Univerzita Palackého v Olomouci

Přírodovědecká fakulta

Katedra algebry a geometrie

Bakalářská práce

MNOHOSTĚNY

(Polyhedrons)

Vypracovala: Jana Jiříčková, M-Dg, III. ročník

Vedoucí práce: prof. RNDr. Josef Molnár, CSc.

Rok: 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci zpracovala sama pod vedením prof. RNDr. Josefa Molnára, CSc. a v seznamu použité literatury jsem uvedla všechny zdroje použité při zpracovávání této práce.

V Olomouci dne: ....

Poděkování

Zde bych chtěla poděkovat vedoucímu své bakalářské práce panu prof. RNDr. Josefu Molnárovi, CSc. za jeho vedení, odbornou pomoc, cenné rady a čas strávený nad společnými konzultacemi.

OBSAH

Úvod

Pro svou bakalářskou práci jsem si zvolila téma Mnohostěny. Jejím cílem je vytvořit částečný přehled mnohostěnů, popsat jejich vlastnosti, sítě a ukázat kde se s nimi setkáme v přírodě, dále také připravit náměty pro výuku mnohostěnů na středních školách.

Tato bakalářská práce má tři části. První dvě části se zabývají teoretickou stránkou zvoleného tématu, kde je třeba informovat čtenáře o tom, co to mnohostěny jsou, jaké jsou jejich základní vlastnosti, jaké známe druhy a například kde se s nimi můžeme setkat v běžném životě. U teoretických částí se předpokládá, že má čtenář znalost základních pojmů vztahující se obecně k tělesům. Třetí část se zabývá návrhy a příklady pro vyučování mnohostěnů na střední škole. Jsou to příklady např. na existenci mnohostěnů, na výpočet jejich objemů a obsahů a některé praktické úlohy. V současnosti se toto téma na středních školách prakticky nevyučuje, vyloučíme-li ta nejjednodušší tělesa, proto bylo pro mě zajímavé tyto návrhy vytvářet. Předpokládala jsem, že žák střední školy má již za sebou zvládnuté učivo spojené s upravováním výrazů, mocnin, odmocnin a veškeré rovnice, také učivo trigonometrie, goniometrické funkce a učivo stereometrie. Všechny uvedené příklady v třetí části jsem si navrhovala a vypočítala sama, popř. jsem se nechala inspirovat literaturou.

Existují mnohostěny s konečným i nekonečným počtem stěn. Vždy záleží na volbě hraničních mnohoúhelníků – uzavřené či otevřené. Mnohostěny s nekonečným počtem stěn jsou např. tzv. „mříže". Celá tato práce se však omezuje na mnohostěny v 3D prostoru, které mají konečný počet stěn, jež jsou uzavřené mnohoúhelníky. Přehled mnohostěnů v této práci tudíž není úplný, popisuje pouze mnohostěny, které jsou svým způsobem zajímavé a jistým způsobem „pravidelné". Čtenáře se zájmem o mnohostěny s nekonečným počtem stěn odkazuji na literaturu od Machačíkové, Molnára (2011).

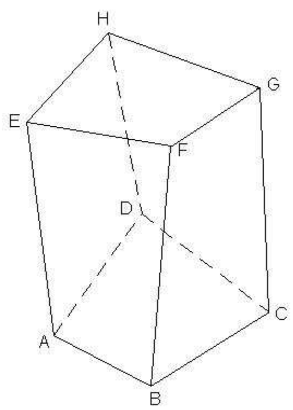
Ke zpracování práce jsem používala odbornou literaturu a internet. Hlavním zdrojem pro mě byla kniha Extremální a kombinatorické úlohy z geometrie. Ilustrační obrázky jsou narýsovány v programu DesignCAD, obrázky stažené z internetu jsou upraveny v programu Adobe Illustrator a celý tento text pak vysázen a zpracován v MS Office Word.

I. Základní pojmy

Pod pojmem mnohostěn si každý z nás vybaví jedno – těleso. Lze ho vnímat mnoha způsoby a každý si toto těleso představí jinak. Pravdou je, že mnohostěnů je nekonečná spousta a neexistuje jen jediná správná definice, která by tento pojem definovala, naopak je jich celá řada. Např. „Mnohostěn je část prostoru omezená mnohoúhelníky, kterým říkáme stěny mnohostěnu." (Molnár, Kobza, 1990). Mnohostěn s konečným počtem těchto mnohoúhelníků je část prostoru omezená konečným počtem rovin. Nejméně však čtyřmi, neboť, jak se následně dozvíme, nejmenší možný počet stěn jednoho tělesa je čtyři (čtyřstěn).

Mnohostěn se skládá z (obr. 1):

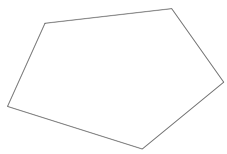
- stěna – mnohoúhelník tvořící část hranice (např. ABCD, BCFG,…), sousedními stěnami nazýváme takové stěny, které mají společnou hranu (např. DCGH a ABCD,…),
- hrana – strana stěny hraničního mnohoúhelníku (např. EF, HD,…), sousedními hranami nazýváme hrany se společným vrcholem (např. DC a BC,…),
- vrchol – vrchol hraničního mnohoúhelníku (např. A, B, C,…), sousedními vrcholy nazýváme ty, které leží na jedné hraně (např. H a G,…),
- hranice – sjednocení všech stěn mnohoúhelníků ohraničujících daný mnohostěn (ABCDEFGH),
- stěnová úhlopříčka – úsečka spojující dva nesousední vrcholy jedné stěny (např. BF,…),
- tělesová úhlopříčka – úsečka, která spojuje dva vrcholy neležící v jedné stěně (např. BH,…),
- hranový úhel – je vnitřní úhel hraničního mnohoúhelníku (např. úhel EAB,…),
- stěnový úhel – je úhel, který svírají roviny dvou sousedních stěn.

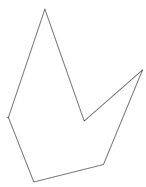


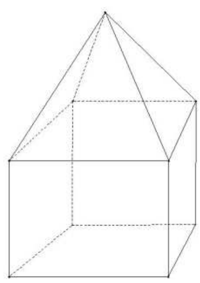
obr. 1

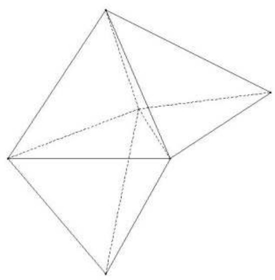
Na obr. 1 je tzv. prostý mnohostěn. Znamená to, že jeho stěny jsou tvořeny prostými mnohoúhelníky, žádné jeho nesousední stěny nemají společný bod s výjimkou vrcholu a společnou hranu mají právě dvě sousední stěny.

Dalšími pojmy, kterými se budeme zabývat, jsou konvexní a nekonvexní mnohostěny a pravidelné a nepravidelné mnohostěny. Konvexním mnohostěnem budeme rozumět takové těleso, jehož stěny budou tvořeny konvexními mnohoúhelníky (obr. 2a) a spojíme-li jeho dva libovolné body úsečkou, bude mu celá tato úsečka náležet. Nekonvexní mnohostěn je pak takový, který tuto vlastnost nesplňuje. Nekonvexní mnohostěn ovšem může být tvořen jak konvexními tak nekonvexními mnohoúhelníky (obr. 2b). Na obr. 3a a 3b jsou znázorněny mnohostěny, první konvexní a druhý nekonvexní, které jsou oba tvořeny jen konvexními n-úhelníky. Každý konvexní mnohostěn dále splňuje i vlastnost, že je prostý. Pro definování pravidelnosti a nepravidelnosti musíme znát nejdříve pojem valence vrcholu. Valence vrcholu je počet hran vycházejících z tohoto vrcholu. Ne vždy však platí, že všechny vrcholy mnohostěnu mají stejnou valenci. Pravidelný mnohostěn má všechny své hrany stejně dlouhé (tvoří jej pravidelné n-úhelníky – všechny své strany a vnitřní úhly mají stejně velké) a z každého vrcholu mu vychází stejný počet hran, tedy všechny jeho vrcholy mají stejnou valenci. Kdežto nepravidelný mnohostěn má hrany různé délky a různé valence vrcholů. Existují však taková tělesa, která by někdo za pravidelná mylně mohl považovat, neboť u nich jakási pravidelnost existuje, a která se neřadí ani do nepravidelných mnohostěnů. Např. tělesa, která mají všechny své stěny shodné mnohoúhelníky nebo různé pravidelné n-úhelníky.


obr. 2a


obr. 2b


obr. 3a


obr. 3b

1. Vlastnosti mnohostěnů

Vlastnosti mnohostěnů jsou vztahy, kterými popisujeme stěny, hrany a vrcholy mnohostěnů. Existuje jich celá řada, populární jsou např. Eulerova charakteristika, Descartovy rovnosti, Steinitzova věta, Cauchyova věta, atd. Některé z nich si následně popíšeme.

Označme: s – počet všech stěn mnohostěnu,

h – počet všech hran mnohostěnu,

v – počet všech vrcholů mnohostěnu. Číslo $s + v - h = \chi$ se nazývá Eulerova charakteristika (Eulerovo číslo) mnohostěnu (L. Euler (1707 – 1783)).

Obecně popisuje Eulerova charakteristika určitý typ topologického prostoru. Pro konvexní mnohostěny v třírozměrném euklidovském prostoru E_3 je χ vždy rovno 2. Existují však i nekonvexní mnohostěny, pro které je χ také rovno 2. Mnohostěnům, které mají $\chi = 2$, říkáme Eulerovy (eulerovské) mnohostěny.

Označme: p – počet hran vycházejících z jednoho vrcholu (valence vrcholu),

q – počet hran jedné stěny.

Je-li p, q konstantní pro všechny stěny a vrcholy mnohostěnu, pak pro $\chi = 2$ platí vztahy:

$$2h = p \cdot v = q \cdot s => \chi = 2 = \frac{2h}{p} - h + \frac{2h}{q}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

Důkaz:

$$2 = 2h\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}\right) => \frac{1}{h} + \frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

Další vztahy, které se v topologii používají např. při určování počtu všech mnohostěnů, které můžeme vytvořit z daného počtu stěn, hran nebo vrcholů:

Vztah $2h = q \cdot s \geq 3s$ platí pro každý konvexní mnohostěn a plyne z něj také Steinitzova věta, která říká, že platí-li pro každou trojici čísel *s, h, v* vztahy $2h \geq 3s, 2h \geq 3v$ a Eulerův vztah $s + v - h = 2$, pak existují mnohostěny, které mají *s* stěn, *v* vrcholů a *h* hran.

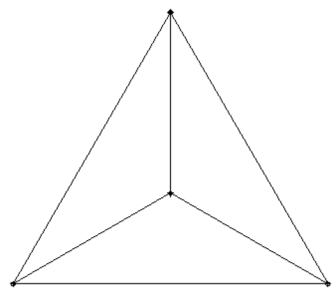
Pro konvexní mnohostěny platí také vztahy, které vyplývají z již známých nerovností a Eulerovy charakteristiky:

$$\tfrac{1}{2}s + 2 \leq v \leq 2s - 4, \tfrac{1}{2}v + 2 \leq s \leq 2v - 4$$

$$\tfrac{1}{3}h + 2 \leq s \leq \tfrac{2}{3}h, \tfrac{1}{3}h + 2 \leq v \leq \tfrac{2}{3}h$$

2. Zobrazování mnohostěnů

Pro znázorňování mnohostěnů používáme různé typy technik. Kromě známých zobrazovacích metod jako je kótované promítání, Mongeova projekce, axonometrie, kosoúhlé promítání, aj., je také velice užitečná technika tzv. Schlegelova diagramu. Jedná se o „středový průmět vrcholů a hran daného tělesa na jednu jeho stěnu tak, aby průměty všech ostatních vrcholů ležely uvnitř této stěny“ (Molnár, Kobza, 1990). Znamená to, že obrys Schlegelova diagramu bude odpovídat jeho jedné stěně a všechny ostatní budou středově zobrazeny v ní. Na obr. 4 je znázorněn Schlegelův diagram pro nejjednodušší z mnohostěnů – čtyřstěn. V dalších kapitolách si ukážeme tyto diagramy pro mnohem složitější mnohostěny. Další metoda používaná pro znázornění mnohostěnů je tzv. incidenční matice, která podle počtu stěn a vrcholů jednotlivé mnohostěny charakterizuje.



obr. 4

II. Dělení a typy mnohostěnů

Nyní se již můžeme seznámit s konkrétními typy mnohostěnů, jejich vlastnostmi, sítěmi a podobami. Při rozdělování mnohostěnů do jednotlivých skupin jsem postupovala od těch nejpravidelnějších až po ty nejméně pravidelné, přičemž jsem vycházela ze všeobecně ustáleného dělení těles a z poznatků autorů jako jsou Molnár, Kobza (1990), Doležalová (2010), atd.

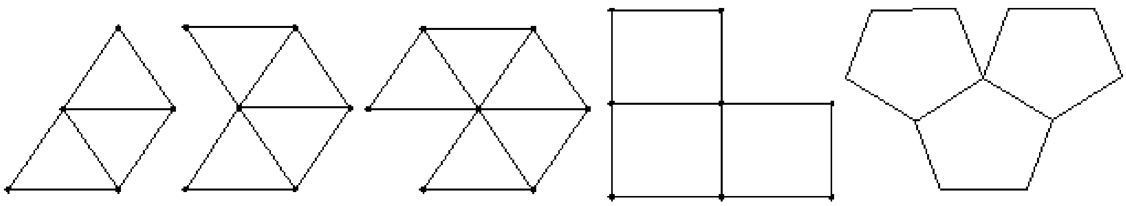
1. Platónská tělesa

Každý konvexní mnohostěn, jehož stěny jsou shodné konvexní pravidelné n-úhelníky a všechny jeho vrcholy mají stejnou valenci, se nazývá platónské těleso.

Tyto mnohostěny měly důležitou roli již v době na přelomu 5. a 4. st. p. n. l., znali je matematici, jako byli Theaitetos z Athén a Pythagoras. Proč je tedy nazýváme platónská tělesa? Platón dal těmto tělesům nový filozofický směr. Věřil, že atomy živlů, z kterých je tvořen svět, mají tvar pravidelných konvexních mnohostěnů. Tedy, že čtyřstěn představuje oheň, krychle zemi, osmistěn vzduch a dvacetistěn vodu. Speciálně dvanáctistěn považoval za představitele jsoucna, neboli všeho co existuje, tedy toho co jest.

Jak jsem již naznačila, těchto těles je právě pět. Všechna mají Eulerovu charakteristiku $\chi = 2$ a nazývají se pravidelný čtyřstěn, krychle (pravidelný šestistěn), pravidelný osmistěn, pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn. Nyní si ukážeme, že těchto pravidelných konvexních těles je jen a pouze pět.

