Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

SBÍRKA ÚLOH – POLYNOMY JEDNÉ PROMĚNNÉ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Tomáš Mrkvička, Ph.D.

Autor: Hana Nová

2007

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně a použitou literaturu jsem citovala.

V Domažlicích 12.4.2007

....

Anotace

Diplomová práce obsahuje polynomy jedné proměnné. Cílem je vytvořit sbírku úloh k tomuto tématu. Sbírka je rozdělená na kapitoly s danou problematikou. V každé kapitole je souhrn teorie, řešené příklady a neřešené příklady. Vybrané příklady jsou ukázkově zpracovány. Za každou kapitolou si může čtenář problematiku vyzkoušet na příkladech, které jsou doplněny výsledky.

Annotation

This thesis includes multinominals with one's variables. Aim is create collection exercises hereto subject. Collection is divided on chaps with given to problems. In every chapter is totality theory buckthorn examples and straddle examples. All choice example are exemplary processed. Behind every chapter reader can try out problems for examles that are supplementeds record.

Ráda bych tímto poděkovala RNDr. Tomáši Mrkvičkovi za metodické vedení, odbornou pomoc, cenné a věcné připomínky, rady a náměty, kterých se mi od něho dostalo v průběhu zpracování této diplomové práce.
Dále bych chtěla touto cestou poděkovat rodině za všestrannou podporu poskytovanou po celou dobu mého vysokoškolského studia.

OBSAH

1.ÚVOD

Cílem této diplomové práce je seznámit čtenáře s problematikou polynomů jedné proměnné. Předpokládám, že čtenář již zná pojmy, které se týkají derivací a základních poznatků z algebry.

Diplomová práce je rozdělena do dvou kapitol, které jsou dále děleny do několika podkapitol.Každá podkapitola obsahuje základní věty a definice, které se týkají daného problému. Podkapitola dále obsahuje vzorově řešený příklad s popisem a úlohy k samostatnému procvičení s výsledky. K některým podkapitolám je uveden příklad využití polynomů jedné proměnné v praxi.

V první kapitole jsou přiblíženy polynomy jedné proměnné. Nalezneme v ní teorii a návod k řešení úloh dané problematiky, např. Hornerovo schéma, Bezoutova věta, derivace polynomu, nalezení racionálních kořenů a Euklidův algoritmus.

Řešení algebraických rovnic je popsáno v kapitole druhé. Je zde vysvětleno řešení binomické rovnice, dále pak řešení kvadratické, kubické rovnice a rovnice čtvrtého řádu, kdy tato problematika vede k řešení reciprokého polynomu prvního nebo druhého druhu. V této kapitole jsou také řešené příklady s popisem postupu a úlohy k samostatnému procvičení.

2. POLYNOMY JEDNÉ PROMĚNNÉ

Pojem funkce v matematické analýze

V matematické analýze se definuje funkce takto: Budiž dána nějaká množina čísel M. Přiřadíme-li každému číslu z M nějaký předpisem jednoznačně nějaké číslo, říkáme, že jsme definovali *funkci jedné proměnné na množině M*. Množina M se nazývá *obor funkce*. Čísla, která jsou přiřazena jednotlivým číslům z M, nazývají se *hodnoty funkce*.Tvoří jistou množinu N, *množinu hodnot funkce*.

Často je dáno přiřazení čísel z N k číslům z M nějakým početním předpisem jako např. $y = ax + b$, $y = x^2$, $y = 1/(x^2 + 1)$ atd. Tomu se rozumí tak : Do výrazu na pravé straně rovnosti se dosadí za x postupně čísla z M. Hodnoty y těchto výrazů, které takto dostaneme pro různá čísla z M, Udávají právě funkční hodnoty z N, která jsou jednotlivým číslům z M přiřazena. Symbol x, za nějž dosazujeme čísla z M a který tedy, jak se obvykle říká, může nabývat jakékoliv hodnoty z M, nazývá se *nezávisle proměnná*. Proměnné budu označovat vždy písmeny z konce abecedy x, y, z, . . .

Obecně označujeme funkci symbolem $f(x)$ a to i tenkráte, je-li dána jiným přiřazením hodnot z N k hodnotám y M, než početními předpisy podobným těm, které byly právě uvedeny. Hodnotu funkce pro číslo $a \in M$ značíme pak $f(a)$. Vyšetřujeme-li najednou více funkcí, rozlišujeme je indexy nebo užíváme dalších písmen: $g(x)$, $h(x)$, $F(x)$ atd.

Protože přiřazujeme funkční hodnoty jednotlivým číslům a nikoliv dvojicím, trojicím nebo n-ticím čísel ($n > 1$), mluvíme o *funkcích jedné nezávislé proměnné* nebo také o funkci jedné proměnné.

Obsahuje-li množina M jen čísla reálná, mluvíme o *funkci reálné proměnné,* v opačném případě o *funkci komplexní proměnné.* Jsou-li hodnoty funkce jen reálná čísla mluvíme o *reálné funkci*, jsou-li to i čísla komplexní, mluvíme o *komplexní funkci.*

Definice 2.1:

Algebraická definice polynomu

V algebře budeme vyšetřovat funkce, jejichž funkční obor je nějaká algebraická množina: okruh, obor integrity, těleso. Funkční hodnoty budou prvky téhož oboru, na němž jsou funkce definovány, budou to tedy opět prvky okruhu, oboru integrity nebo tělesa.Vezmeme-li si za obor funkce například okruh zbytkových tříd *mod m*, nebude funkčním oborem množina čísel a funkční hodnoty nebudou rovněž čísla, nýbrž prvky z tohoto okruhu.

Definice 2.2:

R je okruh, x je symbol. Uvažujeme množinu $R[x]$ všech výrazů ve tvaru

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ , a_i \in R$$

Dva výrazy $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ pokládáme za stejné, jestliže po vynechání nulových členů obdržíme identické výrazy.

Definice 2.3:

$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ , a_n \neq 0$. Pak řekneme, že $f(x)$ je stupně n, píšeme $st\, f(x)=n$.

Nulovému polynomu nedáváme žádný stupeň.

2.1 Kořeny polynomů a jejich hledání:

2.1.1: Bezoutova věta

Definice 2.4:

Prvek $\alpha \in$ R se nazývá kořen polynomu *f(x)*.

f(x)$\in R[x]$, jestliže *f(x)* =0.

Věta 2.1: Bezoutova věta

f(x) $\in T[x]$, T je těleso, st *f(x)* > 0.Prvek $\alpha \in$ T je kořenem *f(x)* $\Leftrightarrow$ *(x -* α *)/ f(x).*

Věta 2.2:

Nechť *f(x)* je polynomem stupně *n (st = n)* nad tělesem T. Pak *f(x)* má v T nejvýše n kořenů.

PŘÍKLAD 1:

Užitím Bezoutovy věty ověřte, zda jsou čísla 2,-1 kořeny polynomu $f(x)=x^3-3x-2$ nad R.

ŘEŠENÍ:

Zjistíme, zda $\alpha=2,-1$ je kořenem polynomu podle Bezoutovy věty

$\underline{\alpha=2}$

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3-3x-2\right)\div(x-2)=x^2+2x+1 \\
\underline{-\left(x^3-2x^2\right)} \\
\quad 2x^2-3x \\
\quad \underline{-(2x^2-4x)} \\
\qquad x-2 \\
\qquad \underline{-(x-2)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\underline{\alpha=-1}$

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3-3x-2\right)\div(x+1)=x^2-x-2 \\
\underline{-\left(x^3+x^2\right)} \\
\quad -x^2-3x \\
\quad \underline{-\left(-x^2-x\right)} \\
\qquad -2x-2 \\
\qquad \underline{-(-2x-2)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ 2,-1 jsou kořeny polynomu x^3-3x-2, protože v obou případech jsou zbytky po dělení nulové.

PŘÍKLAD 2:

Užitím Bezoutovy věty ověřte, zda jsou čísla 3,-1 kořeny polynomu $f(x)=x^4-10x^3+36x^2-54x+27$ nad R.

ŘEŠENÍ:

Zjistíme, zda $\alpha = 3, -1$ je kořenem polynomu podle Bezoutovy věty

$\underline{\alpha = 3}$

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27\right) \div (x-3) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9 \\
\underline{-\left(x^4 - 3x^3\right)} \\
\quad -7x^3 + 36x^2 \\
\quad \underline{-\left(-7x^3 + 21x^2\right)} \\
\qquad 15x^2 - 54x \\
\qquad \underline{-\left(15x^2 - 45x\right)} \\
\qquad\quad -9x + 27 \\
\qquad\quad \underline{-\left(-9x + 27\right)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$\underline{\alpha = -1}$

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27\right) \div (x+1) = x^3 - 11x^2 + 47x - 101 \\
\underline{-\left(x^4 + x^3\right)} \\
\quad -11x^3 + 36x^2 \\
\quad \underline{-\left(-11x^3 - 11x^2\right)} \\
\qquad 47x^2 - 54x \\
\qquad \underline{-\left(47x^2 + 47x\right)} \\
\qquad\quad -101x + 27 \\
\qquad\quad \underline{-\left(-101x - 101\right)} \\
\qquad\qquad 128
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ 3 je kořenem polynomu $x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27$, protože zbytek po dělení je 0.

$\Rightarrow$ -1 není kořenem polynomu $x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27$, protože zbytek po dělení není 0.

CVIČENÍ:

1. Užitím Bezoutovy věty ověřte, zda jsou čísla -2,1 kořeny polynomu $f(x)=x^3-3x+2$ nad R.

[ano]

2. Zjistěte zda je číslo 7 kořenem polynomu $f(x)=2x^5-17x^4+23x^3-18x^2+29x-7$ nad R.

[ano]

3. Zjistěte užitím Bezoutovy věty zda je číslo -2 kořenem polynomu $f(x)=x^5-x^4-13x^3+13x^2+36x+36$ nad R.

[ne]

4. Ukažte, že polynom $f(x)=12x^5+26x^4+6x^3+5x^2-4$ je dělitelný polynomem $g(x)=x+2$.

[ano]

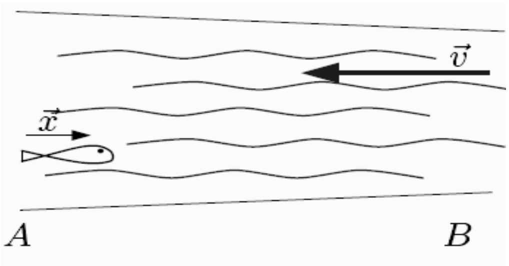
5. Užitím Bezoutovy věty ukažte, že čísla $\alpha_1=5, \alpha_2=(-3)$ jsou kořeny polynomu $f(x)=x^4-2x^3-13x^2-4x-30$.

[ano]

2.1.2: Derivace polynomu

PŘÍKLAD Z PRAXE:

Snažíme-li se dostat proti proudu řeky z bodu A do bodu B, musíme plavat dostatečně rychle, aby nás nestrhával proud, ale ne příliš rychle, abychom se brzo nevyčerpali. Je vhodné znát optimální rychlost, která umožní se dostat do cíle s vynaložením minimální energie.



$\Rightarrow$ Uvažujeme rybu, která plave proti proudu v řece.Rychlosti jsou měřeny vzhledem k břehu.

$\Rightarrow$ Ryba popluje takovou rychlostí, aby vydala co nejméně energie.

$\Rightarrow$ Energie vydaná za časovou jednotku na plavání je úměrná výrazu $(x+v)^3$ - třetí mocnina relativní rychlosti ryby vzhledem k vodě.

$\Rightarrow$ Vhodnou volbou jednotek dosáhneme toho, že $\vec{v}=1$.

$\Rightarrow$ Energie vynaložená za časovou jednotku na plavání je úměrná výrazu $(x+1)^3$.

$\Rightarrow$ Ryba popluje celkem [(vzdálenost k uplavání)/ (rychlost)] časových jednotek a doba plavání je tedy nepřímo úměrná rychlosti vzhledem k břehu x.

$\Rightarrow$ Energie k přeplutí z bodu A do B má být minimální: $\dfrac{(x+1)^3}{x}$ $\Rightarrow$ minimum

$$\left(\frac{(x+1)^3}{x}\right)' = \frac{3\cdot(x+1)^2\cdot x-(x+1)^3\cdot 1}{x^2} = \frac{(x+1)^2\cdot(2x-1)}{x^2}$$

$\Rightarrow$ Derivace je nulová pro $x=\dfrac{1}{2}$, tj. ryba plave vzhledem k břehu poloviční rychlostí, než jakou proudí voda. Z povahy úlohy je zřejmé, že se jedná o minimum.

Stacionární bod -1 nemá v této úloze praktický význam.

(viz (1))

Definice 2.5:

T je těleso, $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in T[x]$. Polynom $f'(x)=\sum_{i=1}^{n}(i \times a_i)x^{i-1}$ se nazývá derivace polynomu $f(x)$.

Kořen α se nazývá alespoň k-násobným kořenem polynomu $f(x)$ jestliže $(x-\alpha)^k / f(x)$.

Věta 2.3:

T je těleso. Pak pro každé dva polynomy $f(x), g(x) \in$ T$[x]$ platí :

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$
$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

Věta 2.4:

$f(x) \in T[x], \alpha \in T$ je kořen. Pak α je vícenásobným kořenem polynomu $f(x) \Leftrightarrow \alpha$ je kořenem $f'(x)$.

