



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

INVERZNÍ KINEMATIKA ROBOTICKÉHO RAMENE S PŘEDEPSANOU TRAJEKTORIÍ EFEKTORU POMOCÍ GEOMETRICKÉ ALGEBRY

INVERSE KINEMATICS OF A SERIAL ROBOT ARM WITH A GIVEN EFFECTOR TRAJECTORY IN
GEOMETRIC ALGEBRA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

LUDVÍK PROCHÁZKA

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Mgr. PETR VAŠÍK, Ph.D.

BRNO 2022

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Ludvík Procházka**
Studijní program: Matematické inženýrství
Studijní obor: bez specializace
Vedoucí práce: **doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.**
Akademický rok: 2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Inverzní kinematika robotického ramene s předepsanou trajektorií efektoru pomocí geometrické algebry

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Inverzní kinematika robotického ramene je problém pohybu hmotného tělesa, je to tedy problém aplikací eukleidovských transformací. Na tyto úlohy se s úspěchem používají geometrické algebry, kdy jak geometrický objekt tak i eukleidovské trajektorie jsou reprezentovány prvky Cliffordovy algebry vhodné dimenze. Díky tomu lze snadno přidávat omezující podmínky pro pohyb ramene, například předepsat trajektorii efektoru.

Cíle bakalářské práce:

Bude zpracován úvod do teorie geometrických algeber. Bude popsána jejich aplikace v popisu inverzní kinematiky robotického ramene.

Následně bude přidána omezující podmínka, konkrétně bude předepsána trajektorie efektoru.

Model bude implementován v jazyce Python nebo podobném.

Seznam doporučené literatury:

DORST, L., FONTIJNE, D., MANN, S. Geometric Algebra for Computer Science: an Object-Oriented Approach to Geometry. Rev. ed. Burlington, Mass.: Morgan Kaufmann Publishers, c2007. Morgan Kaufmann series in computer graphics. ISBN 978-0-12-374942-0.

GONZÁLEZ CALVET, R. Treatise of Plane Geometry Through Geometric Algebra. 1. Cerdanyola del Vallés: [nakladatel není známý], 2007. TIMSAC. ISBN 978-84-611-9149-9.

HILDENBRAND, D. Foundations of Geometric Algebra Computing. Geometry and Computing, 8. ISBN 3642317936.

HILDENBRAND, D. Introduction to Geometric Algebra Computing. Boca Raton, 2018. ISBN 978-149-8748-384.

PERWASS, C. Geometric Algebra with Applications in Engineering. Berlin: Springer, c2009. ISBN 354089067X.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

.....
prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

.....
doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

V této práci najdeme nejen řešení úlohy inverzní kinematiky, ale i úvod do teorie geometrických algeber. Těžištěm práce je popis konformní geometrické algebry CGA, kterou využíváme k řešení inverzní kinematiky robotického ramene v rovině. Součástí práce je i příloha obsahující algoritmy k vyřešení inverzní kinematiky robotického ramene i při požadavku na trajektorii efektoru.

Summary

In this thesis we find not only solution of inverse kinematics problem, but also an introduction to the theory of geometric algebras. The focus of the thesis is the description of conformal geometric algebra CGA, which we use to solve the planar inverse kinematics of the serial robotic arm. Part of the work is an attachment containing algorithms for solving inverse kinematics of the serial robotic arm when specific trajectory is required.

Klíčová slova

inverzní kinematika, geometrická algebra, konformní geometrická algebra, robotické rameno

Keywords

inverse kinematics, geometric algebra, conformal geometric algebra, robotic arm

PROCHÁZKA, L. *Inverzní kinematika robotického ramene s předepsanou trajektorií efektoru pomocí geometrické algebry*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2022. 49 s. Vedoucí doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci na téma *Inverzní kinematika robotického ramene s předepsanou trajektorií efektoru pomocí geometrické algebry* zpracoval samostatně pod vedením doc. Mgr. Petra Vašíka, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu použité literatury.

Ludvík Procházka

Na tomto místě bych chtěl vyjádřit vděčnost doc. Mgr. Petru Vašíkovi, Ph.D. K ochotě, se kterou vedl mou bakalářskou práci, musím vyzdvihnout jeho nápomocnost, četné dobré rady a užitečné připomínky. Je to i lidský přístup a příjemná atmosféra během konzultací, co mě motivovaly při psaní bakalářské práce.

Ludvík Procházka

Obsah

Úvod	2
1 Geometrická Algebra	3
1.1 Cliffordova algebra	3
1.2 Základní vlastnosti	4
1.2.1 Báze geometrické algebry	5
1.2.2 Geometrická interpretace součinů	7
1.2.3 Reverse	8
1.3 Vnitřní a vnější součin	8
1.4 Blady	10
1.4.1 Geometrický součin bladů	11
1.4.2 Outer product a inner product null space	12
1.4.3 Projekce a rejekce	13
1.5 Versory	14
1.6 Reprezentace objektů	15
1.6.1 Stereografické rozšíření eukleidovského prostoru	15
1.6.2 Homogenizace stereografického rozšíření	16
1.6.3 Geometrické objekty v konformní geometrické algebře $\mathbb{G}_{4,1}$	18
1.7 Generátory transformací	23
1.7.1 Grupa rotací	24
1.7.2 Algebra vnějšího součinu	24
1.7.3 Rotace	25
1.7.4 Translace	27
1.7.5 Rotace kolem libovolné osy	27
1.8 Dekompozice dvojbody	28
1.9 Geometrická algebra $\mathbb{G}_{3,1}$	37
2 Inverzní kinematika	39
2.1 2D manipulátor	39
2.1.1 Konkrétní úloha v rovinné CGA	39
2.1.2 Diskretizace pohybu	41
2.1.3 Pohyb po předepsané trajektorii	42
2.1.4 Implementace v jazyce Python	45
Závěr	48
Literatura	49

Úvod

K problému inverzní kinematiky robotického ramene přistupujeme v této práci netradičním způsobem využitím konformní geometrické algebry CGA. Jednou z výhod tohoto přístupu je, že části robotického ramene i transformace vedoucí k vyřešení úlohy inverzní kinematiky jsme schopni reprezentovat jako objekty v rámci jedné matematické struktury. Navíc jsou výpočty v rámci CGA vedoucí k vyřešení úlohy inverzní kinematiky rychlejší a jednodušší, než v případě tradičního přístupu přes maticové počty.

Rozumným požadavkem může být předepsaná trajektorie efektoru. Například v případě pohybu po přímce snižujeme energii potřebnou k vykonání pohybu na minimum. Často se můžeme setkat s potřebou vyhnout se překážce v cestě efektoru a požadovat tak trajektorii například po oblouku.

Tato práce se zabývá konkrétně inverzní kinematikou robotického ramene v rovině a řeší trajektorii po přímce a oblouku. Výstupem práce není pouze algoritmus pro dané robotické rameno, ale i úvod do teorie geometrických algeber. Tento úvod do teorie tvoří hlavní těžiště práce, neboť cílem bylo i to, aby geometrická algebra pro čtenáře nepředstavovala takzvaný black box.

Text je členěn do dvou hlavních celků věnujících se postupně teorii geometrických algeber a inverzní kinematice. V rámci první části jsou nejprve zavedeny základní pojmy a vlastnosti, které jsou dále využívány při důkladnějším popisu struktury geometrické algebry. Najdeme zde i naznačení souvislostí s hlubším matematickým pozadím nebo důkladné rozebrání dekompozice dvoj bodu. Druhá část práce podává řešení úlohy inverzní kinematiky jednoduchého robotického ramene v rovině s předepsanou trajektorií pohybu, a to i s ukázkou kódu v jazyce Python.

1 Geometrická Algebra

1.1 Cliffordova algebra

Existuje více způsobů, jak zavést Cliffordovu algebru. Obecnou definici lze nalézt například v práci Oldřicha Spáčila, [12]. Pro potřeby této práce je Cliffordova algebra vektorovým prostorem spolu s kvadratickou formou, díky které se jedná o volnou unitární asociativní algebru.

Slovo *volná* odkazuje na fakt, že bázi Cliffordovy algebry můžeme volně generovat z báze toho vektorového prostoru, ke kterému se váže daná kvadratická forma. Existence asociované bilinéární formy k dané kvadratické formě nám dává právo nazývat tuto algebru *unitární* a vzhledem k asociativitě daného součinu lze hovořit o algebře *asociativní*. Slovem *algebra* je zde myšlen vektorový prostor spolu s operacemi.

V dalším textu se omezíme na vektorový prostor \mathbb{R}^n nad tělesem \mathbb{R} a nedegenerovanou kvadratickou formou.

Definice 1.1. Bud $\mathbb{R}^{p,q}$ reálný vektorový prostor dimenze $p + q$ a $\varphi : \mathbb{R}^{p,q} \times \mathbb{R}^{p,q} \rightarrow \mathbb{R}$ bilinéární forma. Kanonickou bázi $\mathbb{R}^{p,q}$ rozumíme uspořádanou množinu:

$$\overline{\mathbb{R}}^{p,q} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_q\} \subset \mathbb{R}^{p,q}$$

lineárně nezávislých vektorů splňujících

$$\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} +1, & 1 \leq i = j \leq p, \\ -1, & p < i = j \leq p + q, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Jinými slovy, pro prvních p vektorů platí $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1$ a pro $i > p$ platí $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = -1$.

Definice 1.2 (Geometrická algebra). Nechť $\mathbb{R}^{p,q}$ je vektorový prostor dimenze $p+q$ nad \mathbb{R} a $\varphi : \mathbb{R}^{p,q} \times \mathbb{R}^{p,q} \rightarrow \mathbb{R}$ symetrická bilinéární forma. Dále nechť $\mathbb{A}(\mathbb{R}^{p,q})$ značí asociativní algebru nad dvojicí $(\mathbb{R}^{p,q}, \varphi)$ a \circ značí součin na této algebře, potom řekneme, že algebra $\mathbb{A}(\mathbb{R}^{p,q})$ se nazývá *geometrická*, jestliže navíc $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{p,q}$ platí:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}). \quad (1.1)$$

Symetrická bilinéární forma z Definice 1.2 na $\mathbb{R}^{p,q}$ je asociovaná kvadratické formě Q skrze vztah $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(Q(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - Q(\mathbf{a}) - Q(\mathbf{b}))$. Dvojici $(\mathbb{R}^{p,q}, \varphi)$ proto můžeme chápat jako vektorový prostor s kvadratickou formou.

Geometrickou algebru $\mathbb{A}(\mathbb{R}^{p,q})$ dále značíme jako $\mathbb{G}(\mathbb{R}^{p,q})$ nebo jednoduše $\mathbb{G}_{p,q}$. Součin \circ se nazývá *Cliffordův* nebo *geometrický*. Prvky $\mathbb{G}_{p,q}$ se nazývají *multivektory* a jsou generovány pomocí geometrického součinu prvků báze $\overline{\mathbb{R}}^{p,q}$. Z tohoto plyne, že geometrická algebra je gradovaný vektorový prostor, což bude rozebráno později. V dalším textu budeme vynechávat znak „ \circ “ a geometrický součin dvou vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} budeme značit stručně \mathbf{ab} .

1.2 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Poznámka 1.3. Součin φ je pouze pseudoskalární, neboť nespňuje druhý axiom skalárního součinu v případech, kdy $q \neq 0$. Přesto v dalším textu budeme často pro jednoduchost používat přívlastek *skalární*.

Poznámka 1.4. Je dobré si uvědomit, že konkrétní zadání bilineární formy φ je to, co nám určuje konkrétní geometrii. Říkáme tím, jak se bude chovat skalární součin, díky němuž můžeme sledovat úhly a vzdálenosti. Například pro $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ můžeme zavést bilineární formu $\psi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$ vedoucí na eukleidovskou geometrii, kde bude obecně jiná geometrie než pro bilineární formu s váhami $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^2 c_i a_i b_i$, kde $c_i \in \mathbb{R}$ je váha součinu i -tých souřadnic.

1.2 Základní vlastnosti

Vlastnosti geometrického součinu mohou být odvozeny z definiční rovnice (1.1). Některá důležitá a užitečná odvození si v této kapitole ukážeme.

Příklad 1.5. Necht $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{G}_{p,q}$. Spočtěme nyní $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \varphi((\mathbf{a} + \mathbf{b}), (\mathbf{a} + \mathbf{b})), \\ \mathbf{a}\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{b} &= \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{b}), \\ \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a} &= 2\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\ \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a}) &= \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Výraz na levé straně rovnice (1.2) je symetrický součin a značí se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Součin $\mathbf{a}\mathbf{b}$ můžeme vyjádřit jako součet symetrického a antisymetrického součinu, kde antisymetrický součin značíme $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Abychom dostali

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b},\tag{1.3}$$

upravíme

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= \mathbf{a}\mathbf{b}, \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= \mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b} - \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a}), \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{b}\mathbf{a}).\end{aligned}$$

Definujeme tak $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a})$ a $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{b}\mathbf{a})$.

Ukažme chování geometrického součinu na bázových prvcích $\mathbf{e}_i \in \overline{\mathbb{R}}^{p,q}$. Protože uvažujeme ortogonální bázi a nedegenerovanou kvadratickou formu, platí

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \neq 0 \quad \text{ale} \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0, \quad i \neq j.$$

Z toho dostáváme

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j, \\ \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i &= \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i.\end{aligned}$$

Navíc díky rovnici (1.2) hned vidíme, že

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i.\tag{1.4}$$

Poznámka 1.6. Prvek $e_i e_j \notin \overline{\mathbb{R}}^{p,q}$, ale $e_i e_j \in \mathbb{G}_{p,q}$. Jedná se o další prvek báze prostoru $\mathbb{G}_{p,q}$. Slovo *volná algebra* z úvodu textu znamená, že takto generujeme z báze $\overline{\mathbb{R}}^{p,q}$ další prvky báze prostoru $\mathbb{G}_{p,q}$.

1.2.1 Báze geometrické algebry

Jak již bylo nastíněno, bázi geometrické algebry $\mathbb{G}(\mathbb{R}^{p,q})$ generujeme z báze prostoru $\mathbb{G}_{p,q}$. Pro motivaci uvažujme $\mathbb{G}(\mathbb{R}^{2,0})$ a vynásobme \mathbf{ab} , kde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2)(b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2) = a_1 b_1 \underbrace{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1}_{=e_1^2=1} + a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_2 b_1 \underbrace{\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1}_{=-\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2} + a_2 b_2 \underbrace{\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2}_{=e_2^2=1} = \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Získali jsme součet skaláru a násobku prvku $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$, který tvoří další prvek báze prostoru $\mathbb{G}(\mathbb{R}^{2,0})$. Generování tedy probíhá volným používáním geometrického součinu na prvcích báze generujícího prostoru. Přesto máme zaručenu konečnou dimenzi. Ukažme, že dalším násobením už nezískáme další prvky báze:

$$\text{například } \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2 \underbrace{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1}_{=1} = -\mathbf{e}_2.$$

Využili jsme rovnice (1.2) a asociativity geometrického součinu (můžeme zaměnit pořadí ve dvojici bázových vektorů a změnit přitom znaménko). Z prostoru \mathbb{R}^2 už tedy volným generováním nedostaneme nové prvky.

Definice 1.7 (Bázový blade). *Bázový blade* je geometrický součin libovolného počtu libovolných prvků generující báze $\overline{\mathbb{R}}^{p,q}$.

Pro \mathbb{G}_3 dostáváme množinu všech bázových bladeů

$$\{\mathbf{1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3\}. \quad (1.5)$$

Poznámka 1.8. V množině (1.5) se vyskytuje tučná jednička jako vektor záměrně. Skalár je také prvkem geometrické algebry a kvadratická forma v definici geometrické algebry nám dodává vlastně koeficient, respektive násobek této jedničky. Formálně správně by se měl v definiční rovnici (1.1) výraz na pravé straně násobit touto jedničkou, abychom zůstali v algebře, tedy $\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{a})\mathbf{1}$.

Definice 1.9 (Kanonická báze geometrické algebry). *Kanonickou bází* geometrické algebry $\mathbb{G}_{p,q}$ rozumíme uspořádanou množinu $\overline{\mathbb{G}}_{p,q}$ všech bázových bladeů, kde zavedeme *lexikografické* uspořádání. I -tý prvek báze značíme \mathbf{E}_i .

Poznámka 1.10. Je důležité si uvědomit, že množina všech bázových bladeů (1.5) není to samé jako báze geometrické algebry v definici (1.9). Množina (1.5) není uspořádaná a klidně bychom mohli zaměnit pořadí (o kterém vlastně nemá smysl v neuspořádané množině ani mluvit) jejich prvků. Ovšem množina z definice (1.9) je uspořádaná.

Chápeme-li tedy množinu (1.5) jako $\overline{\mathbb{G}}_3$ (což skutečně můžeme, pořadí prvků je zapsáno v lexikografickém uspořádání), dostáváme značení

$$\{\underbrace{\mathbf{1}}_{\mathbf{E}_1}, \underbrace{\mathbf{e}_1}_{\mathbf{E}_2}, \underbrace{\mathbf{e}_2}_{\mathbf{E}_3}, \underbrace{\mathbf{e}_3}_{\mathbf{E}_4}, \underbrace{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2}_{\mathbf{E}_5}, \underbrace{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3}_{\mathbf{E}_6}, \underbrace{\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3}_{\mathbf{E}_7}, \underbrace{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3}_{\mathbf{E}_8}\}. \quad (1.6)$$

1.2 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Vzhledem ke způsobu generování $\overline{\mathbb{G}}_{p,q}$ je zřejmé, že počet prvků bude odpovídat počtu podmnožin potenční množiny množiny $\mathbb{R}^{p,q}$. Jinými slovy, dimenze prostoru $\mathbb{G}_{p,q}$ je konečná a je rovna 2^n , kde $n = p + q$ je dimenze generujícího prostoru \mathbb{R}^{p+q} . Obecný multivektor pak můžeme zapsat jako

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{2^n} a_i \mathbf{E}_i, \quad (1.7)$$

kde n je mohutnost generující báze a $a_i \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty lineární kombinace. Multivektorem $\mathbf{A} \in \mathbb{G}_3$ je například $\mathbf{A} = 2 + 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Definice 1.11 (Stupeň bazového bladu). *Stupeň bazového bladu je číslo udávající počet prvků generující báze tvořících bazový blade. Značí se $\text{gr}(\mathbf{E}_i) \quad \forall \mathbf{E}_i \in \overline{\mathbb{G}}_{p,q}$.*

Například pro $\mathbf{E}_7 \in \overline{\mathbb{G}}_{3,0}$ je $\text{gr}(\mathbf{E}_7) = \text{gr}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = 2$.

Definice 1.12 (Pseudoskalár). Necht $\overline{\mathbb{G}}_{p,q}$ je kanonická báze geometrické algebry. *Pseudoskalár je bazový blade $\mathbf{E}_{(p+q)}$ nejvyššího stupně a značí se \mathbf{I} .*

Bylo zmíněno, že geometrická algebra má strukturu gradovaného vektorového prostoru. Uvažujme konkrétně \mathbb{G}_3 . Zde je tabulka bazových vektorů.

Stupeň	Název	Bázové blady	Počet
0	Skalár	$\mathbf{1}$	1
1	Vektor	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	3
2	Bivektor	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$	3
3	Trivektor	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$	1

Tabulka 1.1: Báze prostoru \mathbb{G}_3

Můžeme tedy uvažovat vektorové prostory generované bazovými blady stejného stupně.

Definice 1.13 (k-podprostor). Řekneme, že *k-podprostor* prostoru $\mathbb{G}_{p,q}$ je vektorový prostor generovaný bazovými blady stupně k . Značí se $\mathbb{G}_{p,q}^k$. Jeho báze se značí $\overline{\mathbb{G}}_{p,q}^k$ a jeho dimenze je $\binom{p+q}{k}$.

Například $\mathbb{G}_3^1 = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

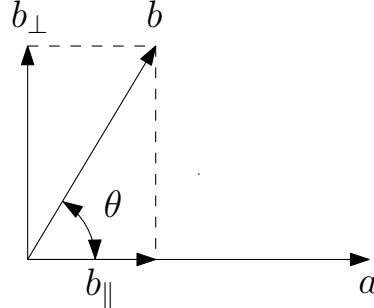
Definice 1.14 (k-vektor). Multivektor ve tvaru lineární kombinace bazových bladů stupně k se nazývá *k-vektor*.

Poznámka 1.15. Někdy budeme v případě 1-vektorů používat pouze slovo vektor. Naopak slovem vektor budeme někdy označovat i obecný multivektor. Text je ale psán tak, aby z kontextu byl význam zřejmý.

Například v \mathbb{G}_3 je $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$ 2-vektor, ale $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ je obecný multivektor, neboť bazové blady \mathbf{e}_1 a $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ nejsou stejného stupně. Běžně se pro 2-vektory, resp. 3-vektory používá značení bivektor resp. trivektor.

1.2.2 Geometrická interpretace součinů

Příklad 1.16. Uvažujme nyní vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{G}_2^1$. Vektor \mathbf{b} získáme jako součet dvou vektorů, z nichž jeden je rovnoběžný s \mathbf{a} a druhý kolmý na \mathbf{a} . Jinými slovy $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}$.



Obrázek 1.1: Symetrický součin

Spočtěme nyní $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_{\parallel} + \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_{\perp}}_{=0} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_{\parallel}.$$

Využili jsme rovnice (1.2), tudíž faktu, že skalární součin dvou na sebe kolmých vektorů je roven nule. Je známo a lze snadno ukázat, že

$$\mathbf{b}_{\parallel} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}.$$

Potom

$$\|\mathbf{b}_{\parallel}\| = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \|\mathbf{a}\| = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$$

je velikost projekce vektoru \mathbf{b} na \mathbf{a} . Zřejmě $\cos(\theta) = \frac{\|\mathbf{b}_{\parallel}\|}{\|\mathbf{b}\|}$, tudíž

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b}\| \cos(\theta) &= \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}, \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\theta). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Jsou-li \mathbf{a} a \mathbf{b} jednotkové vektory, pak součin $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ má geometrickou interpretaci jako délka projekce vektoru \mathbf{b} na \mathbf{a} .

