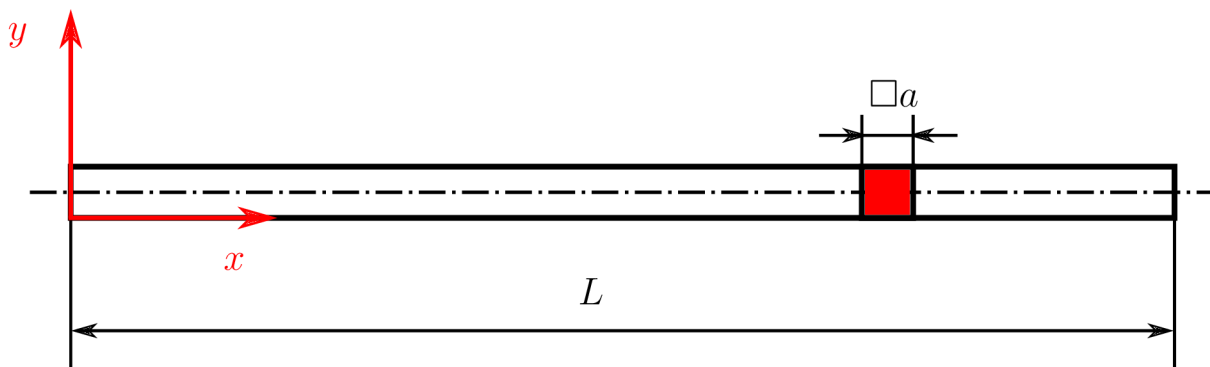
Detailní odvození pohybových rovnic ohybového kmitání nosníku je v příloze A.

4.3.1 Volné kmitání nosníku

Každé hmotné těleso může konat kmitavý pohyb [18]. Jestliže je tento pohyb udržován bez vnějšího zatížení, jedná se o volné kmitání, které se dále dělí na tlumené nebo netlumené.

Výše zmíněna Bernoulliho-Eulerova teorie prutů nezahrnuje v řešení tlumení. Tlumení se projevuje disipací mechanické energie, která je obvykle přeměňována na teplo [18]. V současné době neexistuje sofistikovaná metoda k určení tlumení, ale používají se pouze odhady tlumení z experimentálních dat např. z šířky rezonančního pásma – více v [18].

Analyzovaný nosník (obr. 4.13) je uložen bez použití jakýkoliv vazeb, takový nosník se nazývá volný.



Obrázek 4.13: Uložení nosníku pro ohybové kmitání

⁵Vliv posouvajících sil v modelu zahrnuje Timošenkova teorie prutů [17].

Okrajové podmínky

Protože nejsou předepsané hlavní neboli geometrické okrajové podmínky (natočení a průhyb), které by byly získány z konkrétního typu použitých vazeb nosníku, jsou využity přirozené okrajové podmínky (posouvající síla a ohybový moment). Tyto podmínky vycházejí z variačního principu

$$x = 0 \qquad \qquad \qquad x = L$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = 0 \qquad (4.37a) \qquad \qquad \qquad \frac{d^2w}{dx^2} = 0, \qquad (4.37c)$$

$$\frac{d^3w}{dx^3} = 0 \qquad (4.37b) \qquad \qquad \qquad \frac{d^3w}{dx^3} = 0, \qquad (4.37d)$$

kde druhá derivace průhybu představuje ohybový moment a třetí derivace posouvající sílu.

Dosazením okrajových podmínek (4.37) do řešení tvaru kmitu (A.17) vyjde soustava rovnic

$$x = 0$$

$$0 = \beta^2[C_1U(0) + C_2V(0) + C_3S(0) + C_4T(0)], \qquad (4.38a)$$

$$0 = \beta^3[C_1T(0) + C_2U(0) + C_3V(0) + C_4S(0)], \qquad (4.38b)$$

$$x = L$$

$$0 = \beta^2[C_1U(\beta L) + C_2V(\beta L) + C_3S(\beta L) + C_4T(\beta L)], \qquad (4.38c)$$

$$0 = \beta^3[C_1T(\beta L) + C_2U(\beta L) + C_3V(\beta L) + C_4S(\beta L)], \qquad (4.38d)$$

z které je po úpravách obdržena frekvenční rovnice volného nosníku.

Některé z Krylovových funkcí (viz příloha A) nabývají nenulových hodnot při nulovém argumentu. U takových funkcí musí být proto nulová konstanta. Všechny Krylovovy funkce jsou tvořeny z hyperbolických a goniometrických funkcí. Základní hyperbolické funkce lze přepsat do následujících podob

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}.$$

Po dosazení do jednotlivých Krylovových funkcí vyjde

$$S(0) = \frac{1}{2}(\cosh(0) + \cos(0)) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^0 + 1}{2e^0} + \cos(0)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + 1}{2 \cdot 1} + 1\right) = 1,$$

$$T(0) = \frac{1}{2}(\sinh(0) + \sin(0)) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^0 - 1}{2e^0} + \sin(0)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - 1}{2 \cdot 1} + 0\right) = 0,$$

$$U(0) = \frac{1}{2}(\cosh(0) - \cos(0)) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^0 + 1}{2e^0} - \cos(0)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + 1}{2 \cdot 1} - 1\right) = 0,$$

$$V(0) = \frac{1}{2}(\sinh(0) - \sin(0)) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^0 - 1}{2e^0} - \sin(0)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - 1}{2 \cdot 1} - 0\right) = 0,$$

jediná nenulová funkce $S(0)$, proto budou konstanty C_3 a C_4 nulové.

Na konci nosníku ve vzdálenosti $x = L$ jsou redukovány rovnice (4.37c) a (4.37d) na soustavu rovnic o dvou neznámých parametrech

$$0 = [C_1 U(\beta L) + C_2 V(\beta L)], \quad (4.39)$$

$$0 = [C_1 T(\beta L) + C_2 U(\beta L)], \quad (4.40)$$

kterou lze přepsat do maticové podoby

$$\begin{bmatrix} U(\beta L) & V(\beta L) \\ T(\beta L) & U(\beta L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

zjednodušeně jako

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (4.42)$$

Řešení

Konstanty C_1 a C_2 vyjdou nulové v případě triviálního řešení, kdy vektor neznámých \mathbf{x} odpovídá nulovému vektoru \mathbf{o} . Netriviální řešení soustavy (4.42) nastane tehdy, jestliže je determinant matice \mathbf{A} roven nule

$$\det \mathbf{A} = 0 \implies [U^2(\beta L) - V(\beta L)T(\beta L)] = 0, \quad (4.43)$$

po dosazení a matematických úpravách vyjde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\underbrace{\left(\cosh(\beta L) - \cos(\beta L) \right)^2}_{(A-B)^2} - \overbrace{\left(\sinh(\beta L) - \sin(\beta L) \right) \left(\sinh(\beta L) + \sin(\beta L) \right)}^{A^2 - B^2} \right] &= 0 \\ \cosh^2(\beta L) - 2 \cosh(\beta L) \cos(\beta L) + \cos^2(\beta L) - \left(\sinh^2(\beta L) - \sin^2(\beta L) \right) &= 0 \\ \cosh^2(\beta L) - 2 \cosh(\beta L) \cos(\beta L) + \cos^2(\beta L) - \sinh^2(\beta L) + \sin^2(\beta L) &= 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Pro goniometrické a hyperbolické funkce platí následující vztahy

$$\sin^2(\beta L) + \cos^2(\beta L) = 1, \quad (4.45)$$

$$\cosh^2(\beta L) - \sinh^2(\beta L) = 1, \quad (4.46)$$

tzv. goniometrická, respektive hyperbolická jednička. Aplikací předešlých vzorců je rovnice (4.44) výrazně zjednodušena na

$$\underbrace{\cosh^2(\beta L) - \sinh^2(\beta L)}_{=1} + \underbrace{\cos^2(\beta L) + \sin^2(\beta L)}_{=1} - 2 \cosh(\beta L) \cos(\beta L) = 0$$

$$2 - 2 \cosh(\beta L) \cos(\beta L) = 0 \implies \boxed{1 - \cosh(\beta L) \cos(\beta L) = 0} \quad (4.47)$$

transcendentní [19] rovnici, kterou nelze vyjádřit jako polynom.

Výsledná frekvenční rovnice (4.47) nemá analytické řešení, a proto je řešení hledáno numericky iteračním postupem. Z něhož vyjde k řešení konstanty β , z kterých jsou vypočítány k vlastních úhlových frekvencí ze vztahu (A.18).

K určení jednotlivých tvarů kmitů w_k je zapotřebí vypočítat konstanty C_1 a C_2 , které nelze explicitně spočítat kvůli lineární závislosti obou rovnic. Jedná se o analogii k problému vlastních hodnot, tudíž je jedna konstanta zvolena a druhá dopočítána.

$$\boxed{C_1 = 1} : C_1 U(\beta_k L) + C_2 V(\beta_k L) = 0 \longrightarrow \boxed{C_2 = -\frac{U(\beta_k L)}{V(\beta_k L)}} \quad (4.48)$$

Vypočítané konstanty jsou dosazeny do původní rovnice tvaru kmitu (A.16). Řešením k -tého vlastního ohybového tvaru kmitu volného nosníku je

$$w_k(x) = C_1 S(\beta_k x) + C_2 T(\beta_k x) = S(\beta_k x) - \frac{U(\beta_k L)}{V(\beta_k L)} T(\beta_k x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.49)$$

respektive

$$w_k(x) = \frac{1}{2} \left[\left(\cosh(\beta_k x) - \cos(\beta_k x) \right) - \left(\frac{\cosh(\beta_k L) - \cos(\beta_k L)}{\sinh(\beta_k L) - \sin(\beta_k L)} \right) \left(\sinh(\beta_k x) + \sin(\beta_k x) \right) \right]. \quad (4.50)$$

5 Experimentální modelování

Podle [20] se označuje experimentální mechanika jako vědní obor, který k řešení problémů používá experimentální modelování. V oblasti mechaniky patří mezi hlavní úkoly experimentální mechaniky získávání vstupních dat pro výpočtové modelování [21]. Kvalita dat výrazně ovlivňuje efektivnost výpočtového modelování a stává se limitujícím faktorem při využití metody konečných prvků.

Jak je uvedeno v [21] použití experimentálního modelování přináší řadu výhod v podobě:

- Ověřování výsledků výpočtového modelování
- Nahrazení výpočtu (analytického, numerického)
- Monitorování a diagnostiky
- Získávání nových znalostí

Struktura teorie experimentu je detailně popsána v literatuře [20] a [2]. V této diplomové práci jsou realizovány dva experimenty.

1. Zkouška čtyřbodovým ohybem
2. Experimentální modální analýza (EMA)

Protože se jedná o známé zkoušky, není potřeba aplikovat teorii plánování experimentu.

5.1 Zkouška čtyřbodovým ohybem

Pro stanovení ohybové tuhosti rotorového paketu je použita zkouška čtyřbodovým ohybem pro různé lisovací síly, které jsou vyvolány příslušným dotažením závitových tyčí. Před zkouškou jsou vypočítány, respektive stanoveny následující parametry pro závitové tyče:

- (a) Maximální dovolená hodnota lisovací síly
- (b) Tlak ve stykové ploše závitu
- (c) Součinitel tření
- (d) Utahovací moment

Dále je navržena modifikovaná stahovací deska (obr. 5.1) s trojnásobnou tloušťkou a větším průměrem, která je umístěna na konec paketu místo původní stahovací desky, aby siloměr dosedal na celou plochu modifikované stahovací desky (viz obr. 5.2) a plnil svou funkci správně.

Experiment je proveden v laboratoři ústavu mechaniky těles. Postup zkoušky a použitá přístrojová technika jsou popsány v kapitole 5.1.2.



Obrázek 5.1: Modifikovaná stahovací deska pro zkoušku čtyřbodovým ohybem

5.1.1 Výpočet vstupních parametrů

K slisování plechů v rotorovém paketu jsou použity 4 závitové tyče M8x1,25 DIN 975 s pevností 8.8, které jsou pozinkované. Z třídy pevnosti 8.8 [22] lze stanovit smluvní mez kluzu jako $Rp_{0,2} = 8 \cdot 8 \cdot 10 = 640$ MPa.

Rozměry metrického závitu M8x1,25 jsou dostupné z normy ČSN ISO 261 [23]:

Tabulka 5.1: Základní rozměry závitu M8 s hrubou roztečí. Předloha z [23, s. 12]

Základní rozměry metrického závitu [mm]					
Jmenovitý průměr závitu d	Rozteč hrubá	Průměry závitu			
		$d = D$	$d_2 = D_2$	$d_1 = D_1$	d_3
8	1,25	8,000	7,188	6,647	6,466

a) Maximální dovolená hodnota lisovací síly

Stanovení maximální hodnoty lisovací síly je nezbytné k tomu, aby nedošlo k stržení závitu na závitové tyči při použitém utahovacím momentu.

Mezní podmínkou pro výpočet dovolené hodnoty lisovací síly je mezní stav (MS) pružnosti. Při dosažení tohoto stavu vznikají v tělese první makroplastické deformace, jejichž velikost je předepsaná smluvně [24].

Výpočet lisovací síly je proveden pro dvě varianty. V první je použit definiční vztah [12] pro normálové napětí

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad [\text{MPa}] \quad (5.1)$$

do kterého je dosazeno za napětí smluvní mez kluzu a za plochu obsah kruhu pro nejmenší průměr závitu, tedy d_3

$$F_{max} = \sigma S = Rp_{0,2} \frac{\pi d_3^2}{4} = 640 \cdot \frac{\pi 6,466^2}{4} \doteq 21\,015,6 \text{ N}. \quad (5.2)$$

Koeficient bezpečnosti k MS pružnosti je zvolen jako $k_k = 2$. Maximální dovolená hodnota lisovací síly v prvním případě vyjde

$$F_{L1} = \frac{F_{max}}{k_k} = \frac{21\,015,6}{2} \doteq 10\,507,8 \text{ N} \approx 10 \text{ kN}. \quad (5.3)$$

Protože je k výpočtu plochy kruhu S v rovnici (5.2) použit nejkonzervativnější průměr závitu, výsledná hodnota lisovací síly je menší než síla, kterou lze očekávat při dosažení MS pružnosti v závitové tyči.

V druhé variantě se vychází z německé normy VDI 2230 [25] pro šroubové spoje, která předepisuje montážní sílu F_M a utahovací moment M_A při dosažení 90 % smluvní meze kluzu ⁶ pro konkrétní hodnoty koeficientů tření mezi závity μ_G a matice μ_K .

Koeficienty tření pro zinkované povlaky jsou převzaty z normy [25, s. 114] ze skupiny D, která má rozsah hodnot v rozmezí $\mu = 0,2 - 0,35$. Pro danou úlohu je zvolen $\mu_G = 0,24$. Pro závit M8 s třídou pevností 8.8 a koeficientem tření 0,24 vyjde montážní síla z [25, s. 109] ve tvaru

$$F_{L2} = 15,5 \text{ kN}. \quad (5.4)$$

Pro nejmenší hodnotu koeficientu tření 0,08, která je k dispozici v normě VDI 2230 [25, s. 109], vyjde velikost montážní síly 19,5 kN. Z výsledků je patrné, že hodnoty koeficientů tření výrazně ovlivňují velikost lisovací síly.

b) Tlak ve stykové ploše závitu

Kontrola závitu na otláčení je provedena z důvodu, aby nedošlo k opotřebení a otláčení matice při použití vypočítaných lisovacích sil z rovnic (5.3) a (5.4).

Podle literatury [26, s. 427] lze definovat tlak v závitech užitím následujícího vzorce

$$p = \frac{F}{\pi d_2 n_z H_1} \leq p_D, \quad [\text{MPa}] \quad (5.5)$$

kde n_z je počet závitů v matici, který lze vypočítat jako podíl výšky matice m a rozteče závitu P

$$n_z = \frac{m}{P}, \quad [-] \quad (5.6)$$

a H_1 je tzv. nosná výška závitu, která je definována jako délka průmětu dotýkajících se profilů vnějšího, respektive vnitřního závitu

$$H_1 = \frac{d - D_1}{2}. \quad [\text{mm}] \quad (5.7)$$

K stažení závitových tyčí jsou použity šestihranné matice 6HR, jejichž výška je v rozsahu 6,44 – 6,8 mm, viz ISO 4032 [23, s. 96]. Výška matice je zvolena jako střední hodnota daného rozsahu, tedy $m = 6,62$ mm.

Počet závitů v matici, respektive nosná výška závitu vyjde pro danou úlohu

$$n_z = \frac{m}{P} = \frac{6,62}{1,25} \doteq 5,3 \approx 5, \quad H_1 = \frac{d - D_1}{2} = \frac{8 - 6,647}{2} \doteq 0,68 \text{ mm}. \quad (5.8)$$

⁶V přepočtu na koeficient bezpečnosti se jedná o přibližnou hodnotu $k_k \doteq 1,11$.

Počet závitů musí vycházet celé číslo. Zaokrouhlením hodnoty n_z dolů je uvažován konzervativnější výpočet tlaku v závitech.

Hodnota dovoleného tlaku p_D je stanovena na základě použitých mechanických vlastností šroubu a matice⁷, která je k dispozici z normy⁸ ČSN EN ISO 898-1 [27, s. 398]. Pro ocelovou matici s třídou pevnosti 8.8 odpovídá dovolený tlak hodnotě $p_D = 150$ MPa.

Pro jednotlivé varianty lisovacích sil vyjdou tlaky v závitech ve tvarech

$$p_1 = \frac{F_{L1}}{\pi d_2 n_z H_1} = \frac{10 \cdot 10^3}{\pi \cdot 7,188 \cdot 5 \cdot 0,68} \doteq 130,2 \text{ MPa} < 150 \text{ MPa} \Rightarrow \text{Vyhovuje} \quad (5.9)$$

$$p_2 = \frac{F_{L2}}{\pi d_2 n_z H_1} = \frac{15,5 \cdot 10^3}{\pi \cdot 7,188 \cdot 5 \cdot 0,68} \doteq 201,9 \text{ MPa} > 150 \text{ MPa} \Rightarrow \text{Nevyhovuje} \quad (5.10)$$

Z obdržených výsledků je patrné, že pro hodnotu lisovací síly z normy VDI [25] by došlo k překročení mezní podmínky dovoleného tlaku⁹. Tlak v závitech by způsobil otlačení a opotřebením závitu. Také by mohl zapříčinit špatnou funkčnost závitové tyče.

c) Součinitel tření

Velikost koeficientu tření ovlivňuje lisovací sílu a utahovací moment. Jak bylo zmíněno výše, v literatuře [25] se pohybují hodnoty koeficientu tření pro zinkované povrchy šroubových spojů v rozsahu 0,2 – 0,35. V učebnici Shigley [26, s. 450] lze najít součinitel utahovacího momentu K pro pozinkovaný povrch, který má velikost $K = 0,2$. Z důvodu odlišných hodnot součinitelů tření je vypočítáno více variant utahovacích momentů.

d) Utahovací moment

V prvním případě je stanovena velikost utahovacího momentu z rovnice (5.11), která je dostupná v učebnici konstruování strojních součástí [26, s. 449]

$$M = K F_i d, \quad [\text{Nm}] \quad (5.11)$$

kde K je součinitel utahovacího momentu, F_i předpětí ve šroubu a d vnější průměr závitu.