Zamyslíme-li se nad tím, že pravidelné těleso tvoří pravidelné mnohoúhelníky, které mají všechny strany stejně dlouhé a všechny vnitřní úhly stejně velké, uvědomíme si také, že pravidelné těleso musí mít stejně dlouhé hrany a stejně velké vnitřní úhly. Mnohostěn lze složit z n-úhelníku, kde pro jeden vrchol je $n \geq 3$ a pro součet vnitřních úhlů σ těchto n-úhelníků při jednom vrcholu musí platit $180° \leq \sigma < 360°$. Nejjednodušší těleso je tvořeno čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky (čtyřstěn). Tedy z jednoho vrcholu vychází tři hrany. Těleso, ve kterém se v jednom vrcholu stýkají čtyři pravidelné trojúhelníky, se nazývá osmistěn. Pravidelný dvacetistěn je tvořen také trojúhelníky, které mají vždy po pěti společný vrchol. Další těleso tvořené rovnostrannými trojúhelníky neexistuje, neboť položíme-li šest rovnostranných trojúhelníku tak, aby měly jeden společný vrchol, budou všechny ležet vždy v jedné rovině a vznikne pravidelný šestiúhelník. Proto více než pět trojúhelníku pro jeden vrchol vylučujeme ($6 \cdot 60° = 360°$). Další mnohoúhelník tvořící pravidelné těleso je čtverec. Čtverce tvoří právě jeden mnohostěn a to krychli. V krychli vychází z jednoho vrcholu tři čtverce. Jen dva čtverce z jednoho vrcholu vycházet nemohou, nedostali bychom uzavřené těleso, a kdyby z něho měly vycházet čtyři čtverce, dostaneme opět rovinný útvar a to čtverec ($4 \cdot 90° = 360°$). Pro pravidelné pětiúhelníky dostaneme také právě jeden pravidelný mnohostěn – dvanáctistěn, kde se v jednom vrcholu stýkají právě tři pětiúhelníky. Jen dva rovinné útvary z jednoho vrcholu vycházet nemohou a čtyři pětiúhelníky by se v jednom vrcholu již nikdy nemohly setkat ($4 \cdot 108° = 432° > 360°$). Pro další mnohoúhelníky jako jsou šestiúhelníky, atd. již pravidelnost vylučujeme, neboť ze dvou rovinných útvarů nikdy těleso nevytvoříme a jejich vnitřní úhly jsou vždy větší než $120°$ proto by se v jednom vrcholu ani nesetkaly (např. pro šestiúhelníky by platilo$3 \cdot 120° = 360°$ - tři vytvoří rovinný útvar). Na obr. 5 vidíme důkaz znázorněn graficky. Z každého vrcholu nějakého pravidelného mnohostěnu vychází buď tři, čtyři nebo pět rovnostranných trojúhelníků, tři čtverce nebo tři pravidelné pětiúhelníky.



obr. 5 – čtyřstěn, osmistěn, dvacetistěn, šestistěn, dvanáctistěn

Tento důkaz také můžeme provést výpočtem odvozeným z vlastností mnohostěnů pomocí vztahu $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} > \frac{1}{2}$, neboť víme, že u pravidelných mnohostěnů musí platit stejná valence, tzn., že z každého vrcholu vychází vždy stejný počet hran a také musí platit, že *p, q* jsou konstantní pro všechny stěny i vrcholy. Tabulka 1. nám to ukazuje názorněji.

tabulka 1. – důkaz počtu platónských těles

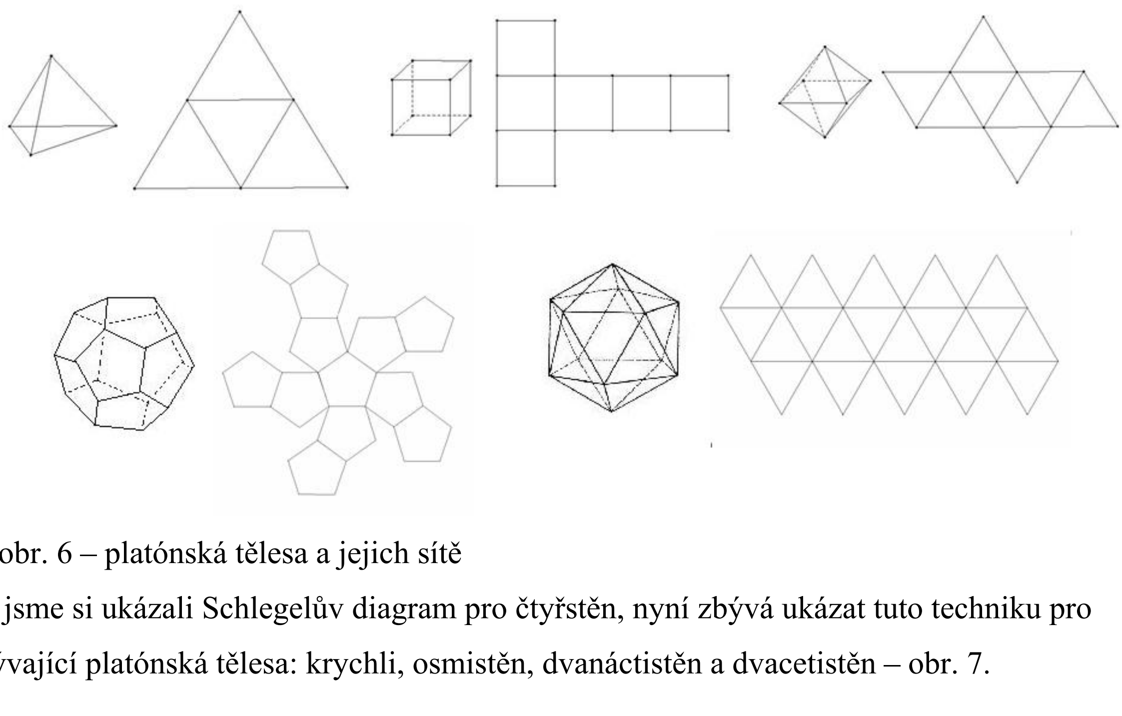
p – valence vrcholu	*q – počet hran stěny*	$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$	*výsledek*
3	3	$\frac{2}{3}$	čtyřstěn
3	4	$\frac{7}{12}$	krychle
4	3	$\frac{7}{12}$	osmistěn
4	4	$\frac{1}{2}$	takové těleso neexistuje

3	5	$\frac{8}{15}$	dvanáctistěn
5	3	$\frac{8}{15}$	dvacetistěn
4	5	$\frac{9}{20} < \frac{1}{2}$	takové těleso již neexistuje

Dokázali jsme tedy, že pravidelných konvexních těles tvořených pravidelnými konvexními mnohoúhelníky s vrcholy téže valence je pouze pět a další už neexistují. Nyní si je shrneme v tabulce 2. Na obr. 6 vidíme všech pět těles vyobrazených ve volném rovnoběžném promítání a jejich sítě.

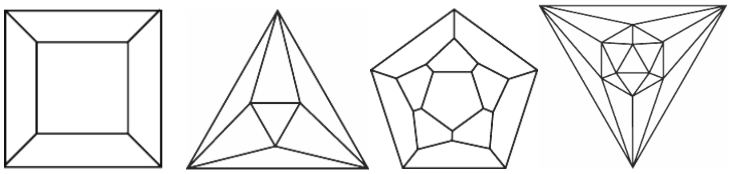
tabulka 2. – přehled platónských těles

pravidelný konvexní mnohostěn (mezinárodní název)	*s – počet stěn*	*v – počet vrcholů*	*h – počet hran*	*p – valence vrcholu*	*q – počet hran stěny*
čtyřstěn (tetraedr)	4	4	6	3	3
krychle (hexaedr)	6	8	12	3	4
osmistěn (oktaedr)	8	6	12	4	3
dvanáctistěn (dodekaedr)	12	20	30	3	5
dvacetistěn (ikosaedr)	20	12	30	5	3



obr. 6 – platónská tělesa a jejich sítě

Již jsme si ukázali Schlegelův diagram pro čtyřstěn, nyní zbývá ukázat tuto techniku pro zbývající platónská tělesa: krychli, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn – obr. 7.

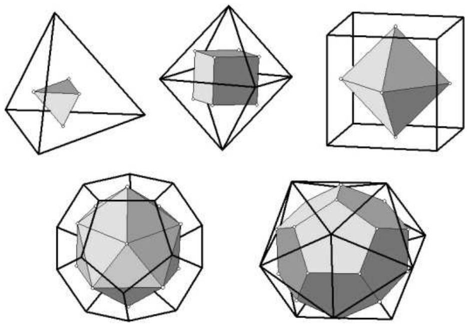


obr. 7

Vlastnosti platónských těles:

Mějme dán platónský mnohostěn M_i, středy jeho stěn označme S_i a vrcholy V_i. Pak k mnohostěnu M_1 existuje také mnohostěn M_2, který lze mnohostěnu M_1 vepsat (resp. opsat) tak, že vrcholy V_2 (resp. středy stěn S_2) mnohostěnu M_2 se budou rovnat středům stěn S_1 (resp. vrcholům V_1) mnohostěnu M_1. Mnohostěny M_1 a M_2 nazveme duální mnohostěny. V tabulce. 2 si můžeme všimnout, že počet vrcholů u jednoho tělesa se rovná počtu stěn u druhého tělesa a naopak, přičemž jejich počty hran jsou stejné, takovými dvojicemi jsou krychle s osmistěnem a dvanáctistěn s dvacetistěnem, čtyřstěn je pak duální sám se sebou – obr. 8.

Každé platónské těleso lze vepsat i opsat kouli. V rovině můžeme každému pravidelnému n-úhelníku opsat kružnici tak, že najdeme střed tohoto n-úhelníku a vzdálenost vrcholu od středu je rovna poloměru kružnice opsané a vzdálenost od středu tohoto n-úhelníku ke středu jeho strany je poloměr kružnice vepsané tomuto n-úhelníku. V prostoru opisujeme, (resp. vepisujeme), pravidelným tělesům kouli na stejném principu. Najdeme „střed" mnohostěnu (řezem tělesa rovinou souměrnosti je n-úhelník, jehož střed kružnice opsané (či vepsané) je i středem koule tomuto tělesu opsané (či vepsané)), pak vzdálenost tohoto středu od libovolného vrcholu mnohostěnu je rovna poloměru koule mnohostěnu opsané a vzdálenost středu mnohostěnu od libovolného středu jeho stěny je velikost poloměru koule tomuto mnohostěnu vepsané.



obr. 8

V přírodě se tato tělesa často objevují hlavně ve vazbách atomů minerálů. Např. krychli tvoří krystalová soustava soli kamenné, tvar osmistěnu má krystalová soustava diamantu, krystaly pyritu tvoří dvanáctistěn a bór krystalizuje ve dvacetistěnech. Podíváme-li se do říše živočichů, narazili bychom na skupinu zvanou Mřížovci, kteří jsou ukázkou téměř dokonalých platónských těles.

2. Archimédovská tělesa

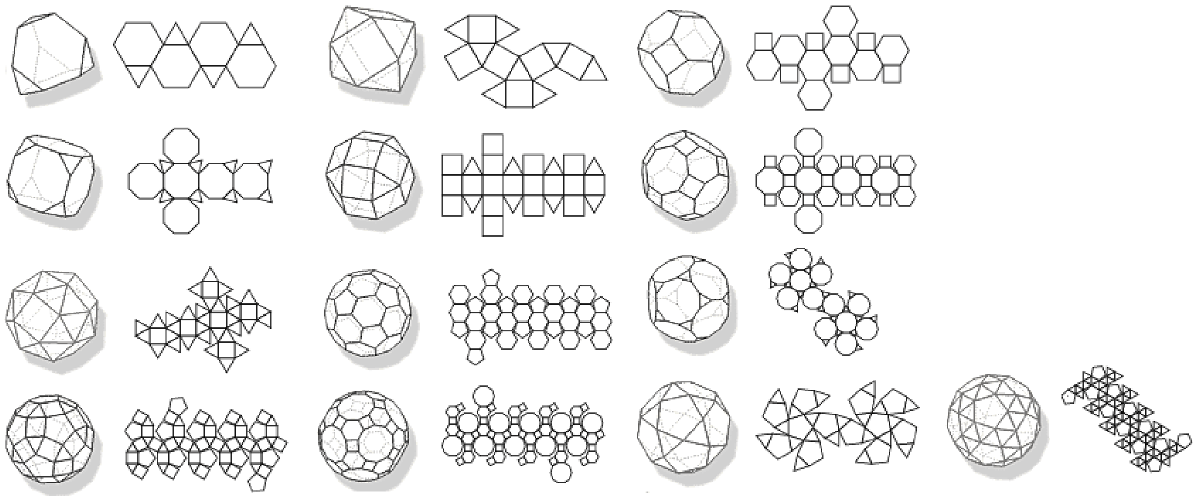
Každý konvexní mnohostěn, který lze vytvořit „ořezáním“ vrcholů nebo hran některého platónského tělesa tak, aby stěny byly pravidelné konvexní mnohoúhelníky, se nazývá archimédovské těleso.

Takto označené polopravidelné tělesa vzniknou ořezáním pravidelných konvexních mnohostěnů nebo ořezáním sebe samých. Jde o speciální skupinu těles, jejichž řezy rovinou souměrnosti jsou pravidelné n-úhelníky. Třináct takových mnohostěnů popsal Archimédes (287 – 212 př. n. l), proto jsou po něm také pojmenovány. V tabulce 3. si tyto mnohostěny shrneme a na obr. 9 ukážeme spolu s jejich sítěmi.

tabulka 3. – přehled archimédovských těles

polopravidelný konvexní mnohostěn	*s – počet a typy stěn*	*v – počet vrcholů*	*h – počet hran*	*p – valence vrcholu*
ořezaný tetraedr	4 trojúhelníky, 4 šestiúhelníky	12	18	3
kuboktaedr	8 trojúhelníků, 6 čtverců	12	24	4
ořezaný oktaedr	6 čtverců, 8 šestiúhelníků	24	36	3
ořezaná krychle	8 trojúhelníků, 6 osmiúhelníků	24	36	3
rombokuboktaedr	8 trojúhelníků, 18 čtverců	24	48	4
ořezaný kuboktaedr	12 čtverců, 8 šestiúhelníků, 6 osmiúhelníků,	48	72	3
ikosadodekaedr	20 trojúhelníků, 12 pětiúhelníků	30	60	5
ořezaný ikosaedr	12 pětiúhelníků, 20 šestiúhelníků	60	90	3
ořezaný dodekaedr	20 trojúhelníků, 12 desetiúhelníků	60	90	3
romboikosadodekaedr	20 trojúhelníků, 30 čtverců, 12 pětiúhelníků	60	120	4
ořezaný ikosadodekaedr	30 čtverců, 20 šestiúhelníků, 12 desetiúhelníků	120	180	3
otupená krychle	32 trojúhelníků, 6 čtverců	24	60	4

otupený dodekaedr	80 trojúhelníků, 12 pětiúhelníků	60	150	5

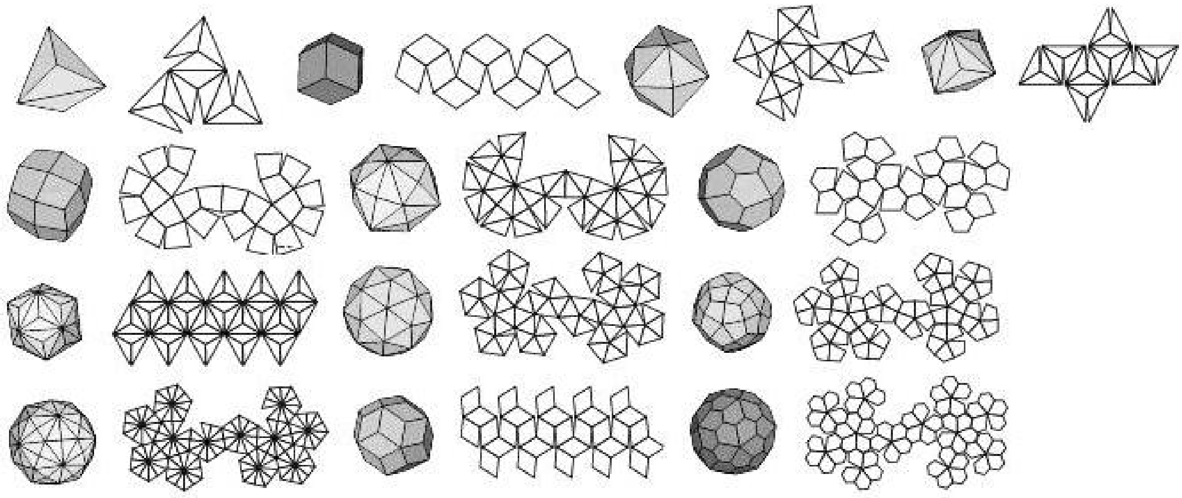


obr. 9

Vlastnosti archimédovských těles:

Stejně jako všechny pravidelné mnohostěny mají svá duální tělesa tak i archimédovské mnohostěny mají svá duální tělesa. Na rozdíl však od pravidelných mnohostěnů, které mají své dvojice tvořeny mezi sebou nebo se sebou samými, duální archimédovská tělesa tvoří skupinu nových těles, které poprvé popsal v roce 1865 matematik Eugene Catalan, proto se jim říká katalánská tělesa. Na obr. 10 jsou seřazena k tělesům podle tabulky 3. Katalánská tělesa jsou skupinou těles, jejichž stěny již ve většině případů netvoří pravidelné n-úhelníky, nýbrž lichoběžníky, kosoúhlé rovnoběžníky a trojúhelníky, proto se o těchto tělesech zmiňuji jen okrajově.

