UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Extrémy funkcí více proměnných a jejich využití v ekonomii

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.
Rok odevzdání: 2011

Vypracovala:
Markéta Národná
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vytvořila samostatně pod vedením paní RNDr. Martiny Pavlačkové, Ph.D., a že jsem v seznamu literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 14. dubna 2011

Poděkování

Děkuji vedoucí bakalářské práce, paní RNDr. Martině Pavlačkové, Ph.D., za odborné vedení, obětavou spolupráci, cenné rady, materiály a čas, který mi věnovala.

Obsah

Úvod **4**

1 Funkce více proměnných **5**
1.1 Základní pojmy 5
1.2 Parciální derivace 9

2 Extrémy funkcí více proměnných **13**
2.1 Lokální extrémy 13
2.2 Vázané lokální extrémy 19
2.2.1 Metoda přímého dosazení 20
2.2.2 Lagrangeova metoda 22
2.3 Globální extrémy 25

3 Aplikace v ekonomii **29**
3.1 Základní pojmy 29
3.2 Maximalizace zisku firmy v podmínkách dokonalé konkurence . . 31
3.3 Maximalizace zisku firmy v podmínkách nedokonalé konkurence . 35
3.3.1 Monopol 36
3.3.2 Oligopol 38
3.4 Maximalizace užitku spotřebitele 43

Závěr **46**

Literatura **47**

Úvod

Téma Extrémy funkcí více proměnných a jejich využití v ekonomii jsem si zvolila, jelikož je vyšetřování extrémů funkcí považováno za jednu z nejdůležitějších částí diferenciálního počtu. Každý z nás je spotřebitelem, který se denně dostává do situace, kdy chce v rámci svého důchodu maximálně uspokojit své potřeby. S podobným chováním se lze setkat také u firem, jejichž hlavním záměrem je dosažení co nejvyšších výnosů a co nejmenších nákladů.

Cílem mé bakalářské práce je seznámit čtenáře s postupem hledání jednotlivých typů extrémů funkcí více proměnných a dále ukázat jejich využití v ekonomii. Práce je přitom zaměřena na ekonomickou maximalizaci u firem i spotřebitelů.

První kapitola práce slouží k připomenutí základních pojmů týkajících se funkcí více proměnných a parciálních derivací, které jsou nepostradatelné k zavedení a hledání extrémů. V závěru kapitoly jsem se pro zjednodušení omezila na funkce dvou proměnných. Teorie je doplněna vlastními příklady.

V druhé kapitole jsou ve třech podkapitolách definovány lokální, globální a vázané lokální extrémy funkcí více proměnných, dále jsou zde uvedeny základní věty týkající se dané problematiky a také příklady, v nichž jsou definice i věty použity.

Poslední kapitola pojednává o aplikaci extrémů funkcí více proměnných v ekonomii, tedy o ekonomické optimalizaci. V úvodu kapitoly jsou objasněny základní pojmy, jejichž znalost je pro další výklad nezbytná. Praktická část se zabývá především maximalizací zisku v jednotlivých formách konkurence na straně nabídky. Jsou zde popsány modely dokonalé i nedokonalé konkurence, jež jsou ilustrovány příklady. V závěru kapitoly je na příkladě vysvětlena maximalizace užitku, která se řeší pomocí vázaných lokálních extrémů.

Práce je vysázena typografickým systémem TEX. Veškeré obrázky jsou vytvořeny v programu CorelDRAW.

1 Funkce více proměnných

Dříve, než se budeme věnovat samotnému tématu této práce, tj. extrémům funkcí více proměnných, nadefinujeme si základní pojmy týkající se funkcí více proměnných. Naše pozornost bude zaměřena rovněž na parciální derivace funkcí více proměnných, pomocí kterých se extrémy obvykle hledají.

Funkce více proměnných jsou důležitou součástí matematické analýzy. Nalézají své uplatnění i v jiných oblastech matematiky a praktických aplikacích např. ve fyzice, chemii nebo ekonomii. Poprvé se s jejich využitím setkáváme současně s rozvojem analytické geometrie, tedy na počátku 18. století.

Při tvorbě této kapitoly byly využity zejména zdroje [3], [10] a [14].

1.1 Základní pojmy

Funkce více proměnných chápeme jako zobecnění pojmu funkce jedné proměnné. Zatímco funkce jedné proměnné je zobrazením z $M \subseteq \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, je funkce více proměnných zobrazením z $M \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ do $\mathbb{R}$.

Definice 1.1. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ se nazývá *reálná funkce n reálných proměnných* a množina M se nazývá *definiční obor* této funkce a značí se $\mathcal{D}(f)$ nebo $\mathcal{D}_f$. Množina

$$\{y \in \mathbb{R} : y = f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}(f)\}$$

se nazývá *obor hodnot funkce* f a značíme ho $\mathcal{H}(f)$ nebo $\mathcal{H}_f$.

Poznámka 1.1. U funkcí více proměnných užíváme obdobnou terminologii jako u funkcí jedné proměnné – čísla $x_1, ...x_n$ nazýváme *nezávisle proměnné*, číslo $f(x_1, \dots, x_n)$ se nazývá *funkční hodnota funkce f v bodě* $(x_1, \dots, x_n)$.

Stejně jako funkce jedné proměnné je i funkce více proměnných určena svým předpisem a definičním oborem. Pokud není definiční obor zadán, musíme ho určit jako množinu všech bodů $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, pro něž má výraz $f(x_1, \dots, x_n)$ smysl.

Příklad 1.1. Najděte a nakreslete definiční obor funkce tří proměnných

$$f(x, y, z) = \sqrt{4 - [(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2]}.$$

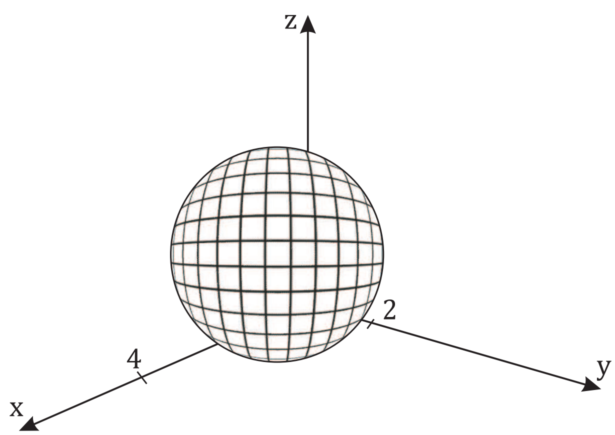
Všechny body z definičního oboru splňují:

$$4 - [(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2] \geq 0, \quad \text{tj.}$$

$$[(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2] \leq 4.$$

Definičním oborem je tedy uzavřená koule se středem v bodě $[4, 2, 3]$ a poloměrem 2, tzn.

$$\mathcal{D}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leq 4\}.$$



Obr. 1: Definiční obor funkce $f(x, y, z) = \sqrt{4 - [(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2]}$.

Definice 1.2. Nechť f je funkce n proměnných definovaná na množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. *Grafem funkce f* nazýváme množinu bodů

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x = (x_1, \ldots, x_n) \in M, y = f(x)\}.$$

Definice 1.3. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a $f : M \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných definovaná na $M, c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = \{(x_1, \ldots, x_n) \in M : f(x_1, \ldots, x_n) = c\}$$

nazýváme *vrstevnice funkce f o úrovni c.*

Poznámka 1.2. Vrstevnice o úrovni c je tvořena body z definičního oboru, v nichž má funkce f stejnou funkční hodnotu c.

Na konci této kapitoly se zaměříme na funkce dvou proměnných. Důvodem je fakt, že graf funkce lze znázornit pouze v případě funkcí jedné nebo dvou proměnných.

Definice 1.4. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ se nazývá *reálná funkce dvou reálných proměnných*. Množina M se nazývá *definiční obor funkce f*, značíme ji $\mathcal{D}(f)$ nebo $\mathcal{D}_f$. Množina $\{z \in \mathbb{R} : z = f(x, y), (x, y) \in \mathcal{D}_f\}$ se nazývá *obor hodnot funkce f* a značíme ho $\mathcal{H}(f)$ nebo $\mathcal{H}_f$.

Typickým příkladem funkce dvou proměnných je funkce pro výpočet objemu rotačního kužele $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, kde r je poloměr podstavy a h výška kužele.

Příklad 1.2. Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \ln\left(\cos\left(\pi \cdot (x^2 + y^2)\right)\right).$$

Všechny body z definičního oboru splňují:

$$\cos\left(\pi \cdot (x^2 + y^2)\right) > 0, \quad \text{tj.}$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \pi \cdot (x^2 + y^2) < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

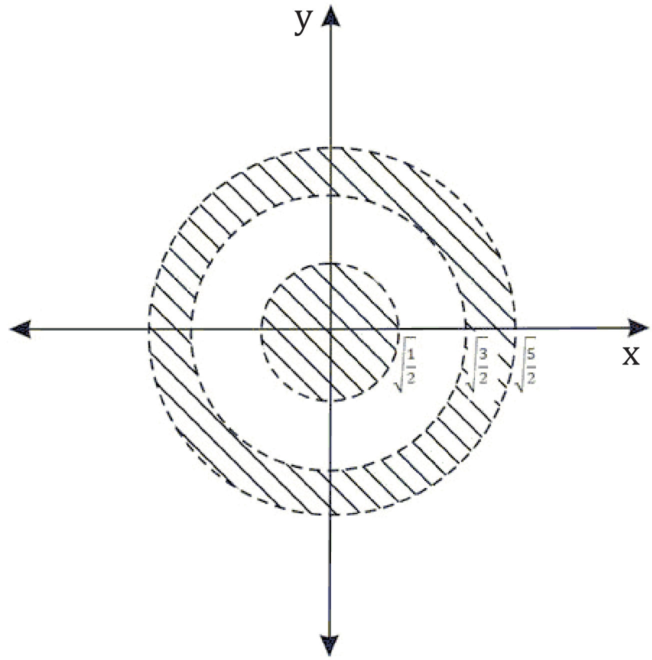
$$\left(2k - \frac{1}{2}\right) \cdot \pi < \pi \cdot (x^2 + y^2) < \left(2k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$2k - \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 2k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Tyto nerovnice mají řešení jen pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a proto

$$\mathcal{D}_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2k - \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 2k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Z geometrického hlediska popisují nerovnosti $2k - \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 2k + \frac{1}{2}$ pro $k = 0$ vnitřek kruhu o poloměru $\sqrt{\frac{1}{2}}$ a pro $k \in \mathbb{N}$ otevřená mezikruží s vnitřními poloměry $\sqrt{2k - \frac{1}{2}}$ a vnějšími $\sqrt{2k + \frac{1}{2}}$.