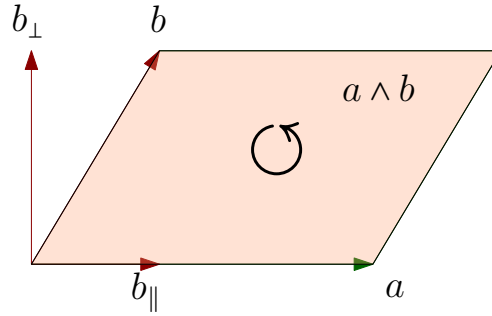
Příklad 1.17. Spočtěme nyní pro $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{G}_2^1$ součin $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2) \wedge (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2) \\ &= a_1 b_1 \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1}_{=0} + a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + a_2 b_1 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 + a_2 b_2 \underbrace{\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2}_{=0} \\ &= a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - a_2 b_1 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Číslo $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ je determinant čtvercové matice řádu 2, kde ve sloupcích jsou souřadnice vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} . Jedna z interpretací determinantu je obsah rovnoběžníku tvořeného vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} . Proto

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin(\theta). \quad (1.10)$$

1.3 VNITŘNÍ A VNĚJŠÍ SOUČIN



Obrázek 1.2: Antisymetrický součin

Součin $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ má tedy interpretaci jako *orientovaný obsah*. Při záměně pořadí násobení vektorů bychom mohli hovořit o opačné orientaci, než jak je znázorněna na Obrázku 1.2.

1.2.3 Reverse

Pro další potřeby práce je třeba zavést pojem reverse, jakožto důležitého aspektu geometrické algebry. Později oceníme její aplikaci v transformacích.

Definice 1.18 (Reverse). Bud $\mathbf{E}_i \in \overline{\mathbb{G}}_{p,q}$. Reverse \mathbf{E}_i se značí $\tilde{\mathbf{E}}_i$ a je to takový blade, který vznikne obrácením pořadí násobení prvků generující báze.

Například v \mathbb{G}_3 platí $\tilde{\mathbf{E}}_8 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1$. Reversi obecného multivektoru potom definujeme vztahem

$$\tilde{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^{2^n} a_i \tilde{\mathbf{E}}_i. \quad (1.11)$$

Další vlastnosti reverse, jako je $\tilde{\tilde{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$ a jiné, je možné najít například v publikaci od C. Perwasse, [10].

1.3 Vnitřní a vnější součin

V Kapitole 1.2 jsme nastínili dva nové součiny. Představili jsme *vnitřní* (symetrický) a *vnější* (antisymetrický) součin na vektorech, přesněji na prvcích $\mathbb{G}_{p,q}^1$. Nyní rozšíříme tyto pojmy na multivektory.

Definice 1.19 (Stupňová projekce). Necht $\mathbf{E}_i \in \overline{\mathbb{G}}_{p,q}$. Stupňová projekce bázového blade \mathbf{E}_i na stupeň k se značí $\langle \mathbf{E}_i \rangle_k$ a definuje jako

$$\langle \mathbf{E}_i \rangle_k = \begin{cases} \mathbf{E}_i, & \text{gr}(\mathbf{E}_i) = k, \\ 0, & \text{gr}(\mathbf{E}_i) \neq k. \end{cases}$$

Pro obecný multivektor definujeme projekci jako

$$\langle \mathbf{A} \rangle_k = \sum_{i=1}^{2^n} a_i \langle \mathbf{E}_i \rangle_k. \quad (1.12)$$

Příklad 1.20. Aplikujme stupňové projekce na multivektor $\mathbf{A} \in \mathbb{G}_3$, $\mathbf{A} = 3 + 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A} \rangle_0 &= \langle 3 \rangle_0 + \langle 2\mathbf{e}_1 \rangle_0 + \langle -\mathbf{e}_3 \rangle_0 + \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \rangle_0 + \langle 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \rangle_0, \\ \langle \mathbf{A} \rangle_0 &= \underbrace{\langle 3 \rangle_0}_{=3} + 2 \underbrace{\langle \mathbf{e}_1 \rangle_0}_{=0} - \underbrace{\langle \mathbf{e}_3 \rangle_0}_{=0} + \underbrace{\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \rangle_0}_{=0} + 2 \underbrace{\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \rangle_0}_{=0} = 3.\end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle_1 = \underbrace{\langle 3 \rangle_1}_{=0} + 2 \underbrace{\langle \mathbf{e}_1 \rangle_1}_{=\mathbf{e}_1} - \underbrace{\langle \mathbf{e}_3 \rangle_1}_{=\mathbf{e}_3} + \underbrace{\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \rangle_1}_{=0} + 2 \underbrace{\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \rangle_1}_{=0} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3.$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle_2 = \underbrace{\langle 3 \rangle_2}_{=0} + 2 \underbrace{\langle \mathbf{e}_1 \rangle_2}_{=0} - \underbrace{\langle \mathbf{e}_3 \rangle_2}_{=0} + \underbrace{\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \rangle_2}_{=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3} + 2 \underbrace{\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \rangle_2}_{=0} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3.$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle_3 = \underbrace{\langle 3 \rangle_3}_{=0} + 2 \underbrace{\langle \mathbf{e}_1 \rangle_3}_{=0} - \underbrace{\langle \mathbf{e}_3 \rangle_3}_{=0} + \underbrace{\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \rangle_3}_{=0} + 2 \underbrace{\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \rangle_3}_{=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3} = 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3.$$

Definice 1.21 (Vnitřní součin). Buďte $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \in \overline{\mathbb{G}}_{p,q}$. Vnitřní součin vektorů \mathbf{E}_i a \mathbf{E}_j , kde $\text{gr}(\mathbf{E}_i) = k$ a $\text{gr}(\mathbf{E}_j) = l$, se značí $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j$ a definuje jako

$$\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = \langle \mathbf{E}_i\mathbf{E}_j \rangle_{|k-l|}, \quad i, j > 0. \quad (1.13)$$

Pro obecné multivektory $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{G}_{p,q}$, kde $\mathbf{A} = a_i\mathbf{E}_i, \mathbf{B} = b_j\mathbf{E}_j$, definujeme vnitřní součin jako

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i,j} a_i b_j (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j). \quad (1.14)$$

Dále uvažujeme následující přirozené vlastnosti pro $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{G}_{p,q}$, [10].

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, & (\text{Distributivita}) \\ (a\mathbf{A}) \cdot (b\mathbf{B}) &= ab(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). & (\text{Homogenita})\end{aligned}$$

Definice 1.22 (Vnější součin). Necht $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \in \overline{\mathbb{G}}_{p,q}$. Vnější součin vektorů \mathbf{E}_i a \mathbf{E}_j , kde $\text{gr}(\mathbf{E}_i) = k$ a $\text{gr}(\mathbf{E}_j) = l$, se značí $\mathbf{E}_i \wedge \mathbf{E}_j$ a definuje jako

$$\mathbf{E}_i \wedge \mathbf{E}_j = \langle \mathbf{E}_i\mathbf{E}_j \rangle_{k+l}, \quad i, j > 0. \quad (1.15)$$

Pro obecné multivektory $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{G}_{p,q}$, kde $\mathbf{A} = a_i\mathbf{E}_i, \mathbf{B} = b_j\mathbf{E}_j$, definujeme vnější součin jako

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \sum_{i,j} a_i b_j (\mathbf{E}_i \wedge \mathbf{E}_j). \quad (1.16)$$

Dále uvažujeme následující přirozené vlastnosti pro $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{G}_{p,q}$, [10].

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}, & (\text{Distributivita}) \\ (a\mathbf{A}) \wedge (b\mathbf{B}) &= ab(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}). & (\text{Homogenita})\end{aligned}$$

1.4 BLADY

Příklad 1.23. Ukažme chování vnitřního a vnějšího součinu na bázových bladech z \mathbb{G}_3 .

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 &= \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \rangle_{|2-1|} = \langle \mathbf{e}_1 \rangle_1 = \mathbf{e}_1, \\(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 &= \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \rangle_{|2-1|} = \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \rangle_1 = 0, \\(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_2 &= \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \rangle_{2+1} = \langle \mathbf{e}_1 \rangle_3 = 0, \\(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_3 &= \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \rangle_{2+1} = \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \rangle_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Vnitřní součin má význam snižování stupně, kdežto díky vnějšímu součinu můžeme stupeň zvětšovat.

Příklad 1.24. Spočtěme pro $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{G}_3$ součiny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = 2 + 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$, $\mathbf{B} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$.

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= 2(\mathbf{1} \cdot \mathbf{e}_1) + 2(\mathbf{1} \cdot (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)) + 3(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + 3(\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)) - ((\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1) - \\&\quad ((\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)) \\&= 2\langle \mathbf{e}_1 \rangle_{|0-1|} + 2\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \rangle_{|0-2|} + 3\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 \rangle_{|1-1|} + 3\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \rangle_{|1-2|} - \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 \rangle_{|2-1|} - \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \rangle_{|2-2|} \\&= 2\langle \mathbf{e}_1 \rangle_1 + 2\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \rangle_2 + 3\langle \mathbf{1} \rangle_0 + 3\langle \mathbf{e}_2 \rangle_1 + \langle \mathbf{e}_3 \rangle_1 + \langle \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 \rangle_0 \\&= 3 + 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} &= 2(\mathbf{1} \wedge \mathbf{e}_1) + 2(\mathbf{1} \wedge (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)) + 3(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) + 3(\mathbf{e}_1 \wedge (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)) - ((\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_1) - \\&\quad ((\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) \wedge (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)) \\&= 2\langle \mathbf{e}_1 \rangle_{0+1} + 2\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \rangle_{0+2} + 3\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 \rangle_{1+1} + 3\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \rangle_{1+2} - \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 \rangle_{2+1} - \\&\quad \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \rangle_{2+2} \\&= 2\langle \mathbf{e}_1 \rangle_1 + 2\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \rangle_2 + 3\langle \mathbf{1} \rangle_2 + 3\langle \mathbf{e}_2 \rangle_3 + \langle \mathbf{e}_3 \rangle_3 + \langle \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 \rangle_4 \\&= 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

1.4 Blady

Rozšířme nyní pojem bázového bladu. Zavedeme obecně pojem *blade*, protože právě blady mohou reprezentovat geometrické objekty, jak uvidíme dále.

Definice 1.25 (Blade). Necht $k \in \mathbb{N}$ a $\{\mathbf{a}_i\} \subset \mathbb{G}_{p,q}^1$ je libovolná množina k lineárně nezávislých 1-vektorů. Potom vnější součin těchto vektorů se nazývá *blade* stupně k nebo *k-blade*. *Blade* stupně k se pak značí jako

$$\mathbf{A}_{(k)} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_k = \bigwedge_{i=1}^k \mathbf{a}_i. \quad (1.17)$$

Pro ukázkou si vezměme vektory $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{G}_{3,1}$, $\mathbf{A} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$, $\mathbf{B} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4$. Vektor \mathbf{A} je bivektor i 2-blade, neboť $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$. Vektor \mathbf{B} je sice bivektor, ale nikoliv 2-blade, neboť $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4$ se nedá vyjádřit jako vnější součin dvou 1-vektorů.

1.4.1 Geometrický součin bladů

Uvažujme geometrický součin dvou bladů $\mathbf{A}_{\langle k \rangle}, \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$. Zřejmě platí

$$\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} = \sum_{r=1}^n \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_r. \quad (1.18)$$

Mají-li navíc dva bázevoly blady $\mathbf{E}_{\langle k \rangle}, \mathbf{E}_{\langle l \rangle} \in \overline{\mathbb{G}}_{p,q}$ m společných bázevolych vektorů, potom platí

$$\mathbf{E}_{\langle k \rangle} \mathbf{E}_{\langle l \rangle} = \langle \mathbf{E}_{\langle k \rangle} \mathbf{E}_{\langle l \rangle} \rangle_{k+l-2m}.$$

Například pro $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \in \overline{\mathbb{G}}_3$ platí $(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = \langle \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \rangle_{2+2-2} = \langle \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \rangle_2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3$.

Rovnici (1.18) můžeme nakonec přepsat do tvaru

$$\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} = \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_{|k-l|} + \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_{|k-l|+2} + \cdots + \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_{k+l-2} + \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_{k+l}. \quad (1.19)$$

Prvek nejnižšího stupně $|k-l|$ v rovnici (1.19) je tedy výsledek vnitřního součinu a prvek nejvyššího stupně $k+l$ je výsledek vnějšího součinu.

Vezmeme-li $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{G}_{p,q}^1$, potom dostáváme z (1.19)

$$\mathbf{a} \mathbf{b} = \langle \mathbf{a} \mathbf{b} \rangle_{|1-1|} + \langle \mathbf{a} \mathbf{b} \rangle_{1+1} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}.$$

Pro vnější a vnitřní součin dvou bladů tedy zřejmě platí

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \wedge \mathbf{B}_{\langle l \rangle} &= \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_{k+l}, \\ \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \cdot \mathbf{B}_{\langle l \rangle} &= \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_{|k-l|}. \end{aligned}$$

Věta 1.26. Buď $\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes k}$. Inverze k bladu \mathbf{A}_k je ve tvaru

$$\mathbf{A}_k^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}_{\langle k \rangle}}{\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \tilde{\mathbf{A}}_{\langle k \rangle}}. \quad (1.20)$$

Důkaz využívá faktu, že jedná-li se o non-null blady, jak říká předpoklad, potom platí, že geometrický součin jeho samého se sebou je roven skalárnímu součinu a že jeho reverse rozhoduje pouze o znaménku. Důkaz lze nalézt v [10].

Definice 1.27 (Duál). Necht $\mathbf{E}_i \in \overline{\mathbb{G}}_{p,q}$. Duál k \mathbf{E}_i se značí \mathbf{E}_i^* a definuje jako

$$\mathbf{E}_i^* = \mathbf{E}_i \mathbf{I}^{-1}. \quad (1.21)$$

Ukažme pro \mathbb{G}_3 , že $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \mathbf{I}^{-1} &= (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \\ &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \underbrace{\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3}_{=1} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \\ &= \mathbf{e}_1 \underbrace{\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2}_{=1} \mathbf{e}_1 \\ &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 = 1. \end{aligned}$$

1.4 BLADY

Operaci duálu na obecný multivektor pak definujeme jako

$$\mathbf{A}^* = \sum_{i=1}^{2^n} a_i \mathbf{E}_i^*. \quad (1.22)$$

Dále rozšíříme pojem skalárního součinu ve smyslu bilineární formy z Definice 1.2, neboť dosud byl definován pouze pro 1-vektory.

Definice 1.28. Necht $\mathbf{A}_{\langle k \rangle}, \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$. Jejich *skalární* součin značíme $*$ a definujeme jako

$$\mathbf{A}_{\langle k \rangle} * \mathbf{B}_{\langle l \rangle} = \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_0. \quad (1.23)$$

1.4.2 Outer product a inner product null space

V této kapitole ukážeme, že k -blady můžeme chápat jako k -dimenzionální podprostory.

Definice 1.29 (Outer-Product Null Space). *Outer-Product Null Space* (OPNS) bladu $\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$ je množina značená $\text{NO}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle})$ a definovaná jako

$$\text{NO}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{G}_{p,q}^1 : \mathbf{x} \wedge \mathbf{A}_{\langle k \rangle} = 0 \}. \quad (1.24)$$

Například pro $\mathbf{a} \in \mathbb{G}_{p,q}^1$ dostáváme

$$\text{NO}(\mathbf{a}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{G}_{p,q}^1 : \mathbf{x} \wedge \mathbf{a} = 0 \} = \{ \alpha \mathbf{a} : \alpha \in \mathbb{R} \},$$

což reprezentuje přímku procházející počátkem ve směru vektoru \mathbf{a} . Pro $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \mathbb{G}_{p,q}^2$ dostáváme

$$\text{NO}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{G}_{p,q}^1 : \mathbf{x} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0 \} = \{ \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \},$$

což reprezentuje rovinu procházející počátkem a obsahující vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} . Jinými slovy pro $\mathbf{A}_{\langle k \rangle} = \bigwedge_{i=1}^k \mathbf{a}_i$ platí $\text{NO}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle}) = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$.

Definice 1.30 (Inner-Product Null Space). *Inner-Product Null Space* (IPNS) bladu $\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$ je množina značená $\text{NI}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle})$ a definovaná jako

$$\text{NI}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{G}_{p,q}^1 : \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}_{\langle k \rangle} = 0 \}. \quad (1.25)$$

Protože některá chování bladů platí jen za předpokladu určité vlastnosti, je třeba si definovat následující pojem.

Definice 1.31 (Null blade). Blade $\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$ nazýváme *null blade*, jestliže $\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \cdot \mathbf{A}_{\langle k \rangle} = 0$.

Množina null bladů v $\mathbb{G}_{p,q}^k$ se značí $\mathbb{G}_{p,q}^{\circ k} \subset \mathbb{G}_{p,q}^k$. Množina bladů, které nejsou null blady, se značí $\mathbb{G}_{p,q}^{\circ k} \subset \mathbb{G}_{p,q}^k$. Takovým bladům potom říkáme *non-null* blady. Množinově zapsáno

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{p,q}^{\circ k} &= \{ \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k : \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \cdot \mathbf{A}_{\langle k \rangle} = 0 \}, \\ \mathbb{G}_{p,q}^{\circ k} &= \{ \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k : \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \cdot \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \neq 0 \}. \end{aligned}$$

V Kapitole 1.4 jsme si zavedli operaci duál a řekli, že jeho význam oceníme později. Právě v konceptu prostorů vnějšího a vnitřního součinu se jedná o zásadní operaci, která nám umožní přecházet mezi reprezentacemi objektů.

Věta 1.32. Necht $\mathbf{x} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes 1}$, $\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$, kde $k \geq 1$, a $\mathbf{I} \in \overline{\mathbb{G}}_{p,q}$ buď pseudoskalár. Potom platí

$$(\mathbf{x} \wedge \mathbf{A}_{\langle k \rangle})^* = (\mathbf{x} \wedge \mathbf{A}_{\langle k \rangle}) \cdot \mathbf{I}^{-1} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}_{\langle k \rangle}^*,$$

z čehož vyplývá, že

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{A}_{\langle k \rangle} = 0 \iff \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}_{\langle k \rangle}^* = 0.$$

Proto platí

$$\text{NO}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle}) = \text{NI}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle}^*). \quad (1.26)$$

Větu necháme bez důkazu. Lze jej najít v publikaci od C. Perwasse [10].

Faktu, že OPNS bladu $\mathbf{A}_{\langle k \rangle}$ se rovná IPNS jeho duálu, se hojně využívá například v reprezentacích geometrických objektů, jako jsou sféry, kružnice, přímky, roviny a jiné, jak uvidíme později.

1.4.3 Projekce a rejekce

Pro odvození transformací zavedeme pojmy projekce a rejekce bladů. V Kapitole 1.2.2 jsme se dotkli pojmů projekce a rejekce na vektorech. Nyní tyto pojmy zobecníme pro blady.

Mějme dva blady $\mathbf{a} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes 1}$ a $\mathbf{n} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes 1}$. Podobně jako při odvozování rovnice (1.8) vektor \mathbf{a} můžeme napsat jako součet části kolmé na \mathbf{n} a části rovnoběžné s \mathbf{n} . Projekce \mathbf{a} na \mathbf{n} je potom ta část rovnoběžná a dá se vyjádřit jako

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}^{-1} = (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} = \|\mathbf{a}\| \cos \theta \hat{\mathbf{n}},$$

kde $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$.

Definice 1.33 (Projekce). Projekce bladu $\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes k}$ na blade $\mathbf{N}_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes l}$, kde $1 \leq k \leq l \leq n$, se definuje jako

$$\mathcal{P}_{\mathbf{N}_{\langle l \rangle}}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle}) = (\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \cdot \mathbf{N}_{\langle l \rangle}^{-1})\mathbf{N}_{\langle l \rangle}. \quad (1.27)$$

Uvažujme projekci vektoru $\mathbf{a} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes 1}$ na blade $\mathbf{N}_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes l}$. Obecně má vektor \mathbf{a} část \mathbf{a}_{\parallel} , která leží v podprostoru reprezentovaným bladem $\mathbf{N}_{\langle l \rangle}$. Tedy $\mathbf{a}_{\parallel} \in \text{span}\{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_l\}$, když $\mathbf{N}_{\langle l \rangle} = \bigwedge_{i=1}^l \mathbf{n}_i$. Proto $\mathbf{a}_{\parallel} \wedge \mathbf{N}_{\langle l \rangle} = 0$. Dále $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}$ a $\mathbf{a}_{\perp} \notin \text{span}\{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_l\}$, pak z definice platí $\mathbf{a}_{\perp} \cdot \mathbf{N}_{\langle l \rangle} = 0$. Můžeme tedy napsat

$$\mathcal{P}_{\mathbf{N}_{\langle l \rangle}}(\mathbf{a}) = ((\mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}) \cdot \mathbf{N}_{\langle l \rangle}^{-1})\mathbf{N}_{\langle l \rangle} = \mathbf{a}_{\parallel} \mathbf{N}_{\langle l \rangle}^{-1} \mathbf{N}_{\langle l \rangle} = \mathbf{a}_{\parallel}.$$

Definice 1.34 (Rejekce). Rejekce bladu $\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$ z bladu $\mathbf{N}_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}^l$, kde $1 \leq k \leq l \leq n$ se definuje jako

$$\mathcal{P}_{\mathbf{N}_{\langle l \rangle}}^{\perp}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle}) = \mathbf{A}_{\langle k \rangle} - \mathcal{P}_{\mathbf{N}_{\langle l \rangle}}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle}). \quad (1.28)$$

1.5 Versory

Definice 1.35. *Versor* \mathbf{V} je multivektor, který může být vyjádřen jako geometrický součin non-null 1-vektorů.

