Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Zobecněné derivace prvního a druhého řádu

Diplomová práce

Autor:	Veronika Borůvková
Studijní program:	N1101 Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro střední školy - Učitelství pro druhý stupeň ZŠ - anglický jazyk a literatura
Vedoucí práce:	doc. Mgr. Dušan Bednařík, Ph.D.

Hradec Králové 2016

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Zadání diplomové práce

Autor:	**Veronika Borůvková**
Studijní program:	N1101 Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro střední školy - Učitelství pro druhý stupeň ZŠ - anglický jazyk a literatura
Název práce:	**Zobecněné derivace prvního a druhého řádu**
Název práce v AJ:	Generalized derivatives of first and second order
Cíl a metody práce:	Je známo, že reálná funkce definovaná na otevřeném intervalu I mající na intervalu I druhou derivaci je na intervalu konvexní, právě když má na intervalu I nezápornou druhou derivaci. Cílem diplomové práce je nalézt různá zobecnění této klasické věty s využitím zobecněné derivace prvního resp. druhého řádu. Motivací je fakt, že konvexní funkce obecně nemusí mít diferencovatelná ve všech bodech svého definičního oboru.
Garantující pracoviště:	Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta
Vedoucí práce:	doc. Mgr. Dušan Bednařík, Ph.D.
Konzultant:	
Oponent:	Mgr. Daniel Cameron Campbell
Datum zadání práce:	31.3.2016
Datum odevzdání práce:	15.7.2016

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne Veronika Borůvková

Poděkování

Ráda bych poděkovala doc. Mgr. Dušanu Bednaříkovi, Ph.D. za podporu, připomínky a opravy chyb a špatných úvah, kterých jsem se při psaní práce dopustila.

Dále bych chtěla poděkovat Mgr. Lukáši Procházkovi za grafické zpracování obrázků.

Anotace:

Diplomová práce navazuje na bakalářskou práci *Derivace mnohoznačných funkcí* a dále tuto tematiku rozvíjí. Cílem je popsat některé typy derivací mnohoznačných funkcí, konkétně kontingentní, Clarkovu a Diniho derivaci, koderivaci a derivace druhého řádu.

Borůvková, V. *Zobecněné derivace prvního a druhého řádu.* Hradec Králové, 2016. Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí práce doc. Mgr. Dušan Bednařík, Ph.D. 54 s.

Klíčová slova: mnohoznačná funkce, subdiferenciál konvexní funkce, kontingentní kužel, Clarkův kužel, normálový kužel, derivace mnohoznačné funkce

Annotation:

The Diploma Thesis develops the Bachelor Thesis *Derivatives of set-valued mappings* and discusses the topic further. The aim is to describe the following types of derivatives: contingent, Clarke and Dini derivative, coderivative and derivatives of second order.

Borůvková, V. *Generalized derivatives of first and second order.* Hradec Králové, 2016. Diploma Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis supervisor doc. Mgr. Dušan Bednařík, Ph.D. 54 p.

Keywords: set-valued mappings, subdifferential of convex function, contingent cone, Clarke cone, normal cone, derivatives of set-valued mappings

Obsah

1 Úvod

Mnohoznačné funkce popisují situace a problémy, které v závislosti na proměnné dávají více, i nekonečně mnoho řešení. Pro jejich studium se hodí grafický přístup. Mnohoznačná funkce je tedy charakterizována svým grafem. Také zde zavádíme pojem efektivní obor, jelikož hodnotou funkce v bodě může být i prázdná množina.

V kapitole 2 jsou popsány základní vlastnosti mnohoznačných funkcí. Limes superior a inferior, které úzce souvisí s polospojitostí shora a zdola, podobně jako u jednoznačných funkcí limita a spojitost. Jak limes superior i inferior jsou uzavřené množiny. Dále je rozebrána vlastnost monotonie. Pro mnohoznačné funkce neexisují termíny funkce rostoucí a klesající. Monotónní funkce je jakýmsi zobecněním rostucí jednoznačné funkce. Silnějším pojmem je maximálně monotónní mnohoznačná funce, která není obsažena v jiné monotonní funkcí. Na konci kapitoly je též definována lokální lipschitzovskost funkce. Zde, je zachován stejný geometrický význam jako u lipschitzovskosti jednoznačné funkce. V dalších kapitolách se ukáže, jak lipschitzovskost funkce zjednodušuje další úvahy.

Kapitola 3 se zdánlivě vrací k jednoznačným funkcím. Zde je cílem zobecnit derivaci i pro funkce, které nejsou spojitě diferencovatelné, a tak pro konvexní funkce zavádíme subgradient a subdiferenciál $\partial f(x)$. Subdiferenciál je vždy maximálně monotónní mnohoznačná funkce. Navíc, je-li $0 \in \partial f(x_0)$, potom má funkce v bodě x_0 globální minimum, pokud je $\partial f(x)$ neprázdná, pak je funkce konvexní.

V kapitole 4 jsou definovány tečné kužely k množině: kontingentní kužel $T_K(x)$ a Clarkův kužel $C_K(x)$. Jsou analogií tečny ke křivce, uzavřené množiny a Clarkův kužel je konvexní. Vždy platí $C_K(x) \subset T_K(x)$ a je-li množina K konvexní, jsou shodné, $C_K(x) = T_K(x)$. Kapitola obsahuje několik charakterizací obou kuželů, pomocí posloupnosti i pomocí vzdálenosti od množiny. Charakterizace pomocí posloupnosti jsou provedeny podle knihy [8], kde je ovšem použitá jiná definice Clarkova kuželu, tudíž nejde o triviální přepis z knihy a důkaz je tedy zahrnut i zde.

Část o kuželech zakončuje kapitola 5, která popisuje normálové kužely. Definujeme jak kontingentní, tak Clarkův normálový kužel, ovšem pouze Clarkův kužel je díky konvexitě polární se svým normálovým kuželem.

Z definice musí každý kužel vycházet z počátku. Pro větší názornost jsou ovšem jak tečné a normálové kužely posunuty do bodu, kterým jsou určeny.

K derivacím mohoznačné funkce se dostáváme v kapitole 6. Derivace definujeme graficky, pomocí tečných kuželů, získáváme tedy kontingentní derivaci $\mathrm{D}F(x, y)$ a Clarkovu derivaci $\mathrm{C}F(x, y)$. Tyto zřejmě splývají pro funkci, jejíž graf je konvexní. Obě derivace jsou charakterizovány pomocí posloupností i pomocí vzdáleností od množiny. Je zde vidět, jak se formule zjednoduší, jestliže je funkce F lipschitzovská. Také definujeme jednu derivaci nikoli pomocí grafu, ale pomocí limity. Jedná se o Diniho derivaci $D_L(x, y)$. Někdy se také nazývá Diniho dolní derivace, jelikož se od kontingentní derivace liší pouze v tom, že nemísto limes superior použijeme limes inferior stejné funkce. Někdy se proto také kontingentní derivace nazývá Diniho horní derivace. Ukazuje se, že má-li mnohoznačná funkce F konvexní graf, všechny tři derivace splývají. Kapitola obsahuje několik příkladů s řešením, kde studujeme jak jednoznačné tak mnohoznačné funkce a je zde ukázán vztah mezi funkcí f a jejím nadgrafem $\mathrm{epi}(f)$ a derivací této funkce a derivací jejího nadgrafu. Ovšem pouze při použití kontingentní derivace. V závěru jsou definovány koderivace, které využívají normálové kužely.

Práci uzavírá kapitola 7, kde jsou krátce zmíněny tečné kužely druhého řádu a k nim analogicky derivace druhého řádu. Ukazuje se, jak vypadá derivace druhého řádu jednoznačné funkce.

Značení v celé práci je převzaté z několika zdrojů, stejně jako definice. Pokud jsou tvrzení převzatá z knihy, ale upravená z důvodu použití jiné definice, je toto zmíněno vždy na konci tvrzení.

Seznam symbolů a značení

B_X	uzavřená jednotková koule v prostoru X
$C_K(x)$	Clarkův kužel
$C_K^{(2)}(x,v)$	Clarkův kužel druhého řádu
$\partial f(x)$	subdiferenciál, tj. množina všech subgradientů funkce f v bodě x
$d_K(x) = d(x,K)$	vzdálenost bodu od množiny
D_f	definiční obor jednoznačné funkce
$\mathrm{Dom}(F)$	efektivní obor mnohoznačné funkce
$\mathrm{CF}(x,y)$	Clarkova derivace funkce F v bodě (x,y)
$C^*F(x,y)$	Clarkova koderivace funkce F v bodě (x,y)
$C^{(2)}F(x,y,u_1,v_1)$	Clarkova derivace druhého řádu
$\mathrm{DF}(x,y)$	kontingentní derivace funkce F v bodě (x,y)
$D^*F(x,y)$	koderivace funkce F v bodě (x,y)
$D_LF(x,y)$	Diniho derivace funkce F v bodě (x,y)
$D^{(2)}F(x,y,u_1,v_1)$	kontingentní derivace druhého řádu
$\mathrm{epi}(f)$	nadgraf funkce f
$f'_-(x),\ f'_+(x)$	jednostranné derivace funkce f
$F(x)$	obraz / hodnota funkce F v x
$F(C)$	obraz množiny C
F^{-1}	inverzní funkce k F
$F^{-1}(D)$	vzor množiny D
$\mathrm{Graf}(F)$	graf relace
$\mathrm{H}(F)$	obraz mnohoznačné funkce
$\mathrm{Int}(K)$	vnitřek množiny K
$\overline{K}$	uzávěr množiny
K^-	polární kužel
$T_K(x)$	kontingentní kužel
$T_K^{(2)}(x,v)$	kontingentní kužel druhého řádu
$N_K(x)$	kontingentní normálový kužel
$N_K^C(x)$	Clarkův normálový kužel
X^*	duální prostor
$\langle x,y\rangle$	skalární součin

2 Mnohoznačné funkce a jejich vlastnosti

2.1 Základní pojmy

Definice 1 *Nechť $F : X \to P(Y)$, neboli pro každé $x \in X$ existuje odpovídající množina $F(x) \subset Y$, pak $F(\cdot)$ nazveme **mnohoznačnou funkcí** a značíme*

$$F : X \rightrightarrows Y.$$

Definice 2 ***Mnohoznačnou funkci** $F : X \rightrightarrows Y$ budeme charakterizovat **grafem** relace F, značíme $\mathrm{Graf}(F)$, který je podmožinou kartézského součinu $X \times Y$ a je definován následujícím způsobem*

$$\mathrm{Graf}(F) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}.$$

*Řekneme, že $F(x)$ je **obrazem** nebo **hodnotou** funkce F v x.*
*Řekneme, že mnohoznačná funkce je **netriviální**, právě když graf není prázdnou množinou, tedy existuje alespoň jedno $x \in X$ takové, že $F(x)$ je neprázdnou množinou.*
***Efektivním oborem** mnohoznačné funkce $\mathrm{Dom}(F)$ rozumíme podmnožinu prvků $x \in X$, pro něž je $F(x)$ neprázdná.*

$$\mathrm{Dom}(F) := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}.$$

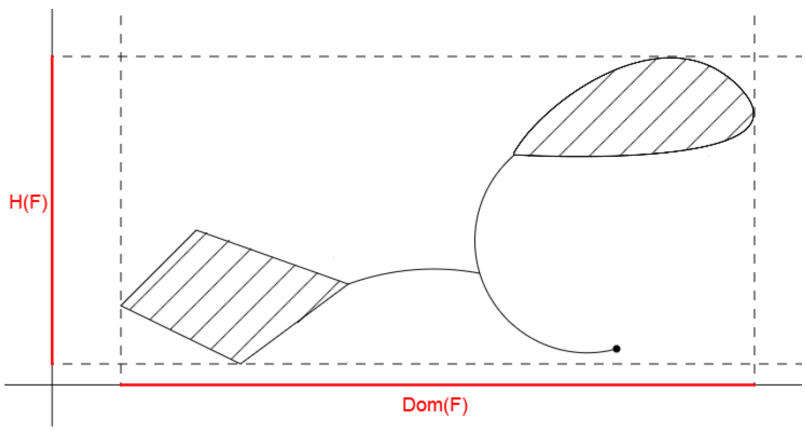
***Obrazem** mnohoznačné funkce $\mathrm{H}(F)$ rozumíme sjednocení $F(x)$ pro všechna $x \in$* $\mathrm{Dom}(F)$.

$$\mathrm{H}(F) := \bigcup_{x \in \mathrm{Dom}(F)} F(x).$$

***Inverzní funkcí** F^{-1} k funkci F rozumíme mnohoznačnou funkci $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ splňující*

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{Graf}(F).$$

Podle [1, str. 34].



Obrázek 1: Příklad mnohoznačné funkce.

Pro mnohoznačnou funci zavádíme termín efektivní obor namísto definičního oboru, neboť mnohoznačná funkce je definovaná všude. Vždy je totiž alespoň $F(x) = \emptyset$.

Pozorování 3 *Pro mnohoznačnou funkci F*

i) vždy existuje inverzní F^{-1},

ii) platí $(F^{-1})^{-1} = F$.

Definice 4 *Nechť X, Y jsou normované vektorové prostory, $C \subset X$, $D \subset Y$, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce. Definujme* ***obraz množiny*** *C*

$$F(C) = \bigcup_{x \in C} F(x) = \{y \in Y \mid F^{-1}(y) \cap C \neq \emptyset\},$$

a ***vzor množiny*** *D*

$$F^{-1}(D) = \bigcup_{y \in D} F^{-1}(y) = \{x \in X \mid F(x) \cap D \neq \emptyset\}.$$

Podle [2, str. 149].

Tvrzení 5 *Nechť $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce, K, K_1, $K_2 \subset X$. Platí*

i) $F(K_1 \cup K_2) = F(K_1) \cup K_2$,

ii) $F(K_1 \cap K_2) \subset F(K_1) \cap K_2$,

iii) $F(X \setminus K) \supset \mathrm{H}(F) \setminus F(K)$,

iv) $K_1 \subset K_2 \Rightarrow F(K_1) \subset F(K_2)$.

Podle [1, str. 36].

Důkaz.

i) $F(K_1 \cup K_2) = \bigcup_{x \in K_1 \cup K_2} F(x) = \bigcup_{x \in K_1} F(x) \cup \bigcup_{x \in K_2} F(x) = F(K_1) \cup F(K_2)$.

ii) Zvolme $y \in F(K_1 \cap K_2)$. Pak $F^{-1}(y) \cap (K_1 \cap K_2) \neq \emptyset$, potom $F^{-1}(y) \cap K_1 \neq \emptyset$ a současně $F^{-1}(y) \cap K_2 \neq \emptyset$, tedy $y \in F(K_1) \wedge y \in F(K_2)$ a $y \in F(K_1) \cap F(K_2)$.

iii) Zvolme $y \in H(F) \setminus F(K)$. Odtud $y \in H(F)$ a současně $y \notin F(K)$. Platí $F^{-1}(y) \cap K = \emptyset$. Pak pro každé $x \in X$ takové, že $y \in F(x)$ platí $x \notin K$, tedy $X \in (x \setminus K)$ a $y \in F(X \setminus K)$.

iv) $K_1 \subset K_2$, tedy $K_2 = K_1 \cup K_2 \setminus K_1$. Podle části (i) platí $F(K_2) = F(K_1) \cup F(K_2 \setminus K_1)$ a odtud $F(K_1) \subset F(K_2)$.

■

Definice 6 *Nechť X, Y jsou normované vektorové prostory, F_1, $F_2 : X \rightrightarrows Y$ jsou mnohoznačné funkce. Definujme* ***součet funkcí*** *$F_1 + F_2$ jako součet množin*

$$(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x) = \{y_1 + y_2 \mid y_1 \in F_1(x), y_2 \in F_2(x)\}$$

a ***násobek funkce*** *kF_1, $k \in \mathbb{R}$*

$$(kF_1)(x) = kF_1(x) = \{ky \mid y \in F_1(x)\}.$$

Podle [2, str. 24, 151].

2.2 Polospojitost, spojitost

Definice 7 *Nechť X, Y jsou normované vektorové prostory, $x_0 \in X$, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce. Pak definujme* ***limes inferior funkce*** *F* ***v bodě*** *x_0*

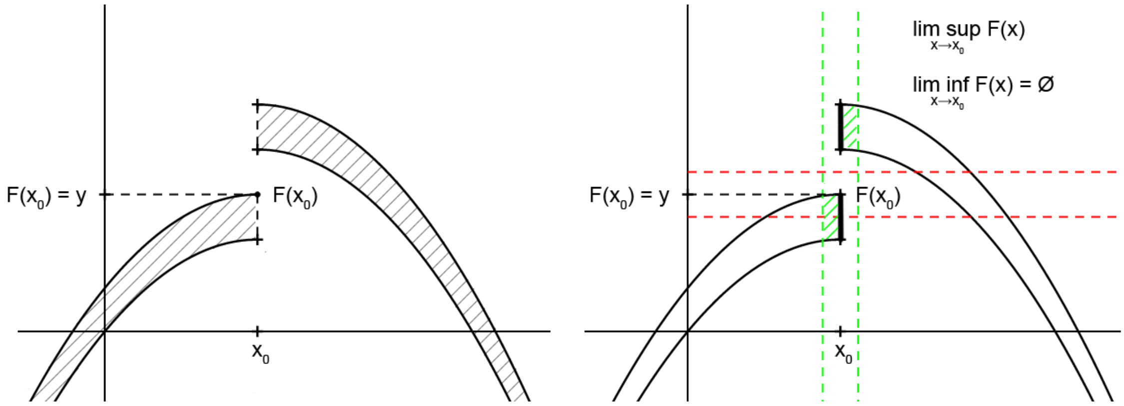
$$\liminf_{x \to x_0} F(x) = \{y \in Y \mid \forall V \in \mathcal{N}_Y(y),\ \exists U \in \mathcal{N}_X(x_0),\ \forall x \in U \backslash \{x_0\} :\ F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

a ***limes superior funkce*** *F* ***v bodě*** *x_0*

$$\limsup_{x \to x_0} F(x) = \{y \in Y \mid \forall V \in \mathcal{N}_Y(y),\ \forall U \in \mathcal{N}_X(x_0),\ \exists\, x \in U \backslash \{x_0\} :\ F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Podle [5, str. 78].