Obr. 2: Část definičního oboru funkce $f(x, y) = \ln(\cos(\pi \cdot (x^2 + y^2)))$.

Definice 1.5. *Grafem funkce dvou proměnných f* nazýváme množinu uspořádaných trojic

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{D}_f, z = f(x, y)\}.$$

Definice 1.6. *Vrstevnicí funkce f dvou proměnných o úrovni c* nazýváme množinu

$$\{(x, y) \in \mathcal{D}_f : f(x, y) = c\}.$$

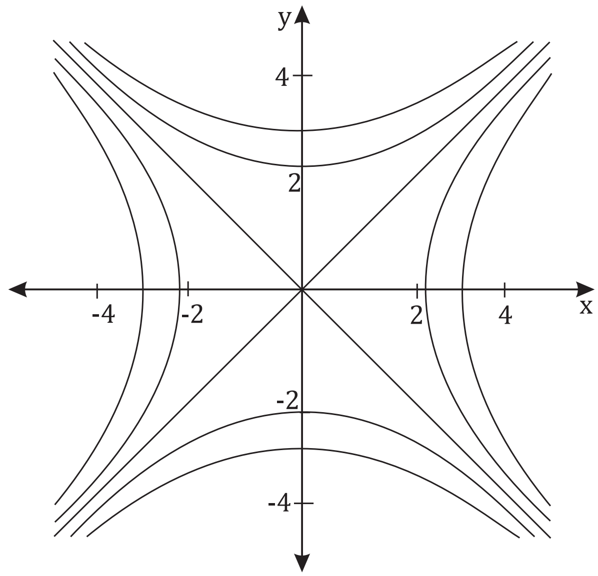
V případě funkcí dvou proměnných se pojem vrstevnice shoduje s geografickým významem tohoto slova, jsou to místa se stejnou nadmořskou výškou.

Příklad 1.3. Najděte definiční obor a vrstevnice funkce $f(x, y) = \frac{2x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$.

Definiční obor funkce je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice funkce f o úrovni c najdeme, pokud vyřešíme rovnici $c = \frac{2x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$, kde $c \in \mathbb{R}$.Protože je c libovolné reálné číslo, rozdělíme řešení na tři části.

Nejprve se budeme zabývat případem, kdy $c = 0$, a tedy kdy $\frac{2x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0$. Postupnými úpravami rovnice dostaneme řešení $x = \pm\frac{3\sqrt{2}y}{4}$, tedy rovnice dvou přímek. Je-li $c > 0$, vydělíme rovnici $c = \frac{2x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$ konstantou c. Dostaneme

$\frac{2x^2}{9c} - \frac{y^2}{4c} = 1$. V tomto případě se jedná o rovnici hyperboly s hlavní osou x, středem v počátku a poloosami o velikosti $\frac{3\sqrt{2c}}{2}$ a $2\sqrt{c}$. Zbývá vyřešit situaci, kdy je $c < 0$. Obdobným postupem jako v předchozím případě vydělíme rovnici reálnou konstantou c, tj. $\frac{2x^2}{9c} - \frac{y^2}{4c} = 1$. Tentokrát jde o rovnici hyperboly s hlavní osou y, středem v počátku a poloosami o velikosti $2\sqrt{|c|}$ a $\frac{3\sqrt{2|c|}}{2}$.



Obr. 3: Vrstevnice funkce $f(x,y) = \frac{2x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$.

1.2 Parciální derivace

Na úvod této podkapitoly připomeneme definici a geometrickou interpretaci derivace funkce jedné proměnné.

Nechť je funkce jedné proměnné f definovaná na nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathcal{D}_f$. Limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se nazývá *derivace funkce f v bodě* x_0.

Derivace funkce v bodě geometricky udává směrnici tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$. Jestliže má funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá, a proto zde existuje i limita funkce.

Protože se můžeme v případě funkcí více proměnných blížit k danému bodu nekonečně mnoha způsoby, je limita funkce více proměnných podstatně komplikovanější než limita funkce jedné proměnné, a to samé platí i pro derivace.

Dále se budeme zabývat funkcemi více proměnných, konkrétně situací, kdy se k danému bodu blížíme ve směru souřadnicových os. V takovém případě mluvíme o tzv. parciálních derivacích.

Definice 1.7. Nechť funkce $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém okolí bodu $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$. Limitu

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) - f(x_1^*, \ldots, x_n^*)]$$

nazveme *parciální derivací funkce f v bodě x^* podle proměnné x_i*, značí se $\frac{\delta}{\delta x_i} f(x^*)$ nebo $f_{x_i}'(x^*)$.

Definice 1.8. Nechť funkce $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definovaná na nějakém okolí bodu $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$. Dále nechť $m \in \mathbb{N}, m \geq 2, x_{i_1}, \ldots, x_{i_m} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pak se funkce

$$\frac{\delta^m}{\delta x_{i_1} \ldots \delta x_{i_m}} f(x^*) = \frac{\delta}{\delta x_{i_m}} \left(\frac{\delta^{m-1}}{\delta x_{i_1} \ldots \delta x_{i_m - 1}} \right) f(x^*)$$

nazývá *m-tá parciální derivace* podle proměnných $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ v tomto pořadí v bodě x^*. Značíme $f_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}}^{(m)}(x^*)$.

Pro počítání parciálních derivací platí stejná pravidla a vzorce jako pro klasické derivování. V praxi považujeme proměnné, podle kterých nederivujeme, za konstanty. V podstatě tedy počítáme derivaci funkce jedné proměnné.

Poznámka 1.3. U funkcí jedné proměnné platí, že pokud má funkce v bodě x_0 vlastní derivaci, je v tomto bodě také spojitá. V případě funkcí více proměnných obdobná věta neplatí. Je to z důvodu, že parciální derivace nám dávají informaci jen o chování funkce ve směrech rovnoběžných se souřadnicovými osami. Zatímco v ostatních směrech se funkce může chovat libovolně.

Věta 1.1. *Nechť funkce f a g n proměnných mají parciální derivaci podle proměnné $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$, na otevřené množině M. Pak jejich součet, rozdíl, součin a podíl má na M parciální derivaci podle x_i a platí*

$$\frac{\delta}{\delta x_i}[f(x) \pm g(x)] = \frac{\delta}{\delta x_i} f(x) \pm \frac{\delta}{\delta x_i} g(x), \quad \textit{pro každé } x \in M,$$

$$\frac{\delta}{\delta x_i}[f(x)g(x)] = \frac{\delta}{\delta x_i} f(x)g(x) + f(x)\frac{\delta}{\delta x_i} g(x), \quad \textit{pro každé } x \in M,$$

$$\frac{\delta}{\delta x_i}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\frac{\delta}{\delta x_i} f(x)g(x) - f(x)\frac{\delta}{\delta x_i} g(x)}{g^2(x)}, \quad \textit{pro každé } x \in M;$$

tvrzení o podílu derivací platí, je-li $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in M$.

Důkaz. Pro funkce jedné proměnné viz. [13], str. 256. Důkaz pro funkce více proměnných by se provedl analogicky.

Příklad 1.4. Vypočítejte první parciální derivace funkce $f(x, y, z) = \sin\left(e^{xy+zy^2}\right)$ a jejich hodnoty v bodě $[0, 1, \ln 3]$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^3$. Jestliže počítáme parciální derivaci funkce f podle proměnné x, považujeme proměnné y a z za konstanty a dostáváme

$$f'_x(x, y, z) = \cos\left(e^{xy+zy^2}\right) \cdot e^{xy+zy^2} \cdot y.$$

Analogicky postupujeme při počítání parciálních derivací podle zbývajících dvou proměnných

$$f'_y(x, y, z) = \cos\left(e^{xy+zy^2}\right) \cdot e^{xy+zy^2} \cdot (x + 2yz),$$

$$f'_z(x, y, z) = \cos\left(e^{xy+zy^2}\right) \cdot e^{xy+zy^2} \cdot y^2.$$

Přičemž platí, že $\mathcal{D}_{f'_x} = \mathcal{D}_{f'_y} = \mathcal{D}_{f'_z} = \mathbb{R}^3$. Hodnoty parciálních derivací v bodě $[0, 1, \ln 3]$ jsou následující.

$$f'_x(0, 1, \ln 3) = \cos\left(e^{\ln 3}\right) \cdot e^{\ln 3} = 3 \cdot \cos 3,$$

$$f'_y(0,1,\ln 3) = \cos\left(e^{\ln 3}\right) \cdot e^{\ln 3} \cdot 2 \cdot \ln 3 = 6 \cdot \cos 3 \cdot \ln 3,$$

$$f'_z(0,1,\ln 3) = \cos\left(e^{\ln 3}\right) \cdot e^{\ln 3} = 3 \cdot \cos 3.$$

Poznámka 1.4. Pokud derivujeme podle dvou a více různých proměnných, mluvíme o *smíšených parciálních derivacích.* V případě smíšených derivací přitom obecně záleží na tom, v jakém pořadí podle jednotlivých proměnných derivujeme. Záměnnost smíšených parciálních derivací charakterizuje následující věta.

Věta 1.2 (**Schwarzova**[1]). *Nechť jsou všechny parciální derivace m-tého řádu funkce $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojité v bodě $x^* \in M$. Pak jsou všechny parciální derivace až do řádu m záměnné v bodě x^*, tzn. že záleží pouze na tom, kolikrát derivujeme podle jednotlivých proměnných a nikoli na tom, v jakém pořadí.*

Důkaz. Viz. [3] str. 29-30.

[1] Karl Schwarz (1843-1921), německý matematik

2 Extrémy funkcí více proměnných

Extrémy funkcí více proměnných jsou jednou z nejdůležitějších aplikací diferenciálního počtu. S vyšetřováním extrémů se často setkáváme v praxi. Příkladem je ekonomické rozhodování firmy, které se řídí požadavkem maximálního příjmu a minimálních nákladů, přičemž zkoumané veličiny obvykle závisí na více proměnných.

Extrémy funkcí více proměnných se definují analogicky jako extrémy funkce jedné proměnné. Stejně jako v případě funkce jedné proměnné, rozlišujeme extrémy lokální a globální. Speciálním případem jsou potom lokální vázané extrémy.

Základní literaturou pro tuto kapitolu byla především [3], dále pak [10] a [11].

2.1 Lokální extrémy

V případě lokálních extrémů studujeme danou funkci pouze lokálně, tj. v okolí nějakého bodu.

Dříve, než se budeme zabývat lokálními extrémy funkcí více proměnných, nadefinujeme pojmy Hessova[2]matice a Hessián, s jejichž využitím se lokální extrémy hledají.