Každé archimédovské těleso má roviny souměrnosti. To vyplývá z faktu, že jsou tato tělesa tvořena pravidelnými n-úhelníky a všechny jejich vrcholy mají stejnou valenci. Také to vyplývá z faktu, že jsme tato tělesa získali pomocí platónských těles. Neplatí však, že můžeme archimédovským tělesům opsat či vepsat kouli. Ověřili bychom to řezem rovinou souměrnosti, jehož „střed“ nemá ke všem svým vrcholům ani ke všem svým středům stěn stejnou vzdálenost.



obr. 10 – duální tělesa k archimédovským mnohostěnům

S většinou těchto těles se nikdy v běžném životě nesetkáme, nicméně jsou mezi nimi i takové, které jsou v podstatě docela běžné. Jedná se zejména o ořezaný ikosaedr, s nímž jsme se setkali téměř všichni a to při fotbalu, jelikož tímto tělesem byla inspirována výroba fotbalového míče. Za zmínku stojí i ořezaná krychle, která v podstatě přibližuje tvar hrací kostky ale také strukturu některých minerálů jako jsou fluorit, galenit. Většinu těchto těles pak v přírodě tvoří nejrůznější sloučeniny.

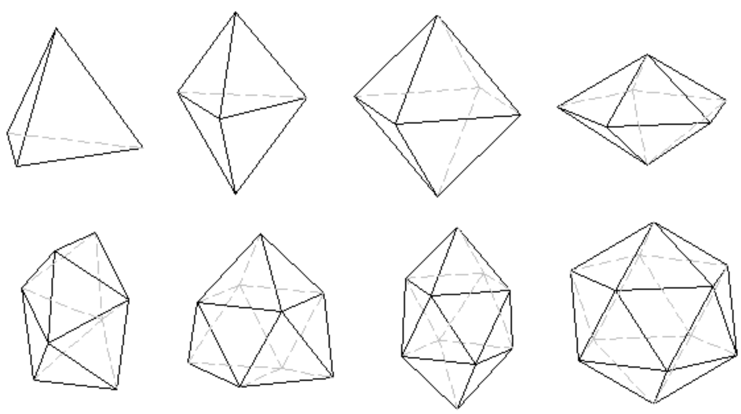
3. Deltatopy

Konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky, se nazývá deltatop.

I když se mezi ně řadí i čtyřstěn a dvacetistěn, tak se vždy nejedná jen o pravidelné mnohostěny, neboť na rozdíl od pravidelných mnohostěnů nevychází z každého vrcholu deltatopu vždy stejný počet hran (není stejná valence u všech vrcholů). Tato tělesa dostala název podle řeckého delta - Δ. Deltatopů je právě osm (tabulka 4. a obr. 11).

tabulka 4. – přehled deltatopů

konvexní deltatopy	*valence*	*s – počet stěn*	*v – počet vrcholů*	*h – počet hran*
čtyřstěn	pravidelný	4	4	6
dvojitý čtyřstěn	ze 2 vrcholů vycházejí 3 hrany a ze 3 vrcholů 4 hrany	6	5	9
osmistěn	pravidelný	8	6	12
dvojitý pětiboký jehlan	z 5 vrcholů vycházejí 4 hrany a ze 2 vrcholů 5 hran	10	7	15
siamský dvanáctistěn	ze 4 vrcholů vycházejí 4 hrany a ze 4 vrcholů 5 hran	12	8	18
delta-čtrnáctistěn	ze 3 vrcholů vycházejí 4 hrany a z 6 vrcholů 5 hran	14	9	21
delta-šestnáctistěn	ze 2 vrcholů vycházejí 4 hrany a z 8 vrcholů 5 hran	16	10	24
dvacetistěn	pravidelný	20	12	30



obr. 11

V tabulce 4. si také můžeme všimnout, že „chybí“ mnohostěn s 18 stěnami, 11 vrcholy a 27 hranami. Neznamená to, že takový mnohostěn neexistuje. Neexistuje však takový deltatop. Deltatop s 18 stěnami, které by byly rovnostranné trojúhelníky, by musel mít aspoň v jednom vrcholu styk 6 hran a u platónských těles jsme si řekli, že 6 rovnostranných trojúhelníků tvoří rovinu. Tabulka 4. končí deltatopem se 20 stěnami, v jehož každém vrcholu se stýká 5 hran. Tzn., že další deltatop již neexistuje, neboť by se opět aspoň v jednom vrcholu muselo stýkat 6 hran.

Vlastnosti deltatopů:

Všechny stěny jednoho deltatopu mají konstantní počet hran $q = 3$. Tato vlastnost vyplývá přímo z definice, neboť všechny stěny jsou pravidelné trojúhelníky.

Opět se jedná o tělesa s určitou pravidelností, proto bychom jistě u každého z těchto těles našli roviny souměrnosti.

Obecně deltatopy řadíme mezi tělesa zvaná deltastěny, což jsou takové mnohostěny, které mají všechny své stěny shodné rovnostranné trojúhelníky, tedy jak konvexní tak nekovexní.

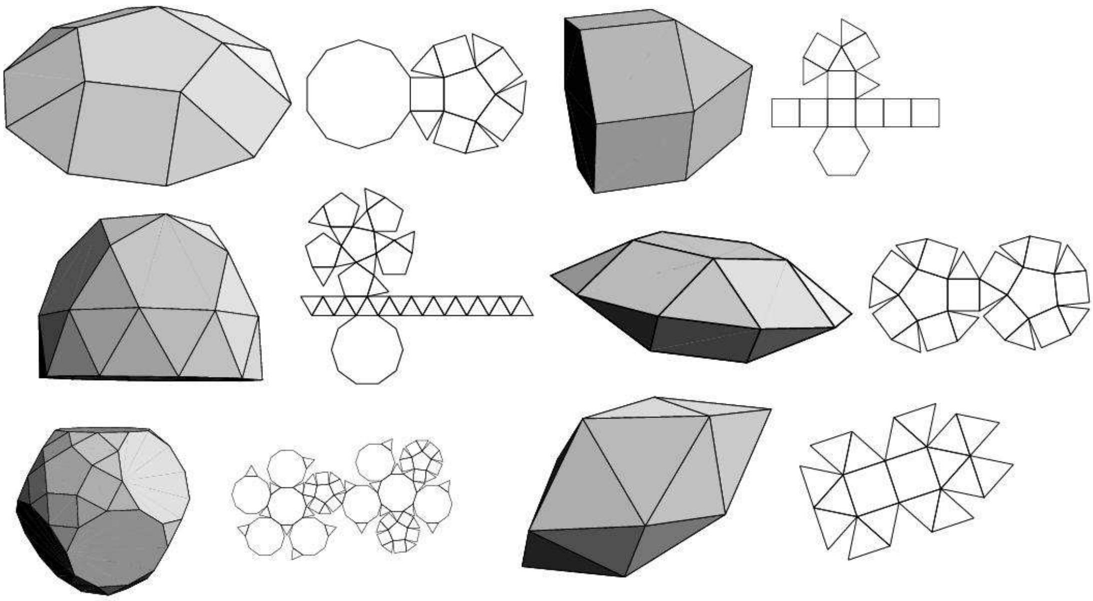
V přírodě se můžeme setkat např. s dvojitým čtyřstěnem a to ve struktuře magnetitu.

4. Johnsonova tělesa

Každý konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou pravidelné n-úhelníky a p (resp. q) není pro všechny vrcholy (resp. stěny) stejné, se nazývá Johnsonovo těleso.

Tzn., že se mezi Johnsonova tělesa neřadí platonská tělesa, archimédovská tělesa, hranoly a antihranoly. Patří mezi ně např. všechny deltatopy, které nejsou platónskými mnohostěny.

Tato tělesa poprvé kompletně popsal Norman W. Johnson v r. 1966 a uvedl seznam 92 těchto těles. O tři roky později provedl matematik Victor Zalgaller důkaz, že víc takových těles neexistuje. Na ukázku uvádím jen pár vybraných Johnsonových těles (obr. 12) pro představu čtenáře, celý seznam s počty stěn, hran a vrcholy se nachází např. v příloze diplomové práce podle Doležalové (2010).



obr. 12

Vlastnosti Johnsonových těles:

Opět se jedná o tělesa složená z pravidelných n-úhelníků, což nám zaručuje, že vždy najdeme alespoň jednu osu souměrnosti u každého takového tělesa.

Johnosonova tělesa se skládají z pravidelných n-úhelníků, kde $n \in \{3, 4, 5, 6, 8, 10\}$. (Důkaz podal právě Victor Zalgaller v r. 1969.)

5. Hranoly

Ze střední školy víme, že dvě roviny mohou mít tři vzájemné polohy. Mohou být buď totožné, různoběžné nebo rovnoběžné. Jsou-li různoběžné, omezí tyto roviny část prostoru tzv. klín, jsou-li rovnoběžné, omezí část prostoru tzv. vrstvu. Průnikem vrstvy nebo klínu s hranolovým prostorem vznikají hranoly. Pro definování hranolu je třeba tedy nejdříve definovat hranolový prostor.

V rovině ρ mějme dán mnohoúhelník m a směr $\underline{s}$, který není totožný se směrem roviny ρ, pak řekneme, že množina všech přímek směru $\underline{s}$ procházejících každým bodem mnohoúhelníku m, se nazývá hranolová prostor.

Je-li ρ' a ρ'' dvojice různých rovnoběžných rovin, které jsou zároveň kolmé na směr $\underline{s}$, pak se jejich vnitřní průnik s hranolovým prostorem nazývá kolmý hranol – obr. 13a.

Je-li ρ' a ρ'' dvojice různých rovnoběžných rovin, které jsou různoběžné se směrem $\underline{s}$, pak se jejich vnitřní průnik s hranolovým prostorem nazývá kosý hranol – obr. 13b.

Průnikem hranolového prostoru s rovinou ρ' je mnohoúhelník m_1, který nazveme dolní podstavou hranolu, a s rovinou ρ'' mnohoúhelník m_2, který nazveme horní podstavou hranolu. Kolmá vzdálenost rovin ρ' a ρ'' se nazývá výška hranolu.

Speciálním případem kolmého hranolu je pak hranol, jehož rovina podstavy m_1 je kolmá na směr $\underline{s}$ a druhá rovina podstavy m_2 je s ním různoběžná – obr. 13c. A speciálním případem kosého hranolu je hranol, který má roviny svých podstav různoběžné se směrem $\underline{s}$, a které jsou různoběžné navzájem – obr. 13d, někdy je nazýváme seříznuté hranoly.

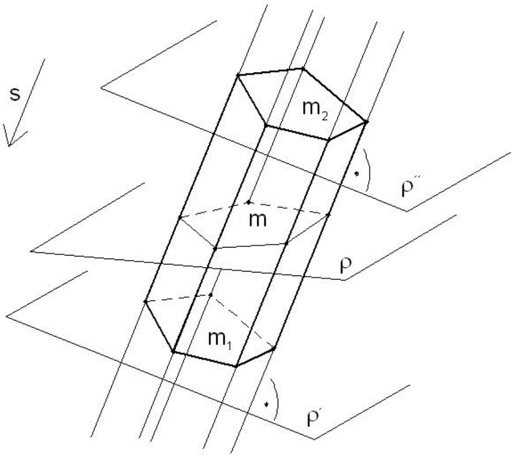
Jsou-li průnikem hranolového prostoru s rovinami ρ' a ρ'' rovnoběžníky, pak daný hranol budeme nazývat rovnoběžnostěn. Speciálním případem rovnoběžnostěnů jsou kolmé rovnoběžnostěny – krychle, kvádr a pravidelný čtyřboký hranol.

Je-li podstava kolmého hranolu pravidelný n-úhelník, pak nazveme tento hranol pravidelný n-boký hranol.

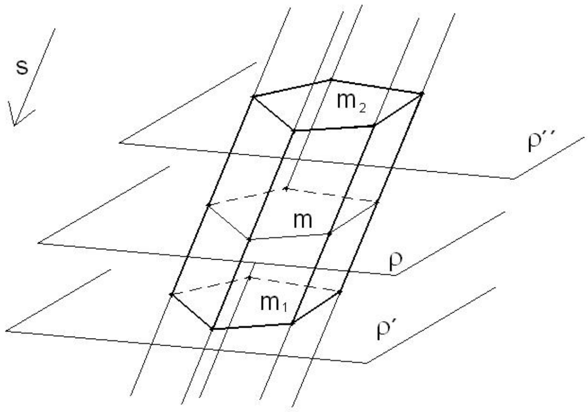
Pravidelné konvexní hranoly, jejichž všechny hrany jsou stejně dlouhé jsme si uváděli v kapitole polopravidelných mnohostěnů.

Hranoly můžeme dělit také na konvexní či nekonvexní. Nekonvexní hranol bude mít vždy podstavy nekonvexní n-úhelníky a konvexní hranol naopak konvexní n-úhelníky.

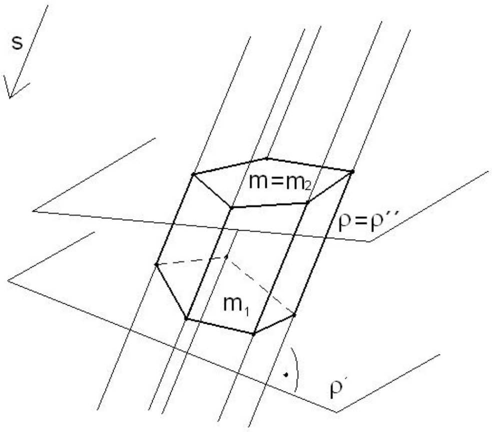
Hranolů existuje nekonečně mnoho. To je zřejmé z toho, že existuje nekonečně mnoho n-úhelníků (nekonečně mnoho přirozených čísel).