Příklad 8 *Příklad mnohoznačné funkce, jejíž limes superior a inferior se v daném bodě liší.*



Obrázek 2: Funkce, kde se liší lim sup a lim inf

Tvrzení 9 *Nechť X, Y jsou normované vektorové prostory, $x_0 \in X$, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce. $\limsup_{x \to x_0} F(x)$ a $\liminf_{x \to x_0} F(x)$ jsou uzavřené množiny.*

Důkaz. Zvolme posloupnost $\{y_n\} \subset \limsup F(x)$, $y_n \to y$. Víme, že pro každé $V \in \mathcal{N}_Y(y_n)$ a $U \in \mathcal{N}_X(x_0)$ existuje $x \in U \setminus \{x_0\}$ tak, že $F(x) \cap V \neq \emptyset$. Chceme ukázat, že $y \in \limsup F(x)$. Zvolme $V \in \mathcal{N}_Y(y)$ libovolně. Protože $y = \lim y_n$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $y_{n_0} \in V$, tedy $V \in \mathcal{N}_Y(y_{n_0})$ a platí

$$\forall\, U \in \mathcal{N}_X(x_0)\, \exists\, x \in U \setminus \{x_0\} : F(x) \cap V \neq \emptyset.$$

Množina V byla volena libovolně, tedy to platí pro každou $V \in \mathcal{N}_Y(y)$ a tedy $y \in \limsup F(x)$. Uzavřenost $\liminf F(x)$ se ukáže analogicky. ■

Lemma 10 *(Ekvivalentní definice limes inferior)*
Nechť X, Y jsou normované vektorové prostory, $x_0 \in X$, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce. Pak $y \in \liminf_{x \to x_0} F(x)$, právě když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset \mathrm{Dom}(F)$, $x_n \to x_0$, existuje $\{y_n\}$ taková, že $y_n \in F(x_n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a platí $y_n \to y$.
Podle [2, str. 152].

Důkaz. " $\Rightarrow$ "$y \in \liminf_{x \to x_0} F(x)$ potom pro každé $V \in \mathcal{N}_Y(y)$ existuje $U \in \mathcal{N}_X(x_0)$ takové, že pro každé $x \in U \setminus \{x_0\}$ platí $F(x) \cap V \neq \emptyset$. Zvolme libovolně posloupnost $\{x_n\} \subset \mathrm{Dom}(F), x_n \to x$, a posloupnost množin $\{V_k\} \subset \mathcal{N}_Y(y), V_k = B(y, \frac{1}{k})$ a k ní nalezneme posloupnost $\{U_k\} \subset \mathcal{N}_X(x_0)$ tak, že $\forall x \in U_k \setminus \{x_0\}$: $F(x) \cap V_k \neq \emptyset$. Najděme vybranou posloupnost k_n tak, že $\forall n \in \mathbb{N}\, x_n \in U_{k_n}$. Pak platí $F(x_n) \cap V_{k_n} \neq \emptyset$. Nalezneme tedy $y_n \in F(x_n) \cap V_{k_n}$. Z definice V_{k_n} platí $y_n \to y$.
"$\Leftarrow$"sporem: Nechť platí $y \notin \liminf_{x \to x_0} F(x)$, potom

$$\exists\, V \in \mathcal{N}_Y(y)\, \forall\, U \in \mathcal{N}_X(x_0)\, \exists\, x \in U \setminus \{x_0\} : F(x) \cap V = \emptyset.$$

Nalezněme $V \in \mathcal{N}_Y(y)$ podle podmínky a zvolme posloupnost $U_n = B(x_0, \frac{1}{n})$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezněme x_n takové, že $F(x_n) \cap V = \emptyset$, tedy každé $y_n \in F(x_n)$ neleží ve V - okolí y - tudíž neplatí $y_n \to y$, což je spor. ■

Lemma 11 *(Ekvivalentní definice limes superior)*
Nechť X, Y jsou normované vektorové prostory, $x_0 \in X$, $F : X \rightrightarrows Y$, je mnohoznačná funkce. Pak $y \in \limsup_{x \to x_0} F(x)$ právě když existují posloupnosti $\{x_n\} \subset$ $\mathrm{Dom}(F)$, $\{y_n\}$ takové, že $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, $y_n \in F(x_n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $y_n \to y$.
Podle [2, str. 152].

Důkaz. "$\Rightarrow$"Zvolme $y \in \limsup_{x \to x_0} F(x)$, a k němu posloupnosti množin $\{U_n\} \subset \mathcal{N}_X(x_0)$ a $\{V_n\} \subset \mathcal{N}_Y(y)$ takto: pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $U_n = B(x_0, \frac{1}{n})$ a $V_n = B(y, \frac{1}{n})$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in U_n \setminus \{x_0\}$. Protože platí $F_n \cap V_n \neq \emptyset$, nalezneme $y_n \in F(x_n) \cap V_n$.
Pak platí $x_n \to x_0$, pro každé $n \in \mathbb{N} : y_n \in F(x_n)$ a $y_n \to y$.
"$\Leftarrow$"
Zvolme libovolně $V \in \mathcal{N}_Y(y), U \in \mathcal{N}_X(x_0)$. Podle předpokladu existuje posloupnost $\{x_n\} \subset \mathrm{Dom}(F)$, $x_n \to x_0$ a z vlastnosti limity existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : x_n \in U$. Podle předpokladu nalezneme také posloupnost $\{y_n\}$, $y_n \in F(x_n)$ a $y_n \to y$. Z vlastností limity musí existovat $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$ platí $y_n \in V$. Zvolme $n^* = max\{n_0, n_1\}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n^*$ platí $x_n \in U$, $y_n \in F(x_n)$ a $y_n \in V$, tedy $V \cap F(x_n) \neq \emptyset$. ■

Další možností, jak popsat limes superior a limes inferior mnohoznačné funkce, je pomocí vzdáleností od množiny, kde danou množinou je graf funkce.

Definice 12 *Nechť $K \subset X$, $x \in X$. Označme,* ***vzdálenost x od K***

$$d_K(x) = d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y),$$

kde klademe $d_\emptyset(x) = +\infty$.
Podle [1, str. 16].

Lemma 13 *(Charakterizace limes superior a inferior pomocí vzdálenosti)*
Nechť X, Y jsou normované vektorové prostory, $x_0 \in X$, $F : X \rightrightarrows Y$, je mnohoznačná funkce. Potom

i) $\limsup_{x \to x_0} F(x) = \{y \in Y \mid \liminf_{x \to x_0} d(y, F(x)) = 0\}$, *ii)* $\liminf_{x\to x_0} F(x) = \{y \in Y \mid \lim_{x\to x_0} d(y, F(x)) = 0\}$.

Podle [1, str. 41].

Tvrzení 14 *Nechť X, Y jsou normované vektorové prostory, $x_0 \in X$, $F : X \rightrightarrows Y$, je mnohoznačná funkce. Pak platí*

$$\liminf_{x\to x_0} F(x) \subset \limsup_{x\to x_0} F(x).$$

Podle [1, str. 42].

Důkaz. Důkaz plyne přímo z lemmatu 13. ■

2.3 Zobrazení usco a cusco

Definice 15 *Mnohoznačnou funkci $F : X \rightrightarrows Y$ nazveme **shora polospojitou (USC) v bodě** $x \in \mathrm{Dom}(F)$, právě když pro každé U okolí $F(x)$*

$$\exists\, \eta > 0 \text{ tak, že } \forall\, x' \in B_X(x,\eta) : F(x') \subset U.$$

*Mnohoznačnou funkci $F : X \rightrightarrows Y$ nazveme **shora polospojitou**, právě když je shora polospojitá pro všechna $x \in \mathrm{Dom}(F)$.*
Podle [1, str. 38].

Tvrzení 16 *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ztotožníme s mnohoznačnou, tedy $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ definujeme takto $F(x) = \{f(x)\}$, $x \in D_f$. Pak F je shora polospojitá (USC), právě když f je spojitá.*
Podle [3, str. 114].

Důkaz. Zde se hodnota $F(x)$ redukuje na jednobodovou množinu $\{f(x)\}$ a platí $\{f(x)\} \subset U \Leftrightarrow f(x) \in U$. A tvrzení zřejmě platí. ■

Definice 17 *Mnohoznačnou funkci $F : X \rightrightarrows Y$ nazveme **zdola polospojitou (LSC) v bodě** $x \in \mathrm{Dom}(F)$, právě když pro každé $y \in F(x)$ a pro každou posloupnost prvků $x_n \in \mathrm{Dom}(F)$ konvergující k x existuje posloupnost prvků $y_n \in F(x_n)$ konvergující k y.*
*Mnohoznačnou funkci $F : X \rightrightarrows Y$ nazveme **zdola polospojitou**, právě když je zdola polospojitá pro všechna $x \in \mathrm{Dom}(F)$.*
Podle [1, str. 39].

Definice 18 *Mnohoznačnou funkci $F : X \rightrightarrows Y$ nazveme **spojitou v bodě** $x \in \mathrm{Dom}(F)$, právě když je v x shora i zdola polospojitá.*
*Mnohoznačnou funkci $F : X \rightrightarrows Y$ nazveme **spojitou**, právě když je spojitá pro všechna $x \in \mathrm{Dom}(F)$.*
Podle [1, str. 40].

Tvrzení 19 *Nechť X, Y jsou normované vektorové prostory. Mnohoznačná funkce $F : X \rightrightarrows Y$ je zdola polospojitá v $x_0 \in \mathrm{Dom}(F)$, právě když $F(x_0) \subset \liminf_{x\to x_0} F(x)$.*
Podle [1, str. 42].

Důkaz. Podle lemmatu 10 zřejmě platí: F je zdola polospojitá v x právě tehdy, když $\forall\, y \in F(x_0) : y \in \liminf_{x\to x_0} F(x)$. Odtud $F(x_0) \subset \liminf_{x\to x_0} F(x)$. ■

Tvrzení 20 *(Ekvivalentní definice polospojitosti zdola)*
Mnohoznačná funkce $F : X \rightrightarrows Y$ je zdola polospojitá v x, právě když pro každou otevřenou množinu $U \subset Y$, $U \cap F(x) \neq \emptyset$ platí

$$\exists\, \eta > 0 \text{ tak, že } \forall\, x' \in B_X(x,\eta) : F(x') \cap U \neq \emptyset.$$

Podle [1, str. 39].

Důkaz. Důkaz se vede podobně jako důkaz lemmatu 10. ■

Definice 21 *Množinu K nazveme **konvexní**, jestliže pro každé dva body z K leží jejich spojnice také v K, tedy pro každé x_0, $x_1 \in K$ platí*

$$(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \in K, \text{ pro každé } \lambda \in (0,1).$$

Podle [2, str. 38].

Tvrzení 22 *Nechť $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce. Pak $\liminf_{x\to x_0} F(x)$ je konvexní množina.*
Podle [1, str. 26].

Důkaz. Nechť y_0, $y_1 \in \liminf_{x\to x_0} F(x)$. Označme $y = (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1$. Pro spor předpokládejme, že $y \notin \liminf_{x\to x_0} F(x)$. Pak existuje $V \in \mathcal{N}_Y(y)$ tak, že v každém $U \in \mathcal{N}_X(x_0)$ existuje $x \in U \setminus \{x_0\}$ splňující $F(x) \cap V = \emptyset$. Nalezneme $V_0 \in \mathcal{N}_Y(y_0)$ a $V_1 \in \mathcal{N}_Y(y_1)$ tak, že $V \subset V_0 \cap V_1$. Pak existují

$$U_0 \in \mathcal{N}_X(x_0)\, \forall\, x \in U_0 \setminus \{x_0\} : F(x) \cap V_0 \neq \emptyset$$
$$U_1 \in \mathcal{N}_X(x_0)\, \forall\, x \in U_1 \setminus \{x_0\} : F(x) \cap V_1 \neq \emptyset$$

Zvolme $U = U_0 \cap U_1$. Pak pro každé $x \in U$ platí $F(x) \cap V_0 \neq \emptyset$ a současně $F(x) \cap V_1 \neq \emptyset$. Potom $F(x) \cap (V_0 \cap V_1) = F(x) \cap V \neq \emptyset$, což je spor. ■

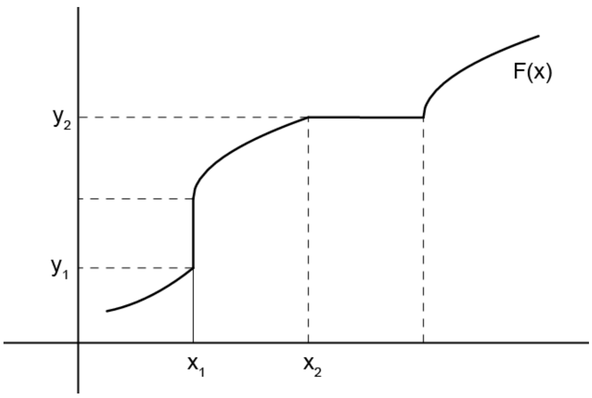
Definice 23 *Nechť $U \subset X$ je otevřenou podmnožinou X. Pak mnohoznačnou funkci $f : X \rightrightarrows Y$ nazveme **usco** na množině U (z anglického: upper-semicontinuous multifunction on an open set), jestliže je shora polospojitá (USC) a obrazy $F(x)$ pro $x \in U$ jsou neprázdné kompaktní množiny. Pokud jsou navíc obrazy funkce konvexními množinami, nazveme tuto funkci **cusco** (z anglického: convex image upper-semicontinuous multifunction on an open set).*
Podle [3, str. 111].

2.4 Monotónní a maximálně monotónní zobrazení

Definice 24 *Nechť $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce. Řekneme, že F je **monotónní**, jestliže*

$$\forall\, x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(F), y_1 \in F(x_1), y_2 \in F(x_2) : \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0,$$

*funkci F nazveme **maximálně monotónní**, jestliže neexistuje jiná monotónní mnohoznačná funkce, jejíž graf by obsahoval graf funkce F.*
Podle [1, str. 104].



Obrázek 3: Příklad monotónní mnohoznačné funkce.

Tvrzení 25 *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je reálná funkce. Mnohoznačná funkce* $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$, $F(x) = \{f(x)\}$ *je monotónní, právě když je funkce* f *neklesající.*

Důkaz. " $\Leftarrow$ " f je neklesající, pak $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno $y \in F(x)$, $y = f(x) \Rightarrow \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0}\underbrace{(f(x_1) - f(x_2))}_{\leq 0} \geq 0$ a F je monotónní.
" $\Rightarrow$ " sporem: f není neklesající $\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ a $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0}\underbrace{(f(x_1) - f(x_2))}_{>0} < 0 \Rightarrow$ F není monotónní, což je spor. ■
V práci [9, str. 23].

Poznámka 26 *Předchozí tvrzení nelze rozšířit na maximálně monotónní mnohoznačnou funkci, jak ukazuje následující příklad.*

Příklad 27 *Definujme reálnou funkci:*

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ e^x + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$f(x)$ je zřejmě neklesající, $F(x) = \{f(x)\}$ je monotónní, ale není maximálně monotónní.

Tvrzení 28 *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je neklesající, pak mnohoznačná funkce* $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$, $F(x) = [f(x-), f(x+)] \cap \mathbb{R}$ *je monotónní.*
Podle [1, str. 105].

Důkaz. Je-li f je spojitá v bodě $x \in \mathrm{Dom}(F)$, pak $F(x) = \{f(x)\}$ a f je na okolí bodu x monotónní podle předchozího tvrzení.
Je-li f je v $x \in \mathrm{Dom}(F)$ nespojitá, zvolme $x_1 \in \mathrm{Dom}(F)$, $x_1 < x$ a nalezněme $y_1 \in F(x_1)$, $y \in [f(x_-), f(x_+)]$. Jelikož f je neklesající, platí $y_1 \leq f(x_-) \leq y$ a tedy $\langle x_1 - x, y_1 - y\rangle \geq 0$. Analogicky, pro $x_2 > x$, $y_2 \in F(x_2)$, dostaneme $y \leq f(x_+) \leq y_2$ a $\langle x_2 - x, y_2 - y\rangle \geq 0$. ■

Poznámka 29 *Předchozí tvrzení opět nelze rozšířit na maximálně monotónní mnohoznačnou funkci.*

Tvrzení 30 *Mnohoznačná funkce $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ je monotónní, právě když inverzní funkce F^{-1} je monotónní.*
Podle [1, str. 105].