Definice 2.1. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a $f : M \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných. Existují-li parciální derivace funkce f druhého řádu v bodě $x = (x_1, \ldots, x_n)$, pak *Hessova matice* funkce f v bodě x má tvar

$$H(x) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(x) & f''_{x_1x_2}(x) & \ldots & f''_{x_1x_n}(x) \\ f''_{x_2x_1}(x) & f''_{x_2x_2}(x) & \ldots & f''_{x_2x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ f''_{x_nx_1}(x) & f''_{x_nx_2}(x) & \ldots & f''_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Determinant Hessovy matice se nazývá *Hessián*.

Definice 2.2. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $x^* \in M$ *lokálního maxima*, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x^*)$ takové, že pro každé

[2]Ludwig Otto Hesse (1811-1874), německý matematik

$x \in \mathcal{U}(x^*)$ platí $f(x) \leq f(x^*)$. Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $x^* \in M$ *lokálního minima*, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x^*)$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{U}(x^*)$ platí $f(x) \geq f(x^*)$.

Poznámka 2.1. Stejně jako u funkce jedné proměnné platí, že pokud zaměníme neostré nerovnosti za ostré a okolí za redukovaná okolí, dostáváme *ostré lokální minimum* a *ostré lokální maximum.* Souhrnně používáme označení *(ostré) lokální extrémy.*

Nyní si objasníme nutné a postačující podmínky existence lokálního extrému, v případě, že má funkce v daném bodě parciální derivace.

Definice 2.3. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $x^* \in M$ je *stacionární bod funkce f*, jestliže v bodě x^* existují všechny parciální derivace funkce f a platí

$$\frac{\delta}{\delta x_i} f(x^*) = 0, \quad \text{pro každé } i = 1, \ldots, n.$$

Následující věta vyjadřuje nutnou podmínku existence lokálního extrému a je označována jako Fermatova[3].

Věta 2.1 (Nutná podmínka existence lokálního extrému). *Nechť funkce $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $x^* \in M$ lokální extrém. Pak všechny parciální derivace funkce f, které v tomto bodě existují, jsou rovny nule.*

Důkaz. Viz. [3] str. 29-30.

Poznámka 2.2. Za body podezřelé z existence lokálního extrému tedy považujeme:

- stacionární body,
- body,v nichž alespoň jedna parciální derivace neexistuje a ostatní jsou rovny nule nebo body, v kterých neexistuje ani jedna parciální derivace.

[3]Pierre de Fermat (1601-1665), francouzský matematik a právník

Jak již bylo zmíněno, lokální extrémy funkce více proměnných mohou mj. existovat ve stacionárních bodech funkce f. Rozlišujeme dva druhy stacionárních bodů. Pokud ve stacionárním bodě nenastává lokální extrém, mluvíme o tzv. *sedlovém bodě*.

Věta 2.2 (**Postačující podmínka existence lokálního extrému**). *Nechť $x^* \in \mathcal{D}_f$ je stacionární bod funkce f a dále předpokládejme, že f má na nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu. Označme symbolem*

$$A = (a_{ij}) = \left(f''_{x_i x_j}(x^*)\right)_{i,j=1}^{n}$$

Hessovu matici funkce f v bodě x^* a kvadratickou formu

$$P(dx) = \langle Adx, dx\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j$$

určenou maticí A a proměnnou $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$.

Potom

- *je-li $P(dx)$ pozitivně (negativně) definitní, má funkce f v bodě x^* ostré lokální minimum (maximum),*
- *je-li $P(dx)$ indefinitní, pak v bodě x^* extrém nenastává,*
- *je-li $P(dx)$ pozitivně (negativně) semidefinitní, má funkce f v bodě x^* lokální minimum (maximum).*

Důkaz. Viz. [3] str. 71-72.

Jak rozhodnout o definitnosti kvadratické formy určené danou symetrickou maticí A nám ukazují následující věty.

Věta 2.3. *Kvadratická forma $P(dx)$ určená symetrickou maticí $A = (a_{ij})$,*

$$P(dx) = \langle Adx, dx\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j$$

je pozitivně (negativně) definitní, právě když všechna vlastní čísla matice A jsou kladná (záporná). Forma $P(dx)$ je pozitivně (negativně) semidefinitní, právě když jsou všechna vlastní čísla nezáporná (nekladná).

Důkaz. Důkaz pro pozitivní definitnost je uveden v [2] str. 709. Zbývající tvrzení by se dokázala obdobně.

Věta 2.4 (**Sylvestrovo kritérium**). *Kvadratická forma $P(dx)$ je pozitivně definitní, právě když jsou všechny hlavní minory matice A, tj. determinanty,*

$$|a_{11}|\,,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kladné. Kvadratická forma $P(dx)$ je negativně definitní, právě když hlavní minory střídají znaménko, počínajíc záporným.

Důkaz. Důkaz pro pozitivní definitnost lze najít v [12] str. 154. Zbývající tvrzení se dokazují obdobně.

Závěr této podkapitoly bude věnován lokálním extrémům funkcí dvou proměnných.

Definice 2.4. Nechť f je funkce dvou proměnných a nechť $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$. Řekneme, že funkce f *má v bodě* (x_0, y_0) *lokální minimum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x_0, y_0)$ tak, že

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \quad \text{pro každé } (x, y) \in \mathcal{U}(x_0, y_0).$$

Řekneme, že funkce f *má v bodě* (x_0, y_0) *lokální maximum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x_0, y_0)$ tak, že

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{pro každé } (x, y) \in \mathcal{U}(x_0, y_0).$$

Řekneme, že funkce f *má v bodě* (x_0, y_0) *ostré lokální minimum*, jestliže existuje redukované okolí $\mathcal{U}^*(x_0, y_0)$ tak, že

$$f(x, y) > f(x_0, y_0), \quad \text{pro každé } (x, y) \in \mathcal{U}^*(x_0, y_0).$$

Řekneme, že funkce f *má v bodě* (x_0, y_0) *ostré lokální maximum*, jestliže existuje redukované okolí $\mathcal{U}^*(x_0, y_0)$ tak, že

$$f(x,y) < f(x_0,y_0), \qquad \text{pro každé } (x,y) \in \mathcal{U}^*(x_0,y_0).$$

U funkcí dvou proměnných jsou nutná i postačující podmínka existence lokálního extrému podstatně jednodušší než v obecném případě funkcí více proměnných.

Věta 2.5. *Nechť má funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém. Existují-li v bodě (x_0, y_0) parciální derivace prvního řádu funkce f, pak jsou rovny nule, tj.*

$$\frac{\delta}{\delta x} f(x_0,y_0) = \frac{\delta}{\delta y} f(x_0,y_0) = 0.$$

Poznámka 2.3. Bod s výše uvedenou vlastností je opět označován jako *bod stacionární.*

Nyní si ukážeme tvar Hessovy matice a Hessiánu pro funkci dvou proměnných.

Definice 2.5. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a $f : M \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Existují-li parciální derivace funkce f druhého řádu v bodě (x_0, y_0), pak *Hessova matice* funkce f v bodě (x_0, y_0) má tvar

$$H(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

Hessián má v tomto případě následující tvar

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x_0,y_0) \cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - \left(f''_{yx}(x_0,y_0)\right)^2.$$

Věta 2.6. *Nechť (x_0, y_0) je stacionárním bodem funkce f a nechť má funkce f na okolí bodu (x_0, y_0) spojité parciální derivace druhého řádu. Označme*

$$D_1 = f''_{xx}(x_0,y_0), D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix}.$$

Potom

- *je-li* $D_2 > 0$, *má funkce* f *v bodě* (x_0, y_0) *ostrý lokální extrém; přitom platí*
  - *je-li* $D_1 > 0$, *pak jde o ostré lokální minimum,*
  - *je-li* $D_1 < 0$, *pak jde o ostré lokální maximum,*
- *je-li* $D_2 < 0$, *nemá funkce* f *v bodě* (x_0, y_0) *lokální extrém; jedná se o sedlový bod,*
- *je-li* $D_2 = 0$, *nelze tímto způsobem rozhodnout.*

Důkaz. Viz. [3] str. 67.

Poznámka 2.4. Za body podezřelé z lokálního extrému u funkcí dvou proměnných opět považujeme:

- stacionární body,
- body, v nichž jedna parciální derivace neexistuje a zbývající je rovna nule,
- body, v nichž neexistuje ani jedna parciální derivace.

V případě stacionárních bodů o existenci a typu extrému rozhodneme pomocí postačující podmínky nebo pomocí definice (pokud nejsou spojité druhé parciální derivace). Ve zbývajících případech rozhodujeme podle definice lokálního extrému.

Příklad 2.1. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = e^{4x} \cdot (y^2 + 4x - y)$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$. Nejprve určíme parciální derivace funkce f prvního řádu.

$$f'_x(x, y) = e^{4x} \cdot (4y^2 + 16x - 4y + 4),$$

$$f'_y(x, y) = e^{4x} \cdot (2y - 1).$$

Tyto derivace položíme rovny nule a dostaneme následující soustavu rovnic o dvou neznámých

$$4y^2 + 16x - 4y + 4 \overset{!}{=} 0$$

$$2y - 1 = 0.$$

Soustavu rovnic vyřešíme a tím získáme stacionární bod $[-\frac{3}{16}, \frac{1}{2}]$. Nyní vypočítáme druhé parciální derivace funkce f

$$f''_{xx}(x, y) = e^{4x} \cdot (16y^2 + 64x - 16y + 32),$$

$$f''_{yy}(x, y) = 2e^{4x},$$

$$f''_{xy}(x, y) = e^{4x} \cdot (8y - 4),$$

$$f''_{yx}(x, y) = e^{4x} \cdot (8y - 4).$$

O existenci a typu lokálního extrému rozhodneme pomocí postačující podmínky

$$D_1 = f''_{xx}\left(-\frac{3}{16}, \frac{1}{2}\right) = 16e^{-\frac{3}{4}},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(-\frac{3}{16}, \frac{1}{2}) & f''_{xy}(-\frac{3}{16}, \frac{1}{2}) \\ f''_{yx}(-\frac{3}{16}, \frac{1}{2}) & f''_{yy}(-\frac{3}{16}, \frac{1}{2}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16e^{-\frac{3}{4}} & 0 \\ 0 & 2e^{-\frac{3}{4}} \end{vmatrix} = 32e^{\frac{9}{16}}.$$

Protože je $D_2 > 0$ a $D_1 > 0$, nachází se v bodě $[-\frac{3}{16}, \frac{1}{2}]$ ostré lokální minimum.

2.2 Vázané lokální extrémy

Dalším typem extrémů, kterými se budeme zabývat, jsou tzv. *vázané extrémy*. V praxi se často setkáváme se situací, kdy nehledáme extrémy na celém definičním oboru funkce, ale pouze na nějaké jeho podmnožině. Tuto podmnožinu tvoří ty body z definičního oboru, které splňují danou podmínku či podmínky. Jde tedy o speciální případ lokálních extrémů, přičemž dříve zmíněné metody hledání v tomto případě nejsou vhodné.