Versor se dá tedy zapsat jako $\mathbf{V} = \prod_{i=1}^k \mathbf{n}_i$, kde $\{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k\} \subset \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes 1}$ je množina ne nutně lineárně nezávislých non-null 1-vektorů. Navíc pro každý versor existuje jeho inverze $\mathbf{V}^{-1} = \prod_{i=1}^k \mathbf{n}_i^{-1}$, takže $\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V} = 1$. Toto tvrzení zde neuvádím jako větu, ale její důkaz (viz [10]) využívá mimo jiné faktu, že geometrický součin bladu se sebou samým je roven jeho skalárnímu součinu se sebou samým (dle Definice 1.12).

Příklad 1.36. Spočtěme pro $\mathbf{a}, \mathbf{n} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes 1}$ součin $\mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{n}^{-1}$:

$$\mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{n}^{-1} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{a})\mathbf{n}^{-1} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n}^{-1} + (\mathbf{n} \wedge \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}^{-1} + (\mathbf{n} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{n}^{-1}.$$

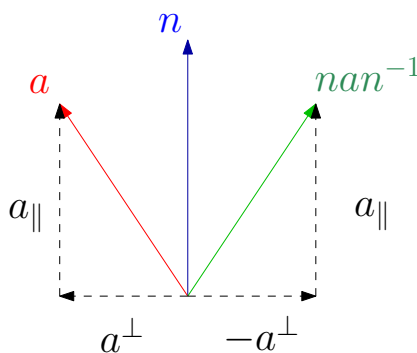
Protože $\mathbf{n}^{-1} = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}$, jsou \mathbf{n} a \mathbf{n}^{-1} lineárně závislé. Takže $(\mathbf{n} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{n}^{-1} = 0$. Dále lze ukázat, že $(\mathbf{n} \wedge \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}^{-1} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^{-1})\mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^{-1})\mathbf{a}$. Celkem potom dostaneme

$$\mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{n}^{-1} = 2(\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{a} = 2\mathcal{P}_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}.$$

Vektor \mathbf{a} jistě můžeme zapsat jako $\mathbf{a} = \mathcal{P}_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{a}) + \mathcal{P}_{\hat{\mathbf{n}}}^{\perp}(\mathbf{a})$. Nakonec tedy můžeme psát

$$\mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{n}^{-1} = \mathcal{P}_{\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{a}) - \mathcal{P}_{\hat{\mathbf{n}}}^{\perp}(\mathbf{a}). \quad (1.29)$$

Tímto jsme se přiblížili transformacím. Vzali jsme vektory $\mathbf{a}, \mathbf{n} \in \mathbb{G}_{p,q}^{\otimes 1}$, provedli operaci násobení a dostali jsme vektor, který má stejnou část rovnoběžnou s \mathbf{n} jako \mathbf{a} , ale opačnou kolmou část. Jinak řečeno, dostali jsme reflexi \mathbf{a} podle \mathbf{n} . Pro geometrickou algebru popisující euklidovskou rovinu je reflexe znázorněna zde na Obrázku 1.3.



Obrázek 1.3: Reflexe

Stojí za to zdůraznit, že výsledkem operace byl znovu 1-vektor. Navíc budeme-li uvažovat obecný versor $\mathbf{V} = \prod_{i=1}^k \mathbf{n}_i$, potom operace $\mathbf{V}\mathbf{a}\mathbf{V}^{-1}$ je vlastně provedení po sobě jdoucích reflexí podle daných vektorů \mathbf{n}_i , což zachovává stupeň původního vektoru. Jelikož rotace je složení dvou reflexí, lze vytušit, že jejím generátorem budou právě bivektory.

1.6 Re prezentace objektů

V této kapitole rozšíříme myšlenku reprezentování geometrických objektů, jak jsme naznačili v Kapitole 1.4.2. Bylo řečeno, že blade stupně k může reprezentovat k -dimenzi-onální podprostor v dané algebře díky jeho OPNS, respektive IPNS. Vyšli jsme z Definice 1.29 a ukázali, že OPNS blade stupně 1 reprezentuje přímku procházející počátkem ve směru tohoto vektoru. Pro blade stupně 2 jsme dostali rovinu procházející počátkem a rovnoběžníkem tvořeným vektory z daného blade. Takováto reprezentace je ale značně limitující, neboť reprezentujeme pouze objekty obsahující počátek.

Pro lepší reprezentaci zavedeme rozšíření původního prostoru, ve kterém chceme re prezentovat geometrické objekty, do vyšší dimenze. Způsobů rozšíření je více, můžeme například uvažovat takzvanou *projektivní* geometrickou algebru PGA často využívanou například v počítačovém vidění. V dalším textu budeme uvažovat takzvanou konformní geometrickou algebru CGA, která má řadu aplikací například v počítačové grafice nebo robotice. Slovem *konformní* se zjednodušeně myslí, že transformace zachovávají úhly lokálně (například úhel dvou protínajících se přímek v rovině je stejný i po projekci na sféru, kdy se budou kružnice vzniklé projekcí protínat zase pod stejným úhlem).

Naším cílem bude reprezentovat objekty v prostoru \mathbb{R}^n . Nejdříve zavedeme *Stereografické rozšíření*, kde prostor \mathbb{R}^n rozšíříme do prostoru \mathbb{R}^{n+1} a následně provedeme jeho *homogenizaci* rozšířením do další dimenze.

Nejprve zavedeme ještě jeden pojem, na který se budeme odvolávat.

Definice 1.37. Nechť $\mathbb{R}^{r,s}$ je vektorový prostor, ve kterém budeme reprezentovat geometrické objekty. Buď $\mathcal{X} : \mathbb{G}_{r,s}^1 \rightarrow \mathbb{X}$ bijektivní zobrazení, kde $\mathbb{X} \subset \mathbb{G}_{p,q}^1$ a $r + s \leq p + q$. Potom geometrický outer- a inner-product null space blade $\mathbf{A}_{(k)} \in \mathbb{G}_{p,q}^k$ se značí jako $\mathbb{N}\mathbb{O}_G(\mathbf{A}_{(k)})$ a $\mathbb{N}\mathbb{I}_G(\mathbf{A}_{(k)})$ a definuje jako

$$\mathbb{N}\mathbb{O}_G(\mathbf{A}_{(k)}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{G}_{r,s}^1 : \mathcal{X}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{A}_{(k)} = 0\}, \quad (1.30)$$

$$\mathbb{N}\mathbb{I}_G(\mathbf{A}_{(k)}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{G}_{r,s}^1 : \mathcal{X}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_{(k)} = 0\}. \quad (1.31)$$

Poznámka 1.38. Uvědomme si rozdíl mezi OPNS (IPNS) a geometrickým OPNS (geometrickým IPNS). Například na Obrázku 1.7 je zeleně znázorněno OPNS wedge dvou bladeů. Jejich geometrické OPNS by byly množinově právě dva odpovídající body z rozšiřovaného prostoru. OPNS tedy reprezentuje geometrický objekt, ale geometrické OPNS tímto objektem už přímo je.

1.6.1 Stereografické rozšíření eukleidovského prostoru

Stereografické rozšíření budeme doprovázet obrázky hlavně pro jednorozměrný eukleidovský prostor. Obecně rozšiřujeme prostor \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^{n+1} .

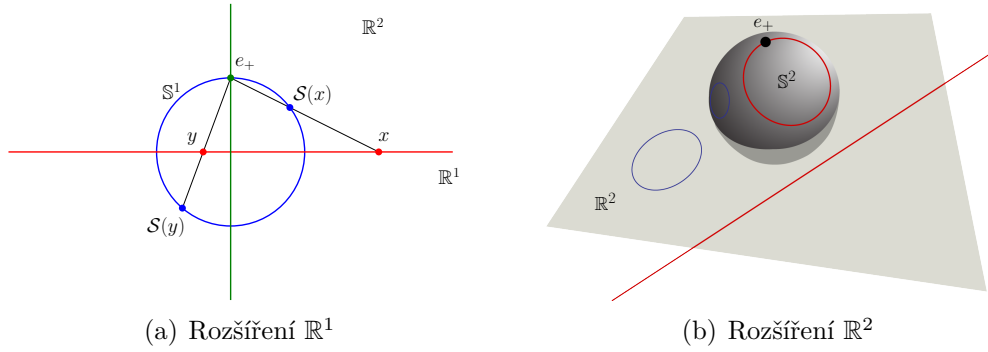
Zavedeme zobrazení $\mathcal{S} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ve tvaru

$$\mathcal{S} : \mathbf{x} \mapsto \frac{2}{\mathbf{x}^2 + 1} \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}^2 - 1}{\mathbf{x}^2 + 1} \mathbf{e}_+, \quad (1.32)$$

kde $\mathbf{e}_+ = \mathbf{e}_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ a \mathbb{S}^n značí jednotkovou sféru, proto $\|\mathcal{S}(\mathbf{x})\| = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Tvar rozšíření lze odvodit například z podobnosti trojúhelníků a je podrobněji vysvětlen v [11].

1.6 REPREZENTACE OBJEKTŮ



Obrázek 1.4: Příklady rozšíření

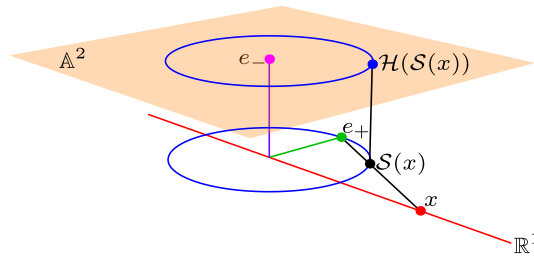
Poznámka 1.39. Červená osa na Obrázku 1.4 vlevo může představovat i \mathbb{R}^n . Stejný obrázek by tak mohl představovat rozšiřování prostoru \mathbb{R}^n pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

1.6.2 Homogenizace stereografického rozšíření

Zatím jsme rozšířili prostor \mathbb{R}^n zobrazením \mathcal{S} na jednotkovou sféru $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Tuto dále rozšíříme do prostoru $\mathbb{R}^{n+1,1}$. Dostaneme se tak do $n+2$ dimenzionálního prostoru. Zavedeme zobrazení $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{A}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1,1}$ definované jako

$$\mathcal{H} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{X} = \mathbf{x} + \mathbf{e}_-, \quad (1.33)$$

kde $\mathbf{e}_- = \mathbf{e}_{n+2}$, a proto $\mathbf{e}_-^2 = -1$. Množina \mathbb{A}^{n+1} je tak Minkowského afinní rovina.



Obrázek 1.5: Homogenizace

Ukažme, co plyne z faktu, že se pohybujeme v prostoru, kde $\mathbf{e}_{n+2}^2 = -1$.

Příklad 1.40. Buď $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ násobek vektoru $\mathcal{H}(\mathcal{S}(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1,1}$. Potom platí

$$\begin{aligned} (\alpha \mathcal{H}(\mathcal{S}(\mathbf{x})))^2 &= \alpha^2 (\mathcal{S}(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_-)^2 \\ &= \alpha^2 (\mathcal{S}^2(\mathbf{x}) + \mathcal{S}(\mathbf{x})\mathbf{e}_- + \mathbf{e}_-\mathcal{S}(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_-^2) \\ &= \alpha^2 (1 - 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Protože $\mathcal{S}(\mathbf{x})$ je 1-vektor v \mathbb{S}^n , platí $\mathbf{e}_- \perp \mathcal{S}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathcal{S}(\mathbf{x}) \in \mathbb{S}^n$, takže geometrický součin $\mathcal{S}(\mathbf{x})\mathbf{e}_- = \underbrace{\mathcal{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_-}_{=0} + \mathcal{S}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{e}_- = -\mathbf{e}_- \wedge \mathcal{S}(\mathbf{x}) = -\mathbf{e}_-\mathcal{S}(\mathbf{x})$. Navíc $\mathcal{S}(\mathbf{x}) \in \mathbb{S}^n$ jsou vektory jednotkové, proto $\mathcal{S}^2(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, což lze vidět i po rozepsání.

Dostali jsme důležitý výsledek, že všechny vektory v $\mathbb{R}^{n+1,1}$, které jsou výsledkem rozšíření \mathcal{H} prostoru \mathbb{R}^n , jsou v druhé mocnině rovny nule. Uvažujeme-li rozšíření prostoru \mathbb{R}^n , pak z Příkladu 1.40 dostáváme množinu bodů ležících na takzvaném *null-kuželi* $\mathbb{K}^{n+1} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1,1} : \mathbf{X}^2 = 0\}$, jimž budeme říkat *null-vektory*. Navíc z konstrukce rozšíření vidíme, že libovolný nenulový násobek takového vektoru reprezentuje stále jeden vektor v původním prostoru a platí $\mathbb{K}^{n+1} = \{\alpha \mathcal{H}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

Zavedeme-li dále množinu $\mathbb{S}\mathbb{A}^n \subset \mathbb{A}^{n+1}$ jako obraz homogenizace celé množiny \mathbb{S}^n , tedy $\mathbb{S}\mathbb{A}^n = \mathcal{H}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, pak právě pouze takhle množina vektorů z $\mathbb{R}^{n+1,1}$ se zobrazí zpět do \mathbb{S}^n inverzním zobrazením $\mathcal{H}^{-1} : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{X} - \mathbf{e}_-$ definovaném právě na $\mathbb{S}\mathbb{A}^n$. Odtud můžeme inverzním zobrazením k stereografickému rozšíření, které neuvádím a lze jej dohledat například v [10], zobrazit libovolný vektor vyjma vektoru $\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-$ do původního prostoru \mathbb{R}^n (vektor $\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-$ bude reprezentovat bod v nekonečnu, který nemá reprezentaci v \mathbb{R}^n). Uvidíme, že pro ostatní vektory má geometrický význam jejich OPNS nebo IPNS. V našem případě pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n+1,1}$ máme

$$\begin{aligned} \text{NO}_G(\mathbf{A}) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathcal{H}(\mathcal{S}(\mathbf{x})) \wedge \mathbf{A} = 0\}, \\ \text{NI}_G(\mathbf{A}) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathcal{H}(\mathcal{S}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{A} = 0\}. \end{aligned}$$

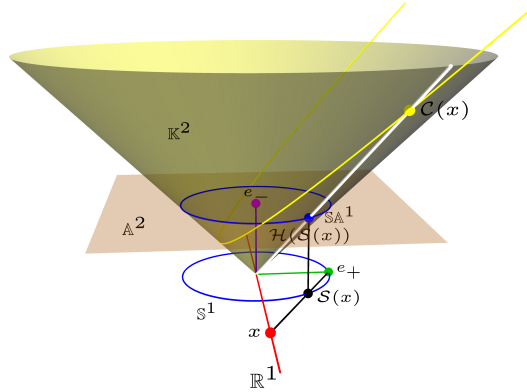
Celkem tedy dostáváme

$$\mathcal{H}(\mathcal{S}(\mathbf{x})) = \frac{2}{\mathbf{x}^2 + 1} \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}^2 - 1}{\mathbf{x}^2 + 1} \mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-. \quad (1.34)$$

Protože se jedná vlastně o prvek projektivního prostoru, můžeme jej vynásobit nenulovým číslem bez změny reprezentace v původním prostoru. Takovým číslem je bezesporu $\frac{1}{2}(\mathbf{x}^2 + 1)$. Právě finální tvar rozšíření pracuje s tímto násobkem, protože se výrazně zjednoduší.

Celé vložení bodu tedy zajišťuje zobrazení $\mathcal{C} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1,1}$ definované jako

$$\mathcal{C} : \mathbf{x} \mapsto \frac{1}{2}(\mathbf{x}^2 + 1)\mathcal{H}(\mathcal{S}(\mathbf{x})). \quad (1.35)$$



Obrázek 1.6: Rozšíření \mathbb{R}^1 s null-kuželem. Bíle je znázorněná množina vektorů se stejnou reprezentací v \mathbb{R}^1 . Žlutě je znázorněná parabola, na kterou se dostane bod po vynásobení $\frac{1}{2}(\mathbf{x}^2 + 1)$.

Rovnice (1.35) se dá dále upravit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{x}^2 + 1)\mathcal{H}(\mathcal{S}(\mathbf{x})) &= \mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{x}^2 - 1)\mathbf{e}_+ + \frac{1}{2}(\mathbf{x}^2 + 1)\mathbf{e}_- \\ &= \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2(\mathbf{e}_- + \mathbf{e}_+) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_- - \mathbf{e}_+). \end{aligned} \quad (1.36)$$

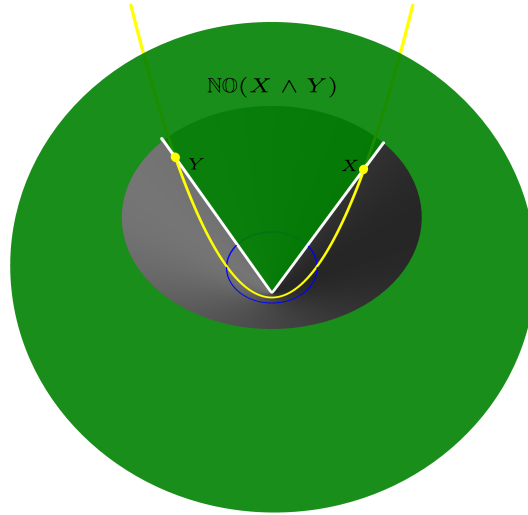
1.6 REPREZENTACE OBJEKTŮ

Po změně báze $\mathbf{e}_\infty = \mathbf{e}_- + \mathbf{e}_+$ a $\mathbf{e}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_- - \mathbf{e}_+)$ dostáváme známý finální tvar vložení bodu v CGA:

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0. \quad (1.37)$$

Zatím jsme tedy rozšířili prostor \mathbb{R}^n do prostoru $\mathbb{R}^{n+1,1}$ a nic nebrání tomu, abychom na tomto prostoru zavedli bilineární formu jako v Kapitole 1.1, tedy sestrojili nad tímto prostorem geometrickou algebru $\mathbb{G}_{n+1,1}$. Uvidíme, že geometrické OPNS a IPNS bladů jsou přímo objekty v původním prostoru.

Uvažujme konkrétní konformní geometrickou algebru $\mathbb{G}_{2,1}$ a dva blady $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{G}_{2,1}^1$.



Obrázek 1.7: OPNS dvou bladů v $\mathbb{G}_{2,1}$

Jejich ONPS je zřejmě lineární podprostor, rovina v $\mathbb{G}_{2,1}$ tvořená koncovými body vektorů \mathbf{X}, \mathbf{Y} a počátkem. Pojďme se podívat na geometrické OPNS bladu tvořeného těmito vektory. Platí

$$\text{NO}_G(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^1 : \mathcal{C}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = 0\}.$$

Protože máme k dispozici inverzní zobrazení z null-kuželu do \mathbb{R}^1 , máme

$$\text{NO}_G(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) = \mathcal{C}^{-1}(\{\mathbf{A} \in \mathbb{K}^2 : \mathbf{A} \wedge \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = 0\}),$$

což není nic jiného než

$$\text{NO}_G(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) = \mathcal{C}^{-1}(\text{NO}(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \cap \mathbb{K}^2).$$

Na Obrázku 1.7 je to množina vektorů znázorněná dvěma bílými přímkami, které každá reprezentují právě jeden vektor z \mathbb{R}^1 , protože víme, že pohyb v těchto přímkách je jen násobení nenulovým skalárem. Přesněji odpovídají množině vektorů, kterou dostaneme průnikem těchto dvou přímek s množinou $\mathbb{S}\mathbb{A}^1$, což jsou dva vektory, které by ležely na Obrázku 1.7 v průniku modré kružnice a bílých přímek. Výsledkem jsou dva body v \mathbb{R}^1 , takzvaný dvojbod.

1.6.3 Geometrické objekty v konformní geometrické algebře $\mathbb{G}_{4,1}$

V tuto chvíli víme, jak vypadá reprezentace bodu v CGA. Je na místě zavést další objekty. Vycházet budeme z reprezentace vnitřním součinem (IPNS) a zaměříme se na prostor \mathbb{R}^3 .

Sféra

Rovinu můžeme chápat jako sféru s nekonečným poloměrem, bod jako sféru s nulovým poloměrem, kružnici jako průnik dvou sfér, dvojici bodů jako průnik tří sfér a přímku jako kružnici s nekonečným poloměrem. Proto v textu řadíme sféru jako první.

Víme, že vektory z null-kužele reprezentují body z prostoru, který jsme rozšiřovali. Pro nás tedy z \mathbb{R}^3 . Pojdme nastínit význam vektorů mimo tento kužel. Uvažujme například vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, respektive $\mathbf{A} = \mathcal{C}(\mathbf{a}) \in \mathbb{G}_{4,1}$. Dále definujeme vektor $\mathbf{S} \in \mathbb{G}_{4,1}^1$ jako

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty, \quad (1.38)$$

kde $\rho \in \mathbb{R}$. Zřejmě vektor \mathbf{A} leží na null-kuželu a vektor \mathbf{S} mimo něj. Protože chceme dostat reprezentaci vnitřním součinem, připomeňme definici geometrického IPNS: $\mathbb{N}\mathbb{I}_G(\mathbf{A}_{\langle k \rangle}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{C}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_{\langle k \rangle} = 0\}$. Vynásobme tedy vektor \mathbf{S} s vektorem $\mathbf{X} \in \mathbb{K}^4$.