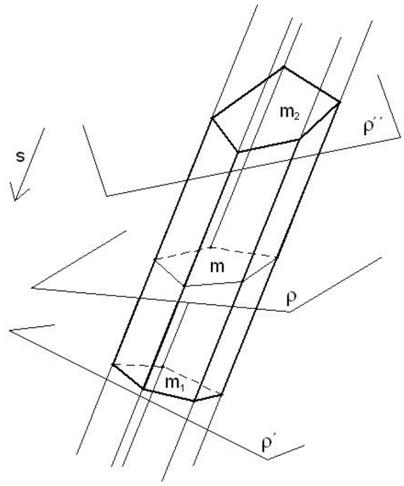
obr. 13a



obr. 13b

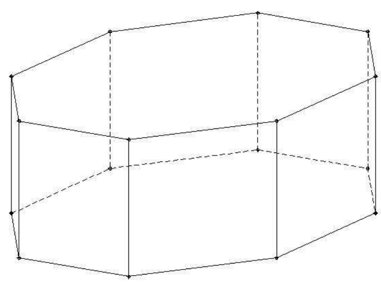


obr. 13c



obr. 13d

Existuje speciální skupina hranolů, které jsou pravidelné kolmé hranoly a velikost jejich výšky je rovna velikosti podstavné hrany. Tzn., že všechny hrany takového tělesa jsou shodně velké a pobočné stěny tvoří čtverce. Tyto hranoly řadíme mezi tzv. polopravidelné mnohostěny, které se vyznačují právě tím, že všechny jejich stěny jsou pravidelné n-úhelníky a všechny vrcholy mají stejnou valenci. Příklad tohoto typu hranolu vidíme na obr. 14.



obr. 14

S těmito tělesy se setkáme běžně všude. Hranoly tvoří základ ve stavebnictví, potravinářství, hračkářství, atd. V přírodě se pak tato tělesa vyskytují v nejrůznějších strukturách krystalů. Na obr. 15 je příklad krystalu aragonitu.

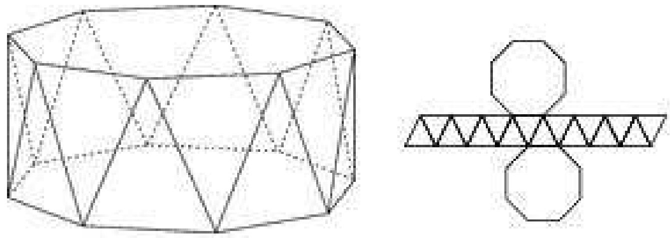
obr. 15

7. Antihranoly

Každé těleso, které má dvě protilehlé podstavy stejné pravidelné n-úhelníky a jehož ostatní stěny tvoří rovnoramenné trojúhelníky, se nazývá antihranol.

Speciální skupinou jsou antihranoly, jejichž stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Ty se řadí, tak jako některé hranoly, mezi polopravidelné mnohostěny. Toto těleso má všechny hrany stejně dlouhé a všechny vrcholy mají stejnou valenci.

Antihranolů existuje obecně nekonečně mnoho, stejně jako existuje nekonečně mnoho pravidelných n-úhelníků. Na obr. 16 je pro názornost zobrazen osmiboký antihranol a jeho síť.



obr. 16

6. Jehlany

V rovině ρ mějme dán n-úhelník m (s vrcholy $A_1, A_2, \dots, A_n$) a bod $V \not\subset \rho$ v prostoru. Pak množina všech přímek procházejících každým bodem mnohoúhelníku m a bodem V se nazývá jehlanový prostor.

Nechť bod S je střed mnohoúhelníku m, pak se přímka SV nazývá osa jehlanové plochy a značíme ji o.

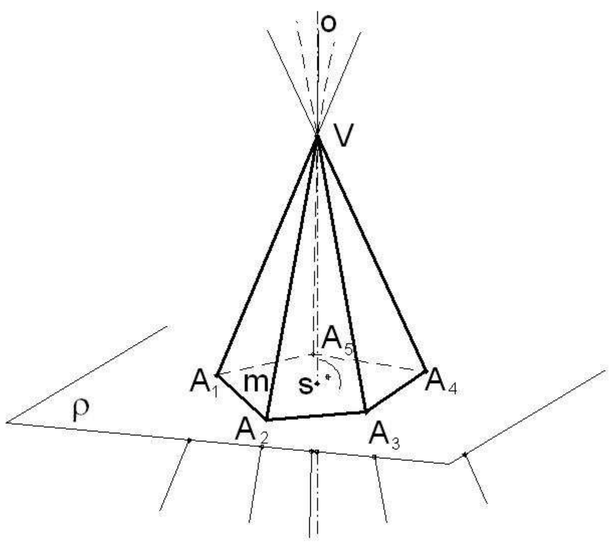
Všechny úsečky spojující každý bod n-úhelníku m s bodem V tvoří jehlan, zn. $A_1 A_2 \dots A_n V$. Bod V se nazývá vrchol jehlanu a n-úhelník A_n podstava jehlanu.

Je-li rovina $\rho \perp o$ pak se jehlan $A_n V$ nazývá kolmý jehlan – obr. 17a. Velikost úsečky SV je jeho výškou, zn. v.

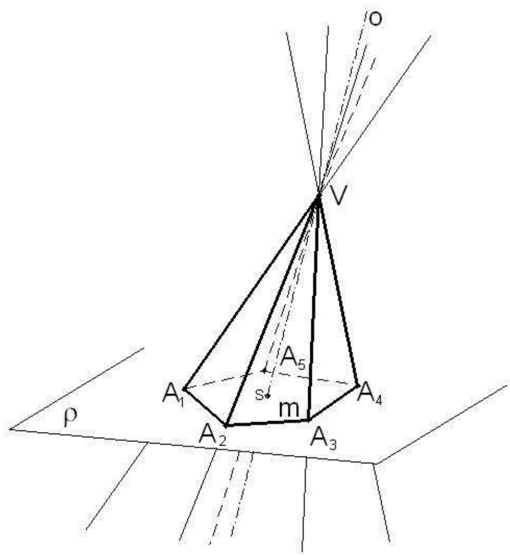
Platí-li že, rovina ρ není kolmá na osu o, pak se jehlan $A_n V$ nazývá kosý - obr. 17b. Jeho výška je pak kolmá vzdálenost roviny ρ od vrcholu V.

Mějme dánu rovinu ρ', která je kolmá na o a která řeže kolmý jehlan v n-úhelníku m' (vrcholy $A_1', \dots, A_n'$). Pak vnitřní průnik rovin ρ a ρ' s jehlanovou plochou se nazývá komolý jehlan – obr. 17c.

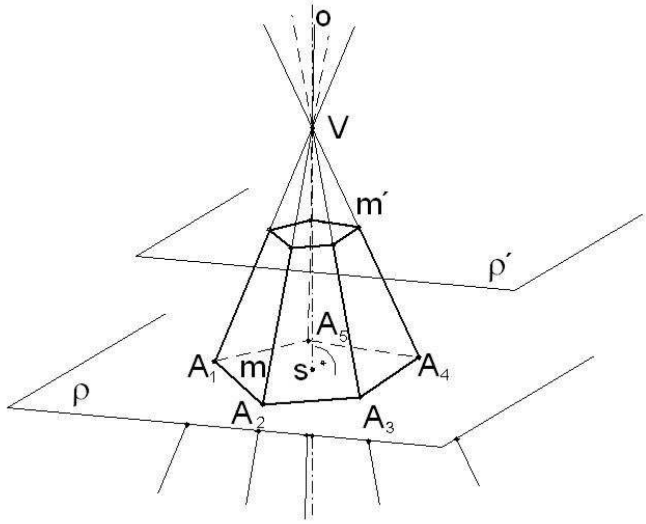
Samozřejmě můžeme uvažovat speciální případy seříznutých kolmých i kosých či nekonvexních jehlanů rovinami různoběžnými s osou o, nicméně to už nechám na představivosti čtenáře, aby si takové jehlany zkusil představit.



obr. 17a



obr. 17b



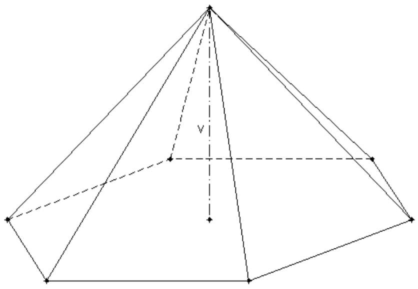
obr. 17c

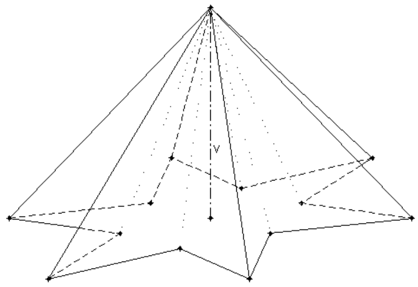
Je-li podstava kolmého jehlanu pravidelný n-úhelník, pak takový jehlan nazveme n-bokým pravidelným jehlanem.

Pravidelné konvexní jehlany, jejichž všechny hrany jsou stejně dlouhé, známe jen tři - pravidelný čtyřstěn, pravidelný čtyřboký jehlan a pravidelný pětiboký jehlan. U těchto tří těles jsou stěny rovnostranné trojúhelníky. Kdybychom uvažovali jehlan, který by byl šestiboký a více boký, už bychom nedostali jehlan, neboť by se jeho stěny při styku ve vrcholu dostaly do roviny podstavy nebo by se vůbec ve vrcholu nesetkaly. Proto se u jehlanů zavádí pravidelnost jen podle podstavy a výšky na ni kolmé.

Pro konvexní jehlany platí, že když je podstava konvexní n-úhelník, pak je i celý jehlan konvexní. Naopak je-li podstavou nekonvexní n-úhelník, pak říkáme, že je jehlan nekonvexní.

Na obr. 18 vidíme dva jehlany ve volném rovnoběžném promítání, jejichž podstavy jsou pravidelné n-úhelníky a mají stejnou velikost výšky v. Obr. 18a je příklad šestibokého konvexního jehlanu, má 7 vrcholů, 7 stěn a 12 hran. Na obr. 18b je nekonvexní jehlan s 13 vrcholy, 13 stěnami a 24 hranami. Ze stejných jehlanů bychom také mohli udělat komolé jehlany tak, že bychom seřízli část jehlanu rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy.



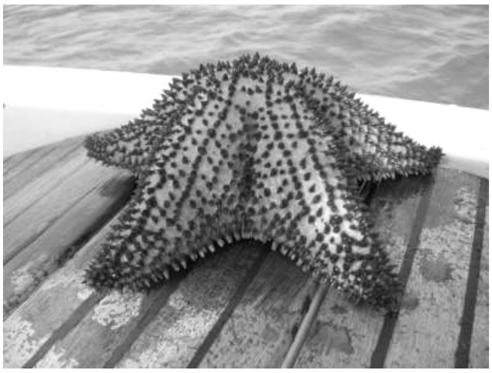


obr. 18a obr. 18b

Tvar jehlanů je nedělitelnou součástí světové architektury téměř několik tisíc let. Počínaje pyramidami tak jak je známe například z Egyptu až po moderní architekturu, která se za poslední desítky let bohatě rozvinula např. v Paříži, kde takové tvary staveb zcela jistě najdeme běžně (obr. 19 - skleněné pyramidy před galerií Louvre). Většina mrakodrapů se dnes staví do špičky právě pro větší stabilitu (obr. 20 – mrakodrap v San Franciscu). A nemusíme ani chodit tak daleko, abychom se podívali na jehlany v architektuře. Možná jen stačí podívat se na vlastní střechu, postavit si stan nebo si nachystat táborák.

Když se podíváme na jehlany do přírody, určitě nás také napadne hodně příkladů. Zahrádkáři velmi rádi stříhají své okrasné stromky nebo jen obyčejné túje právě do tvaru jehlanů, stačí se jen projít po nějaké zámecké zahradě. Já dále uvádím také příklad známého živočicha, který mi vždy připomínal nekonvexní jehlan – mořské hvězdice (obr. 21). A tak bychom mohli v hledání pokračovat dál, možná bychom došli až k domněnce, že i koňské uši jsou ve tvaru jehlanu (dokonce čtyřstěnu).

obr. 19 obr. 20

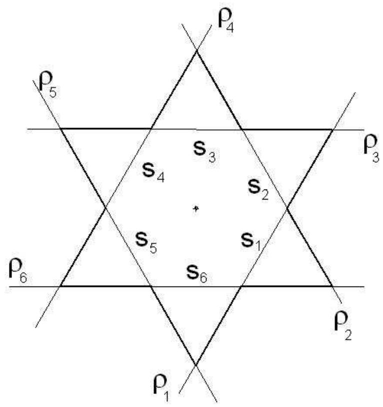


obr. 21

7. Hvězdicovité mnohostěny

Mějme dán konvexní mnohostěn M, jehož každá stěna $\mathrm{s_n}$ leží v jedné své rovině $\mathrm{\rho_n}$, kde $n \in N$. Pokud alespoň každé tři roviny mají spolu jednobodový průnik, pak těleso, které vznikne omezením prostoru těmito rovinami, nazveme hvězdicí mnohostěnu M.

Tento proces vytváření nekonvexních hvězdic z konvexního mnohostěnu pochází původně od Keplera (1619), ale velmi podrobně jej také popsal americký matematik Wenninger (1989), který se vytvářením a konstrukcemi mnohostěnů zabývá celý život – on tento proces nazývá anglicky „the stellation process“ – obr. 22. Laicky bychom tento proces mohli vysvětlit jako „prodloužení“ rovin stěn až do té doby dokud se neprotnou. Samozřejmě vždy záleží na tom, které tři, čtyři,… roviny zvolíme, podle toho potom dostaneme různá tělesa.



obr. 22

Dále se budeme podrobněji zabývat jen hvězdicemi platónských těles.

Neexistuje hvězdice čtyřstěnu a krychle. Roviny stěn čtyřstěnu se přímo protínají v hranách čtyřstěnu a u krychle nenajdeme žádné dvě takové roviny různoběžné, které by se protínaly jinde než opět v hraně.

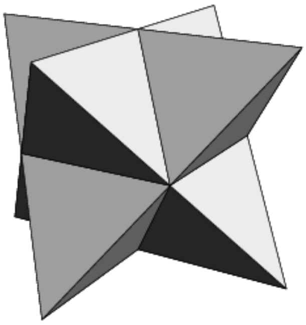
Pravidelný osmistěn má jedinou svou hvězdici – stellu octangulu.

a. STELLA OCTANGULA

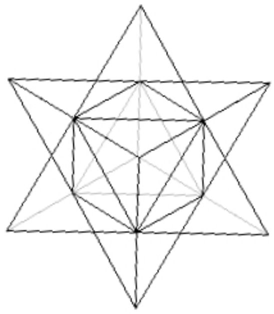
Toto těleso pojmenoval Kepler (1611) - obr. 23a. Stella octangula vznikne složením dvou platónských čtyřstěnů následujícím způsobem (obr. 23b):

Mějme dány dva pravidelné shodné splývající čtyřstěny M_1, M_2, jejichž splývající výšky označme v_1 a v_2 a jejich středy S_1, S_2. Mnohostěn M_2 otočíme o 180° neboli výšku v_2 otočíme o kolem středu S_1. Pak řekneme, že sjednocení čtyřstěnů M_1, M_2 se nazývá stella octangula.

Průnikem těchto dvou pravidelných čtyřstěnů je pak pravidelný osmistěn. Proto na stellu octangulu můžeme pohlížet i jako na hvězdici osmistěnu. Řadí se mezi nekonvexní pravidelné mnohostěny, neboť má všechny stěny shodné pravidelné n-úhelníky (rovnostranné trojúhelníky) a valence všech vrcholů je vždy stejná. Samozřejmě toto těleso můžeme zařadit i mezi deltastěny.



obr. 23a

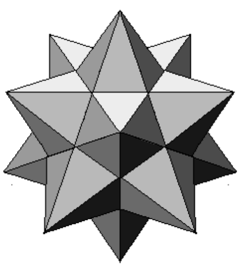


obr. 23b

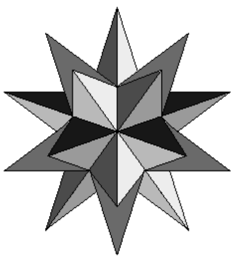
b. KEPLER-POINSOTOVA TĚLESA

Nekonvexní mnohostěny, jejichž stěny jsou shodné pravidelné n-úhelníky, a které vzniknou procesem vytváření hvězdic z dvanáctistěnu a dvacetistěnu, se nazývají Kepler-Poinsotova tělesa.