Nechť je dána funkce f na $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Označme A množinu všech těch bodů $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_f$, jejichž souřadnice vyhovují následujícím rovnicím

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

$$g_2(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \text{ kde } m < n$$

tj.

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_f : g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ pro } i = 1, \ldots, m\}.$$

Naším úkolem je najít lokální extrémy funkce f na množině A. Tyto lokálně extrémní hodnoty nazýváme *vázané lokální extrémy funkce* f. Rovnice určující množinu A se nazývají *vazby.*

Definice 2.6. Nechť $m < n$ a nechť

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_f : g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ pro } i = 1, \ldots, m\}.$$

Řekneme, že funkce f má v bodě $(x_1^*, \ldots, x_n^*) \in A$ *vázané lokální maximum* při vazbě $g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pro $i = 1, \ldots, m$ jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x_1^*, \ldots x_n^*)$ tak, že

$$f(x_1, \ldots, x_2) \leq f(x_1^*, \ldots, x_2^*), \qquad \text{pro každé } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{U}(x_1^*, \ldots, x_n^*) \cap A.$$

Řekneme, že funkce f má v bodě $(x_1^*, \ldots, x_n^*) \in A$ *vázané lokální minimum* při vazbě $g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pro $i = 1, \ldots, m$ jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x_1^*, \ldots x_n^*)$ tak, že

$$f(x_1, \ldots, x_2) \geq f(x_1^*, \ldots, x_2^*), \qquad \text{pro každé } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{U}(x_1^*, \ldots, x_n^*) \cap A.$$

Opět platí, že záměnou neostrých nerovností za ostré a záměnou okolí za redukovaná okolí dostaneme *ostré vázané lokální extrémy.*

Existují dva způsoby hledání vázaných lokálních extrémů funkce n proměnných - metoda přímého dosazení a metoda Lagrangeova.

2.2.1 Metoda přímého dosazení

Nyní se nejprve pro zjednodušení omezíme na případ funkce dvou proměnných. Předpokládejme, že lze z rovnice $g(x, y) = 0$ explicitně vyjádřit jednu z proměnných, tj. lze vyjádřit buď $y = \varphi(x)$ nebo $x = \psi(y)$. Tento vztah dosadíme do funkce f, tím získáme funkci jedné proměnné, tedy funkci $F(x) = f(x, \varphi(x))$

proměnné x nebo funkci $F(y) = f(\psi(y), y)$ proměnné y. Lokální extrémy funkce F jsou pak vázanými lokálními extrémy funkce f při vazbě $g(x, y) = 0$. Úlohu najít vázané lokální extrémy funkce dvou proměnných jsme převedli na úlohu najít lokální vázané extrémy funkce jedné proměnné.

Zabývejme se nyní příkladem, kdy je $n > 2$. Je-li $m = 1$, pak stejně jako u funkcí dvou proměnných postupujeme i u funkce n proměnných. Po dosazení nám vznikne funkce F, která obsahuje $n - 1$ proměnných.

Jestliže je $m > 1$, vyjádříme jednu proměnnou z první vazby a dosadíme do vazeb ostatních a obdobně postupujeme s ostatními vazbami a proměnnými.

Příklad 2.2. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ s vazbami $x + y + z = 3$ a $x - y + z = 6$.

Definiční obor funkce $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^3$. Z vazeb můžeme bez problémů vyjádřit kterékoliv proměnné, např. pokud na soustavu dvou rovnic o třech neznámých použijeme odčítací metodu, dostáváme $y = -\frac{3}{2}$, dále dosadíme proměnnou y do jedné z rovnic, získáme např. $z = \frac{9}{2} - x$. Nyní dosadíme $y = -\frac{3}{2}$ a $z = \frac{9}{2} - x$ do funkce f a dostáváme funkci jedné proměnné x.

$$f\left(x, -\frac{3}{2}, \frac{9}{2} - x\right) = F(x) = -\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{9}{2}x - x^2\right), \mathcal{D}_F = \mathbb{R}.$$

Najdeme stacionární body, tj. řešíme rovnici

$$F'(x) = -\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{9}{2} - 2x\right) \stackrel{!}{=} 0.$$

Jejím řešením je bod $x^* = \frac{9}{4}$. Protože $D_{F'} = \mathbb{R}$, může extrém funkce F existovat pouze v tomto bodě. Nyní spočítáme druhou derivaci funkce F a dosadíme do ní bod x^*. Protože je $F''\left(\frac{9}{4}\right) = 3 > 0$, nachází se v bodě $x^* = \frac{9}{4}$ ostré lokální minimum funkce F. Z vazeb nyní dopočítáme hodnotu z, tj. $z = \frac{9}{4}$. Funkce f má tedy v bodě $\left[\frac{9}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right]$ ostré vázané lokální minimum a vazbami $x + y + z = 3$ s $x - y + z = 6$.

2.2.2 Lagrangeova metoda

Pokud nelze metodu přímého dosazení použít, tedy pokud není možné z vazby vyjádřit ani jednu z proměnných, a nebo je toto vyjádření příliš složité, využíváme tzv. Lagrangeovu metodu neurčitých koeficientů.

Věta 2.7 (**Lagrange**[4]). *Nechť jsou funkce* $f, g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, m < n$, *spojitě diferencovatelné na otevřené množině* Ω *obsahující množinu* A, *která je dána vazbami*

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

$$g_2(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Dále nechť pro každé $x \in \Omega$ *platí, že hodnost matice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x_1} g_1(x) & \ldots & \frac{\delta}{\delta x_n} g_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta}{\delta x_1} g_m(x) & \ldots & \frac{\delta}{\delta x_n} g_m(x) \end{pmatrix}$$

je rovna m. *Buď* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funkce definovaná vztahem*

$$L(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Funkce L *se nazývá Lagrangeova funkce, reálné konstanty* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *se nazývají Lagrangeovy multiplikátory.*
Nechť $m + n$ *rovnic o* $m + n$ *neznámých*

$$L'_{x_1} = 0, \ldots, L'_{x_n} = 0, g_1 = 0, \ldots, g_m = 0$$

má řešení $(a_1, \ldots, a_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$. *Má-li funkce* L *v bodě* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *pro* $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$ *lokální extrém, pak funkce* f *má v bodě* a *vázaný lokální extrém téhož typu.*

[4] Joseph Louis Lagrange (1736-1813), italsko-francouzský matematik a astronom

Důkaz. Viz. [15] str. 3.

Poznámka 2.5. Lagrangeovou metodou nemusíme najít všechny vázané lokální extrémy funkce f, tj. pokud nemá funkce L v bodě a lokální extrém, neznamená to, že funkce f nemá v tomto bodě a vázaný lokální extrém. Případnou existenci extrému musíme vyšetřit jiným způsobem (např. z definice vázaného lokálního extrému).

Příklad 2.3. Určete vázané lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = 3x - 2y + z$ s vazbou $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^3$. Nejprve sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda \cdot g(x, y, z) = 3x - 2y + z + \lambda \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Dále hledáme lokální extrémy funkce $L(x, y, z)$, tj. určíme první parciální derivace Lagrangeovy funkce podle jednotlivých proměnných

$$L'_x(x, y, z) = 3 + 2\lambda x, \quad L'_y(x, y, z) = -2 + 2\lambda y, \quad L'_z(x, y, z) = 1 + 2\lambda z.$$

Abychom našli stacionární body, vyřešíme následující soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých

$$\begin{aligned} 3 + 2\lambda x &\stackrel{!}{=} 0 \\ -2 + 2\lambda y &\stackrel{!}{=} 0 \\ 1 + 2\lambda z &\stackrel{!}{=} 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &\stackrel{!}{=} 1. \end{aligned}$$

Z prvních tří rovnic si vyjádříme jednotlivé proměnné $x = -\frac{3}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{\lambda}$ a $z = -\frac{1}{2\lambda}$. Ty pak dosadíme do poslední z rovnic

$$\left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1.$$

Odtud plyne $\lambda = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}$. Nyní najdeme stacionární body Lagrangeovy funkce. Pro $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{14}}{2}$ dostáváme $x = \frac{3\sqrt{14}}{14}$, $y = -\frac{\sqrt{14}}{7}$ a $z = \frac{\sqrt{14}}{14}$. Našli jsme první stacionární bod Lagrangeovy funkce $S_1 = \left[\frac{3\sqrt{14}}{14}, -\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{\sqrt{14}}{14}\right]$. Obdobně pro $\lambda_2 = \frac{\sqrt{14}}{2}$

získáme druhý stacionární bod $S_2 = \left[-\frac{3\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7}, -\frac{\sqrt{14}}{14}\right]$. Nalezené stacionární body vyšetříme pomocí druhé derivace funkce $L(x, y, z)$, tj. určíme druhé parciální derivace

$$L''_{xx}(x, y, z) = 2\lambda$$

$$L''_{yy}(x, y, z) = 2\lambda$$

$$L''_{zz}(x, y, z) = 2\lambda$$

Všechny smíšené parciální derivace Lagrangeovy funkce jsou rovny nule. O tom, zda má funkce $L(x, y, z)$ v nalezených stacionárních bodech lokální extrém, případně jakého je typu, rozhodneme pomocí postačující podmínky pro lokální extrém.

Do Hessovy matice dosadíme jednotlivé stacionární body a příslušné hodnoty λ, poté vypočítáme jednotlivé subdeterminanty (viz. Věta 2.2 a Věta 2.4).
Pro $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{14}}{2}$ platí:

$$D_1 = L''_{xx}(S_1) = -\sqrt{14} < 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} L''_{xx}(S_1) & 0 \\ 0 & L''_{yy}(S_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sqrt{14} & 0 \\ 0 & -\sqrt{14} \end{vmatrix} = 14 > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} L''_{xx}(S_1) & 0 & 0 \\ 0 & L''_{yy}(S_1) & 0 \\ 0 & 0 & L''_{zz}(S_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sqrt{14} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{14} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{14} \end{vmatrix} = -14^{\frac{3}{2}} < 0.$$

Odtud plyne, že funkce $L(x, y, z)$ má v bodě $\left[\frac{3\sqrt{14}}{14}, -\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{\sqrt{14}}{14}\right]$ ostré lokální maximum a funkce f má tedy v tomto bodě vázané lokální maximum vzhledem k dané vazbě.
Pro $\lambda_2 = \frac{\sqrt{14}}{2}$:

$$D_1 = L''_{xx}(S_2) = \sqrt{14} > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} L''_{xx}(S_2) & 0 \\ 0 & L''_{yy}(S_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{14} & 0 \\ 0 & \sqrt{14} \end{vmatrix} = 14 > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} L''_{xx}(S_2) & 0 & 0 \\ 0 & L''_{yy}(S_2) & 0 \\ 0 & 0 & L''_{zz}(S_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{14} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{14} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{14} \end{vmatrix} = 14^{\frac{3}{2}} > 0.$$

V bodě $\left[-\frac{3\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7}, -\frac{\sqrt{14}}{14}\right]$ se nachází ostré lokální minimum Lagrangeovy funkce $L(x, y, z)$ a funkce f má v tomto bodě vázané lokální minimum.