Důkaz. "$\Rightarrow$"F je monotónní. Zvolme libovolně x_1, $x_2 \in \mathrm{Dom}(F)$ a $y_1 \in F(x_1)$, $y_2 \in F(x_2)$. Pak platí $x_1 \in F^{-1}(y_1)$ a $x_2 \in F^{-1}(y_2)$. Ze symetrie skalárního součinu víme $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$ a F^{-1} je monotónní.
"$\Leftarrow$"Označme $G(y) := F^{-1}(y)$ monotónní funkci. Podle předchozího je funkce $G^{-1}(x) = (F^{-1})^{-1}(x) = F(x)$ monotónní. ∎

Tvrzení 31 *Mnohoznačná funkce $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ je maximálně monotónní, právě když inverzní funkce F^{-1} je maximálně monotónní.*
Podle [1, str. 107].

Důkaz. Monotonie platí podle tvrzení 30. Zbývá ukázat, že funkce jsou také maximálně monotónní.
"$\Rightarrow$"sporem: Předpokládejme, že F je maximálně monotónní a současně F^{-1} není maximálně monotónní, tedy existuje $(y, x) \notin \mathrm{Graf}(F^{-1})$, ale $\forall\, (y_1, x_1) \in \mathrm{Graf}(F)$ platí $0 \leq \langle y_1 - y, x_1 - x \rangle = \langle x_1 - x, y_1 - y \rangle$. Protože F je maximálně monotónní, musí být $(x, y) \in \mathrm{Graf}(F)$ a současně $(y, x) \notin \mathrm{Graf}(F^{-1})$, což je spor.
"$\Leftarrow$"Označme $G(y) := F^{-1}(y)$ maximálně monotónní funkci. Podle předchozího je funkce $G^{-1}(x) = (F^{-1})^{-1}(x) = F(x)$ maximálně monotónní. ∎

Tvrzení 32 *(Charakterizace monotónní funkce)*
Mnohoznačná funkce $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ je monotónní, právě když pro každé $\lambda > 0$

$$\forall (x, p), (y, q) \in \mathrm{Graf}(F), \|x - y\| \leq \|x - y + \lambda(p - q)\|.$$

Podle [1, str. 105].

Důkaz. "$\Rightarrow$"Nechť F je monotónní, pak pro všechna (x, p), $(y, q) \in \mathrm{Graf}(F)$ platí $\langle p - q, x - y \rangle \geq 0$. Potom $2\lambda \langle p - q, x - y \rangle \geq 0$ a tedy

$$\|x - y + \lambda(p - q)\|^2 = \|x - y\|^2 + \underbrace{\lambda^2 \|p - q\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{2\lambda \langle p - q,\, x - y \rangle}_{\geq 0} \geq \|x - y\|^2.$$

Odtud $\|x - y + \lambda(p - q)\| \geq \|x - y\|$.
"$\Leftarrow$"Nechť naopak platí $\|x - y\| \leq \|x - y + \lambda(p - q)\|$. Podobně jako v předchozím umocníme a úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2\lambda \langle x - y,\, p - q \rangle + \lambda^2 \|p - q\|^2, && / : \lambda \\ 0 &\leq 2 \langle x - y,\, p - q \rangle + \lambda \|p - q\|^2, \\ 0 = \lim_{\lambda \to 0} 0 &\leq \lim_{\lambda \to 0} \left(2 \langle x - y,\, p - q \rangle + \lambda \|p - q\|^2 \right) = 2 \langle x - y,\, p - q \rangle. \end{aligned}$$

Odtud je F monotónní.
Podle [1, str. 105]. ∎

Tvrzení 33 *Mnohoznačná funkce $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ je maximálně monotónní, právě když následující podmínky jsou ekvivalentní:*

i) $\forall (x', y') \in \mathrm{Graf}(F) : \langle y - y', x - x' \rangle \geq 0$,

ii) $y \in F(x)$.

Podle [1, str. 107].

Důkaz. " $\Rightarrow$ "

a) F je maximálně monotónní a $\forall (x', y') \in \mathrm{Graf}(F) : \langle y - y', x - x' \rangle \geq 0$. Chceme ukázat, že $y \in F(x)$. Sporem: Předpokládejme, že $y \notin F(x)$, $y' \in F(x')$, potom z definice monotónní funkce $\langle x - x', y - y' \rangle \geq 0$, což je spor.

b) F je maximálně monotónní a $y \in F(x)$. Přímo z definice platí: pro každé $x' \in \mathrm{Dom}(F)$, $y' \in F(x') : \langle x - x', y - y' \rangle \geq 0$.

" $\Leftarrow$ " Platí $\forall (x', y') \in \mathrm{Graf}(F) : \langle y - y', x - x' \rangle \geq 0 \Leftrightarrow y \in F(x)$. Chceme ukázat, že F je maximálně monotónní. Zvolme $x, x' \in \mathrm{Dom}(F)$, $y \in F(x)$, $y' \in F(x')$, pak $\langle y - y', x - x' \rangle \geq 0$ a F je monotónní.
F maximálně monotónní ukážeme sporem: Nechť existuje $(x, y) \notin \mathrm{Graf}(F)$ a monotónní mnohoznačná funkce F^*, $F \subset F^*$, $y \in F^*(x)$. Jelikož F^* je monotónní, platí pro všechna $(x', y') \in \mathrm{Graf}(F^*) : \langle y - y', x - x' \rangle \geq 0$. Navíc $F \subset F^*$, tedy totéž platí pro $(x', y') \in \mathrm{Graf}(F)$ a podle podmínky je $y \in F(x)$, což je spor. ∎

Tvrzení 34 *Nechť $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ je maximálně monotónní mnohoznačná funkce, pak pro každé $x \in \mathrm{Dom}(F)$ je $F(x)$ uzavřenou a konvexní množinou.*
Podle[1, str. 107].

Důkaz. Zvolme $x \in F(x)$. Pro uzavřenost zvolme posloupnost $\{y_n\} \subset F(x)$, $y_n \to y$. Chceme ukázat, že $y \in F(x)$. Podle tvrzení 33 pro každé $(x', y') \in \mathrm{Graf}(F)$: $\langle x - x', y_n - y' \rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Limitním přechodem dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \langle x - x', y_n - y' \rangle &\geq 0, \\ \langle x - x', \lim_{n\to\infty} y_n - y' \rangle &\geq 0, \\ \langle x - x', y - y' \rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

Toto platí pro všechny $(x', y') \in \mathrm{Graf}(F)$ a tedy $y \in F(x)$.
Pro konvexitu zvolme libovolně y_1, $y_2 \in F(x)$, označme $y = (1 - \lambda) y_1 + \lambda y_2$, $\lambda \in [0, 1]$. Chceme ukázat, že pro všechny $(x', y') \in \mathrm{Graf}(F) : \langle x - x', y - y' \rangle \geq 0$. Platí

$$\begin{aligned} \langle x - x', y - y' \rangle &= \langle x - x', (1 - \lambda) y_1 + \lambda y_2 - y' \rangle = \\ &= \langle x - x', (1 - \lambda) y_1 + \lambda y_2 - (1 - \lambda) y' - \lambda y' \rangle = \\ &= \langle x - x', (1 - \lambda) y_1 - (1 - \lambda) y' \rangle + \langle x - x', \lambda y_2 - \lambda y' \rangle = \\ &= (1 - \lambda) \underbrace{\langle x - x', y_1 - y' \rangle}_{\geq 0} + \lambda \underbrace{\langle x - x', y_2 - y' \rangle}_{\geq 0} \geq 0, \end{aligned}$$

neboť y_1, $y_2 \in F(x)$. Pak je $F(x)$ je konvexní. ∎

2.5 Lipschitzovská zobrazení

Definice 35 *Řekneme, že $f : X \to \mathbb{R}$ je* ***lipschitzovská*** *na množině $D \subset X$, jestliže existuje konstanta $L \in \mathbb{R}$, $L \geq 0$ tak, že*

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\| \text{ pro všechna } x, y \in D.$$

Jestliže pro každé $x_0 \in D$ existuje otevřená množina $U \subset D$ a konstanta M tak, že $x_0 \in U$ a $|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$ pro všechna $x, y \in U$, řekneme, že funkce je ***lokálně lipschitzovská na D.***
Podle[3, str. 19].

Pokud zvolíme $L = \frac{\varepsilon}{\delta}$, ihned dostaneme důsledek:

Důsledek 36 *Je-li funkce f lipschitzovská, pak je spojitá.*

Příklad 37 *Příkladem funkce, která je lipschitzovská je funkce vzdálenosti bodu od množiny. Je definována takto:*
Nechť $K \subset X$, $x \in X$. Označme ***vzdálenost x od K***

$$d_K(x) = d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y),$$

kde klademe $d_\emptyset(x) = +\infty$.

Tvrzení 38 *Nechť $K \subset X$, $x \in X$. Funkce vzdálenosti od množiny $d_K(x)$ je lipschitzovská.*

Důkaz. Zvolme libovolně $x, y \in X, \varepsilon > 0$. Z definice $d_K(x)$ existuje $y_\varepsilon \in K$ tak, že

$$d(y, y_\varepsilon) < d_K(y) + \varepsilon.$$

Z vlastností infima platí

$$\begin{aligned} d_K(x) = \inf_{z \in K} d(x, z) \leq d(x, y_\varepsilon) &\leq \qquad \text{(podle trojúhelníkové nerovnosti)} \\ \leq d(x, y) + d(y, y_\varepsilon) &< \qquad \text{(z předchozího)} \\ < d(x, y) + d_K(y) + \varepsilon & \end{aligned}$$

Limitním přechodem $\varepsilon \to 0$ dostaneme

$$d_K(x) \leq d(x, y) + d_K(y).$$

Můžeme tedy odhadnout:

$$d_K(x) - d_K(y) \leq d(x, y) + d_K(y) - d_K(y) = d(x, y)$$

a funkce $d_K(\cdot)$ je lipschitzovská s konstantou $L = 1$. ■
Podle [9, str. 18].

Tvrzení 39 *(Jensenova nerovnost)*
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce a $x < y < z$. Pak platí

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Podle [3, str. 19].

Důkaz. Označme $y = (1-\lambda)x+\lambda z$. Úpravou dostaneme, že $\lambda = \frac{y-z}{z-x}$ a z konvexity víme, že

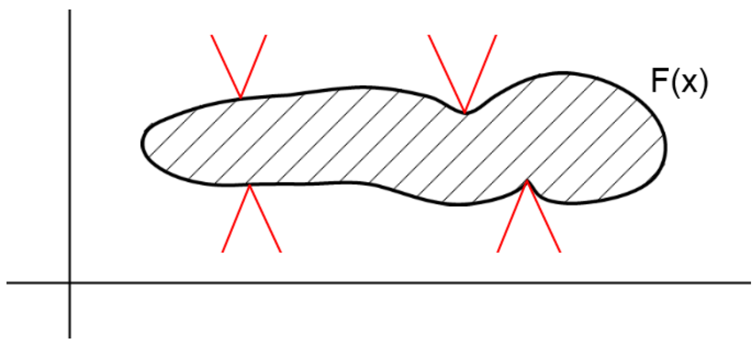
$$\begin{aligned} f(y) &\leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z), && / - f(x) \\ f(y) - f(x) &\leq -\lambda f(x) + \lambda f(z) = \lambda(f(x) - f(z)), && \\ f(y) - f(x) &\leq \left(\frac{y-x}{z-x}\right)(f(x) - f(z)), && / : (y-x) \\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x} &\leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. && \end{aligned}$$

Druhou nerovnost ukážeme analogicky. ■

Definice 40 *Nechť X, Y jsou normované vektorové prostory, $x \in X$. Řekneme, že mnohoznačná funkce $F : X \rightrightarrows Y$ je **lokálně lipschitzovská** na okolí $U \subset$* Dom(F) *bodu x, jestliže existuje $l \in \mathbb{R}$, $l > 0$ tak, že pro všechna $x_1, x_2 \in U$:*

$$F(x_1) \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\|B_Y,$$

kde B_Y značí jednotkovou kouli v prostoru Y.
Podle [1, str. 41, 17].



Obrázek 4: K definici lipschitzovské funkce.

3 Konvexní funkce

3.1 Základní vlastnosti

Definice 41 *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Funkci f nazveme **konvexní**, je–li pro každé x_1, $x_2 \in X, \lambda \in [0,1]$*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

V knize [4, str. 3].

Poznámka 42 *Konvexní funkce je vždy definovaná na konvexní množině.*

Věta 43 *Nechť $D \subset X$ je otevřená konvexní podmnožina X a $f : D \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce. Pak je funkce f lokálně lipschitzovská na D.*
Podle [3, str. 25].

Důkaz. Zvolme x, $y \in D$ a nalezneme $z \in D$ tak, že $z = y + h(y-x)$, kde $h > 0$. Pak x, y, z jsou na přímce a podle Jensenovy nerovnosti platí

$$\begin{aligned} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} &\leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}, \quad / \lim_{z\to y} \\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x} &\leq \lim_{z\to y} \frac{f(z)-f(y)}{z-y} = f'_+(y). \end{aligned}$$

Analogicky ukážeme, že

$$f'_-(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Zvolme $L = \max\{|f'_-(x)|, |f'_+(y)|\}$. Potom

$$-L \leq -|f'_-(x)| \leq f'_-(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_+(y) \leq |f'_+(y)| \leq L$$

a f je lipschitzovská na D. ■

3.2 Subdiferenciál funkce

Definice 44 *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce, $x_0 \in X$. Vektor $x^* \in X^*$ nazveme **subgradientem** funkce f v bodě x_0, jestliže*

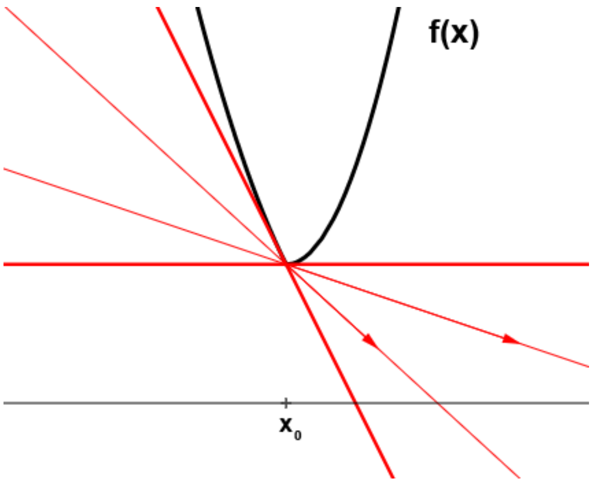
$$\forall x \in X : \langle x - x_0, x^* \rangle \leq f(x) - f(x_0).$$

*Množinu všech subgradientů funkce f v bodě x_0 nazveme **subdiferenciálem**, značíme $\partial f(x_0)$.*
V knize [4, str. 41].

Poznámka 45 *Označme $a(x) := f(x_0) + \langle x - x_0, x^* \rangle \leq f(x)$. Pro funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zřejmě*

$$a(x) = f(x_0) + \langle x - x_0, x^* \rangle = f(x_0) + (x - x_0) \cdot x^* \leq f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

a $a(x)$ je přímka ležící pod grafem funkce f. Subgradient x^* je směrnice této přímky.
V práci [9, str. 24].



Obrázek 5: K subdiferenciálu jednoznačné funkce.

Tvrzení 46 *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konvexní, $x_0 \in X$. Potom*

$$\partial f(x_0) = \left[f'_-(x_0), f'_+(x_0)\right].$$

Důkaz. " $\subset$ "
Zvolme $x^* \in \partial f(x_0)$, pak $(x - x_0) \cdot x^* \leq f(x) - f(x_0)$. Mohou nastat dva případy

$$x < x_0: \qquad x^* \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad\qquad x > x_0: \qquad x^* \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Limitním přechodem dostaneme:

$$x^* \geq \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad\qquad x^* \leq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$x^* \geq f'_-(x_0) \qquad\qquad x^* \leq f'_+(x_0)$$

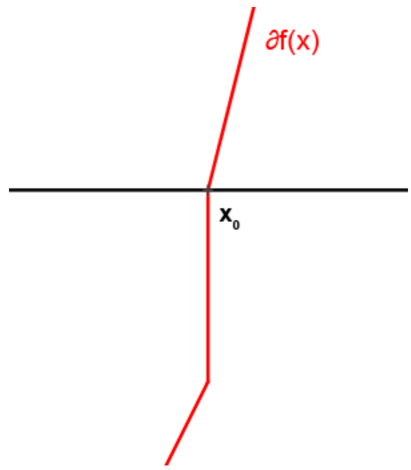
A tedy $f'_-(x_0) \leq x^* \leq f'_+(x_0)$.
" $\supset$ "
Pokud naopak zvolíme $x^* \in \left[f'_-(x_0), f'_+(x_0)\right]$, opačnými úpravami dostaneme nerovnost $(x - x_0) \cdot x^* \leq f(x) - f(x_0)$ a tedy $x^* \in \partial f(x_0)$. ■
V práci [9, str. 25].

Důsledek 47 *Je-li subdiferenciál jednoprvkovou množinou $\partial f(x_0) = \{a\}$, pak je f diferencovatelná v x_0 a platí $f'(x) = a$. Naopak je-li f diferencovatelná v x_0, pak $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.*
Podle [4, str. 42].

Příklad 48 *Definujme jednoznačnou funkci (její graf je na obrázku 5)*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & x \leq 1, \\ 2x^2 - 4x + 5, & x > 1. \end{cases}$$

Určete její subdiferenciál.



Obrázek 6: Subdiferenciál jedné funkce.

Podle předchozích tvrzení můžeme použít derivaci funkce tam, kde existuje, jinak interval derivace zleva a zprava. Zde je tedy subdiferenciál funce

$$\partial F = \begin{cases} 2x-4, & x<1, \\ [-2,0] & x=1, \\ 4x-4, & x>1. \end{cases}$$

Tvrzení 49 *Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je konvexní funkce, pak zobrazení $x\mapsto\partial f(x)$ je maximálně monotónní mnohoznačná funkce. (Budeme ji značit $\partial f(x):\mathbb{R}\rightrightarrows\mathbb{R}$).*
Podle [6, str. 61].