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{X} \\ &= (\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0) \cdot (\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0) - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty \cdot (\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{a}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}\rho^2 \\ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{x})^2 + \frac{1}{2}\rho^2. \end{aligned}$$

To znamená, že $\mathbf{S} \cdot \mathbf{X} = 0$ právě tehdy, když $(\mathbf{a} - \mathbf{x})^2 = \rho^2$, jinak řečeno, když $\mathbf{x} = \mathcal{C}^{-1}(\mathbf{X})$ leží na sféře se středem v bodě \mathbf{a} a poloměrem ρ . Geometrické IPNS vektoru \mathbf{S} je tedy sféra:

$$\mathbb{N}\mathbb{I}_G(\mathbf{S}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{S} \cdot \mathbf{X} = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 = \rho^2\}.$$

Stojí za zmínku, že stejně jako pro body tu platí, že libovolný nenulový skalární násobek vektoru reprezentujícího sféru reprezentuje stále tu samou sféru. O tom se lze jednoduše přesvědčit vynásobením vektoru \mathbf{S} nějakým parametrem $t \in \mathbb{R}$ a po provedení stejných úprav jako v odstavci výše se nám na obou stranách rovnice parametr vyruší.

Výhodou formy zápisu jako v (1.38) je fakt, že můžeme jednoduše zjistit poloměr sféry vnitřním součinem samé se sebou jako

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{A}^2 - \rho^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_\infty = \rho^2.$$

Dále existují způsoby, jak zjistit, jestli nějaký bod leží na sféře, v jejím vnitřku a nebo vně. O těchto možnostech se lze dočíst například v [10].

Poznámka 1.41. V [10] lze najít tvar imaginární sféry jako $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty$. Ukáže se, že násobení \mathbf{S} s vektorem $\mathbf{X} \in \mathbb{K}^4$ vede na sféru s imaginárním poloměrem. Tuto sféru využijeme v Kapitole 1.8.

Rovina

Při odvozování tvaru vektoru reprezentujícího sféru bylo zmíněno, že rovinu můžeme chápat jako sféru s nekonečným poloměrem. V našem prostoru to znamená položit část vektoru s \mathbf{e}_0 rovnu nule, tedy tento vektor odečíst. Zůstane tak pouze vektor reprezentující

1.6 REPREZENTACE OBJEKTŮ

normálu a vektor \mathbf{e}_∞ reprezentující nekonečno. Uvažujme podobně jako při konstrukci sféry. Bud $\mathbf{A} = \mathcal{C}(\mathbf{a}) \in \mathbb{G}_{4,1}$. Vezměme vektor $\mathbf{P} \in \mathbb{G}_{4,1}^1$ jako

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty - \mathbf{e}_0 = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty - \mathbf{e}_0 = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a}^2\mathbf{e}_\infty - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty.$$

Spočtěme teď vnitřní součin s vektorem $\mathbf{X} \in \mathbb{K}^4$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \mathbf{X} &= \left(\mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \rho^2)\mathbf{e}_\infty\right) \cdot \left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0\right) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \rho^2) \\ &= \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{x}_\parallel\| - \frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \rho^2), \end{aligned}$$

kde $\mathbf{x}_\parallel = \mathcal{P}_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ je složka vektoru \mathbf{x} rovnoběžná s \mathbf{a} . Použili jsme stejnou úpravu jako při odvozování (1.8). Z toho vyplývá, že $\mathbf{P} \cdot \mathbf{X} = 0$ právě tehdy, když $\|\mathbf{x}_\parallel\| = \frac{\mathbf{a}^2 - \rho^2}{2\|\mathbf{a}\|}$. Takže v geometrickém IPNS vektoru \mathbf{P} leží takové vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, které mají danou fixní délku komponenty v rovnoběžném směru s \mathbf{a} . Lze si to představit tak, že koncové body všech těchto vektorů pak tvoří rovinu a vektor \mathbf{a} je jejím normálovým vektorem. Ve výsledku pro normalizovaný vektor $\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ dostáváme používaný tvar pro reprezentaci roviny se vzdáleností $d \in \mathbb{R}$ od počátku:

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{a}} + d\mathbf{e}_\infty. \quad (1.39)$$

Kružnice

Dále ukažme, že kružnici můžeme reprezentovat jako průnik dvou různých sfér. Mějme tedy $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in \mathbb{G}_{4,1}$ dva lineárně nezávislé vektory reprezentující dvě různé sféry svým IPNS. Ukážeme, že $\mathbf{C} = \mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2$ je IPNS kružnice. Platí $\mathbb{N}\mathbb{I}_G(\mathbf{C}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{C}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{C} = 0\}$. Vynásobíme-li tento vektor s vektorem $\mathbf{X} \in \mathbb{K}^4$, dostaneme

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{X} \cdot (\mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2) = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{S}_1)\mathbf{S}_2 - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{S}_2)\mathbf{S}_1.$$

To znamená, že $\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} = 0$ právě tehdy, když $\mathbf{X} \cdot \mathbf{S}_1 = 0$ a současně $\mathbf{X} \cdot \mathbf{S}_2 = 0$. To ale znamená, že $\mathbb{N}\mathbb{I}_G(\mathbf{C})$ je množina bodů z \mathbb{R}^3 ležících na obou sférách $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ současně, což není nic jiného než jejich průnik - kružnice. Pokud se tyto sféry protínají právě v jednom bodě, potom \mathbf{C} reprezentuje tento bod. Neprotínají-li se sféry, potom $\mathbb{N}\mathbb{I}_G(\mathbf{C})$ je prázdná množina.

Přímka

Přímku lze reprezentovat jako průnik dvou rovin. Můžeme postupovat ve stejném duchu jako u kružnic. Mějme dva lineárně nezávislé vektory $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{G}_{4,1}$ reprezentující dvě různé roviny v \mathbb{R}^3 v IPNS reprezentaci a vektor $\mathbf{X} \in \mathbb{K}^4$. Zavedme $\mathbf{L} = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2$. Podobně jako u kružnic máme

$$\mathbb{N}\mathbb{I}_G(\mathbf{L}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{C}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{L} = 0\}$$

a

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{X} \cdot (\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2) = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{P}_1)\mathbf{P}_2 - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{P}_2)\mathbf{P}_1.$$

To znamená, že $\mathbf{X} \cdot \mathbf{L} = 0$ právě tehdy, když $\mathbf{X} \cdot \mathbf{P}_1 = 0$ a současně $\mathbf{X} \cdot \mathbf{P}_2 = 0$. Takže $\mathbb{N}\mathbb{I}_G(\mathbf{L})$ je množina bodů ležících v obou rovinách současně, tedy v jejich průniku, přímce.

Dvojbod

Na stejném principu lze ukázat, že existuje vektor reprezentující dvojici bodů v IPNS jako průnik tří sfér. Pokud máme tři lineárně nezávislé vektory $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3 \in \mathbb{G}_{4,1}$ reprezentující tři různé sféry, potom jejich průnik můžeme v IPNS reprezentovat jako $\mathbf{P}_P = \mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2 \wedge \mathbf{S}_3$. Geometrické IPNS takového vektoru dává množinu bodů v \mathbf{R}^3 , které leží na všech sférách současně, což jsou (existuje-li průnik) dva body (pokud neuvažujeme situaci, kdy je průnikem pouze jeden bod).

Shrnutí CGA

Tabulka 1.2 znázorňuje kanonickou bázi konformní geometrické algebry bez transformace báze $\mathbf{e}_\infty = \mathbf{e}_- + \mathbf{e}_+$ a $\mathbf{e}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_- - \mathbf{e}_+)$. Značení \mathbf{e}_{ijk} odpovídá geometrickému součinu $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$ pro $i, j, k \in \{1, 2, 3, +, -\}$ a podobně.

Stupeň	Název	Bázové blady	Počet
0	Skalár	$\mathbf{1}$	1
1	Vektor	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-$	5
2	Bivektor	$\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{1+}, \mathbf{e}_{1-}, \mathbf{e}_{23},$ $\mathbf{e}_{2+}, \mathbf{e}_{2-}, \mathbf{e}_{3+}, \mathbf{e}_{3-}, \mathbf{e}_{+-}$	10
3	Trivektor	$\mathbf{e}_{123}, \mathbf{e}_{12+}, \mathbf{e}_{12-}, \mathbf{e}_{13+}, \mathbf{e}_{13-},$ $\mathbf{e}_{1+-}, \mathbf{e}_{23+}, \mathbf{e}_{23-}, \mathbf{e}_{3+-}, \mathbf{e}_{+-}$	10
4	4-vektor	$\mathbf{e}_{123+}, \mathbf{e}_{123-}, \mathbf{e}_{12+-}, \mathbf{e}_{13+-}, \mathbf{e}_{23+-}$	5
5	Pseudoskalár	\mathbf{e}_{123+-}	1

Tabulka 1.2: Báze prostoru $\mathbb{G}_{4,1}$

Protože jde o ortogonální bázi, geometrický součin těchto prvků je antisymetrický a může být nahrazen vnějším součinem. To už ale neplatí po transformaci pomocí \mathbf{e}_∞ a \mathbf{e}_0 , protože lze snadno ukázat, že $\mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0 = -1 + \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0 = -1 + \mathbf{e}_+ \mathbf{e}_-$. V literatuře se přesto používá značení báze CGA s notací například pseudoskaláru $\mathbf{I} = \mathbf{e}_{123\infty 0}$. V této práci budeme dále uvažovat bázi CGA ve formě vnějšího součinu, jak ukazuje Tabulka 1.3.

1.6 REPREZENTACE OBJEKTŮ

Stupeň	Název	Blady	Počet
0	Skalár	$\mathbf{1}$	1
1	Vektor	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_0$	5
2	Bivektor	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0$	10
3	Trivektor	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0$	10
4	4-vektor	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0$	5
5	Pseudoskalár	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0$	1

Tabulka 1.3: Báze prostoru $\mathbb{G}_{4,1}$ po transformaci

Ještě ukažme, že v CGA máme inverzi k pseudoskaláru $\mathbf{I}^{-1} = -\mathbf{I}$.

$$\mathbf{II}^{-1} = (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0)(-\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0).$$

Protože $\mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0 = (\mathbf{e}_- + \mathbf{e}_+)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_- + \mathbf{e}_+) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_-^2 - \mathbf{e}_- \mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_+ \mathbf{e}_- - \mathbf{e}_+^2) = \underbrace{-1}_{=\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{e}_0} + \underbrace{\mathbf{e}_+ \mathbf{e}_-}_{=\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0}$,

můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathbf{II}^{-1} &= (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 (1 + \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0)) (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 (1 + \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0)) \\ &= (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0) (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0) \\ &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \\ &\quad + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0 \\ &= 1 + \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0 \\ &= 1 + 2(-1 + \mathbf{e}_+ \mathbf{e}_-) + (-1 + \mathbf{e}_+ \mathbf{e}_-)^2. \end{aligned}$$

Výraz $(-1 + \mathbf{e}_+ \mathbf{e}_-)^2$ se dá dále upravit: $(-1 + \mathbf{e}_+ \mathbf{e}_-)^2 = 1 - 2\mathbf{e}_+ \mathbf{e}_- + \underbrace{\mathbf{e}_+ \mathbf{e}_- \mathbf{e}_+ \mathbf{e}_-}_{=-\mathbf{e}_+ \mathbf{e}_- \mathbf{e}_- \mathbf{e}_+ = 1} =$

$2 - 2\mathbf{e}_+ \mathbf{e}_- = 2(1 - \mathbf{e}_+ \mathbf{e}_-)$. Celkem dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{II}^{-1} &= 1 + 2(-1 + \mathbf{e}_+ \mathbf{e}_-) + 2(1 - \mathbf{e}_+ \mathbf{e}_-) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Na závěr kapitoly je na místě shrnout do Tabulky 1.4 reprezentace objektů, kde uvedeným tvarům budeme říkat normalizovaná reprezentace daného objektu.

Objekt	IPNS reprezentace	OPNS reprezentace
Bod	$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$	
Sféra	$\mathbf{S} = \mathbf{A} - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty$	$\mathbf{S}^* = \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3 \wedge \mathbf{A}_4$
Rovina	$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{a}} + d\mathbf{e}_\infty$	$\mathbf{P}^* = \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty$
Kružnice	$\mathbf{C} = \mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2$	$\mathbf{C}^* = \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3$
Přímka	$\mathbf{L} = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2$	$\mathbf{L}^* = \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty$
Dvojbod	$\mathbf{P}_P = \mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2 \wedge \mathbf{S}_3$	$\mathbf{P}_P^* = \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2$

Tabulka 1.4: Reprezentace geometrických objektů v CGA

Poznámka 1.42. Je vhodné připomenout, že z IPNS reprezentace objektu dostaneme OPNS reprezentaci vynásobením inverzí k pseudoskaláru a naopak, [10].

1.7 Generátory transformací

V této kapitole se budeme věnovat zejména rotacím v \mathbb{R}^3 . Ukážeme si spojitosti s kvaterniony, grupou rotací a Lieovou algebrou. Zkusíme odůvodnit tvary vektorů zajišťující tyto transformace - generátory rotací. Cílem kapitoly není podat striktní a přesné odvození jejich tvarů, ani důsledné zavedení všech zmíněných pojmů, ale naznačení souvislostí s bohatým matematickým pozadím. V Kapitole 1.5 jsme zmínili, že reflexe je „základním stavebním“ prvkem transformací. Rotaci lze chápat jako provedení postupně dvou reflexí vzhledem ke dvěma vektorům v rovině, jejíž normálový vektor je osou rotace. Translaci jako dvě reflexe vzhledem ke dvěma rovnoběžným rovinám.

Označme \mathbb{H} jako množinu kvaternionů. Ty se využívají především k popsání prostorových rotací. Každý kvaternion můžeme napsat ve tvaru $a + \mathbf{v}$, kde $a \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ je ryze imaginární kvaternion, který můžeme chápat jako vektor $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem ke klasické ortonormální bázi. Chceme-li například provést rotaci vektoru $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, chápeme jej jako ryze imaginární kvaternion $\mathbf{p} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$. Dále potřebujeme osu a úhel rotace. Víme, že rotace o úhel θ kolem osy \mathbf{o} je reprezentována jednotkovým kvaternionem $\mathbf{h} = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\mathbf{o} = e^{\frac{\theta}{2}\mathbf{o}}$, kde \mathbf{o} je jednotkový vektor. Otočený vektor \mathbf{p}' potom dostaneme jako součin kvaternionů $\mathbf{h}\mathbf{p}\mathbf{h}^{-1} = \mathbf{p}'$.

Chceme-li najít souvislost s geometrickou algebrou, podívejme se na bivektory. Máme k dispozici podstrukturu, která je, jak uvidíme, izomorfní kvaternionům. Pro jednoduchost uvažujme geometrickou algebru nad \mathbb{R}^3 . Její báze je v Tabulce 1.1. Označme $\mathbf{i} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{j} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$, $\mathbf{k} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$. Libovolný bivektor $\mathbf{A} \in \mathbb{G}_3^2$ pak můžeme napsat jako $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. Lze se velmi jednoduše přesvědčit, že jsou splněny všechny vztahy pro \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} z definice kvaternionů. Konkrétně například vektor $\mathbf{A} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - 5\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ vidíme jako $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Jednou z nevýhod kvaternionů, na rozdíl od geometrické algebry, je možnost rotace pouze kolem os jdoucích počátkem. Výhodou geometrické algebry oproti kvaternionům jsou pak i translace. Navíc při práci s kvaterniony rotujeme pouze body, nikoliv objekty v geometrickém slova smyslu.

1.7 GENERÁTORŮ TRANSFORMACÍ

1.7.1 Grupa rotací

Rotace jsou zřejmě lineární zobrazení v \mathbb{R}^3 , proto každou můžeme reprezentovat maticí vzhledem k vybrané bázi. Pokud vybereme ortonormální bázi prostoru \mathbb{R}^3 , bude každá rotace popsána maticí 3×3 s determinantem rovným jedné a splňující $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$, kde \mathbf{I} je jednotková matice. Dostáváme se tak k množině $\mathcal{SO}(3)$ reálných ortogonálních matic 3×3 s determinantem rovným jedné. Se skládáním zobrazení jde o grupu všech rotací kolem počátku souřadnic v \mathbb{R}^3 . Ve skutečnosti jde o Lieovu grupu, ale to je pojem, který přesahuje rámec této práce a budeme jej chápat velmi zjednodušeně a zůstaneme na úrovni množiny matic. K této grupě existuje Lieova algebra $\mathfrak{so}(3)$, kterou budeme chápat jen jako množinu 3×3 reálných antisymetrických matic spolu s exponenciálním zobrazením. Exponenciální zobrazení $exp : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathcal{SO}(3)$, definujeme pro matici $\mathbf{A} \in \mathfrak{so}(3)$ jako

$$exp(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n. \quad (1.40)$$

Obecněji se pracuje v \mathbb{R}^n , takže obecněji máme $exp : \mathfrak{so}(n) \rightarrow \mathcal{SO}(n)$. Mějme pro jednoduchost například matici z \mathbb{R}^2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Spočtěme pro ni $exp(\mathbf{A})$. Protože $exp(\mathbf{A}) = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \frac{1}{4!}\mathbf{A}^4 + \dots$, spočtěme nejdříve prvních několik násobků matice \mathbf{A} .

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -\theta^2 & 0 \\ 0 & -\theta^2 \end{pmatrix} = -\theta^2 \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A} = -\theta^2 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta^3 \\ \theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A}^2 = \theta^4 \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \theta^4 & 0 \\ 0 & \theta^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^5 = \theta^4 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta^4 \\ \theta^4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jak budou vypadat další mocniny matice \mathbf{A} je zřejmé. Matice $exp(\mathbf{A})$ vypadá tedy takto:

$$exp(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots & -\theta + \frac{1}{3!}\theta^3 - \dots \\ \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \dots & 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

což je matice rotace v \mathbb{R}^2 . Pokud bychom použili exp na větší antisymetrické matice, dostali bychom matici rotace pro vyšší dimenze. Zanedlouho uvidíme, že použití exponenciálního zobrazení na jednotkový bivektor vede na analogii matice rotace v geometrické algebře - generátor rotace rotor. Zjistíme totiž, že můžeme ztotožnit antisymetrickou matici s bivektorem nebo i ryze imaginárním kvaternionem.

1.7.2 Algebra vnějšího součinu

Geometrická algebra je gradovaný vektorový prostor. Pokud budeme uvažovat podprostor bázových bladů stupně dva, ukážeme, že je lze ztotožnit s antisymetrickými maticemi.

Berme v úvahu $\bigwedge^2(\mathbb{R}^n) = \text{span}\{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n\}$, kde se omezíme na příklad $n = 3$. Každá antisymetrická matice \mathbf{A} je tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & d \\ -c & -d & 0 \end{pmatrix}.$$

Takovou matici můžeme identifikovat jako $b(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + c(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) + d(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)$, takže i jako $-d\mathbf{i} + c\mathbf{j} - b\mathbf{k}$. Jinak řečeno existuje izomorfismus mezi $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ a $\mathfrak{so}(3)$ a \mathbb{H} .

Díky těmto izomorfismům tak můžeme ztotožnit, jak již bylo zmíněno, antisymetrickou matici, bivektor i ryze imaginární kvaternion. Působení exponenciálního zobrazení na bivektor tak vyústí v prvek generující rotaci. Navíc toto exponenciální zobrazení je zobrazení z bivektorů, respektive algebry vnějšího součinu, do geometrické algebry, tedy vlastně z Lieovy algebry do její Lieovy grupy (která je algebrou ve smyslu vektorového prostoru).

1.7.3 Rotace

Víme, že rotace máme hledat mezi bivektory. Našli jsme izomorfismy, které jsou dobrou motivací pro zavedení exponenciálního zobrazení z prostoru $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$. Každý vektor můžeme chápat jako nějaký násobek jeho normalizované verze. Použijme exponenciální zobrazení na α násobek takového bivektoru $\mathbf{N} \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$.

$$\exp(\alpha\mathbf{N}) = 1 + \frac{\alpha\mathbf{N}}{1!} + \frac{(\alpha\mathbf{N})^2}{2!} + \frac{(\alpha\mathbf{N})^3}{3!} + \dots$$

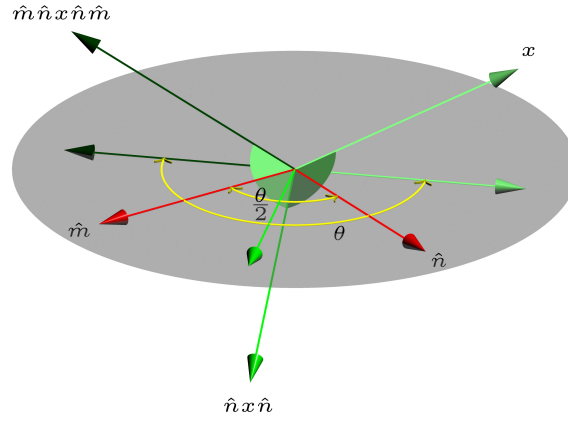
Lze snadno nahlédnout, že $\mathbf{N}^2 = -1$. Díky tomu dostáváme

$$\begin{aligned} \exp(\alpha\mathbf{N}) &= \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4} - \dots\right) + \mathbf{N}\left(\frac{\alpha}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos(\alpha) + \mathbf{N} \sin(\alpha). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Zobrazení \exp je tedy zobrazení z bivektorů do geometrické algebry. Ukažme, že nám vyšel v obecné formě prvek zajišťující rotaci.