2.3 Globální extrémy

Globální extrémy (nebo také absolutní extrémy) funkce více proměnných mají stejný význam jako u funkce jedné proměnné. Můžeme je hledat buď na celém definičním oboru, a nebo na nějaké jeho předem zadané podmnožině.

Definice 2.7. Nechť $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathcal{D}_f$. Řekneme, že bod $x^* \in M$ je bodem *globálního minima* funkce f na množině M, jestliže $f(x^*) \leq f(x)$ pro každé $x \in M$. Řekneme, že bod $x^* \in M$ je bodem *globálního maxima* funkce f na množině M, jestliže $f(x^*) \geq f(x)$ pro každé $x \in M$. Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x^*$ ostré, mluvíme o *ostrých globálních extrémech.*

Jak vyplývá z Weierstrassovy[5] věty, existence absolutních extrémů je zaručena v případě, že je funkce f spojitá na neprázdné kompaktní (tj. uzavřené a ohraničené) množině M. Není-li množina M kompaktní, je situace o mnoho komplikovanější, potom postupujeme v jednotlivých případě individuálně.

Věta 2.8. *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina a funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Potom funkce f nabývá na množině M svých největších a nejmenších hodnot (tj. globálních extrémů) buď v bodech lokálních extrémů ležících uvnitř M, nebo v některém hraničním bodě množiny M.*

Důkaz. Viz. [3] str. 74.

Body, v nichž by mohl nastat lokální extrém jsou body podezřelé z lokálních extrémů ležící uvnitř množiny M, body z hranice množiny M podezřelé z vázaných lokálních extrémů a body z hranice M, které zatím nebyly uvažovány.

Příklad 2.4. Najděte globální extrémy funkce $f(x, y, z) = y^2 - 3z^2 + e^{x^2} - 6$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$.

[5]Karl T.W. Weierstrass (1815-1897), německý matematik

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^3$. Funkce $f(x, y, z)$ je elementární a tím pádem i spojitá. Množina M je uzavřená a omezená koule se středem v bodě počátku soustavy souřadnic a poloměrem 5. Z výše uvedených vlastností funkce $f(x, y, z)$ a množiny M vyplývá, že na množině M existují globální extrémy funkce $f(x, y, z)$.

Nejprve hledáme body podezřelé z lokálních extrémů funkce $f(x, y, z)$, které zároveň leží uvnitř množiny M. Vypočteme tedy první parciální derivace funkce $f(x, y, z)$ a položíme je rovny nule.

$$f'_x(x, y, z) = e^{x^2} \cdot 2x \stackrel{!}{=} 0,$$

$$f'_y(x, y, z) = 2y \stackrel{!}{=} 0,$$

$$f'_z(x, y, z) = -6z \stackrel{!}{=} 0.$$

Velmi krátkou úpravou získáme stacionární bod se souřadnicemi $[0, 0, 0]$.

Nyní budeme hledat body z hranice množiny M podezřelé z vázaných lokálních extrémů. Vazba je v tomto případě rovna $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, z) = y^2 - 3z^2 + e^{x^2} - 6 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 25)$$

a vypočítáme její první parciální derivace, které mají následující tvar

$$L'_x(x, y, z) = 2x \cdot (\lambda + e^{x^2}),$$

$$L'_y(x, y, z) = 2y \cdot (\lambda + 1),$$

$$L'_z(x, y, z) = 2z \cdot (\lambda - 3).$$

Protože chceme najít stacionární body, musíme vyřešit tuto soustavu rovnic

$$2x \cdot (\lambda + e^{x^2}) = 0$$

$$2y \cdot (\lambda + 1) = 0$$

$$2z \cdot (\lambda - 3) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0.$$

První rovnice bude platit pro $\lambda_1 = -e^{x^2}$ nebo pokud $x = 0$. Hodnotu λ_1 dosadíme do druhé rovnice a upravíme

$$2y \cdot (1 - e^{x^2}) = 0$$

$$\begin{aligned}
2y = 0 \qquad &\vee \qquad (1 - e^{x^2}) = 0 \\
y = 0 \qquad &\vee \qquad e^{x^2} = 1 \\
y = 0 \qquad &\vee \qquad x^2 = \ln 1 \\
y = 0 \qquad &\vee \qquad x = 0.
\end{aligned}$$

Stejně dosadíme λ_1 i do třetí rovnice

$$2z \cdot (-3 - e^{x^2}) = 0$$

$$\begin{aligned}
2z = 0 \qquad &\vee \qquad (-3 - e^{x^2}) = 0 \\
z = 0 \qquad &\vee \qquad e^{x^2} = -3 \\
z = 0 \qquad &\vee \qquad x^2 = \ln(-3)
\end{aligned}$$

$$z = 0.$$

Vypočítané hodnoty pro x, y a z dosadíme do poslední rovnice soustavy. Jednoduchou úpravou získáme první čtyři stacionární body $[-5, 0, 0], [5, 0, 0], [0, -5, 0]$ a $[0, 5, 0]$. Z druhé a třetí rovnice podobně vyjádříme $\lambda_2 = -1$ a $\lambda_3 = 3$. Obdobným způsobem potom získáme zbývající stacionární body $[0, 0, -5]$, $[0, 0, 5]$.

Nyní jen zbývá vypočítat funkční hodnoty ve všech podezřelých bodech. Nejmenší z nich je globálním minimem funkce $f(x, y, z)$ na množině M, největší potom globálním maximem funkce $f(x, y, z)$ na množině M.

$$f(0, 0, 0) = -5$$

$$f(-5, 0, 0) = f(5, 0, 0) = e^{25} - 6$$

$$f(0, -5, 0) = f(0, 5, 0) = 20$$

$$f(0,0,-5) = f(0,0,5) = 70$$

V bodě $[0,0,0]$ se nachází globální minimum funkce $f(x,y,z)$ na množině M, v bodech $[-5,0,0]$ a $[5,0,0]$ se nachází globální maximum $f(x,y,z)$ na množině M.

3 Aplikace v ekonomii

Tato kapitola bude věnována aplikacím extrémů funkcí více proměnných v ekonomii, tedy ekonomické optimalizaci. Jestliže hledáme optimum tržního subjektu, zjišťujeme hodnoty nezávisle proměnných, při kterých daný tržní subjekt maximalizuje nebo minimalizuje svoji cílovou funkci. Nejprve stručně zmíníme některé důležité ekonomické pojmy.

Základní ekonomické pojmy byly převzaty převážně z [5], [8] a [9]. Podrobnější informace o využití extrémů funkcí více proměnných v ekonomii lze nalézt např. v [4], [6] nebo [7].

3.1 Základní pojmy

Nabídkou (S) rozumíme souhrn všech zamýšlených prodejů, se kterými přicházejí výrobci na trh. Nabídka vyjadřuje funkční vztah mezi množstvím vyráběné produkce (Q) a cenou (P), za kterou jsou nabízející ochotni prodat.

Poptávka (D) je souhrn všech zamýšlených koupí na trhu. Také poptávka má dvě proměnné - poptávané množství zboží, které chtějí kupující v rámci svého rozpočtového omezení získat, a ceny, za kterou je chtějí získat.

Celkový užitek (TU) definujeme jako celkovou úroveň uspokojení dané potřeby. Úroveň uspokojení je přímo závislá na objemu spotřebovávaného výrobku, dále uspokojení ovlivňuje například kvalita statku.

Mezní užitek (MU) vyjadřuje, o kolik se zvýší celkový užitek, jestliže množství spotřebovávaného statku vzroste o jednotku. Platí

$$MU = \frac{\Delta TU}{\Delta Q}.$$

Za *optimum spotřebitele* považujeme situaci, kdy spotřebitel nakoupí optimální množství výrobku, tj. pokud platí:

$$MU = P.$$

Celkovými náklady (TC) nazýváme veškeré peněžní výdaje spojené s výrobou a realizací produkce. Celkové náklady se skládají z *fixních nákladů* (FC) – náklady, které se nemění s rozsahem produkce a z *variabilních nákladů* (VC) – takové náklady, které rostou se zvyšujícím se objemem výroby.

Dalším důležitým pojmem jsou náklady na jednotku produkce, tzv. *průměrné náklady* (AC). Vypočteme je jako

$$AC = \frac{TC}{Q}.$$

Mezními náklady (MC) rozumíme náklady potřebné k rozšíření objemu výroby o jednotku produkce a platí

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}.$$

Celkový příjem (TR) je celková částka, kterou firma získá prodejem své produkce,

$$TR = P \cdot Q.$$

Průměrný příjem (AR) neboli příjem na jednotku produkce vypočítáme z následujícího vztahu

$$AR = \frac{TR}{Q}, \qquad \text{tedy} \qquad AR = P.$$

Změnu celkového příjmu, která je způsobena jednotkovou změnou vyrobeného množství produkce, označujeme jako *mezní příjem* (MR),

$$MR = \frac{\Delta TR}{\Delta Q}.$$

Hospodářský výsledek dostaneme jako rozdíl mezi celkovými příjmy a celkovými náklady. Pokud jsou celkové příjmy větší než celkové náklady, mluvíme o *zisku* (π). V opačném případě je hospodářským výsledkem *ztráta*.

Optimum firmy nastává, pokud již není možné změnou objemu produkce zvýšit zisk, tj. pokud platí

$$MR = MC.$$

Při výrobě ekonomických statků využívá člověk několik *výrobních faktorů* (F). Základními výrobními faktory jsou *práce* (L), *půda* (A) a *kapitál* (K).

Nyní se dostáváme k pojmu *celkový produkt* (TP), který udává celkový objem produkce vyrobený určitým množstvím vstupu.

Průměrný produkt (AP) vyjadřuje objem produkce připadající na jednotku vstupu. Vypočítá se z následujícího vztahu

$$AP = \frac{TP}{F}.$$

Změna objemu produkce vyvolaná změnou množství vstupu o jednotku, se nazývá *mezní produkt* (MP). Platí

$$MP = \frac{\Delta TP}{\Delta F}.$$

Tržní konkurence je proces, ve kterém se střetávají zájmy různých subjektů trhu. Rozlišujeme konkurenci mezi nabídkou a poptávkou, konkurenci na straně poptávky a konkurenci na straně nabídky. My se zaměříme na poslední zmíněnou. Z hlediska postavení, jaké mají výrobci na trhu rozlišujeme konkurenci dokonalou a nedokonalou.