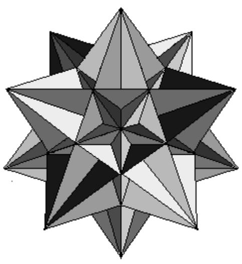
Kepler-Poinsotova tělesa jsou právě čtyři - malý hvězdicovitý dvanáctistěn (obr. 24a), velký hvězdicovitý dvanáctistěn (obr. 24b), velký dvacetistěn (obr. 24c) a velký dvanáctistěn (obr. 24d).



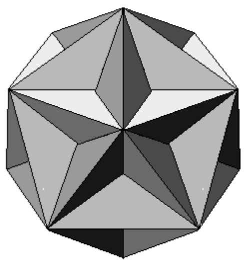
obr. 24a



obr. 24b



obr. 24c



obr. 24d

Johaness Kepler (1571–1630) objevil a popsal dva pravidelné hvězdicovité mnohostěny - hvězdice pravidelného konvexního dvanáctistěnu a dvacetistěnu. Stěny těchto dvou těles ale netvoří malé trojúhelníky, jak by se čekalo, nýbrž pravidelné pěticípé hvězdice (pentagramy). Na obr. 24a, 24b si můžeme všimnout, že tyto stěny jsou zobrazeny každá jiným odstínem šedé barvy. Na další dvě tělesa pak později přišel matematik Louis Poinsot (1777–1859) pomocí vlastností duality. Stěny velkého dvanáctistěnu tvoří pravidelné pětiúhelníky a stěny pravidelného velkého dvacetistěnu rovnostranné trojúhelníky. Na obr. 24c, 24d opět vidíme tyto stěny odlišeny různými odstíny šedi. V tabulce 5. je připraven přehled počtu stěn, vrcholů a hran jednotlivých Kepler-Poinsotových těles. Všimneme si, že zde už se χ nemusí nutně rovnat 2, jako to je u konvexních těles.

tabulka 5. – přehled Kepler-Poinsotových těles

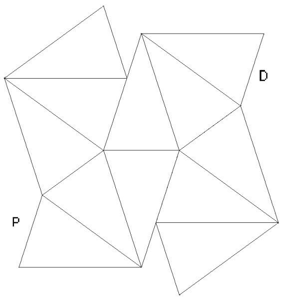
pravidelný nekonvexní mnohostěn	*s – počet stěn*	*v – počet vrcholů*	*h – počet hran*	χ
velký hvězdicovitý dvanáctistěn	12	20	30	2
velký dvacetistěn	20	12	30	2
malý hvězdicovitý dvanáctistěn	12	12	30	-6
velký dvanáctistěn	12	12	30	-6

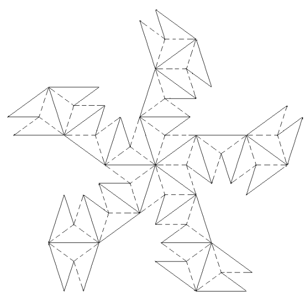
Vlastnosti Kepler-Poinsotových těles:

I u nekonvexních pravidelných mnohostěnů existuje dualita. Duální mnohostěn k malému hvězdicovitému dvanáctistěnu je velký dvanáctistěn a k velkému hvězdicovitému dvanáctistěnu pak velký dvacetistěn.

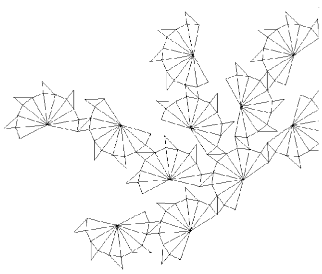
Jelikož se jedná o pravidelné mnohostěny, můžeme těmto tělesům vepsat i opsat kouli stejným způsobem jako u platónských těles, tzn., že existují roviny souměrnosti, které tyto mnohostěny „řežou" vždy ve stejných n-úhelnících. Vlastnost vepsání i opsání koule těmto tělesům přitom vyplývá zejména z definice, neboť tato tělesa vznikla z platónského dvanáctistěnu a dvacetistěnu pouze „prodloužením" rovin jejich stěn. Tzn., že se zachovala vlastnost jak stejné valence pro všechny vrcholy, tak i to, že jsou stěny shodné pravidelné n-úhelníky.

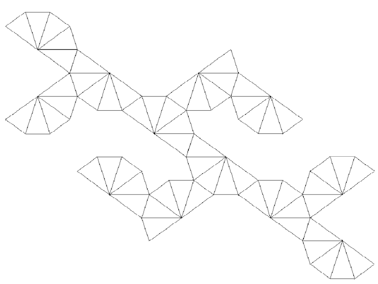
Nyní si ještě ukážeme sítě těchto těles. Na obr. 25a vidíme část sítě velkého hvězdicovitého dvanáctistěnu. Celá jeho síť se pak skládá přesně z pěti těchto částí. Dostaneme ji tak, že každou další část připojíme stranou označenou písmenem P ke straně označené písmenem D. Obr. 25b představuje síť velkého dvanáctistěnu, obr. 25c síť velkého dvacetistěnu a obr. 25d síť malého hvězdicovitého dvanáctistěnu.





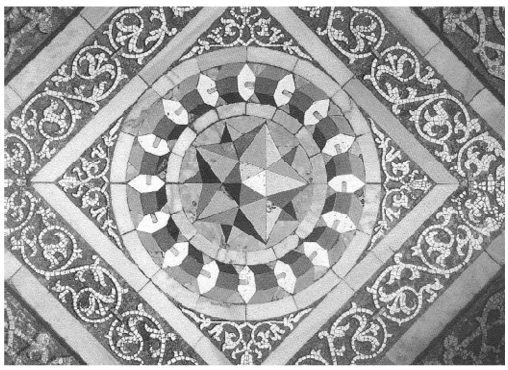
obr. 25a obr. 25b





obr. 25c obr. 25d

V přírodě tato tělesa zřejmě jen tak neuvidíme, jejich pravidelnost a hvězdicovitý tvar to patrně vylučuje. Nicméně mohli bychom se podívat do světa umění a architektury a objevit zajímavá díla, které stojí za to zmínit. Jde např. o mozaiku (obr. 26) z roku 1430, kterou vytvořil Paollo Uccello a na které se objevil malý hvězdicovitý dvanáctistěn ještě dříve, než jej popsal Kepler.



obr. 26

Víme tedy, že Kepler-Poinsotova tělesa jsou jediné pravidelné hvězdice pravidelného dvanáctistěnu a dvacetistěnu, nejsou to však jediné hvězdice, které se dají z těchto těles vytvořit. V roce 1999 dokázal matematik Coxeter, že např. z pravidelného dvacetistěnu lze vytvořit 59 hvězdic. Další hvězdice pak třeba můžeme vytvářet z archimédovských těles, z katalánských těles, apod.

8. Nepravidelné a jiné mnohostěny

a. SJEDNOCENÍ PLATÓNSKÝCH MNOHOSTĚNŮ

Sjednocení dvou či více mnohostěnů vznikne, když do jednoho tělesa vnoříme druhé tak, že tato tělesa mají společně těžiště a jedno je vůči druhému otočené o určitý úhel. Samozřejmě záleží na zvolení délky hran těchto těles. My se budeme zabývat tímto sjednocením jako celkem, budeme zkoumat, jaké těleso vznikne ze sjednocení těles, které mají společný střed.

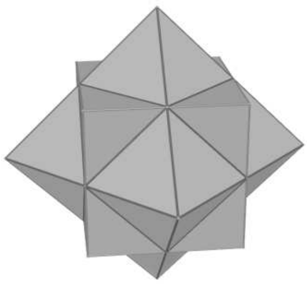
Nejprve si ukážeme sjednocení dvou k sobě duálních platónských těles, které mají vždy stejné délky hran. Dále pak sjednocení několika krychlí a několika osmistěnů.

Dva čtyřstěny

Neboli známá stella octangula. Vzniklé těleso je nekonvexní, má 8 vrcholů, 12 hran a 8 stěn, které tvoří rovnostranné trojúhelníky.

Krychle a osmistěn

Opět se jedná o dvě navzájem duální tělesa. Osmistěn je vůči krychli v poloze, kdy jejich osy spolu splývají a každý jeho řez rovinou souměrnosti (čtverec) je ke krychli v poloze kolmé. Přičemž vidíme podle obr. 27, že z každé stěny krychle „vybíhá“ vždy stejný jehlan, takže se hrany osmistěnu a hrany krychle protínají přesně ve svých polovinách. Tímto sjednocením nám vznikne opět nekonvexní těleso, které má 14 vrcholů, 24 hran a 14 stěn.



obr. 27

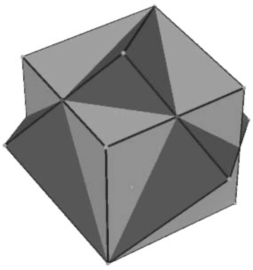
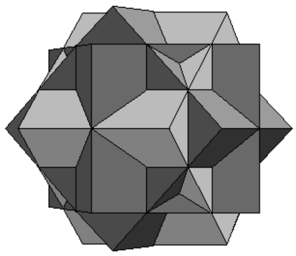
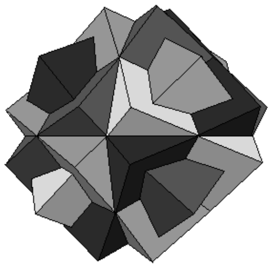
Dvanáctistěn a dvacetistěn

Poslední dvě duální konvexní tělesa, která při sjednocení dávají těleso nekonvexní, se opět protínají svými hranami v polovině a jejich osy splývají. Dostáváme těleso na obr. 28 s 32 vrcholy, 60 hranami a 32 stěnami.

obr. 28

Dvě, tři, čtyři krychle

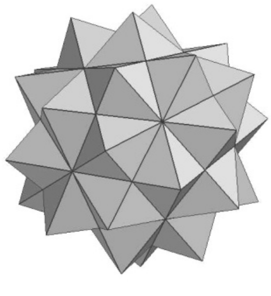
Sjednocením dvou krychlí tak, že vždy dva vrcholy mají obě krychle společné, vznikne těleso, které má 16 vrcholů, 24 hran a 12 stěn. Přidáním každé další krychle, dostaneme těleso, které má vždy o 8 vrcholů, 12 hran a 6 stěn víc. Na obr. 29a je sjednocení dvou krychlí, na obr. 29b sjednocení tří krychlí a na obr. 29c sjednocení čtyř krychlí. Všechno jsou to nekonvexní mnohostěny. Zajímavé je, že najdeme vždy dvě takové krychle, které se protínají v některé ze svých hran v polovině.

obr. 29a obr. 29b obr. 29c

Pět osmistěnů

Proč zrovna zmiňuji pět osmistěnů? Protože sjednocením pěti osmistěnů dostaneme zajímavé těleso (obr. 30), které tvoří 30 stejných čtyřbokých jehlanů. Má 30 vrcholů, 60 hran a 40 stěn.

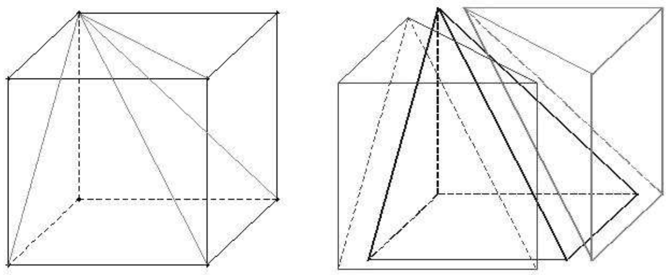


obr. 30

b. ROZKLADY KRYCHLE

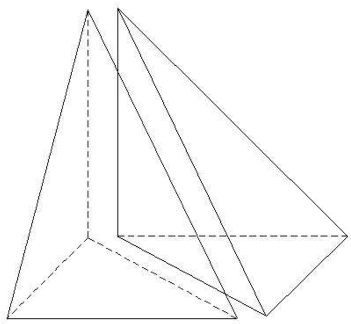
Rozkladem krychle budeme rozumět skupinu těles, které po složení dávají zase krychli. Pomineme-li rozklad na další krychle a kvádry, budeme se věnovat jen rozkladům, kterými vzniknou jehlany a to všechny stejné jehlany. Toto téma podrobně popisuje ve své knize Horák (1967).

Základní tři tělesa dostaneme z krychle, kterou rozřežeme dvěma rovinami tak, aby po rozřezání vznikly tři stejné jehlany. Každý z těchto jehlanů, obsahuje jednu stěnu, stěnovou úhlopříčku a tělesovou úhlopříčku krychle. Jelikož všechny tři jehlany jsou stejné, můžeme říct, že obsah jednoho jehlanu se rovná třetině obsahu celé krychle. Postup tohoto rozložení vidíme na obr. 31.



obr. 31

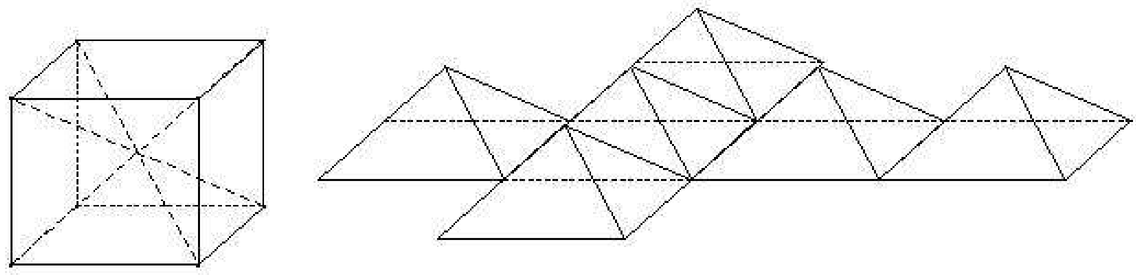
Dalším rozkladem, který můžeme v krychli najít, je rozklad na šest čtyřstěnů. Tento rozklad vznikne z předchozího rozkladu tak, že každý ze tří jehlanů rozřízneme napůl podél tělesové úhlopříčky a hrany krychle, jak to vidíme na obr. 32. Tímto vznikne šest stejných čtyřstěnů.



obr. 32

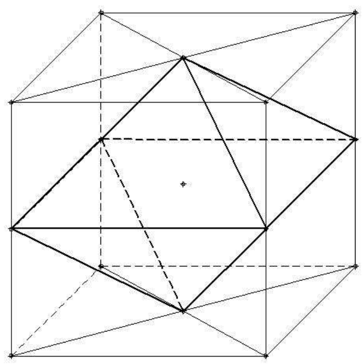
Další rozklad, který si ukážeme, je rozklad krychle na šest stejných 4-bokých jehlanů podle obr. 33 pomocí tělesových úhlopříček. Víme, že krychle má tělesové úhlopříčky čtyři.