Utahovací momenty pro součinitele tření z normy VDI [25] pro pozinkované povrchy vyjdou následovně

$$M_1 = K_1 F_{L1} d = 0,2 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 16 \text{ Nm}, \quad (5.12)$$

$$M_2 = K_2 F_{L1} d = 0,35 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 28 \text{ Nm}. \quad (5.13)$$

Výpočet utahovacího momentu podle německé normy [25, s. 67] zahrnuje v rovnici (5.14) použitou matici a koeficienty tření pro závit, respektive matici oproti vztahu (5.11), který používá místo těchto koeficientů součinitel utahovacího momentu.

$$M_A = F_M \left(0,16P + 0,58d_2\mu_G + \frac{D_{Km}}{2}\mu_K \right) \quad [\text{Nm}] \quad (5.14)$$

⁷Zpravidla platí, že pro kombinaci šroubů a matic musí mít matice stejnou nebo vyšší třídu pevnosti jak šroub.

⁸Norma je dostupná z roku 2005. V novější verzi normy se tabulka s dovolenými tlaky může nacházet v jiné sekci, než je uvedeno v strojnických tabulkách [27].

⁹Při použití vyššího počtu závitů v matice $n_z = 6$ vyjde $p_1 \doteq 108,5$ MPa a $p_2 \doteq 168,2$ MPa. Platnost výsledků zůstane stejná jako u konzervativního přístupu s menším počtem závitů v matici.

V rovnici (5.14) představuje veličina D_{Km} efektivní průměr třecího momentu na hlavě šroubu a je vypočítána jako

$$D_{Km} = \frac{d_W + D_a}{2}, \quad (5.15)$$

kde d_W je průměr dosedací plochy a D_a průměr sražení. Tyto rozměry jsou dostupné pro použitou matici v ISO 4032 [23, s. 96]. Efektivní průměr třecího momentu vyjde

$$d_W = 11,6 \text{ mm}, \quad D_a = 8,75 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad D_{Km} = \frac{d_W + D_a}{2} = \frac{11,6 + 8,75}{2} \doteq 10,2 \text{ mm}. \quad (5.16)$$

Při výpočtu utahovacích momentů jsou předpokládány stejné hodnoty součinitelů tření pro matici a šroub ($\mu_G = \mu_K$).

$$M_3 = 10 \cdot 10^3 \left(0,16 \cdot 1,25 + 0,58 \cdot 7,188 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 + \frac{10,2 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot 0,2 \right) \doteq 20,5 \text{ Nm} \quad (5.17)$$

$$M_4 = 10 \cdot 10^3 \left(0,16 \cdot 1,25 + 0,58 \cdot 7,188 \cdot 10^{-3} \cdot 0,35 + \frac{10,2 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot 0,35 \right) \doteq 34,4 \text{ Nm} \quad (5.18)$$

Obdržené utahovací momenty stanové rozdílnými metodami ukazuje tab. 5.2, kde μ představuje použitý koeficient tření.

Tabulka 5.2: Porovnání vypočítaných utahovacích momentů

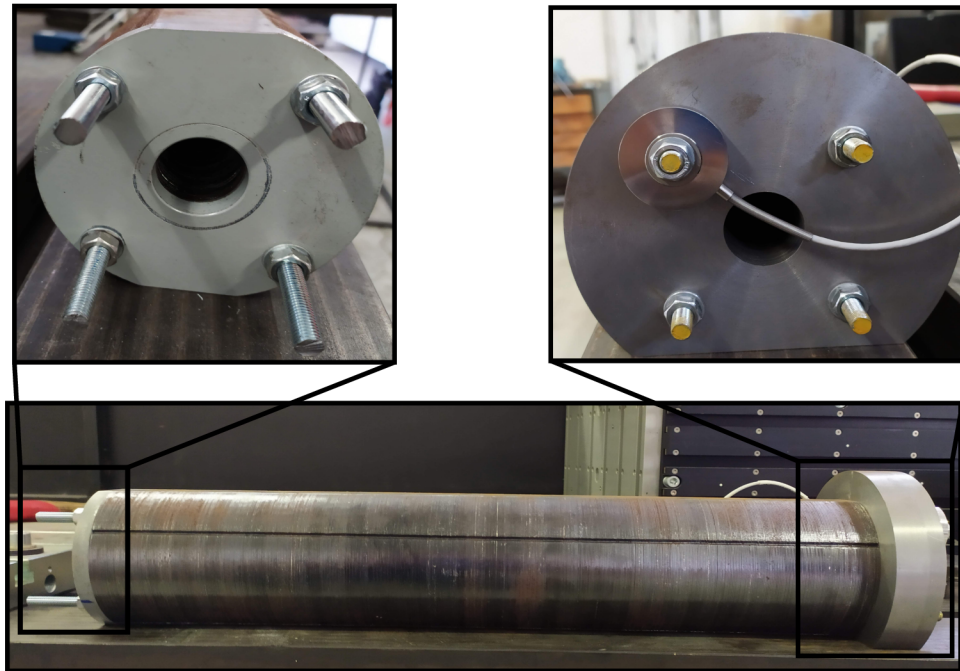
Utahovací momenty pro F_{L1} [Nm]			
	Shigley	VDI 2230	
μ [-]	M_S [Nm]	M_V [Nm]	Δ [%]
0,20	16,00	20,50	21,95
0,35	28,00	34,40	18,60

Při praktickém použití utahovacího momentu může dojít ještě k větším odchylkám od vypočítaných hodnot z důvodu mnoha faktorů, jako jsou vady v materiálu, nepřesnost výroby nebo degradace výrobku.

5.1.2 Realizace experimentu

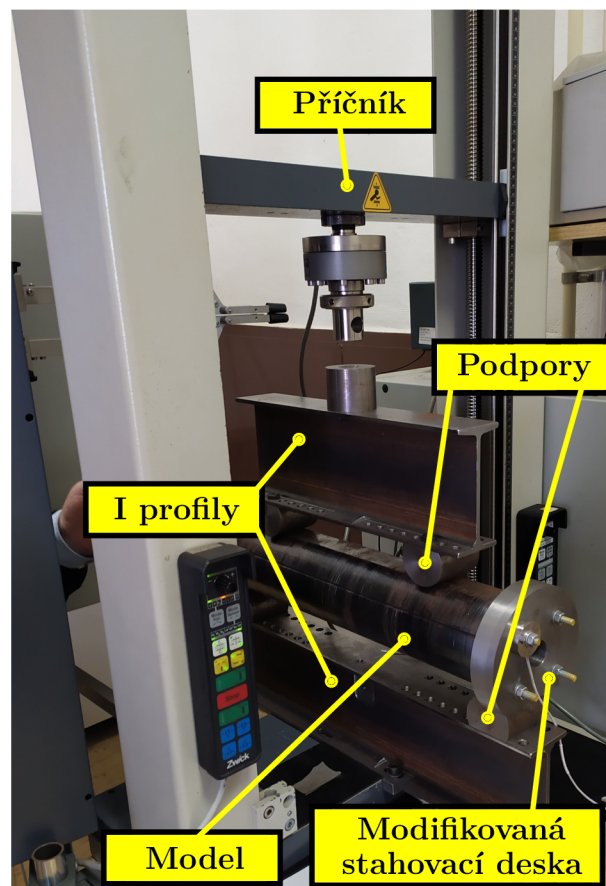
Jak bylo zmíněno výše, experiment je proveden v laboratoři mechanických zkoušek materiálu, kterou provozuje ústav mechaniky těles. Tato laboratoř je vybavena zkušebním strojem ZWICK Z 020-TND, který je použit při zkoušce čtyřbodovým ohybem.

K utažení matic na závitových tyčích je použit momentový klíč. Aby byla ověřena velikost lisovací síly $F_{L1} = 10 \text{ kN}$, je pod jednou maticí siloměr LC8150 Series Donut Load Cell [28], který dosedá na modifikovanou stahovací desku (obr. 5.1). Rotorový paket ukazuje obr. 5.2, kde jsou v detailu zobrazeny stahovací desky a siloměr. Konce závitových tyčích u modifikované stahovací desky jsou zkorodované, protože byly manuálně zkráceny kvůli nadměrné délce.



Obrázek 5.2: Rotorový paket se stahovacími desky a se siloměrem

Experimentální sestavu pro čtyřbodový ohyb ukazuje obr. 5.3.

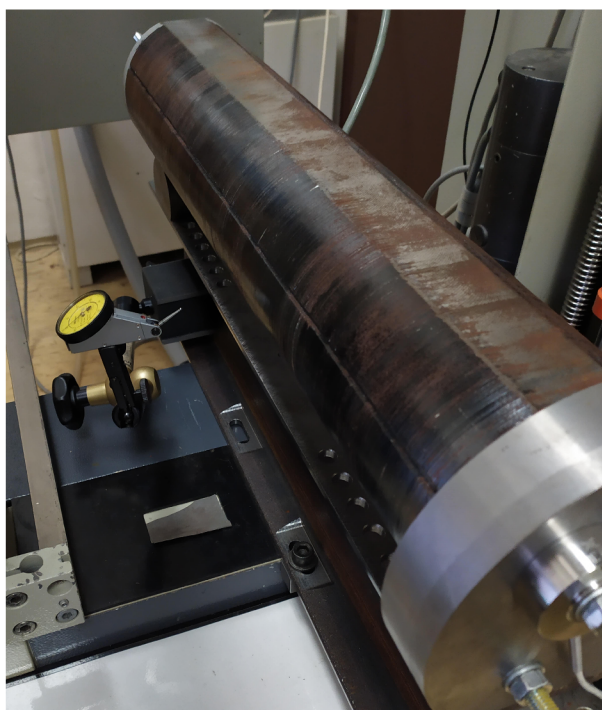


Obrázek 5.3: Experimentální sestava pro čtyřbodový ohyb

Postup měření

V prvním kroku je utahovací klíč nastaven na velikost utahovacího momentu $M_u = 35$ Nm, při kterém siloměr změřil sílu v šroubu $F_{ax1} = 10$ kN. Poté je rotorový paket přenesen na zkušební stroj a položen na I profil o dvou podporách, které jsou umístěny symetricky vůči sobě. Druhý I profil je položen na paket obdobně jako první. Rozmístění podpor reprezentuje namáhání čtyřbodovým ohybem. Posuvem příčnicku je tlačena síla do I profilu, jejíž velikost vzroste na předem stanovenou hodnotu $F_{oh} = 20$ kN. Uprostřed spodních podpor je umístěn úchylkoměr (obr. 5.4), který snímá maximální průhyb rotoru.

Tento algoritmus je realizován pro dalších 5 měření, kdy jsou zmenšovány velikosti utahovacích momentů vždy po 5 Nm. Výsledky měření jsou zaznamenány do tab. 5.3.



Obrázek 5.4: Úchylkoměr pro snímání průhybu

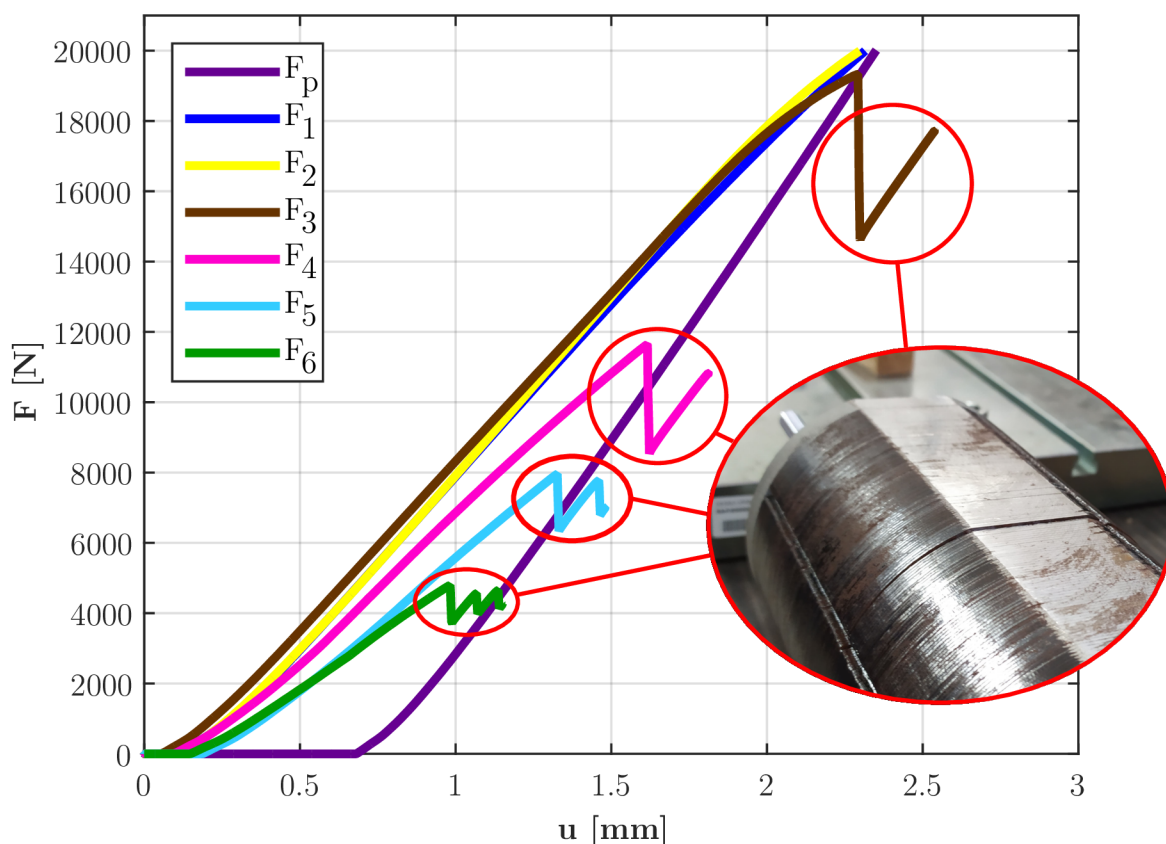
Tabulka 5.3: Parametry experimentální zkoušky čtyřbodovým ohybem

č. měření [–]	M_u [Nm]	F_{ax1} [kN]	F_{oh} [kN]	w_{exp} [mm]
1.	35,00	10,00	20,00	0,44
2.	30,00	7,30	20,00	0,52
3.	25,00	6,80	19,30	0,78
4.	20,00	5,00	11,60	0,55
5.	15,00	4,00	7,90	0,42
6.	10,00	2,60	4,80	0,35

Rozdílné velikosti radiální síly F_{oh} jsou způsobeny vzájemným posuvem plechů v podélném a v příčném směru. Od třetího měření síla nedosáhla nastavené velikosti 20 kN, ale skončila na různých hodnotách uvedené v tab. 5.3.

5.1.3 Zpracování naměřených dat

Zkušební stroj zapisuje vertikální posuv příčnicku u v závislosti na zatěžujících silách F_i . Jednotlivé průběhy ukazuje obr. 5.5, kde je zobrazen detail rotorového paketu s posunutými plechy. Před prvním měřením je ověřen chod stroje na prázdko, čímž je stanovena tuhost samotného stoje s přípravkem pro čtyřbodový ohyb, s kterou je dále počítáno při výpočtu celkové tuhosti rotoru. Tento průběh znázorňuje v obr. 5.5 závislost síly F_p .



Obrázek 5.5: Grafický záznam z obdržených dat ze zkoušky čtyřbodovým ohybem

Protože všechny závislosti sil mají z velké části lineární charakter, k statistickému zpracování dat je použita lineární regresní analýza. Vzniklé nelinearity na začátku každého měření jsou způsobeny posuvem příčnicku k hornímu I profilu před jejich dotykem. Regresní funkce je předpokládána ve tvaru přímky. K odhadům regresních koeficientů je použita metoda nejmenších čtverců. Z této metody jsou určeny jednotlivé tuhosti a následně stanoveny ohybové tuhosti rotoru.

Experimentální sestava (obr. 5.3), která je složena z rotoru, zkušebního stroje a podpor, představuje sériové zapojení pružin [29], jejíž výslednou celkovou tuhost lze stanovit podle vztahu

$$\frac{1}{k_{cel}} = \frac{1}{k_{rot}} + \frac{1}{k_{stroj}}, \quad (5.19)$$

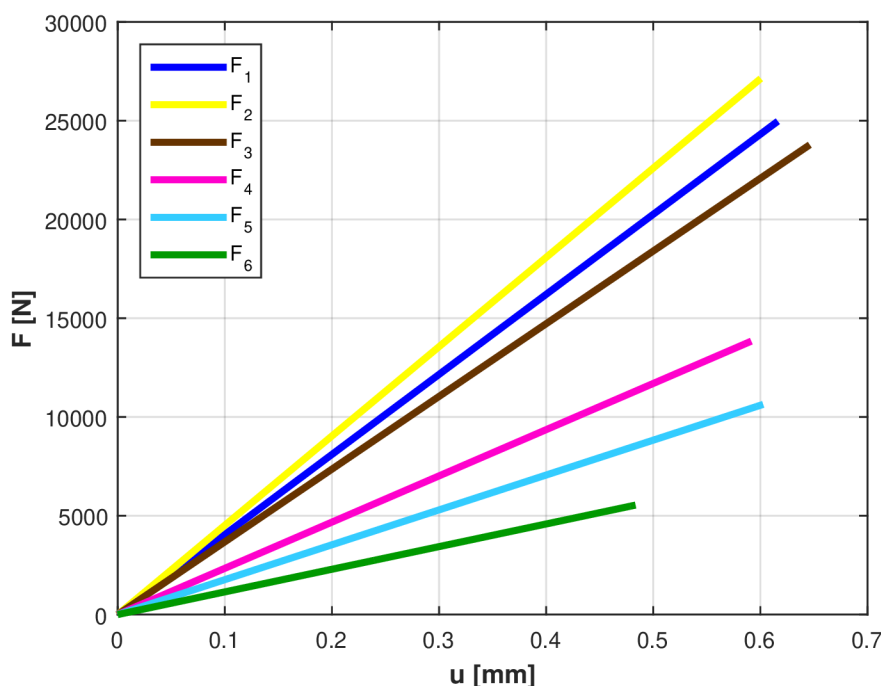
kde k_{cel} je celková tuhost sestavy, k_{rot} tuhost rotoru a k_{stroj} tuhost zkušebního stroje při chodu na prázdno. Z předchozí rovnice vyjde po úpravách ohybová tuhost rotoru jako

$$k_{rot} = \frac{k_{cel} \cdot k_{stroj}}{k_{stroj} - k_{cel}}. \quad [\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}] \quad (5.20)$$

Vypočítané ohybové tuhosti rotoru s odpovídajícími maximálními průhyby w_{reg} jsou zaznamenány do tab. 5.4. V grafickém zobrazení tuhost reprezentuje směrnici přímky viz. obr 5.6.