3.2 Maximalizace zisku firmy v podmínkách dokonalé konkurence

Dokonalá konkurence je považována za jeden z nejpropracovanějších a nejstarších modelů tržních struktur. V modelu dokonalé konkurence platí následující předpoklady:

- V odvětví existuje velké množství subjektů, přičemž žádný z nich nemá natolik výsadní postavení, aby byl schopen ovlivnit tržní cenu výrobku.
- Produkce odvětví je homogenní.
- Firmy mají volný vstup do odvětví i výstup z něj.

- Existuje stejná míra informovanosti o cenách a množství produkce pro všechny subjekty na trhu.

- Firmy usilují o maximalizaci zisku, spotřebitelé o maximalizaci užitku.

Tyto předpoklady jsou tak silné, že jich není možné v praxi dosáhnout – dokonalá konkurence je teoretický model. Nejvíce se modelu dokonalé konkurence podobají trhy některých zemědělských plodin.

Jak již bylo napsáno výše, na dokonale konkurenčním trhu působí mnoho výrobců i kupujících. Tržní cena výrobku se změní pouze za situace, kdy se mění cena všech ostatních produktů na trhu. Dokonale konkurenční firma bývá z toho důvodu často označována jako tzv. price taker. Říkáme, že poptávka po produkci firmy je dokonale elastická. Cena se tedy v případě dokonale konkurenční firmy stává konstantou. Celkové příjmy firmy jsou proto závislé pouze na objemu vyrobené produkce a to přímo úměrně. Stejně jako cena jsou konstantní také průměrné příjmy, které se dále rovnají mezním nákladům. Obecnou podmínku rovnováhy firmy $MR = MC$ lze tedy pro dokonale konkurenční firma napsat jako

$$MC = P.$$

Aby dokonale konkurenční firma dosahovala co nejvyššího zisku, musí správně zvolit velikost vstupů i výstupů. Připomeňme, že cena je v případě dokonalé konkurence konstantou a celkové příjmy jsou závislé pouze na objemu vyrobené produkce. Ekonomický zisk můžeme vyjádřit takto

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q).$$

Ekonomický zisk firmy bude maximální při výrobě takového objemu produkce, kdy dodatečný přírůstek výstupu nepovede ke změně dodatečného zisku. Matematicky řečeno – nutnou podmínkou optimálního výstupu (tj. takového výstupu, při kterém firma maximalizuje zisk), je položení první derivace funkce zisku rovnu nule

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = 0.$$

Protože

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = \frac{\partial TR}{\partial Q} - \frac{\partial TC}{\partial Q},$$

platí při maximálním zisku

$$\frac{\partial TR}{\partial Q} = \frac{\partial TC}{\partial Q} = MR = MC = P.$$

Tuto nutnou podmínku lze slovně popsat takto: aby firma maximalizovala svůj zisk, musí zvolit takový výstup, aby se při jeho výrobě rovnaly mezní příjmy mezním nákladům, a v případě dokonalé konkurence také ceně. Nesmíme zapomenout definovat postačující podmínku optimálního výstupu firmy, tou je záporná hodnota druhé derivace funkce zisku.

Zmíněné vztahy platí také v případě, že firma produkuje n kusů výrobků, tj. nutné podmínky pro maximalizaci zisku jsou:

$$\pi'_{Q_i} = 0, \text{ pro každé } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Příklad 3.1. Dokonale konkurenční firma produkuje zboží G_1, G_2 a G_3. Ceny výrobků jsou $P_1 = 400$ Kč, $P_2 = 1000$ Kč a $P_3 = 1200$ Kč. Funkce celkových nákladů je dána vztahem $TC(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + 3Q_2^2 + Q_3^2 + 2Q_1Q_2$. Vypočítejte maximální zisk a najděte množství výrobků Q_1^*, Q_2^* a Q_3^*, při kterých je maximálního zisku dosaženo.

Ekonomický zisk je definován jako rozdíl mezi celkovými příjmy a celkovými náklady:

$$\pi(Q_1, Q_2, Q_3) = TR(Q_1, Q_2, Q_3) - TC(Q_1, Q_2, Q_3).$$

Pro celkové příjmy v dokonalé konkurenci platí:

$$TR(Q_1, Q_2, Q_3) = P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3.$$

Dosadíme-li do funkce zisku, dostáváme:

$$\pi(Q_1, Q_2, Q_3) = P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 - 2Q_1^2 - 3Q_2^2 - Q_3^2 - 2Q_1Q_2.$$

Do rovnice zisku zbývá doplnit známé ceny jednotlivých výrobků

$$\pi(Q_1, Q_2, Q_3) = 400Q_1 + 1000Q_2 + 1200Q_3 - 2Q_1^2 - 3Q_2^2 - Q_3^2 - 2Q_1Q_2.$$

Nyní vypočteme parciální derivace funkce π podle všech proměnných a položíme je rovny nule

$$\pi'_{Q_1} = 400 - 4Q_1 - 2Q_2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\pi'_{Q_2} = 1000 - 6Q_2 - 2Q_1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\pi'_{Q_3} = 1200 - 2Q_3 \stackrel{!}{=} 0.$$

Soustavu rovnic pomocí jednoduchých úprav vyřešíme a získáme následující hodnoty:

$$Q_1^* = 20, \quad Q_2^* = 160, \quad Q_3^* = 600.$$

Abychom ověřili, že se skutečně jedná o maximum funkce zisku, vypočítáme také veškeré druhé parciální derivace. Tyto derivace dosadíme do Hessovy matice a vypočteme jednotlivé subdeterminanty:

$$D_1 = \pi''_{Q_1,Q_1} = -4 < 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \pi''_{Q_1,Q_1} & \pi''_{Q_1,Q_2} \\ \pi''_{Q_2,Q_1} & \pi''_{Q_2,Q_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 20 > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \pi''_{Q_1,Q_1} & \pi''_{Q_1,Q_2} & \pi''_{Q_1,Q_3} \\ \pi''_{Q_2,Q_1} & \pi''_{Q_2,Q_2} & \pi''_{Q_2,Q_3} \\ \pi''_{Q_3,Q_1} & \pi''_{Q_3,Q_2} & \pi''_{Q_3,Q_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -40 < 0.$$

Z toho plyne, že zisk firmy bude maximální při produkci 20 jednotek G_1, 160 jednotek G_2 a 600 jednotek výrobku G_3.

Výši optimálního zisku určíme, pokud do funkce π dosadíme spočtená množství $Q_1^* = 20, Q_2^* = 160$ a $Q_3^* = 600$. Získáme

$$\pi(20, 160, 600) = 400 \cdot 20 + 1000 \cdot 160 + 1200 \cdot 600 - 2 \cdot 20^2 - 3 \cdot 160^2 - 600^2 - \\ - 2 \cdot 20 \cdot 160 = 444000 \text{ Kč}.$$

3.3 Maximalizace zisku firmy v podmínkách nedokonalé konkurence

Model dokonalé konkurence, kterým jsme se dosud zabývali, se používá k vysvětlení základních souvislostí fungování firmy v ideálních podmínkách. Reálný ekonomický svět je však od tohoto modelu více či méně vzdálen – převládá v něm tzv. nedokonalá konkurence. Za hlavní rys nedokonalé konkurence považujeme skutečnost, že v odvětví existuje alespoň jeden výrobce, který může do jisté míry ovlivnit cenu své produkce.

Rozhodování nedokonalého konkurenta je tedy složitější, než u konkurenta dokonalého. Nedokonale konkurenční firma rozhoduje nejen o optimálním rozsahu produkce, ale také o ceně své produkce. Přesto můžeme při hledání optima v nedokonalé konkurenci využít některá tvrzení, která jsme uvedli již v předchozí podkapitole.

Zisk v podmínkách nedokonalé konkurence je opět optimální při takovém objemu produkce, při kterém se rovnají mezní příjmy mezním nákladům. Náklady neovlivňuje charakter konkurence. Avšak příjmy firmy závisí na typu konkurence. Jak bylo uvedeno výše, výrobce v nedokonalé konkurenci je schopen určit cenu produkce. Přitom platí, že cena se s růstem objemu produkce snižuje. Nejprve celkový příjem s mírným poklesem ceny roste, jakmile dosáhnou celkové příjmy bodu maxima, klesají společně s cenou také celkové příjmy firmy. Další rozdíl mezi dokonale a nedokonale konkurenční firmou najdeme při analýze mezních a průměrných příjmů. Křivky mezních i průměrných příjmů jsou klesající, což je dáno klesající individuální poptávkovou křivkou. Křivka mezních příjmů není tentokrát shodná s křivkou průměrných příjmů, klesá rychleji. V nedokonalé konkurenci tedy platí, že mezní příjem musí být nižší než cena, tj.

$$MR < P.$$

Rozlišujeme tři základní formy nedokonalé konkurence – monopol, oligopol a monopolistickou konkurenci. Každá z těchto forem má svá specifika, proto se jimi budeme s výjimkou monopolistické konkurence zabývat jednotlivě.

3.3.1 Monopol

Monopol představuje pravý opak dokonalé konkurence. Zatímco v podmínkách dokonalé konkurence vystupuje velký počet firem, které nabízejí totožné produkty, pro monopolní trh je typická existence jediného nabízejícího v odvětví. Tento jediný nabízející přitom vyrábí produkt, ke kterému nejsou blízké substituty - monopolista tedy nemá konkurenci. Z tohoto důvodu si může firma působící v podmínkách monopolu stanovit cenu své produkce, je přitom limitována pouze koupěschopností spotřebitelů.

Při hledání maximálního zisku monopolu vycházíme opět z obecné podmínky

$$MR = MC.$$

Firma ale využívá své výsadní postavení na trhu a snaží se prodat za co nejvyšší cenu. Proto si stanoví cenu vyšší, než jsou mezní náklady. V podmínkách monopolu tedy platí:

$$P > MC.$$

Maximalizaci zisku firmy v podmínkách monopolu budeme ilustrovat následujícím příkladem.

Příklad 3.2. Monopolista prodává dva druhy zboží G_1 a G_2 s lineárními poptávkovými funkcemi $Q_1 = 1000 - 2P_1 + P_2$ a $Q_2 = 800 + P_1 - 2P_2$, kde P_1 je cena zboží G_1 a P_2 je cena zboží G_2. Funkce celkových nákladů je dána vztahem $TC(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$. Vypočítejte maximální zisk firmy, dále optimální množství produkce obou výrobků a ceny, při kterých bude maximálního zisku dosaženo.