Tvrzení 50 *Spojitá konvexní funkce f definovaná na otevřené množině D má globální minimum v $x_0\in D$, právě když $0\in\partial f(x_0)$.*
Podle [6, str. 15].

Důkaz. "$\Leftarrow$"$0\in\partial f(x_0)$, potom $\langle x-x_0,0\rangle=0\le f(x)-f(x_0)$. Odtud $f(x)\le f(x_0)$ pro každé $x\in D$, tedy f má v bodě x_0 minimum.
"$\Rightarrow$"Pro spor předpokládejme, že $0\notin\partial f(x_0)$. Pak existuje $x\in X$ takové, že

$$\begin{aligned}\langle x-x_0,0\rangle &> f(x)-f(x_0),\\ 0 &> f(x)-f(x_0),\\ f(x_0) &> f(x),\end{aligned}$$

což je spor s minimem. ■

Tvrzení 51 *Nechť $X\subset\mathbb{R}^n$, $f:X\to\mathbb{R}$. Je-li $\partial f(x)$ neprázdná pro každé $x\in X$, pak f je konvexní na X.*
Podle [4, str. 41].

Důkaz. Nechť x_1, $x_2\in X$, $\lambda\in[0,1]$, $\bar{x}=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in X$. Podle předpokladu existuje $a \in \partial f(\bar{x})$, tedy

$$\begin{aligned}
f(x_1) - f(\bar{x}) &\geq \langle a, x_1 - \bar{x} \rangle, \quad / \cdot \lambda \\
f(x_2) - f(\bar{x}) &\geq \langle a, x_2 - \bar{x} \rangle, \quad / \cdot (1-\lambda) \\
\hline
\lambda f(x_1) - \lambda f(x_2) + f(x_2) - \lambda f(x_2) - f(\bar{x}) &\geq \langle a, \lambda x_1 - \bar{x} \rangle + \langle a, (1-\lambda)(x_2 - \bar{x}) \rangle, \\
\lambda f(x_1) - (1-\lambda) f(x_2) - f(\bar{x}) &\geq \langle a, \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 - \bar{x} \rangle, \\
\lambda f(x_1) - (1-\lambda) f(x_2) - f(\bar{x}) &\geq \langle a, \bar{x} - \bar{x} \rangle = \langle a, 0 \rangle, \\
f(\bar{x}) &\leq \lambda f(x_1) - (1-\lambda) f(x_2)
\end{aligned}$$

a f je konvexní.
Podle [4, str. 41]. ■

Tvrzení 52 *Nechť $X \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní, $f_1, f_2, \ldots, f_m : X \to \mathbb{R}$ jsou konvexní, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \geq 0$ a $x_0 \in \operatorname{Int}(X)$. Pak*

$$\partial(\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_m f_m)(x_0) = \alpha_1 \partial f_1(x_0) + \cdots + \alpha_m \partial f_m(x_0).$$

Podle [4, str. 44].

Důkaz. Zvolme $a_n \in \partial f_n(x_0)$ pro každé $n \in \{1 \ldots m\}$. Chceme ukázat, že $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m \in \partial(\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_m f_m)$. Pro každé $n \in \{1 \ldots m\}$ platí

$$\begin{aligned}
\langle x - x_0, a_n \rangle &\leq f_n(x) - f_n(x_0), \quad / \cdot \alpha_n \\
\langle x - x_0, \alpha_n a_n \rangle &\leq \alpha_n f_n(x) - \alpha_n f_n(x_0).
\end{aligned}$$

Počítejme

$$\begin{aligned}
\langle x - x_0, \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_m a_m \rangle &= \langle x - x_0, \alpha_1 a_1 \rangle + \cdots + \langle x - x_0, \alpha_m a_m \rangle \leq \\
&\leq (\alpha_1 f_1(x) - \alpha_1 f_1(x_0)) + \cdots (\alpha_m f_m(x) - \alpha_m f_m(x_0)) = \\
&= (\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_m f_m(x)) - (\alpha_1 f_1(x_0) + \cdots + \alpha_m f_m(x_0)) = \\
&= (\alpha_1 f_1 + \cdots \alpha_m f_m)(x) - (\alpha_1 f_1 + \cdots \alpha_m f_m)(x_0).
\end{aligned}$$

A tedy tvrzení platí. ■

4 Tečné kužely

4.1 Kontingentní kužel

Definice 53 *Nechť $K \subset X$, $x \in X$. Označme,* ***vzdálenost x od K***

$$d_K(x) = d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y),$$

kde klademe $d_\emptyset(x) = +\infty$.
Okolím množiny *K budeme rozumět každou otevřenou množinu $U \subset X$, takovou, že $K \subset U$.*
Podle[1, str. 16].

Definice 54 *Nechť $K \subset X$. Pak řekneme, ze K je* ***kužel****, je-li splněna podmínka:*

$$v \in K,\ t > 0 \implies tv \in K.$$

Definice 55 *Nechť $K \subset X$ je podmnožinou normovaného vektorového prostoru X a $x \in \overline{K}$.* ***Kontingentním kuželem*** *$T_K(x)$ budeme rozumět množinu*

$$T_K(x) = \{v \mid \liminf_{h \to 0+} \frac{d_K(x + hv)}{h} = 0\}.$$

Podle [1, str. 121].

Přímo z definice je zřejmé, že $T_K(x) = T_{\overline{K}}(x)$.

Tvrzení 56 *Nechť $K \subset X$, $x \in \overline{K}$. Pak $T_K(x)$ je kužel.*
Podle [1, str. 121].

Důkaz. Zvolme $v \in T_K(x), t \in \mathbb{R}^+$. Platí $\liminf_{h \to 0^+} \frac{d_K(x+hv)}{h} = 0$. Ukážeme, že $tv \in T_K(x)$.

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{d_K(x + htv)}{h} = \liminf_{h \to 0^+} \frac{d_K(x + htv)}{ht} \cdot t = 0 \cdot t = 0,$$

pak a $T_K(x)$ je kužel. ∎

Tvrzení 57 *Nechť $K \subset X$, $x \in \overline{K}$. Pak $T_K(x)$ je uzavřený kužel.*
Podle [1, str. 121].

Důkaz. Zvolme libovolnou konvergentní posloupnost prvků $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n \in T_K(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \to y \in X$. Pak platí

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \liminf_{h \to 0^+} \frac{d_K(x + hy_n)}{h} = 0.$$

Z příkladu 37 víme, že $z \mapsto d_K(z)$ je lipschitzovská s konstantou $L = 1$, tedy

$$d_K(z) - d_K(z') \leq d(z, z')\ \forall z, z' \in X.$$

Pak

$$d_K(x+hy) - d_K(x+hy_n) \le d((x+hy),(x+hy_n)) = d(hy, hy_n) = \\ = |h| \cdot d(y, y_n) = h \cdot d(y, y_n).$$

Odhadneme

$$0 \le \frac{d_K(x+hy)}{h} = \frac{d_k(x+hy_n)}{h} + \frac{d_K(x+hy)}{h} - \frac{d_K(x+hy_n)}{h} \le \\ \le \frac{d_K(x+hy_n)}{h} + \frac{1}{h}(h \cdot d(y,y_n)) = \frac{d_K(x+hy_n)}{h} + d(y,y_n).$$

Přejdeme k $\liminf_{h\to 0^+}$

$$0 \le \liminf_{h\to 0+} \frac{d_K(x+hy)}{h} \le \liminf_{h\to 0^+} \frac{d_K(x+hy_n)}{h} + d(y,y_n) = 0 + d(y,y_n),$$

dále přejdeme k $\lim_{n\to\infty}$

$$0 \le \liminf_{h\to 0^+} \frac{d_K(x+hy)}{h} \le \lim d(y,y_n) = 0.$$

Odtud

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{d_K(x+hy)}{h} = 0 \Rightarrow y \in T_K(x).$$

Ukázali jsme, že limita posloupnosti prvků z $T_K(x)$ je také v $T_K(x)$ a proto je kužel $T_K(x)$ uzavřenou množinou. ■
V práci [9, str. 20-21].

Tvrzení 58 *Nechť $K \subset X$, $x \in \overline{K}$, pak $0 \in T_K(x)$.*

Důkaz. Nechť $v = 0$, potom

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{d_K(x+h\cdot 0)}{h} = \liminf_{h\to 0^+} \frac{d_K(x)}{h} = \liminf_{h\to 0^+} \frac{0}{h} = 0,$$

tedy $0 \in T_K(x)$. ■

Tvrzení 59 *Nechť $K \subset X$, $x \in \mathrm{Int}(K)$, potom $T_K(x) = X$.*
Podle [1, str. 122].

Důkaz. Pro $x \in Int(K)$ existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ takové, že $B(x,\varepsilon) \subset K$. Zvolme libovolně $v \in X$. Zřejmě existuje dostatečně malé $h_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ takové, že $x + h_\varepsilon v \in B(x,\varepsilon) \subset K$, a tedy pro všechna $h \in (0, h_\varepsilon)$ platí $d_K(x+hv) = 0$, odtud i $\liminf_{h\to 0^+} \frac{d_K(x+hv)}{h} = 0$ a $v \in T_K(x)$. Volili jsme $v \in X$ libovolně, tedy $X \subset T_K(x)$. Opačná inkluze platí vždy, tudíž $X = T_K(x)$. ■

Tvrzení 60 *(Charakterizace kontingentního kuželu pomocí posloupnosti) $v \in T_K(x)$ právě tehdy, když existují posloupnosti $\{h_n\}, h_n \to 0^+, \{v_n\}, v_n \to v$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x + h_n v_n \in K$.*
Podle [1, str. 122].

Důkaz. " $\Leftarrow$ "
Nechť existují posloupnosti $\{h_n\}$, $\{v_n\}$ podle podmínky. Jelikož $d_K(x)$ je lipschitzovská funkce, můžeme odhadnout
$d_K(x+h_nv) - d_K(x+h_nv) \leq d(x+h_nv, x+h_nv_n) = d(h_nv, h_nv_n) = h_nd(v, v_n)$.
Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} d_K(x+h_nv) &\leq d_K(x+h_nv_v) + h_nd(v,v_n), \quad / : h_n \\ \frac{d_K(x+h_nv)}{h_n} &\leq \frac{d_K(x+h_nv_n)}{h_n} + d(v,v_n), \\ \liminf_{n\to\infty} \frac{d_K(x+h_nv)}{h_n} &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{d_K(x+h_nv_n)}{h_n} + \liminf_{n\to\infty}(v,v_n), \end{aligned}$$

podle předpokladů je $x + h_nv_n \in K$ a $v_n \to v$, tedy

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{d_K(x+h_nv)}{h_n} \leq 0.$$

Pak

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{d_K(x+hv)}{h} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{d_K(x+h_nv)}{h_n} \leq 0$$

a tvrzení platí.
"$\Rightarrow$"
Nechť $v \in T_K(x)$. Potom platí $\liminf_{h\to 0^+} \frac{d_K(x+hv)}{h} = 0$. Zvolme posloupnost $\{h_n\}$, $h_n \to 0^+$, pak platí

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{d_K(x+h_nv)}{h_n} = \liminf_{h\to 0^+} \frac{d_K(x+hv)}{h} = 0.$$

Z vlastnosti infima pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ exisuje $y_n \in K$ tak, že

$$d(x+h_nv, y_n) < d_K(x+h_nv) + h_n^2.$$

Nalezněme posloupnost $\{v_n\}$ splňující $y_n = x + h_nv_n$, explicitně $v_n = \frac{y_n - x}{h_n}$. Platí

$$d(x+h_nv, y_n) = d(x+h_nv, x+h_nv_n) = d(h_nv, h_nv_n) = |h_n| \cdot d(v, v_n),$$

$$\begin{aligned} h_n \cdot d(v,v_n) &< d_K(x+h_nv) + h_n^2, \qquad / : h_n(h_n > 0) \\ d(v,v_n) &< \frac{d_K(x+h_nv)}{h_n} + h_n, \\ \liminf_{n\to\infty} d(v,v_n) &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{d_K(x+h_nv)}{h_n} + \liminf_{n\to\infty} h_n, \\ 0 \leq \liminf_{n\to\infty} d(v,v_n) &\leq 0 + 0, \\ \liminf_{n\to\infty} d(v,v_n) &= 0. \end{aligned}$$

Zde buď limita existuje nebo můžeme vybrat konvergentní podposloupnost a přeznačit tak, aby $\lim_{n\to\infty} d(v, v_n) = 0$. Pak nutně $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ a platí $x + h_nv_n = y_n \in K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. ■

Tvrzení 61 *Nechť $K \subset X$ je konvexní, $x \in \overline{K}$. Pak $K - x \subset T_K(x)$.*

Důkaz. Zvolme $v \in K$. Chceme ukázat, že $v - x \in T_K(x)$. K tomu zvolme libovolně posloupnost $\{h_n\}$, $h_n \to 0^+$ a posloupnost $\{v_n\} \subset K$, $v_n \to v$, označme $u_n = v_n - x$. Platí $u_n \to v - x$. Dále $x + h_n u_n = x + h_n(v_n - x) = x(1 - h_n) + h_n v_n$. Jelikož $x, v \in \overline{K}$ a K je konvexní, platí $x + h_n u_n \in K$ a tedy $v - x \in T_{\overline{K}}(x) = T_K(x)$. ■

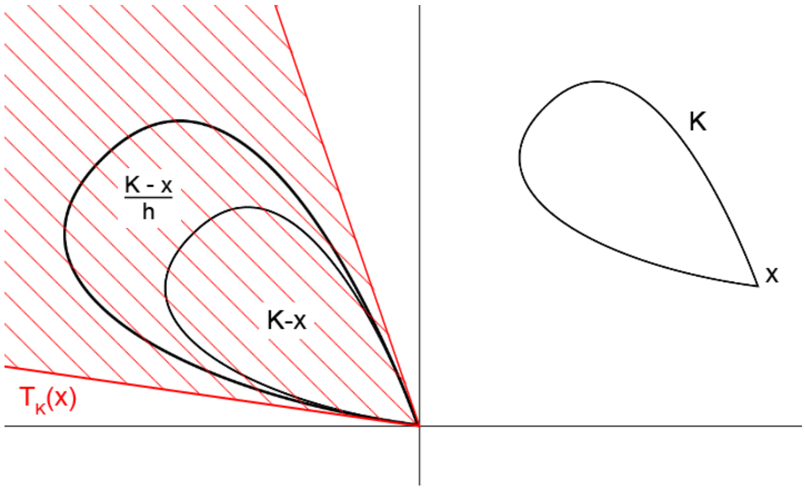
Tvrzení 62 *Nechť $K \subset X$ a $x \in \overline{K}$. Pro kontingentní kužel platí*

$$T_K(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{K - x}{h}.$$

Podle [1, str. 121].

Důkaz. Důkaz je přímou aplikací lemmatu 11, ekvivalentní definice limes superior, kde bereme funkci $F(h) = \frac{K-x}{h}$ a v namísto y. ■

Tvrzení vlastně říká, že pokud x přesuneme do počátku soustavy souřadnic (a s ním celou množinu K) a budeme zvětšovat, získáme tečný kužel $T_K(x)$.



Obrázek 7: Tečný kužel pomocí zvětšování.

4.2 Clarkův kužel

Definice 63 *Nechť $K \subset X$ je podmnožinou normovaného vektorového prostoru X a $x \in \overline{K}$.* ***Clarkovým kuželem*** *$C_K(x)$ budeme rozumět množinu*

$$C_K(x) = \{v \mid \lim_{h \to 0+, x' \to_K x} \frac{d_K(x' + hv)}{h} = 0\}.$$

Kde $\to_K$ značí konvergenci vzhledem k množině K.
Podle [1, str. 127].

Tvrzení 64 *Nechť $K \subset X$, $x \in \overline{K}$. Pak $C_K(K)$ je kužel.*
Podle [1, str. 128].

Důkaz. Nechť $v \in C_K(x)$. Zvolme libovolně $t > 0$. Platí

$$\lim_{h \to 0^+, x' \to_K x} \frac{d_K(x' + htv)}{h} = \lim_{h \to 0^+, x' \to_K x} \frac{d_K(x' + htv)}{ht} \cdot t = 0 \cdot t = 0.$$

Odtud $tv \in C_K(x)$ a $C_K(x)$ je kužel. ∎

Tvrzení 65 *(Charakterizace Clarkova kuželu pomocí posloupnosti)*
$v \in C_K(x)$ právě tehdy, když pro všechny posloupnosti $\{h_n\}, h_n \to 0^+$, $\{x_n\}$, $x_n \to_K x$ existuje $\{v_n\}$, $v_n \to v$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_n + h_n v_n \in K$.
Podle [1, str. 128].