Tabulka 5.4: Ohybové tuhosti rotorového paketu stanovené čtyřbodovým ohybem

č. měření [-]	k_{rot} [$\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}$]	w_{reg} [mm]
1.	40 523,7	0,49
2.	45 202,8	0,44
3.	36 806,7	0,52
4.	23 396,5	0,50
5.	17 655,1	0,45
6.	11 461,3	0,42



Obrázek 5.6: Lineární regrese experimentálních dat

Výpočet ekvivalentního modulu pružnosti

Z experimentálních dat vyšlo najevo, že závislost mezi zatěžující silou a posuvem je téměř lineární. Rotorový paket splňuje prutové předpoklady, které jsou popsány v literatuře [13]. Z těchto důvodů lze použít zmíněná data v odvozené rovnici průhybové čáry (4.35) v maximálním průhybu, z které je inverzně vyjádřen ekvivalentní modul pružnosti

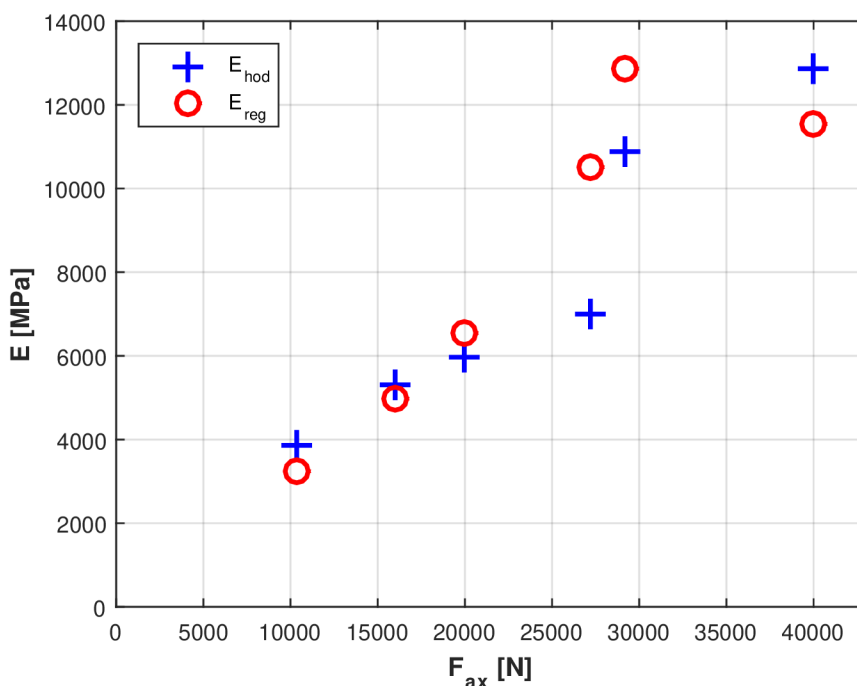
$$E_{eq} = \frac{1}{J_y w_{max}} \left(\frac{1}{8} F a b^2 + \frac{1}{3} F a^3 + \frac{1}{2} F a^2 b \right), \quad [\text{MPa}] \quad (5.21)$$

kde proměnné veličiny jsou zatěžující síla¹⁰ F a maximální průhyb w_{max} .

Ekvivalentní modul pružnosti je spočítán pro dvě varianty. V první jsou použity průhyby z úchylkoměru stanovené ze zkoušky a síla zkušebního stroje. Druhá metoda vychází z regresně určených hodnot, když je vypočítána maximální velikost průhybu z funkční závislosti ($F = kx$) pro použitou sílu stroje. Stanovené hodnoty modulu pružnosti pro první variantu E_{hod} a druhou E_{reg} jsou zapsány v tab. 5.5. Závislost lisovací síly na zmíněných modulech ukazuje obr. 5.7.

Tabulka 5.5: Ekvivalentní moduly pružnosti ze zkoušky čtyřbodovým ohybem

č. měření [–]	F_{ax} [kN]	E_{hod} [MPa]	E_{reg} [MPa]	$ \Delta E $ [%]
1.	40,0	12 852,4	11 540,9	11,4
2.	29,2	10 875,1	12 852,4	15,4
3.	27,2	6 996,3	10 494,5	33,3
4.	20,0	5 963,5	6 559,9	9,1
5.	16,0	5 318,4	4 963,9	7,1
6.	10,4	3 877,7	3 231,5	20,0

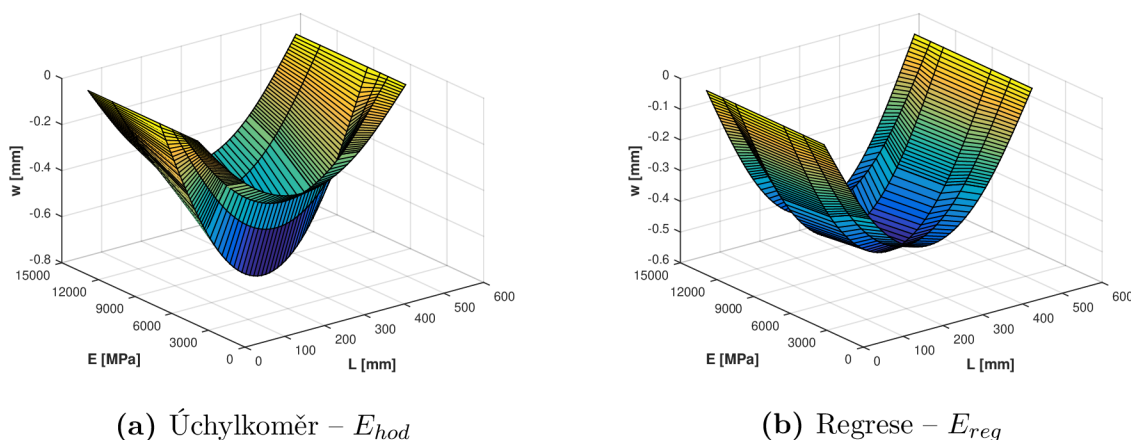


Obrázek 5.7: Porovnání ekvivalentních modulů pružnosti stanové čtyřbodovým ohybem

Největší odchýlení hodnot nastalo při 3. měření. Hodnota průhybu dosahuje svého maxima při použití úchylkoměru. S největší pravděpodobností se jedná o chybnou hodnotu, kterou mohla způsobit řada faktorů, jako je špatné nastavení úchylkoměru, nesymetrické rozmístění horního nebo spodního I profilu nebo začátek posunutí plechů vůči sobě.

¹⁰V kapitole 4.2 je schéma čtyřbodového ohybu pro sílu F , aby byla dodržena použitá konvence, musí platit $\frac{F_{oh}}{2} = F$.

Na závěr jsou vykresleny průhybové čáry (obr. 5.8) ve 3D v závislosti na ekvivalentních modulech pružnosti E_{hod} , respektive E_{reg} , délce paketu L a průhybu w .



Obrázek 5.8: Průhybové čáry ve 3D pro ekvivalentní moduly pružnosti

5.2 Experimentální modální analýza

K určení vlastních frekvencí a vlastních tvarů libovolného objektu slouží experimentální modální analýza. Výhoda této zkoušky je v jednoduchosti a v ceně. Při porovnání se zkouškou čtyřbodovým ohybem není zapotřebí drahý a robustní zkušební stroj, ale vystačí se pouze s modálním kladívkem, akcelometrem, měřicí kartou a vhodným softwarovým vybavením.

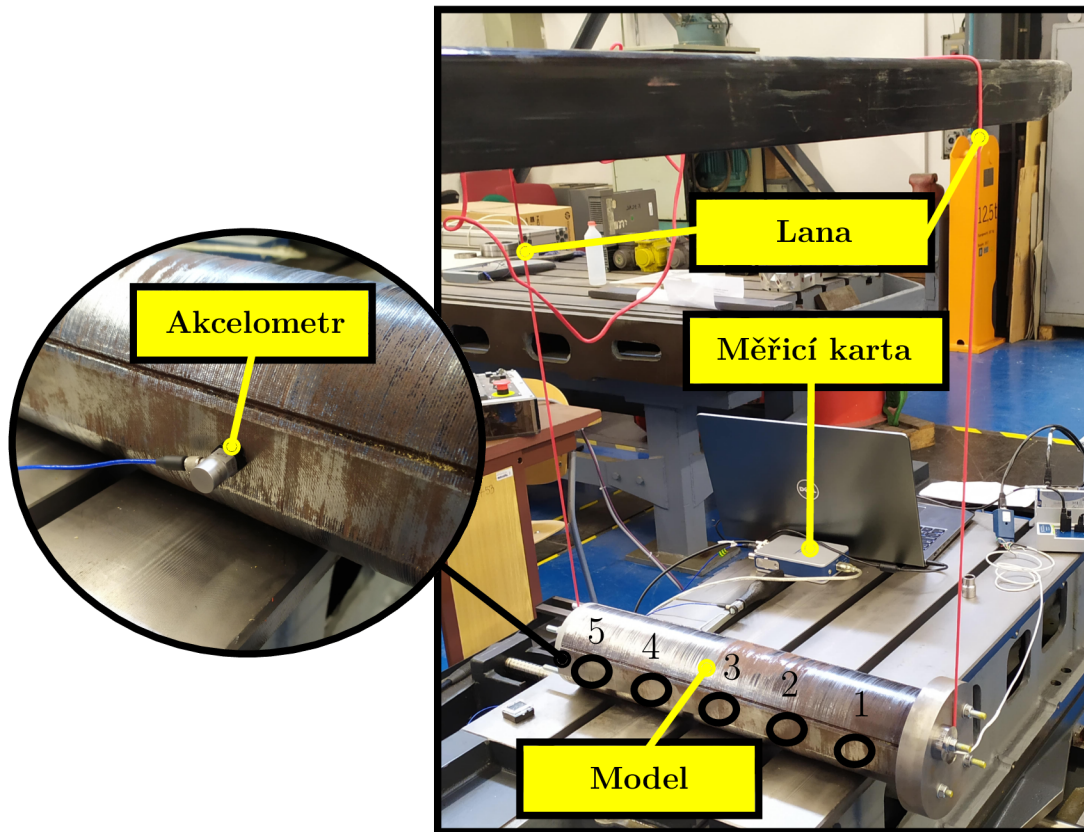
Parametry pro závitové tyče jsou použity stejné jako u zkoušky čtyřbodovým ohybem (viz kapitola 5.1.1). Samotný experiment je uskutečněn v prostorech ústavu výrobních strojů, systémů a robotiky, který disponuje vysokozdvížným vozíkem. Na tento vozík jsou zavěšena lana, která reprezentují volné uložení rotorového paketu pro experiment.

5.2.1 Popis experimentu

Začátek experimentu probíhá obdobně jako u zkoušky čtyřbodovým ohybem. Matice na závitových tyčích jsou utaheny pomocí momentového klíče. Na jednom konci paketu je umístěna modifikovaná stahovací deska se siloměrem. Hodnoty utahovacích momentů jsou zvoleny stejné jako v tab. 5.3. Protože experiment je realizován o tři dny později, očekává se kolísání hodnot lisovacích sil oproti zkoušce čtyřbodovým ohybem, z důvodu koroze materiálu, změny mechanických vlastností povlaku na závitových tyčích nebo nárůstu součinitele tření v závitech.

Experimentální sestavu ukazuje obr. 5.9, která je složena z modelu, stahovacích desek, siloměru, měřicí karty, akcelometru a lan. Paket je natočen takovým směrem, aby na horizontální ploše bylo umožněno připevnit akcelometr, který posílá odezvu do počítače. Na této ploše je vyznačeno pět bodů, přes které je buzen model. K buzení je použito modální kladívko. Tento způsob buzení je označován jako impulsní buzení.

Podobně jako u zkoušky čtyřbodovým ohybem je provedeno dalších 5 měření, kdy jsou zmenšovány hodnoty utahovacích momentů vždy po 5 Nm. Vstupní parametry experimentální modální analýzy jsou zaznamenány v tab. 5.6.



Obrázek 5.9: Experimentální sestava pro EMA

Tabulka 5.6: Parametry experimentální modální analýzy

č. měření [–]	M_u [Nm]	F_{ax1} [kN]
1.	35,0	8,0
2.	30,0	5,6
3.	25,0	4,5
4.	20,0	4,1
5.	15,0	2,9
6.	10,0	2,3

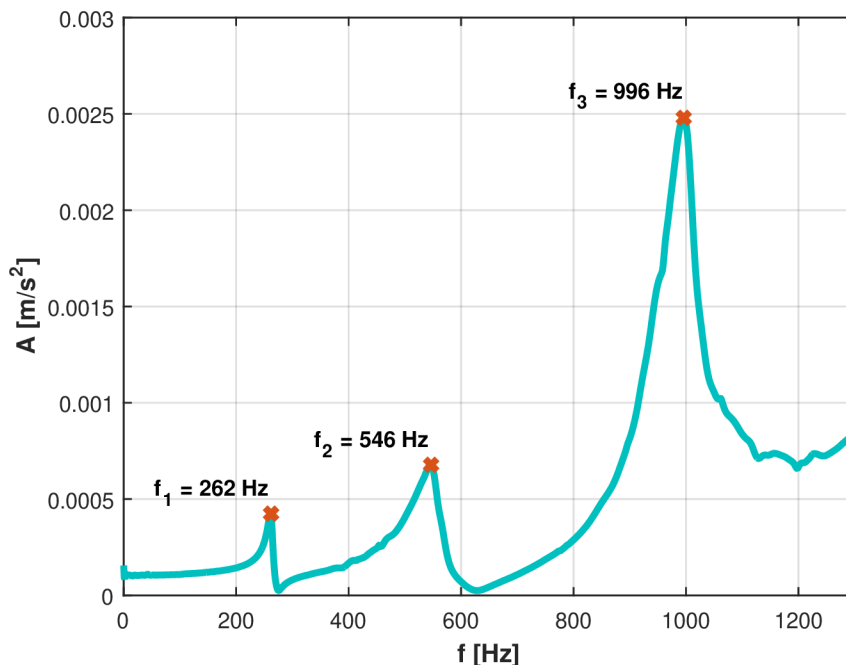
5.2.2 Analýza naměřených dat

K zapisování dat je použit volně dostupný program *OpenModal* [30], který je navržen pro experimentální modální zkoušky. V tomto programu je model diskretizován na 7 bodů, přičemž vzdálenost mezi prvním a posledním reprezentuje délku rotoru. Zbýlých 5 bodů je totožných s body určené pro buzení.

Získaná data, v podobě amplitudy A a frekvence f , jsou pro další zpracování exportována do programu *Matlab*. Protože v programu *OpenModal* je uskutečněna rychlá Fourierova transformace (FFT), hodnoty amplitud jsou obdrženy pro reálnou a imaginární část separovaně. Velikost amplitudy vychází z komplexní roviny [31] jako součet kvadrátů

$$A = \sqrt{A_{Re}^2 + A_{Im}^2}. \quad [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}] \quad (5.22)$$

Amplitudo-frekvenční charakteristiku pro nejmenší velikost utahovacího momentu ukazuje obr. 5.10, kde jsou vyznačeny hodnoty prvních tří vlastních frekvencí. Do tab. 5.7 jsou zapsány první tři vlastní frekvence pro všechna měření.



Obrázek 5.10: Amplitudo-frekvenční charakteristika pro $M_u = 10 \text{ Nm}$

Tabulka 5.7: Vlastní frekvence z experimentální modální analýzy

č. měření [–]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]
1.	416	971	1 679
2.	388	889	1 557
3.	370	833	1 486
4.	345	772	1 379
5.	313	685	1 233
6.	262	546	996

Odhad tlumení

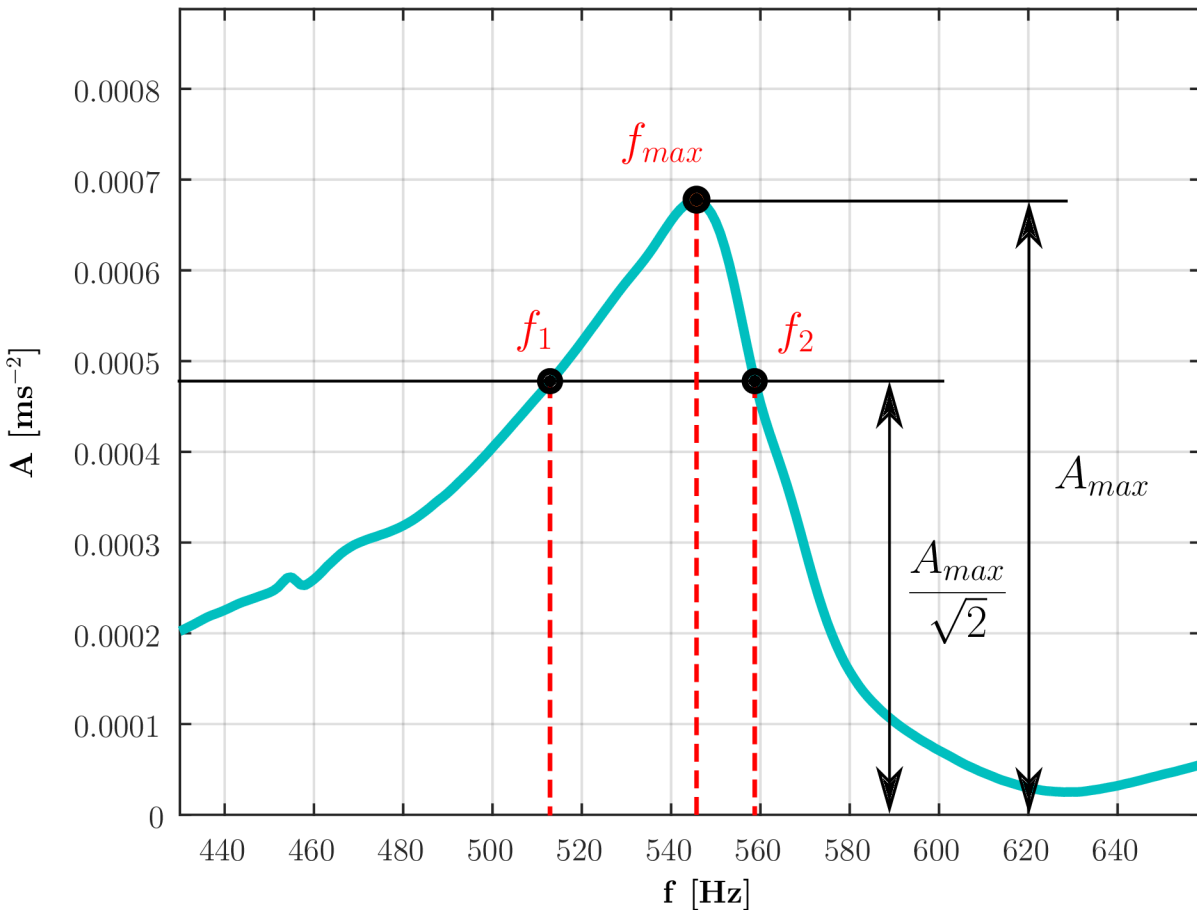
Jak bylo zmíněno v kapitole 4.3.1, k stanovení tlumení z experimentálních dat slouží různé odhady. Nutno podotknout, že tyto odhady platí pro kmitání lineárních soustav.

Tlumení je vyhodnocováno z frekvenčního přenosu z šířky rezonančního pásma. Z této metody lze určit hodnotu faktoru kvality Q a poměrného útlumu b_p ¹¹. Faktor kvality spolu s poměrným útlumem jsou bezrozměrné veličiny, které popisují tlumení daného modelu. Vzájemný přepočítání lze nalézt v literatuře [18] a má následující tvar

$$Q = \frac{1}{2b_p}. \quad [-] \quad (5.23)$$

¹¹V zahraničních literaturách např. [18] nebo [32] se častěji používá symbol ζ pro označení termínu *damping ratio*.

Šířka rezonančního pásma pro druhou vlastní frekvenci z posledního měření je zaznamenána na obr. 5.11, kde A_{max} je hodnota maximální amplitudy pro danou vlastní frekvenci a $0,707A_{max}$ vymezuje šířku rezonančního pásma, která dělí frekvence na f_1 a f_2 .