Budte $\hat{\mathbf{m}}$ a $\hat{\mathbf{n}}$ jednotkové vektory z \mathbb{G}_3^1 svírající úhel $\theta/2$. Chceme-li otočit vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{G}_3^1$, provedeme dvě reflexe s využitím $\hat{\mathbf{m}}$ a $\hat{\mathbf{n}}$. Po první reflexi dostáváme vektor $\hat{\mathbf{n}}\mathbf{x}\hat{\mathbf{n}}^{-1}$, po druhé reflexi vektor $\hat{\mathbf{m}}\hat{\mathbf{n}}\mathbf{x}\hat{\mathbf{n}}^{-1}\hat{\mathbf{m}}^{-1}$.

1.7 GENERÁTORŮ TRANSFORMACÍ



Obrázek 1.8: Rotace vektoru pomocí dvou reflexí

Označme $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{m}}\hat{\mathbf{n}}$. Potom dostáváme $\mathbf{R}^{-1} = \hat{\mathbf{n}}^{-1}\hat{\mathbf{m}}^{-1} = \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{m}} = \tilde{\mathbf{R}}$, protože pracujeme s jednotkovými vektory. Celkem dostáváme rotaci o dvojnásobek úhlu mezi $\hat{\mathbf{n}}$ a $\hat{\mathbf{m}}$. Navíc platí $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{m}}\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{m}} \wedge \hat{\mathbf{n}} = \cos(\frac{\theta}{2}) - \frac{\hat{\mathbf{n}} \wedge \hat{\mathbf{m}}}{\|\hat{\mathbf{n}} \wedge \hat{\mathbf{m}}\|} \sin(\frac{\theta}{2})$. Odvodili jsme tak tvar prvku geometrické algebry, který se nazývá *rotor*. Rotor \mathbf{R} budeme uvádět ve tvaru

$$\mathbf{R} = \cos(\frac{\theta}{2}) - \mathbf{L} \sin(\frac{\theta}{2}), \quad (1.42)$$

kde \mathbf{L} je normalizovaný bivektor reprezentující osu otáčení. Lze jej napsat i ve tvaru

$$\mathbf{R} = e^{-\frac{\theta}{2}\mathbf{L}}. \quad (1.43)$$

Rotaci objektu \mathbf{o} potom dle [4] dostaneme součinem $\mathbf{o}_R = \mathbf{R}\mathbf{o}\tilde{\mathbf{R}}$.

Uvažujme nyní matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Použitím exponenciálního zobrazení dostaneme matici rotace v rovině, jak jsme ukázali v Kapitole 1.7.1. Díky izomorfismu mezi antisymetrickými maticemi a bivektory (přesněji mezi Lieovou algebrou $\mathfrak{so}(3)$ a algebrou vnějšího součinu $\wedge^2(\mathbb{R}^n)$, která je tedy také Lieovou algebrou) můžeme tuto matici chápat jako bivektor $-\theta(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$. Použijme nyní exponenciální zobrazení na tento bivektor.

$$\begin{aligned} \exp(-\theta(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)) &= 1 + \frac{-\theta(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)}{1!} + \frac{(-\theta(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2))^2}{2!} + \dots \\ &= 1 - \frac{\theta}{1!}(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!}(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\ &= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots) + (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)(\frac{-\theta}{1!} + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \dots) \\ &= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots) - (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots) \\ &= \cos(\theta) - (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \sin(\theta). \end{aligned}$$

Výsledkem je přesně rotor pro rotaci v rovině kolem počátku (přesněji kolem osy reprezentované normálovým vektorem roviny tvořené vektory \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_2). Uvědomme si ale, že použití takového rotoru vyústí v rotaci o úhel 2θ .

1.7.4 Translace

Precizní a úplné odvození tvaru translátoru přes reflexe lze dohledat v [10] nebo [1]. V této práci jsou shrnuta fakta z tohoto přístupu.

Mějme $\mathbf{P}_A, \mathbf{P}_B \in \mathbb{G}_{n+1,1}^1$ vektory reprezentující v IPNS dvě rovnoběžné roviny. Nechť $\hat{\mathbf{a}}$ je jejich normalizovaný normálový vektor a $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ jsou jejich ortogonální vzdálenosti od počátku. Tyto roviny jsou pak tvaru $\mathbf{P}_A = \hat{\mathbf{a}} + d_1\mathbf{e}_\infty$, $\mathbf{P}_B = \hat{\mathbf{a}} + d_2\mathbf{e}_\infty$. Bud' $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ bod, který chceme posunout. Tento bod je reprezentovaný vektorem $\mathbf{X} = \mathcal{C}(\mathbf{x}) \in \mathbb{G}_{n+1,1}$.

Provedeme-li operaci $\mathbf{P}_A\mathbf{X}\mathbf{P}_A = (\hat{\mathbf{a}} + d_1\mathbf{e}_\infty)(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0)(\hat{\mathbf{a}} + d_1\mathbf{e}_\infty)$, potom lze ukázat, že tento vektor leží na \mathbb{K}^{n+1} a jeho zpětnou projekci do \mathbb{R}^n je vektor $\mathbf{y} = \mathbf{x} + 2(d_1 - \hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x})\hat{\mathbf{a}}$. Dostali jsme tak reflexi. Provedeme-li druhou reflexi jako $\mathbf{P}_B\mathbf{P}_A\mathbf{X}\mathbf{P}_A\mathbf{P}_B$, výsledkem bude vektor $\mathbf{z} = \mathcal{C}^{-1}(\mathbf{P}_B\mathbf{P}_A\mathbf{X}\mathbf{P}_A\mathbf{P}_B) = \mathbf{x} + 2(d_2 - d_1)\hat{\mathbf{a}}$, který je oproti \mathbf{x} posunutý ve směru $\hat{\mathbf{a}}$ o vzdálenost dvojnásobku vzdálenosti rovin $\mathbf{P}_B, \mathbf{P}_A$. Vektor $\mathbf{T} = \mathbf{P}_B\mathbf{P}_A$ tak označíme jako *translátor*. Ten je ve tvaru

$$\mathbf{T} = (\hat{\mathbf{a}} + d_2\mathbf{e}_\infty)(\hat{\mathbf{a}} + d_1\mathbf{e}_\infty) = 1 - (d_2 - d_1)\hat{\mathbf{a}}\mathbf{e}_\infty.$$

Nakonec se definuje vektor $\mathbf{t} = 2(d_2 - d_1)\hat{\mathbf{a}}$ jako *vektor translace*. Finální tvar translátoru \mathbf{T} potom dostáváme jako

$$\mathbf{T} = 1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}\mathbf{e}_\infty. \quad (1.44)$$

Díky tomu, že $\mathbf{e}_\infty^2 = 0$, můžeme psát $\mathbf{T} = 1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}\mathbf{e}_\infty = 1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}\mathbf{e}_\infty + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{2}\mathbf{t}\mathbf{e}_\infty)^2 + \dots = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{t}\mathbf{e}_\infty}$. Translaci objektu \mathbf{o} potom dostaneme součinem $\mathbf{o}_T = \mathbf{T}\mathbf{o}\tilde{\mathbf{T}}$.

1.7.5 Rotace kolem libovolné osy

V $\mathbb{G}_{n+1,1}$ můžeme provádět rotaci kolem libovolné osy. Pokud použijeme translátor \mathbf{T} na rotor \mathbf{R} , obdržíme vektor $\mathbf{T}\mathbf{R}\tilde{\mathbf{T}}$, který označíme jako \mathbf{G} . Jestliže provedeme operaci $\mathbf{G}\mathbf{X}\tilde{\mathbf{G}}$, kde $\mathbf{X} = \mathcal{C}(\mathbf{x})$, obdržíme

$$\underbrace{\mathbf{T}\mathbf{R}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{X}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{R}\tilde{\mathbf{T}}}_{\text{rotace}} \underbrace{\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{X}\tilde{\mathbf{T}}}_{\text{translace o } -\mathbf{t}} \underbrace{\mathbf{R}\tilde{\mathbf{T}}}_{\text{translace o } \mathbf{t}}.$$

Vektor

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}\mathbf{R}\tilde{\mathbf{T}} \quad (1.45)$$

se nazývá *obecný rotor*. Chceme-li získat úplně obecný pohyb, musíme přidat ještě jeden translátor zajišťující translaci ve směru osy otáčení. Obecný rotor tento pohyb neumožňoval, pouze nám umožnil rotovat kolem libovolné osy jdoucí uvažovaným bodem. Takovému rotoru, který bude zajišťovat obecný pohyb, budeme říkat *motor* \mathbf{M} a je ve tvaru

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{R}\tilde{\mathbf{T}}_1, \quad (1.46)$$

kde \mathbf{T}_2 zajišťuje translaci podél osy rotace.

1.8 Dekompozice dvojvodu

V této kapitole ukážeme, že můžeme z reprezentace dvojvodu extrahovat jeden, případně druhý z jeho bodů. Představme si, že máme dva různé body \mathbf{a} a \mathbf{b} v \mathbb{R}^n . Můžeme sestavit přímku \mathcal{L} procházející těmito body a najít střed mezi těmito body $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$. Jistě potom platí $\mathbf{a}, \mathbf{b} = \pm r\mathbf{d}$, kde r je polovina vzdálenosti mezi body \mathbf{a} a \mathbf{b} (poloměr sféry se středem v \mathbf{x} , na které leží body \mathbf{a} a \mathbf{b}) a \mathbf{d} je normalizovaný směrový vektor přímky \mathcal{L} . Máme tak nástroj, jak z dvou bodů vybrat jeden z nich a nyní budeme hledat analogii pro CGA.

Dále budeme značit se symbolem „*“ IPNS reprezentaci a bez tohoto symbolu OPNS reprezentaci. Protože budeme demonstrovat tuto dekompozici v \mathbb{R}^3 , uvažujme CGA nad tímto prostorem.

Uvažujme nyní průnik přímky \mathbf{L} a sféry \mathbf{S} . Předpokládejme, že poloměr sféry je menší než ortogonální vzdálenost jejího středu od přímky, tedy že průnikem je dvojbod. Necht $\mathbf{A} = \mathcal{C}(\mathbf{a})$, $\mathbf{B} = \mathcal{C}(\mathbf{b})$ reprezentují dva různé body a $\mathbf{Q} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ necht reprezentuje dvojbod tvořený těmito body. Vektor $\mathbf{L} = \mathbf{Q} \wedge \mathbf{e}_\infty = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{e}_\infty$ potom reprezentuje OPNS přímkou procházející body \mathbf{a} a \mathbf{b} . Ukažme nejprve, co reprezentuje vektor $\mathbf{P}^* = (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_\infty$.

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_\infty &= \left(\left(\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \right) \wedge \left(\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \right) \right) \cdot \mathbf{e}_\infty \\
 &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_\infty + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{e}_\infty + \mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\infty + \frac{1}{2}\mathbf{a}^2\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_\infty \\
 &\quad + \frac{1}{2}\mathbf{a}^2\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_\infty + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{e}_\infty \\
 &= 0 + 0 - \mathbf{a} + 0 - \frac{1}{2}\mathbf{a}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\mathbf{e}_\infty \\
 &= \mathbf{b} - \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2)\mathbf{e}_\infty.
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

Vektor \mathbf{P}^* je tedy IPNS reprezentace roviny kolmé na přímkou \mathbf{L} s ortogonální vzdáleností $\left| \frac{\frac{1}{2}(\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2)}{\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|} \right|$ od počátku, která prochází v polovině úsečky tvořené body \mathbf{a} a \mathbf{b} .

V literatuře se často zavádí operace *join* a *meet*, jež pracují s podprostory, které reprezentují účastníci se blady (viz [10] str. 84). V našem odvození využijeme faktu, že průnik přímky \mathbf{L} a roviny \mathbf{P}^* lze najít jako jejich *meet*. V našem konkrétním případě to znamená součin $\mathbf{P}^* \cdot \mathbf{L}$. Pokud se podíváme na výraz za druhým „=“ v odvození roviny \mathbf{P}^* v (1.47), místo vnitřních součinů s \mathbf{e}_∞ budou v případě přímky \mathbf{L} vnější součiny. Snadno

tak nahlédneme, že $\mathbf{L} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{e}_\infty = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty$. Spočtěme nyní součin $\mathbf{P}^* \cdot \mathbf{L}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{L} &= ((\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2)\mathbf{e}_\infty) \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty) \\
 &= \underbrace{(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty}_{\textcircled{1}} + \underbrace{(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty}_{\textcircled{2}} + \underbrace{(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (-\mathbf{b}) \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty}_{\textcircled{3}} + \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2)\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty}_{\textcircled{4}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2)\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{a} \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty}_{\textcircled{5}} + \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2)\mathbf{e}_\infty \cdot (-\mathbf{b}) \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty}_{\textcircled{6}}.
 \end{aligned}$$

Pro přehlednost rozeberme jednotlivé součiny.

Součin	Výsledek
①	$((a_2 - b_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_3 - b_3)(a_1 b_3 - a_3 b_1))\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_\infty +$ $+ ((b_1 - a_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_3 - b_3)(a_2 b_3 - a_3 b_2))\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_\infty +$ $+ ((b_1 - a_1)(a_1 b_3 - a_3 b_1) + (b_2 - a_2)(a_2 b_3 - a_3 b_2))\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_\infty.$
②	$(a_1(b_1 - a_1) + a_2(b_2 - a_2) + a_3(b_3 - a_3))\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty$
③	$(b_1(a_1 - b_1) + b_2(a_2 - b_2) + b_3(a_3 - b_3))\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty$
④	0
⑤	$\frac{1}{2}(\mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2)\mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_\infty$
⑥	$-\frac{1}{2}(\mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2)\mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty$

Tabulka 1.5: Výsledky součinů v $\mathbf{P}^* \cdot \mathbf{L}$

Všimněme si, že po sečtení ② a ③ vznikne u členu $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty$ koeficient $-((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2) = -\sum_{i=1}^3 (a_i - b_i)^2$. Pro lepší orientaci zavedme označení výsledku součinu ① jako $\mathbf{u} \wedge \mathbf{e}_\infty$ a součtu koeficientů z ② a ③ jako $-\frac{1}{\beta}$ (tedy $\beta = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 (a_i - b_i)^2}$). Tabulka 1.5 se tak zjednoduší do tvaru

Součin	Výsledek
①	$\mathbf{u} \wedge \mathbf{e}_\infty$
②+③	$-\frac{1}{\beta}\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty$
④	0
⑤+⑥	$\frac{1}{2}(\mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2)(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_\infty$

Tabulka 1.6: Výsledky součinů v $\mathbf{P}^* \cdot \mathbf{L}$ po změně značení

1.8 DEKOMPOZICE DVOJBODU

Sečteme-li vše dohromady, dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{L} &= (\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2)(\mathbf{a} - \mathbf{b})) \wedge \mathbf{e}_\infty - \frac{1}{\beta} \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty, \\ &\simeq -\beta(\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2)(\mathbf{a} - \mathbf{b})) \wedge \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Protože libovolný nenulový skalární násobek nezmění reprezentaci, symbol „ \simeq “ znamená rovnost až na násobek nenulovým skalárem. Podíváme-li se na výraz (1.48) důkladně, jde o tvar $\mathbf{t} \wedge \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty$, kde $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$. Jedná se o takzvaný *homogenní bod*. Homogenní bod je dvojbod, který obsahuje bod v \mathbb{R}^3 a bod v nekonečnu. Jestliže máme $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ a $\mathbf{T} = \mathcal{C}(\mathbf{t})$, potom $\mathbf{H} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{e}_\infty$ je reprezentace homogenního bodu. Protože bod v nekonečnu nemá reprezentaci v \mathbb{R}^3 , jsou \mathbf{H} i \mathbf{T} reprezentace bodu \mathbf{t} , přestože $\mathbf{T} = \mathbf{t} + \frac{1}{2}\mathbf{t}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$ a $\mathbf{H} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty$. Celkem jsme dostali, že $\mathbf{X}_H = \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{L}$ je OPNS reprezentace bodu v polovině mezi body \mathbf{a} a \mathbf{b} .

Ukážeme dále, že součin $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}^{-1}$ je reprezentace sféry se středem v bodě reprezentovaném vektorem \mathbf{X}_H a poloměrem rovným polovině délky úsečky tvořené body \mathbf{a} a \mathbf{b} . Uvědomme si, že \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{e}_∞ jsou jistě 1-vektory. $\mathbf{L} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{e}_\infty$ je potom blade stupně 3. Lze se snadno přesvědčit, že $\tilde{\mathbf{L}} = -\mathbf{L}$, takže

$$\mathbf{L}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{L}}}{\mathbf{L}\tilde{\mathbf{L}}} = \frac{-\mathbf{L}}{-\mathbf{L}\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{L} * \mathbf{L}}.$$

Spočteme tedy nejdříve $\mathbf{L} * \mathbf{L}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{L} * \mathbf{L} &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty) * (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty) \\ &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty) * (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty) + 2(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty) * ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty) \\ &\quad + ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty) * ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty) \\ &= 0 + 0 + ((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2) \\ &= \frac{1}{\beta}. \end{aligned}$$

Je velmi důležité poznamenat, že tento výsledek platí pouze pokud pracujeme s dvojbodem \mathbf{Q} , ve kterém se vyskytuje wedge normalizovaných bodů \mathbf{A} a \mathbf{B} . Při řešení problémů se ale setkáváme s dvojbodem zadaným jako průnik tří sfér v prostoru, respektive dvou kružnic v rovině (IPNS forma). Duální operací potom dostaneme OPNS reprezentaci, ale nikoliv normalizovaných bodů. Ve skutečnosti dostaneme nějaký násobek normalizované reprezentace. Tento násobek sice nemá vliv na reprezentaci, ale má vliv na výsledek skalárního součinu. V našem odvozování si jej ale můžeme dovolit zanedbat a položit roven jedné, což jsme udělali v předpokladech, neboť vycházíme ze standardizovaných bodů \mathbf{A} a \mathbf{B} , respektive z dvojbodu tvořeným těmito body. Na konci odvození ukážeme, že tento násobek skutečně nemá vliv na platnost vzorce pro extrahování bodů z dvojbodu. Výpočet se nám tak zjednoduší na $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}^{-1} = \beta(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{L})$. Pro jednoduchost spočteme nejprve součin $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} &= (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{e}_\infty) \\
 &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^2 \mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_\infty + \mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{a}^2 \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^2 \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{b} + \\
 &\quad \frac{1}{2} \mathbf{b}^2 \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty) \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty) \\
 &= \underbrace{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{(\frac{1}{2} \mathbf{b}^2 (\mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_\infty)) \cdot ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty)}_{\textcircled{2}} + \\
 &\quad \underbrace{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty)}_{\textcircled{3}} + \underbrace{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty)}_{\textcircled{4}} + \\
 &\quad \underbrace{(\frac{1}{2} \mathbf{a}^2 (\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0)) \cdot ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty)}_{\textcircled{5}} + \underbrace{(\frac{1}{2} \mathbf{a}^2 (\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{b})) \cdot ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty)}_{\textcircled{6}} + \\
 &\quad \underbrace{(\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty)}_{\textcircled{7}} + \underbrace{(\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{b}) \cdot ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty)}_{\textcircled{8}} + \\
 &\quad \underbrace{(\frac{1}{2} \mathbf{b}^2 (\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty)) \cdot ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty)}_{\textcircled{9}}.
 \end{aligned}$$

Vynechali jsme součiny, které se vynulují. Rozeberme zbylé součiny postupně a pro do-
držení rozumné délky zápisu zvolme substituci $x = a_1 b_2 - a_2 b_1$, $y = a_1 b_3 - a_3 b_1$, $z =$
 $a_2 b_3 - a_3 b_2$. Jde o koeficienty vektoru $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = x \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + y \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + z \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$.