Věta 2.5:

T je těleso, $f(x) \in T[x], st\, f(x)=n$, nechť $f(x)$ má v T n kořenů (včetně násobnosti). Pak $f(x)$ má alespoň jeden dvojnásobný kořen $\Leftrightarrow$ D$(f(x), f'(x)) \neq 1$.

Věta 2.6:

$k \in N, T$ je těleso. Je-li $\alpha \in T$ právě *k*- násobným kořenem $f(x) \in T[x] \Rightarrow \alpha$ je právě $(k-1)$-násobným kořenem $f'(x)$.

PŘÍKLAD 1:

Určete hodnotu polynomu $f(x)=2x^5-3x^2+x+3$ nad R a jeho derivace v bodě *t* = -2.

ŘEŠENÍ:

Dosazením bodu t = -2 do polynomu vypočteme jeho hodnotu

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^5 - 3 \cdot (-2)^2 + (-2) + 3$$
$$\underline{\underline{f(-2) = (-75)}}$$

Zderivujeme polynom $f(x)$

$$f'(x) = 10x^4 - 6x + 1$$

Dále dosadíme bod t = -2 a vypočteme hodnotu první derivace

$$f'(-2) = 10 \cdot (-2)^4 - 6 \cdot (-2) + 1$$
$$\underline{\underline{f'(-2) = 173}}$$

<u>Věta 2.7:</u>

T je těleso , $a \in T$, $n \in Z$.

Celistvým násobkem $n \times a$ prvku a rozumíme :

$n > 0 \quad a + a + a ... + a$, kdy a sčítáme n-krát .

$n = 0 \quad 0$

$n < 0 \quad a - a - a ... - a = (-a) + (-a) + ... + (-a)$, kdy $(-a)$ sčítáme n-krát.

- pokud je T = R, pak $n \times a$ je klasické násobení

PŘÍKLAD 2:

Určete první a druhou derivaci polynomu $f(x) = 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x + 2$ nad Z_5.

ŘEŠENÍ:

$Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Vytvoříme si Cayleyho tabulku pro sčítání:

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$f(x)=2x^5+4x^4+2x^3+x+2$

$f'(x)=(5\times2)x^4+(4\times4)x^3+(3\times2)x^2+1$

Podle Cayleyho tabulky vypočítáme:

$\Rightarrow (5\times2)$ = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 4 + 4 + 2 = 3 + 2 = 0

$\Rightarrow (4\times4)$ = 4 + 4 + 4 + 4 = 3 + 3 = 1

$\Rightarrow (3\times2)$ = 2 + 2 + 2 = 4 + 2 = 1

Tedy $\underline{\underline{f'(x)=x^3+x^2+1}}$

Nyní spočítáme druhou derivaci, kdy opět použijeme Cayleyho tabulku pro sčítání:

$f''(x)=(3\times1)x^2+(2\times1)x$

$\Rightarrow (3\times1)$ = 1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 3

$\Rightarrow (2\times1)$ = 1 + 1 = 2

Tedy $\underline{\underline{f''(x)=3x^2+2x}}$

CVIČENÍ:

1. Určete hodnoty $f(x), f'(x)$ polynomu

a) $f(x)=x^5-4x^3+6x^2-8x+10$ nad R v bodě $t = 2$.

$$\begin{bmatrix} f(2)=18, \\ f'(2)=48 \end{bmatrix}$$

b) $f(x) = x^5-4x^3+6x^2-8x+10$ nad R v bodě $t = 3$

$$\begin{bmatrix} f(3)=175, \\ f'(3)=325 \end{bmatrix}$$

c) $f(x)=x^4-3ix^3-4x^2+5ix-1$ nad C v bodě $t = 1 + 2i$

$$\begin{bmatrix} f(1+2i)=(-12)-2i, \\ f'(1+2i)=(-16)+8i \end{bmatrix}$$

d) $f(x)=(1+i)x^4-4x^3+(3-i)x^2-2x$ nad C v bodě $t=1-i$

$$\begin{bmatrix} f(1-i)=0, \\ f'(1-i)=2 \end{bmatrix}$$

2. Určete první derivaci polynomu $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$ nad Z_5.

$$\left[4x^3+x^2-x-4\right]$$

3. Určete první a druhou derivaci polynomu $f(x)=2x^5-x^4+4x^3-2x^2+2x-1$ nad Z_5.

$$\begin{bmatrix} f'(x)=4x^3+2x^2-x-4, \\ f''(x)=2x^2+4x-1 \end{bmatrix}$$

2.1.3: Hornerovo schéma

Hornerovo schéma je metoda jak snadno spočítat hodnotu polynomu $f(x) \in T[x]$, a jeho derivaci v bodě $\alpha \in T[x]$.

Definice 2.6:

Nechť $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$ tedy:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} a_i x^i &= (x-\alpha)\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + f(\alpha) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^{i+1} - \alpha \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + f(\alpha) = \\
&= b_{n-1}x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^{i+1} - \alpha \sum_{i=1}^{n-1} b_i x^i - \alpha b_0 + f(\alpha) = \\
&= b_{n-1}x^n + \sum_{i=1}^{n-1} b_{i-1} x^i - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha b_i x^i - \alpha b_0 + f(\alpha) = \\
&= b_{n-1}x^n + \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i-1} - \alpha b_i) x^i + f(\alpha) - \alpha b_0
\end{aligned}
$$

Tedy $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = b_{n-1}x^n + \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i-1} - \alpha b_i) x^i + f(\alpha) - \alpha b_0$

Porovnáním koeficientů dostáváme

$$
\begin{array}{lcl}
a_n = b_{n-1} & \Rightarrow & b_{n-1} = a_n \\
a_n = b_{n-2} - \alpha b_{n-1} & \Rightarrow & b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1} \\
\vdots & \Rightarrow & \vdots \\
a_1 = b_0 - \alpha b_1 & & b_0 = a_1 + \alpha b_1 \\
a_0 = f(\alpha) - \alpha b_0 & \Rightarrow & f(\alpha) = a_0 + \alpha b_0
\end{array}
$$

To znamená, že koeficienty polynomu $q(x)$ můžeme rekurentně vyjádřit pomocí koeficientů polynomu $f(x)$. Postup zapisujeme do tabulky.

$$
\begin{array}{cccccc}
\alpha & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & & \alpha b_{n-1} & \alpha b_{n-2} & \cdots & \alpha b_1 & \alpha b_0 \\
\hline
\end{array}
$$

$$b_{n-1} \quad b_{n-2} \qquad b_{n-3} \quad \cdots \quad b_0 \quad \underline{\underline{f(\alpha)}}$$

Celý postup lze opakovat pro polynom $q(x)$ atd.

Tedy dostáváme:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)q_1(x) + f(\alpha) \\ q_1(x) &= (x-\alpha)q_2(x) + q_1(\alpha) \\ &\vdots \\ q_n(x) &= (x-\alpha)q_{n+1}(x) + q_n(\alpha) \end{aligned}$$

Definice 2.6:

Pod Taylorovým rozvojem polynomu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$ v bodě α budeme rozumět polynom

$b_n(x-\alpha)^n + b_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + \ldots + b_2(x-\alpha)^2 + b_1(x-\alpha) + b_0$

Věta 2.8:

Pro koeficienty $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$ polynomu, který je Taylorovým rozvojem polynomu $f(x)$ podle Definice 2.7 platí:

$$\begin{aligned} b_0 &= f(\alpha), \\ b_1 &= f'(\alpha), \\ b_2 &= \frac{f''(\alpha)}{2!}, \\ &\vdots \\ b_{n-1} &= \frac{f^{n-1}(\alpha)}{(n-1)!}, \\ b_n &= \frac{f^n(\alpha)}{n!}. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 1:

Určete vztah mezi polynomem $f(y)$ čtvrtého stupně, substitucí $y = x + c$ a příslušnými derivacemi a Hornerovým schématem.

ŘEŠENÍ:

Při zjišťování vztahu mezi polynomem $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 0$ a jeho derivacemi použijeme Hornerova schématu.

c	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
		cb_3	cb_2	cb_1	cb_0
c	b_3	b_2	b_1	b_0	$f(c)$
		cd_2	cd_1	cd_0	
c	d_2	d_1	d_0	$f(c)$	
c		ce_1	ce_0		
c	e_1	e_0	$f''(c)\cdot\frac{1}{2}!$		
		cg_0			
	g_0	$f'''(c)\cdot\frac{1}{3}!$			
c	$f^{IV}(c)\cdot\frac{1}{4}!$				

Dokážeme, že výrazy vypočtené na konci každého řádku použitím algoritmu Hornerova schématu mají přímý vztah k derivacím původního polynomu v daném čísle c. Ověříme to tak, že postupně vyjádříme všechna čísla b_i, d_i, e_i, g_i pomocí původních koeficientů a_i.

Dostaneme tedy tímto způsobem následující vztahy.

$$\begin{aligned}
&b_3 = a_4 \\
&b_2 = a_3 + cb_3 = a_3 + ca_4 \\
&b_1 = a_2 + cb_2 = a_2 + ca_3 + c^2a_4 \qquad (1) \\
&b_0 = a_1 + cb_1 = a_1 + ca_2 + c^2a_3 + c^3a_4 \\
&f(c) = a_0 + cb_0 = a_0 + ca_1 + c^2a_2 + c^3a_3 + c^4a_4
\end{aligned}$$

Zcela analogicky vyjádříme i další řádky Hornerova schématu pomocí koeficientu a_i.

$d_2 = b_3 = a_4$

$d_1 = b_2 + cd_2 = a_3 + ca_4 + ca_4 = a_3 + 2ca_4$

$d_0 = b_1 + cd_1 = a_2 + ca_3 + c^2a_4 + ca_3 + c^2a_4 + c^2a_4 = a_2 + 2ca_3 + 3c^2a_4$

$f' = b_0 + cd_0 = ... = a_1 + 2ca_2 + 3c^2a_3 + 4c^3a_4$ (2)

$e_1 = d_2 = b_3 = a_4$

$e_0 = d_1 + ce_1 = ... = a_3 + 3ca_4$

$\frac{f''(c)}{2!} = d_0 + ce_0 = ... = a_2 + 3ca_3 + 6c^2a_4$ (3)

$g_0 = e_1 = ... = a_4$

$\frac{f'''(c)}{3!} = e_0 + cg_0 = a_3 + 4ca_4$ (4)

$\frac{f^{IV}(c)}{4!} = g_0 = e_1 ... = a_4$ (5)

Z předcházejících zápisů již můžeme velice snadno vypočítat příslušné derivace, jestliže tyto výrazy znásobíme příslušnými faktoriály.

Výraz (1) je daný polynom $f(x)$ v čísle c.

Výraz (2) je $f'(c)$, protože znásobením 1! nedojde k žádné změně.

Z (3) vyplívá: $f''(c) = 2a_2 + 6ca_3 + 12c^2a_4$

Z (4) vyplívá: $f'''(c) = 6a_3 + 24ca_4$

Z (5) vyplívá: $f^{IV}(c) = 24a_4$

(viz [3])

PŘÍKLAD 2:

Pomocí Hornerova schématu vydělte polynom $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x - 80$ polynomem $(x+3)$ nad R.

ŘEŠENÍ:

Určíme bod $\alpha = (-3)$ a vytvoříme tabulku, kam do prvního řádku sepíšeme koeficienty polynomu $f(x)$.

$\alpha = (-3)$	1	-2	4	-6	-80
		-3	15	-57	189
	1	-5	19	-63	$109 = f(-3)$

Hodnota polynomu v bodě $\alpha = (-3)$ je 109.

Částečný podíl $q(x) = x^3 - 5x^2 + 19x - 63$ a zbytek $r = f(-3) = 109$.

Můžeme tedy psát $f(x) = (x+3) \cdot (x^3 - 5x^2 + 19x - 63) + 109$.

PŘÍKLAD 3:

Pomocí Hornerova schématu určete hodnotu polynomu $f(x) = 2x^5 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ nad Z_5 pro bod $\alpha = 2$.

ŘEŠENÍ:

Příslušné operace provádíme na množině $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ - množina zbytkových tříd mod 5 nad Z.

Vytvoříme tabulku:

$\alpha = 2$	2	0	3	4	2	1
		4	3	2	2	3
	2	4	1	1	4	$4 = f(2)$

Hodnota polynomu je v bodě $\alpha = 2$ je 4.

PŘÍKLAD 4:

Zjistěte, zda bod $\alpha = 3$ je kořenem polynomu $f(x) = 2x^5 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ nad Z_5.

ŘEŠENÍ:

Množina zbytkových tříd je $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Použijeme Hornerovo schéma

$\underline{\alpha = 3}$	2	0	3	4	2	1
		1	3	3	1	4
	2	1	1	2	3	$\underline{\underline{0 = f(3)}}$

Bod $\alpha = 3$ je kořenem polynomu $f(x)$, protože zbytek $r = f(x) = 0$.

PŘÍKLAD 5:

Pomocí Hornerova schématu určete hodnotu polynomu $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$ pro bod $\alpha = 1 + 2i$ nad C.