Obrázek 5.11: Šířka rezonančního pásma pro f_2 při $M_u = 10$ Nm

Výpočet faktoru kvality s detailním odvozením je k dispozici v [18, s. 77]. Výsledná podoba zmíněného faktoru vyjde

$$Q \approx \frac{f_{max}}{f_2 - f_1}, \quad [-] \quad (5.24)$$

po dosažení rovnice (5.23) do předchozí bude poměrný útlum odpovídat tvaru

$$b_p \approx \frac{f_2 - f_1}{2f_{max}}, \quad [-] \quad (5.25)$$

pouze tehdy, jestliže jsou splněny omezující podmínky (viz literatura [33]) použitých parametrů tlumení

$$Q < 0,05 \quad b_p < 0,05. \quad (5.26)$$

Poměrné útlumy vypočítané z šířky rezonančního pásma pro první dvě vlastní frekvence jsou zapsané v tab. 5.8. Z obdržených hodnot je patrné, že jednotlivé velikosti poměrných útlumů jsou menší než 0,05.

Tabulka 5.8: Vypočítané odhady poměrného útlumu

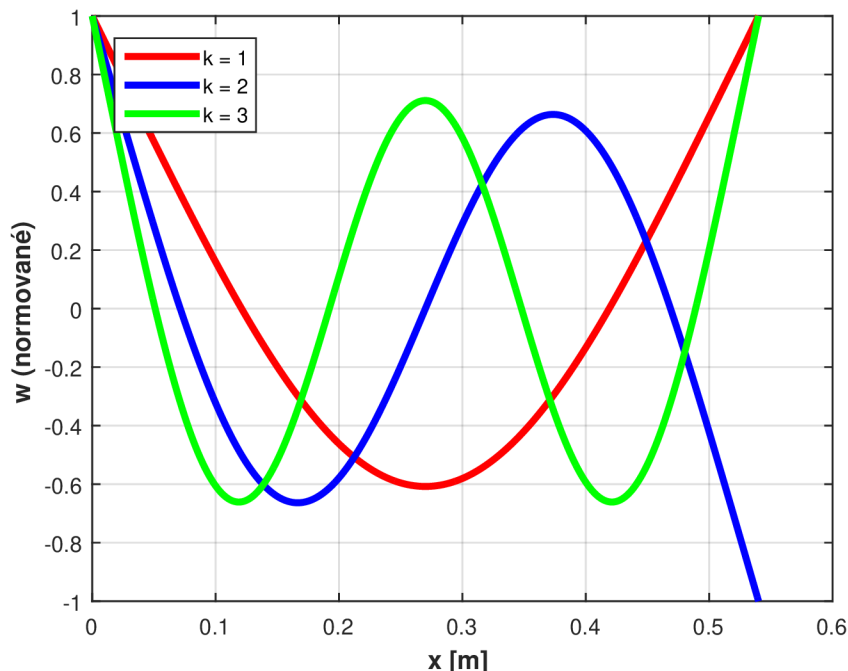
č. měření [-]	b_{p1} [-]	b_{p2} [-]
1.	0,008	0,012
2.	0,012	0,045
3.	0,012	0,016
4.	0,016	0,021
5.	0,017	0,025
6.	0,024	0,042

Z tab. 5.8 si lze všimnout, že u první vlastní frekvence poměrný útlum b_{p1} roste se snižující lisovací silou, zatímco u druhé vlastní frekvence poměrný útlum b_{p2} osciluje.

Stanovení vlastních tvarů

V kapitole 4.3.1 byla odvozena frekvenční rovnice (4.47) volného kmitajícího nosníku. Z této rovnice jsou určeny konstanty β_k pro prut s délkou L reprezentující délku rotorového paketu s použitými stahovacími deskami. Dosazením vypočítaných konstant β_k do rovnice tvaru kmitu (4.50) vyjdou vlastní tvary rotorového paketu.

Jelikož z experimentální modální analýzy jsou vyhodnocovány první tři vlastní frekvence, z toho důvodu jsou do obr. 5.12 zaznamenány odpovídající vlastní tvary, které jsou normované k jedničce.

Obrázek 5.12: Vlastní ohybové tvary rotorového paketu v rovině $x - z$

Výpočet ekvivalentního modulu pružnosti

K výpočtu ekvivalentního modulu pružnosti je použita rovnice (A.18) z přílohy A, která je přepsána do základního tvaru bez pomocných veličin v podobě příčné rychlosti vlnění

c_o a kvadratického poloměru průřezu j_y na podobu

$$\Omega_k^2 = \beta_k^4 \frac{E J_y}{\rho S}, \quad (5.27)$$

když platí

$$\Omega_k = 2\pi f_k. \quad [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}] \quad (5.28)$$

Po matematických úpravách vyjde ekvivalentní modul pružnosti v následujícím tvaru

$$E_{eqk} = \frac{(2\pi f_k)^2 \rho S}{\beta_k^4 J_y} \quad \text{pro } k = 1, 2, 3. \quad [\text{MPa}] \quad (5.29)$$

Předchozí rovnice nezahrnuje ve výpočtu vliv předpětí v podobě axiální síly. Tuto skutečnost zohledňuje rovnice (5.30) dostupná z literatury [34], která platí pouze pro první vlastní tvar a vlastní frekvence podepřeného prutu v ose, která je kolmá na délku prutu. Tvar této rovnice lze nalézt v následující podobě

$$\Omega = 3,6275 \left(\frac{4\pi^2 EI + TL^2}{m_L L^4} \right)^{1/2}, \quad [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}] \quad (5.30)$$

kde E je Youngův modul nosníku, I osový kvadratický moment průřezu, T axiální síla, L délka nosníku a m_L hmotnost na jednotku délky nosníku, která se vypočítá jako

$$m_L = \frac{m}{L}. \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (5.31)$$

Po úpravách vyjde ekvivalentní modul pružnosti v tahu ve tvaru

$$E_{eq} = \frac{(2\pi f_1)^2 m_L L^4 - 3,6275^2 TL^2}{3,6275^2 4\pi^2 I}. \quad [\text{MPa}] \quad (5.32)$$

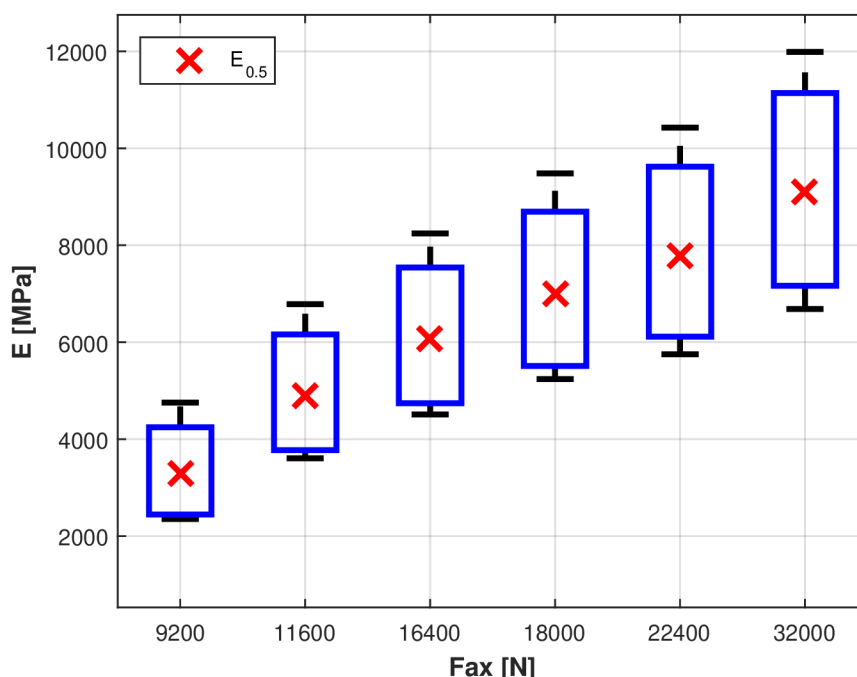
Stanovené vlastní frekvence z tab. 5.7 jsou použity jako vstupy do rovnic (5.29) a (5.32). Výsledné hodnoty ekvivalentních modulů pružnosti ukazuje tab. 5.9, kde E_f reprezentuje hodnoty ekvivalentních modulů pružnosti určené bez předpětí a E_{Pr} s předpětím.

Tabulka 5.9: Ekvivalentní moduly pružnosti stanové z ohybového kmitání

č. měření [–]	F_{ax} [kN]	E_{f1} [MPa]	E_{f2} [MPa]	E_{f3} [MPa]	E_{Pr} [MPa]
1.	32,0	11 987,1	8 594,8	6 686,7	11 097,8
2.	22,4	10 427,7	7 204,5	5 750,2	9 649,5
3.	18,0	9 482,6	6 325,4	5 237,8	8 771,7
4.	16,4	8 244,5	5 432,9	4 510,6	7 621,7
5.	11,6	6 786,0	4 277,4	3 606,1	6 267,1
6.	9,2	4 754,8	2 717,6	2 353,0	4 380,4

Z obdržných výsledků si lze všimnout, že hodnoty modulů pružnosti pro první vlastní frekvence vycházejí podobně s předpětím i bez něj. Z tohoto důvodu jsou ve výpočtovém modelování použity moduly bez předpětí, protože pro ně jsou známé další vlastní frekvence a tvary.

Pro lepší grafickou názornost jsou jednotlivé hodnoty vypočítaných modulů E_f znázorněny do tzv. krabicových grafů¹² (obr. 5.13) s vypočítaným aritmetickým průměrem $E_{0.5}$.



Obrázek 5.13: Závislost axiální síly na modulech pružnosti z ohybového kmitání

Z dosažených výsledků ekvivalentních modulů pružnosti stanovené z ohybového kmitání volného nosníku vyplývá, že se zvyšujícími vlastními frekvencemi klesá tento modul. V dalším vyhodnocování jsou používány hodnoty pro první vlastní frekvence E_{f1} .

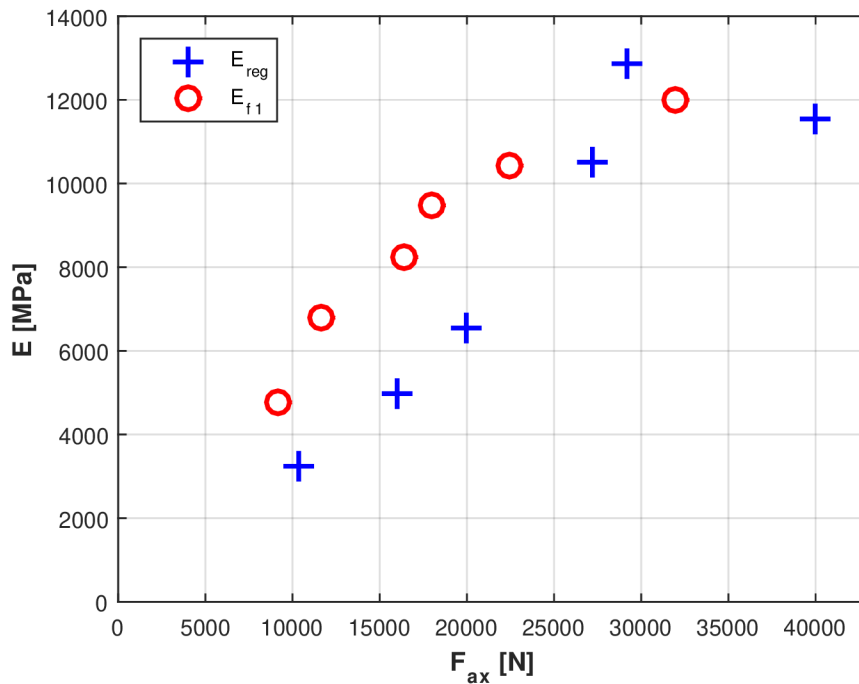
5.3 Porovnání výsledků

Porovnání vypočítaných reprezentativních hodnot modulů pružnosti z experimentálních zkoušek v závislosti na lisovacích silách ukazuje tab. 5.10 a obr. 5.14.

Tabulka 5.10: Porovnání ekvivalentních modulů pružnosti z experimentálních zkoušek

č. měření [–]	4b ohyb		EMA		
	F_{axO} [kN]	E_{reg} [MPa]	F_{axE} [kN]	E_{f1} [MPa]	$ \Delta E $ [%]
1.	40,0	11 540,9	32,0	11 987,1	3,7
2.	29,3	12 852,4	22,4	10 427,7	23,3
3.	27,2	10 494,5	18,0	9 482,6	10,7
4.	20,0	6 559,9	16,4	8 244,5	20,4
5.	16,0	4 963,9	11,6	6 786,0	26,9
6.	10,4	3 231,5	9,2	4 754,8	32,0

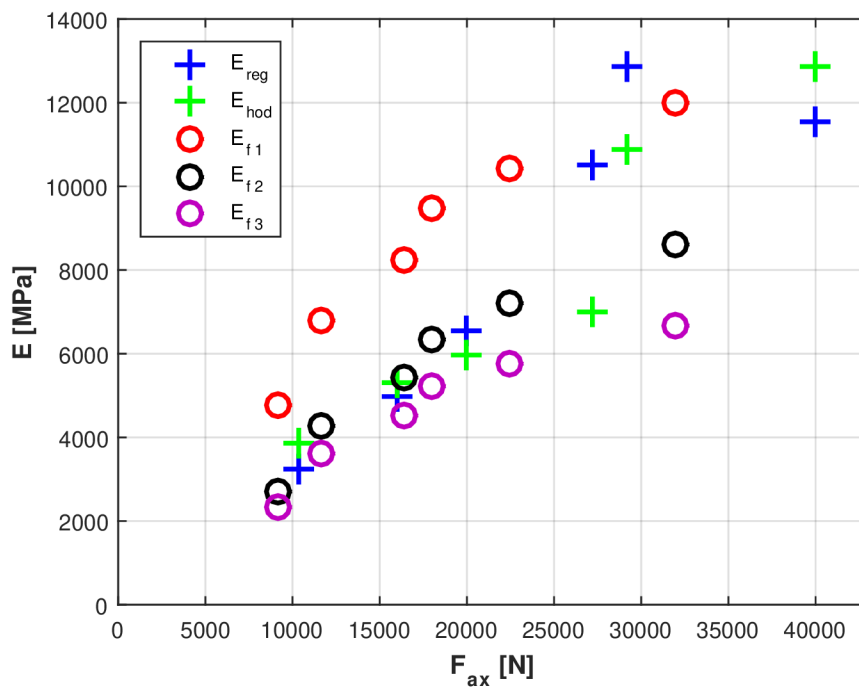
¹²Jak je uvedeno v literatuře [35], krabicové grafy neboli boxploty slouží ke grafickému zobrazení dat pomocí kvartilů. Standardně se používá 3. kvartil pro horní ohraničení a 1. kvartil pro spodní, přičemž mezi nimi leží medián. Pro malé množství dat je zvolena místo mediánu střední hodnota.



Obrázek 5.14: Reprezentativní ekvivalentní moduly pružnosti stanovené z experimentálních zkoušek

Nejmenší rozdíl hodnot nastal při maximální lisovací síle, která je odlišná pro daný typ zkoušek. Naopak k největšímu rozptylu hodnot došlo při minimální lisovací síle.

Všechny vypočítané ekvivalentní hodnoty ekvivalentních modulů pružnosti z experimentálních zkoušek v závislosti na lisovací síle zobrazuje obr. 5.15.



Obrázek 5.15: Ekvivalentní moduly pružnosti stanovené z experimentálních zkoušek

6 Výpočtové modelování

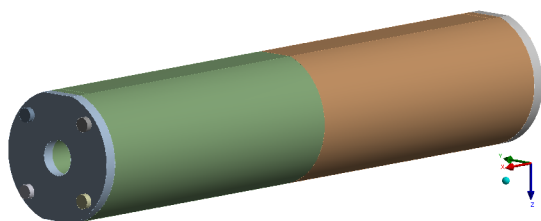
Cílem této kapitoly je prověřit možnosti výpočtového modelování chování rotorových paketů modelovaných pomocí homogenního válce s ekvivalentním modulem pružnosti E_{eq} . Jak je uvedeno v literatuře [2] výpočtové modelování lze rozdělit na výpočtové modelování klasické, simulační, optimalizační a citlivostní analýzu. V předkládané diplomové práci je použito klasického výpočtového modelování a optimalizace pomocí variačního přístupu metodou konečných prvků.

V první části je provedena statická analýza pro čtyřbodový ohyb, když je použit poloviční model geometrie z důvodu symetrie. Pro různé varianty ekvivalentních modulů pružnosti jsou vyhodnocovány maximální průhyby, které jsou následně porovnány s experimentálně zjištěnými. Druhý případ je věnován modální analýze, když je nejdříve realizována pro samostatný rotorový paket, z kterého jsou stanoveny vlastní frekvence, jejíž optimalizací je hledána nejlepší shoda s vypočítanými moduly pružnosti (modální analýza I). Závěrem je provedena modální analýza paketu nalisovaného na hřídeli, z které jsou určeny kritické otáčky rotoru v závislosti na lisovací síle (modální analýza II).

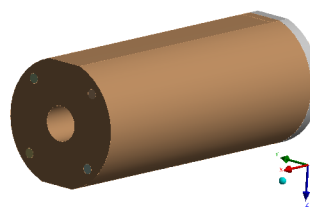
6.1 Modely geometrie

Všechny modely geometrie jsou složeny ze čtyř závitových tyčí a matic. Dále pak z původních stahovacích desek a samotný rotorový paket je modelován jako válec se zkosenými podélnými plochami. Pro statickou analýzu lze použít poloviční model geometrie (obr. 6.1b), zatímco pro první modální analýzu je zapotřebí použít celý model (obr. 6.1a). U druhé modální analýzy přibude k původnímu modelu geometrie hřídel (obr. 6.1c).

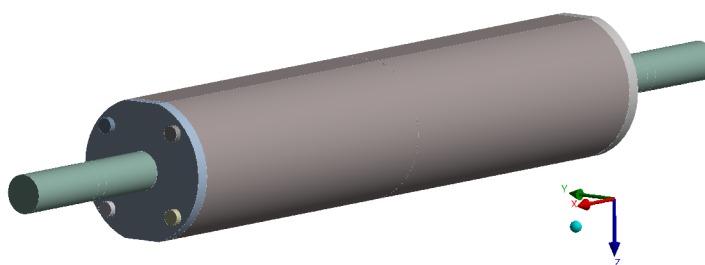
Pro zmíněné analýzy je použita hodnota součinitele tření v závitových tyčích $f = 0,3$; která je stanovena na základě kapitoly 5.1.1.



(a) Model geometrie pro modální analýzu I



(b) Model geometrie pro statickou analýzu



(c) Model geometrie pro modální analýzu II

Obrázek 6.1: Modely geometrie rotorového paketu pro jednotlivé analýzy

6.2 Modely materiálu

Všechny komponenty součásti jsou modelovány homogenním izotropním lineárně elastickým modelem materiálu. Pro závitové tyče, stahovací desky a hřídel je zvolen model materiálu v podobě běžné konstrukční oceli, kdežto u rotorového paketu jsou použity stejné materiálové charakteristiky jako u oceli s výjimkou modulu pružnosti. Velikost tohoto modulu je v rozmezí hodnot podle velikosti lisovací síly a použité metody. Materiálové charakteristiky obou modelů jsou zapsané v tab. 6.1.