Součin	Výsledek
①	$-(x^2 + y^2 + z^2) \mathbf{e}_\infty$
②	$\frac{1}{2} \mathbf{b}^2 (a_1(a_1 - b_1) + a_2(a_2 - b_2) + a_3(a_3 - b_3)) \mathbf{e}_\infty$
③	$(a_2 x + a_3 y) \mathbf{e}_1 + (a_3 z - a_1 x) \mathbf{e}_2 + (-a_1 y - a_2 z) \mathbf{e}_3$
④	$(-1)(a_1(a_1 - b_1) + a_2(a_2 - b_2) + a_3(a_3 - b_3)) \mathbf{e}_0$
⑤	$-\frac{1}{2} \mathbf{a}^2 (\mathbf{a} - \mathbf{b})$
⑥	$-\frac{1}{2} \mathbf{a}^2 (b_1(a_1 - b_1) + b_2(a_2 - b_2) + b_3(a_3 - b_3)) \mathbf{e}_\infty$
⑦	$(-b_2 x - b_3 y) \mathbf{e}_1 + (-b_3 z + b_1 x) \mathbf{e}_2 + (b_1 y + b_2 z) \mathbf{e}_3$
⑧	$(b_1(a_1 - b_1) + b_2(a_2 - b_2) + b_3(a_3 - b_3)) \mathbf{e}_0$
⑨	$\frac{1}{2} \mathbf{b}^2 (\mathbf{a} - \mathbf{b})$

Tabulka 1.7: Výsledky součinů v $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}$

1.8 DEKOMPOZICE DVOJBODU

Všimněme si, že $\textcircled{3}, \textcircled{5}, \textcircled{7}, \textcircled{9}$ jsou v součtu vektor z \mathbb{R}^3 . Navíc součet $\textcircled{3}$ a $\textcircled{7}$ je přesně vektor \mathbf{u} . Dostáváme tak

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}^{-1} = & \beta \left(\frac{1}{2}(\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2)(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{u} + \left(\frac{1}{2}(\mathbf{b}^2(a_1(a_1 - b_1) + a_2(a_2 - b_2) + a_3(a_3 - b_3)) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \mathbf{a}^2(b_1(a_1 - b_1) + b_2(a_2 - b_2) + b_3(a_3 - b_3))\right) - x^2 - y^2 - z^2 \right) \mathbf{e}_\infty - \\ & \left. - ((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2) \mathbf{e}_0 \right). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Uvědomme si, že koeficient u \mathbf{e}_0 je vlastně $-\sum_{i=1}^3 (a_i - b_i)^2 = -\beta^{-1}$. Ve výsledku tak po vynásobení β dostáváme u \mathbf{e}_0 méně jedničku. Uvažujme vektor $\mathbf{X} = \mathcal{C}(\mathbf{x})$, kde \mathbf{x} je vektor z \mathbb{R}^3 reprezentovaný vektorem \mathbf{X}_H . Tušíme, že výsledkem má být sféra se středem v bodě \mathbf{x} a poloměrem rovným polovině normy $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$. Protože IPNS tvar takové sféry je $\mathbf{S}^* = \mathbf{X} - \frac{1}{2}\rho^2 \mathbf{e}_\infty = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 - \frac{1}{2}\rho^2 \mathbf{e}_\infty$, můžeme koeficient u \mathbf{e}_∞ ve vektoru $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}^{-1}$ uvažovat jako součet části vyjadřující poloměr sféry a normu vektoru jejího středu. Víme, že poloměr $\rho = \frac{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|}{2}$, potom $\frac{1}{2}\rho^2 = \frac{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2}{8} = \frac{\sum_{i=1}^3 (a_i - b_i)^2}{8}$, kde výraz v čitateli není nic jiného než β^{-1} . Vytýkáním se dá potom koeficient u \mathbf{e}_∞ upravit do tvaru $\beta(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3))(-\frac{1}{2}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)) = \beta\beta^{-1}(-\frac{1}{2}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3))$. Určitě můžeme přičíst a odečíst v pravé závorce číslo $\frac{1}{8\beta}$. Dostaneme tak součet části vyjadřující poloměr a části vyjadřující normu vektoru $\beta\frac{1}{2}((\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2)(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{u})$. Provedme.

$$\begin{aligned} & \beta\beta^{-1}\left(-\frac{1}{2}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\right) \mathbf{e}_\infty = \\ & = \left(-\frac{1}{2}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + \frac{1}{8\beta} - \frac{1}{8\beta}\right) \mathbf{e}_\infty = \\ & = \frac{1}{8\beta} \mathbf{e}_\infty - \left(\frac{1}{2}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + \frac{1}{8\beta}\right) \mathbf{e}_\infty. \end{aligned}$$

Hned je zřejmé, že $\frac{1}{8\beta} = \frac{\sum_{i=1}^3 (a_i - b_i)^2}{8} = \frac{1}{2}\rho^2$. Ukažme dále, že $\frac{1}{2}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + \frac{1}{8\beta} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$. Skutečně,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i\right) + \frac{1}{8\beta} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i\right) + \frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2(\sum_{i=1}^3 a_i b_i)}{8} = \\ & = \frac{4(\sum_{i=1}^3 a_i b_i) + \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2(\sum_{i=1}^3 a_i b_i)}{8} = \frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2(\sum_{i=1}^3 a_i b_i)}{8} = \frac{\|\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2\|^2}{8} = \\ & = \frac{1}{2} \frac{\|\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2\|^2}{4}. \end{aligned}$$

Pokud budeme dále upravovat rovnici $\frac{1}{2}\frac{\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2}{4} = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$, vynásobením dvěma a odmocněním (které je v pořádku, jde vždy o nezáporná čísla) dostaneme $\frac{\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|}{2} = \|\mathbf{x}\|$. To je ale přece pravda, neboť \mathbf{x} je střed kružnice a polovina součtu vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} je přesně vektor určující střed úsečky tvořené těmito vektory.

Během odvození nám vyšel méně jedna násobek standardizované sféry, dostáváme vlastně $\mathbf{S}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}^{-1} \simeq \mathbf{x} + \frac{1}{2} \frac{\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2}{4} \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 - \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^3 (a_i-b_i)^2}{4} \mathbf{e}_\infty = \mathbf{X} - \frac{1}{2} \rho^2 \mathbf{e}_\infty$, kde \simeq značí rovnost až na nenulový skalární násobek, v našem případě -1 , a

$$\mathbf{x} = (-1)\beta \left(\frac{1}{2} (\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2) (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{u} \right).$$

Máme k dispozici normalizovaný tvar sféry. Její poloměr můžeme jednoduše dostat jako

$$r = \sqrt{\frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}}. \quad (1.50)$$

Výraz pod odmocninou není nic jiného než \mathbf{S}^{*2} . Protože \mathbf{S}^* je non-null blade, geometrický součin jeho samého se sebou je roven skalárnímu, respektive vnitřnímu součinu (u vnitřního součinu bude vzhledem ke stejnému stupni účastníků se bladů projekce na stupeň nula). Z toho dostáváme $\mathbf{S}^{*2} = \mathbf{X}^2 - \rho^2 \mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_\infty$. Protože \mathbf{X} je konformní rozšíření bodu \mathbf{x} , jeho druhá mocnina je nulová (leží na null-kuželu). Zřejmě $\mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_\infty = -1$, a proto $\mathbf{S}^{*2} = \rho^2$. Proto platí vzoreček pro výpočet poloměru (1.50).

Vzpomeňme si, na začátku kapitoly bylo řečeno, že z dvojice bodů v \mathbb{R}^n lze vybrat jeden nebo druhý z jeho bodů pomocí přímky tyto body spojující a sféry se středem ve středu těchto dvou bodů. Nyní máme tyto objekty k dispozici v rámci CGA a uvidíme, že do jednoho, respektive druhého konformního bodu se dostaneme, když k imaginární sféře se středem v \mathbf{x} a imaginárním poloměrem rovným r přičteme, respektive odečteme rovinu procházející jejím středem a kolmou na přímkou \mathbf{L} . Nejprve ukažme pro \mathbb{R}^3 , že skutečně platí vzoreček uváděný v literatuře. Například v [4] nebo [1] najdeme vzoreček

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} = \frac{\pm \sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}} + \mathbf{Q}}{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}}, \quad (1.51)$$

díky kterému můžeme z dvojvodu získat jednotlivé body. Ve skutečnosti při použití přesně tohoto tvaru dostaneme méně jedna násobek konformního bodu. Dokažme nyní, že když vezmeme verzi s rozdílem, dostaneme bod \mathbf{A} . Uvidíme totiž, že bod \mathbf{B} bychom dostali analogicky součtem.

Věta 1.43. Buď $\mathbb{G}_{4,1}$ konformní geometrická algebra. Mějme vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ a $\mathbf{A} = \mathcal{C}(\mathbf{a}), \mathbf{B} = \mathcal{C}(\mathbf{b}) \in \mathbb{G}_{4,1}$. Dále necht $\mathbf{Q} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$. Potom platí

$$\mathbf{A} = -\frac{-\sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}} + \mathbf{Q}}{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}}. \quad (1.52)$$

Důkaz. Zřejmě $\mathbf{A} = -(\mathbf{Q} - \sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}})(\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q})^{-1}$. Inverzi k $\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}$ najdeme podobně jako u přímky \mathbf{L} . Hned vyjde $(\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q})^{-1} = \frac{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}$. Rovnost (1.52) tak přejde dále na tvar

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} (\mathbf{Q}(\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}) - \sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}} \mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}).$$

1.8 DEKOMPOZICE DVOJBODU

Připomeňme substituci $x = a_1b_2 - a_2b_1$, $y = a_1b_3 - a_3b_1$, $z = a_2b_3 - a_3b_2$, kterou budeme i nadále využívat. Je třeba spočítat součiny $\mathbf{Q}(e_\infty \cdot \mathbf{Q})$, $e_\infty \cdot \mathbf{Q}$ a $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}$. Provedme.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} &= \dots = -(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{3}{2}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - \left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i\right)(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{b}^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\mathbf{a}^2\right)^2 \\ &= -(x^2 + y^2 + z^2) + \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - \left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i\right)(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) + \left(\frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)\right)^2 \\ &= \dots = \left(\frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) - \left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Proto $\sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) - \left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i\right)$.

$$\begin{aligned} e_\infty \cdot \mathbf{Q} &= \underbrace{e_\infty \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_0)}_{=\mathbf{a}} + \underbrace{e_\infty \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{a}^2\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0\right)}_{=\frac{1}{2}\mathbf{a}^2\mathbf{e}_\infty} + \underbrace{e_\infty \cdot (\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{b})}_{=-\mathbf{b}} + \underbrace{e_\infty \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{b}^2\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty\right)}_{=-\frac{1}{2}\mathbf{b}^2\mathbf{e}_\infty} = \\ &= \mathbf{a} - \mathbf{b} + \frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)\mathbf{e}_\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(e_\infty \cdot \mathbf{Q}) &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_\infty - \frac{1}{2}\mathbf{a}^2\mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty + \frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0) \\ &\quad \left(\mathbf{a} - \mathbf{b} + \frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)\right). \end{aligned}$$

V Tabulce 1.8 jsou výsledky nenulových součinů v $\mathbf{Q}(e_\infty \cdot \mathbf{Q})$.

Součin	Výsledek
$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})$	\mathbf{u}
$\frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{e}_\infty$	$\frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{e}_\infty$
$((\mathbf{a} - \mathbf{b})\mathbf{e}_0)(\mathbf{a} - \mathbf{b})$	$-\frac{1}{\beta}\mathbf{e}_0$
$\left(\frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)\right)((\mathbf{a} - \mathbf{b})\mathbf{e}_0)\mathbf{e}_\infty$	$\frac{1}{2}(\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2)(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)(\mathbf{a} - \mathbf{b})\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty$
$\frac{1}{2}\mathbf{b}^2(\mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_\infty)(\mathbf{a} - \mathbf{b})$	$\left(-\frac{1}{2}\mathbf{b}^2\left(\sum_{i=1}^3 a_i(a_i - b_i)\right)\right)\mathbf{e}_\infty + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{e}_\infty$
$-\frac{1}{2}\mathbf{a}^2(\mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty)(\mathbf{a} - \mathbf{b})$	$\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}^2\left(\sum_{i=1}^3 b_i(a_i - b_i)\right)\right)\mathbf{e}_\infty - \frac{1}{2}\mathbf{a}^2(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{e}_\infty$
$\left(\frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)\mathbf{e}_\infty\right)$	$-\left(\frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)\right)^2\mathbf{e}_\infty$
$\frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)(\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0)(\mathbf{a} - \mathbf{b})$	$-\frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty)$

Tabulka 1.8: Výsledky součinů v $\mathbf{Q}(e_\infty \cdot \mathbf{Q})$

Podíváme li se na Tabulku 1.8 důkladně, všimneme si, že všechny blady stupně 3 se nakonec odečtou a zůstanou pouze blady stupně 1 (platí vlastně $\mathbf{Q}(e_\infty \cdot \mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \cdot (e_\infty \cdot \mathbf{Q})$). Abychom dokázali, že dostaneme bod \mathbf{A} , je třeba ukázat, že koeficient u vektoru \mathbf{e}_0 je jednička, součet vektorů z \mathbb{R}^3 dává skutečně vektor \mathbf{a} a u vektoru \mathbf{e}_∞ musí být dvojnásobek

druhé mocniny normy vektoru \mathbf{a} . Uvědomme si, že když vše sečteme, u vektoru \mathbf{e}_0 máme koeficient $-\frac{1}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} \frac{-1}{\beta} = \beta \frac{1}{\beta} = 1$.

Dále ukažme, že koeficient u \mathbf{e}_∞ dává druhou mocninu normy vektoru \mathbf{a} .

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} \left(\left(-\frac{1}{2} \mathbf{b}^2 \left(\sum_{i=1}^3 a_i (a_i - b_i) \right) \right) + \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^2 \left(\sum_{i=1}^3 b_i (a_i - b_i) \right) \right) \right) - \\
 & -\frac{1}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} \left(-\left(\frac{1}{2} (\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2) \right)^2 \right) + \frac{1}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) - \left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i \right) \right) \frac{1}{2} (\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2) = \\
 & = \frac{1}{2\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} \left(-\mathbf{a}^2 a_1 b_1 + \mathbf{b}^2 a_1^2 + \mathbf{a}^2 b_1^2 - \mathbf{b}^2 a_1 b_1 - \mathbf{a}^2 a_2 b_2 + \mathbf{b}^2 a_2^2 + \mathbf{a}^2 b_2^2 - \mathbf{b}^2 a_2 b_2 - \right. \\
 & \left. - \mathbf{a}^2 a_3 b_3 + \mathbf{b}^2 a_3^2 + \mathbf{a}^2 b_3^2 - \mathbf{b}^2 a_3 b_3 + \frac{1}{2} (\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2)^2 + \left(\frac{1}{2} (\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) - \left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i \right) \right) (\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) \right) = \\
 & = \frac{1}{2\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} \left(-\mathbf{a}^2 a_1 b_1 + \mathbf{b}^2 a_1^2 + \mathbf{a}^2 b_1^2 - \mathbf{b}^2 a_1 b_1 - \mathbf{a}^2 a_2 b_2 + \mathbf{b}^2 a_2^2 + \mathbf{a}^2 b_2^2 - \mathbf{b}^2 a_2 b_2 + \right. \\
 & \left. + \mathbf{a}^4 - \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2 (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + \mathbf{b}^2 (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \right) = \\
 & = \frac{1}{2\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} \left(\mathbf{a}^2 (\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)) \right) = \frac{\mathbf{a}^2 \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}{2\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^2.
 \end{aligned}$$

Nakonec je třeba ukázat, že výsledkem $-\frac{1}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} (\mathbf{u} + \frac{1}{2} (\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2) (\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}} (\mathbf{a} - \mathbf{b}))$ je vektor \mathbf{a} . Lze podobnou úvahou jako při odvozování koeficientu u \mathbf{e}_∞ postupně celý výraz uvnitř závorky roznásobit a po jednotlivých složkách vektorů vytýkat a_i pro dané \mathbf{e}_i . Dostaneme nakonec $\frac{1}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} (a_i (-\mathbf{L} \cdot \mathbf{L})) = a_i$ pro dané \mathbf{e}_i , kde $i \in \{1, 2, 3\}$.

Celkem jsme tak dostali vektor $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^2 + \mathbf{e}_0$ přesně ve formě předpokladu věty. Tímto je důkaz proveden. \square

Vrátíme-li se k formě vzorečku (1.51), tak jsme ukázali, že vektor $\frac{-\sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}} + \mathbf{Q}}{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}}$ skutečně reprezentuje bod \mathbf{a} . Přesněji máme $\frac{-\sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}} + \mathbf{Q}}{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}} \simeq \mathbf{A}$. Výše bylo zmíněno, že extrahování jednoho bodu z dvojvodu není nic jiného, než součet imaginární sféry se středem v bodě \mathbf{x} a poloměrem r a roviny procházející bodem \mathbf{x} a kolmé na přímkou \mathbf{L} . Protože z rovnice (1.51) dostáváme méně jedna násobek normalizovaných bodů, vezměme si její pravou stranu s opačným znaménkem a upravujeme.

$$\begin{aligned}
 -\frac{\pm \sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}} + \mathbf{Q}}{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}} & = -(\mathbf{Q} \pm \sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}}) (\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q})^{-1} \\
 & = -(\mathbf{Q} \pm \sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}}) \frac{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} \\
 & = \underbrace{-\frac{\mathbf{Q} (\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q})}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}}_{\text{imaginární sféra}} \mp \underbrace{\frac{\sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}}}{\sqrt{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}}}_{\text{její poloměr}} \cdot \underbrace{\frac{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}}{\sqrt{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}}}_{\text{normalizovaná rovina}}. \tag{1.53}
 \end{aligned}$$

Jedná-li se skutečně o takovou imaginární sféru, jak tvrdíme, můžeme pokračovat v úpravách:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\mathbf{Q} (\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q})}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} \mp \frac{\sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}}}{\sqrt{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}} \cdot \frac{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}}{\sqrt{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}} & = \mathbf{X} + \frac{1}{2} r^2 \mathbf{e}_\infty \mp r \sqrt{\beta} (\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}) = \\
 = \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^2 \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} r^2 \mathbf{e}_\infty \mp r \sqrt{\beta} (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \frac{1}{2} (\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2) \mathbf{e}_\infty). \tag{1.54}
 \end{aligned}$$

1.8 DEKOMPOZICE DVOJBODU

Dále budeme chtít ukázat, že výraz (1.54) je bod \mathbf{A} , budeme tedy uvažovat součet místo \mp (násobili jsme už méně jedničkou, proto součet zde znamená ve skutečnosti odčítání v rámci vzorce (1.51), což je v pořádku, pokud chceme získat bod \mathbf{A}). Abychom ukázali, že se jedná o bod \mathbf{A} , je třeba, aby koeficient u vektoru \mathbf{e}_0 byla jednička, což je ale zřejmé. Dále je třeba, aby euklidovská část dávala vektor \mathbf{a} . Uvažujeme-li tedy euklidovské vektory z výrazu (1.54), kde zřejmě $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, dostáváme

$$\underbrace{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}}_{\text{střed dvoj bodu}} + r \cdot \underbrace{\sqrt{\beta}(\mathbf{a} - \mathbf{b})}_{\text{jednotkový směrový vektor přímký procházející body } \mathbf{a} \text{ a } \mathbf{b}},$$

což je přesně tvar $\mathbf{x} + r\mathbf{d}$, o kterém jsme hovořili na začátku kapitoly, kde \mathbf{d} je současně jednotkový normálový vektor roviny $\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}$. Nakonec je třeba, aby koeficient násobící \mathbf{e}_∞ byl roven dvojnásobku druhé mocniny normy vektoru \mathbf{a} . Sečteme tedy koeficienty u \mathbf{e}_∞ z výrazu (1.54):

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}r^2 + r\sqrt{\beta}\frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2),$$

kde $r\sqrt{\beta} = \frac{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|}{2} \frac{1}{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|} = \frac{1}{2}$, proto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}r^2 + r\sqrt{\beta}\frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2}{4} + \frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2}{4} + \frac{2\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{b}^2}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\sum_{i=1}^3(a_i b_i) + \mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2 - 2\sum_{i=1}^3(a_i b_i) + 2\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{b}^2}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{a}^2. \end{aligned}$$

Tímto jsme ukázali, že skutečně dostaneme body z dvoj bodu součtem, respektive rozdílem speciální imaginární kružnice a speciální roviny.

Na závěr si ukažme, že zanedbáním násobku ze skalárních součinů jsme se nedopustili chyby. Jak bylo zmíněno, ve skutečnosti se budeme setkávat s dvoj bodem zadaným jako průsečík dvou kružnic v rovině nebo tří sfér v prostoru. Z této reprezentace (IPNS) dostaneme vynásobením inverzí k pseudoskaláru OPNS reprezentaci, která je obecně určitým násobkem normalizované verze. Místo $\mathbf{Q} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ tak dostaneme $\mathbf{Q}' = c\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, kde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Uvědomme si, že v prvním členu vzorce (1.51) dostaneme $\frac{c^2 \mathbf{Q}(\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q})}{c^2 \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}$, takže násobek se zkrátí. V druhém členu podobně $\frac{c\sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}} c(\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q})}{c^2 \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}$. Nezajímá-li nás tedy normalizovaný tvar a jde-li pouze o reprezentaci, můžeme použít vzoreček

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \simeq (\mathbf{Q} \pm \sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}})(\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}). \quad (1.55)$$

Chceme-li naopak normalizovaný konformní bod, můžeme použít vzoreček

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} = -\frac{1}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}(\mathbf{Q} \pm \sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}})(\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}). \quad (1.56)$$

Příklad 1.44. Spočteme body průniku kružnic $\mathbf{S}_a, \mathbf{S}_b, \mathbf{S}_c$, které mají popořadě středy v bodech $\mathbf{a} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ a poloměry $r_a = 3$, $r_b = 2$, $r_c = 3$.