ŘEŠENÍ:

Vytvoříme tabulku pro bod $\alpha = 1 + 2i$:

$\underline{\alpha = 1 + 2i}$	1	-3i	-4	5i	-1
		1 + 2i	3 + i	-3 – i	-11 – 2i
	1	1 - i	-1 + i	-3 + 4i	$\underline{\underline{-12 - 2i = f(1 + 2i)}}$

Hodnota polynomu v bodě $\alpha = 1 + 2i$ je $(-12 - 2i)$

PŘÍKLAD 6:

Zjistěte , zda $\alpha = -5$ je kořenem polynomu $f(x) = x^5 + 7x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 155x - 175$. Pokud je kořenem, určete jeho násobnost.

ŘEŠENÍ:

Použijeme Hornerovo schéma a vytvoříme tabulku pro bod $\alpha = -5$:

- do tabulky sepíšeme koeficienty polynomu

$\underline{\alpha = -5}$	1	7	4	8	155	-175	
		-5	-10	30	-190	175	
	1	2	-6	38	-35	$\underline{\underline{0 = f(-5)}}$	
		-5	15	-45	35		
	1	-3	9	-7	$\underline{\underline{0 = f'(-5)}}$		
		-5	40	-245			
	1	-8	49	$-\underline{\underline{252}}$			

Z Hornerova schématu vidíme, že bod $\alpha = -5$ je dvojnásobným kořenem polynomu $f(x) = x^5 + 7x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 155x - 175$.

Tento polynom můžeme napsat ve tvaru $(x+5)^2 \cdot (x^3 - 8x^2 + 49x - 252)$.

PŘÍKLAD 7:

Pomocí Hornerova schématu rozhodněte, zda $\alpha = -3$ je kořenem polynomu $f(x) = x^5 + 13x^4 + 58x^3 + 90x^2 - 27x - 135$ .Pokud ano, tak určete jeho násobnost.

ŘEŠENÍ:

Vytvoříme tabulku pro $\alpha = -3$:

$\alpha=-3$	1	13	58	90	-27	-135
		-3	-30	-84	-18	135
	1	10	28	6	-45	$\underline{\underline{0=f(-3)}}$
		-3	-21	-21	45	
	1	7	7	-15	$\underline{\underline{0=\frac{f'(-3)}{1!}}}$	
		-3	-12	15		
	1	4	-5	$\underline{\underline{0=\frac{f''(-3)}{2!}}}$		
		-3	-3			
	1	1	$\underline{\underline{-8=\frac{f'''(-3)}{3!}}}$			

$\frac{f'''(-3)}{3!}=-8$ už nesplňuje podmínku $\Rightarrow$ $\alpha=-3$ je trojnásobným kořenem polynomu

$f(x)=x^5+13x^4+58x^3+90x^2-27x-135$

Tento polynom napíšeme ve tvaru $\underline{\underline{f(x)=(x+3)^3\cdot(x^2+x-8)}}$.

PŘÍKLAD 8:

V polynomu $f(x)=x^3-5x^2+3x+b$ určete b tak, aby polynom $f(x)$ měl dvojnásobný kořen a určete zbývající kořeny polynomu.

ŘEŠENÍ:

Podle Věty 2.4 platí , pokud má polynom dvojnásobný kořen, potom platí $f'(x)=0$.

Polynom $f(x)=x^3-5x^2+3x+b$ derivujeme:

$f'(x)=3x^2-10x+3$

Užitím Hornerova schématu zjistíme kořeny polynomu $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$

$\underline{\alpha = 3}$	3	-10	3
		9	-3
	3	-1	$\underline{\underline{0 = f'(3)}}$

Kořen $\alpha = 3$ splňuje podmínku.

Nyní vypočítáme ***b*** $\Rightarrow$ použijeme Hornerovo schéma pro polynom $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + b$.

$\underline{\alpha = 3}$	1	-5	3	b
		3	-6	-9
	1	-2	-3	$b - 9 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{b = 9}}$
		3	3	
	1	1	$\underline{\underline{0 = f'(3)}}$	

$$\underline{\underline{f(x) = (x-3)^2 \cdot (x+1)}}$$

Polynom $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + b$ má $\alpha = 3$ dvojnásobný kořen pro bod b = 9. Další jednoduchý kořen polynomu je $\alpha = -1$.

PŘÍKLAD 9:

Určete Taylorův rozvoj polynomu $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$ v bodě $\alpha = 2$.

ŘEŠENÍ:

Sestrojíme Hornerovo schéma pro tento polynom a daný bod.

$\alpha = 2$	1	0	-2	3	-1

	2	4	4	14
1	2	2	7	$\underline{13=f(2)}$
	2	8	20	
1	4	10	$\underline{27=\frac{f'(2)}{1!}}$	
	2	12		
1	6	$\underline{22=\frac{f''(2)}{2!}}$		
	2			
1	$\underline{8=\frac{f'''(2)}{3!}}$			
$\underline{1=\frac{f^{IV}(2)}{4!}}$				

Z Hornerova schématu jsme získaly koeficienty Taylorova polynomu podle Věty 2.8.

Taylorův rozvoj polynomu $f(x)$ má tvar:

$$\underline{\underline{g(x)=(x-2)^4+8\cdot(x-2)^3+22\cdot(x-2)^2+27\cdot(x-2)+13}}$$

PŘÍKLAD 10:

Zjistěte zda polynom $f(x)=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$ splňuje podmínky pro to , aby měl čtyřnásobný kořen.Určete pak zbývající kořeny polynomu.

ŘEŠENÍ:

Určíme $(n-1)$ derivaci polynomu $f(x)=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$, kde n = 4.

$$f'(x)=6x^5-24x^3-12x^2+18x+12$$

$$f''(x)=30x^4-72x^2-24x+18$$

$$f'''(x)=120x^3-144x-24 \Rightarrow \text{ dále upravíme } f'''(x)=5x^3-6x-1=0$$

$\Leftrightarrow$ kořenem polynomu je $\alpha = -1$

Dále použijeme Hornerovo schéma pro $\alpha = -1$:

$\underline{\alpha = -1}$	1	0	-6	-4	9	12	4
		-1	1	5	-1	-8	-4
	1	-1	-5	1	8	4	$\underline{\underline{0 = f(-1)}}$
		-1	2	3	-4	-4	
	1	-2	-3	4	4	$\underline{\underline{0 = \frac{f'(-1)}{1!}}}$	
		-1	3	0	-4		
	1	-3	0	4	$\underline{\underline{0 = \frac{f''(-1)}{2!}}}$		
		-1	4	-4			
	1	-4	4	$\underline{\underline{0 = \frac{f'''(-1)}{3!}}}$			

Kořen $\alpha = -1$ je čtyřnásobným kořenem polynomu
$f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$.

Zbývající kořen vypočítáme z polynomu $(x^2 - 4x + 4) = (x-2)^2 \Rightarrow \alpha = 2$ je dvojnásobným kořenem polynomu $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$.

$$f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = \underline{\underline{(x+1)^4 \cdot (x-2)^2}}$$

PŘÍKLAD 11:

Pomocí Hornerova schématu vyjádřete polynom

$$f(x) = 2\cdot(x+2)^5 - 20\cdot(x+2)^4 + 77\cdot(x+2)^3 - 141\cdot(x+2)^2 + 116\cdot(x+2) - 20$$

v mocninách x.

ŘEŠENÍ:

Vypočítáme příslušné derivace v bodě $\alpha = -2$.

$$f(-2) = -20$$
$$f'(-2) = 10\cdot(x+2)^4 - 80\cdot(x+2)^3 + 231\cdot(x+2)^2 - 282\cdot(x+2) + 116$$
$$f''(-2) = 40\cdot(x+2)^3 - 240\cdot(x+2)^2 + 462\cdot(x+2) - 282$$
$$f'''(-2) = 120\cdot(x+2)^2 - 480\cdot(x+2) + 462$$
$$f^{IV}(-2) = 240\cdot(x+2) - 480$$
$$f^{V}(-2) = 240$$

Po dosazení do vztahu $\frac{f^n(\alpha)}{n!}$ dostáváme hodnoty:

$$\frac{f'(-2)}{1!} = 116$$
$$\frac{f''(-2)}{2!} = -141$$
$$\frac{f'''(-2)}{3!} = 77$$
$$\frac{f^{IV}(-2)}{4!} = -20$$
$$\frac{f^{V}(-2)}{5!} = 2$$

Vypočítáme obrácené Hornerovo schéma:

$\underline{\alpha = -2}$ $\qquad$ $2 = \frac{f^{V}(-2)}{5!}$

$$
\begin{array}{llllll}
2 & -20=\dfrac{f^{IV}(-2)}{4!} & & & & \\
\hline
 & -4 & & & & \\
2 & -16 & 77=\dfrac{f'''(-2)}{3!} & & & \\
\hline
 & -4 & 32 & & & \\
2 & -12 & 45 & -141=\dfrac{f''(-2)}{2!} & & \\
\hline
 & -4 & 24 & -90 & & \\
2 & -8 & 21 & -51 & 116=\dfrac{f'(-2)}{1!} & \\
\hline
 & -4 & 16 & -42 & 102 & \\
2 & -4 & 5 & -9 & 14 & -20=f(-2) \\
\hline
 & -4 & 8 & -10 & 18 & -28 \\
2 & 0 & -3 & 1 & -4 & 8
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ z posledního řádku Hornerova schéma dostaneme hledaný polynom:

$$\underline{\underline{f(x)=2x^5-3x^3+x^2-4x+8}}$$

CVIČENÍ:

1. Pomocí Hornerova schématu určete částečný podíl a zbytek při dělení polynomu $f(x)$ a $g(x)$, je-li :

a) $f(x)=x^5-x^4-13x^3+13x^2+36x-36$, $g(x)=x-2$ nad R

$$\begin{bmatrix} q(x)=x^4+x^3-11x^2-9x+18, \\ r(x)=0 \end{bmatrix}$$

b) $f(x)=4x^3+x^2$, $g(x)=x+1+i$ nad C

$$\begin{bmatrix} q(x)=4x^2-(3+4i)x+(-1+7i), \\ r(x)=8-6i \end{bmatrix}$$

2. Určete hodnotu polynomu $f(x)=2x^6+2x^4+2x^3+x^2+x+1$ v bodě $\alpha=3$ nad Z_5 aniž provedete dosazení.

$[f(3)=2]$

3. Určete, že polynom $f(x)=3x^5-16x^4+25x^3-6x^2-4x-8$ je dělitelný polynomem $g(x)=x-2$, aniž provedete dělení.

[je dělitelný]

4. Určete hodnotu polynomu v bodě α, aniž provedete dosazení, je-li:

a) $f(x)=2x^5-17x^4+23x^3-18x^2+29x-7, \alpha=2$ nad R

$[f(2)=-45]$

b) $f(x)=x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7, \alpha=-2-i$ nad C

$[f(-2-i)=-1-44i]$

c) $f(x)=3x^6+7x^5-4x^3+4x^2+6x+1, \alpha=-2$ nad R

$[f(-2)=5]$

5. Určete násobnost kořene α polynomu $f(x)$:

a) $f(x)=x^3-5x^2+3x+9, \alpha=3$ nad R

[dvojnásobný]

b) $f(x)=x^4+5x^3+6x^2-4x-8, \alpha=-2$ nad R

[trojnásobný]

c) $f(x)=(1+i)x^4-4x^3+(3-i)x^2-2x, \alpha=1-i$ nad C

[jednoduchý]

6. Určete absolutní člen a tak, aby polynom měl vícenásobný kořen.

a) $f(x)=x^4-10x^3+36x^2-54x+a$

$[a=27]$

b) $f(x)=x^3-12x+a$

$[a=16]$

7. Zjistěte zda polynom $f(x)=x^4-5x^3+6x^2+4x-8$ splňuje podmínky pro to , aby měl trojnásobný kořen.Určete pak zbývající kořeny polynomu.

$[f(x)=(x-2)^3\cdot(x+1)]$

8. Nalezněte Taylorův rozvoj polynomu $f(x)=x^5+2x^4+5x^3-3x^2-2x+7, \alpha=1$

$[g(x)=(x-1)^5+7(x-1)^4+23(x-1)^3+34(x-1)^2+20(x-1)+10]$

9. Pomocí Hornerova schématu vyjádřete polynom v mocninách x:

$f(x)=(x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20$

$[f(x)=x^4-4x^3+6x^2+2x+8]$

2.1.4: Nalezení racionálních kořenů polynomu

Věta 2.9:

Nechť $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ je polynom s celočíselnými koeficienty. Je- li racionální číslo $\frac{p}{q}$ $(D(p,q)=1)$ kořenem polynomu $f(x)$, pak $p / a_0, q / a_n$.

Věta 2.10:

Nechť $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_n \neq 0, n \geq 1$ je polynom s celočíselnými koeficienty a pro prvek $c \in Z$ nechť $f(c) \neq 0$. Pak je-li racionální číslo $\frac{p}{q}$ $(D(p,q)=1)$ kořenem polynomu $f(x)$,platí $(p-cq) / f(c)$.

Speciálně $(p-q) / f(1)$, jestliže $f(1) \neq 0$ a $(p+q) / f(-1)$, jestliže $f(-1) \neq 0$.

Věta 2.11: (Základní věta algebry)

Každý nenulový polynom $f(x)$ *stupně* n má v C právě n kořenů. (počítáno i s jejich násobností)

Věta 2.12:

Nechť číslo $\alpha = a+bi, b \neq 0$ je nulovým bodem polynomu $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ s reálnými koeficienty. Pak komplexně sdružené číslo $\overline{\alpha} = a-bi$ je rovněž nulovým bodem polynomu $f(x)$.