Tabulka 6.1: Materiálové charakteristiky modelů rotorového paketu

	μ [-]	ρ [kg · m ⁻³]	E [MPa]
Ocel	0,3	7 850	210 000
Rotorový paket	0,3	7 850	3 000 – 13 000

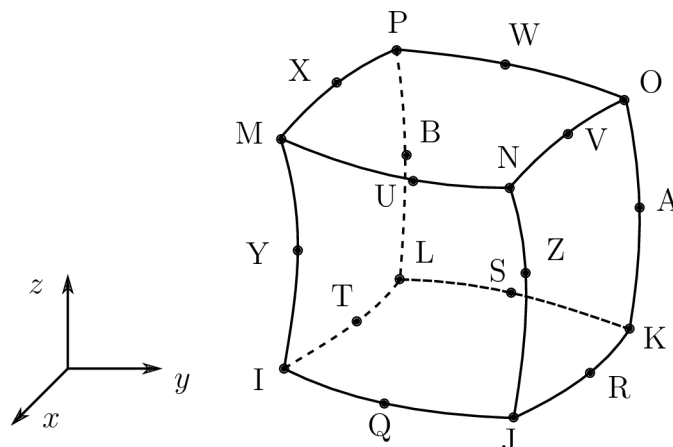
6.3 Diskretizované modely

Pro tvorbu konečnoprvkových sítí jsou zvoleny objemové prvky typu SOLID 186 (obr. 6.2) a 187, které se liší v počtu uzlů, kde první jmenovaný má dvacet a druhý deset uzlů. Tento typ prvků je charakterizován třemi stupni volnosti v každém uzlu, konkrétně se jedná o posuvy v osách x , y a z . Velikost elementů je globálně zvolena na 6 mm, u stahovacích desek na 4 mm a pro závitové tyče na 3 mm.

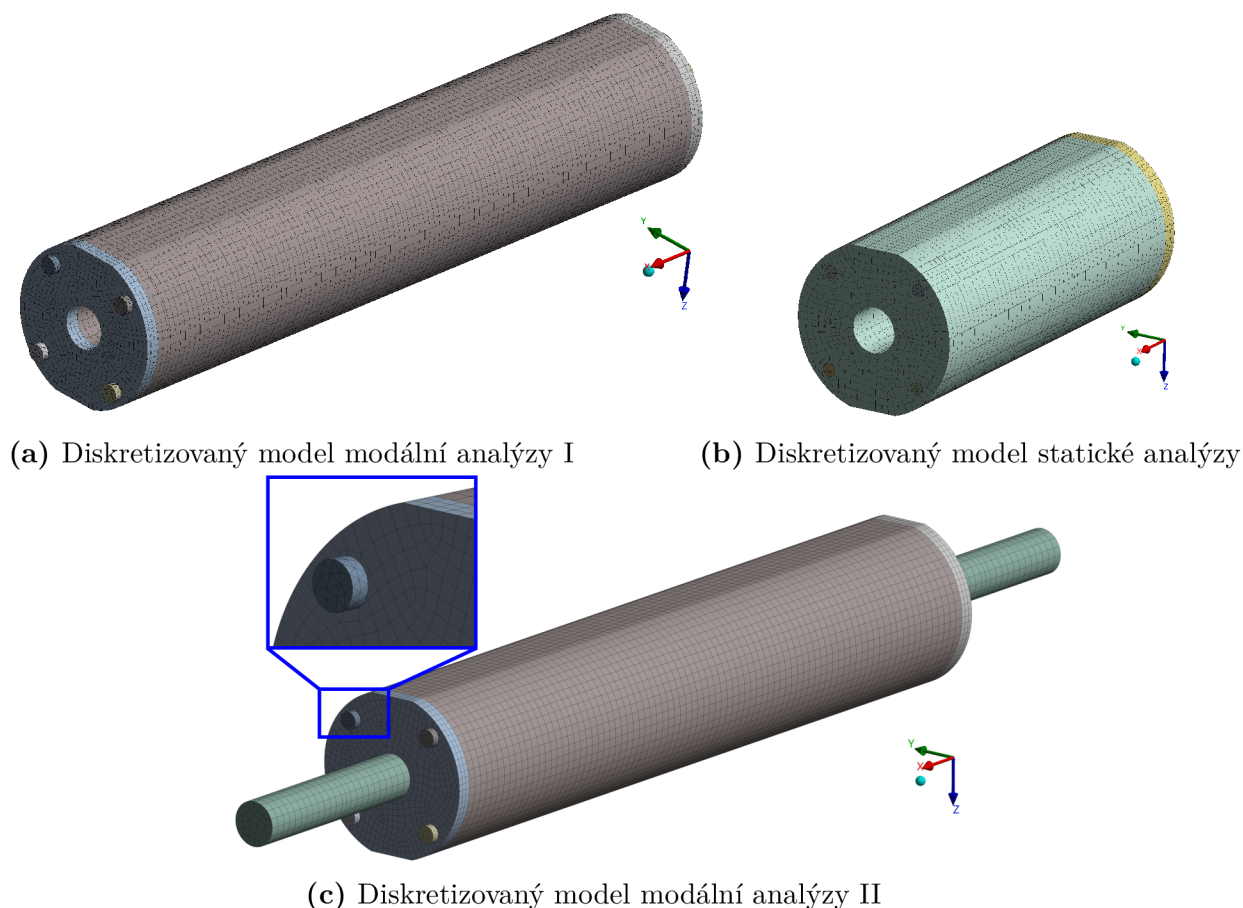
Do tab. 6.2 jsou zapsány počty uzlů a elementů vytvořených sítí jednotlivých analýz. Samotné konečnoprvkové sítě ukazuje obr. 6.3.

Tabulka 6.2: Parametry konečnoprvkových sítí

	Počet uzlů [-]	Počet elementů [-]
Statická analýza	127 161	38 071
Modální analýza I	246 011	74 230
Modální analýza II	187 047	60 752



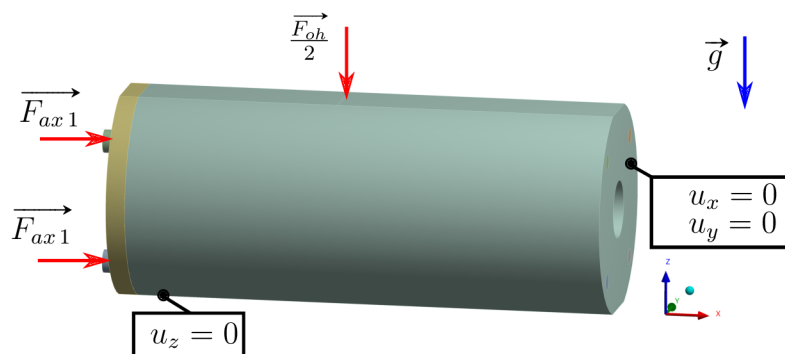
Obrázek 6.2: Objemový prvek SOLID 186



Obrázek 6.3: Diskretizované modely rotorového balení pro jednotlivé analýzy

6.4 Statická analýza

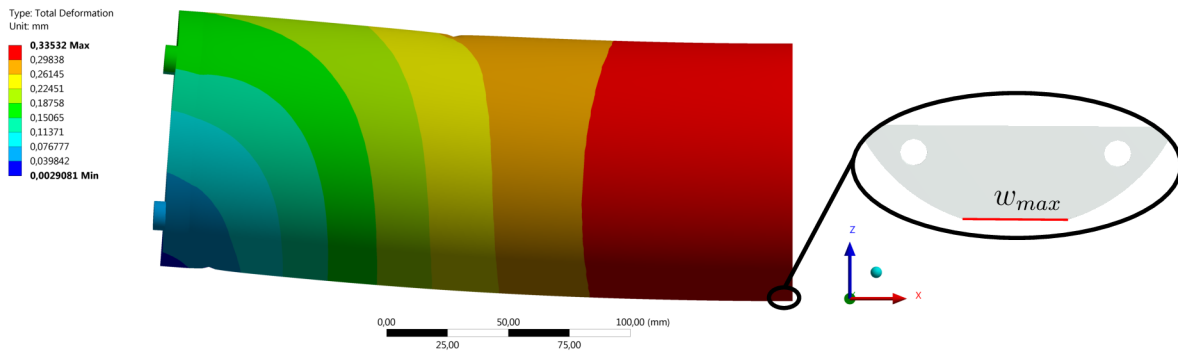
Jak bylo zmíněno výše, pro statickou analýzu je využít poloviční model geometrie (obr. 6.1b). Z důvodu použité symetrie je zamezeno všem uzlům na rozříznuté ploše posuvu ve směru osy x a y . Aby bylo dosaženo čtyřbodového ohybu, jsou předepsány nulové horizontální posuvy a silové zatížení v ose z na horní, respektive dolní ploše zkoseného válce – viz obr. 6.4. Do jednotlivých šroubů je nastaveno předpětí o konstantní hodnotě ve směru osy x z tab. 5.3. Při výpočtu je uvažována standardní hodnota gravitačního zrychlení v záporném směru osy z .



Obrázek 6.4: Model okrajových podmínek a zatížení pro statickou analýzu

6.4.1 Průhyby rotorového paketu

Průhyby paketu jsou vyhodnocovány na spodní hraně modelu (obr. 6.5) v nejbližší vzdálenosti od stahovací desky.



Obrázek 6.5: Celková deformace rotorového paketu pro E_{reg1}

Dosažené hodnoty maximálních průhybů pro rozdílné velikosti lisovacích sil a ekvivalentních modulů pružnosti jsou zaznamenány v tab. 6.3.

Tabulka 6.3: Průhyby rotorového paketu vypočítané metodou konečných prvků

F_{axO} [kN]	F_{oh} [kN]	E_{hod} [MPa]	E_{reg} [MPa]	w_{hod} [mm]	w_{reg} [mm]
40,00	20,00	12 852,37	11 540,90	0,29	0,32
29,30	20,00	10 875,08	12 852,37	0,35	0,30
27,20	19,30	6 996,30	10 494,45	0,48	0,35
20,00	11,60	5 963,50	6 559,85	0,34	0,32
16,00	7,90	5 318,43	4 963,87	0,26	0,28
10,40	4,80	3 877,74	3 231,45	0,22	0,26

Na první pohled je patrné, že vypočítané průhyby metodou konečných prvků jsou výrazně menší než hodnoty získané z experimentální zkoušky čtyřbodovým ohybem (tab. 5.3) a z použitých analytických vztahů (tab. 5.4). Pro porovnání jednotlivých metod stanovení průhybů jsou zapsány maximální průhyby do tab. 6.4.

Tabulka 6.4: Porovnání ekvivalentních modulů pro různé metody 4b ohybem

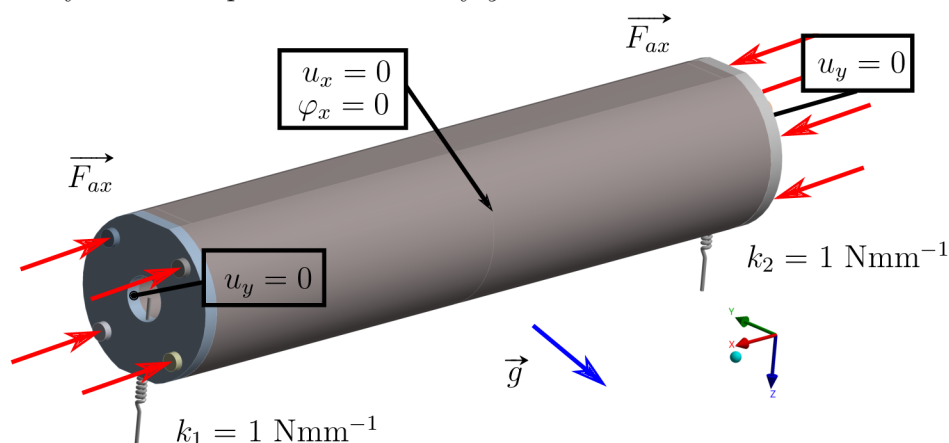
Ekv. modul E [MPa]		Průhyb w [mm]				$ \Delta w $ [%]	
E_{hod}	E_{reg}	Experiment		MKP		$ \Delta w_{hod} $	$ \Delta w_{reg} $
		w_{hod}	w_{reg}	w_{hod}	w_{reg}		
12 852,37	11 540,90	0,44	0,49	0,29	0,32	65,91	61,54
10 875,08	12 852,37	0,52	0,44	0,35	0,30	67,31	64,36
6 996,30	10 494,45	0,78	0,52	0,48	0,35	61,54	63,35
5 963,50	6 559,85	0,55	0,50	0,34	0,32	61,82	61,26
5 318,43	4 963,87	0,42	0,45	0,26	0,28	61,90	59,39
3 877,74	3 231,45	0,35	0,42	0,22	0,26	62,86	58,93

Z obdržených výsledků ze statické analýzy lze konstatovat, že ekvivalentní moduly pružnosti stanové z experimentální zkoušky čtyřbodovým ohybem nabývají vyšších hodnot než u metody konečných prvků, kde vypočítané průhyby vycházejí přibližně o 60 % menší než z experimentálních dat. Tyto značné rozdíly mohou být způsobeny například vlivem posouvající síly na příčný průřez, který nezohledňuje použitá rovnice průhybové čáry (4.13); nesplnění prutových předpokladů vazbových a zatěžovacích nebo nedodržení vzdáleností mezi profily u čtyřbodového ohybu při experimentu.

6.5 Modální analýza I

První modální analýza slouží k určení vlastních tvarů a vlastních frekvencí. Tato analýza bývá označována jako *Pre-Stressed Modal Analysis* a je složena ze dvou částí, jak plyne z názvu – ze statické analýzy s předpětím a z modální analýzy.

Do závitových tyčí je předepsáno předpětí o celkové velikosti F_{ax} z tab. 5.9. Aby bylo zamezeno pohybu ve směru závěsných lan (viz obr. 5.3), musí být předepsána okrajová podmínka $u_y = 0$ na vnitřních průměrech obou stahovacích desek. Z důvodu možné rotace modelu kolem své osy je uprostřed paketu na vnitřním průměru zafixována rotace v ose x spolu s posuvem. K dosažení statické určitosti jsou aplikovány na stahovací desky slabé pružné členy s tuhostí $k = 1 \text{ Nmm}^{-1}$ v ose z . Při výpočtu je uvažována standardní hodnota gravitačního zrychlení v záporném směru osy y .

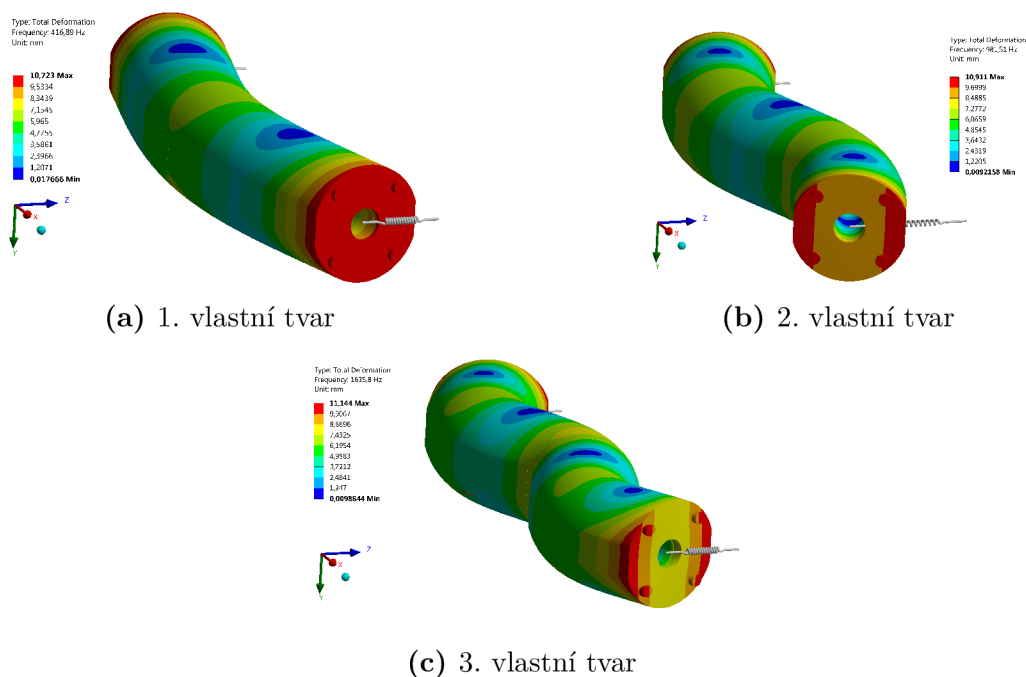


Obrázek 6.6: Model okrajových podmínek a zatížení pro modální analýzu I

6.5.1 Vlastní tvary a frekvence rotorového paketu

V kapitole 5.2.2 byly vykresleny první tři vlastní tvary do obr. 5.12 v rovině $x - z$. Vlastní frekvence z experimentální modální analýzy jsou vyhodnocovány v rovině $y - z$, z toho důvodu jsou vlastní tvary (obr. 6.7) a vlastní frekvence určovány v této rovině.

V první části je realizována modální analýza s ekvivalentními moduly pružnosti E_{f1} z tab. 5.9. Výstupem této analýzy jsou vlastní frekvence, které jsou porovnány s experimentálními hodnotami z tab. 5.7. Následnou optimalizační metodou *Screening*, která je zabudována v programu *ANSYS Workbench*, jsou vypočítány ekvivalentní moduly pružnosti optimalizované pro první vlastní frekvence. Výsledné hodnoty těchto modulů jsou zapsané v tab. 6.5.



Obrázek 6.7: Vlastní ohybové tvary rotorového paketu v rovině $y - z$

Porovnání ekvivalentních modulů pružnosti vypočítaných z ohybového kmitání a metodou konečných prvků ukazuje tab. 6.6, kde je ukázán procentuální rozdíl mezi analyzovanými moduly a prvními vlastními frekvencemi stanovené jednotlivými metodami.