Všechny se protínají ve středu krychle. Tímto rozkladem nám po poskládání jehlanů „k sobě“ vznikne prostorová základní síť krychle.



obr. 33

Posledním rozkladem, o kterém bychom mohli uvažovat, je rozložení na osmistěn a osm jehlanů. Představíme-li si osmistěn, který krychli vepíšeme (obr 34), na každou ze čtyř bočních stěn krychle nám pak připadnou dva jehlany, tudíž jich dostaneme osm. Samozřejmě bychom v rozkladech krychle mohli pokračovat dál, nicméně to už nechám na představivosti čtenáře, neboť takových rozkladů existuje nekonečně mnoho.



obr. 34

Existuje nekonečně mnoho dalších zajímavých mnohostěnů, o jejichž vlastnostech bychom mohli uvažovat, další taková tedy přenecháme čtenáři a jeho zájmu.

III. Návrhy pro výuku mnohostěnů na středních školách

Ukázali jsme si nejrůznější druhy mnohostěnů, popsali jsme si, z čeho jsou složeny, kolik mají stěn, hran a vrcholů, jak bychom je mohli charakterizovat a teď je na čase podívat se na ně z praktického hlediska. Pokusím se vytvořit úlohy, příklady a náměty k výpočtům a lepší poznání těchto těles pro studenty středních škol. Bude se jednat o výpočty obsahů a objemů, o řešení souměrnosti těchto těles, skládání a řezání z materiálů aj. V první části jsem nejvíce vycházela z příkladů a teorie podle Horáka (1967), v druhé části pro mě byl stěžejní studijní text o platónských tělesech od Chmelíkové a Moravce (2007) a poslední dvě části jsou praktické rýsovací úlohy a projekty, které jsou vytvořeny autorkou této práce.

1. Obecné řešené úlohy

V těchto úlohách se zaměřujeme na existenční problémy mnohostěnů, tzn., zkoumáme je z hlediska počtu stěn, hran a vrcholů, ne z hlediska velikostí. Za různé mnohostěny proto zde budeme považovat z topologického hlediska takové, které mají různé počty stran, hran a vrcholů.

Př. 1.1

Zadání: Zjistěte, kolik existuje konvexních mnohostěnů, které mají:

a) $s = 16$

b) $s = 20$

c) $s = 24$

Řešení: a) Ze vztahů $2h \geq 3s, 2h \geq 3v$ plyne, že počet hran h mnohostěnu, který má 16 stěn musí splňovat $\frac{2}{3}h \geq 16 => h \geq 24 \Lambda v \geq 24$. Z Eulerova vztahu $s + v - h = 2$ pak plyne $h - v = 14$. A ze vztahu $\frac{1}{2}s + 2 \leq v \leq 2s - 4$, vyplývá, že $24 \leq v \leq 28$. Takže pro 24 vrcholů musí mít takový mnohostěn 38 hran a pro 28 vrcholů bude mít mnohostěn 42 hran. Z toho plyne, že počet mnohostěnů, které mají 16 stěn a 24-28 vrcholů, je přesně 5.

b) Použijeme postup jako v předchozím případě a dostaneme $\frac{2}{3}h \geq 20 => h \geq 30 \Lambda v \geq 30$. Pak $h - v = 18$ a $30 \leq v \leq 36$, z toho plyne, že má-li mnohostěn 20 stěn a 30 vrcholů, pak má 48 hran. Má-li 36 vrcholů, pak má 54 hran. Z toho plyne, že mnohostěny s 20 stěnami a 30-36 vrcholy jsou přesně 7.

c) Opět jako v předchozích případech jestliže $\frac{2}{3}h \geq 24 => h \geq 36\, \Lambda\, v \geq 36$, pak $h - v = 22$ a $36 \leq v \leq 44$. Je-li $v = 36$, pak je počet hran 58. Pro $v = 44$ je $h = 66$. Takových mnohostěnů pak existuje 9.

Př. 1.2

Zadání: Zjistěte a načrtněte, zda existují mnohostěny, které mají:

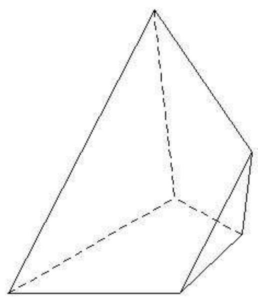
a) $h = 9$

b) $v = 6, h = 8$

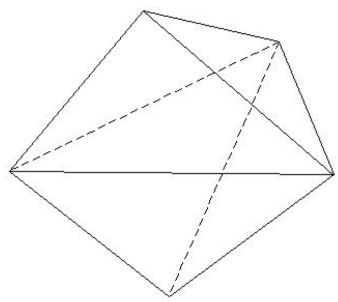
c) $s = 9, v = 14$

Řešení: a) Ze vztahů $\frac{1}{3}h + 2 \leq s \leq \frac{2}{3}h$, $\frac{1}{3}h + 2 \leq v \leq \frac{2}{3}h$, plyne $5 \leq s \leq 6$, $5 \leq v \leq 6$. Ale podle $s + v - h = 2$ víme, že $s + v = 11$ a proto dostaneme dva případy:

h	s	v	výsledek
9	5	6	pětistěn
9	6	5	šestistěn



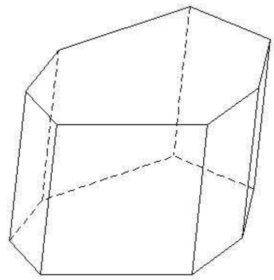
pětistěn (ořezaný čtyřstěn)



šestistěn (dvojitý čtyřstěn)

b) Podle Eulera by mnohostěn, který má 6 vrcholů a 8 hran musel mít 4 stěny. Ale jediný čtyřstěn, který známe má 6 hran a 4 vrcholy. Důkaz provedeme podle vztahu $\frac{1}{3}h + 2 \leq s \leq \frac{2}{3}h$. Po dosazení dostaneme, že $14 \leq 3s \leq 16$, což by znamenalo, že nejmenší možný počet stěn by musel být roven 5, ale to nesedí s Eulerovou charakteristikou, tzn., že daný mnohostěn neexistuje.

c) Jako v předchozím případě užijeme nejdřív Eulerova vzorce a vyjde nám $h = 21$. Ověříme tedy, zda takový mnohostěn může existovat. Po dosazení do vzorců dostaneme $9 \leq s \leq 14$, $9 \leq v \leq 14$, což sedí pro mnohostěn, který by měl 9 stěn a 14 vrcholů.



devítistěn (hranol)

Př. 1.3

Zadání: Dokažte, že pro konvexní mnohostěny platí následující dvě tvrzení.

$$\frac{3}{2}s \leq h \leq 3s - 6,$$

$$\frac{3}{2}v \leq h \leq 3v - 6$$

Řešení: Z nerovností $2h \geq 3v$ a $2h \geq 3s$ hned vidíme vztahy $h \geq \frac{3}{2}v$ a $h \geq \frac{3}{2}s$. Stačí ještě dokázat nerovnosti $h \leq 3s - 6$, $h \leq 3v - 6$. Sečteme nyní Eulerovu rovnici $s + v - h = 2$ s nerovností $2h \geq 3v$.

$$v = h - s + v$$

$$2h \geq 3(h - s + 2) => 2h \geq 3h - 3s + 6 => h \leq 3s - 6$$

Pro druhou nerovnost užijeme stejný postup.

$$s = h - v + 2$$

$$2h \geq 3(h - v + 2) => 2h \geq 3h - 3v + 6 => h \leq 3v - 6$$

Nyní dáme nerovnosti dohromady a máme důkaz hotový:

$$h \geq \frac{3}{2}s, h \leq 3s - 6 => \frac{3}{2}s \leq h \leq 3s - 6$$

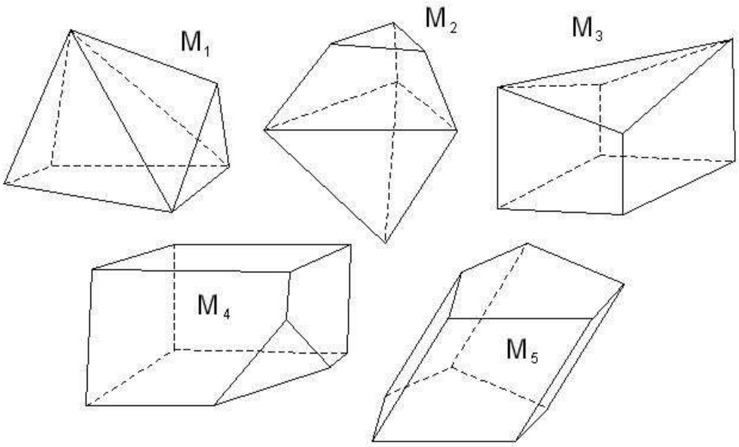
$$h \geq \frac{3}{2}v, h \leq 3v - 6 => \frac{3}{2}v \leq h \leq 3v - 6$$

Př. 1.4

Zadání: Načrtněte všechny konvexní mnohostěny, které mají 7 stěn.

Řešení: Nejprve zjistíme, kolik takových mnohostěnů existuje. Použijeme-li např. vztah z předchozího příkladu $\frac{3}{2}s \leq h \leq 3s - 6$, zjistíme, že počet hran bude omezen takto $\frac{21}{2} \leq h \leq 15$, tomu vyhovuje 11-15 hran. Pomocí Eulerovy charakteristiky pak dopočítáme počet vrcholů pro jednotlivý počet hran.

s	h	v	obrázek
7	11	6	M_1
7	12	7	M_2
7	13	8	M_3
7	14	9	M_4
7	15	10	M_5



2. Řešené příklady na obsah a objem

Př. 2.1

Zadání: Napište vzorce pro výpočet obsahu a objemu všech platónských těles, známe-li velikost jejich strany a. Vzorce, které neznáte, se pokuste odvodit.

(Nápověda: poloměr koule vepsané pravidelnému dvanáctistěnu $\rho = \frac{a}{20}\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}$ a poloměr koule vepsané pravidelnému dvacetistěnu $\rho = \frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$)

Řešení: i) čtyřstěn – pro výpočet obsahu všech těles sčítáme obsahy všech stěn daného mnohostěnu, u všech platónských těles jsou stěny pravidelné n-úhelníky. Čtyřstěn se skládá ze čtyř rovnostranných trojúhelníků. K výpočtu objemu potřebujeme znát tělesovou výšku čtyřstěnu, pak jej počítáme jako objem pravidelného trojbokého jehlanu.

$$S = 4 \cdot \frac{v_a \cdot a}{2}, v_a = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2} => S = 4 \cdot \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a}{2} = \sqrt{3}a^2$$

$$V = \frac{1}{3}S_p \cdot v = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v, v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}} => V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

ii) krychle – vzorce známe ze stereometrie i základní školy

$$S = 6a^2$$

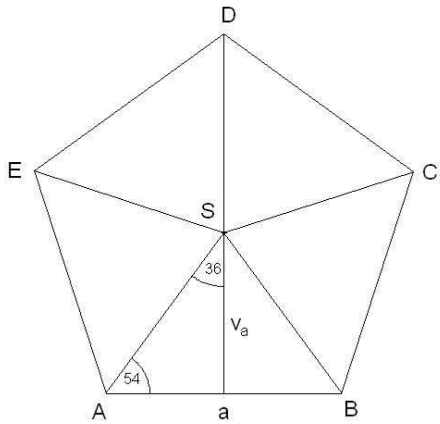
$$V = a^3$$

iii) osmistěn – jedná se o dva pravidelné čtyřboké jehlany nalepené podstavami na sobě. Při výpočtu obsahu se podstavy počítat nebudou a objem vypočítáme zase pomocí vzorce pro výpočet objemu jehlanu. Obsah rovnostranného trojúhelníku jsme si odvodili v i).

$$S = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}a^2$$

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3}a^2 \cdot v, v = \sqrt{\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2} => V = 2 \cdot \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$

iv) dvanáctistěn – stěny pravidelného dvanáctistěnu tvoří pravidelné pětiúhelníky. Každý takový pětiúhelník tvoří se středem dvanáctistěnu pětiboký jehlan. Těchto jehlanů je v dvanáctistěnu 12 a jsou všechny shodné. Tudíž stačí vypočítat objem jednoho takového jehlanu a vynásobit dvanácti, abychom dostali objem celého dvanáctistěnu. Pro výpočet obsahu stačí 12krát vynásobit obsah jedné stěny.



$$S = 12 \cdot 5 \cdot S_{ABS}$$

$$v_a = \frac{a}{2} \cdot \tan 54° = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

$$S_{ABS} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}} \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{4}\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

$$S = 15a^2\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

Uvědomíme-li si, že výška pětibokého jehlanu, který má podstavu jednu stěnu dvanáctistěnu a vrchol ve středu dvanáctistěnu, se rovná velikosti poloměru koule vepsané dvanáctistěnu, můžeme pro výpočet objemu využít nápovědy.

$$V = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v = 4 \cdot \frac{5a^2}{4}\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}} \cdot \frac{a}{20}\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{a^3}{4}\sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cdot (250 + 110\sqrt{5})} = \frac{a^3}{4}\sqrt{470 + 210\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{a^3}{4}\sqrt{225 + 14 \cdot 15\sqrt{5} + 245} = \frac{a^3}{4}\sqrt{(15 + 7\sqrt{5})^2} = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$$

v) dvacetistěn – pravidelný dvacetistěn je tvořený dvaceti rovnostrannými trojúhelníky. Objem bude tvořit dvacet stejných trojbokých jehlanů, jejichž výška se opět rovná velikosti poloměru koule vepsané dvacetistěnu.

$$S = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}a^2$$

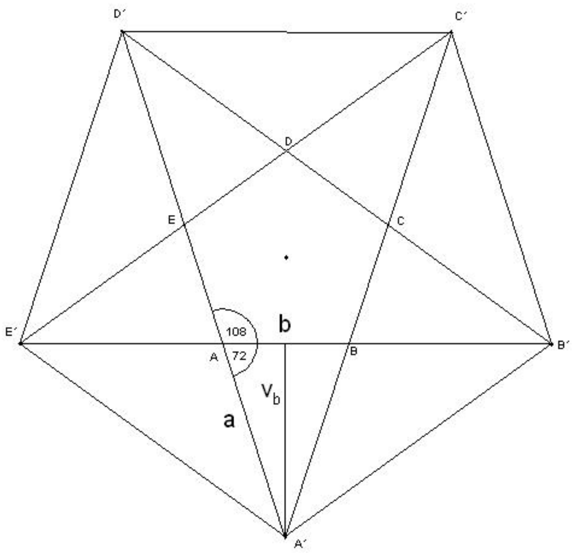
$$V = 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12} = \frac{60a^3\left(3+\sqrt{5}\right)}{144} = \frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)a^3}{12}$$

Př. 2.2

Zadání: a) Vypočítejte obsah malého hvězdicovitého dvanáctistěnu, znáte-li stranu *a* podle obrázku.

b) Určete stranu pětiúhelníku tomuto pentagramu vepsanému v závislosti na straně *a*.