Věta 2.13:

Jestliže číslo $\alpha = a+bi, b \neq 0$ je k-násobný nulový bod polynomu $f(x)$ s reálnými koeficienty, je $\overline{\alpha} = a-bi$ též k-násobným nulovým bodem polynomu $f(x)$.

PŘÍKLAD 1:

Zjistěte, zda polynom $f(x)=12x^3+11x^2-7x-6$ má racionální kořeny.

ŘEŠENÍ:

$\dfrac{p}{q}$ je kořenem polynomu $f(x)$ $\Rightarrow$ $p/6, q/12$

Vypíšeme všechny dělitele čísla **6** : $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ (= p)

Vypíšeme všechny dělitele čísla **12**: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$ (= q)

Možné racionální kořeny jsou $\dfrac{p}{q}: \pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{3}{2}, \pm\dfrac{1}{3}, \pm\dfrac{2}{3}, \pm\dfrac{1}{4}, \pm\dfrac{3}{4}, \pm\dfrac{1}{6}, \pm\dfrac{1}{12}$

$\Rightarrow$ celkem máme 24 racionálních kořenů

Pomocí Hornerova schématu určíme $f(1), f(-1)$

$\underline{\alpha=1}$	12	11	-7	-6
		12	23	16
	12	23	16	$\underline{\underline{10=f(1)}}$

$\Rightarrow$ hodnota polynomu v bodě $\underline{\alpha=1}$ není rovna 0 $\Rightarrow$ $\underline{\alpha=1}$ není kořenem polynomu $f(x)$

$\underline{\alpha=-1}$	12	11	-7	-6
		-12	1	6
	12	-1	-6	$\underline{\underline{0=f'(-1)}}$

$\Rightarrow$ $\underline{\alpha=-1}$ je kořenem polynomu $f(x)$

Nyní můžeme vyškrtnout dva kořeny, kdy 1 není kořenem a (-1) je kořenem polynomu a zbývá jich 26.

$p - q \,/\, 10$, $p + q \,/\, 0$ $\Rightarrow$ začneme vyškrtávat

- např.: $-\frac{1}{4}$ nemůže být kořenem , neboť 1 - 4 =(-3) $\nmid$ $\underline{\underline{10 = f(1)}}$

$-\frac{2}{3}$ je kořenem , neboť 2 – 3 = (- 1) / $\underline{\underline{10 = f(1)}}$

Opět použijeme Hornerovo schéma pro polynom $g(x) = 12x^2 - x - 6$

$\alpha = -\frac{2}{3}$	12	-1	-6
		-8	6
	12	-9	$\underline{\underline{0}}$

Polynom $f(x) = 12x^3 + 11x^2 - 7x - 6$ napíšeme ve tvaru $f(x) = (x+1)\cdot\left(x + \frac{2}{3}\right)\cdot(12x+9)$

a dále ještě upravíme $\underline{\underline{f(x) = 3\cdot (x+1)\cdot\left(x + \frac{2}{3}\right)\cdot(4x+3)}}$.

PŘÍKLAD 2:

Určete všechny kořeny polynomu $f(x) = 6x^5 + 29x^4 + 31x^3 - 32x^2 - 102x - 72$, jestliže je známo, že některé z jeho kořenů jsou celočíselné, resp. racionální (a neceločíselné).

ŘEŠENÍ:

$\frac{p}{q}$ je kořenem polynomu $f(x) \Rightarrow p/72, q/6$

Určíme $p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36, \pm 72$

Určíme $q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Možné racionální kořeny jsou $\frac{p}{q}$, ale počet prvků je příliš velký, proto užijeme důsledku Věty 2.10.

Máme $f(-1)=-10$ a je-li $p\in C$ kořenem polynomu $f(x)$, platí $(p+1)/f(-1)=-10$. Tuto podmínku splňují prvky: $1,-2,-3,4,-6,9$.

Při postupném prověřování zjistíme, že čísla $1,-2$ nejsou celočíselnými kořeny polynomu $f(x)$.

Dostáváme Hornerovo schéma:

$\alpha=-3$	6	29	31	-32	-102	-72
		-18	-33	6	78	72
	6	11	-2	-26	-24	$0=f(-3)$

Nalezli jsme celočíselný kořen $\alpha=-3 \Rightarrow f(x)=(x+3)\cdot\left(6x^4+11x^3-2x^2-26x-24\right)$

Označíme $g(x)=6x^4+11x^3-2x^2-26x-24 \Rightarrow$ čísla 9, 4, -6 nejsou celočíselnými kořeny polynomu $g(x) \Rightarrow$ polynom $f(x)$ má tedy jediný celočíselný kořen $\alpha=-3$.

Při hledání racionálních neceločíselných kořenů $\alpha=\frac{p}{q}, p\in Z, q\in N, D(p,q)=1$ polynomu $g(x)$ využijeme, že $p/-24, q/6 \Rightarrow p=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm24$

$$q=1,2,3,6$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q}=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{4}{3},\pm\frac{8}{3},\pm\frac{1}{6}$$

Užijeme opět Věty 2.9: $g(-1)=-5$ a budeme testovat jen ta racionální čísla $\frac{p}{q}$, pro něž $(p+q)/g(-1)=-5$, tj. $\frac{p}{q}=-\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{8}{3},-\frac{1}{6}$

$\alpha=\frac{3}{2}$	6	11	-2	-26	-24
		9	30	42	24
	6	20	28	16	$0=g\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)$

Nalezli jsme racionální kořen, ale i rozklad polynomu:

$$g(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(6x^3+20x^2+28x+16\right)=(2x-3)\cdot\left(3x^3+10x^2+14x+8\right)$$

Označíme $h(x)=3x^3+10x^2+14x+8$ a nyní hledáme kořeny tohoto polynomu.

Opět použijeme Větu 2.10: $h(-1)=1$ a budeme testovat jen ta racionální čísla $\frac{p}{q}$, pro něž $(p+q)/\,g(-1)=1$, tj. $\frac{p}{q}=-\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{8}{3}$

$\alpha=-\frac{4}{3}$	3	10	14	8
		-4	-8	-8
	3	6	6	$0=h\left(-\frac{4}{3}\right)=g\left(-\frac{4}{3}\right)=f\left(-\frac{4}{3}\right)$

Tudíž $h(x)=\left(x+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(3x^2+6x+6\right)=(3x+4)\cdot\left(x^2+2x+2\right)$.

Celkem tedy $f(x)=(x+3)\cdot(2x-3)\cdot(3x+4)\cdot\left(x^2+2x+2\right)$.

Polynom $k(x)=x^2+2x+2$ má kořeny $(-1\pm i)$ jsme hotovi.

Zjistili jsme, že polynom $f(x)$ má celočíselný kořen (-3), dva racionální kořeny $\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}$ a dva komplexně sdružené kořeny $(-1 \pm i)$.

PŘÍKLAD 4:

Určete normovaný polynom čtvrtého stupně s reálnými koeficienty, který má dvojnásobný kořen $\alpha = 2 + i$.

ŘEŠENÍ:

Dle věty 2.12 je kořenem polynomu číslo $\overline{\alpha} = 2 - i$ a je také dvojnásobný.

Potom platí:

$$(x-(2+i))^2 \cdot (x-(2-i))^2 = \left(x^2 - 2(2+i)x + (2+i)^2\right) \cdot \left(x^2 - 2(2-i)x + (2-i)^2\right) =$$
$$= \left(x^2 - 4x - 2xi + 3 + 4i\right) \cdot \left(x^2 - 4x + 2xi + 3 - 4i\right) = \underline{\underline{x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25}}$$

CVIČENÍ:

1. Určete racionální kořeny polynomu $f(x)=4x^3-4x^2-11x+6$ nad R.

$$\left[\begin{array}{l}\alpha_1=\frac{1}{2},\\ \alpha_2=2,\\ \alpha_3=\left(-\frac{3}{2}\right)\end{array}\right]$$

2. Určete polynom čtvrtého stupně, jsou-li dány jeho kořeny $\alpha_1=5, \alpha_2=-4, \alpha_3=2, \alpha_4=-3$.

$$\left[f(x)=x^4-27x^2-14x+120\right]$$

3. Určete polynom $g(x)$, který má tytéž kořeny jako polynom $f(x)$ nad R, ale všechny jednoduché.

a) $f(x)=x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27$

$$\left[g(x)=x^3-x^2-2x+9\right]$$

b) $f(x)=x^4+2x^3-2x^2-6x+5$

$$\left[g(x)=x^3+3x^2+x-5\right]$$

c) $f(x)=x^3-8x^2+20x-16$

$$\left[g(x)=x^2+2x-8\right]$$

4. Určete všechny kořeny polynomu $f(x)=x^4-4x^2+8x-4$ nad C, víme-li, že jedním z kořenů polynomu je $\alpha=1+i$.

$$\left[\begin{array}{l}\alpha_{1,2}=1\pm i,\\ \alpha_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}\end{array}\right]$$

5. Určete všechny kořeny polynomu

$f(x)=x^6-12x^5+63x^4-168x^3+231x^2-156x+169$, jestliže víte, že má vícenásobný kořen $\alpha=3-2i$.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,2}=3-2i, \\ \alpha_{3,4}=3+2i, \\ \alpha_{5,6}=\pm i \end{bmatrix}$$

6. Určete normovaný polynom čtvrtého stupně s reálnými koeficienty, který má dvojnásobný kořen $\alpha=1-i\sqrt{3}$.

$$\left[x^4-4x^3+12x^2-16x+16\right]$$

2.1.5: Dělitelnost polynomů jedné neurčité

Definice 2.7:

Jsou-li $f(x), g(x)$ dva polynomy z $T[x]$, pak říkáme, že $f(x)$ dělí $g(x)$, $g(x)$ je násobek $f(x)$.Potom existuje polynom $h(x) \in T[x]$ tak, že platí $g(x) = f(x) \cdot h(x)$.

Stupeň polynomu $f(x)$ je menší než stupeň polynomu $g(x)$. $(st\, f(x) \leq st\, g(x))$

Definice 2.8: **Největší společný dělitel polynomů**

a) Jsou-li $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \in T[x]$, pak polynom $D(x) \in T[x]$ se nazývá největší společný dělitel polynomů $f_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$ právě když platí:

$D(x) / f_1(x) \wedge D(x) / f_2 \wedge \ldots \wedge D(x) / f_n(x)$

b) Polynomy $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \in T[x]$ jsou soudělné, když jejich největší společný dělitel $D(x)$ je stupně alespoň prvního. V opačném případě říkáme, že jsou nesoudělné.

Věta 2.14:

$f(x) \in T[x], char T = 0, st\, f(x) = n \geq 1.$ Pak polynom $g(x) \in T[x]$ takový, že $g(x) : D(f(x), f'(x)) = f(x)$ má tytéž kořeny, ale všechny jednoduché.

Věta 2.15: **Odstranění vícenásobných kořenů:**

Nechť $f(x)$ a $g(x) \neq 0$ jsou dva polynomy z $T[x]$. Pak existují v $T[x]$ právě dva polynomy $q(x), r(x)$ s vlastností:

$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, přičemž $r(x) = 0 \vee$ st $r(x) < st\ g(x)$

- v $T[x]$ existuje právě jeden (ve smyslu dělitelnosti) největší společný dělitel $D(x)$ polynomů $f(x)$ a $g(x)$. $D(x)$ lze určit Euklidovým algoritmem.

- odstranit vícenásobné kořeny můžeme také pomocí derivace polynomu, které jsme se věnovali v kapitole 2.1.2: Derivace polynomu

Obecné schéma Euklidova algoritmu:

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r_1(x),\ r_1(x)\neq 0 \wedge st\, g(x)>st\, r_1(x),$$
$$g(x)=r_1(x)\cdot q_1(x)+r_2(x),\ r_2(x)\neq 0 \wedge st\, r_1(x)>st\, r_2(x)$$
$$\vdots$$
$$r_{n-3}(x)=r_{n-2}(x)\cdot q_{n-2}(x)+r_{n-1}(x),\ r_{n-1}(x)\neq 0 \wedge st\, r_{n-2}(x)>st\, r_{n-1}(x)$$
$$r_{n-2}(x)=r_{n-1}(x)\cdot q_{n-1}(x)+r_n(x),\ r_n(x)=0.$$

Potom platí $D[f(x), g(x)]=r_{n-1}(x)$

PŘÍKLAD Z PRAXE:

Euklidův algoritmus použijeme také k odstranění vícenásobných kořenů. Kdy na jednodušší funkci jsme jej použili.

Dostanou-li se Země, Měsíc a Slunce do jedné přímky, nastává zatmění Slunce nebo zatmění Měsíce. Aby nastalo zatmění, musí nastat současně tyto dvě podmínky:

1. Měsíc musí být v novu (zatmění Slunce) nebo v úplňku(zatmění Měsíce). Době mezi dvěma stejnými fázemi Měsíce se říká synodický měsíc a trvá $s = 29{,}53058818$ dne.

2. Měsíc musí být v uzlu své dráhy(tj.v průsečíku své dráhy s rovinou ekliptiky). Době oběhu od uzlu k témuž uzlu se říká drakonický měsíc a trvá $d = 27{,}21221997$ dne.