Nejprve si vyjádříme poptávkové funkce v inverzní podobě, kde ceny P_1 a P_2 bereme jako neznámé, veličiny Q_1 a Q_2 považujeme za parametry. Získáme novou soustavu rovnic

$$2P_1 - P_2 = 1000 - Q_1$$

$$-P_1 + 2P_2 = 800 - Q_2.$$

Tuto soustavu lze maticově zapsat takto

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 - Q_1 \\ 800 - Q_2 \end{bmatrix}.$$

Nyní aplikujeme Cramerovo pravidlo, získáváme

$$P_1 = \frac{-2Q_1 - Q_2 + 2800}{3}$$

$$P_2 = \frac{-2Q_2 - Q_1 + 2600}{3}.$$

Jak již bylo několikrát zmíněno, ekonomický zisk vypočítáme následujícím způsobem:

$$\pi(Q_1, Q_2) = TR(Q_1, Q_2) - TC(Q_1, Q_2).$$

Pro funkci zisku tedy platí

$$\pi(Q_1, Q_2) = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - Q_1^2 - 2Q_1 Q_2 - Q_2^2,$$

dále

$$\pi(Q_1, Q_2) = \left(\frac{-2Q_1 - Q_2 + 2800}{3} \right) Q_1 + \left(\frac{-2Q_2 - Q_1 + 2600}{3} \right) Q_2 - Q_1^2 - \\ - 2Q_1 Q_2 - Q_2^2.$$

Jednoduchými úpravami funkce zisku dostaneme:

$$\pi(Q_1, Q_2) = -\frac{5}{3}Q_1^2 - \frac{5}{3}Q_2^2 - \frac{8}{3}Q_1 Q_2 + \frac{2800}{3}Q_1 + \frac{2600}{3}Q_2.$$

Analogicky, jako u dokonalé konkurence, chceme-li maximalizovat funkci zisku $\pi(Q_1, Q_2)$, spočteme parciální derivace této funkce a položíme je rovny nule

$$\pi'_{Q_1} = -\frac{10}{3}Q_1 - \frac{8}{3}Q_2 + \frac{2800}{3} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\pi'_{Q_2} = -\frac{10}{3}Q_2 - \frac{8}{3}Q_1 + \frac{2600}{3} \stackrel{!}{=} 0.$$

Vzniklou soustavu dvou rovnic o dvou neznámých vyřešíme a získáme optimální množství produkce

$$Q_1^* = 200 \quad \text{a} \quad Q_2^* = 100.$$

Zbývá ověřit, zda se skutečně jedná o maximum funkce zisku. Vypočítáme také všechny druhé parciální derivace. Spočtené parciální derivace doplníme do Hessovy matice a určíme veškeré subdeterminanty:

$$D_1 = \pi''_{Q_1Q_1} = -\frac{10}{3} < 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \pi''_{Q_1Q_1} & \pi''_{Q_1Q_2} \\ \pi''_{Q_2Q_1} & \pi''_{Q_2Q_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{10}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & -\frac{10}{3} \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Z vypočtených subdeterminantů je zřejmě, že při výrobě 200 jednotek zboží G_1 a 100 jednotek zboží G_2 bude zisk firmy maximální.

Nyní dosadíme optimální množství produkce Q_1^* a Q_2^* do lineárních poptávkových funkcí, které byly zadány. Získáme

$$P_1 = \frac{2300}{3} \quad \text{a} \quad P_2 = \frac{2200}{3}.$$

Výši maximálního zisku vypočítáme, pokud do funkce zisku dosadíme spočtená optimální množství $Q_1^* = 200, Q_2^* = 100$ a také ceny $P_1 = \frac{2300}{3}$ a $P_2 = \frac{2200}{3}$:

$$\pi(200,100) = \frac{2300}{3} \cdot 200 + \frac{2200}{3} \cdot 100 - 200^2 - 2 \cdot 20000 - 100^2 = \frac{410000}{3} \doteq$$
$$\doteq 136666,7 \text{ Kč}.$$

3.3.2 Oligopol

Oligopol je taková tržní situace, kdy v daném odvětví existuje pouze několik výrobních firem, které nabízejí zpravidla diferencovaný produkt. Každý z nabízejících má přitom natolik silné postavení, že si může stanovit cenu vyšší než jsou mezní náklady. Dále existují bariéry vstupu do odvětví znemožňující příchod nových výrobců. Oligopolní strukturu považujeme za v praxi se nejčastěji vyskytující tržní uspořádání.

Vzhledem k tomu, že každá z firem vyrábí značnou část produkce odvětví, vyznačuje se chování firem v oligopolu vzájemnou závislostí. Každý výrobce musí brát na vědomí vliv svých rozhodnutí na ostatní firmy, a také jejich možné reakce. Zejména tato vzájemná závislost nám komplikuje určení rovnovážného množství produkce a tedy i maximálního zisku.

Podobně jako v předchozích podkapitolách, jestliže v odvětví působí n firem, pak pro jejich zisky π_i platí:

$$\pi_i = TR_i(Q_i) - TC_i(Q_i), \text{ pro každé } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Naši pozornost dále zaměříme na modely duopolu. Duopol je oligopol s dvěma firmami a obvykle je model duopolu výrazným zjednodušením reálné situace.

Ekonomická teorie zná celou řadu modelů duopolu: model množstevního kartelu, model cenového kartelu, model cenového vůdce, Cournotův model, Stackelbergův model a Bertrandův model (viz. např. [9]). V dalším textu se budeme věnovat Cournotovu modelu.

Cournotův model

Cournotův[6] model duopolu se opírá o předpoklad, že v odvětví nabízí svoji produkci pouze dvě stejně silné firmy. Obě firmy přitom produkují homogenní výrobek, mají totožné nákladové křivky a také znají svoji tržní poptávkovou křivku. V Cournotově modelu se dále předpokládá, že každá z firem pokládá výstup konkureční firmy za konstantní. Dá se tedy říci – pokud i-tá firma určuje změnu velikosti vlastní produkce, spoléhá na to, že j-tá firma nebude na tuto změnu výstupu odpovídat změnou svého výstupu. Zároveň i-tá firma bere na vědomí, že mění-li svá rozhodnutí o velikosti výstupu, značí to současně změnu ceny.

Všimněme si nyní chování první firmy působící v podmínkách duopolu. Jestliže se tato firma rozhoduje o velikosti svého výstupu Q_1, pak předpokládá, že druhá firma vyprodukuje výstup o velikosti Q_2. Celkový výstup duopolu proto lze napsat jako

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

[6] Antoine Augustin Cournout (1801-1877), francouzský ekonom, matematik a filozof

Za základní myšlenku Cournotova modelu pokládáme fakt, že tržní cena výrobku je závislá na celkovém výkonu obou firem, tedy platí:

$$P(Q) = P(Q_1 + Q_2).$$

Funkce zisku první firmy může být formulována jako

$$\pi_1 = TR(Q_1) - TC(Q_1),$$

neboli

$$\pi_1 = P(Q) \cdot Q_1 - TC(Q_1).$$

Za nástroj Cournotova modelu bývají označovány tzv. reakční křivky. Reakční křivka přitom definuje výstup první firmy jako funkce výstupu druhé firmy v podmínkách duopolu. Pojem reakční křivka zavádíme, protože pro různé konstantní úrovně výstupu první firmy existují různé výstupy druhé firmy. Tento vztah lze napsat takto

$$Q_2 = f_2(Q_1).$$

Reakční křivka druhé firmy by se zapsala analogicky.

V průsečíku reakčních křivek nastává tzv. Cournotova rovnováha. Tato rovnováha vzniká, pokud jsou výstupy obou firem optimální, tj.

$$Q_1^* = f_1(Q_2^*) \quad \text{a zároveň} \quad Q_2^* = f_2(Q_1^*).$$

Z výše uvedeného vyplývá, že obě firmy maximalizují své zisky v bodě

$$(Q_1^*, Q_2^*).$$

Tento model je za daných předpokladů smysluplný i v jiných typech oligopolu, protože se s existencí většího počtu firem nemění jeho podstata.

Postup maximalizace zisku v podmínkách duopolu si ukážeme na následujícím příkladu. V tomto příkladu není vztah mezi poptávaným množstvím a množstvím produkce lineární, jak je tomu v klasickém Cournotově modelu duopolu, ale kvadratický.

Příklad 3.3. Předpokládejme, že existují pouze dvě firmy vyrábějící luxusní metrážové koberce a že denní tržní poptávková křivka má tvar $P = 100 - 2Q^2$, kde P je v Eurech a Q v metrech. Produkce těchto firem tvoří celkový výstup odvětví, tedy platí $Q = Q_1 + Q_2$. Známe také funkce nákladů obou firem, které jsou dány následujícími vztahy $TC(Q_1) = 2Q_1$ a $TC(Q_2) = 2Q_2$. Vypočtěte optimální množství produkce obou firem, dále rovnovážnou cenu produkce, maximální zisk jednotlivých firem a také celého odvětví.

Nejdřív do poptávkové funkce dosadíme za Q a upravíme

$$P(Q) = 100 - 2Q^2 = 100 - 2(Q_1 + Q_2)^2 = 100 - 2Q_1^2 - 4Q_1Q_2 - 2Q_2^2.$$

Zisk první firmy potom bude roven

$$\begin{aligned}\pi_1(Q_1) &= TR(Q_1) - TC(Q_1) = P(Q) \cdot Q_1 - TC(Q_1) = \\ &= 98Q_1 - 2Q_1^3 - 4Q_1^2Q_2 - 2Q_2^2Q_1.\end{aligned}$$

Nutnou podmínku maximalizace zisku pro první firmu získáme, pokud zderivujeme její funkci zisku podle proměnné Q_1, a tuto derivaci položíme rovnu nule:

$$\pi_1' = -6Q_1^2 - 8Q_1Q_2 - 2Q_2^2 + 98 \stackrel{!}{=} 0.$$

Řešení této kvadratické rovnice s parametrem, kde parametr je Q_2, mají následující tvar

$$Q_1 = \frac{8Q_2 \pm \sqrt{64Q_2^2 + 24(-2Q_2^2 + 98)}}{-12} = \frac{2Q_2 \pm \sqrt{Q_2^2 + 147}}{-3}.$$

Nalezli jsme tedy dva stacionární body:

$$Q_{11}^* = -\frac{2}{3}Q_2 + \frac{\sqrt{Q_2^2 + 147}}{3} \qquad \text{a} \qquad Q_{12}^* = -\frac{2}{3}Q_2 - \frac{\sqrt{Q_2^2 + 147}}{3}.$$

Pomocí logické úvahy se stacionárním bodem Q_{12}^* již dále nezabýváme, jelikož nelze vyrábět záporné množství produkce.