Důkaz. " $\Leftarrow$ " Zvolme $\{x_n\}$, $x_n \to x$. Chceme ukázat, že $\lim_{h \to 0^+, x' \to x} \frac{d_K(x'+hv)}{h} = 0$. Zvolme posloupnost $\{y_n\} \subset K$ tak, že $d(x_n, y_n) \leq \frac{h_n}{n}$. Limitním přechodem dostaneme $\lim d(x_n, y_n) \leq \lim \frac{h_n}{n} = 0$, tedy $y_n \to x$.
Funkce $d_K(x)$ je lipschitzovská, tedy

$$\begin{aligned} d_K(x_n + h_n v) - d_K(y_n + h_n v_n) &\leq d(x_n + h_n v, y_n + h_n v_n) \leq d(x_n, y_n) + h_n d(v, v_n) \\ &\leq \frac{h_n}{n} + h_n d(v, v_n). \end{aligned}$$

Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} d_K(x_n + h_n v) &\leq d_K(\underbrace{y_n + h_n v_n}_{\in K}) + \frac{h_n}{n} + h_n d(v, v_n), \quad / : h_n \\ \frac{d_K(x_n + h_n v)}{h_n} &\leq 0 + (\frac{1}{n} + d(v, v_n)), \\ \lim_{n \to \infty} \frac{d_K(x_n + h_n v)}{h_n} &\leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} + d(v, v_n) = 0. \end{aligned}$$

Vždy platí

$$\lim_{h \to 0^+, x' \to x} \frac{d_K(x' + hv)}{h} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{d_K(x_n + h_n v)}{h_n} = 0$$

a tím je implikace dokázána.
" $\Rightarrow$ " Předpokládejme, že $v \in C_K(x)$. Zvolme posloupnosti $\{x_n\} \subset K$, $x_n \to x$, $\{h_n\}$, $h_n \to 0^+$. Chceme nalézt posloupnost $v_n \to v$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$: $x_n + h_n v_n \in K$. Pak bude platit

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d_K(x_n + h_n v)}{h_n} = \lim_{h \to 0^+, x' \to x} \frac{d_K(x' + hv)}{h} = 0.$$

Z vlastností infima víme, že existuje posloupnost $\{y_n\} \subset K$ tak, že

$$d(x_n + h_n v, y_n) < d_K(x_n + h_n v) + h_n^2.$$

Nalezněme posloupnost $\{v_n\}$ splňující $y_n = x_n + h_n v_n$. Potom

$$\begin{aligned} d(x + h_n v, x + h_n v_n) = &< h_n d(v, v_n) < d_K(x_n + h_n v) + h_n^2, \\ 0 &\leq d(v, v_n) < \frac{d_K(x_n + h_n v)}{h_n} + h_n, \\ 0 &\leq \lim d(v, v_n) \leq \lim \left(\frac{d_K(x_n + h_n v)}{h_n} + h_n \right) = 0, \end{aligned}$$

a tedy $\lim v_n = v$ a tvrzení platí. ∎

Tvrzení 66 *Nechť $K \subset X, x \in \overline{K}$. Pak $C_K(K)$ je uzavřený konvexní kužel.*
Podle [1, str. 128].

Důkaz. Důkaz uzavřenosti se provede podobně jako pro $T_K(x)$, tvrzení 57. Zbývá důkaz konvexity $C_K(x)$. Už víme, že $C_K(x)$ je kužel, tedy stačí ukázat, že pro každé $u, v \in C_K(x)$ platí $u + v \in C_K(x)$.
Zvolme $\{h_n\}$, $h_n \to 0^+$, $\{x_n\}$, $x_n \to_K x$ libovolně. Pak existuje

$$\begin{aligned} \{u_n\},\ u_n \to u, &\quad x_{1n} := x_n + h_n u_n \in K, \\ \{v_n\},\ v_n \to v, &\quad x_{1n} + h_n v_n \in K. \end{aligned}$$

$$x_{1n} + h_n v_n = x_n + h_n u_n + h_n v_n = x_n + h_n(u_n + v_n) \in K.$$

Odtud $u + v \in C_K(x)$.
Podle [1, str. 128]. ■

Tvrzení 67 *Nechť $K \subset X$, $x \in \overline{K}$, pak $0 \in C_K(x)$.*

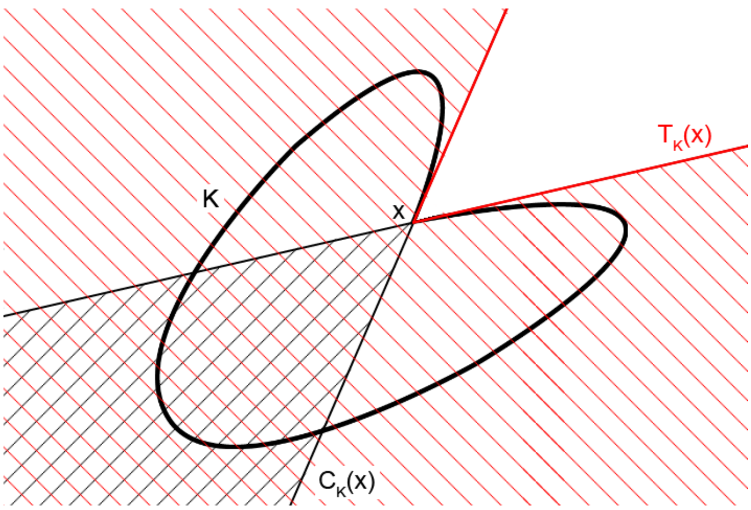
Důkaz. Nechť $v = 0$, potom

$$\lim_{h \to 0^+, x' \to_K x} \frac{d_K(x' + h \cdot 0)}{h} = \lim_{h \to 0^+, x' \to_K x} \frac{d_K(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+, x' \to_K x} \frac{0}{h} = 0,$$

tedy $0 \in C_K(x)$. ■

Tvrzení 68 *Nechť $K \subset X$ je podmnožinou normovaného vektorového prostoru X a $x \in \overline{K}$. Pak platí: $C_K(x) \subset T_K(x)$.*
Podle [1, str. 127].

Důkaz. Zvolme $v \in C_K(x)$. Podle tvrzení 65, charakterizace Clarkova kuželu zvolme libovolně posloupnosti $h_n \to 0^+$, $x_n = x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a nalezneme posloupnost $v_n \to v$ tak, že $x_n + h_n v_n = x + h_n v_n \in K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $v \in T_K(x)$ podle tvrzení 60, charakterizace kontingentního kuželu. ■



Obrázek 8: Kontingentní a Clarkův kužel.

Tvrzení 69 *Nechť $K \subset X$ a $x \in \mathrm{Int}(K)$, potom $C_K(x) = X$.*
Podle [1, str. 128].

Důkaz. Analogicky k důkazu Tvrzení 59 o kontingentním kuželu ve vnitřním bodě. ∎

Tvrzení 70 *Nechť K je uzavřený kuzel v X, potom je $T_K(0) = K$.*

Důkaz. " $\supset$ "
Zvolme $v \in K$ libovolně. Pak $\forall h \in \mathbb{R}^+$, $hv \in K$, tedy $d_K(0 + hv) = d_K(hv) = 0$. Potom

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{d_K(0 + hv)}{h} = 0.$$

Víme tedy, že $v \in T_K(0)$ a tudíž $T_K(0) \supset K$.
" $\subset$ "
Zvolme libovolně $v \in T_K(0)$. Podle tvrzení 60 existují posloupnosti $\{h_n\}$, $\{v_n\}$, $h_n \to 0^+$, $v_n \to v$, takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}\ x + h_n v_n = 0 + h_n v_n = h_n v_n \in K.$$

K je kužel, tedy $\forall v \in K, \Leftrightarrow tv \in K$, $t \in \mathbb{R}^+$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolme

$$t_n = \frac{1}{h_n} \Rightarrow t_n \cdot (h_n v_n) = \frac{1}{h_n} \cdot h_n v_n = v_n \in K.$$

K je uzavřený kužel, tedy $\lim_{n\to\infty} v_n = v \in K$ a platí $T_K(0) \subset K$. ∎
V práci [9, str. 21].

Z tvrzení 66 o konvexitě Clarkova kuželu plyne, že obecně neplatí $C_K(0) = K$, když K je kužel. Stačí totiž, aby kužel K nebyl konvexní.

Tvrzení 71 *Nechť $K \subset X$ je konvexní podmnožinou normovaného vektorového prostoru X a $x \in \overline{K}$. Potom $K - x \subset C_K(x)$.*

Důkaz. Zvolme $v \in K$ a posloupnosti $\{x_n\}$, $x_n \to_K x$, $\{h_n\}$, $h_n \to 0^+$. Označme $u_n = v - x_n$. Zřejmě $u_n \to v - x$ a platí $x_n + h_n u_n = x_n + h_n(v - x_n) = x\_n(1 - h_n) + h_n v \in K$. Jelikož jsou $x_n, v \in K$ a K je konvexní. ∎

Tvrzení 72 *Nechť $K \subset X$ je konvexní podmnožinou normovaného vektorového prostoru X a $x \in \overline{K}$. Pak platí: $C_K(x) = T_K(x)$.*
Podle [1, str. 138].

Důsledek 73 *Je-li $K \subset X$ konvexní, pak je $T_K(x)$ také konvexní.*

Tvrzení 74 *Nechť $K \subset X$ a $x \in \overline{K}$. Pro Clarkův kužel platí*

$$C_K(x) = \liminf_{h \to 0^+, x \to_K x'} \frac{K - x'}{h}.$$

Podle [1, str. 127].

Důkaz. Podobně jako pro $T_K(x)$ je důkaz přímou aplikací lemmatu 10, ekvivalentní definice limes inferior. ∎

5 Normálové kužely

Pro popsání vlastností množin můžeme využít dualitu. X^* značí duální prostor k prostoru X.

Definice 75 *Nechť $K \subset X$, $L \subset X^*$, definujme **polární kužely***

$$K^- = \{p \in X^* \mid \forall\, x \in K, \langle p, x\rangle \leq 0\},$$

$$L^- = \{p \in X \mid \forall\, p \in L, \langle p, x\rangle \leq 0\}.$$

Podle [1, str. 25].

Poznámka 76 *Z vlastností skalárního součinu ihned plyne, že polární kužely jsou skutečně kužely.*

Tvrzení 77 *Nechť K_1, K_2 jsou kužely, $K_1 \subset K_2$. Pak $K_1^- \supset K_2^-$.*
Podle [2, str. 215].

Důkaz. Zvolme $p \in K_2^-$. Potom pro každé $x \in K_2$ platí $\langle x, p\rangle \leq 0$. Jelikož $K_1 \subset K_2$, platí i pro každé $x \in K_1$ tatáž podmínka. Odtud pak $p \in K_1^-$ a tvrzení platí. ∎

Tvrzení 78 *Nechť $K \subset X$ je kužel. Pak polární kužel K^- je uzavřený a konvexní.*
Podle [2, str. 216].

Důkaz. Že K^- je kužel, už víme. Zvolme posloupnost $\{p_n\} \subset K^-$, $p_n \to p$. Chceme ukázat, že $p \in K^-$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\langle x, p_n\rangle \leq 0$. Limitním přechodem dostaneme

$$\lim\langle x, p_n\rangle = \langle x, \lim p_n\rangle = \langle x, p\rangle \leq 0,$$

jelikož skalární součin je spojitá funkce. Odtud pak K^- je uzavřená množina.
Pro konvexitu zvolme p_1, $p_2 \in K^-$. Chceme ukázat, že $(1-\lambda)p_1 + \lambda p_2 \in K^-$. Jelikož K^- je kužel, stačí ukázat, že $p_1 + p_2 \in K^-$.

$$\langle x, p_1 + p_2\rangle = \langle x, p_1\rangle + \langle x, p_2\rangle \leq 0 + 0 = 0$$

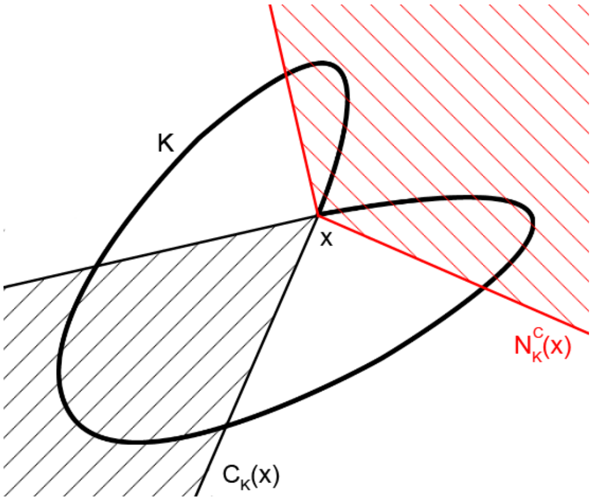
a K^- je konvexní. ∎

Definice 79 *Nechť $K \subset X$ a $x \in \overline{K}$. Pak **Clarkovým normálovým kuželem** rozumíme polární kužel*

$$N_K^C(x) = C_K(x)^- = \{p \in X^* \mid \forall\, v \in C_K(x),\ \langle p, v\rangle \leq 0\}.$$

Podle [1, str. 157].

Tvrzení 80 *Nechť $K \subset X$, $x \in \overline{K}$, potom jsou k sobě kužely $N_K^C(x)$ a $C_K(x)$ vzájemně polární.*
Podle [2, str. 216].



Obrázek 9: Clarkův tečný a normálový kužel.

Důkaz. Stačí ukázat, že existuje $p \in N_K^C(x)$, $p \neq 0$. To ovšem plyne z konvexity $C_K(x)$. ■

Definice 81 *Nechť $K \subset X$ a $x \in \overline{K}$. Pak* ***kontingentním normálovým kuželem*** *rozumíme polární kužel*

$$N_K(x) = T_k(x)^- = \{p \in X^* \mid \forall\, v \in T_K(x),\ \langle p, v\rangle \leq 0\}.$$

Podle [8, str. 21].

Pokud kontingentní kužel $T_K(x)$ není konvexní, tak se kontingentní normálový kužel $N_K(x)$ redukuje na $\{0\}$. Zřejmě tedy, na rozdíl od Clarkových kůželů, nefunguje polarita mezi $T_K(x)$ a $N_K(x)$.

Tvrzení 82 *Nechť X, Y jsou normované vektorové prostory, $A \subset X$, $E \subset Y$, jsou uzavřené, $(x, y) \in A \times E$. Pak platí*

i) $T_{A\times E}(x, y) \subset T_A(x) \times T_E(y)$,

ii) $C_{A\times E}(x, y) = C_A(x) \times C_E(y)$.

iii) $N^C_{A\times E}(x, y) = N^C_A(x) \times N^C_E(y)$.

Podle [2, str. 227].

Důkaz.

i) $v = (v_1, v_2) \in T_{A\times E}(x, y)$ právě tehdy, když existují posloupnosti $h_n \to 0^+$ a $(v_{1n}, v_{2n}) \to (v_1, v_2)$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} (x, y) + h_n(v_{1n}, v_{2n}) &\in A \times E, \\ (x + h_n v_{1n}, y + h_n v_{2n}) &\in A \times E, \\ \Rightarrow x + h_n v_{1n} \in A \,\wedge\, y + h_n v_{2n} &\in E, \\ v_1 \in T_A(x) \,\wedge\, v_2 &\in T_E(y). \end{aligned}$$

ii) $v = (v_1, v_2) \in C_{A\times E}(x, y)$ právě tehdy, když pro všechny posloupnosti $h_n \to 0^+$ a $(x_n, y_n) \to_{A\times E} (x, y)$ existuje $(v_{1n}, v_{2n}) \to (v_1, v_2)$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} (x_n, y_n) + h_n(v_{1n}, v_{2n}) &\in A \times E, \\ (x_n + h_n v_{1n}, y_n + h_n v_{2n}) &\in A \times E, \\ \Leftrightarrow x_n + h_n v_{1n} \in A \,\wedge\, y_n + h_n v_{2n} &\in E, \\ v_1 \in C_A(x) \,\wedge\, v_2 &\in C_E(y). \end{aligned}$$

iii) " $\supset$ " Zvolme $p_1 \in N_A^C(x)$ a $p_2 \in N_E^C(y)$. Potom pro každé $v_1 \in C_A(x)$: $\langle p_1, v_1\rangle \leq 0$ a $v_2 \in C_E(y)$: $\langle p_2, v_2\rangle \leq 0$. Podle předchozí části je $v = (v_1, v_2) \in C_{A\times E}(x, y)$. Chceme ukázat, že $p = (p_1, p_2) \in N_{A\times E}^C(x, y)$.
$\langle p, v\rangle = \underbrace{\langle p_1, v_1\rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\langle p_2, v_2\rangle}_{\leq 0} \leq 0$, a tedy $p \in N_{A\times E}^C(x, y)$.
" $\subset$ " Zvolme $p = (p_1, p_2) \in N_{A\times E}^C(x, y)$. Pak pro každé $v = (v_1, v_2) \in C_{A\times E}(x, y)$ platí $\langle p, v\rangle \leq 0$. Podle předchozí části platí $v_1 \in C_A(x)$ a $v_2 \in C_E(y)$. Chceme ukázat, že $\langle p_1, v_1\rangle \leq 0$ a $\langle p_2, v_2\rangle \leq 0$.
Pro spor předpokládejme, že existují $v_1 \in C_A(x)$ tak, že $\langle p_1, v_1\rangle > 0$ a $v_2 \in C_E(y)$ tak, že $\langle p_2, v_2\rangle > -\langle p_1, v_1\rangle$. Pak $\langle p, v\rangle = \underbrace{\langle p_1, v_1\rangle}_{>0} + \langle p_2, v_2\rangle > 0$, což je spor s předpokladem.