ŘEŠENÍ:

Spočítáme nyní periodičnost obou dějů, tj. hledáme přirozená čísla a, b tak, aby platilo

$$\frac{s}{d}=\frac{29{,}53058818}{27{,}21221997}\doteq\frac{a}{b}$$

Samozřejmě, je snadné najít čísla a, b tak, aby poslední rovnost platila přesně – stačí zlomek $\frac{s}{d}$ rozšířit číslem 10^8 :

$$\frac{s}{d} = \frac{2953058818}{2721221997}$$

neboli

$$2721221997 \cdot s = 2953058818 \cdot d$$

To znamená, že po 80359286140 dnech, tj. po 22 001 173 letech a 175 dnech se zatmění jistě budou opakovat. My se budeme snažit zlomek $\frac{s}{d}$ aproximovat zlomkem tvaru $\frac{a}{b}$ a využijeme k tomu řetězové zlomky a Euklidův algoritmus:

$2\,953\,058\,818 = 1 \cdot 2\,721\,221\,997 + 231\,836\,821$
$2\,721\,221\,997 = 11 \cdot 231\,836\,821 + 171\,016\,966$
$231\,836\,821 = 1 \cdot 171\,016\,966 + 60\,819\,855$
$171\,016\,966 = 2 \cdot 60\,819\,855 + 49\,377\,256$
$60\,819\,855 = 1 \cdot 49\,377\,256 + 11\,442\,599$
$49\,377\,256 = 4 \cdot 11\,442\,599 + 3\,606\,860$
$11\,442\,599 = 3 \cdot 3\,606\,860 + 622\,019$
$3\,606\,860 = 5 \cdot 622\,019 + 496\,765$
$622\,019 = 1 \cdot 496\,765 + 125\,254$
$496\,765 = 3 \cdot 125\,254 + 121\,003$
$125\,254 = 1 \cdot 121\,003 + 4\,251$
$121\,003 = 28 \cdot 4\,251 + 1975$
$4\,251 = 2 \cdot 1975 + 301$
$1975 = 6 \cdot 301 + 169$
$301 = 1 \cdot 169 + 132$
$169 = 1 \cdot 132 + 37$
$132 = 3 \cdot 37 + 21$
$37 = 1 \cdot 21 + 16$
$21 = 1 \cdot 16 + 5$
$16 = 3 \cdot 5 + 1$
$5 = 5 \cdot 1 + 0$

Budeme nyní podíl $\frac{s}{d}$ aproximovat zlomky, které dostáváme z řetězového zlomku.

Například s použitím prvních dvou členů platí přibližná rovnost:

$$\frac{s}{d} = 1 + \frac{1}{11} = \frac{12}{11}$$

s chybou 1,7102 dne.

To znamená, že zhruba po 11 synodických měsících, tj. po cca 324,8 dnech bude Měsíc opět v uzlu a v novu nebo úplňku (s poměrně velikou chybou).Chceme-li chybu zmenšit, musíme k aproximaci použít delší řetězový zlomek. Nahradíme-li řetězovým zlomkem o šesti členech, dostaneme z Euklidova algoritmu:

$$242 = 1 \cdot 233 + 19$$
$$223 = 11 \cdot 19 + 14$$
$$19 = 1 \cdot 14 + 5$$
$$14 = 2 \cdot 5 + 4$$
$$5 = 1 \cdot 4 + 1$$
$$4 = 4 \cdot 1 + 0$$

aproximaci $\frac{s}{d} \doteq \frac{242}{233}$

s chybou 0,0361 dne, tj. po 18 letech a 10 $\frac{1}{3}$ dnech se zatmění opakují (třetina dne posune zatmění o 120 stupňů zeměpisné délky). Tato perioda zatmění byla známa chaldejským astronomům již řadu století před naším letopočtem pod názvem Saros. (Trojnásobek periody Saros nese název Exeligmos, najdete jej pomocí aproximací z řetězového zlomku.)
(viz (4))

PŘÍKLAD 1:

Určete největšího společného dělitele $D(x)$ polynomů

$f(x)=x^3-6x^2+11x-6, g(x)=x^3-1$.

ŘEŠENÍ:

Budeme užívat Eukleidův algoritmus

$$\Rightarrow \left(x^3-6x^2+11x-6\right)\div\left(x^3-1\right)=1$$
$$\underline{-\left(x^3-1\right)}$$
$$-6x^2+11x-5=r_1(x), \qquad q=1$$

$\Rightarrow$ dále platí:

$g(x)\div r_1(x)=q_1(x)$

Provedeme úpravu $g(x)\cdot 36$

$$\left(36x^3-36\right)\div\left(6x^2-11x+5\right)=6x+11$$
$$\underline{-\left(36x^3-66x^2+30x\right)}$$
$$66x^2-30x-36$$
$$\underline{-\left(66x^2-121x+55\right)}$$
$$91x-91=r_2\,(x), \qquad q_1(x)=6x+11$$

$\Rightarrow$ dále platí:

$r_1(x)\div r_2(x)=q_2(x)$

$$\left(6x^2-11x+5\right)\div(x-1)=6x-5$$
$$\underline{-\left(6x^2-6x\right)}$$
$$5x+5$$
$$\underline{-(-5x+5)}$$
$$0=r_3(x), \qquad q_2(x)=6x-5$$

$\Rightarrow$ Největším společným dělitelem daných polynomů $f(x),q(x)$ je $D(x)=x-1$.

- největším společným dělitelem při užití Euklidova algoritmu je poslední nenulový zbytek (v našem případě to byl $r_2(x)$).

PŘÍKLAD 2:

Nalezněte částečný podíl q a zbytek r při dělení polynomu $f(x)$ polynomem $g(x)$.

$$f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$$
$$g(x)=x^2-3x+1$$

ŘEŠENÍ:

$$\begin{array}{l}
(2x^4-3x^3+4x^2-5x+6)\div(x^2-3x+1)=2x^2+3x+11 \\
\underline{-(2x^4-6x^3+2x^2)} \\
\qquad 3x^3+2x^2-5x \\
\qquad \underline{-(3x^3-9x^2+3x)} \\
\qquad\qquad 11x^2-8x+6 \\
\qquad\qquad \underline{-(11x^2-33x+11)} \\
\qquad\qquad\qquad 25x-5
\end{array}$$

$$\Rightarrow q=2x^2+3x+11$$
$$r=5x-1$$

PŘÍKLAD 3:

Nalezněte $a\in C$ tak, aby polynom $f(x)$ byl dělitelný polynomem $g(x)$, jestliže:

$$f(x)=4x^4+16x^3+10x^2+16x+a$$
$$g(x)=x-i$$

ŘEŠENÍ:

$$\begin{array}{l}
(4x^4+16x^3+10x^2+16x+a)\div(x-i)=4x^3+16x^2+4x^2i+16xi+6x+6i \\
\underline{-(4x^4-4x^3i)} \\
\qquad 4x^3i+16x^3 \\
\qquad\quad \underline{-(16x^3-16x^2i)}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
4x^3 i + 16x^2 i \\
\underline{-\left(4x^3 i + 4x^2\right)} \\
\qquad 16x^2 i + 6x^2 + 16x \\
\qquad \underline{-\left(16x^2 i + 16x\right)} \\
\qquad\qquad 6x^2 + a \\
\qquad\qquad \underline{-\left(6x^2 - 6xi\right)} \\
\qquad\qquad\qquad 6xi + a \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-\left(6xi + 6\right)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a - 6
\end{array}
$$

$a-6 \rightarrow$ nenulový zbytek položíme roven 0 a vypočteme číslo a

$$a - 6 = 0$$

$$\underline{\underline{a = 6}}$$

PŘÍKLAD 4:

Nalezněte $a, b \in R(x)$ tak, aby polynom $f(x)$ byl dělitelný polynomem $g(x)$, jestliže:

$$f(x) = 3x^5 + 8x^3 + 10x^2 - ax + b$$
$$g(x) = x^2 + 3$$

ŘEŠENÍ:

$$
\begin{array}{l}
\left(3x^5 + 8x^3 + 10x^2 - ax + b\right) \div \left(x^2 + 3\right) = 3x^2 - x + 10 \\
\underline{-\left(3x^5 + 9x^3\right)} \\
\qquad -x^3 + 10x^2 \\
\qquad \underline{-\left(-x^3 - 3x\right)} \\
\qquad\qquad 10x^2 + 3x \\
\qquad\qquad \underline{-\left(10x^2 + 30\right)} \\
\qquad\qquad\qquad 3x - ax + b - 30
\end{array}
$$

$3x - ax + b - 30 \rightarrow$ nenulový zbytek po dělení, který položíme roven 0

$$x(3-a)+b-30=0$$

$$x(3-a)=0 \qquad\qquad b-30=0$$

$$\underline{\underline{a=0}} \qquad\qquad \underline{\underline{b=30}}$$

CVIČENÍ:

1. Určete Euklidovým algoritmem největší společný dělitel polynomů $f(x), g(x)$, jestliže:

a) $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + x + 1$

$g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

$[x^2 - 1]$

b) $f(x) = 3x^4 + 15x^3 - 13x^2 - 5x + 4$

$g(x) = 3x^3 + 6x^2 - x - 2$

$[3x^2 - 1]$

c) $f(x) = x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$

$g(x) = x^5 + x^2 - x + 1$

$[x^3 - x + 1]$

d) $f(x) = 2x^3 + (2+i)x^2 + (1+5i)x + 3$

$g(x) = x^3 + (1+4i)x^2 + (-3+6i)x - 9$

$[-4]$

2. Dělte se zbytkem polynom $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 6$ polynomem $g(x) = x - 3$.

$[q = 2x^3 + 3x^2 + 10x + 25, r = 81]$

3. Určete největší společný dělitel polynomů $f(x), g(x), h(x)$.

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 15x^2 + 18x$

$g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$

$h(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$

$[x^2 - 5x + 6]$

2.1.6: Vietovy vzorce

<u>Věta 2.16:</u>

Nechť $f(x)=x^2+px+q$ je normovaný kvadratický polynom, kde α_1,α_2 jsou jeho kořeny. Platí $f(x)=(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)=x^2-(\alpha_1+\alpha_2)x+\alpha_1\cdot\alpha_2$. Porovnáním koeficientů dostáváme vztahy mezi nulovými body normovaného kvadratického polynomu a jeho koeficienty , tzv. **Vietovy vzorce pro normovaný kvadratický polynom:**

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2&=-p\\ \alpha_1\cdot\alpha_2&=q\end{aligned}$$

Podobná úvaha platí i pro normovaný kubický polynom $f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, jehož kořeny jsou $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. Platí

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot(x-\alpha_3)=x^3+(-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)x^2+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x+(-\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$$

Porovnáním koeficientů dostáváme rovnosti:

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&=-a_2,\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3&=a_1,\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3&=-a_0\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 1:

Je dán kubický polynom $f(x)=x^3-3x+1$, jehož nulové body jsou $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. Sestrojte normovaný kubický polynom $g(x)$, jehož nulové body jsou $\alpha_1+1,\alpha_2+1,\alpha_3+1$.

ŘEŠENÍ:

Zapíšeme Vietovy vzorce pro polynom $f(x)=x^3-3x+1$:

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&=0,\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3&=-3,\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3&=-1.\end{aligned}$$

- $g(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ je normovaný kubický polynom, jehož nulové body jsou $\alpha_1+1, \alpha_2+1, \alpha_3+1$.

Z Vietových vzorců pro polynom $g(x)$ postupně určíme hodnoty koeficientů a_1, a_2, a_3.

$\Rightarrow$ platí:

$(\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)+(\alpha_3+1)=-a_2$, tj. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+3=-a_2$

Víme, že $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \Rightarrow \underline{\underline{a_2=-3}}$

$\Rightarrow$ dále platí:

$(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)+(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_3+1)+(\alpha_2+1)\cdot(\alpha_3+1)=a_1$

Po úpravě dostaneme:

$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+3=a_1$, odkud vzhledem k tomu, že $\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=-3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \Rightarrow \underline{\underline{a_1=0}}$

Nakonec $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot(\alpha_3+1)=-a_0$

Roznásobením dostaneme $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+1=a_0$

Po dosazení dostáváme $-1-3+0+1=a_0 \Rightarrow \underline{\underline{a_0=3}}$

Hledaný polynom $g(x)$ má tvar $\underline{\underline{g(x)=x^3-3x^2+3}}$.

<u>Věta 2.17:</u> Vietovy vzorce pro obecný polynom n-tého stupně

Nechť $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=a_n(x-a_1)\cdot(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. Roznásobením tohoto součinu a porovnáním koeficientů u x^{n-1} dostáváme:

$$-\alpha_1 \quad -\alpha_2 \quad -\ldots-\alpha_n=\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad ,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Obdobně porovnáním koeficientů u x^{n-2} dostaneme:

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

Analogicky $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-2}}{a_n}$,

$$\ldots\ldots$$

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} + \ldots + \ldots + \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Symbolicky se zapisují ve tvaru:

$$\sum \alpha_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\sum \alpha_1\alpha_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\ldots\ldots$$

$$\sum \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k = (-1)^k \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

PŘÍKLAD 2:

Určete všechny nulové body polynomu $f(x) = x^3 - 14x^2 + 56x - 64$, jestliže víte, že jeden z jeho nulových bodů je geometrickým průměrem ostatních.Řešte v R.