Nyní se vrátíme k funkci zisku druhého výrobce, obdobně jako v předchozím případě platí

$$\begin{aligned}\pi_2(Q_2) &= TR(Q_2) - TC(Q_2) = P(Q) \cdot Q_2 - TC(Q_2) \\ &= 98Q_2 - 2Q_2^3 - 4Q_1Q_2^2 - 2Q_1^2Q_2.\end{aligned}$$

Také v tomto případě funkci zisku zderivujeme, tentokrát podle proměnné Q_2, a derivaci položíme rovnu nule

$$\pi_2' = -6Q_2^2 - 8Q_1Q_2 - 2Q_1^2 + 98 \overset{!}{=} 0.$$

Do této rovnice dosadíme za hodnotu Q_1 námi nalezenou optimální hodnotu Q_{11}^*

$$-6Q_2^2 - 8Q_2 \cdot \left(\frac{-2Q_2 + \sqrt{Q_2^2 + 147}}{3}\right) - 2 \cdot \left(\frac{-2Q_2 + \sqrt{Q_2^2 + 147}}{3}\right)^2 + 98 = 0.$$

Umocněním, následným roznásobením závorek a vytýkáním dostáváme

$$Q_2^2 \cdot \left(-6 + \frac{16}{3} - \frac{2}{9} - \frac{8}{9}\right) + \sqrt{Q_2^2 + 147} \cdot \left(-\frac{8}{3}Q_2 + \frac{8}{9}Q_2\right) + \frac{196}{3} = 0,$$

$$-\frac{16}{9}Q_2^2 - \sqrt{Q_2^2 + 147} \cdot \left(\frac{16}{9}Q_2\right) + \frac{196}{3} = 0,$$

$$\frac{196}{3} - \frac{16}{9}Q_2^2 = \sqrt{Q_2^2 + 147} \cdot \left(\frac{16}{9}Q_2\right).$$

Rovnici umocníme, po dalších úpravách obdržíme

$$Q_2 = \pm\frac{7\sqrt{2}}{4}.$$

Opět jsme našli dva stacionární body

$$Q_{21}^* = \frac{7\sqrt{2}}{4} \qquad \text{a} \qquad Q_{22}^* = -\frac{7\sqrt{2}}{4}.$$

Jak již bylo výše zmíněno, v úvahu bereme pouze kladný stacionární bod Q_{21}^*. Optimální výši denní produkce zjistíme, pokud dosadíme vypočtené Q_{21}^* za hodnotu Q_2 do dříve vyjádřené rovnice Q_{11}^*, tj.

$$Q_{11}^* = -\frac{2}{3} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{(\frac{7\sqrt{2}}{4})^2 + 147}}{3}.$$

Po úpravě získáme

$$Q_{11}^* = \frac{7\sqrt{2}}{4} \doteq 2,475 \text{ m}.$$

Je evidentní, že optimální množství produkce obou firem se rovná.

Celkový optimální denní výstup odvětví se jednoduše vypočítá jako

$$Q^* = Q^*_{11} + Q^*_{21} = \frac{7\sqrt{2}}{4} \doteq 4,95 \text{ m}.$$

Chceme-li vypočítat rovnovážnou cenu, dosadíme vypočtenou hodnotu Q^* do produkční funkce

$$P(Q^*) = 100 - 2 \cdot \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 100 - 2 \cdot 24,5 = 51 \text{ EUR}.$$

Maximální denní zisk první firmy bude pro optimální výstup $\frac{7\sqrt{8}}{8}$ m koberců a cenu 51 EUR roven

$$\pi_1\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right) = P(Q^*) \cdot Q^*_{11} - 2Q^*_{11} = \frac{343\sqrt{2}}{4} \doteq 121,27 \text{ EUR}.$$

Stejný maximální zisk bychom dostali i pro druhého výrobce.

Zbývá dopočítat celkový zisk odvětví jako součet maximálního zisku obou firem

$$\pi\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}, \frac{7\sqrt{2}}{4}\right) = \pi_1\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right) + \pi_2\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{343\sqrt{2}}{2} \doteq 254,54 \text{ EUR}.$$

3.4 Maximalizace užitku spotřebitele

Jedním z odvětví ekonomie, v němž se využívají vázané extrémy, je maximalizace užitku spotřebitele. V této kapitole si maximalizaci užitku ilustrujeme na jednoduchém modelu; podrobnější informace o této problematice lze nalézt např. v [1] nebo [6].

Předpokládejme, že má spotřebitel užitek ze spotřeby koše statků x a z užívání si volného času z. Jeho užitkovou funkci u lze tedy zapsat ve tvaru $u = u(x, z)$. Protože spotřebitel nemůže utratit neomezené množství peněz a je rovněž limitován časem, který má k dispozici, je omezen prostřednictvím následujících dvou podmínek:

1. $M = wy + \overline{M}$,

   kde M je celkový peněžní příjem, w je mzdová hodinová sazba, y je počet odpracovaných hodin a $\overline{M}$ je nepracovní příjem (z akcií, obligací, vládních transferů atd.). Pro jednoduchost předpokládejme, že spotřebitel nespoří ani nesplácí žádné půjčky.

2. $T = y + z$.

   Druhé omezení znamená, že má spotřebitel pro danou časovou peridodu k dispozici časový fond o velikosti T, který rozděluje mezi práci y a volný čas z.

Příklad 3.4. Předpokládejme, že užitková funkce $u(x, y) = 17 \ln x - 14 \ln y$, kde x je množství spotřebovávaného statku a y je počet odpracovaných hodin. Spotřebitel má denně k dispozici časový fond 16 hodin, který se skládá z času stráveného v práci y a z volného času z. Platí tedy $16 = y + z$. Cena komodity, jíž chce spotřebitel nakupovat, je 50 Kč. Spotřebitel pobírá hodinou mzdu ve výši 100 Kč a má dále nepracovní důchod z pronájmu bytu ve výši 200 Kč na den. Vypočtěte, kolik komodity musí spotřebitel koupit, aby maximalizoval svůj užitek, a také jak se jeho časový fond rozdělí mezi čas v práci a volný čas.

Jak již bylo uvedeno v Kapitole 2.2, vázané lokální extrémy lze nalézt dvěma způsoby - přímým dosazením nebo Lagrangeovou metodou. V tomto příkladu využijeme jednodušší z metod, tedy metodu přímého dosazení.

Nejdříve si sestavíme vazebnou podmínku

$$50x = 100y + 200,$$

z ní posléze jednoduše vyjádříme proměnnou x :

$$x = 2y + 4.$$

Nyní dosadíme do užitkové funkce

$$u(2y + 4, y) = U(y) = 17 \ln(2y + 4) - 14 \ln y.$$

Funkci $U(y)$ zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule a vyřešíme

$$U' = \frac{17}{y+2} - \frac{14}{y} \stackrel{!}{=} 0.$$

Snadnými úpravami získáme

$$y = \frac{28}{3} \doteq 9,3.$$

Zpětně dosadíme vypočtenou hodnotu y do rovnice $x = 2y + 4$ a dostáváme

$$x = \frac{68}{3} \doteq 22,7$$

Zbývá pouze zjistit, kolik volného času bude mít spotřebitel k dispozici, což jednoduše spočteme z rovnice $16 = y + z$:

$$z = \frac{20}{3} \doteq 6,7.$$

Chce-li spotřebitel maximalizovat svůj užitek, musí nakoupit 22,7 jednotek statku a pracovat 9,3 hodiny denně. Volného času bude mít 6,7 hodin denně.

Závěr

V bakalářské práci jsem popsala postup hledání extrémů funkcí více proměnných, který jsem ilustrovala na příkladech. Protože je problematika ekonomické optimalizace poměrně široké téma, bylo by prakticky nemožné dodržet doporučený rozsah práce a zároveň se věnovat oběma typům optimalizace a všem existujícím aplikacím. Z tohoto důvodu jsem se v ekonomické části věnovala čtyřem vybraným maximalizačním aplikacím. Příklady, které jsem v praktické části uvedla, jsou samozřejmě určitým zjednodušením reálné situace. Maximalizace zisku firmy je ve skutečném světě ovlivněna nejen typem konkurence, ale i kvalitou výrobků, technickým pokrokem nebo reklamou. Maximalizace užitku je také v reálu mnohem komplikovanější: spotřebitel nepůsobí na daném trhu zboží a služeb sám, nenakupuje jedinou komoditu, atd. Způsob řešení těchto obtížnějších případů však zůstává stejný.

Jednou z překážek, kterou jsem musela při psaní práce překonat, bylo tzv. zobecňování definic a vět pro funkce n proměnných. Ve většině případů jsou v literatuře definovány pojmy pouze pro dvě nebo tři proměnné.

Při vytváření této práce jsem si vyzkoušela práci s cizojazyčnými odbornými texty, naučila se více o extrémech a jejich aplikacích, a zdokonalila jsem se v používání programu TEX.

Literatura

[1] Allen R.G.D., *Matematická ekonomie*, 1. vydání, Praha: Academia, 1971

[2] Anton, H., Rorres, C., *Elementary Linear Algebra: Applications Version*, 11. vydání, New York: John Wiley & Sons, Inc., 2005

[3] Došlá, Z., Došlý, O., *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, 3. vydání, Brno: Masarykova univerzita, 2006

[4] Dowling, E.T., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Introduction to Mathematical Economist*, 3. vydání, New York: McGraw-Hill, Inc., 2001

[5] Fuchs, K., Tuleja, P., *Základy ekonomie*, 1. vydání, Praha: EKOPRESS, s.r.o., 2003

[6] Hoy, M. and all, *Mathematics for Economics*, 2. vydání, Cambridge: The MIT Press, 2001

[7] Jacques, I., *Mathematics for Economics and Business*, 5. vydání, Harlow: FT Pretice Hall, 2006

[8] Macáková, L. a kol., *Mikroekonomie: Základní kurs*, 10. vydání, Slaný: MELANDRIUM, 2007

[9] Soukupová, J. a kol., *Mikroekonomie*, 3. doplněné vydání, Praha: Management Press, 2005

[10] Rachůnek, L., Rachůnková, I., *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, 1. vydání, Olomouc: Univerzita Palackého, 2004

[11] Extrémy funkcí dvou proměnných [online], dostupné z: *http://kma.me.sweb.cz/extrémy.pdf*, [citováno 10.2. 2011]

[12] Lineární algebra [online], dostupné z: *http://vondrak.am.vsb.cz/la-it/Books/LINALG.pdf*, [citováno 28. 12. 2010].

[13] Matematika 1 [online], dostupné z: *http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/MI.html*, [citováno 5. 2. 2011].

[14] Matematika 2 [online], dostupné z: *http://homen.vsb.cz/˜kre40/esfmat2/fceviceprom.html*, [citováno 25. 10. 2010].

[15] The Method of Lagrange Multipliers [online], dostupné z: *http://xbeams.chem.yale.edu/˜batista/vaa/LagrangeMult.pdf*, [citováno 5. 2. 2011].