Řešení: a) Povrch tohoto mnohostěnu tvoří dvanáct pravidelných pěticípých hvězd (pentagramů). V každém pentagramu je pět rovnoramenných trojúhelníků.



$$S = 12 \cdot 5 \cdot \frac{v_b \cdot b}{2}$$

$$v_b = a \cdot \sin 72\,° = a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}$$

$$\frac{b}{2} = \sqrt{a^2 - a^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^2} =$$

$$= a\sqrt{1 - \frac{1}{8}(5+\sqrt{5})}$$

$$= a\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$$

$$S = 60 \cdot \frac{a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{5}\right)} \cdot 2a\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}}{2} = 30a^2\sqrt{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{5}\right)} \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} = 30a^2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

b) Stranu menšího pětiúhelníku již máme vypočítanou a označenou písmenem b. Nyní vypočítáme stranu většího pětiúhelníku b´. Budeme vycházet z trojúhelníku E´B´A´, ve kterém již známe výšku v_b.

$$b' = \sqrt{(\frac{b}{2} + a)^2 + v_b^2} = \sqrt{(a\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} + a)^2 + (a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})})^2}$$

$$= \sqrt{a^2(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} + 1)^2 + \frac{a^2}{8}(5+\sqrt{5})} = a\sqrt{(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} + 1)^2 + \frac{(5+\sqrt{5})}{8}}$$

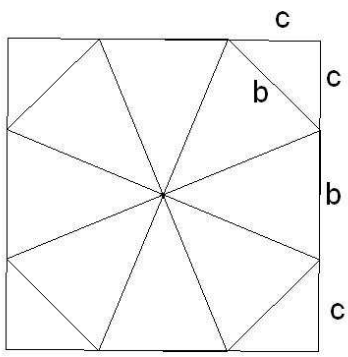
$$= a\sqrt{2(1 + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}})}$$

Př. 2.3

Zadání: a) Znáte stranu b osmiúhelníku archimédovské ořezané krychle. Určete stranu krychle, z které toto těleso vzniklo. Uveďte alespoň dva způsoby řešení.

b) Pro stejné těleso vypočítejte objem. Využijte přitom toho, že již znáte stranu krychle, z které, toto těleso vzniklo.

Řešení: a) 1. způsob: Nejjednodušší postup je použití Pythagorovy věty.

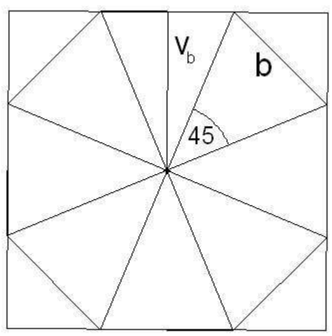


$$a = 2c + b$$

$$c = \sqrt{\frac{b^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}b}{2}$$

$$a = 2\frac{\sqrt{2}b}{2} + b = \sqrt{2}b + b = b(\sqrt{2} + 1)$$

2. způsob: Při druhém řešení by se dal např. využít vzorec pro goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku.

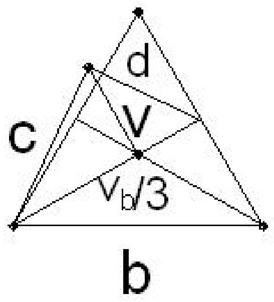


$$a = 2 \cdot v_b$$

$$v_b = \frac{b \cdot \tan(22{,}5)°}{2} = \frac{b \cdot (\sqrt{2} + 1)}{2}$$

$$a = 2 \cdot \frac{b \cdot (\sqrt{2} + 1)}{2} = b(\sqrt{2} + 1)$$

b) Známe-li nyní stranu krychle, z které vznikne krychle ořezaná, objem vypočítáme jednoduše tak, že od objemu krychle neořezané odečteme objem čtyř čtyřstěnů, které odřezáváme. Nejprve však potřebujeme znát výšku *v* takového čtyřstěnu.



$$v = \sqrt{c^2 - \left(\frac{2v_b}{3}\right)^2}$$

$$\frac{2}{3}v_b = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{\sqrt{3}}{3}b$$

$$c = \frac{\sqrt{2}b}{2}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}b}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}b}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}b}{6}$$

$$V = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{3}S_p \cdot v = \left(b(\sqrt{2}+1)\right)^3 - 4 \cdot \frac{1}{3}b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6}b = b^3\left(\sqrt{2}+1\right)^3 - \frac{\sqrt{18}}{18}b^3$$

$$= b^3\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^3 - \frac{\sqrt{2}}{6}\right]$$

Př. 2.4

Zadání: Oficiální normovaný fotbalový míč FIFA má cca povrch roven 1500cm^2. Pomiňte jeho kulatost a přiřadte mu tvar ořezaného ikosaedru. Jaká je délka jedné jeho hrany?

Řešení: Ořezaný ikosaedr je složen z 12 pětiúhelníků a 20 šestiúhelníků. Nejdřív si obecně vyjádříme stěny v závislosti na hraně.

V příkladu 2.1 iv) jsme si již vyjádřili obsah pětiúhelníku takto $\frac{5a^2}{4}\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$.

O šestiúhelníku víme, že je složen z rovnostranných trojúhelníků, proto pro jeho obsah stačí využít Pythagorovy věty $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$.

$$S = 12 \cdot \frac{5a^2}{4}\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}} + 20 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = 15a^2\left(\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}} + 2\sqrt{3}\right)$$

$$1500 = 15a^2\left(\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}} + 2\sqrt{3}\right) \Rightarrow 10 = a\sqrt{\left(\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}} + 2\sqrt{3}\right)}$$

$$a = \frac{10}{\sqrt{\left(\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}+2\sqrt{3}\right)}} \doteq 4{,}5cm$$

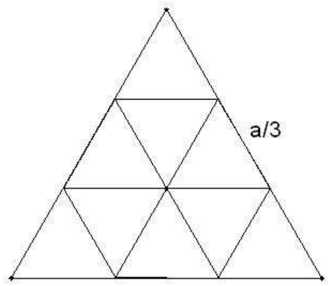
Př. 2.5

Zadání: Vypočtěte kolík cm^3 dřeva zbyde, budeme-li vyřezávat archimédovský ořezaný oktaedr z dřevěného špalku tvaru osmistěnu, který má objem $1000cm^3$.

Řešení: Při řezání osmistěnu na archimédovský osmistěn odpadne 6 stejných a navíc pravidelných čtyřstěnů. Potřebujeme jen zjistit stranu osmistěnu.

Objem osmistěnu jsme si již odvozovali v příkladě 2.1 iii) na tvar $V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

Z toho vidíme, že délka strany $a = 10\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{3}}$. Podle obrázku vidíme, že strana pětiúhelníku i trojúhelníku je a/3 a tedy už můžeme vypočítat objem čtyřstěnů, které po odřezu odpadnou. Pomůžeme opět známým vzorcem pro objem čtyřstěnu z příkladu 2.1 i)



$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

$$\frac{a}{3} = \frac{10\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{3}}}{3}$$

$$6 \cdot V = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{10\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{3}}}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10^3\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1000}{81}$$

$$\doteq 12{,}3cm^3$$

Př. 2.6

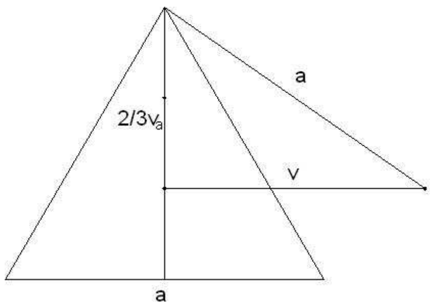
Zadání: Napište vztah pro velikost nejdelší tělesové úhlopříčky v závislosti na hraně těchto těles: a) dvojitý čtyřstěn

b) osmistěn

c) dvojitý pětiboký jehlan

Řešení: Všechny tři mnohostěny vznikly spojením dvou n-bokých jehlanů jejichž tělesové výšky dokážeme vypočítat, navíc všechny tři mají stěny rovnostranné trojúhelníky, z kterých při výpočtech budeme vycházet.

a)

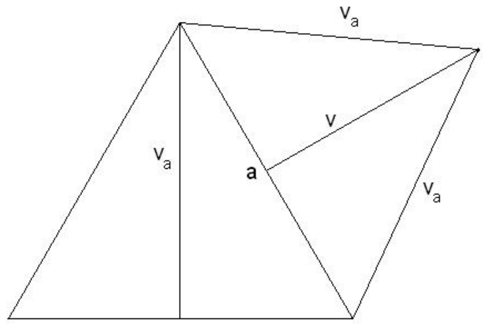


$$u = 2v$$

$$v_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$u = 2\sqrt{\frac{2}{3}}a$$

b)

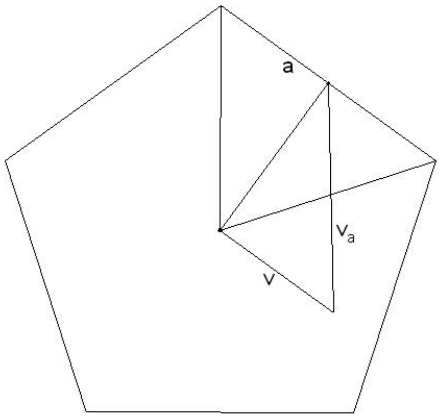


$$u = 2v$$

$$v = \sqrt{v_a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

$$u = \frac{2a}{\sqrt{12}}$$

c)



$$u = 2v$$

$$v = \sqrt{v_a^2 - \left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)^2 - \left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}\right)^2} =$$

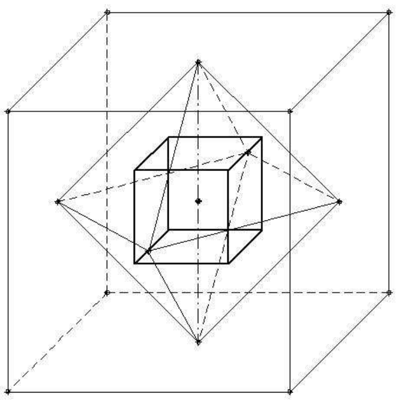
$$= \sqrt{a^2\left(\frac{1}{12} - \frac{2\sqrt{5}}{20}\right)} = a\sqrt{\frac{5 - 6\sqrt{5}}{60}}$$

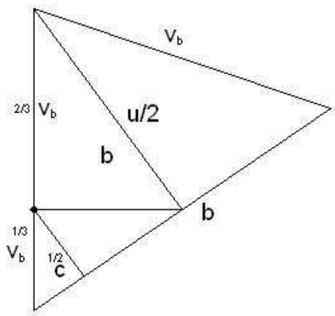
$$u = 2a\sqrt{\frac{5 - 6\sqrt{5}}{60}} = \mathrm{a}\sqrt{\frac{5 - 6\sqrt{5}}{15}}$$

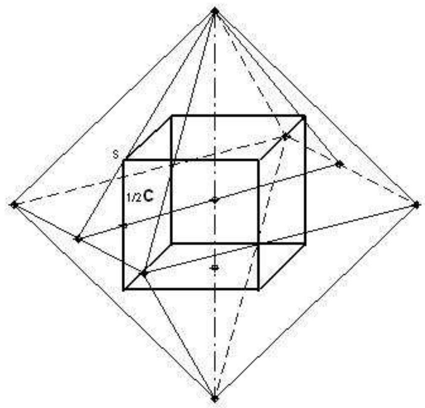
Př. 2.7

Zadání: Krychle má délku hrany *a.* K ní duálnímu osmistěnu (takový jehož vrcholy jsou středy stěn krychle) vepíšeme krychli. Kolikrát by se krychle vepsaná osmistěnu vešla do krychle, které je osmistěn vepsán?

Řešení: Je třeba zjistit délku hrany menší krychle v závislosti na délce hrany větší krychle. Vepsaný osmistěn má délku hrany (podle pythagorovy věty) b a víme, že jeho úhlopříčka$u = a$. Krychli vepsanou osmistěnu budeme počítat podle následující ho obrázku. Víme totiž, že vrcholy této krychle leží přesně ve středech stěn osmistěnu, což jsou rovnostranné trojúhelníky.







$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$v_b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{2}}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{u}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}v_b\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{3\sqrt{2}}\right)^2} = a\sqrt{\frac{1}{12}}$$

Podle Eukleidovy věty o výšce:

$$d^2 = \frac{b}{2} \cdot c_a => c_a = \left(a\sqrt{\frac{1}{12}}\right)^2 \cdot \frac{2}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = a^2 \frac{1}{12} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{6}, c_b = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a\sqrt{2}}{6} = \frac{2a}{3\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{2a}{3\sqrt{2}} = \frac{a^2}{9} => c = \frac{a}{3}$$

$$a^3 \div \frac{a^3}{27} = 27$$

Závěrem můžeme tedy říct, že má-li délka hrany krychle vepsané do osmistěnu třetinovou délku, pak se taková krychle vejde do krychle opsané stejnému osmistěnu přesně 27 krát.

Př. 2.8

Zadání: Sjednocením dvou čtyřstěnů dostaneme těleso nazývané stella octangula (obr. 22). Vypočítejte objem i obsah tohoto tělesa znáte-li délku jeho hrany a.

Řešení: Tento mnohostěn tvoří 8 trojbokých jehlanů (pravidelných čtyřstěnů), jejichž délka hrany je $\frac{a}{2}$. Společná část obou čtyřstěnů, které tvoří stellu octangulu, je vlastně pravidelný osmistěn s délkou hrany $\frac{a}{2}$. Vztahy pro obsahy i objemy čtyřstěnů i osmistěnů jsme si odvozovali v př. 2.1. Přičemž při počítání obsahu tohoto tělesa stačí vynásobit obsah jedné stěny (rovnostranný trojúhelník) malého čtyřstěnu počtem všech těchto stěn.

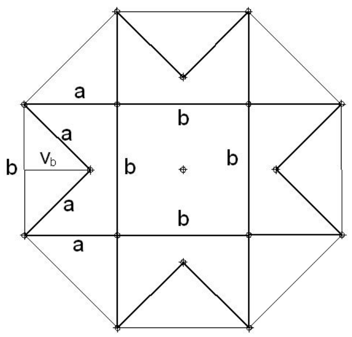
$$V = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{a^3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a^3}{8} = \frac{\sqrt{2}a^3}{8}$$

$$S = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{16} = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2$$

Př. 2.9

Zadání: Vypočítejte objem nekonvexního jehlanu s podstavou osmicípé pravidelné hvězdy, která má $a = 9cm$ a výška jehlanu $v = 10cm$.

Řešení: Načrtneme si a popíšeme obrázek, podle kterého pak provedeme výpočet. Obsah podstavy vypočteme jako čtyřikrát část dvou cípů plus vnitřní čtverec.



$$b = \sqrt{2}a$$

$$v_b = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$S_\Delta = \sqrt{2}a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$S_{\square-\Delta} = \sqrt{2}a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2(2\sqrt{2}-1)}{2}$$

$$S_p = 4 \cdot \frac{a^2(2\sqrt{2}-1)}{2} + \sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}a = 2a^2(2\sqrt{2}-1+1)$$

$$= 4\sqrt{2}a^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{2}a^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 81 \cdot 10 = 10810\sqrt{2} \doteq 1527cm^3$$

Př. 2.10

Zadání: Napište obecný vzorec pro výpočet obsahu libovolného konvexního deltatopu jehož hrana je a a počet stěn je n.

Řešení: Deltatop je těleso, které má všechny své stěny rovnostranné trojúhelníky.