ŘEŠENÍ:

Označme a_1, a_2, a_3 nulové body polynomu $f(x)$ a napíšeme Vietovy vzorce:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 14,$

$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 56,$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 64.$

Dále podle zadání platí:

$\alpha_1 = \sqrt{\alpha_2\alpha_3}$

Umocněním $\alpha_1 = \sqrt{\alpha_2\alpha_3}$ na druhou a dosazením do $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 64$ máme

$\alpha_1^{\ 3} = 64 \Rightarrow \alpha_1 = 4$

Dosazením hodnoty $\underline{\alpha_1 = 4}$ do $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 14,\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 56$ dostaneme:

$4(\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_2\alpha_3 = 56,$

$4 + \alpha_2 + \alpha_3 = 14 \Rightarrow$ vyjádříme $\alpha_3 = 10 - \alpha_2$

Rovnici $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 64$ upravíme na tvar $\alpha_2 \cdot \alpha_3 = 16$ (dosazením $\alpha_1 = 4$) dále do této rovnice dosadíme $\alpha_3 = 10 - \alpha_2$ $\Rightarrow$ dostaneme

$\alpha_2(10 - \alpha_2) = 16$

Odtud dostaneme $\alpha_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 16}}{2}$ $\Rightarrow \underline{\alpha_1 = 2}$

$\underline{\alpha_2 = 8}$

Hledané kořeny polynomu $f(x)$ jsou 2 ,4 ,8 .

PŘÍKLAD 3:

Nalezněte nutnou a postačující podmínku pro to, aby jeden z nulových bodů kubického polynomu $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ byl aritmetickým průměrem ostatních kořenů.

ŘEŠENÍ:

Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nulové body polynomu $f(x)$, pak platí:

$\alpha_1 = \dfrac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}$, nebo $\alpha_2 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}$, nebo $\alpha_3 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$

$\Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1 = 0$, nebo $\alpha_1 + \alpha_3 - 2\alpha_2 = 0$, nebo $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$

Pro nulové body platí:

$$(\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1)\cdot(\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2)\cdot(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)=0$$

Vietovy vzorce pro polynom $f(x)$ jsou:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-a_2\,,$$
$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=a_1\,,$$
$$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3=a_0$$

Rovnici $(\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1)\cdot(\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2)\cdot(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)=0$ přepíšeme ve tvaru:

$$[(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3\alpha_3]\cdot[(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3\alpha_2]\cdot[(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3\alpha_1]=$$
$$=(a_2+3\alpha_3)\cdot(a_2+3\alpha_2)\cdot(a_2+3\alpha_1)=0,$$

$$a_2^3+3a_2^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+9a_2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)+27(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3)=0$$

Dosazením do posledního vztahu z Vietových vzorců pak dostáváme:

$$a_2^3-3a_2^3+9a_1a_2-27a_0=0,$$
$$-2a_2^3+9a_1a_2-27a_0=0.$$

Odtud je zřejmé, že vztah $-2a_2^3+9a_1a_2-27a_0=0$ je nutnou, ale také i postačující podmínkou pro to, aby jeden z nulových bodů polynomu $f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ byl aritmetickým průměrem ostatních nulových bodů.

Celý postup lze obrátit.

CVIČENÍ:

1. Určete všechny kořeny polynomu $f(x)=16x^4-64x^3-56x^2+16x-15$, jsou-li všechny kořeny tohoto polynomu členy aritmetické posloupnosti.

$$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$$

2. Určete všechny kořeny polynomu $f(x)$, jestliže

a) $f(x)=x^3-7x^2+12x-6$, jeden z kořenů je roven jedné šestině součtu zbývajících.

$$\left[3+\sqrt{3},3-\sqrt{3},1\right]$$

b) $f(x)=x^3+\left(3\sqrt{5}-5\right)x^2+\left(18-10\sqrt{5}\right)x+\left(8\sqrt{5}-24\right)$, jeden z kořenů je součinem ostatních.

$$\left[1-\sqrt{5},2,2-2\sqrt{5}\right]$$

c) $f(x)=2x^4-15x^3+35x^2-30x+8$, jeho kořeny jsou členy geometrické posloupnosti s kvocientem 2.

$$\left[\frac{1}{2},1,2,4\right]$$

3. Určete kořeny polynomu $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ z $R[x]$, má-li dva dvojnásobné kořeny.

[-1 dvojnásobný,
2 dvojnásobný]

2.1.7: Ireducibilní rozklady polynomů v T$[x]$

Definice 2.9:

Polynom $f(x)\in T[x], st\, f(x)\geq 1$ se nazývá reducibilní (rozložitelný) v $T[x]$, jestliže se dá psát jako součin dvou polynomů v $T[x]$, oba polynomy jsou alespoň stupně prvního. V opačném případě se nazývá polynom $f(x)\in T[x]$ ireducibilní (nerozložitelný).

- T je libovolné těleso pak platí: Je-li $f(x)$ reducibilní, pak existují $g(x), h(x)$ takové, že $st\, f(x) > st\, g(x), st\, h(x) \geq 1 \wedge f(x) = g(x)\cdot h(x)$

- reducibilita je relativní vlastnost. Např. polynom $f(x)=x^2-2$ ze $Z[x]$ je ireducibilní v $Q[x]$, ale je reducibilní v $R[x]$, neboť $x^2-2=\left(x+\sqrt{2}\right)\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)$ a víme, že $\sqrt{2}\in R$, ale $\sqrt{2}\notin Q$.

Věta 2.18:

Každý polynom $f(x)$ stupně $n\geq 1$ lze nad R zapsat v součin ireducibilních prvků následovně:

$f(x)=a(x-\alpha_1)...(x-\alpha_r)\cdot\left(x^2+a_1x+b_1\right)...\left(x^2+a_sx+b_s\right)$, kde $a,\alpha_1,...,\alpha_r,a_i,b_i\in R$ pro $\forall i\in 1,...,s$. Polynomy $x^2+a_ix+b_i$ pro $\forall i\in 1,...,s$ mají za kořeny dvě čísla komplexně sdružená, $n=r+2s$.

Věta 2.19:

Platí následující tvrzení:

1. V $Z[x]$ může být reducibilní polynom stupně nultého (např. $2x+4=2\cdot(x+2)$, kde 2 je polynom stupně nultého)
2. V $R[x]$ jsou ireducibilní polynomy stupně 1 a ty polynomy stupně 2, které mají pár komplexně sdružených kořenů.
3. Každý polynom z $C[x]$ stupně $n\geq 2$ je reducibilní v $C[x]$.
4. Každý nenulový polynom $f(x)\in Q[x]$ lze vyjádřit ve tvaru:

$$f(x)=qf_p(x),$$

kde $q \in Q$ a f_p je polynom v $Z[x]$.

PŘÍKLAD 1:

Zjistěte, zda polynom $f(x)=x^2+2x+15$ je reducibilní nebo ireducibilní nad R.

ŘEŠENÍ:

Zjistíme kořeny polynomu $f(x)=x^2+2x+15$

$$D=4-4\cdot 15=-56 \Rightarrow D<0$$

$\Rightarrow f(x)$ je v $R[x]$ ireducibilní, protože polynom nejde rozložit v $R[x]$.

PŘÍKLAD 2:

Zjistěte, zda polynom $f(x)=x^2+2x+15$ je reducibilní nebo ireducibilní nad C.

ŘEŠENÍ:

$f(x)=x^2+2x+15$

- zjistíme kořeny polynomu

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 15}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{56i^2}}{2}=(-1)\pm i\sqrt{14}$$

$$\Rightarrow f(x)=\left(x-1+i\sqrt{14}\right)\cdot\left(x-1-i\sqrt{14}\right)$$

$\Rightarrow f(x)$ je v $C[x]$ reducibilní

PŘÍKLAD 3:

Najděte rozklad polynomu $f(x)=x^4-9$, tak aby byl reducibilní nad C, R, Q, Z.

ŘEŠENÍ:

Polynom můžeme zapsat : $x^4-9=(x^2+3)\cdot(x^2-3)$

Potom platí: $C[x]$: $(x+\sqrt{3})\cdot(x-\sqrt{3})\cdot(x-i\sqrt{3})\cdot(x+i\sqrt{3})$

$R[x]$: $(x^2+3)\cdot(x+\sqrt{3})\cdot(x-\sqrt{3})$

$Q[x]$: $(x^2-3)\cdot(x^2+3)$

$Z[x]$: $(x^2-3)\cdot(x^2+3)$

CVIČENÍ:

1. Najděte rozklad polynomu $f(x)=32x^3+64x^2-120x-72$ tak, aby byl reducibilní v Z, Q.

$$\begin{bmatrix} Z:(x+3)\cdot(4x^2-4x-3)\cdot 8 \\ Q:(x+3)\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 8 \end{bmatrix}$$

2. Najděte rozklad polynomu $f(x)=x^4-x^3+x-1$ tak, aby byl reducibilní v R a C.

$$\begin{bmatrix} R:(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2-x+1) \\ C:(x+1)\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \end{bmatrix}$$

3. ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

3.1: Binomické rovnice

Věta 3.1:

Rovnice ve tvaru $x^n - z = 0$, kde $z \in C, z \neq 0, n > 0, n \in N$, se nazývá binomická rovnice. Kořeny rovnice budeme nazývat n-té odmocniny z čísla z.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), x = \rho(\cos\tau + i\sin\tau)$$

S užitím Moivreovy věty obdržíme

$$\rho^n(\cos(n\tau) + i\sin(n\tau)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Pokud existuje n-tá odmocnina z čísla z, pak má tvar některého z čísel:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

kde $k = 0,1,...,n-1$.

Definice 3.1:

Binomickou rovnici ve tvaru

$$x^n - 1 = 0,$$

kde $n \geq 1$, budeme nazývat rovnicí pro dělení kruhu.

Věta 3.2:

Binomická rovnice $x^n - z = 0$, kde má právě n různých kořenů a všechny jsou jednoduché, které jdou zapsat v goniometrickém tvaru:

$$x_k = \sqrt[n]{|r|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

kde $k = 0,1,...,n-1$.

Věta 3.3:

Druhá odmocnina z komplexního čísla $a+ib, b\neq 0$, má dvě hodnoty, lišící se znamínkem a to:

a) pro $b>0$

$$\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]$$

b) pro $b<0$

$$\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}-i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]$$

PŘÍKLAD 1:

Vypočítejte všechny hodnoty symbolu $\sqrt[n]{1}$.

ŘEŠENÍ:

$1=\cos 0+i\sin 0$**,** pak hledané n-té odmocniny jsou:

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

kde $k=1,\dots,n$. Označíme-li

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

platí dle Moivreovy věty

$$\varepsilon^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

nebo-li n-té odmocniny z čísla 1 můžeme označit postupně $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n$, kde $\varepsilon^n=1$.

Tento výpočet dále užíváme v Cardanovo vzorcích.

PŘÍKLAD 2:

Vyřešte rovnici $x^6 - 1 = 0$ a nalezněte všechny šesté odmocniny z jedné.

ŘEŠENÍ:

a) Tuto rovnici lze řešit algebraicky.

Výraz lze napsat: $x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

Odtud dostaneme kořeny rovnice:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1, \\
x_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \\
x_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
x_4 &= -1 \\
x_5 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
x_6 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i
\end{aligned}
$$

b) Goniometrické řešení:

Doplníme do vzorce:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1 \\
x_2 &= 1\left(\cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}\right) = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
x_3 &= 1\left(\cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6}\right) = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
x_4 &= 1(\cos \pi + i \sin \pi) = -1 \\
x_5 &= 1\left(\cos\frac{8\pi}{6} + i\sin\frac{8\pi}{6}\right) = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
x_6 &= 1\left(\cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6}\right) = \cos 300^\circ + i \sin 300^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i
\end{aligned}
$$

PŘÍKLAD 3:

Řešte rovnici $x^5 = 2 + 3i$

ŘEŠENÍ:

Komplexní číslo převedeme na goniometrický tvar $r = 2 + 3i$

Dále zjistíme:

$$|r| = \sqrt{13},$$
$$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}},$$
$$\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}},$$
$$\Rightarrow \underline{\varphi = 56^\circ 18' 36''}$$

Doplníme do vzorce podle Věty 3.2 a zjistíme kořeny, které zaokrouhlíme:

$$x_1 = \sqrt[10]{13}\left(\cos 11^\circ 15' 43'' + i \sin 11^\circ 15' 43''\right) = 1{,}267506 + 0{,}252398i$$
$$x_2 = \sqrt[10]{13}\left(\cos 83^\circ 15' 43'' + i \sin 83^\circ 15' 43''\right) = 0{,}151636 + 1{,}283466i$$
$$x_3 = \sqrt[10]{13}\left(\cos 155^\circ 15' 43'' + i \sin 155^\circ 15' 43''\right) = -1{,}173790 + 0{,}540827i$$
$$x_4 = \sqrt[10]{13}\left(\cos 227^\circ 15' 43'' + i \sin 227^\circ 15' 43''\right) = -0{,}877078 - 0{,}949216i$$
$$x_5 = \sqrt[10]{13}\left(\cos 299^\circ 15' 43'' + i \sin 299^\circ 15' 43''\right) = 0{,}631726 - 1{,}127475i$$

CVIČENÍ:

1. Řešte binomické rovnice:

a) $x^6 = 3 - 4i$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0{,}820363 + 1{,}018322i, \\ x_2 = -0{,}471711 + 1{,}219616i, \\ x_3 = -1{,}292075 + 0{,}201294i, \\ x_4 = -0{,}820363 - 1{,}018322i, \\ x_5 = 0{,}471711 - 1{,}219617i, \\ x_6 = 1{,}292075 - 0{,}201294i \end{array}\right]$$

b) $x^3 = 5 + 3i$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1{,}078283 + 0{,}720486i, \\ x_2 = -0{,}720486 + 1{,}078283i, \\ x_3 = -1{,}078283 - 0{,}720486i \end{array}\right]$$

2. Řešte binomické rovnice:

a) $x^3 = -8$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 + \sqrt{3}i, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 1 - \sqrt{3}i \end{array}\right]$$

b) $x^4 = -16$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \\ x_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \\ x_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, \\ x_4 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{array}\right]$$

3.2: Diskriminant

Definice 3.2:

Diskriminantem n neurčitých $x_1, x_2, ..., x_n$ rozumíme polynom z $I[x_1, x_2, ..., x_n]$ ve tvaru:

$$D_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{1 \le i \le n} (x_i - x_j)^2,$$

kde I je obor integrity.