Tabulka 6.5: Optimalizované hodnoty ekvivalentního modulu pružnosti

Ekv. modul E [MPa]	Frekvence f [Hz]		
	E_{opt}	f_1	f_2
12 954,1	416,9	981,5	1 635,8
11 206,4	388,7	916,9	1 531,8
10 096,4	369,9	875,6	1 468,0
8 596,3	345,6	812,3	1 357,8
7 063,2	313,6	739,2	1 231,9
4 896,1	262,5	614,2	1 022,2

Tabulka 6.6: Porovnání ekvivalentních modulů pro různé metody modální zkouškou

Ekv. modul E [MPa]	Vlastní frekvence f [Hz]	Vlastní frekvence f [Hz]							
		MKP			Experiment			$ \Delta E, f_1 $ [%]	
		E_{f_1}	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	$ \Delta E $
12 954,1	11 987,1	416,9	981,5	1 635,8	416,0	971,0	1 679,0	7,5	0,2
11 206,4	10 427,7	388,7	916,9	1 531,8	388,0	889,0	1 557,0	7,0	0,2
10 096,4	9 482,6	369,9	875,6	1 468,0	370,0	833,0	1 486,0	6,1	0,1
8 596,3	8 244,5	345,6	812,3	1 357,8	345,0	772,0	1 379,0	4,1	0,2
7 063,2	6 786,0	313,6	739,2	1 231,9	313,0	685,0	1 233,0	3,9	0,2
4 896,1	4 754,8	262,5	614,2	1 022,2	262,0	546,0	996,0	2,9	0,2

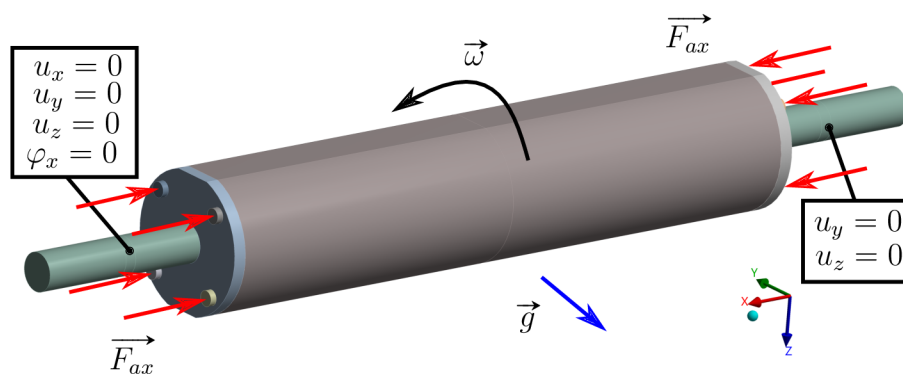
Rozdíl mezi metodou konečných prvků a Bernoulliho-Eulerovou teorií prutů (viz rovnice (5.29)) při stanovení ekvivalentních modulů pružnosti nepřesáhl 10 %. Téměř identická shoda nastala u prvních vlastních frekvencí obdržených z experimentální modální analýzy.

Oproti zkoušce čtyřbodovým ohybem, kde jsou rozdíly maximálních průhybů okolo 60 % (viz kapitola 6.4.1), vyšlo najevo, že hodnoty ekvivalentních modulů pružnosti spolu s vlastními frekvencemi stanovené experimentální modální analýzou jsou shodné s vypočítanými hodnotami z metody konečných prvků.

6.6 Modální analýza II

Cílem této části kapitoly je stanovit kritické otáčky paketu nalisovaného na hřídeli. Parametry hřídele jsou omezeny pouze průměrem, který musí být totožný s vnitřním průměrem stahovacích desek. Hřídel je uložena v kuličkových ložiscích, která jsou zvolena identická z katalogu SKF na základě průměru hřídele. Obdobně jako v modální analýze I (viz kapitola 6.5) je realizována nejdříve statická analýza, na kterou naváže modální analýza.

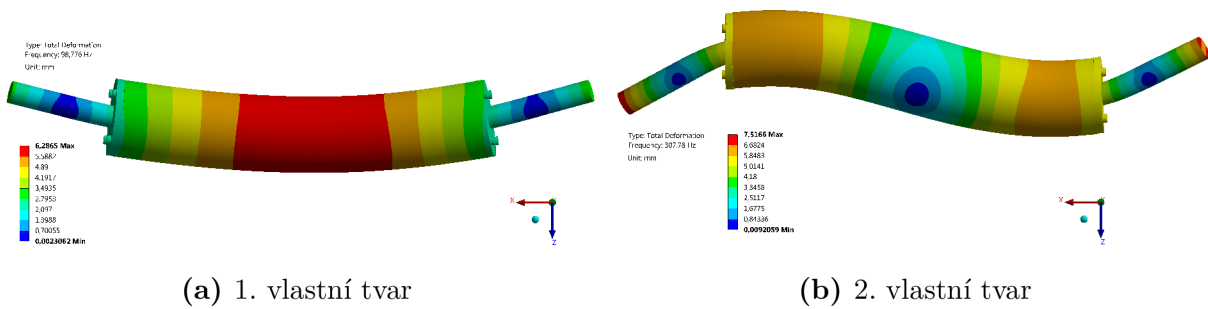
Do závitových tyčí je předepsáno předpětí o celkové velikosti F_{ax} , které je převzato z tab. 5.9. Ložisko je zvoleno SKF 16006 [36], jehož šířka odpovídá $B = 9$ mm. Rozmístění ložisek je symetrické vůči paketu a v obou ložiscích jsou zamezeny posuvy (obr. 6.8) v osách y a z . Aby byla splněna statická určitost úlohy, musí být zamezen posuv a rotace v ose x na prvním ložisku. Velikost tlumení je stanovena na základě vypočítaných hodnot poměrného útlumu (tab. 5.8) na hodnotu 0,03. Ve výpočtu jsou zahrnuty gyroskopické účinky a gravitační zrychlení je uvažováno stejně jako v první modální analýze v záporném směru osy y . Aby bylo možné stanovit kritické otáčky paketu, je zapotřebí předepsat úhlovou rychlost ω , jejíž velikost je v rozsahu $1 - 2200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



Obrázek 6.8: Model okrajových podmínek a zatížení pro modální analýzu II

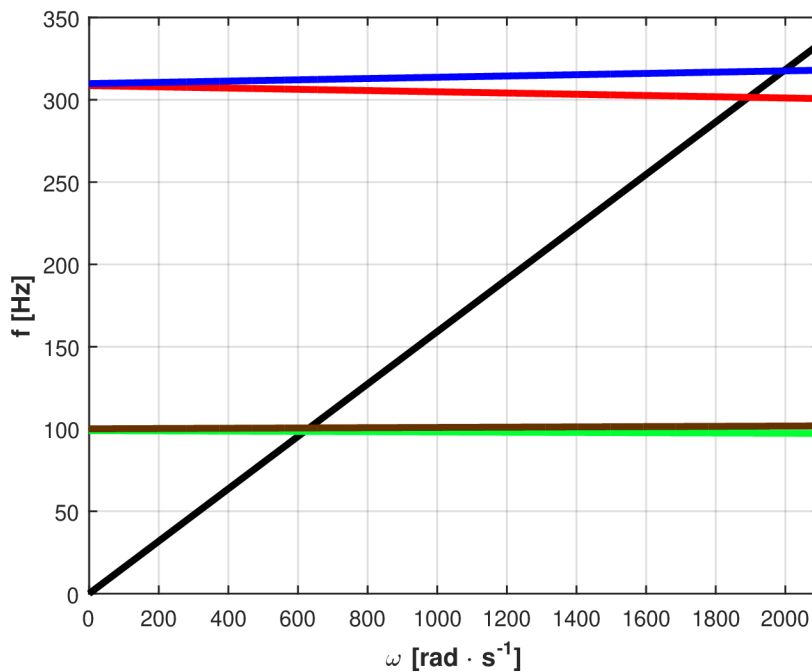
6.6.1 Kritické otáčky rotorového paketu

Kritické otáčky jsou počítány pro ekvivalentní moduly pružnosti (tab. 5.10) z čtyřbodového ohybu E_{reg} a modální analýzy E_{f1} pro první dva vlastní ohybové tvary (obr. 6.9) nehledě na to, zda se jedná o tvary v rovině $x - z$ nebo $y - z$. Protože rozdíly mezi optimalizovanými hodnoty E_{opt} získaných z metody konečných prvků a moduly pružnosti E_{f1} z Bernoulli-Eulerovy teorie prutů nepřesahují 10 %, jsou použity k výpočtu kritických otáček ekvivalentní moduly E_{f1} .



Obrázek 6.9: Vlastní tvary rotorového paketu nalisovaného na hřídeli v rovině $x - z$

Pomocí tzv. Campbellových diagramů (obr. 6.10) jsou nalezeny pro zmíněné ohybové tvary odpovídající kritické otáčky. Jak uvádí literatura [37], Campbellův diagram popisuje závislost vlastní frekvence na konkrétním parametru, většinou to bývá úhlová rychlost nebo otáčky stroje. V předkládané práci je tímto parametrem použita úhlová rychlost z kapitoly 6.6. Campbellův diagram primárně slouží k predikci rezonančních stavů analyzovaného objektu, v tomto případě se jedná o kritické otáčky paketu nalisovaného na hřídeli.



Obrázek 6.10: Campbellův diagram pro rotorový paket nalisovaný na hřídeli

Předchozí graf ukazuje Campbellův diagram pro celkovou lisovací sílu $F_{ax} = 9,2$ kN a ekvivalentní modul pružnosti $E_{f1} = 4754,8$ MPa. Z tohoto grafu je patrné, že došlo k rozdělení vlastních frekvencí vlivem gyroskopických účinků. Proto jsou kritické otáčky vyhodnocovány v rovině $x - z$ (obr. 6.9), kde dosahují nižších hodnot vlastních frekvencí viz obr. 6.10.

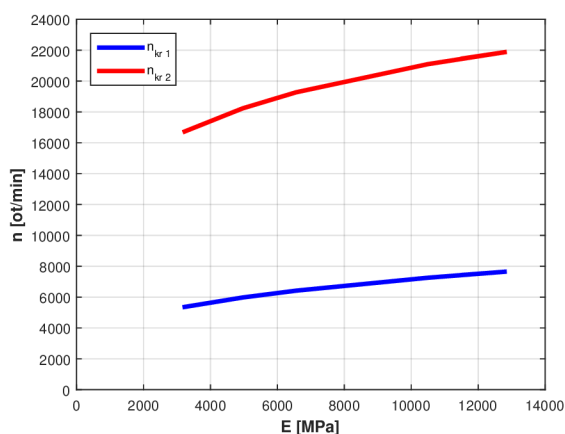
Kritické otáčky jsou vypočítány podle následujícího vztahu, který vychází z rovnice (5.28)

$$n_{kr} = \frac{\omega}{2\pi} \cdot 60 = f \cdot 60. \quad [\text{ot} \cdot \text{min}^{-1}] \quad (6.1)$$

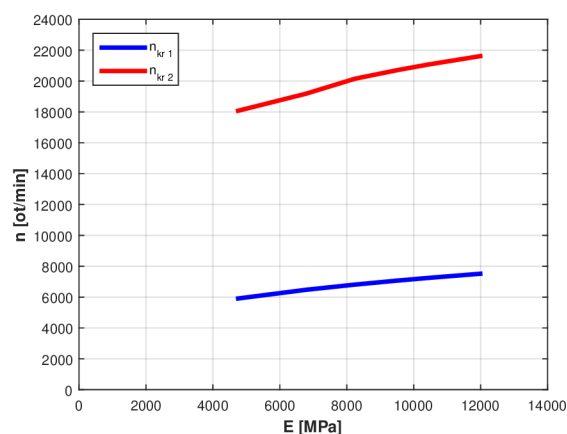
Vypočítané hodnoty kritických otáček pro rozdílné velikosti lisovacích sil a ekvivalentních modulů pružnosti jsou zaznamenány v tab. 6.7 a graficky na obr. 6.11.

Tabulka 6.7: Porovnání kritických otáček pro různé ekvivalentní moduly pružnosti

Ekv. modul		Předpětí		Kritické otáčky n [ot · min ⁻¹]			
E [MPa]		F_{ax} [N]		4b ohyb		EMA	
E_{hod}	E_{reg}	F_{axO}	F_{axE}	n_{kr1}	n_{kr2}	n_{kr1}	n_{kr2}
11 540,9	11 987,1	40,0	32,0	7 438,5	21 465,9	7 514,2	21 616,7
12 852,4	10 427,7	29,3	22,4	7 653,9	21 890,8	7 243,2	21 069,6
10 494,5	9 482,6	27,2	18,0	7 255,1	21 094,4	7 064,9	20 697,1
6 559,9	8 244,5	20,0	16,4	6 417,9	19 271,4	6 810,8	20 151,9
4 963,9	6 786,0	16,0	11,6	5 975,8	18 231,5	6 475,5	19 183,6
3 231,5	4 754,8	10,4	9,2	5 364,9	16 732,3	5 912,1	18 076,8



(a) Zkouška čtyřbodovým ohybem – E_{reg}



(b) Experimentální modální analýza – E_{f1}

Obrázek 6.11: Závislost kritických otáček na ekvivalentních modulech pružnosti

Rozdíly mezi vypočítanými kritickými otáčkami vyjádřeny v procentech jsou zapsané v tab. 6.8. Z těchto výsledků je patrné, že největší rozdíl u kritických otáček nabývá hodnoty přibližně 10 %.

Tabulka 6.8: Procentuální rozdíl kritických otáček

$ \Delta n_{kr} $ [%]	
$ \Delta n_{kr1} $	$ \Delta n_{kr2} $
1,0	0,7
5,4	3,8
2,6	1,9
6,1	4,6
8,4	5,2
10,2	8,0

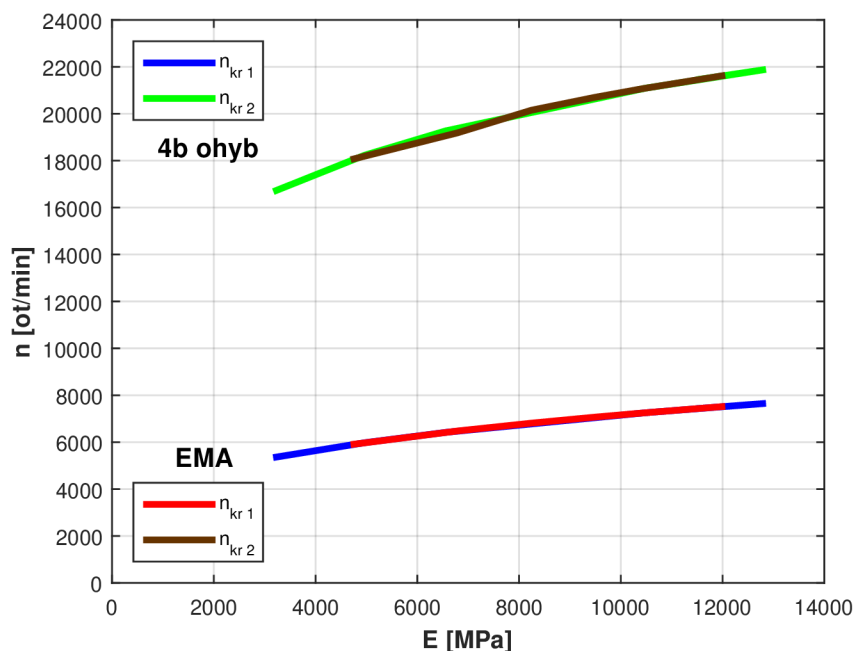
6.7 Porovnání výsledků

V této části kapitoly jsou porovnány výsledky obdržené metodou konečných prvků v prostředí *ANSYS Workbench* s experimentálně analytickými výsledky. Jako první jsou vytvořeny tři konečnoprvkové modely geometrie rotorového paketu, které jsou použity pro jednotlivé typy analýz: statickou a dvě modální.

Statická analýza reprezentuje zkoušku čtyřbodovým ohybem. Z důvodu symetrie paketu je použit poloviční model geometrie. Protože z experimentální zkoušky čtyřbodovým ohybem jsou stanoveny maximální průhyby pro rozdílné ekvivalentní moduly pružnosti, jsou vyhodnocovány tyto průhyby ve statické analýze. Výsledky maximálních průhybů pro odlišné moduly pružnosti ukazuje tab. 6.3 a porovnání s experimentálními daty tab. 6.4, kde průhyby metodou konečných prvků vycházejí přibližně o 60 % menší oproti experimentu.

První modální analýza je nastavena, aby simulovala volné kmitání paketu. Hlavním cílem této analýzy je optimalizovat ekvivalentní moduly pružnosti na první vlastní frekvence, které jsou obdrženy z experimentální modální analýzy. Vypočítané ekvivalentní moduly pružnosti metodou konečných prvků jsou zapsané v tab. 6.5. Porovnání optimalizovaných modulů s moduly vypočítaných z Bernoulliho-Eulerovy teorie prutů je zaznamenáno v tab. 6.6, kde moduly pružnosti metodou konečných prvků vycházejí přibližně o 8 % vyšší oproti ekvivalentním modulům ze zmíněné teorie.

Druhá modální analýza slouží k výpočtu kritických otáček paketu nalisovaného na hřídeli pro rozdílné ekvivalentní moduly pružnosti. Kritické otáčky jsou stanoveny pro první dvě vlastní frekvence pomocí Campbellových diagramů (obr. 6.10) pro moduly pružnosti použité v statické a modální analýze. Výsledné hodnoty kritických otáček jsou zapsány do tab. 6.7. Vzájemné porovnání vypočítaných hodnot ukazuje tab. 6.8 a obr. 6.12, kde maximální procentuální rozdíl otáček dosahuje přibližně 10 %.



Obrázek 6.12: Porovnání kritických otáček pro rozdílné moduly pružnosti

Z dosažených výsledků je patrné, že maximální průhyby paketu s ekvivalentními moduly pružnosti stanovené z experimentální zkoušky čtyřbodovým ohybem nabývají výrazně vyšších hodnot oproti průhybům určených z metody konečných prvků. Naopak moduly pružnosti a první vlastní frekvence určené z experimentální modální analýzy jsou v dobré shodě s výsledky získaných z metody konečných prvků. Lze tedy konstatovat, že experimentální zkouška čtyřbodovým ohybem doplněná o analytickou teorii průhybové čáry není vhodná k určení ekvivalentního modulu pružnosti, respektive kritických otáček. Jako vhodnou zkouškou vyšla najevo experimentální modální analýza kombinovaná s Bernoulliho-Eulerovou teorií prutů. Tato zkouška je levnější a rychleji proveditelná oproti zkoušce čtyřbodovým ohybem.

7 Závěr

Cílem předkládané diplomové práce bylo provést rešeršní studii současných přístupů k modelování rotorového paketu, pomocí experimentálních zkoušek stanovit hodnoty ekvivalentních modulů pružnosti pro rozdílné velikosti lisovacích sil a na základě těchto modulů vypočítat kritické otáčky rotorového paketu nalisovaného na hřídeli.

V rámci teoretického poznání problematiky modelování rotorových paketů v dynamických výpočtech jsou nastudovány a zpracovány modely rotorů založené na diferenciálním přístupu a metodě konečných prvků (MKP). Jako vhodnější modely jsou posouzeny modely rotorů založené na MKP, které lze rozdělit podle modelu materiálu na homogenní izotropní a transversálně ortotropní.

Dále jsou odvozeny rovnice pro čtyřbodový ohyb a ohybové kmitání prutu, které jsou použity u experimentálních zkoušek v kapitole 5 při zjišťování ekvivalentních modulů pružnosti. Součástí této kapitoly jsou vypočítané, respektive stanovené parametry, které ovlivňují použité závitové tyče v paketu.

Na základě těchto výpočtů je u experimentální zkoušky čtyřbodovým ohybem stanovena maximální hodnota lisovací síly v jedné závitové tyči $F_{ax1} = 10$ kN, která je vyvozena utahovacím momentem o velikosti $M_u = 35$ Nm. Cílem této zkoušky je určit ohybové tuhosti rotorového paketu pro různé hodnoty lisovacích sil, respektive utahovacích momentů, z kterých jsou následně vypočítány ekvivalentní moduly pružnosti. Výsledné hodnoty zmíněných modulů jsou v rozmezí 3 000 – 13 000 MPa a zaznamenané v tab. 5.5.