■

Tvrzení 83 *Nechť $K \subset X$, $x \in \overline{K}$. Platí $N_K(x) \subset N_K^C(x)$.*

Důkaz. Nechť $p \in N_K(x)$, potom $\langle p, v\rangle \leq 0$ pro každé $v \in T_K(x)$. Vždy $C_K(x) \subset T_K(x)$, tedy $\langle p, v\rangle \leq 0$ pro každé $v \in C_K(x)$, tedy $p \in N_K^C(x)$. ■

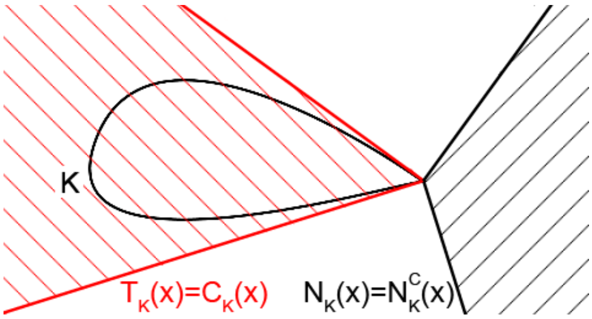
Tvrzení 84 *Nechť $K \subset X$, $x \in \mathrm{Int}(K)$. Pak $N_K(x) = N_K^C(x) = \{0\}$.*

Důkaz. Podle tvrzení 59 a 69, víme, že tečné kužely $T_K(x) = C_K(x) = X$, proto se normálové kužely redukují na $\{0\}$. ■

Tvrzení 85 *Nechť $K \subset X$ je konvexní, $x \in \overline{K}$, pak $N_K(x) = K_K^C(x)$.*

Důkaz. Podle tvrzení 72 je $T_K(x) = C_K(x)$ a tedy $N_K(x) = K_K^C(x)$. ■

Poznámka 86 *Pokud $C_K(x) = \{0\}$, pak je $N_K^C(x) = X$.*



Obrázek 10: Tečné a normálové kužely konvexní množiny.

Tvrzení 87 *Nechť jednoznačná funkce $f : X \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná a nabývá minima na množině K v bodě x. Pak platí*

$$-f'(x) \in N_K^C(x) \ \ a \ \langle f'(x), v\rangle \geq 0 \quad \forall\, v \in C_K(x).$$

Podle [8, str. 21].

6 Derivace mnohoznačné funkce

6.1 Základní pojmy

Definice 88 *Nechť X, Y jsou normované prostory, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce.* ***Kontingentní derivací*** $\mathrm{DF}(x, y)$ *funkce F v bodě $(x, y) \in \mathrm{Graf}(F)$ budeme rozumět mnohoznačnou funkci z X do Y definovanou takto*

$$\mathrm{Graf}(\mathrm{DF}(x, y)) = T_{\mathrm{Graf}(F)}(x, y)$$

Clarkovou derivací $CF(x, y)$ *funkce F v bodě $(x, y) \in \mathrm{Graf}(F)$ budeme rozumět mnohoznačnou funkci z X do Y definovanou takto*

$$\mathrm{Graf}(\mathrm{CF}(x, y)) = C_{\mathrm{Graf}(F)}(x, y)$$

Pokud $F := f$ je jednoznačná funkce, bereme:

$$Df(x) = DF(x, f(x)),\ Cf(x) = CF(x, f(x))$$

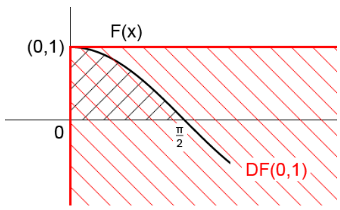
Podle [1, str. 181, 189].

Příklad 89 *Definujme mnohoznačnou funkci $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$:*

$$F(x) = [0, cos(x)],\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Určete kontingentní a Clarkovu derivaci v bodě $(0, 1)$.

Díky znalosti tečných kuželů víme, že $\mathrm{DF}(0, 1) = \{(0, r), (p, r) \mid p > 0,\ r \leq 0\}$, graficky se jedná o třetí kvadrant, na obrázku posunutý do $(0, 1)$.



Obrázek 11: Příklad kontingentní a Clarkovy derivace.

Tvrzení 90 *Nechť X, Y jsou normované prostory, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Graf}(F)$. Pak:*

i) $(x, y) \in \mathrm{Graf}(\mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y}))$ *právě tehdy, když existují posloupnosti $\{t_n\}$, $t_n \to 0^+$ a $\{(x_n, y_n)\} \subset X \times Y$, $(x_n, y_n) \to (x, y)$ takové, že $\bar{y} + t_n y_n \in F(\bar{x} + t_n x_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

ii) $(x, y) \in \mathrm{Graf}(\mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y}))$ *právě tehdy, když*

$$\liminf_{(\hat{x}, t) \to (x, 0+)} d\left(\frac{F(\bar{x} + t\hat{x}) - \bar{y}}{t}, y\right) = 0.$$

Podle [5, str. 403].

Důkaz.

i) Použijeme tvrzení 60, charakterizaci kontingentního kuželu: $v = (x, y) \in T_{\mathrm{Graf}(F)}(\bar{x}, \bar{y})$, právě když existují posloupnosti $\{t_n\}$, $t_n \to 0^+$, $v_n = (x_n, y_n) \to (x, y) = v$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$: $(\bar{x}, \bar{y}) + t_n(x_n, y_n) \in \mathrm{Graf}(F) \Leftrightarrow (\bar{x} + t_n x_n, \bar{y} + t_n y_n) \in \mathrm{Graf}(F) \Leftrightarrow \bar{y} + t_n y_n \in F(\bar{x} + t_n x_n)$.

ii) Úpravou předchozího výrazu dostaneme, že $(x, y) \in \mathrm{Graf}(\mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y}))$, právě když existují posloupnosti podle podmínek a pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
y_n &\in \frac{F(\bar{x} + t_n x_n) - \bar{y}}{t_n}, \\
d&\left(\frac{F(\bar{x} + t_n x_n) - \bar{y}}{t_n}, y_n\right) = 0, \\
0 &= \liminf_{n\to\infty} d\left(\frac{F(\bar{x} + t_n x_n) - \bar{y}}{t_n}, y_n\right) = \liminf_{n\to\infty} d\left(\frac{F(\bar{x} + t_n x_n) - \bar{y}}{t_n}, y\right) = \\
&= \liminf_{(\hat{x},t)\to(x,0^+)} d\left(\frac{F(\bar{x} + t\hat{x}) - \bar{y}}{t}, y\right).
\end{aligned}
$$

Pokud naopak vyjdeme z limity, dokážeme najít takovou posloupnost, že $y_n \in \frac{F(\bar{x}+t_n x_n)-\bar{y}}{t_n}$ obě implikace platí.

■

Pokud je funkce lipschitzovská, formule se značně zjednoduší:

Tvrzení 91 *Nechť X, Y jsou normované prostory, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce, $x \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(F))$ a F je lipschitzovská na okolí x. Pak $y \in \mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y})(x)$ právě tehdy, když*

$$
\liminf_{t\to 0+} d\left(\frac{F(\bar{x} + tx) - \bar{y}}{t},\ y\right) = 0.
$$

Podle [1, str. 186].

Důkaz. Z lipschitzovskosti plyne, že existuje konstanta $l > 0$ taková, že

$$
\begin{aligned}
F(\bar{x} + t\hat{x}) &\subset F(\bar{x} + tx) + lt\|\hat{x} - x\|B_Y, \\
F(\bar{x} + t\hat{x}) - lt\|\hat{x} - x\|B_Y &\subset F(\bar{x} + tx).
\end{aligned}
$$

Zvolme $y \in \mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y})(x)$, pak platí

$$
\begin{aligned}
d(F(\bar{x} + tx), y) &\le d(F(\bar{x} + t\hat{x}) - lt\|\hat{x} - x\|B_Y, y), \\
d\left(\frac{F(\bar{x} + tx) - \bar{y}}{t}, y\right) &\le d\left(\frac{F(\bar{x} + t\hat{x}) - lt\|\hat{x} - x\|B_Y - \bar{y}}{t}, y\right) = \\
&= d\left(\frac{F(\bar{x} + t\hat{x}) - \bar{y}}{t} - l\|\hat{x} - x\|B_Y, y\right), \\
\liminf_{t\to 0^+, \hat{x}\to x} d\left(\frac{F(\bar{x} + tx) - \bar{y}}{t}, y\right) &\le \liminf_{t\to 0^+, \hat{x}\to x} d\left(\frac{F(\bar{x} + t\hat{x}) - \bar{y}}{t} - l\|\hat{x} - x\|B_Y, y\right) \le \\
&\le \liminf_{t\to 0^+, \hat{x}= x} d\left(\frac{F(\bar{x} + t\hat{x}) - \bar{y}}{t} - l\|\hat{x} - x\|B_Y, y\right) = \\
&= \liminf_{t\to 0^+} d\left(\frac{F(\bar{x} + tx) - \bar{y}}{t}, y\right).
\end{aligned}
$$

Výraz vlevo je shodný s výrazem vpravo, tedy platí rovnost:

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to 0^+} d\left(\frac{F(\bar{x}+tx)-\bar{y}}{t}, y\right) &= \liminf_{t\to 0^+, \hat{x}\to x} d\left(\frac{F(\bar{x}+t\hat{x})-\bar{y}}{t} - l\|\hat{x}-x\|B_Y, y\right) = \\
&= \liminf_{t\to 0^+, \hat{x}\to x} d\left(\frac{F(\bar{x}+t\hat{x})-\bar{y}}{t}, y\right) + \liminf_{t\to 0^+, \hat{x}\to x} d(l\|\hat{x}-x\|B_Y, y) \\
&= \liminf_{t\to 0^+, \hat{x}\to x} d\left(\frac{F(\bar{x}+t\hat{x})-\bar{y}}{t}, y\right).
\end{aligned}$$

Podle předchozího tvrzení je pak $(x, y) \in \mathrm{Graf}(\mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y}))$, právě když

$$\liminf_{t\to 0^+} d\left(\frac{F(\bar{x}+tx)-\bar{y}}{t}, y\right) = 0.$$

■

Tvrzení 92 *Nechť X, Y jsou normované prostory, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce, $\bar{x} \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(F))$, F je lipschitzovská na okolí $\bar{x}$ s konstantou $l \in \mathbb{R}^+$ a $\bar{y} \in F(\bar{x})$. Pak $\mathrm{Dom}(\mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y})) = X$ a mnohoznačná funkce $\mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y})$ je lipschitzovská s konstantou l.*
Podle [1, str. 186].

Důkaz. Zvolme U okolí $\bar{x}$ a x_1, $x_2 \in X$. Existuje dostatečně malé $t > 0$ tak, že $\bar{x} + tx_1$, $\bar{x} + tx_2 \in U$. Pak platí
$F(\bar{x} + tx_1) \subset F(\bar{x} + tx_2) + l\|\bar{x} + tx_1 - \bar{x} - tx_2\| = F(\bar{x} + tx_2) + lt\|x_1 - x_2\|$.
Pro každé y platí

$$d\left(\frac{F(\bar{x}+tx_2)+lt\|x_1-x_2\|-\bar{y}}{t}, y\right) \le d\left(\frac{F(\bar{x}+tx_1)-\bar{y}}{t}, y\right),$$

Zvolme $y \in \mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y})(x_1)$ a přejděme k $\liminf_{t\to 0^+}$:

$$\liminf_{t\to 0^+} d\left(\frac{F(\bar{x}+tx_2)+lt\|x_1-x_2\|-\bar{y}}{t}, y\right) \le \liminf_{t\to 0^+} d\left(\frac{F(\bar{x}+tx_1)-\bar{y}}{t}, y\right) = 0.$$

Potom

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to 0^+} d\left(\frac{F(\bar{x}+tx_2)+lt\|x_1-x_2\|-\bar{y}}{t}, y\right) &= 0, \\
\liminf_{t\to 0^+} d\left(\frac{F(\bar{x}+tx_2)-\bar{y}}{t}, y\right) &\le l\|x_1-x_2\|, \\
y \in \mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y})(x_2) + l\|x_1-x_2\|B_Y&, \\
F(x_1) \subset F(x_2) + l\|x_1-x_2\|B_Y&,
\end{aligned}$$

a $\mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y})$ je lipschitzovská s konstantou l. ■

Tvrzení 93 *(Ekvivalentní definice kontingentní derivace)*
Nechť X, Y jsou normované prostory, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Graf}(F)$. Pro kontingentní derivaci platí:

$$\mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y})(x) = \limsup_{(\hat{x},t)\to(x,0+)} \frac{F(\bar{x}+t\hat{x})-\bar{y}}{t}.$$

Podle [5, str. 403].

Důkaz. Důkaz plyne přímo z tvrzení 90 ii) pomocí lemmatu 13 o limes superior pomocí vzdálenosti. ■

Tvrzení 94 *Nechť X, Y jsou normované prostory, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce,* $\mathrm{Graf}(F)$ *je konvexní množinou,* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Graf}(F)$. *Pak pro každé $x \in X$:*

$$F(x) - \bar{y} \subset \mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}).$$

Podle [5, str. 413].

Důkaz. Podle tvrzení 61 je pro K konvexní

$$\begin{array}{lr} & K - x \in T_K(x) \\ & \mathrm{Graf}\, F - (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Graf}\,\mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y}). \\ (x, y) \in \mathrm{Graf}\, F : & (x, y) - (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Graf}\,\mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y}), \\ & (x - \bar{x}, y - \bar{y}) \in \mathrm{Graf}\,\mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y}), \\ & (y - \bar{y}) \in \mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}), \\ y \in F(x) : & F(x) - \bar{y} \subset \mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}). \end{array}$$

■

Věta 95 *Nechť $F : X \rightrightarrows Y$ je monotónní,* $(x, p) \in \mathrm{Graf}(F)$, *pak* $\mathrm{DF}(x, p)$ *je pozitivně semidefinitní ve smyslu:* $\forall\, (u, r) \in \mathrm{Graf}(\mathrm{DF}(x, p)) : \langle r, u \rangle \geq 0$.
Podle [1, str. 195].

Důkaz. Nechť $(u, r) \in \mathrm{Graf}(\mathrm{DF}(x, p)) \Rightarrow$ existují posloupnosti $\{h_n\}$, $\{u_n\}$, $\{r_n\}$ takové, že $h_n \to 0^+, (u_n, r_n) \to (u, r)$ a

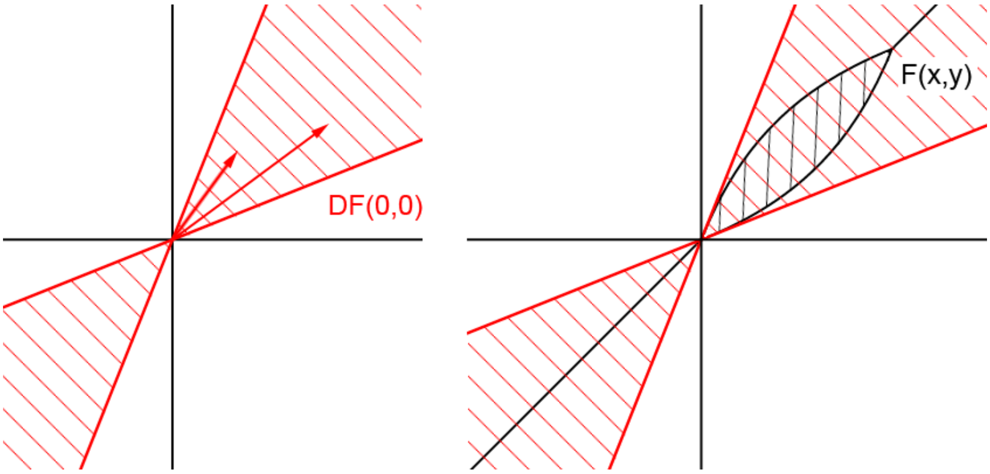
$$(x, p) + h_n \cdot (u_n, r_n) = (x + h_n u_n, p + h_n r_n) \in \mathrm{Graf}(F).$$

Ve smyslu definice 24 označme $(x_1, y_1) = (x + h_n u_n, p + h_n r_n)$, $(x_2, y_2) = (x, p)$. Platí

$$h_n^2 \cdot \langle u_n, r_n \rangle = \langle h_n u_n, h_n r_n \rangle = \langle x + h_n u_n - x, p + h_n r_n - p \rangle = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0,$$

jelikož F je monotónní. Úpravou dostáváme $\langle u_n, r_n \rangle \geq 0$, a limitním přechodem $\langle u, r \rangle = \langle r, u \rangle \geq 0$.
V práci [9, str. 34]. ■

Implikaci v předchozí větě nelze obrátit, jak ukazuje obrázek 12. Zde je splněno $\forall\, (u, r) \in \mathrm{Graf}(\mathrm{DF}(x, p)) : \langle r, u \rangle \geq 0$, ale přesto není funkce monotónní.



Obrázek 12: Protipříklad.

Tvrzení 96 *Nechť X, Y jsou normované prostory, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Graf}(F)$. Pak:*

i) $(x, y) \in \mathrm{Graf}(\mathrm{CF}(\bar{x}, \bar{y}))$ *právě tehdy, když pro všechny posloupnosti* $\{t_n\}$, $t_n \to 0^+$ *a* $\{(\bar{x}_n, \bar{y}_n)\} \subset \mathrm{Graf}(F)$, $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \to (\bar{x}, \bar{y})$ *existuje posloupnost* $\{(x_n, y_n)\}$, $(x_n, y_n) \to (x, y)$ *taková, že* $\bar{y}_n + t_n y_n \in F(\bar{x}_n + t_n x_n)$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$.

ii) $(x, y) \in \mathrm{Graf}(\mathrm{CF}(\bar{x}, \bar{y}))$ *právě tehdy, když*

$$\limsup_{t \to 0^+, (\hat{x}, \hat{y}) \xrightarrow[\mathrm{Graf}(F)]{} (\bar{x}, \bar{y})} \inf_{\tilde{x} \to x} d\left(\frac{F(\hat{x} + t\tilde{x}) - \hat{y}}{t}, y\right) = 0.$$

Podle [5, str. 408].