Definice 3.3:

Nechť je dán polynom $f(x)$ ve tvaru $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, a_0 \neq 0, n \geq 1$.

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ jsou kořeny tohoto polynomu. Diskriminantem polynomu $f(x)$ budeme rozumět výraz $a_n^{2n-2} D_n(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

$$a_2^2 D_2(\alpha_1, \alpha_2) = a_1^2 - 4 a_0 a_2$$

Diskriminanty polynomů v základním tvaru $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ jsou:

$$D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = a_1^2 a_2^2 + 18 a_0 a_1 a_2 - 4 a_0 a_2^3 - 4 a_1^3 - 27 a_0^2$$

$$D_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \frac{1}{27}\left[4\left(12 a_0 + a_2^2 - 3 a_1 a_3\right)^3 - \left(27 a_1^2 - 72 a_0 a_2 + 2 a_2^3 - 9 a_1 a_2 a_3 + 27 a_0 a_3^2\right)^2\right]$$

Věta 3.4:

Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty má :

1) dva různé kořeny, je-li její diskriminant $D_2 > 0$,

2) jeden dvojnásobný reálný kořen, je-li $D_2 = 0$,

3) pár komplexně sdružených kořenů, je-li $D_2 < 0$.

Věta 3.5:

Každá kubická rovnice (rovnice 3.stupně) je řešitelná.

Věta 3.6:

Nechť máme kubickou rovnici ve tvaru $x^3 + a_2 x + a_1 x + a_0 = 0$

Zavedeme substituci $x = y - \frac{a_2}{3}$, pak platí:

$y^3 + py + q = 0$,kde

$p = a_1 - \frac{{a_2}^2}{3}$,

$q = a_0 - \frac{a_1 a_2}{3} + \frac{2{a_2}^3}{27}$

Definice 3.4:

Nechť je dána kubická rovnice $y^3 + py + q = 0$, pak její řešení lze nalézt pomocí tzv. Cardanových vzorců:

$$D_3 = -4p^3 - 27q^2 = (-108) \cdot \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)$$

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}}$$

$$y_2 = \varepsilon \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}}$$

$$y_3 = \varepsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \varepsilon \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}}$$

Věta 3.7:

Kubická rovnice s reálnými koeficienty ve tvaru $x^3 + px + q = 0$ má:

1) dvojnásobný kořen, je-li $D_3 = 0$

2) všechny kořeny reálné, je-li $D_3 > 0$

3) jeden kořen reálný a dva komplexně sdružené, je-li $D_3 < 0$.

Věta 3.8:

Nechť diskriminant rovnice $x^3 + px + q = 0$ s reálnými koeficienty je kladný.

Pak kořeny této rovnice vypočteme následujícím způsobem. Nalezneme řešení goniometrické rovnice :

$$\cos t = -\frac{q}{2}\sqrt{\frac{27}{-p^3}}$$

ležící v intervalu $(0,\pi)$. Hledané řešení je pak dáno vztahy:

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{t}{3}$$
$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{t+2\pi}{3}$$
$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{t+4\pi}{3}$$

kde druhá odmocnina z kladného čísla $-\frac{p}{3}$ je kladné číslo.

Věta 3.9:

Každá algebraická rovnice 4.stupně je algebraicky řešitelná.

Věta 3.10:

Nechť tedy máme algebraickou rovnici 4.stupně ve tvaru:

$$z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

Zavedeme substituci $z = x - \frac{a_3}{4}$, pak platí:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

kde

$$p = a_2 - \frac{3}{8}a_3{}^2,$$
$$q = a_1 - \frac{a_2 a_3}{2} + \frac{a_3{}^3}{8},$$
$$r = a_0 - \frac{1}{4}a_1 a_3 + \frac{1}{16}a_2 a_3{}^2 - \frac{3}{256}a_3{}^4$$

Provedeme substituci $x = \frac{1}{2}(u+v+w)$ a dostaneme, že u^2, v^2, w^2 jsou kořeny rovnice

(kubické resolventy)

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0$$

s podmínkou $uvw = -q$. Označíme-li kořeny kubické resolventy t_1, t_2, t_3 dostaneme :

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right)$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}\right)$$
$$x_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}\right)$$
$$x_4 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right)$$

$$z_i = x_i - \frac{a_1}{4}$$

Věta 3.11:

Diskriminant rovnic $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ je roven diskriminantu její kubické resolventy.

Věta 3.12:

Nechť rovnice $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, kde $q \neq 0$, je rovnice s reálnými koeficienty s $D_4 \neq 0$, Pak platí:

1) Je-li $D_4 < 0$, pak rovnice $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ má dva reálné kořeny a jeden pár komplexně sdružených kořenů.

2) Je-li $D_4 > 0, p < 0, p^2 - 4r > 0$, pak má rovnice $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ čtyři různé reálné kořeny.

3) Je-li $D_4 > 0$ a podmínky ve 2) nejsou splněny, pak má rovnice $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ dva páry komplexně sdružených kořenů.

Definice 3.5:

Nechť je dán polynom n-tého stupně, $n > 0$, ve tvaru :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ kde } a_n \neq 0.$$

Jestliže pro koeficienty polynomu $f(x)$ platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_n \\ a_1 &= a_{n-1} \\ a_2 &= a_{n-2} \\ &\vdots \\ a_k &= a_{n-k}, \end{aligned}$$

kde $k \leq \frac{n}{2}$, pak $f(x)$ nazveme reciprokým polynomem 1. druhu. Rovnici $f(x)=0$ budeme analogicky nazývat reciprokou rovnicí 1. druhu.

<u>Věta 3.13:</u>

Každý reciproký polynom $f(x)$ 1. druhu lichého stupně n lze psát ve tvaru

$$f(x)=(x+1)\,g(x),$$

kde polynom $g(x)$ je reciproký polynom 1. druhu sudého stupně $(n-1)$.

Můžeme se tedy omezit na polynomy sudého stupně:

$$f(x)=a_0x^{2m}+a_1x^{2m-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$
$$f(x)=\left(a_0x^{2m}+a_0\right)+\left(a_1x^{2m-1}+a_1x\right)+\ldots=0$$

$$a_0\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+a_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+\ldots+a_{m-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_m=0$$

$$y=x+\frac{1}{x}\Rightarrow\ y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$$
$$y^3-3y=x^3+\frac{1}{x^3},\ldots$$

$$b_0y^m+b_1y^{m-1}+\ldots+b_m=0\Rightarrow y_1,y_2,\ldots,y_m$$
$$x^2-y_ix+1=0,\, i=1,\ldots,m\Rightarrow x_1,x_2,\ldots,x_{2m}$$

<u>Definice 3.6:</u>

Polynom $f(x)$ nazveme reciprokým polynomem 2. druhu, jestliže pro jeho koeficienty platí:

$$\begin{aligned} a_0&=-a_n\\ a_1&=-a_{n-1}\\ a_2&=-a_{n-2}\\ &\vdots\\ a_k&=-a_{n-k}, \end{aligned}$$

Rovnici $f(x)=0$ pak nazveme reciprokou rovnicí 2. druhu.

Věta 3.14:

Každý reciproký polynom $f(x)$ 2. druhu lze psát ve tvaru

$$f(x)=(x-1)\,g(x),$$

kde polynom $g(x)$ je reciproký polynom 1. druhu.

PŘÍKLAD 1:

Vypočítejte kořeny polynomu $f(x)=x^3-9x^2+36x-28$.

ŘEŠENÍ:

Rovnici $x^3-9x^2+36x-28=0$ vyřešíme pomocí Cardanových vzorců.

Podle Věty 3.6 zavedeme substituci $x=y-\frac{a_2}{3}=x+3$

$\Rightarrow y^3+px+q=0$ vypočteme p,q:

$$p=a_1-\frac{a_2{}^2}{3}=9$$

$$q=a_0-\frac{a_1a_2}{3}+\frac{2a_2{}^3}{27}=26$$

Dosadíme do rovnice a dostaneme: $y^3+9y+26=0$

Vypočteme diskriminant: $D_3=-4p^3-27q^2=-4\cdot 9^3-27\cdot 26^2=-21168<0\Rightarrow$ podle Věty 3.7 bude jeden kořen reálný a dva komplexně sdružené

Podle Cardanových vzorců vypočteme kořeny rovnice $y^3+9y+26=0$

$$y_1=\sqrt[3]{\left(-\frac{26}{2}\right)+\frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-21168)}}+\sqrt[3]{\left(-\frac{26}{2}\right)-\frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-21168)}}=$$

$$=\sqrt[3]{(-13)+14}+\sqrt[3]{(-13)-14}=\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{(-27)}=1-3=\underline{\underline{-2}}$$

Pro ε platí: $\varepsilon = \sqrt[3]{1} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{2}{3}\pi$

$$\varepsilon^2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi$$

$$y_2 = \varepsilon\cdot\sqrt[3]{\left(-\frac{26}{2}\right)+\frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-21168)}} + \varepsilon^2\cdot\sqrt[3]{\left(-\frac{26}{2}\right)-\frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-21168)}} =$$

$$= 1\cdot\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\right) + (-3)\cdot\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi\right) =$$

$$= \cos\frac{2}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{2}{3}\pi - 3\cdot\cos\frac{4}{3}\pi - 3i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi = \underline{\underline{2+2\sqrt{3}i}}$$

$$y_3 = \varepsilon^2\cdot\sqrt[3]{\left(-\frac{26}{2}\right)+\frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-21168)}} + \varepsilon\cdot\sqrt[3]{\left(-\frac{26}{2}\right)-\frac{1}{18}\cdot\sqrt{(-3)\cdot(-21168)}} =$$

$$= 1\cdot\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi\right) + (-3)\cdot\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\right) =$$

$$= \cos\frac{4}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi - 3\cdot\cos\frac{2}{3}\pi - 3i\cdot\sin\frac{2}{3}\pi = \underline{\underline{2-2\sqrt{3}i}}$$

Kořeny y_1, y_2, y_3 vrátíme zpět do substituce

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1}} = y_1 + 3 = (-2) + 3 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{x_2}} = y_2 + 3 = \underline{\underline{5+2\sqrt{3}i}}$$

$$\underline{\underline{x_3}} = y_3 + 3 = \underline{\underline{5-2\sqrt{3i}}}$$

PŘÍKLAD 2:

Vypočítejte kořeny polynomu $f(x) = x^3 - 6x + 5$.

ŘEŠENÍ:

Nemusíme dělat substituci, protože známe $p = (-6), q = 5$

Vypočítáme diskriminant rovnice $x^3 - 6x + 5 = 0$

$D_3 = -4p^3 - 27q^2 = (-4)\cdot(-6)^3 - 27\cdot 5^2 = 189 > 0 \Rightarrow$ jsou všechny kořeny reálné

Kořeny rovnice nalezneme následujícím způsobem podle Věty 3.4:

$$\cos t = -\frac{q}{2}\cdot\sqrt{\frac{27}{-p^3}} \text{ , leží v intervalu } (0,\pi) \Rightarrow \underline{\underline{\cos t}} = -\frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{27}{-(-6)^3}} = \underline{\underline{-\frac{5}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

$$\underline{\underline{t = 152^\circ\,06'}}$$

Pro hledané kořeny platí vztahy:

$$\underline{\underline{x_1}} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{t}{3} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\frac{152^\circ 06'}{3} = \underline{\underline{1{,}7915}}$$

$$\underline{\underline{x_2}} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{t+2\pi}{3} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\frac{152^\circ 06' + 360^\circ}{3} = \underline{\underline{-2{,}7912}}$$

$$\underline{\underline{x_3}} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{t+4\pi}{3} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\frac{152^\circ 06' + 720^\circ}{3} = \underline{\underline{0{,}9998}}$$

PŘÍKLAD 3:

Vypočtěte kořeny polynomu $z^4 - 4z^3 + 11z^2 + 8z - 26$.