Druhou zkouškou je experimentální modální analýza, z které jsou obdrženy vlastní ohybové tvary a vlastní frekvence rotorového paketu. Velikosti utahovacích momentů jsou zvoleny identické jako u zkoušky čtyřbodovým ohybem. Změřené velikosti axiálních sil v závitových tyčích nabývají menších hodnot než u zkoušky čtyřbodovým ohybem. Hlavním důvodem tohoto poklesu je nárůst součinitele tření v závitových tyčích vlivem nečistot a změny tloušťky pozinkovaného povlaku v závitech. Z obdržených prvních tří vlastních frekvencí jsou vypočítány ekvivalentní moduly pružnosti pro rozdílné hodnoty lisovacích sil, když tyto moduly nabývají hodnot v rozsahu 2 000 – 12 000 MPa a jsou zapsané v tab. 5.7. Všechny vypočítané ekvivalentní moduly pružnosti z experimentálních zkoušek jsou zaznamenány v obr. 5.15.

K porovnání dosažených výsledků z experimentálních zkoušek je použita metoda konečných prvků v komerčním programu *ANSYS Workbench*. Za tímto účelem jsou vytvořeny tři konečnoprvkové modely geometrie rotorového paketu, které jsou použity v statické a modální analýze.

Z důvodu symetrie úlohy u zkoušky čtyřbodovým ohybem je v statické analýze aplikován poloviční model geometrie paketu. Pro rozdílné hodnoty ekvivalentních modulů pružnosti jsou numericky spočítány maximální průhyby rotorového paketu, které jsou porovnány s experimentálními a regresními hodnotami průhybů. Tyto dílčí výsledky jsou zaznamenané v tab. 6.4, z kterých je patrné, že rozdíly průhybů stanovené experimentálně a metodou konečných prvků dosahují až 60 %.

V první modální analýze je použit model geometrie celého rotorového paketu. Cílem této analýzy je optimalizovat ekvivalentní modul pružnosti na experimentálně zjištěné první dvě vlastní ohybové frekvence. Výsledky těchto modulů ukazuje tab. 6.6, kde rozdíl

mezi experimentálními hodnotami a vypočítaných MKP nepřesahuje 10%. Na základě výpočtů metodou konečných prvků vyšla najevo jako lepší experimentální zkouška k zjišťování ekvivalentního modulu pružnosti experimentální modální analýza. Výhoda této zkoušky spočívá především v rychlosti, jednoduchosti a v příznivější ceně při realizaci experimentu.

Druhá modální analýza slouží k stanovení kritických otáček rotorového paketu nalisovaného na hřídeli pomocí Campbellového diagramu (obr. 6.10) pro rozdílné hodnoty ekvivalentních modulů pružnosti. Vypočítané velikosti kritických otáček jsou zapsané v tab. 6.7, jejichž rozsah je pro první vlastní tvar v intervalu hodnot $5\,000 - 8\,000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$ a pro druhý vlastní tvar v rozmezí hodnot $16\,000 - 22\,000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$.

Závěrem lze konstatovat, že stanovených cílů, které byly definované na začátku práce, bylo úspěšně dosaženo. Výsledky této práce je možné využít a současně ověřit při stanovení ekvivalentního modulu pružnosti a kritických otáček rotorového paketu pro odlišnou geometrii, než byla použita. Zajímavým rozšířením by mohla být studie paketu s ortotropním modelem materiálu při výpočtovém modelování, která by mohla odhalit nové závislosti na kritických otáčkách nebo rozdílné velikosti modulů pružnosti v jednotlivých ortogonálních rovinách.

Seznam použité literatury

- [1] TONG, Wei. *Mechanical design of electric motors*. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2014. ISBN 978-1-4200-9143-4.
- [2] JANÍČEK, Přemysl. *Systémová metodologie: brána do řešení problémů*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2014. ISBN 978-80-7204-887-8.
- [3] TIWARI, Rajiv. *Rotor systems: analysis and identification*. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2018. ISBN 9781315230962.
- [4] GUNTER, Edgar J. *Fundamentals of Rotor-Bearing Dynamics Using Dyrobes – The Jeffcott Rotor* [online]. Charlottesville, 2002 [cit. 2020-04-13]. Dostupné z: https://dyrobes.com/wp-content/uploads/2016/04/Fundamentals-of-Rotor-Bearing-Dynamics-Using-Dyrobes-The-Jeffcott-Rotor-E.-J.-Gunter_linked.pdf.
- [5] GOODWIN, Michael J. *Rotordynamics '92: Proceedings of the International Conference on Rotating Machine Dynamics, Hotel des Bains, Venice, 28-30 April 1992*. New York: Springer-Verlag, 1992. ISBN 978-3-540-19754-6.
- [6] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, Robert L. a J. Z. ZHU. *The finite element method: Its basis and fundamentals*. Seventh edition. Amsterdam: Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2013. ISBN 978-1-85617-633-0.
- [7] ISHIKAWA, Takeo. Analysis of Natural Frequency, Radial Force and Vibration of Induction Motors Fed by PWM Inverter. In: ARAÚJO, Prof. Rui Esteves (ed.). *Induction Motors* [online]. Rijeka: IntechOpen, 2012, kap. 9 [cit. 2020-05-02]. Dostupné z DOI: 10.5772/49950.
- [8] PUPADUBSIN, R.; STEVEN, A.; WIDMER, J. D. a B. C. MECROW. Mechanical material properties for structural simulation model of switched reluctance machines. *2016 XXII International Conference on Electrical Machines (ICEM)* [online]. Lausanne, 2016, s. 2293–2299 [cit. 2020-04-19]. Dostupné z DOI: 10.1109/ICELMA CH.2016.7732841.
- [9] ONDRÁČEK, Emanuel. *Mechanika těles: pružnost a pevnost II*. Vyd. 4., přeprac., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-214-3260-8.
- [10] JONES, Robert M. *Mechanics of composite materials*. 2nd ed. Philadelphia: Taylor & Francis, 1999. ISBN 1-56032-712-X.
- [11] VRBKA, Jan. *Mechanika kompozitů* [online]. Brno: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT, 2008 [cit. 2020-04-24]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/priloha.php?dpid=83340.
- [12] JANÍČEK, Přemysl; ONDRÁČEK, Emanuel a Jan VRBKA. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. 2. vyd. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 1992. ISBN 802140468x.
- [13] HORNÍKOVÁ, Jana; BURŠA, Jiří a Pavel ŠANDERA. *Pružnost a pevnost: Interaktivní učební text*. Brno: CERM, 2003. ISBN 80-7204-268-8.

- [14] JANÍČEK, Přemysl a Zdeněk FLORIAN. *Mechanika těles: úlohy z pružnosti a pevnosti I*. 4.přepřac. vyd., V Akademickém nakladatelství CERM 1. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2655-1.
- [15] TIMOSHENKO, Stephen. *History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [16] BREPTA, Rudolf; TUREK, František a Ladislav PŮST. *Mechanické kmitání*. Praha: Sobotáles, 1994. ISBN 80-901684-8-5.
- [17] TIMOSHENKO, S.P. X. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* [online]. 2009, roč. 43, č. 253, s. 125–131 [cit. 2020-01-29]. ISSN 1941-5982. Dostupné z DOI: 10.1080/14786442208633855.
- [18] THOMSON, William Tyrell. *Theory of Vibration with Applications*. 4th ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1993. ISBN 0139153233.
- [19] WALDSCHMIDT, Michel. Algebraic Independence of Transcendental Numbers: A Survey. *Number Theory* [online]. 2000, s. 497–527 [cit. 2020-01-29]. ISBN 978-3-0348-7025-2. Dostupné z DOI: 10.1007/978-3-0348-7023-8_23.
- [20] JANÍČEK, Přemysl. *Technický experiment*. Praha: VN MON, 1989.
- [21] VLK, Miloš; HOUFEK, Lubomír; HLAVOŇ, Pavel a kol. *Experimentální mechanika* [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, 2003 [cit. 2020-01-30]. Dostupné z: http://ean2011.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/Experimentalni_mechanika.pdf.
- [22] Mechanické vlastnosti ocelových šroubů. *Šroub a Matka* [online]. c2000–2020 [cit. 2020-02-02]. Dostupné z: <https://www.sroubamatka.cz/cs/technicke-informace/mechanicke-vlastnosti-ocelovych-sroubu.html>.
- [23] SVOBODA, Pavel; BRANDEJS, Jan a František PROKEŠ. *Výběry z norem pro konstrukční cvičení*. Vyd. 4. Brno: CERM, 2011. ISBN 978-80-7204-751-2.
- [24] VLK, Miloš. *Mezní stavy a spolehlivost*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 1991. ISBN 80-214-0386-1.
- [25] VDI 2230. *Verein Deutscher Ingenieure – Systematic calculation of high duty bolted joints*. Düsseldorf: VDI Publisher, February 2003.
- [26] SHIGLEY, Joseph Edward; MISCHKE, Charles R. a Richard Gordon BUDYNAS. *Konstruování strojních součástí*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2010. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [27] LEINVEBER, Jan a Pavel VÁVRA. *Strojnické tabulky: pomocná učebnice pro školy technického zaměření*. 2., dopl. vyd. Úvaly: Albra, 2005. ISBN 80-7361-011-6.
- [28] Through-Hole Load Cells. *Omega engineering* [online]. c1995–2020 [cit. 2020-02-19]. Dostupné z: https://www.omegaeng.cz/pptst_eng/LC8150.html.
- [29] SYMON, Keith R. *Mechanics*. 3rd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1971. ISBN 0-201-07392-7.

-
- [30] Experimental modal analysis software. *OpenModal* [online]. c2014-2020 [cit. 2020-06-11]. Dostupné z: <http://www.openmodal.com/>.
- [31] BROWN, James Ward a Ruel V. CHURCHILL. *Complex variables and applications*. 7th ed. Boston: McGraw-Hill Higher Education, 2004. ISBN 0072872527.
- [32] BRAUN, Simon; EWINS, David J. a Singiresu S. RAO. *Encyclopedia of vibration*. San Diego: Academic Press, 2002. ISBN 0-12-227085-1.
- [33] CASIANO, Matthew Joseph. *Extracting Damping Ratio From Dynamic Data and Numerical Solutions* [online]. Hunstville (Alabama): Marshall Space Flight Center, September 2016 [cit. 2020-03-05]. Dostupné z: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20170005173.pdf>.
- [34] NANDI, A.; NEOGY, S. a D. ROY. A Simple Experiment to Demonstrate the Effect of Axial Force on Natural Frequency of Transverse Vibration of a Beam. *International Journal of Mechanical Engineering Education* [online]. 2010, roč. 38, č. 1, s. 1–8 [cit. 2020-03-19]. ISSN 0306-4190. Dostupné z DOI: 10.7227/IJMEE.38.1.1.
- [35] DEKKING, Michel. *A modern introduction to probability and statistics: understanding why and how*. London: Springer, 2005. ISBN 1-85233-896-2.
- [36] Deep groove ball bearings. *SKF* [online]. c2003–2020 [cit. 2020-03-26]. Dostupné z: <https://www.skf.com/group/products/rolling-bearings/ball-bearings/deep-groove-ball-bearings/productid-16006>.
- [37] MUSZYŃSKA, Agnieszka. *Rotordynamics*. Boca Raton: Taylor & Francis, 2005. ISBN 0824723996.
- [38] JULIŠ, Karel a Rudolf BREPTA. *Mechanika II. díl: Dynamika*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1987.
- [39] Theory of mechanical vibrations. *Internet Archive Waybeck Machine* [online]. 1980, s. 150 [cit. 2020-01-30]. Dostupné z: <http://web.archive.org/web/20130413085840/http://www.mexanik.ru/0376/s150.pdf>.
- [40] KARNOVSKY, Igor A. a Olga LEBED. *Advanced Methods of Structural Analysis* [online]. Boston, MA: Springer US, 2010 [cit. 2020-01-30]. ISBN 978-1-4419-1046-2. Dostupné z DOI: 10.1007/978-1-4419-1047-9.

Seznam použitých symbolů a zkratek

Symbol	Jednotka	Význam
\mathbf{A}	$[-]$	matice soustavy
A	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$	amplituda zrychlení
A_{Re}	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$	reálná složka amplitudy zrychlení
A_{Im}	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$	imaginární složka amplitudy zrychlení
a, b	$[\text{mm}]$	rozměry nosníku (obr. 4.7)
a	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$	normálové zrychlení (obr. A.1)
B	$[\text{mm}]$	šířka ložiska
b, h, R	$[\text{mm}]$	rozměry příčného průřezu (obr. 4.2)
\mathbf{b}	$[-]$	vektor pravých stran
b', h', y^*, z^*	$[\text{mm}]$	pomocné veličiny u příčného průřezu (obr. 4.3)
b_p	$[-]$	poměrný útlum
c_o	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$	příčná rychlost vlnění
C_1, \dots, C_4	$[-]$	konstanty z rovnic ohybového kmitání
C_1, \dots, C_6	$[\text{N} \cdot \text{mm}, \text{N} \cdot \text{mm}^2, \text{N} \cdot \text{mm}^3]$	integrační konstanty z diferenciálních rovnic průhybové čáry u čtyřbodového ohybu
D, d	$[\text{mm}]$	průměry děr u příčného průřezu (obr. 4.5)
D_a	$[\text{mm}]$	průměr sražení u závitu
d_i, D_i	$[\text{mm}]$	průměry závitu
D_{Km}	$[\text{mm}]$	efektivní průměr třecího momentu na hlavě šroubu
d_W	$[\text{mm}]$	průměr dosedací plochy závitu
E	$[\text{MPa}, \text{Pa}]$	Youngův modul pružnosti v tahu
e	$[\text{mm}]$	excentricita hřídele
$E_{analyt}, E_{regrese}$	$[\text{MPa}]$	ekvivalentní moduly pružnosti paketu (obr. 2.4)
E_{exp}, E_{optim}	$[\text{MPa}]$	ekvivalentní moduly pružnosti paketu (obr. 2.5)
E_{eqi}	$[\text{MPa}]$	ekvivalentní moduly pružnosti stanovené z analytických rovnic
E_{fi}	$[\text{MPa}]$	ekvivalentní moduly pružnosti stanovené z experimentální modální analýzy
E_{hod}, E_{reg}	$[\text{MPa}]$	ekvivalentní moduly pružnosti stanovené ze zkoušky čtyřbodovým ohybem
E_{opt}	$[\text{MPa}]$	optimalizované hodnoty ekvivalentního modulu pružnosti obdržené z programu <i>ANSYS Workbench</i>
E_{Pr}	$[\text{MPa}]$	ekvivalentní modul pružnost zahrnující předpětí
$E_{0.5}$	$[\text{MPa}]$	střední hodnota ekvivalentního modulu pružnosti
EI	$[\text{N} \cdot \text{mm}^2]$	ohybová tuhost rotoru
F	$[\text{N}]$	síla
f	$[\text{Hz}]$	frekvence, vlastní frekvence

f	[-]	součinitel tření
$f(t)$	[N]	vnější zatížení (obr. 3.2)
F_{ax}	[N]	síla předpětí vztažena na 4 šrouby
F_{axE}	[N]	celková síla předpětí použitá u experimentální modální analýzy
F_{axO}	[N]	celková síla předpětí použitá u experimentální zkoušky čtyřbodovým ohybem
F_{ax1}	[N]	síla předpětí vztažena na 1 šroub
F_i, F_M	[N]	síla předpětí ve šroubu
F_{L1}, F_{L2}	[N]	maximální hodnoty lisovacích sil k MS pružnosti
F_{max}	[N]	hodnota lisovací síly na mezi kluzu
F_{oh}	[N]	síla u experimentální zkoušky čtyřbodovým ohybem
F_p	[N]	síla chodu na prázdko zkušebního stroje
f_{vl}	[Hz]	vlastní frekvence rotorového paketu (obr. 2.5)
F, \dots, F_B	[N]	síly působící na nosník (obr. 4.8)
g	[m · s ⁻²]	gravitační zrychlení
H_1	[mm]	nosná výška závitů
J_y, I	[mm ⁴]	osový kvadratický moment
j_y	[m]	kvadratický poloměr průřezu
J_{yT}	[mm ⁴]	osový kvadratický moment k těžišti
K	[-]	součinitel utahovacího momentu
k	[-]	směrnice přímky, koeficient přímé úměrnosti
k	[N · mm ⁻¹]	tuhost
k_{cel}	[N · mm ⁻¹]	tuhost experimentální sestavy
k_{eff}, k_b	[N · mm ⁻¹]	tuhost rotoru, ložisek (obr. 3.1 a 3.2)
k_k	[-]	součinitel bezpečnosti k MS
k_{rot}	[N · mm ⁻¹]	tuhost rotoru
k_{stroj}	[N · mm ⁻¹]	tuhost zkušebního stroje
L	[mm]	délka hřídele (obr. 3.1 a 3.2)
L, a	[mm]	rozměry nosníku (obr. 4.13)
M, M_u, M_i	[Nm]	utahovací moment
m	[kg]	hmotnost
m	[mm]	výška matice
m_L	[kg · m ⁻¹]	hmotnost na jednotku délky nosníku
M_o	[N · mm]	ohybový moment
M_S	[Nm]	utahovací moment stanovený podle Shigleyho
M_A, M_V	[Nm]	utahovací moment stanovený normou VDI
N	[N]	normálová síla
n, n_{kr}	[ot · min ⁻¹]	otáčky, kritické otáčky
n_{krit}	[ot · min ⁻¹]	kritické otáčky rotorového paketu (obr. 2.4 a 2.5)
n_z	[-]	počet závitů v matici

\mathbf{o}	[-]	nulový vektor
P	[mm]	rozteč závitů
p	[MPa]	tlak v závitě
Q	[-]	faktor kvality
$q(x, t)$	[N · m ⁻¹]	vnější jednotkové zatížení (obr. A.1)
R	[mm]	poloměr kruhu u kruhové výseče (obr. 4.4)
$Rp_{0,2}$	[MPa]	smluvní mez kluzu
R_s, h_s	[mm]	pomocné rozměry u příčného průřezu (obr. 4.5)
S	[mm ²]	průřez
T	[N]	posouvající síla
T	[N]	axiální síla
$T(t)$	[-]	funkce času
t	[s]	čas
U, V, S, T	[-]	Krylovovy (Rayleighovy) funkce
u	[mm]	posuv
u_x, u_y, u_z	[mm]	posuvy bodů v příčných osách
v	[m · s ⁻¹]	obvodová rychlost
$W(x)$	[-]	funkce polohy
w	[mm]	průhyb
w_{exp}	[mm]	maximální průhyb paketu stanovený z experimentální zkoušky čtyřbodovým ohybem
$w_{exp}, w_{reg}, w_{max}$	[mm]	maximální průhyby rotorového paketu (obr. 2.4)
w_{hod}	[mm]	maximální průhyb paketu stanovený pomocí úchylkoměru
w_{reg}	[mm]	maximální průhyb paketu stanovený z regresní analýzy
w_I, w_{II}, w_{III}	[mm]	průhyby střednice v jednotlivých řezech
\mathbf{x}	[-]	vektor neznámých
x, y, z	[m, mm]	kartézské souřadnice
x_I, x_{II}, x_{III}	[mm]	vzdálenosti v jednotlivých řezech podél střednice
α	[rad · s ⁻²]	úhlové zrychlení (obr. A.1)
$\frac{\alpha}{2}$	[°C]	pomocný úhel u příčného průřezu (obr. 4.2)
β, φ	[°C, rad]	pomocné úhly u příčného průřezu (obr. 4.4)
β	[-]	pomocná veličina u ohybového kmitání
γ	[°C]	pomocný úhel u příčného průřezu (obr. 4.5)
Δ	[%]	procentuální rozdíl dvou veličin
μ	[-]	Poissonovo číslo
μ_G	[-]	součinitel tření matice
μ_K	[-]	součinitel tření šroubu
ρ	[kg · m ⁻³]	hustota
ϱ	[m]	polární souřadnice vzdálenosti (obr. 4.4)