Problém převedeme do CGA a dostáváme body a kružnice:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 = \mathbf{a} + 5.5\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0, & \mathbf{S}_a &= \mathbf{A} - \frac{1}{2}r_a^2\mathbf{e}_\infty = \mathbf{a} + \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 = \mathbf{b} + 2.5\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0, & \mathbf{S}_b &= \mathbf{B} - \frac{1}{2}r_b^2\mathbf{e}_\infty = \mathbf{b} + 0.5\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{c}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 = \mathbf{c} + 4.5\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0, & \mathbf{S}_c &= \mathbf{C} - \frac{1}{2}r_c^2\mathbf{e}_\infty = \mathbf{c} + \mathbf{e}_0. \end{aligned}$$

Průnik kružnic je dvojbod $\mathbf{S}_a \wedge \mathbf{S}_b \wedge \mathbf{S}_c$. Zde na chvíli zůstaneme u nerozepsaných tvarů vzhledem k délce zápisu. Tento dvojbod máme v IPNS reprezentaci. Chceme-li použít některou formu vzorečku (1.51), je třeba získat OPNS reprezentaci, tedy vynásobit IPNS reprezentaci inverzí k pseudoskaláru:

$$(\mathbf{S}_a \wedge \mathbf{S}_b \wedge \mathbf{S}_c)\mathbf{I}^{-1} = -(\mathbf{S}_a \wedge \mathbf{S}_b \wedge \mathbf{S}_c)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0).$$

Označme pro přehlednost výsledek tohoto součinu jako \mathbf{Q} . Zkonstruuje dále přímku \mathbf{L} procházející tímto dvojbodem, tedy $\mathbf{L} = \mathbf{Q} \wedge \mathbf{e}_\infty$. Nyní máme vše potřebné k tomu, abychom dostali body z dvojbodu \mathbf{Q} jako součet, respektive rozdíl, imaginární sféry a roviny jako v (1.53):

$$\mathbf{S}_{im} = -\frac{\mathbf{Q}(\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q})}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}, \quad r = \frac{\sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}}}{\sqrt{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}}, \quad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{Q}}{\sqrt{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}},$$

$$\mathbf{S}_{im} = 1.0\bar{6}\mathbf{e}_1 + 0.51\bar{3}\mathbf{e}_2 + 1.59\bar{3}\mathbf{e}_3 + 3.22\bar{6}\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0, \quad r \doteq 1.58535,$$

$$\mathbf{P} \doteq -0.57735\mathbf{e}_1 - 0.11547\mathbf{e}_2 - 0.80829\mathbf{e}_3 - 1.96299\mathbf{e}_\infty.$$

Nakonec tak dostáváme z $\mathbf{S}_{im} \mp r\mathbf{P}$ body

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &\doteq (1.0\bar{6} + 1.58535 \cdot 0.57735)\mathbf{e}_1 + (0.51\bar{3} + 1.58535 \cdot 0.11547)\mathbf{e}_2 + \\ &\quad (1.59\bar{3} + 1.58535 \cdot 0.80829)\mathbf{e}_3 + (3.22\bar{6} + 1.58535 \cdot 1.96299)\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \\ &\doteq 1.98197\mathbf{e}_1 + 0.69639\mathbf{e}_2 + 2.87476\mathbf{e}_3 + 6.33870\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0, \end{aligned}$$

a podobně

$$\mathbf{X}_2 \doteq 0.15136\mathbf{e}_1 + 0.33027\mathbf{e}_2 + 0.31191\mathbf{e}_3 + 0.11464\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0.$$

Všimněme si, že jsme skutečně dostali body v normalizovaném tvaru, proto jsou řešením přímo jejich euklidovské části, tedy

$$\mathbf{x}_1 \doteq 1.98197\mathbf{e}_1 + 0.69639\mathbf{e}_2 + 2.87476\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{x}_2 \doteq 0.15136\mathbf{e}_1 + 0.33027\mathbf{e}_2 + 0.31191\mathbf{e}_3.$$

1.9 Geometrická algebra $\mathbb{G}_{3,1}$

Protože druhá část práce řeší problém inverzní kinematiky v rovině, popíšeme geometrickou algebru nad \mathbb{R}^2 . V předchozích kapitolách byla provedena pozorování a odvození, které ve zkratce shrneme pro algebru $\mathbb{G}_{3,1}$. Především rozšiřujeme prostor \mathbb{R}^2 jak jsme popsali v Kapitolách 1.6.1 a 1.6.2. Cílem kapitoly je podat shrnutí toho, co budeme využívat při řešení problémů inverzní kinematiky.

Báze

Následující tabulka znázorňuje bázi geometrické algebry $\mathbb{G}_{3,1}$.

Stupeň	Název	Bázové blady	Počet
0	Skalár	$\mathbf{1}$	1
1	Vektor	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_0$	4
2	Bivektor	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_0,$ $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0$	6
3	Trivektor	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0,$ $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0$	4
4	Pseudoskalár	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0$	1

Tabulka 1.9: Báze prostoru $\mathbb{G}_{3,1}$

Objekty

Protože popisujeme rovinný prostor, je pro nás sféra vlastně kružnice a dvojice bodů průnik dvou kružnic. Tabulka 1.10 shrnuje reprezentace objektů pro $\mathbb{G}_{3,1}$.

Objekt	IPNS reprezentace	OPNS reprezentace
Bod	$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$	
Kružnice	$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \frac{1}{2}r^2\mathbf{e}_\infty$	$\mathbf{C}^* = \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3$
Přímka	$\mathbf{L} = \mathbf{n} + d\mathbf{e}_\infty$	$\mathbf{L}^* = \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty$
Dvojbod	$\mathbf{P}_P = \mathbf{C}_1 \wedge \mathbf{C}_2$	$\mathbf{P}_P^* = \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2$

Tabulka 1.10: Reprezentace geometrických objektů v $\mathbb{G}_{3,1}$

V Tabulce 1.10 je vektor \mathbf{n} jednotkový normálový vektor přímky, d je její ortogonální vzdálenost od počátku a r je poloměr kružnice.

Transformace

V rovině můžeme provést reflexi vzhledem k přímce a rotaci pouze v rovině tvořící tento prostor. Z toho dostáváme následující tvary vektorů zajišťujících transformace.

Transformace	Generátor	Akce na objektu \mathbf{o}
Reflexe	$\mathbf{F} = \mathbf{n} + d\mathbf{e}_\infty$	$\mathbf{o}_F = -\mathbf{F}\mathbf{o}\mathbf{F}$
Rotace	$\mathbf{R} = \cos(\frac{\theta}{2}) - \sin(\frac{\theta}{2})\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$	$\mathbf{o}_R = \mathbf{R}\mathbf{o}\tilde{\mathbf{R}}$
Translace	$\mathbf{T} = 1 - \frac{1}{2}\mathbf{t} \wedge \mathbf{e}_\infty$	$\mathbf{o}_T = \mathbf{T}\mathbf{o}\tilde{\mathbf{T}}$

Tabulka 1.11: Generátory transformací v $\mathbb{G}_{3,1}$

V Tabulce 1.11 je $\mathbf{t} = t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2$ vektor posunutí (translace).

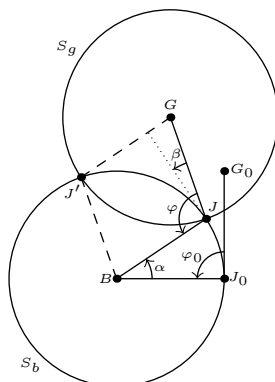
2 Inverzní kinematika

V robotice a počítačové grafice lze narazit na problém zadaný následující otázkou. Vzhledem k požadované poloze řetězce těles, jaká sekvence příkazů jej do této polohy přivede? Na tuto otázku dává odpověď inverzní kinematika. V tomto textu se omezíme na jednoduché robotické rameno v rovině tvořené dvěma linky a možností rotace kolem základny a v kloubu. Budeme tedy řešit dopočítání úhlů natočení těchto kloubů vzhledem k požadované pozici efektoru.

Nejprve ukážeme nejjednodušší řešení, kdy nás zajímá pouze výsledná poloha částí robota. Poté přidáme podmínku na trajektorii efektoru. Je například rozumné požadovat, aby trajektorií byla přímka, čímž se omezí energie potřebná k vykonání pohybu na minimum. Naopak můžeme požadovat, aby se efektor vyhnul nějaké překážce. V takovém případě můžeme například požadovat trajektorii po oblouku.

2.1 2D manipulátor

Předmětem této práce je robotické rameno z článku [5] znázorněné na Obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: 2D manipulátor

Bod B představuje základnu robota (*joint B*), J_0 počáteční polohu kloubu (*joint J*), G_0 počáteční polohu efektoru, G požadovanou polohu efektoru a body J a J' představují možné výsledné polohy jointu J . Počáteční poloha ramene je tak určena trojicí bodů (B, J_0, G_0) . Protože problém má zřejmě dvě řešení (B, J, G) a (B, J', G) , je třeba vybrat jedno z nich. Výběr řešení se provádí pomocí signatury trojúhelníku, o které detailněji pojednává práce [8]. V příloze této práce se ale omezíme na to, že z ilustrací bude jasné, který bod chceme z dvojvodu dostat a nebudeme signaturu trojúhelníku řešit. Protože je úkolem nalézt úhly natočení pro oba jointy a z rotorů lze tyto úhly dostat, můžeme řešit ekvivalentní úlohu najít rotory pro tyto jointy. Pro lepší orientaci v textu doplníme slovní popis řešení sekvencí obrázků, na které se budeme průběžně odkazovat.

2.1.1 Konkrétní úloha v rovinné CGA

Bývá rozumné volit počátek souřadnic v základně robota. Mějme počáteční polohu ramene zadanou v rovině body $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $\mathbf{j}_0 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{g}_0 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ a požadovanou polohu efektoru bodem $\mathbf{g} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{e}_2$. Tato poloha ramene odpovídá Obrázku 2.1. Dostáváme konformní

2.1 2D MANIPULÁTOR

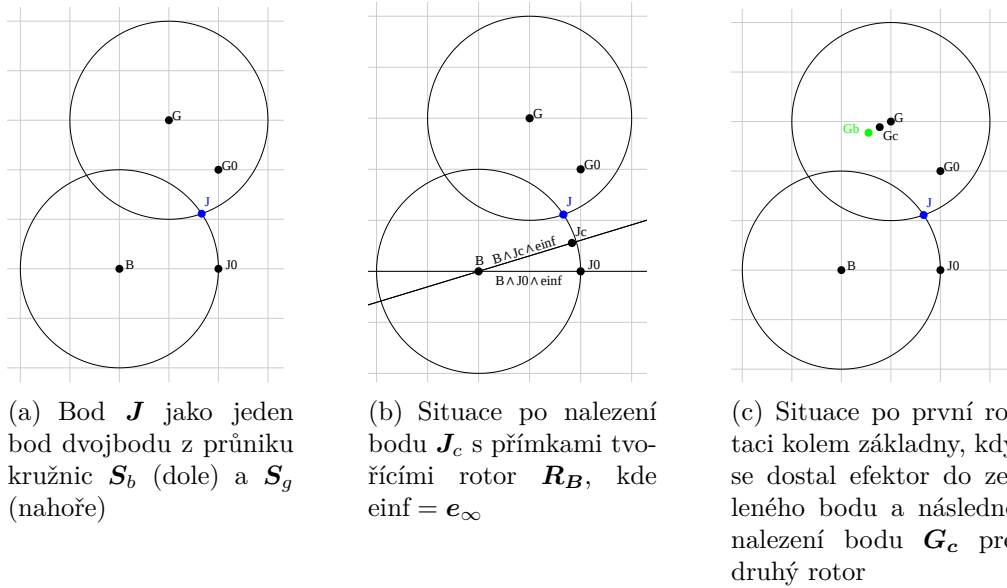
body $\mathbf{B} = \mathcal{C}(\mathbf{b}) = \mathbf{e}_0$, $\mathbf{J}_0 = \mathcal{C}(\mathbf{j}_0) = \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$, $\mathbf{G}_0 = \mathcal{C}(\mathbf{g}_0) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$ a $\mathbf{G} = \mathcal{C}(\mathbf{g}) = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{e}_2 + \frac{5}{4}\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$.

Kružnice \mathbf{S}_b a \mathbf{S}_g sestrojíme jednoduše, když známe jejich středy a poloměry, které jsou v našem případě shodné a jednotkové. Proto $\mathbf{S}_b = \mathbf{B} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_\infty$ a $\mathbf{S}_g = \mathbf{G} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_\infty$. Průnik těchto kružnic je dvojbod $\mathbf{S}_b \wedge \mathbf{S}_g$. Z něj po dualizaci dostaneme vzorečkem (1.51) jednotlivé body \mathbf{J}' a \mathbf{J} . Dále je třeba zjistit signatury trojúhelníků $(\mathbf{B}, \mathbf{J}_0, \mathbf{G}_0)$, $(\mathbf{B}, \mathbf{J}, \mathbf{G})$ a $(\mathbf{B}, \mathbf{J}', \mathbf{G})$. Z obrázku 2.1 je zřejmé, že signatura $(\mathbf{B} \wedge \mathbf{J}_0 \wedge \mathbf{G}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty)^*$ je shodná se signaturou $(\mathbf{B} \wedge \mathbf{J} \wedge \mathbf{G} \wedge \mathbf{e}_\infty)^*$, proto si vybereme bod \mathbf{J} jako konečnou pozici jointu J (viz Obrázek 2.2 a)).

Můžeme už sestrojit rotor pro první joint a to jednou ze dvou možností. Buď můžeme zjistit úhel α jako $\arccos\left(\frac{(\mathbf{B} \wedge \mathbf{J}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty) \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{J} \wedge \mathbf{e}_\infty)}{\|\mathbf{B} \wedge \mathbf{J}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty\| \|\mathbf{B} \wedge \mathbf{J} \wedge \mathbf{e}_\infty\|}\right)$ (viz [4]) a dostat rotor v exponenciálním tvaru jako $\mathbf{R} = e^{-\frac{1}{2}\alpha \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2}$, nebo můžeme najít rotor ve formě reflexí pomocí přímek. Druhá možnost má tu výhodu, že je jednodušší, pokud řešíme rotaci kolem jiného bodu, než je počátek souřadnic. Obecně bychom při takové rotaci museli použít obecný rotor, což vyžaduje hledat příslušný translátor. Navíc prvním způsobem nejsme schopni kontrolovat změnu směru rotace. V příloze je případ trajektorie efektoru po kružnici, přičemž kolem základny je třeba rotovat chvíli v kladném a poté v záporném směru. Z funkce \arccos dostaneme ale pouze kladný úhel.

Použijme nyní rotor pro joint B ve formě reflexí. Proto je třeba dostat bod v polovině dvojvodu $\mathbf{J}_0 \wedge \mathbf{J}$. Ten dle [5] získáme jako $\mathbf{J}_C = (\mathbf{J}_0 \wedge \mathbf{J})\mathbf{e}_\infty(\mathbf{J}_0 \wedge \mathbf{J})$. Potom zřejmě rotor pro rotaci kolem základny, tedy pro joint B , je ve tvaru $\mathbf{R}_B = (\mathbf{B} \wedge \mathbf{J}_C \wedge \mathbf{e}_\infty)(\mathbf{B} \wedge \mathbf{J}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty)$ (viz Obrázek 2.2 b)). Díky tomu můžeme provést první rotaci, bod \mathbf{J} tak dostaneme jako $\mathbf{J} = \mathbf{R}_B \mathbf{J}_0 \tilde{\mathbf{R}}_B$. Je důležité poznamenat, že bod \mathbf{J} jsme získali jako bod pohybu už z dvojvodu dříve. Pro fyzický joint je ale potřeba znát úhel, aby se mohl otočit do požadované pozice. Proto je třeba znát tvar rotoru, který zajišťuje rotaci kolem daného jointu z počáteční polohy do bodu pohybu. Jinými slovy je potřeba, aby byl bod pohybu vyjádřitelný jako rotace pomocí daného rotoru vzhledem k uvažovanému jointu.

Během působení rotace kolem základny se přirozeně pohybuje i druhý link robotu. Pozice efektoru se tak mění a po rotaci dostáváme jeho novou pozici jako $\mathbf{G}_B = \mathbf{R}_B \mathbf{G}_0 \tilde{\mathbf{R}}_B$. Najdeme střed dvojvodu $\mathbf{G}_B \wedge \mathbf{G}$ jako $\mathbf{G}_C = (\mathbf{G}_B \wedge \mathbf{G})\mathbf{e}_\infty(\mathbf{G}_B \wedge \mathbf{G})$ a sestrojíme rotor $\mathbf{R}_J = (\mathbf{J} \wedge \mathbf{G}_C \wedge \mathbf{e}_\infty)(\mathbf{J} \wedge \mathbf{G}_B \wedge \mathbf{e}_\infty)$, což je rotor pro rotaci v prostředním kloubu, tedy pro joint J (viz Obrázek 2.2 c)). Do požadované pozice \mathbf{G} se tak dostaneme rotací $\mathbf{R}_J \mathbf{G}_B \tilde{\mathbf{R}}_J$, což je rotace kolem jointu J , kterou potřebujeme. Tímto je úloha vyřešena, našli jsme dvojici rotorů $(\mathbf{R}_B, \mathbf{R}_J)$.

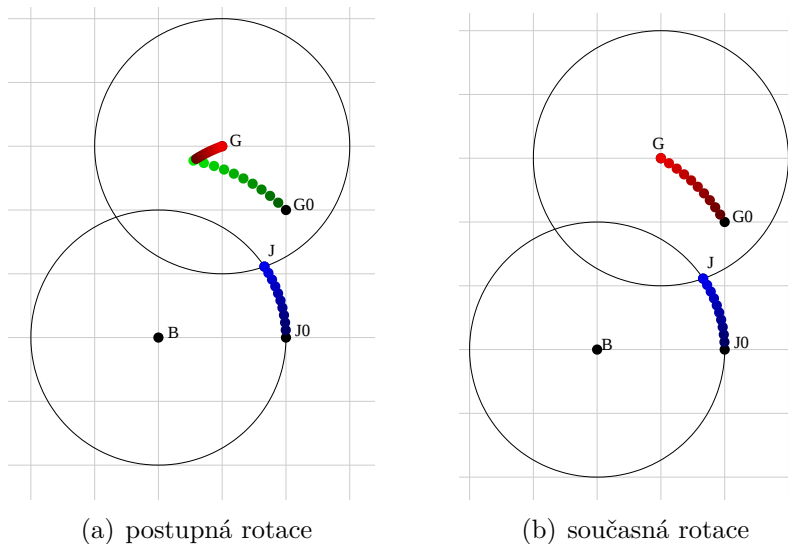


Obrázek 2.2: Postupná rotace

2.1.2 Diskretizace pohybu

Může být výhodné pohyb diskretizovat, díky čemuž můžeme snadněji přizpůsobit trajektorii efektoru daným potřebám. Budeme-li diskretizovat postupnou rotaci, jak jsme popsali výše, dostaneme výsledek na Obrázku 2.3 vlevo. Provedeme-li rotaci v obou jointech současně, dostáváme výsledek na Obrázku 2.3 vpravo. V prvním případě jsou použity rotory v exponenciálním tvaru, nicméně použití exponenciálního tvaru nám zjednoduší diskretizaci tím způsobem, že můžeme uvažovat stejný tvar rotoru pro joint B v každém kroku s dosazeným zlomkem úhlu α tak, aby po provedení všech kroků rotoval o celý tento úhel (chceme-li dělení úhlu na 10 částí, volíme $\alpha_i = \alpha/10$). Pokud bychom chtěli dodržet používání tvaru s reflexemi, chápali bychom modré body pouze jako body pohybu a v každém kroku počítali střed dvojvodu daného budoucím a aktuálním bodem pohybu a s jeho využitím sestrojili v každém kroku nový rotor pro joint B . Pro druhou rotaci kolem prostředního kloubu je třeba použít obecný rotor vzhledem k bodu J , tedy uvažovat translátor tvořený euklidovskou částí bodu J a použít jej na rotor rotující o daný zlomek úhlu β . Nakonec můžeme tímto obecným rotorem provádět rotaci efektoru kolem jointu J (červené body na obrázku 2.3 vlevo). V druhém případě, kdy rotujeme současně v obou jointech, lze postupovat podobně s tím rozdílem, že v každém kroku se mění vektor translace pro druhý rotor (rotujeme vzhledem k aktuální pozici prostředního kloubu dle diskretizace). V každém kroku tak probíhá rotace v jointu B a v jointu J (viz Obrázek 2.3 vpravo). Konkrétní provedení lze nalézt v algoritmech v příloze. Podobně jako v prvním případě bychom mohli chápat získané body jako body pohybu, počítat středy a sestrojít rotory ve formě reflexí.

2.1 2D MANIPULÁTOR



Obrázek 2.3: Diskretizace pohybu

2.1.3 Pohyb po předepsané trajektorii

Byly zmíněny dva rozumné požadavky na trajektorii efektoru - po přímce a po kružnici, respektive oblouku. Tyto přístupy lze různým způsobem kombinovat. Například můžeme chtít části trajektorie po přímkách a části po kružnicích. V této práci budeme řešit pouze jednodušší nekombinované trajektorie. O komplexnějších trajektoriích se lze dočíst například v [8], kde se mimo jiné řeší plynulé přechody mezi náhlými změnami trajektorie, což je přirozený požadavek, neboť ostré přechody nejsou z technického hlediska pro robota vhodné.

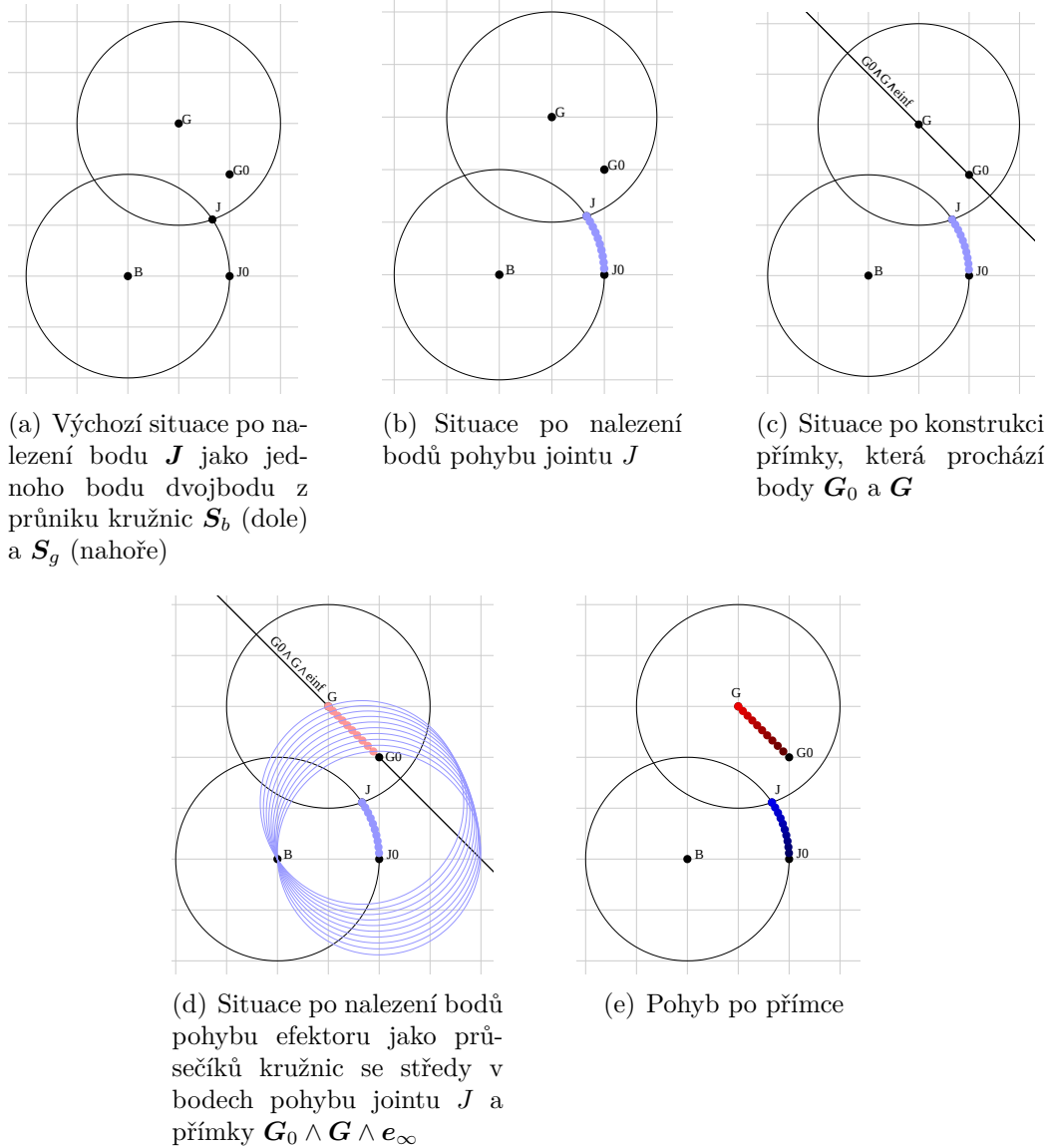
Máme-li předepsanou trajektorii efektoru, je vhodnější používat rotory ve formě reflexí pro rotaci v jointech. Na druhou stranu rotory v exponenciálním tvaru může být výhodné použít pro nalezení bodů pohybu, díky nimž potom můžeme konstruovat rotory ve formě reflexí.