ŘEŠENÍ:

Máme algebraickou rovnici 4.stupně ve tvaru:

$$z^4 - 4z^3 + 11z^2 + 8z - 26 = 0$$

Zavedeme substituci: $z = x - \frac{a_3}{4} = x + 1 \Rightarrow x^4 + 5x^2 + 22x - 10 = 0$

Podle Věty 3.10 zjistíme:

$$p = 5$$
$$q = 22$$
$$r = (-10)$$

Dosazením koeficientů do rovnice $t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0$ dostaneme kubickou rovnici tvaru $\Rightarrow t^3 + 10t^2 + 65t - 484 = 0$

Podle Věty 3.6 zavedeme substituci: $t = y - \frac{a_2}{3} = y - \frac{10}{3}$

Vypočteme p, q:

$$p = a_1 - \frac{a_2^{\ 2}}{3} = \frac{95}{3}$$
$$q = a_0 - \frac{a_1 a_2}{3} + \frac{2a_2^{\ 3}}{27} = 26$$

Potom platí $y^3 + px + q = 0 \Rightarrow y^3 + \frac{95}{3} y - \frac{16918}{27} = 0$

Vypočítáme diskriminant $D_3 = -4p^3 - 27q^2 = -10727712 < 0 \Rightarrow$ jeden kořen je reálný a dva komplexně sdružené.

Podle Cardanových vzorců vypočítáme kořeny rovnice $y^3 + \frac{95}{3} y - \frac{16918}{27} = 0$

$$\underline{\underline{y_1}} = \sqrt[3]{\left(\frac{8459}{27}\right) + \frac{1}{18} \cdot \sqrt{(-3) \cdot (-10727712)}} + \sqrt[3]{\left(\frac{8459}{27}\right) - \frac{1}{18} \cdot \sqrt{(-3) \cdot (-10727712)}} =$$
$$= \underline{\underline{\frac{22}{3}}}$$

$$y_2 = \varepsilon \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{8459}{27}\right) + \frac{1}{18} \cdot \sqrt{(-3) \cdot (-10727712)}} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{\left(\frac{8459}{27}\right) - \frac{1}{18} \cdot \sqrt{(-3) \cdot (-10727712)}} =$$
$$= \left(\cos\frac{2}{3}\pi + i \cdot \sin\frac{2}{3}\pi\right) \cdot \left(\frac{11}{3} + 2\sqrt{6}\right) + \left(\cos\frac{4}{3}\pi + i \cdot \sin\frac{4}{3}\pi\right) \cdot \left(\frac{11}{3} - 2\sqrt{6}\right) = \underline{\underline{\left(-\frac{11}{3}\right) - i \cdot 6\sqrt{2}}}$$

$\underline{\underline{y_3 = \left(-\frac{11}{3}\right) - i \cdot 6\sqrt{2}}}$ - komplexně sdružený kořen

Vrátíme do substituce:

$\underline{\underline{t_1}} = y_1 - \frac{10}{3} = \underline{\underline{4}}$

$\underline{\underline{t_2}} = y_2 - \frac{10}{3} = \underline{\underline{-7 + 6\sqrt{2} \cdot i}}$

$$\underline{\underline{t_3}} = y_3 - \frac{10}{3} = \underline{\underline{-7 - 6\sqrt{2} \cdot i}}$$

$$\sqrt{t_1} = \pm 2$$
$$\sqrt{t_2} = \pm\left(\sqrt{2} + 3i\right)$$
$$\sqrt{t_3} = \pm\left(\sqrt{2} - 3i\right)$$

Kořeny kubické resolventy musí splňovat podmínku: $\sqrt{t_1} \cdot \sqrt{t_2} \cdot \sqrt{t_3} = q = (= 22)$

$$\Rightarrow \sqrt{t_1} = -2$$
$$\sqrt{t_2} = \left(\sqrt{2} + 3i\right)$$
$$\sqrt{t_3} = \left(\sqrt{2} - 3i\right)$$
$$\Rightarrow \underline{-q = -22}$$

Dostáváme kořeny rovnice 4.stupně:

$$\underline{\underline{x_1}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right) = \frac{1}{2}\left(-2 + \left(\sqrt{2} + 3i\right) + \left(\sqrt{2} - 3i\right)\right) = -1 + \sqrt{2}$$
$$\underline{\underline{x_2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}\right) = \frac{1}{2}\left(-2 - \left(\sqrt{2} + 3i\right) - \left(\sqrt{2} - 3i\right)\right) = -1 - \sqrt{2}$$
$$\underline{\underline{x_3}} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \left(\sqrt{2} + 3i\right) - \left(\sqrt{2} - 3i\right)\right) = 1 + 3i$$
$$\underline{\underline{x_4}} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \left(\sqrt{2} + 3i\right) + \left(\sqrt{2} - 3i\right)\right) = 1 - 3i$$

PŘÍKLAD Z PRAXE:

Nechť žebřík o délce $l = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{10}$ je opřen o bednu o rozměrech 1x1, o stěnu a o podlahu. Jak vysoko dosáhne?

ŘEŠENÍ:

Bedna dělí délku žebříku na dva úseky. Označme si x výšku horního úseku. Potom výška dolního úseku je 1, horizontální průmět horního úseku je 1 a horizontální průmět dolního úseku je $\frac{1}{x}$. Podle Pythagorovy věty je součet délek úseků:

$$l=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^{-2}+1}$$

Po umocnění na druhou

$$l^2=x^2+1+2\cdot\frac{x^2+1}{x}+x^{-2}+1$$

neboli

$$x^4+2x^3+2-l^2+2x+1=0,$$

což je reciproká rovnice.

Zkusíme rozložit

$$l^2=x^2+1+2\cdot\frac{x^2+1}{x}+x^{-2}+1=\left(x^2+ux+1\right)\cdot\left(x^2+vx+1\right).$$

Dostáváme soustavu

$$uv=\left(2-l^2\right)-2=-\frac{160}{9},$$

$$u+v=2\,.$$

Hledáme seznam řešení rovnice $y^2-2y-\frac{160}{9}$, což je $y_{1,2}=1\pm\sqrt{1+\frac{160}{9}}=1\pm\frac{13}{3}$.

Rozložili jsme polynom na

$$x^4+2x^3+2-l^2+2x+1=\left(x^2+\frac{16}{3}x+1\right)\cdot\left(x^2-\frac{10}{3}x+1\right)$$

První z nalezených kvadratických trojčlenů nemá reálné kořeny, druhý lze rozložit

$$x^2-\frac{10}{3}x+1=(x-3)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right).$$

Použijeme-li větší kořen $x=3$, dosáhneme do výšky $x+1=4$.

(viz (5))

PŘÍKLAD 4:

Vypočítejte kořeny polynomu $f(x)=x^7-2x^6-x^4-x^3-2x+1$.

ŘEŠENÍ:

Polynom $f(x)$ je reciproký polynom 1. druhu lichého stupně a lze psát ve tvaru:

$f(x)=(x+1)\cdot g(x)$

Pomocí Hornerova schématu vypočteme polynom $g(x)$.

$\underline{\alpha = -1}$	1	-2	0	-1	-1	0	-2	1
		-1	3	-3	4	-3	3	-1
	1	-3	3	-4	3	-3	1	$\underline{\underline{0}}$

$$g(x) = x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

$g(x)$ je reciproký polynom 1.druhu, ale sudý.

$$x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0 \qquad / : x^3$$

Podle Věty 3.12 zavedeme substituci:

$$y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow y^3 - 3y = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

Potom dostaneme: $3y - 3y^2 + 6 + y^3 - 3y - 4 = 0$

$$\underline{y^3 - 3y^2 + 2 = 0}$$

Zavedeme další substituci podle Věty 3.6, kdy $y = z - \frac{a_1}{3} \Rightarrow y = z + 1$

$$\Rightarrow z^3 + pz + q = 0$$

$$p = a_1 - \frac{{a_2}^2}{3} = -3$$

$$q = a_0 - \frac{a_1 \cdot a_2}{3} + \frac{2 \cdot {a_2}^3}{27} = 0$$

Spočteme D_3:

$D_3 = (-4)p^3 - 27q^2 = 108 > 0 \Rightarrow$ že všechny kořeny jsou reálné.

Vypočteme kořeny rovnice:

$$\cos t = -\frac{q}{2} \cdot \sqrt{\frac{27}{-p^3}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\underline{z_1}} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{t}{3} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

$$\underline{\underline{z_2}} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{t+2\pi}{3} = \underline{\underline{-\sqrt{3}}}$$

$$\underline{\underline{z_3}} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{t+4\pi}{3} = \underline{\underline{0}}$$

Vrátíme zpět do substituce $y = z + 1$

$$\Rightarrow y_1 = \sqrt{3} + 1$$
$$y_2 = -\sqrt{3} + 1$$
$$y_3 = 1$$

$\Rightarrow$ Dosazením do první substituce získáme kořeny polynomu: $y = x + \dfrac{1}{x}$

$$y_1 = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{2 \cdot \sqrt{3}}}{2}}}$$

$$y_2 = -\sqrt{3} + 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_{3,4} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm i \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{3}}}{2}}}$$

$$y_3 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_{5,6} = \frac{1 \pm i \cdot \sqrt{3}}{2}}}$$

$$\underline{\underline{x_7 = -1}}$$

PŘÍKLAD 5:

Vypočítejte kořeny polynomu $f(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 1$.

ŘEŠENÍ:

Polynom $f(x)$ je reciproký polynom 2. druhu $\Rightarrow 1$ . . . je kořenem polynomu.

Potom lze psát ve tvaru: $f(x) = (x-1) \cdot g(x)$

$$\left(x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 1\right) \div (x-1) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$$

$g(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1 \Rightarrow g(x)$ je reciproký polynom 1.druhu, ale sudý

$$x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0 \qquad / : x^2$$

$$x^2 - \frac{1}{x^2} - 2 - \left(x + \frac{1}{x} \right) - 2 = 0$$

Zavedeme substituci: $y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Potom dostaneme: $y^2 - y - 4 = 0$

Řešíme kvadratickou rovnici $\Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

Vrátíme zpět do substituce: $y = x + \frac{1}{x}$

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{x_{1,2} = \frac{-(1 + \sqrt{17}) \pm \sqrt{2 + 2 \cdot \sqrt{17}}}{4}}}$$

$$y_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{x_{3,4} = \frac{-(1 - \sqrt{17}) \pm \sqrt{2 - 2 \cdot \sqrt{17}}}{4}}}$$

$$\underline{\underline{x_5 = 1}}$$

CVIČENÍ:

1. Řešte nad C kubické rovnice pomocí Cardanových vzorců:

a) $x^3 + 36x + 208 = 0$

$$\left[-4, 2 \pm 4i\sqrt{3},\right]$$

b) $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$

$$\left[-4, -1, -1\right]$$

2. Řešte nad C rovnici 4.stupně:

a) $x^4 - 3x^2 - 12x + 40 = 0$

$$\left[2 \pm i, -2 \pm 2i\right]$$

b) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$

$$\left[1 \pm 2i, -2 \pm i\right]$$

3. Řešte v C reciproké rovnice:

a) $6x^6 + 5x^5 - 44x^4 + 44x^2 - 5x - 6 = 0$

$$\left[1, -1, -\frac{1}{3}, -3, \frac{1}{2}, 2\right]$$

b) $x^5 - 11x^4 + 17x^3 - 11x + 1 = 0$

$$\left[\frac{9 \pm \sqrt{77}}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, -1\right]$$

c) $x^8 - x^7 + 39x^6 - 80x^5 + 100x^4 - 80x^3 + 39x^2 - 10x + 1 = 0$

$$\left[1, 1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 2 \pm \sqrt{3}\right]$$

4. ZÁVĚR

Diplomová práce je pojata jako „ učebnice“, která má čtenáře seznámit s řešením a metodikou polynomů jedné proměnné. Je určena studentům na středních a vysokých školách.

Jedním z cílů této diplomové práce, je přiblížit čtenáři pojem polynomy jedné proměnné. V každé podkapitole je popsán daný problém, který vede na řešení polynomů jedné proměnné. Pro názornost si čtenář může vyzkoušet vypočítat příklad podle předlohy a na závěr procvičit a ověřit získané znalosti a dovednosti na dalších příkladech s uvedenými výsledky.

Chtěla jsem touto diplomovou prací ukázat, že polynomy jedné proměnné můžeme řešit různými metodami. Některé kapitoly jsem doplnila příklady, kde se užívají polynomy v praxi.

Dále jsem s snažila podrobně vyřešit vzorové příklady, kde jsem popisovala jednotlivé kroky postupu, aby čtenář lépe pochopil danou problematiku.

5. SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] **Krutský, F.**: *Algebra I.*, Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1995.

[2] **Drábek, J. a Hora, J.**: *Algebra. Polynomy a rovnice*, Plzeň: Vydavatelství Západočeské univerzity, 2001.

[3] **Procházka, J.**: *Polynomy,* České Budějovice: Pedagogická fakulta, 1979.

[4] **Kořínek, V.**: *Základy algebry*, Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1956.

[5] **Emanovský, P.**: *Cvičení z algebry (polynomy, alg. rovnice)*, Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1993.

[6] **Mrkvička, T.**: *Algebra V.,* České Budějovice: Pedagogická fakulta, 2003.

[7] **Vysoká, J.**: *Algebra III.*, České Budějovice: Pedagogická fakulta, 1997.

[8] **Tlustý, P.**: *Algebra II.*, České Budějovice: Pedagogická fakulta, 1995.

6.SEZNAM POUŽITÝCH INTERNETOVÝCH ODKAZŮ

(1) http://old.mendelu.cz/~marik/aplikace/reka.pdf

(2) http://mathworld.wolfram.com/VietasFormulas.html

(3) http://mathworld.wolfram.com/topics/Polynomials.html

(4) http://www.cut-the-knot.org/blue/Euclid.shtml

(5) http://www.uk.cz/~maly/mnohocleny.pdf