σ	[MPa]	napětí
φ	[m]	polární souřadnice úhlu (obr. 4.4)
φ	[m]	úhel natočení (obr. A.1)
φ_x	[rad]	natočení kolem osy x
ζ	[-]	damping ratio (poměrný útlum)
Ω	[rad · s ⁻¹]	vlastní úhlová frekvence
ω	[rad · s ⁻¹]	úhlová rychlost

Zkratka

Význam

CAD	computer-aided design (počítačem podporované projektování)
ČSN	Československá státní norma
DIN	Deutsches Institut für Normung (Německý ústav pro průmyslovou normalizaci)
EMA	experimentální modální analýza
FEM	Finite element method (metoda konečných prvků)
FFT	fast Fourier transform (rychlá Fourierova transformace)
ISO	International Organization for Standardization (Mezinárodní organizace pro normalizaci)
MKP	metoda konečných prvků
MS	mezní stav
RP	rotační pohyb
TP	translační pohyb
VDI	Verein Deutscher Ingenieure (sdružení německých inženýrů)
VVÚ	výsledné vnitřní účinky
3D	třídídimenzionální, trojrozměrný
4b	čtyřbodový

Seznam obrázků

2.1	Rotorový paket	17
2.2	Podmnožiny systému podstatných veličin. Předloha z [2, s. 60-A]	18
2.3	Rozměry rotorového paketu zakótované na modelu geometrie	20
2.4	Algoritmus zkoušky čtyřbodovým ohybem	22
2.5	Algoritmus modální zkoušky	22
3.1	Model s jedním stupněm volnosti. Předloha z [3, s. 22]	23
3.2	Jednohmotový model s jedním stupněm volnosti. Předloha z [3, s. 22]	24
3.3	Jeffcottův (Lavalův) rotor. Předloha z [3, s. 39]	25
4.1	Příčný průřez stahovací desky rozdělen na jednotlivé části	28
4.2	Detail trojúhelníku	28
4.3	Výpočet J_y trojúhelníku k posunutým osám	28
4.4	Výpočet J_y kruhové výseče k natočeným osám. Předloha z [14, s. 12]	29
4.5	Výpočet J_y malých děr ϕd k natočeným osám	30
4.6	Příčný průřez stahovací desky v programu <i>Autocad Mechanical</i>	31
4.7	Čtyřbodový ohyb nosníku	33
4.8	Uvolnění střednice prutu	33
4.9	VVÚ I. řezu	34
4.10	VVÚ II. řezu	35
4.11	VVÚ III. řezu	35
4.12	Průběhy VVÚ nosníku s deformovaným tvarem střednice	37
4.13	Uložení nosníku pro ohybové kmitání	38
5.1	Modifikovaná stahovací deska pro zkoušku čtyřbodovým ohybem	44
5.2	Rotorový paket se stahovacími desky a se siloměrem	48
5.3	Experimentální sestava pro čtyřbodový ohyb	48
5.4	Úchylkoměr pro snímání průhybu	49
5.5	Grafický záznam z obdržených dat ze zkoušky čtyřbodovým ohybem	50
5.6	Lineární regrese experimentálních dat	51
5.7	Porovnání ekvivalentních modulů pružnosti stanové čtyřbodovým ohybem	52
5.8	Průhybové čáry ve 3D pro ekvivalentní moduly pružnosti	53
5.9	Experimentální sestava pro EMA	54
5.10	Amplitudo-frekvenční charakteristika pro $M_u = 10 \text{ Nm}$	55
5.11	Šířka rezonančního pásma pro f_2 při $M_u = 10 \text{ Nm}$	56

5.12	Vlastní ohybové tvary rotorového paketu v rovině $x - z$	57
5.13	Závislost axiální síly na modulech pružnosti z ohybového kmitání	59
5.14	Reprezentativní ekvivalentní moduly pružnosti stanovené z experimentálních zkoušek	60
5.15	Ekvivalentní moduly pružnosti stanovené z experimentálních zkoušek	60
6.1	Modely geometrie rotorového paketu pro jednotlivé analýzy	61
6.2	Objemový prvek SOLID 186	62
6.3	Diskretizované modely rotorového paketu pro jednotlivé analýzy	63
6.4	Model okrajových podmínek a zatížení pro statickou analýzu	63
6.5	Celková deformace rotorového paketu pro E_{reg1}	64
6.6	Model okrajových podmínek a zatížení pro modální analýzu I	65
6.7	Vlastní ohybové tvary rotorového paketu v rovině $y - z$	66
6.8	Model okrajových podmínek a zatížení pro modální analýzu II	67
6.9	Vlastní tvary rotorového paketu nalisovaného na hřídeli v rovině $x - z$	68
6.10	Campbellův diagram pro rotorový paket nalisovaný na hřídeli	68
6.11	Závislost kritických otáček na ekvivalentních modulech pružnosti	69
6.12	Porovnání kritických otáček pro rozdílné moduly pružnosti	70

Seznam tabulek

4.1	Geometrické charakteristiky příčného průřezu stahovací desky	32
4.2	Výsledky analytického a numerického řešení kvadratických momentů	32
4.3	Výhody a nevýhody metod stanovení kvadratických momentů	32
5.1	Základní rozměry závitu M8 s hrubou roztečí. Předloha z [23, s. 12]	44
5.2	Porovnání vypočítaných utahovacích momentů	47
5.3	Parametry experimentální zkoušky čtyřbodovým ohybem	49
5.4	Ohybové tuhosti rotorového paketu stanovené čtyřbodovým ohybem	51
5.5	Ekvivalentní moduly pružnosti ze zkoušky čtyřbodovým ohybem	52
5.6	Parametry experimentální modální analýzy	54
5.7	Vlastní frekvence z experimentální modální analýzy	55
5.8	Vypočítané odhady poměrného útlumu	57
5.9	Ekvivalentní moduly pružnosti stanové z ohybového kmitání	58
5.10	Porovnání ekvivalentních modulů pružnosti z experimentálních zkoušek	59
6.1	Materiálové charakteristiky modelů rotorového paketu	62
6.2	Parametry konečnoprvkových sítí	62
6.3	Průhyby rotorového paketu vypočítané metodou konečných prvků	64
6.4	Porovnání ekvivalentních modulů pro různé metody 4b ohybem	64
6.5	Optimalizované hodnoty ekvivalentního modulu pružnosti	66
6.6	Porovnání ekvivalentních modulů pro různé metody modální zkouškou	66
6.7	Porovnání kritických otáček pro různé ekvivalentní moduly pružnosti	69
6.8	Procentuální rozdíl kritických otáček	69

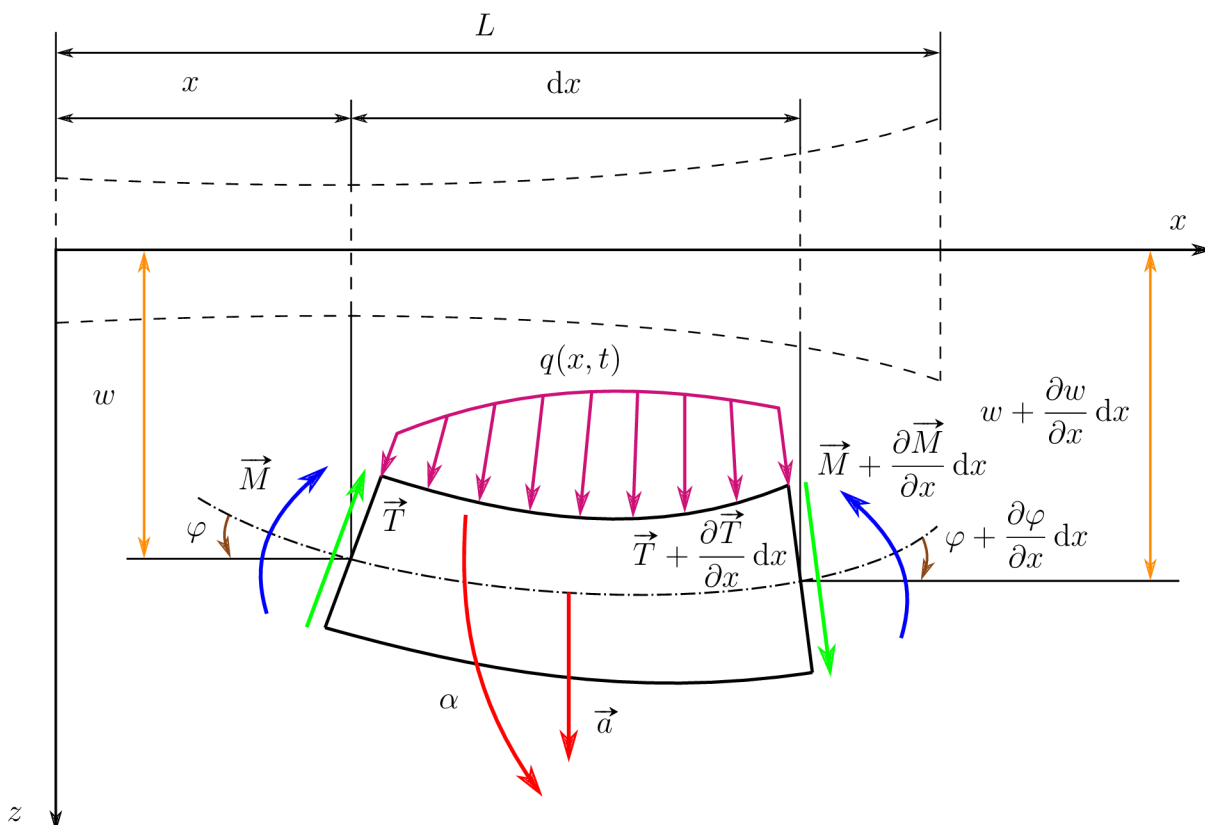
Seznam příloh

Příloha A

Příloha B

Příloha A

Tato příloha je věnována podrobnému odvození rovnic pro ohybové kmitání. Vychází z literatur [16] a [38].



Obrázek A.1: Element příčně kmitajícího nosníku ze zatížením. Předloha z [16]

Uvolněný elementární prvek (obr. A.1) koná obecný rovinný pohyb, ten se skládá z translačního (TP) a rotačního pohybu (RP). Pro oba pohyby jsou sestaveny příslušné pohybové rovnice

RP:

$$T \cos \varphi - \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) \cos \left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) + q dx = a dm, \quad (\text{A.1})$$

TP:

$$-M + M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - T \frac{dx}{2} - \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} = \alpha dI_y, \quad (\text{A.2})$$

kde T je posouvající síla, φ úhel natočení, q vnější zatížení, a normálové zrychlení, dm přírůstek hmotnosti, M ohybový moment, α úhlové zrychlení a dI_y je přírůstek momentu setrvačnosti kolem osy rotace nosníku.

Do pohybových rovnic (A.1, A.2) je dosazeno $dm = \rho(x)S(x) dx$ a $dI_y = \rho(x)J_y(x) dx$.

$$\begin{aligned}
 T \cos \varphi - \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) \cos \left(\varphi + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx}_0 \right) + q dx &= a \rho(x) S(x) dx \\
 \frac{\partial T}{\partial x} + q dx &= a \rho(x) S(x) dx \Big/ \frac{1}{dx} \quad \text{kde} \quad a = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial T}{\partial x} + \rho(x) S(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q(x, t) \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -M + M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - T \frac{dx}{2} - \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} &= \alpha \rho(x) J_y(x) dx \\
 \frac{\partial M}{\partial x} dx - T dx &= \alpha \rho(x) J_y(x) dx \Big/ \frac{1}{dx} \quad \text{kde} \quad \alpha = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \\
 \frac{\partial M}{\partial x} &= \rho(x) J_y(x) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} + T \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

Z rovnice (A.4) je vyjádřeno T , které je následně použito v (A.3). V kapitole 4.2 je použita rovnice pro průhybovou čáru (4.13), z které lze vyjádřit ohybový moment jako

$$\begin{aligned}
 M &= EJ_y(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\underbrace{\frac{\partial M}{\partial x} - \rho(x) J_y(x) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x}}_T \right) + \rho(x) S(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q(x, t) \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(EJ_y(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \rho(x) J_y(x) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \right] + \rho(x) S(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q(x, t) \\
 EJ_y(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho(x) J_y(x) \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \rho(x) S(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q(x, t). \tag{A.5}
 \end{aligned}$$

Rovnice (A.5) může být vydělena členem ρS za předpokladu, že hustota a příčný průřez zůstávají po délce prutu konstantní.

$$\begin{aligned}
 \frac{E J_y}{\rho S} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\rho J_y}{\rho S} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\rho S}{\rho S} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{q(x, t)}{\rho S} \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E J_y}{\rho S} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{J_y}{S} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} &= \frac{1}{\rho S} q(x, t) \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

Pohybová rovnice (A.6) je upravena do tvaru (A.7), kde c_o je příčná rychlost vlnění

$\left(c_o = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right)$ a j_y kvadratický poloměr průřezu $\left(j_y = \sqrt{\frac{J_y}{S}} \right)$.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_o^2 j_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - j_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} = \frac{1}{\rho S} q(x, t) \tag{A.7}$$

Člen $j_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2}$ se nazývá rotační setrvačnost. Protože se v něm objevuje smíšená parciální derivace podle času a polohy, bude tento člen výrazně menší než ostatní členy, a je tedy nepodstatný z hlediska řešení daného problému. Finální podoba pohybové rovnice (A.8) vyjde ve tvaru

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_o^2 j_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{\rho S} q(x, t). \quad (\text{A.8})$$

Výsledkem je parciální diferenciální rovnice 4. řádu s nehomogenní pravou stranou. Předpokládané řešení (A.9) je očekáváno jako součin dvou funkcí, kde první je pouze funkcí času a druhá polohy.

$$w(x, t) = T(t)W(x) \quad (\text{A.9})$$

Předpokládané řešení (A.9) je příslušným počtem derivací zderivováno podle času, respektive polohy. Následně dosazeno do pohybové rovnice (A.8). Pro homogenní řešení je pravá strana nulová a vyjde tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= W(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= T(t) \frac{d^4 W(x)}{dx^4} \\ W(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + c_o^2 j_y^2 T(t) \frac{d^4 W(x)}{dx^4} &= 0 & / & W(x)T(t) \\ \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + c_o^2 j_y^2 \frac{1}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} &= 0 \\ \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} &= -c_o^2 j_y^2 \frac{1}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

K platnosti rovnice (A.10) dojde tehdy, jestliže se budou obě strany rovnat stejné konstantně. Aby došlo ke kmitání, musí být konstanta záporná.

První je vypočítána levá strana rovnice, která je funkcí času. Jedná se o homogenní diferenciální rovnici 2. řádu.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} &= -\Omega^2 \\ \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \Omega^2 T &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Diferenciální rovnice (A.11) připomíná známou pohybovou rovnici pro volné netlumené kmitání $m\ddot{x} + kx = 0$. Řešení rovnic tohoto druhu odpovídá tvaru

$$T(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t). \quad (\text{A.12})$$

Na pravé straně rovnice (A.10) je pouze funkce polohy. V tomto případě se jedná o diferenciální rovnici 4. řádu.

$$\begin{aligned} c_o^2 j_y^2 \frac{1}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} &= \Omega^2 \\ \frac{d^4 W(x)}{dx^4} &= \frac{\Omega^2 W(x)}{c_o^2 j_y^2} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Na závěr je zavedena veličina β , když platí $\beta^4 = \frac{\Omega^2}{c_o^2 j_y^2}$. Finální podoba rovnice pro tvar kmitu vypadá následovně

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} = \beta^4 W(x). \quad (\text{A.14})$$

K řešení jsou použity Krylovovy¹³ (Rayleighovy) funkce [40], které jsou definované jako

$$S(\beta x) = \frac{1}{2}(\cosh(\beta x) + \cos(\beta x)) \quad (\text{A.15a}) \quad T(\beta x) = \frac{1}{2}(\sinh(\beta x) + \sin(\beta x)), \quad (\text{A.15c})$$

$$U(\beta x) = \frac{1}{2}(\cosh(\beta x) - \cos(\beta x)) \quad (\text{A.15b}) \quad V(\beta x) = \frac{1}{2}(\sinh(\beta x) - \sin(\beta x)). \quad (\text{A.15d})$$

Výhodou těchto funkcí je, že derivováním přecházejí jedna v druhou, pouze vynásobenou mocninami β . Řešení rovnice (A.14) je hledáno v tvaru

$$w(x) = C_1 S(\beta x) + C_2 T(\beta x) + C_3 U(\beta x) + C_4 V(\beta x). \quad (\text{A.16})$$

V okrajových podmínkách je možný výskyt až třetí derivace polohy. Jednotlivé derivace jsou vypočítány následovně

$$\frac{dw}{dx} = \beta(C_1 V(\beta x) + C_2 S(\beta x) + C_3 T(\beta x) + C_4 U(\beta x)), \quad (\text{A.17a})$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \beta^2(C_1 U(\beta x) + C_2 V(\beta x) + C_3 S(\beta x) + C_4 T(\beta x)), \quad (\text{A.17b})$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = \beta^3(C_1 T(\beta x) + C_2 U(\beta x) + C_3 V(\beta x) + C_4 S(\beta x)). \quad (\text{A.17c})$$

K výpočtu vlastních úhlových frekvencí pro kořeny frekvenční rovnice β_k je použit vztah

$$\Omega_k = \frac{(\beta_k L)^2}{L^2} c_o j_y. \quad (\text{A.18})$$

Jednomu vlastnímu tvaru kmitu odpovídá právě jedna vlastní úhlová frekvence. Obecné řešení rovnice (A.10) je vypočítáno jako superpozice všech vlastních tvarů kmitu

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(\Omega t) + B_k \sin(\Omega t))(C_1 S(\beta_k x) + C_2 T(\beta_k x) + C_3 U(\beta_k x) + C_4 V(\beta_k x)). \quad (\text{A.19})$$

Integrační konstanty A_k a B_k jsou určeny z počátečních podmínek, zatímco konstanty C_1 až C_4 z okrajových podmínek uložení prutu.

Přepočet mezi vlastní úhlovou frekvencí Ω a vlastní frekvencí f udává následující vztah

$$f = \frac{\Omega}{2\pi}. \quad (\text{A.20})$$

¹³Originální dokument [39] je k dispozici na internetovém archívu Waybeck Machine.

Příloha B

Součástí diplomové práce je elektronická příloha, která obsahuje následující složky:

- **Konecnoprvkove_modely**

- obsahuje soubory *static_analysis.wbpz*, *modal_analysis.wbpz* a *critical_speed.wbpz* vytvořené v komerčním programu *ANSYS Workbench 2019 R3*

- **Matlab_vypocty**

- obsahuje soubory *pre_stress_vibration.m*, *beam_oscillation.m*, *campbell_results.m*, *frequency.mat*, *E_regrese.mat* a *E_hod.mat* vytvořené v komerčním programovacím jazyku *Matlab R2015a*

- **Excel_vypocty**

- obsahuje soubory *thesis_results.xlsx* vytvořené v komerčním programu *Microsoft Excel 2016*