Tvrzení 97 *Nechť X, Y jsou normované prostory, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce, $x \in \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(F))$ a F je lipschitzovská na okolí x. Pak $y \in \mathrm{CF}(\bar{x}, \bar{y})(x)$ právě tehdy, když*

$$\lim_{t \to 0^+, (\hat{x}, \hat{y}) \xrightarrow[\mathrm{Graf}(F)]{} (\bar{x}, \bar{y})} d\left(\frac{F(\hat{x} + tx) - \hat{y}}{t}, y\right) = 0.$$

Podle [1, str. 192].

Příklad 98 *Uvažujme mnohoznačnou funkci $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$*

$$F(x) = \{|\operatorname{tg}(x)|\},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Určete kontingentní derivaci v bodě $(0, 0)$.

Graf kontingentní derivace je shodný s grafem funkce absolutní hodnoty, tedy $\mathrm{Graf}(\mathrm{DF}(0,0)) = \mathrm{Graf}(|x|)$, neboli $\mathrm{DF}(0,0) = \{(x, x), (-x, x) \mid x \in \mathbb{R}_0^+\}$.
Funkce je sudá, graf je souměrný podle osy y a tedy i graf $\mathrm{DF}(x)$ je takto souměrný. Stačí nám tedy ověřit, že $(x, x) \in \mathrm{Graf}(DF)$ a $(-x, x) \in \mathrm{Graf}(\mathrm{DF})$ automaticky.

Podle tvrzení 90 stačí ukázat, že existují posloupnosti $\{t_n\}$, $t_n \to 0^+$ a $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$, $(x_n, y_n) \to (1, 1)$ takové, že

$$\begin{aligned} 0 + t_n y_n \in F(0 + t_n x_n) = \{|\operatorname{tg}(0 + t_n x_n)|\}, \\ t_n y_n = |\operatorname{tg}(\underbrace{t_n x_n}_{>0})| = \operatorname{tg}(t_n x_n). \end{aligned}$$

Zvolme

$$t_n = \frac{1}{n},\ x_n = 1,\ y_n = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}.$$

Platí $\lim t_n = 0$, $\lim x_n = 1, x_n \in \mathbb{R}_0^+$, $\lim y_n = 1$. Odtud

$$t_n y_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \operatorname{tg}\frac{1}{n} = \operatorname{tg}(1 \cdot \frac{1}{n}) = \operatorname{tg}(t_n x_n).$$

Tudíž $(1, 1) \in \mathrm{DF}(0, 0)$. Jelikož $\mathrm{Graf}(\mathrm{DF})$ je kužel a souměrný podle osy y, jsou také (x, x), $(-x, x) \in \mathrm{Graf}(\mathrm{DF}(0, 0))$.
Je třeba ověřit, že $(1, q)$, $(-1, q) \notin \mathrm{DF}(0, 0)$ pro $q \neq 1$. Oba případy se řeší stejně. Zvolme posloupnost $\{q_n\}$, $q_n \to q$. Chceme ukázat, že pro všechny posloupnosti $\{t_n\}$, $\{x_n\}$ podle podmínek platí $0+t_n q_n \notin F(0+t_n x_n)$. Pro spor předpokládejme, že

$$\begin{aligned} t_n q_n &= |\operatorname{tg}(t_n x_n)|, \\ q_n &= \frac{|\operatorname{tg}(t_n x_n)|}{t_n}, \\ q = \lim_{n\to\infty} q_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{|\operatorname{tg}(t_n x_n)|}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}(t_n x_n)}{t_n x_n} \cdot x_n \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(\operatorname{tg}(t_n x_n))}_{=\operatorname{sgn}(t_n x_n)=\operatorname{sgn}(x_n)} = \\ &= 1 \cdot \lim_{n\to\infty} |x_n| = 1, \end{aligned}$$

což je spor.
Zbývá ukázat, že $(0, r) \notin \mathrm{DF}(0, 0)$ pro $r \neq 0$. Zvolme libovolně posloupnosti $\{r_n\}$, $r_n \to r$, $t_n \to 0^+$, $x_n \to 0$. Potom $(x_n, r_n) \to (0, r)$.
Pro spor předpokládejme, že

$$\begin{aligned} t_n r_n &= |\operatorname{tg}(t_n x_n)|, \\ r_n &= \frac{|\operatorname{tg}(t_n x_n)|}{t_n}, \\ r = \lim_{n\to\infty} r_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{|\operatorname{tg}(t_n x_n)|}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}(t_n x_n)}{t_n x_n} \cdot x_n \cdot \operatorname{sgn}(x_n) = \\ &= 1 \cdot \lim_{n\to\infty} |x_n| = 1 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

což je spor. ♣

Předchozí příklad lze zobecnit pro spojité funkce.

Tvrzení 99 *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existují jednostranné derivace $f'_-(a) \neq f'_+(a)$. Potom*

$$Df(a, f(a)) = \{(1, f'_+(a)),\ (-1, f'_-(a)),\ (0, 0)\}.$$

Důkaz. Předpokládejme, že vektor tvaru $(1, y) \in (\mathrm{DF}(a, f(a)))$. Zvolme libovolně posloupnosti $t_n \to 0^+$, $x_n \to 1$, $y_n \to y$. Pak platí

$$\begin{aligned} f(a) + t_n y_n &= f(a + t_n x_n), \\ y_n &= \frac{f(a + t_n x_n) - f(a)}{t_n}, \\ y = \lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(a + t_n x_n) - f(a)}{t_n \cdot x_n} \cdot x_n = f'_+(a) \cdot 1 = f'_+(a), \end{aligned}$$

kde můžu předpokládat, že od nějakého n_0 dále je $x_n > 0$, jelikož $\lim x_n = 1$.
Analogicky ukážeme, že $(-1, f'_-(a)) \in (\mathrm{DF}(a, f(a)))$.
Zbývá ukázat, jak je to s vektorem tvaru $(0, r)$. Zvolme libovolně posloupnosti $t_n \to 0^+$, $x_n \to 0$, $r_n \to r$ a předpokládejme, že $(0, r) \in (\mathrm{DF}(a, f(a)))$.

$$\begin{aligned} f(a) + t_n r_n &= f(a + t_n x_n), \\ r_n &= \frac{f(a + t_n x_n) - f(a)}{t_n}, \\ r = \lim_{n\to\infty} r_n &= \begin{cases} x_n \neq 0 & \lim \frac{f(a+t_n x_n) - f(a)}{t_n \cdot x_n} \cdot x_n \text{....limita neexistuje,} \\ x_n = 0 & \lim \frac{f(a+t_n \cdot 0) - f(a)}{t_n} = \lim \frac{0}{t_n} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Tedy jediným vektorem tohoto tvaru je $(0, 0)$. ■

Podle předchozího tvrzení je zřejmé, že pokud je funkce diferencovatelná, platí $f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a)$ a tedy $Df(a, f(a)) = \{(0, 0), (1, f'(a))\}$.

Příklad 100 *Uvažujme mnohoznačnou funkci* $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$

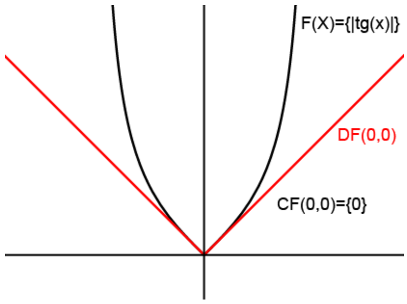
$$F(x) = \{|\operatorname{tg}(x)|\},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Určete Clarkovu derivaci v bodě $(0, 0)$.

Vždy platí, že $C_K(x) \subset T_K(x)$. V tomto případě není kontingentní kužel $T_K(x)$ konvexní, takže Clarkův kužel musí být jeho vlastní podmnožinou. Zde $\mathrm{CF}(0, 0) = \{(0, 0)\}$.
Chceme ukázat, že $(1, 1) \notin \mathrm{Graf}(\mathrm{CF}(0, 0))$. Pro spor podle tvrzení 96 i) zvolme $t_n = \frac{1}{n}$, $\bar{x}_n = -\frac{1}{n}$, $\bar{y}_n = |\operatorname{tg}(\bar{x}_n)| = \operatorname{tg}(\frac{1}{n})$. Pak libovolná posloupnost prvků $(x_n, y_n) \to (1, 1)$ splňuje: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|x_n - 1| < \varepsilon$, $|y_n - 1| < \varepsilon$.
Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Potom od nějakého n_0 dále je $|x_n - 1| < \frac{1}{2}$ a $y_n > 1 - \varepsilon = \frac{1}{2}$.
Podmínka $\bar{y}_n + t_n y_n \in F(\bar{x}_n + t_n x_n)$ zde má tvar

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \underbrace{y_n}_{>\frac{1}{2}} &= \left|\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n} x_n\right)\right| = \left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n} \underbrace{|x_n - 1|}_{<\frac{1}{2}}\right)\right|, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} &< \left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n}\right), \end{aligned}$$

což je spor.
Fakt, že $(-1, 1) \notin \mathrm{Graf}(\mathrm{CF}(0, 0)))$ se ukáže analogicky.
Podle tvrzení 67 je $\{0\} \in C_K(x)$ vždy, tedy zde $\mathrm{CF}(0, 0) = \{(0, 0)\}$.
♣



Obrázek 13: Derivace funkce $F(x) = \{|tg(x)|\}$.

Tvrzení 101 *Pro jednoznačnou funkci $F = f$ je* CF$(x)(u)$ *buď prázdnou nebo jednoprvkovou množinou. Konkrétně $Cf(x)(u) = f'(x)u$, pokud je f spojitě diferencovatelná v x.*
Podle [1, str. 189].

Každá mnohoznačná funkce má k sobě funkci inverzní a pro jejich derivace platí následující tvrzení.

Tvrzení 102 *Nechť $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce, $(x, y) \in \mathrm{Graf}(F)$. Platí*

i) $D(F^{-1})(y, x) = DF(x, y)^{-1}$,

ii) $C(F^{-1})(y, x) = CF(x, y)^{-1}$.

Podle [1, str. 182, 190].

Důkaz.

i) Podle tvrzení 90 i) je $(x, y) \in \mathrm{Graf}(DF(x, y))$ právě tehdy, když existují posloupnosti $t_n \to 0^+$, $(x_n, y_n) \subset X \times Y$, $(x_n, y_n) \to (x, y)$ tak, že $\bar{y} + t_n y_n \in F(\bar{x} + t_n x_n)$. Pro inverzní funkci platí $\bar{x} + t_n x_n \in F^{-1}(\bar{y} + t_n y_n)$, tedy $(y, x) \in \mathrm{Graf}(DF)^{-1}$.

ii) Důkaz probíhá analogicky s předchozí částí za použití tvrzení 96 i).

■

Definice 103 *Nechť X, Y jsou normované prostory, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce, $(\bar{x}, \bar{y}) \in graph(F)$.* ***Diniho derivací*** *rozumíme mnohoznačnou funkci $D_L F(\bar{x}, \bar{y}) : X \rightrightarrows Y$ takovou, že*

$$D_L F(\bar{x}, \bar{y})(x) = \liminf_{(\hat{x},t) \to (x,0^+)} \frac{F(\bar{x} + t\hat{x}) - \bar{y}}{t}.$$

Podle [5, str. 409].

Někdy se také používá termín Diniho dolní derivace, přičemž se pak kontingentní derivace nazývá Diniho horní derivace.

Tvrzení 104 *(Ekvivalentní definice Diniho derivace) Nechť X, Y jsou normované prostory, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce. $(x, y) \in \operatorname{Graf}(D_L F(\bar{x}, \bar{y}))$ právě tehdy, když pro všechny posloupnosti $\{t_n\}$, $t_n \to 0^+$ a $\{x_n\}$, $x_n \to x$ existuje posloupnost $\{y_n\}$ taková, že $\bar{y} + t_n y_n \in F(\bar{x} + t_n x_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*
Upraveno podle [5, str. 408].

Důkaz. Označme $G(\hat{x}, t) = \frac{F(\bar{x}+t\hat{x})-\bar{y}}{t}$. Pak podle tvrzení 10 pro limes inferior mnohoznačné funkce platí: $y \in D_L F(\bar{x}, \bar{y})(x)$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{(x_n, t_n)\}$, $(x_n, t_n) \to (x, 0^+)$ existuje $\{y_n\}$ tak, že $y_n \to y$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} y_n &\in G(x_n, t_n), \\ y_n &\in \frac{F(\bar{x} + t_n x_n) - \bar{y}}{t_n}, \\ \bar{y} + t_n y_n &\in F(\bar{x} + t_n x_n). \end{aligned}$$

■

Tvrzení 105 *Nechť X, Y jsou normované prostory, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce. $(x, y) \in \operatorname{Graf}(D_L F(\bar{x}, \bar{y}))$ právě tehdy, když*

$$\lim_{(\hat{x},t)\to(x,0^+)} d\left(\frac{F(\bar{x} + t\hat{x}) - \bar{y}}{t}, y\right) = 0.$$

Podle [5, str. 409].

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z lemmatu 13 ii. ■

Věta 106 *Nechť X, Y jsou normované prostory, $F : X \rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce, jejíž graf je konvexní množinou. Pak*

$$DF(x, y) = CF(x, y) = D_L F(x, y).$$

Podle [5, str. 409].

6.2 Od reálné funkce k mnohoznačné

Reálnou funkci můžeme studovat jako funkci mnohoznačnu pomocí $F(x) = \{f(x)\}$, jak již bylo zmíněno v předchozím textu. Dokonce nemusí platit $D_f(x) = \mathbb{R}$. Jednoduše vezmeme

$$F(x) = \begin{cases} \{f(x)\} & x \in D_f(x), \\ \emptyset & x \notin D_f(x), \end{cases}$$

Další možností je použít funkci nadgrafu.

Definice 107 *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je jednoznačná funkce, pak můžeme definovat **nadgraf funkce** f jako množinu*

$$\operatorname{epi} f = \left\{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \alpha \geq f(x)\right\}.$$

Tvrzení 108 *Nadgraf funkce $\operatorname{epi} f$ je konvexní množinou právě tehdy, když f je konvexní funkce.*

Důkaz. Důkaz plyne přímo z definice nadgrafu, konvexní funkce a konvexní množiny. ■

V práci [9, str. 30] bylo dokázáno následující tvrzení pro diferencovatelnou funkci.

Tvrzení 109 *Nechť* $K \subset \mathbb{R}$, $f : K \to \mathbb{R}$ *je jednoznačná funkce, definujme* $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *mnohoznačnou funkci takto*

$$\mathrm{Graf}(F) = \mathrm{epi}(f), \textit{ tedy } F(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}.$$

Nechť $a \in K$ *a* f *je diferencovatelná v* a. *Pak*

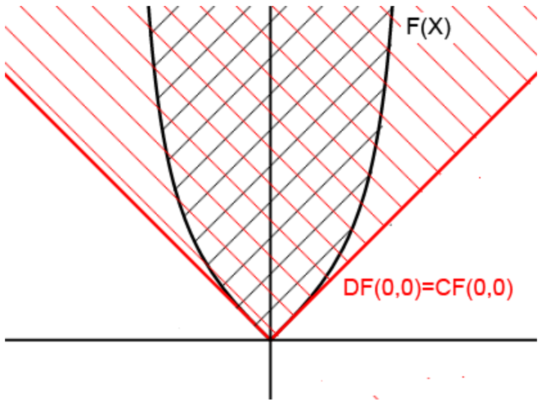
$$\mathrm{DF}(a, f(a)) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y \geq f'(a) \cdot x, x \in \mathbb{R}\}.$$

Příklad 110 *Bereme jednoznačnou funkci* f *z příkladu* 98. *Definujme mnohoznačnou funkci* $F = \mathrm{epi}(f) = \{(x, y) \mid y \geq |\operatorname{tg}(x)|\}$. *Určete kontingentní a Clarkovou derivaci v bodě* $(0, 0)$.

Kontingentní derivace je shodná s Clarkovou a platí

$$\mathrm{DF}(0, 0) = \mathrm{CF}(0, 0) = \{(x, y) \mid y \geq |x|\}.$$

To plyne z konvexity nadgrafu a následujícího tvrzení.



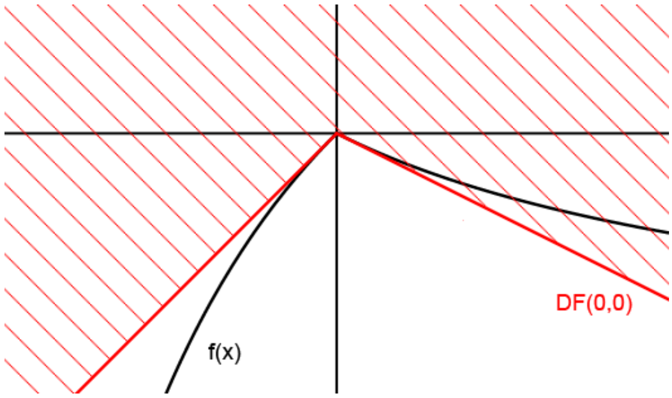
Obrázek 14: Ilustrace k příkladu 110.