Trajektorie po přímce

Z hlediska minimalizace energie potřebné k vykonání pohybu požadujeme, aby trajektorií byla nejkratší vzdálenost - pohyb po přímce. Podíváme-li se na Obrázek 2.3 vpravo, vidíme, že se trajektorie příliš neliší od přímky. Tento pohyb se realizoval rotací kolem jointu J vždy o stejný úhel daný diskretizací. Chceme-li docílit pohybu po přímce, je potřeba rotovat v každém kroku jen o takový úhel, aby výsledná pozice efektoru byla na přímce. V prvních iteracích bude úhel rotace menší než jaký je v případě na Obrázku 2.3 vpravo, bude se zvětšovat, až nakonec bude větší než tento úhel. Lze to pozorovat na tom, že nejdříve se červené body vychylují směrem od přímky a postupně přechází do směru k přímce. Požadovaného pohybu docílíme následujícím způsobem.

Stejně jako v Obrázku 2.3 najdeme modré body pohybu J_i jointu J a rotory pro joint B pro každý krok \mathbf{R}_{B_i} (viz Obrázek 2.4 b)). Dále sestrojíme přímku spojující body \mathbf{G} a \mathbf{G}_0 jako $\mathbf{L} = \mathbf{G} \wedge \mathbf{G}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty$ (viz obrázek 2.4 c)). V každém kroku potom sestrojíme kružnici $\mathcal{S}_{J_i} = J_i - \frac{1}{2}\mathbf{e}_\infty$ se středem v aktuálním modrém bodě (pozice jointu J) a poloměrem rovným délce druhého linku. Tyto kružnice protínají přímku \mathbf{L} ve dvojbodech a z nich na základě signatury trojúhelníku vybereme body ležící mezi body \mathbf{G} a \mathbf{G}_0 (viz Obrázek

2.4 d)). Tímto jsme získali body pohybu efektoru. V každém kroku tak můžeme spočítat střed dvoj bodu tvořeným bodem pohybu efektoru a bodem efektoru po provedení rotace kolem základny rotorem \mathbf{R}_B . Díky těmto středům můžeme nakonec sestrojít rotory \mathbf{R}_{J_i} pro rotaci efektoru kolem pozic \mathbf{J}_i jointu J . Tímto jsme našli pro každý krok hledanou dvojici rotorů (\mathbf{R}_{B_i} , \mathbf{R}_{J_i}) a úloha je vyřešena. Tento pohyb je znázorněn na Obrázku 2.4 e).



Obrázek 2.4: Rotace po přímce

Trajektorie po kružnici

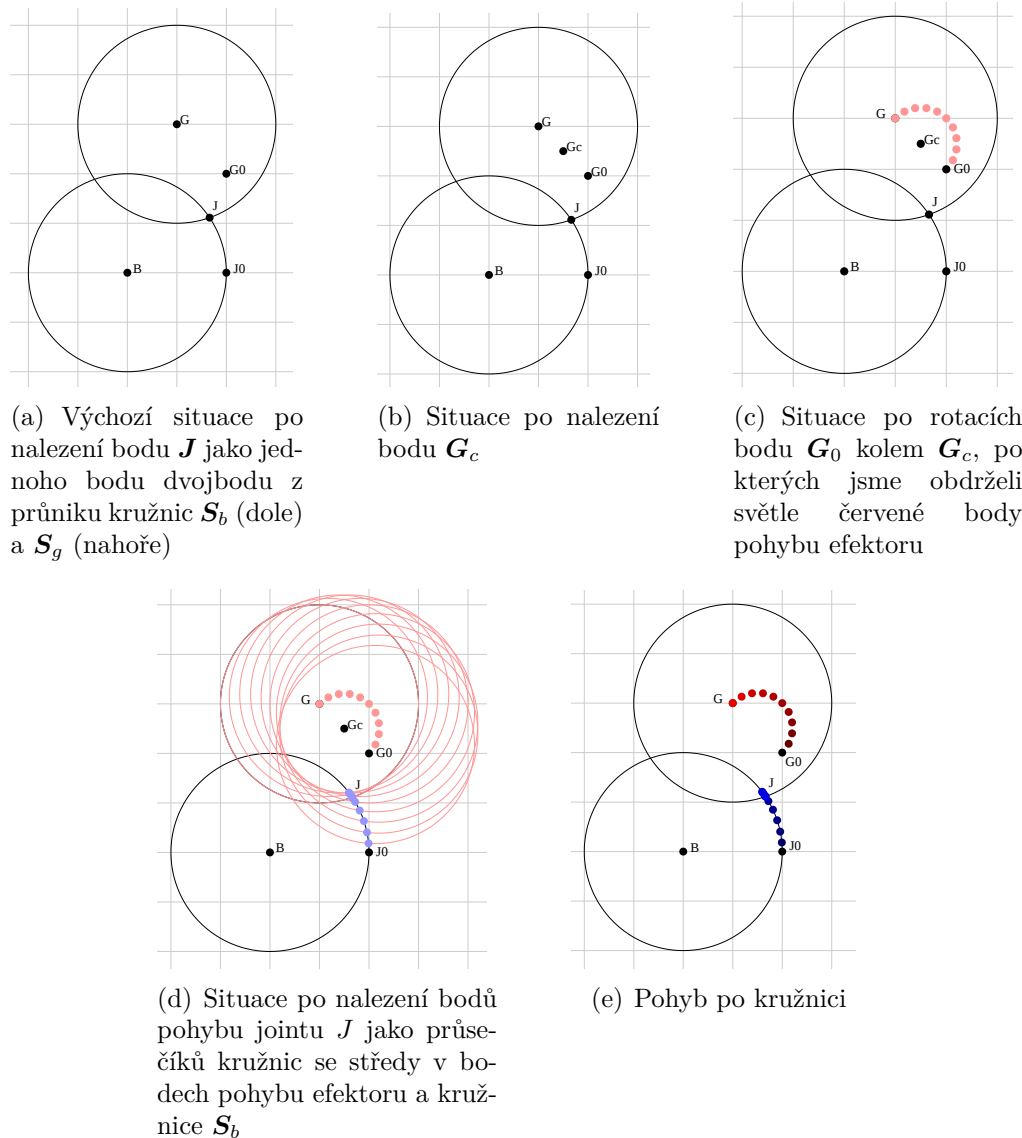
Někdy je třeba vyhnout se překážce, nebo máme nějaký jiný důvod k tomu, abychom zvolili jinou trajektorii než po přímce. Ukažme si, jak lze vyřešit pohyb efektoru po kružnici. Chtějme například pohyb po kružnici se středem uprostřed mezi body G a G_0 .

Nejdříve nalezneme střed této kružnice jako střed dvoj bodu $G_0 \wedge G$. Získáme střed $G_C = (G_0 \wedge G)e_\infty(G_0 \wedge G)$ (viz Obrázek 2.5 b)). Dále chceme sestrojít body pohybu efektoru. Ty můžeme v každém kroku dostat rotací bodu G_0 o úhel π_i (myšleno π_i radiánů,

2.1 2D MANIPULÁTOR

kdy v součtu dostáváme rotaci o 180 stupňů) kolem bodu \mathbf{G}_C (dostat tak body pohybu \mathbf{G}_i). Pro tento účel byl zvolen rotor $\mathbf{R}' = e^{-\frac{1}{2}\pi i \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2}$. Protože chceme docílit rotace kolem bodu \mathbf{G}_C , je třeba zkonstruovat obecný rotor. Proto musíme uvažovat translátor \mathbf{T} tvořený z euklidovské části bodu \mathbf{G}_C a vynásobit $\mathbf{T}\mathbf{R}'\tilde{\mathbf{T}}$, abychom dostali obecný rotor, kterým můžeme působit v každém kroku na bod \mathbf{G}_i a po i krocích dostaneme rotaci o úhel π (v prvním kroku uvažujeme $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_0$). Uvědomme si, že tento rotor není částí řešení, protože se nejedná o rotaci kolem jointu J , ale pouze o pomocnou konstrukci, díky které dostaneme světle červené body na Obrázku 2.5 c).

Dále můžeme v každém kroku konstruovat kružnice $\mathbf{S}_{G_i} = \mathbf{G}_i - \frac{1}{2}\mathbf{e}_\infty$ se středem v bodě pohybu \mathbf{G}_i a poloměrem rovným délce druhého linku. Díky těmto kružnicím můžeme nalézt průniky s kružnicí \mathbf{S}_b a na základě signatury trojúhelníku určit ty body z dvojbodů, které nás zajímají (mezi \mathbf{J}_0 a \mathbf{J} viz Obrázek 2.5 d)). Máme-li tyto body, můžeme najít středy mezi jednotlivými body výše zmíněným způsobem a zkonstruovat rotory \mathbf{R}_{B_i} ve formě reflexí pro rotaci kolem základny. Nakonec můžeme postupovat podobně jako v případě pohybu po přímce, kdy známe v každém kroku polohu efektoru po rotaci kolem základny a bod pohybu efektoru. Můžeme tak v jednotlivých krocích díky středům mezi těmito body sestavit rotory \mathbf{R}_{J_i} ve formě reflexí pro rotaci kolem jointu J . Našli jsme pro každý krok dvojici rotorů ($\mathbf{R}_{B_i}, \mathbf{R}_{J_i}$) a tímto je úloha vyřešena. Tento pohyb je znázorněn na Obrázku 2.5 e).



Obrázek 2.5: Rotace po kružnici

2.1.4 Implementace v jazyce Python

Protože jedním z cílů této práce je sestavit algoritmus v jazyce Python, věnujeme poslední kapitolu ukázce tohoto kódu, který je celý součástí přílohy. Algoritmus byl vytvořen spíše za účelem názornosti než efektivnosti. Důraz byl tedy kladen na čitelnost a názornost kódu.

V této práci se využívá knihovna *Clifford*, která obsahuje potřebný aparát pro práci v geometrických algebrách. Dále se využívá knihovna *Pyganja*, která obsahuje především nástroje pro vizualizaci. Tabulka 2.1 obsahuje základní popis používaných operací a funkcí.

2.1 2D MANIPULÁTOR

Operátor	Význam
*	geometrický součin
	vnitřní součin
^	vnější součin
~	reverse
**	umocnění
Funkce	Význam
dual()	vrátí duál k multivektoru
value[]	vrátí číselnou hodnotu (koeficient) u daného vektoru
up()	projekce vektoru do CGA
down()	zpětná projekce do prostoru, nad kterým uvažujeme CGA

Tabulka 2.1: Operátory a funkce v algoritmu

Uvedme nyní konkrétní ukázkou z algoritmu, který řeší pohyb efektoru po kružnici tak, jak lze vidět na Obrázku 2.5. Nejprve je třeba do prostředí Pythonu importovat zmíněné knihovny.

```
from numpy import *
from clifford.g2c import *
from pyganja import GanjaScene, draw #(pro vizualizaci)
```

Dále jsou přidány do prostředí body \mathbf{B} , \mathbf{J}_0 , \mathbf{G}_0 , \mathbf{G} a kružnice \mathbf{S}_b , \mathbf{S}_g .

```
B = up(0)
J0 = up(e1)
G0 = up(e1+e2)
G = up((1/2*e1)+(3/2*e2))
Sb = B-1/2*einf
Sg = G-1/2*einf
```

Následně byl vypočten z dvojrodu $\mathbf{J} \wedge \mathbf{J}_0$ bod \mathbf{J} (zde jako $\mathbf{J}2$) a předepsána diskretizace (dělení).

```
J1J2 = Sb^Sg
J1J2 = J1J2.dual()
L = J1J2^einf
deleni = 10
J2 = ((J1J2-sqrt((J1J2*J1J2).value[0]))*
(einf|J1J2))/(-(L*L).value[0])
```

Následuje uložení bodů \mathbf{J}_0 a \mathbf{G}_0 do pomocných proměnných \mathbf{J}_i , \mathbf{G}_i , \mathbf{P}_i , které se později využívají v iteračním cyklu. Bod $\mathbf{midGG0}$ představuje bod \mathbf{G}_c ve středu mezi body \mathbf{G}_0 a \mathbf{G} . Dále se konstruuje translátor \mathbf{T} a rotor $\mathbf{RmidGG0}$. Z těchto generátorů transformací se nakonec sestrojí obecný rotor \mathbf{GR} , který se využije k pro rotaci bodu \mathbf{G}_0 kolem \mathbf{G}_c , abychom získali body pohybu efektoru.


```

Ji = J0
Gi = G0
Pi = G0
midGG0 = (G0^G)*einf*(G0^G)
t = down(midGG0)
T = (1)-(1/2*t^einf)
RmidGG0 = exp((( -1/2*pi)/deleni)^e1^e2)
GR = T*RmidGG0*~T

```

Nakonec je zde cyklus pro nalezení rotorů \mathbf{R}_{Bi} a \mathbf{R}_{Ji} . Pi jsou body pohybu efektoru, vznikají rotací obecným rotorem GR působícím na body Pi , kde $i = 0, \dots, \text{deleni}$ a pro $i = 0$ máme $Pi = \mathbf{G}_0$. Dále je v každém kroku spočtena kružnice S a její požadovaný průsečík s kružnicí Sb pomocí dvojvodu $PP1$. Poté se konstruuje výsledný rotor pro rotaci kolem základny RB , kterým se pak provádí rotace bodů Ji a Gi . Nakonec se najde střed dvojvodu $PP2$ jako $PC2$ a zkonstruuje rotor RJ pro rotaci kolem jointu J , který působí na body Gi .

```

for x in range(deleni):
    Pi = GR*Pi*~GR
    S = Pi-1/2*einf
    PP1 = (S^Sb).dual()
    PJ = (PP1+sqrt((PP1|PP1).value[0]))*(einf|(PP1))
    PC1 = (Ji^PJ)*einf*(Ji^PJ)
    RB = (B^PC1^einf)*(B^Ji^einf)
    Ji = RB*Ji*~RB
    Gi = RB*Gi*~RB
    PP2 = Gi^Pi
    PC2 = (Gi^Pi)*einf*(Gi^Pi)
    RJ = (Ji^PC2^einf)*(Ji^Gi^einf)
    Gi = RJ*Gi*~RJ

```

Kompletní provedení včetně komentářů lze dohledat v příloze.

Poznámka 2.1. V algoritmu se používají funkce $up()$ a $down()$ na některé body jako $up(down(Bod))$. Důvod je ten, že se může stát, že má-li z nějakého součinu vyjít bod, tak vyjde nepříjemný násobek, který může dále ve výpočtech vadit. Navíc se může stát, že se například při translacích vytvoří v rámci chodu programu na bodech v rámci knihovny Clifford určité vlastnosti, které jsou běžnému uživateli skryty a knihovna pro vykreslování je nevládně zpracovat. Použití funkcí $up()$ a $down()$ tomuto předchází, neboť objekt „očistí“ od těchto skrytých vlastností. Přesněji a podrobněji viz [8].

Závěr

V úvodu práce byla představena geometrická algebra jakožto volná unitární asociativní algebra s kvadratickou formou. Následně byla podrobněji popsána její struktura a chování operací, především geometrického součinu. Bylo ukázáno, že reprezentace objektů v rámci geometrické algebry se realizuje pomocí množin OPNS a IPNS v závislosti na uvažovaném součinu, a že se jedná o vektory, respektive prvky geometrické algebry. Následně byl zaveden stěžejní pojem konformní geometrické algebry CGA tak, že jsme vnořili prostor \mathbb{R}^n do prostoru s dimenzí $(n + 2)$ signatury $(n + 1, 1)$, nad kterým jsme zkonstruovali geometrickou algebru.

Zvláštní pozornost byla věnována dekompozici dvojbodů a generátorům rotací. V souvislosti s generátory rotací byla naznačena souvislost s bohatým matematickým pozadím, jako jsou Lieovy grupy a pojmy Lieovým grupám blízké. Také jsme zjistili, že i generátory transformací jsou vektory a že provést transformaci objektu je pouhé násobení vektorů. Při popisu dekompozice dvojbodů bylo zdůrazněno, že vzoreček v literatuře vede na méně jedna násobek normalizovaného bodu. Navíc bylo rozepsáno, jak užitím tohoto vzorečku dostaneme chtěné body. V neposlední řadě bylo představeno, že užití tohoto vzorečku představuje součet, respektive rozdíl imaginární sféry a roviny.

Poslední část bakalářské práce je věnována inverzní kinematice robotického ramene. Řeší se pohyb jednoduchého manipulátoru v rovině s předepsanou trajektorií efektoru. Tato trajektorie je zadána nikoli jako obecná křivka, ale ve smyslu pohybu po oblouku a přímce. Řešení inverzní kinematické úlohy je podáno jako nalezení rotorů vykonávajících rotace kolem kloubů ramene.

Součástí práce je i příloha, která obsahuje algoritmy pro nalezení požadovaných rotorů. Provedení je v jazyce Python s pomocí knihoven Clifford a Pyganja a jsou zde představena řešení i pro diskretizovaný pohyb. Algoritmy zde uvedené mají díky geometrické algebře intuitivní strukturu a oproti klasickému přístupu není třeba při transformacích násobit matice, což je další z výhod našeho řešení.

Literatura

- [1] DORST, Leendert, D.H.F. FONTIJNE and Stephen MANN.: Geometric algebra for computer science: an object-oriented approach to geometry. Amsterdam: Elsevier ; Morgan Kaufmann, 2007, xxxv, 626 s. : il. ISBN 978-0-12-369465-2.
- [2] GONZÁLEZ CALVET, Ramon. Treatise of plane geometry through geometric algebra. Cerdanyola del Vallés: [nakladatel není známý], 2007, xiv, 306 stran : ilustrace. ISBN 978-84-611-9149-9.
- [3] HILDENBRAND, D. (2019). Introduction to Geometric Algebra Computing (1st ed.). Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781315152172>
- [4] HILDENBRAND, D. Foundations of Geometric Algebra Computing. Geometry and Computing, 8. ISBN 3642317936.
- [5] HRDINA, Jaroslav, Aleš NÁVRAT a Petr VAŠÍK. Notes on Planar Inverse Kinematics Based on Geometric Algebra. Advances in applied Clifford algebras [online]. Cham: Springer International Publishing, 2018, 28(3), 1-14 [cit. 2022-04-17]. ISSN 0188-7009. Dostupné z: [doi:10.1007/s00006-018-0890-7](https://doi.org/10.1007/s00006-018-0890-7)
- [6] KARGER, Adolf a Josef NOVÁK. Prostorová kinematika a Lieovy grupy. Praha: SNTL, 1978, 383 s.
- [7] KLEPPE, A. a O. EGELAND. Inverse kinematics for industrial robots using conformal geometric algebra. Modeling, Identification and Control [online]. TRONDHEIM: MIC, 2016, 37(1), 63-75 [cit. 2022-05-14]. ISSN 0332-7353. Dostupné z: [doi:10.4173/mic.2016.1.6](https://doi.org/10.4173/mic.2016.1.6)
- [8] KŘÁPEK, Michal. Kinematika robotického ramene pomocí geometrických algeber. Brno, 2022. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/140265>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Petr Vašík.
- [9] MACHÁLEK, Lukáš. Korekce obrazových vad pomocí CGA. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství, 2018.
- [10] PERWASS, Christian B. U. (Christian Bernd Ulrich). Geometric algebra with applications in engineering: with 62 figures. Berlin: Springer, 2009, xiv, 385 stran : ilustrace (některé barevné). ISBN 978-3-540-89067-6.
- [11] SCHUE, John. Clifford Algebras and the Classical Groups. The American Mathematical Monthly [online]. Washington: Taylor & Francis, 1996, 103(6), 519 [cit. 2022-05-14]. ISSN 0002-9890.
- [12] SPÁČIL, Oldřich. *Cliffordovy algebry* [online]. Brno, 2007 [cit. 2021-11-15]. Dostupné z: <https://theses.cz/id/2antkv/>. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce doc. RNDr. Martin Čadek, CSc.