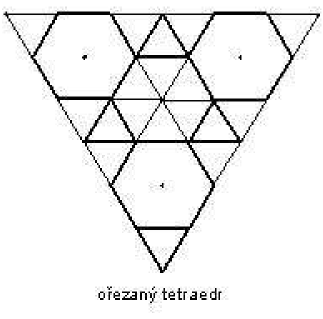
$$S = n \cdot S_{\Delta} = n \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = n \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a$$

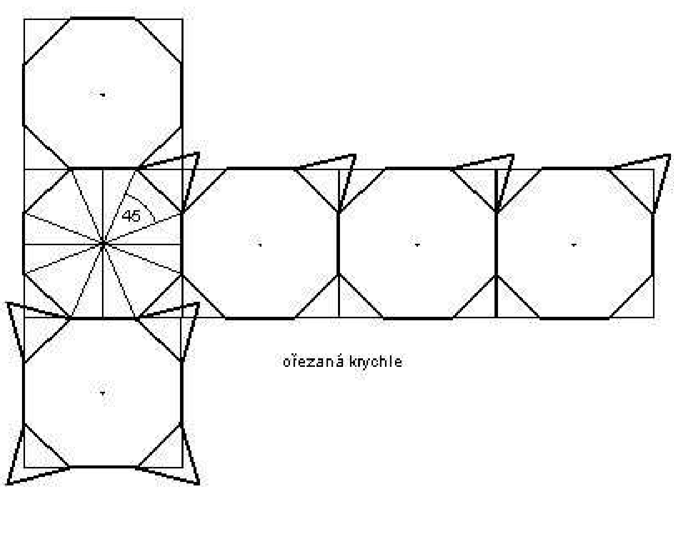
3. Praktické úkoly a příklady k rýsování

Př. 3.1

Zadání: Narýsujte sítě dvou polopravidelných archimédovských těles - ořezaný tetraedr a ořezanou krychli, jejichž původní tělesa měla délku hrany a=5cm. Rýsujte tužkou na papír formátu A4, všechny pomocné konstrukce musí být znázorněny. Popište postup rýsování.

Řešení: Při konstrukci sítí archimédovských těles, která vznikla z těles platónských, je nejjednodušší si pomoci konstrukcí sítě tělesa, z které dané těleso řežeme. Takže např. pro ořezaný tetraedr sestrojíme síť tetraedru a do ní vepíšeme každému trojúhelníku šestiúhelník. Při konstrukci sítě ořezané krychle, sestrojíme nejdříve síť krychle a do každého čtverce vepíšeme pravidelný osmiúhelník. Vepisování n-úhelníků do n-úhelníků provádíme pomocí vlastností, které již známe (dělení úhlů, kružnice opsaná, vepsaná, atd.). K vepsaným n-úhelníkům nakonec připojíme počet trojúhelníků takový jako počet vrcholů, které jsme původnímu tělesu seřízli a máme hotovo.

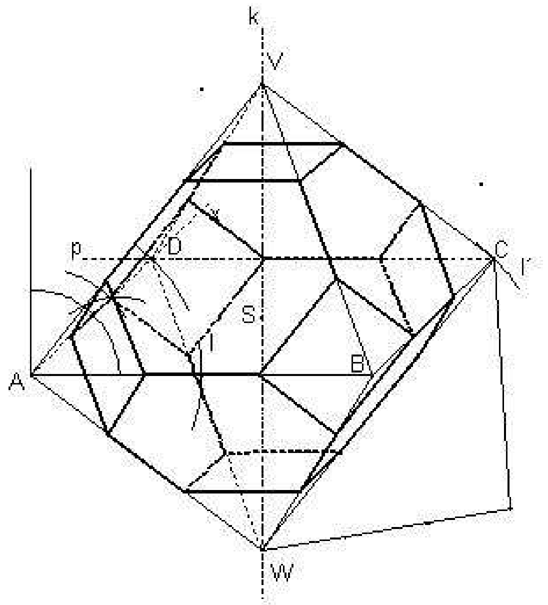


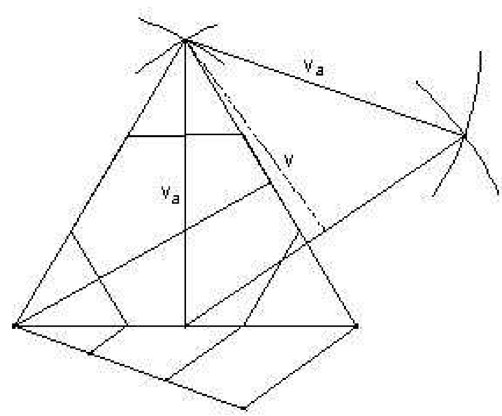


Př. 3.2

Zadání: Ve volném rovnoběžném promítání sestrojte ořezaný oktaedr stojící na jedné stěně. Délka hrany a=5cm. Napište popis konstrukce. Tužka, formát A4. (Nápověda: Pomožte si konstrukcí původního tělesa)

Řešení: Osmistěn sestrojíme pomocí známe stereometrické konstrukce. Dále stačí jen rozdělit všechny hrany osmistěnu na třetiny, neboť víme, že šestiúhelník vepsaný rovnostranému trojúhelníku má délku strany třetinovou a že ve volném rovnoběžném promítání se zachovávají poměry délek. Určíme viditelnost a vytáhneme silněji výsledné těleso.

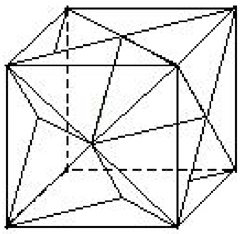


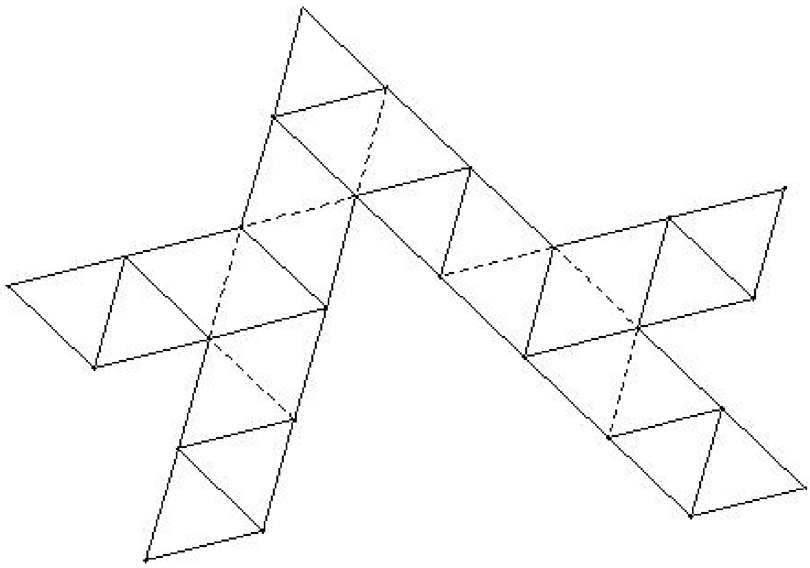


Př. 3.3

Zadání: Ve volném rovnobežném promítání narýsujte těleso stella octangula a sestrojte jeho síť tak, aby odpovídala narýsovanému obrázku. Délku hrany si zvolte sami, rýsujte tužkou na formát A3. (Nápověda: Jeden ze způsobů řešení je vepsaní dvou čtyřstěnů krychli.)

Řešení: Nejjednodušší způsob jak sestrojit mnohostěn stella octangula je vepsaní obou čtyřstěnů do krychle tak, že hrany čtyřstěnů budou tvořit úhlopříčky stěn a tělesová výška bude splývat s tělesovou úhlopříčkou krychle. Síť tohoto mnohostěnu pak narýsujeme tak, že délka stran trojúhelníků tvořících síť je polovina velikosti úhlopříčky stěny krychle.



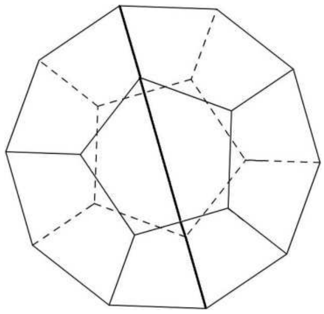


Př. 3.4

Zadání: Kolik rovin souměrností má pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn?

Řešení: V rovině známe osovou souměrnost, což je osa procházející středem útvaru, která ho rozděluje na dvě stejné části, které se po zrcadlovém překrytí shodují. V prostoru se tato souměrnost nazývá rovinová. Rovina souměrnosti mnohostěnu je taková rovina, která prochází středem mnohostěnu a rozděluje mnohostěn na dvě shodné poloviny. Při řešení rovinové souměrnosti si budeme pomáhat souměrností osovou. Neboť víme, že u platónských i archimédovských těles platí jakási pravidelnost, proto budeme nejprve řešit osovou souměrnost jednotlivých stěn.

a) dvanáctistěn – má 12 stěn tvaru pravidelného pětiúhelníku. Pětiúhelník má pět os souměrnosti (spojnice vrcholu a středu protější strany). Prohlídneme-li si dvanáctistěn prostorově, zjistíme, že najdeme vždy po dvou k sobě protější stěny, přičemž každá z těchto stěn má navíc hranu společnou s jinou takovou dvojicí. Takže máme vždy dvě dvojice protějších stěn, jejichž dvě a dvě spojnice úhlopříček jsou propojeny jinými dvěma hranami a tvoří rovinu souměrnosti (jak vidíme na obrázku). Kolik tedy takových rovin je? Máme-li 12 stěn a každou rovinu souměrnosti tvoří 4 úhlopříčky pětiúhelníku, který má 5 os souměrnosti dostáváme rovnici: $12 \cdot 5 \div 4 = 15$. Tedy dvanáctistěn má 15 rovin souměrnosti. Nebo jinak: v každé rovině souměrnosti leží právě dvě hrany, tedy $30 : 2 = 15$.



b) dvacetistěn – logicky musí platit totéž co pro dvanáctistěn, neboť jsou to k sobě duální tělesa. Ale přesvědčíme se. Dvacetistěn je tvořen dvaceti rovnostrannými trojúhelníky. Každý rovnostranný trojúhelník má tři osy souměrnosti (spojnice vrcholu a středu protější strany). Opět z prostorového hlediska platí to samé co u dvanáctistěnu, vždy jen dvě protější stěny jsou si navzájem rovnoběžné a mají společnou hranu s další takovou dvojicí. Takže čtyři stěny spolu s dvěma dalšími hranami tvoří jednu rovinu souměrnosti. Odtud dostáváme rovnici: $20 \cdot 3 \div 4 = 15$. I ikosaedr má 15 rovin souměrnosti.

4. Domácí úkoly a projekty

Úkol 4.1: Zvolte si libovolný mnohostěn vyjma krychli, čtyřstěn a osmistěn. Doma si narýsujte nebo najděte na internetu jeho síť a slepte si toto těleso z tvrdého papíru. Jeho stěny pak nabarvěte vodovými nebo temperovými barvami tak, aby každá stěna byla jinou barvou. Obzvláště pak u nekonvexních těles musí být vidět, že každá stěna je jiné barvy. Své těleso bude každý žák prezentovat před třídou. Žák musí znát jeho vlastnosti. Hodnocena bude především snaha a počet informací, které o svém tělese bude žák vědět.

Úkol 4.2: Projděte se v supermarketu nebo nějakém velkoobchodě s hračkami či jinými výrobky a na papír napište alespoň 15 výrobků, které vám připomínají různé mnohostěny. Můžete přiložit fotky, či dodatečně stáhnuté obrázky z internetu. U každého výrobku bude napsán přesný název, firma, která výrobek vyrábí a mnohostěn, který vám daný výrobek připomíná. Např. Bonboniéra Milka Singles Mix – osmiboký hranol.

Projekt 4.1: Domácí nebo ve škole. Žáci vytvoří skupiny. Každá skupina si vylosuje typy těles (archimédovská, deltatopy, hranoly a antihranoly, jehlany a platónská tělesa, atd.). Ve skupině se pak žáci domluví a tělesa si po jednom rozdělí. Každý žák bude mít za úkol své těleso na papíře naprojektovat, tzn. vytvořit alespoň čtyři řezy tohoto tělesa. Následně žák narýsuje sítě těchto čtyř řezů (nejméně) a z tvrdého papíru je slepí do čtyř těles. Před třídou pak každá skupina svá tělesa předvede a okomentuje, ukáže, jak se tělesa rozkládají a zase skládají dohromady.

Projekt 4.2: Dlouhodobý domácí projekt. Žáci utvoří skupiny (trojice), ve kterých vytvoří prezentaci fotek. Žáci se ve svém okolí poohlídnou a vyfotí všechny možné objekty, které jim připomínají tvary mnohostěnů (střechy, monumenty, budovy, sochy, stromy, atd.). Ve skupině pak dají fotky dohromady a vyberou 15 nejlepších adeptů do prezentace (od každého autora však musí být stejný počet fotek). Pod každou fotkou bude napsán autor, místo (město a ulice), na kterém byla fotka pořízena, a mnohostěn, který daný objekt připomíná. Každá skupina pak svou prezentaci předvede třídě v datu, které stanoví učitel.

Závěr

V tomto jen částečném přehledu jsme se seznámili se známými i méně známými mnohostěny, jejich vlastnostmi a metodami, které se využívají při řešení existence mnohostěnů. Řekli jsme si, jaké metody se používají při jejich zobrazování. Při rozdělování mnohostěnů do skupin jsme si ukázali také některé jejich sítě a vysvětlili si, jak se jejich sítě konstruují. K některým jsme si také uvedli příklad, kde bychom se s nimi mohli setkat v přírodě nebo ve světě dnešní civilizace. V části zaměřené pro středoškolské studenty jsem uvedla čtyři typy příkladů, které by se mohly případně v praxi na středních školách vyučovat. Byly to příklady na výpočty vrcholů, hran, stěn a existenční příklady, dále pak příklady na obsah a objem mnohostěnů, příklady zobrazovacích metod a konstrukce sítí a nakonec domácí práce a projekty.

Závěrem bych chtěla projevit svůj názor na toto téma. Mnohostěny jsou téma podle mě velmi pěkné, ale pro středoškolské studenty příliš složité a tak myslím, že proto se na středních školách téměř nevyučují. Ani já si nepamatuju, že by nás na střední škole učili kromě krychle, jehlanů, čtyřstěnu, hranolů a osmistěnu nějaké jiné mnohostěny. Rozhodně je škoda, že se opomíjí a setkáváme se s ním jen okrajově i v rámci Deskriptivní geometrie. Nicméně rovnice a příklady, které jsem se v této práci snažila podat, jsem se snažila vytvářet jednoduše, ale i tak si myslím, že by s nimi měla většina žáků středních škol problém, proto by se tyto příklady nejspíš hodily vhodněji do matematických či deskriptivářských olympiád pro studenty, kteří mají rozhled a představivost nebo lépe pro semináře nepovinných a volitelných matematických předmětů. Rozhodně pro mě psaní této bakalářské práce bylo přínosem.

Použitá literatura a zdroje

Molnár, J., Kobza, J.: *Extremální a kombinatorické úlohy z geometrie*. SPN, Praha, 1990.

Horák, S.: *Mnohostěny*. Edice ŠMM, MF, Praha, 1967.

Chmelíková, V., Moravec, L.: *Pravidelné mnohostěny*. MFF UK Praha, 2007.

Machačíková, I., Molnár, J.: *Polyhedrons, Chemistry and Something in Addition*. In: Plocki, A., Krech, I.: *Matematyka w przyrodzie - matematyka i przyroda w kształceniu powszechnym.* PWSZ, Nowy Sącz, 2011.

Doležalová, J.: *Polopravidelné rovinné grafy* (diplomová práce). Přf, UP Olomouc, 2010.

www.korthalsaltes.com (24. 2. 2013)

www.origami.webz.cz/matematika/pdf/telesa.pdf (17. 3. 2013)

web.natur.cuni.cz/ugmnz/mineral/tvary.html (20. 3. 2013)

http://mathworld.wolfram.com/PlatonicSolid.html (10. 3. 2013)

http://mathworld.wolfram.com/DualPolyhedron.html (10. 3. 2013)

http://mathworld.wolfram.com/ArchimedeanSolid.html (22. 3. 2013)

http://mathworld.wolfram.com/CatalanSolid.html (15. 4. 2013)

http://mathworld.wolfram.com/Deltahedron.html (1. 4. 2013)

http://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html (18. 4. 2013)

http://mathworld.wolfram.com/Stellation.html (22. 4. 2013)