Tvrzení 111 *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkce a* $\mathrm{Graf}\, F(x) = \mathrm{epi}\, f$. *Potom*

$$\mathrm{Graf}\, \mathrm{DF}(\bar{x}, \bar{y}) = \mathrm{Graf}\, \mathrm{DF}(\bar{x}, f(\bar{x})) = \mathrm{epi}\, Df(\bar{x}).$$

Důkaz. Zvolme x. Podle tvrzení 90 splňují body existují posloupnosti $t_n \to 0^+$, $x_n \to \bar{x}$. Ze spojitosti f plyne $f(x_n) \to f(x)$.

$$\begin{aligned}
(x, y) &\in \mathrm{Graf}(\mathrm{DF}(\bar{x}, f(\bar{x}))), & (x, y) &\in \mathrm{Graf}(Df(\bar{x}, f(\bar{x}))),\\
f(\bar{x}) + t_n y_n &\in F(\bar{x} + t_n x_n), & f(\bar{x}) + t_n y_n &= f(\bar{x} + t_n x_n),\\
f(\bar{x}) + t_n y_n &\geq f(\bar{x} + t_n x_n), & &\\
y_n &\geq \frac{f(\bar{x} + t_n x_n) - f(\bar{x})}{t_n}, & y_n &= \frac{f(\bar{x} + t_n x_n) - f(\bar{x})}{t_n},\\
y = \lim y_n &\geq Df(\bar{x}, f(\bar{x}))(x). & &
\end{aligned}$$



Obrázek 15: Kontingentní derivace nadgrafu.

A tvrzení zřejmě platí. ■

Jak je patrné z obrázku, kontingentní derivace nekonvexní funkce je nekonvexní množinou.

Analogické tvrzení pro Clarkovu derivaci CF neexistuje, jak ukazují příklady 100 a 110.

6.3 Koderivace

Definice 112 *Nechť $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ je mnohoznačná funkce, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Graf}(F)$. Definujme* ***koderivaci*** *$D^*F(\bar{x}, \bar{y})$ funkce F v bodě $(\bar{x}, \bar{y})$ jako mnohoznačnou funkci z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$*

$$D^*F(\bar{x}, \bar{y})(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, -y) \in N_{\mathrm{Graf}(F)}(\bar{x}, \bar{y})\}.$$

Podle [2, str. 324].

Definice 113 *Nechť $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ je mnohoznačná funkce, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Graf}(F)$. Pokud F je uzavřená, definujme* ***Clarkovu koderivaci*** *$C^*F(\bar{x}, \bar{y})$ funkce F v bodě $(\bar{x}, \bar{y})$ jako mnohoznačnou funkci z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$*

$$C^*F(\bar{x}, \bar{y})(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, -y) \in N^C_{\mathrm{Graf}(F)}(\bar{x}, \bar{y})\}.$$

Podle [5, str. 103].

Na rozdíl od grafu derivace není graf koderivace $D^*F(x, y)$ totožný s normálovým kuželem $N_{\mathrm{Graf}(F)}(x, y)$. Toto je způsobeno znaménkem mínus a také faktem, že se nejedná o funkci z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, ale naopak. Obrázek 16 ilustuje situaci.

Obrázek 16: K definici koderivace.

Tvrzení 114 *Nechť* $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ *je mnohoznačná funkce,* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Graf}(F)$. *Platí* $y \in D^*F(\bar{x}, \bar{y})(x) \Leftrightarrow -x \in D^*(F^{-1})(\bar{y}, \bar{x})(-y)$.
Podle [2, str. 327].

Důkaz. V následujících úvahách se jedná vždy o ekvivalence:
$y \in D^*F(\bar{x}, \bar{y})(x) \Leftrightarrow (y, -x) \in N_{\mathrm{Graf}(F)}(\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow (-x, -y) \in DF(\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (-y, -x) \in DF(\bar{x}, \bar{y})^{-1} = D(F^{-1})(\bar{y}, \bar{x}) \Leftrightarrow (-x, y) \in N_{\mathrm{Graf}(F^{-1})}(\bar{y}, \bar{x}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x \in D^*(F^{-1})(\bar{y}, \bar{x})(-y)$. ■

7 Derivace druhého řádu

7.1 Tečné kužely druhého řádu

Definice 115 *Nechť $K \subset X$ je podmnožinou normovaného vektorového prostoru X, $x \in K$ a $v_1, ..., v_{m-1} \in X$.* ***Kontingentním kuželem m-tého řádu*** *množiny K v bodě $(x, v_1, ..., v_{m-1})$ budeme rozumět množinu*

$$T_K^{(m)}(x, v_1, ..., v_{m-1}) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{K - x - hv_1 - ... - h^{m-1}v_{m-1}}{h^m}.$$

Podle [1, str. 171].

V této práci se budeme zabývat jen kužely druhého řádu, tedy

$$T_K^{(2)}(x, v) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{K - x - hv}{h^2}.$$

Zřejmě platí

$$T_K^{(1)}(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{K - x}{h} = T_K(x).$$

Tvrzení 116 *(Charakterizace kontingentního kuželu druhého řádu)*
$u \in T_K^{(2)}(x, v)$, právě když existují posloupnosti $\{h_n\}$, $h_n \to 0^+$ a $\{u_n\} \subset X$, $u_n \to u$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x + h_n v + h_n^2 u_n \in K$.
Upraveno podle [5, str. 171].

Důkaz. Podle tvrzení 11 o limes superior mnohoznačné funkce je $u \in T_K^{(2)}(x, v)$, právě když pro funkci $F(h) = \frac{K-x-hv}{h^2}$ existují posloupnosti $h_n \to 0^+, h_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $u_n \to u$ a platí

$$\begin{aligned} u_n &\in F(h_n), \\ u_n &\in \frac{K - x - h_n v}{h_n^2}, \\ x + h_n v + h_n^2 u_n &\in K. \end{aligned}$$

A tedy tvrzení platí. ■

Tvrzení 117 *Kontingentní kužel druhého řádu $T_K^{(2)}(x, v)$ je uzavřená množina.*
Podle [5, str. 172].

Důkaz. Plyne přímo z tvrzení 9 o uzavřenosti limes superior mnohoznačné funkce. ■

Tvrzení 118 *Nechť $K \subset X$, $x \in K$. Platí $T_K^{(2)}(x, 0) = T_K(x)$.*
Podle [5, str. 171].

Důkaz. Tvrzení se dokáže dosazením $v = 0$. ■

Tvrzení 119 *Nechť $K \subset X$, $x \in K$, $v \in X$. Platí:*

i) $v \notin T_K(x)$, *pak* $T_K^{(2)}(x, v) = \emptyset$,

ii) $T_K^{(2)}(x, v) \neq \emptyset$, *pak* $v \in T_K(x)$.

Podle [5, str. 172].

Důkaz.

i) Předpokládejme, že $v \notin T_K(x)$. Pak pro všechny posloupnosti $h_n \to 0^+$, $v_n \to v$ platí $x + h_n v_n \notin K$. Zvolme libovolně $u \in X$ a posloupnost $u_n \to u$. Označme $v_n = v + h_n u_n$. Pak $v_n \to v$ a $x + h_n v_n = x + h_n(v + h_n u_n) = x + h_n v + h_n^2 u_n \notin K$, a tedy $u \notin K$ a $T_K^{(2)}(x, v) = \emptyset$.

ii) Jedná se o obměnu předchozí implikace.

■

Tvrzení 120 *Nechť* $K \subset X$, $x \in \overline{K}$, $v \in T_K(x)$. *Pak*

$$T_K^{(2)}(x, v) = \{u \in X \mid \liminf_{h \to 0^+} \frac{d_K(x + hv + h^2 u)}{h^2} = 0\}.$$

Podle [5, str. 171].

Důkaz. Důkaz plyne přímo z tvrzení 13. ■

Tvrzení 121 *Nechť* $K \subset X$ *je konvexní,* $x \in \overline{K}$, $v \in T_K(x)$. *Potom* $T_K^{(2)}(x, v) \subset T_{T_K(x)}(v)$.
Podle [5, str. 187].

Důkaz. Zvolme $u \in T_{T_K(x)}(v)$, potom existují posloupnosti $\{h_n\}$, $h_n \to 0^+$, $\{u_n\}$, $u_n \to u$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N} : x + h_n v + h_n^{(2)} u_n \in K$. K je konvexní, tedy podle tvrzení 61 je $h_n v + h_n^2 u_n \in T_K(x)$. Z vlastností kužele plyne , že $v + h_n u_n \in T_K(x)$. Kontingentní kužel konvexní množiny je také konvexní. Opětovným použitím tvrzení 61 a vlastnosti kužele dostáváme $h_n u_n \in T_{T_K(x)}(v)$ a $u_n \in T_{T_K(x)}(v)$. Kontingentní kužel je uzavřenou množinou, tedy $u = \lim_{n \to \infty} u_n \in T_{T_K(x)}(v)$. Tím je tvrzení dokázáno. ■

Definice 122 *Nechť* $K \subset X$ *je podmnožinou normovaného vektorového prostoru* X, $x \subset K$ *a* $v_1, ..., v_{m-1} \in X$. ***Clarkovým kuželem m-tého řádu*** *množiny* K *v bodě* $(x, v_1, ..., v_{m-1})$ *budeme rozumět množinu*

$$C_K(x, v_1, ..., v_{m-1}) = \liminf_{h \to 0^+, y \to_K x} \frac{K - y - hv_1 - ... - h^{m-1} v_{m-1}}{h^m}.$$

Podle [1, str. 172].

7.2 Derivace druhého řádu

Definice 123 *Nechť X, Y jsou normované prostory a $F :\rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce. Pak **kontingentní derivace m-tého řádu** funkce F v bodě $(x, y) \in \mathrm{Graf}(F)$ je mnohoznačná funkce*

$$\mathrm{Graf}(D^{(m)}F(x, y, u_1, v_1, ..., u_{m-1}, v_{m-1})) = T^{(m)}_{\mathrm{Graf}(F)}(x, y, u_1, v_1, ..., u_{m-1}, v_{m-1}).$$

Podle [1, str 215].

V této práci se budeme zabývat pouze derivacemi druhého řádu, tedy zjednodušeně ***kontingentní derivace druhého řádu***:

$$\mathrm{Graf}(D^{(2)}F(x, y, u_1, v_1)) = T^{(2)}_{\mathrm{Graf}(F)}(x, y, u_1, v_1).$$

Tvrzení 124 *Nechť $K \subset X$, f je jednoznačná funkce, která má spojitou druhou derivaci na okolí bodu $x \in K$. Pak kontingentní derivace druhého řádu*

$$D^{(2)}(f|_K)(x, u_1)(u_2) = D^{(2)}(f|_K)(x, f(x), u_1, f'(x)u_1)(u_2) = f'(x)u_2 + \frac{1}{2}f''(x)(u_1, u_1),$$

pro $u_2 \in T^{(2)}_K(x, u_1)$.
Podle [1, str. 215].

Důkaz. Podle tvrzení 116 platí $(u_2, v_2) \in D^{(2)}F(x, y, u_1, v_1)$ právě tehdy, když existují posloupnosti $\{h_n\}$, $h_n \to 0^+$, $\{(u_{2n}, v_{2n})\}$, $(u_{2n}, v_{2n}) \to (u_2, v_2)$ takové, že

$$\begin{aligned}
(x, y) + h_n(u_1, v_1) + h_n^2(u_{2n}, v_{2n}) &\in \mathrm{Graf}\, F(x.y),\\
(x + h_n u_1 + h_n^2 v_{2n}, y + h_n v_1 + h_n^2 v_{2n}) &\in \mathrm{Graf}\, F(x, y),\\
y + h_n v_1 + h_n^2 v_{2n} &\in F(x + h_n u_1 + h_n^2 v_{2n}),\\
f(x) + h_n v_1 + h_n^2 v_{2n} &\in f(x + h_n u_1 + h_n^2 v_{2n}),\\
f(x) + h_n v_1 + h_n^2 v_{2n} &= f(x + h_n u_1 + h_n^2 v_{2n}).
\end{aligned}$$

Jelikož f je dvakrát diferencovatelná, můžeme pravou stranu upravit

$$f(x + h_n u_1 + h_n^2 v_{2n}) = f(x) + f'(x)\dot{(}h_n u_1 + h_n^2 u_{2n}) + \frac{1}{2} \cdot f''(x)(h_n u_1 + h_n^2 u_{2n})^2 + \varepsilon(h_n)h_n^2 =$$

(kde $\varepsilon(h_n) \to 0$ pro $h_n \to 0$),

$$= f(x) + f'(x)(h_n u_1) + f'(x)h_n^2 u_{2n} + \frac{1}{2}f''(x)(h_n^2 u_1^2 + 2h_n^3 u_{2n} + h_n^4 u_{2n}) + \varepsilon(h_n)h_n^2 =$$

$$f(x) + h_n f'(x)u_1 + h_n^2(f'(x)u_{2n} + \frac{1}{2}f''(x)u_1^2 + \varepsilon(h_n)).$$

Vraťme se zpět k rovnici

$$f(x) + h_n v_1 + h_n^2 v_{2n} = f(x) + h_n f'(x)u_1 + h_n^2 \left(f'(x)u_{2n} + \frac{1}{2}f''(x)u_1^2 + \varepsilon(h_n) \right),$$

$$v_{2n} = \frac{f'(x)u_1 - v_1}{h_n} + f'(x)u_{2n} + \frac{f''(x)}{2}u_1^2 + \varepsilon(h_n),$$

Jelikož $(u_1, v_1) \in Df(x, y)$ pak $v_1 = f'(x)u_1$ a $f'(x)u_1 - v_1 = 0$,

$$v_{2n} = 0 + f'(x)u_{2n} + \frac{f''(x)}{2}u_1^2 + \varepsilon(h_n),$$
$$v_2 = \lim v_{2n} = f'(x)u_2 + \frac{1}{2}f''(x)u_1^2.$$

■

Definice 125 *Nechť X, Y jsou normované prostory a $F :\rightrightarrows Y$ je mnohoznačná funkce. Pak **Clarkova derivace m-tého řádu** funkce F v bodě $(x, y) \in \mathrm{Graf}(F)$ je mnohoznačná funkce*

$$\mathrm{Graf}(C^{(m)}F(x, y, u_1, v_1, ..., u_{m-1}, v_{m-1})) = C^{(m)}_{\mathrm{Graf}(F)}(x, y, u_1, v_1, ..., u_{m-1}, v_{m-1}).$$

***Clarkova derivace druhého řádu** funkce F v bodě $(x, y) \in \mathrm{Graf}(F)$ je mnohoznačná funkce*

$$\mathrm{Graf}(C^{(2)}F(x, y, u_1, v_1)) = C^{(2)}_{\mathrm{Graf}(F)}(x, y, u_1, v_1).$$

8 Závěr

I přesto, že tato diplomová práce je rozšířením práce bakalářské, představuje stále jen jakýsi úvod do problematiky, navíc jen z jednoho úhlu pohledu. Kromě zavedení Diniho derivace pomocí limity je totiž celý systém založen na grafickém přísupu derivace pomocí tečného kuželu. To ovšem umožňuje vysokou názornost prováděných operací, proto jsem se ho držela.

Pravděpodobně nejvíce používanými pojmy a tvrzeními jsou definice limes superior a inferior mnohoznačné funkce a jejich charakteristiky pomocí posloupnosti. Na samotné tečné kužely totiž můžeme nahlížet jako na mnohoznačné funkce a tak zkoumat jejich vlastnosti.

Jelikož celá problematika nemá pevně zavedenou terminologii a značení, bylo někdy obtížné se orientovatve zdrojích, zvláště když autoři používají různé definice. Někde se jedná jen o drobnou změnu, jako například definice derivace druhého řádu v knihách [5, 1], někde se jedná o úplně rozdílný přístup, jako například definice Clarkova kuželu v knihách [1, 8, 2]. V takovém případě jsem vždy vybrala jednu a podle ní změnila definice dalších pojmů, kde je označeno, že jsou upravené.

V dalším studiu bych se ráda zaměřila na tzv. epiderivaci, její propojení s již známými pojmy a také tvrzení, která umožňují použití teorie k praktickým účelům, jako je například hledání optimálního řešení, tj. minima v problémech popsaných mnohoznačnými funkcemi.

Seznam obrázků

Seznam použité literatury

1. J.-P. Aubin, H. Frankowska. *Set-Valued Analysis.* Birkhäuser, Boston, Berlin, Basel 1990. ISBN 3-7643-3478-9.

2. R.T. Rockafellar, R. J-B. Wets. *Variational analysis.* Springer Berlin 1998. ISBN 3-540-62772-3.

3. J.M. Borwein, J.D. Vanderwerff. *Convex functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples.* Cambridge University Press, Cambridge 2010. ISBN 978-0-521-85005-6.

4. DOŠLÝ, Ondřej. *Základy konvexní analýzy a optimalizace v* $\mathbb{R}^n$ [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2004.
   Dostupné z: `http://www.math.muni.cz/∼dosly/kap1-4.pdf`.

5. A. A. Khan, Ch. Tammer, C. Zalinescu. *Set-valued optimization: An Introduction with Applications.* Springer Berlin 2015. ISBN 978-3-642-54265-7.

6. R. R. Phelps. *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability.* 2nd Edition. Springer Berlin 1993. ISBN 0-387-56715-1.

7. Hladík, Milan. *Tečné a normálové kužele* [online]. Praha: Univerzita Karlova, 2010. Dostupné z: `http://kam.mff.cuni.cz/∼hladik/doc/cones.pdf`.

8. F. Clarke. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control.* Springer, London 2013. ISBN 978-1-4471-4819-7.

9. BORŮVKOVÁ, Veronika. *Derivace mnohoznačných funkcí.* Hradec Králové, 2014. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí práce doc. Mgr. Dušan Bednařík, Ph.D. 37s.