



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Sbírka problémových úloh z algebry a geometrie

Vypracovala: Alexandra Sigmundová

Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice, 2014

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma: Sbíрка problémových úloh z algebry a geometrie jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích, 2014

.....

Poděkování:

Touto cestou bych chtěla poděkovat Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D., vedoucímu mé bakalářské práce, za spolupráci, připomínky a čas, který mi věnoval. Mé poděkování patří též mé rodině a blízkým přátelům za podporu a pomoc po celou dobu mého studia. A na závěr bych také chtěla poděkovat Mgr. Boženě Řeháčkové a Mgr. Martě Bakalové za čas, který mi věnovaly při konzultacích.

Anotace:

Hlavním cílem bakalářské práce je vytvořit sbírku řešených příkladů na téma: „problémové úlohy z algebry a geometrie“. Sbíрка by měla sloužit žákům na druhém stupni základní školy a měla by pomoci při rozvoji logického myšlení pomocí tabulek, grafů nebo obrázků. Příklady jsou rozděleny do tří kapitol, které jsou ještě děleny abecedně do subkapitol.

Klíčová slova:

Konstruktivistický přístup, transmisivní přístup, algebra, geometrie, logika

Annotation:

The aim of the bachelor thesis is to create a collection of solved exercises on topic: „Problematic algebraic and goniometric exercises“. This collection is designed for pupils from 5th to 9th class of basic school and should help them to develop their logical thinking using tables, graphs or images. The exercises are divided into three chapters, which are alphabetically sorted into sections.

Key words:

Constructivist approach, transmissive approach, algebra, geometry, logic

Obsah

1.	Úvod	6
1.1	Tematický plán	7
2.	Přístupy k vyučování	10
2.1	Konstruktivistický přístup	10
2.2	Transmisivní přístup	10
3.	Algebra	12
3.1	Procenta	12
3.2	Převody jednotek	22
3.3	Přímá a nepřímá úměrnost	25
3.4	Pythagorova věta	27
3.5	Rovnice	33
3.6	Společný násobek/dělitel	35
3.7	Vennovy diagramy	36
3.8	Výrazy s proměnnou	46
3.9	Zlomky	48
4.	Geometrie	51
4.1	Obvody a obsahy	51
4.2	Úhly	71
5.	Logika a logické úlohy	82
6.	Závěr	99
7.	Zdroje:	100

1. Úvod

Hlavním cílem mé bakalářské práce je vytvoření sbírky problémových příkladů z algebry, geometrie a logiky. Typy problémových příkladů byly konzultovány s pedagogy základních škol, ZŠ T. Šobra a ZŠ T. G. Masaryka, které obě sídlí v Písku. Následně byly z těchto informací vybrány ty úlohy, které dle našeho názoru působí žákům největší potíže. Celá sbírka je rozdělena do tří kapitol, které se postupně věnují algebře, geometrii a logice. Ještě před úvodem do sbírky jsem analyzovala učivo základních škol, k tomu jsem použila tematický plán, ve kterém je rozvrženo, co se kdy a v jaké třídě probírá. Do své bakalářské práce jsem okrajově zapojila také informace o rozdílech v přístupech k výuce. Jedná se konkrétně o rozdíl mezi konstruktivistickým a transmisivním přístupem.

První kapitola sbírky se zabývá algebrou. Tato kapitola je dále rozdělena na devět subkapitol, procenta, převody jednotek, přímá a nepřímá úměrnost, Pythagorova věta, společný násobek, rovnice, Vennovy diagramy, výrazy a zlomky. Každou subkapitolu uvádí příklad na vysvětlení, nebo určitá hra, která má v žácích probudit aktivitu a pomůže jim dostat se do problematiky.

Druhá kapitola, která se zabývá geometrií. Je rozdělená na dvě subkapitoly, první z nich jsou obvody a obsahy. Druhá podkapitola se zabývá a úhly.

Poslední kapitola se zaměřuje na logiku a logické úlohy.

Většinu příkladů doplňují obrázky, grafy nebo tabulky, které by měly čtenáři pomoci při řešení problémových příkladů.

Tato sbírka je určena pro učitele, kteří při hodinách mohou využít jak hry na procvičení, tak řešené problémové příklady.

1.1 Tematický plán

Pro orientaci v učení jsme si zapůjčila tematický plán ze základní školy Tomáše Šobra v Písku. Tematický plán je sestaven v závislosti na ŠVP a obsahuje rozvržení učiva, co a kdy budou učitelé se žáky probírat. ŠVP každé školy je pojmenováno podle cíle, kterých chtějí dokázat. Například na ZŠ T. G. Masaryka se nazývá: „Chceme a dokážeme“.

6. ročník

Září

- Opakování učiva pátého ročníku

Říjen

- Desetinná čísla (porovnávání, znázorňování, zaokrouhlování, sčítání, odečítání, násobení)

Listopad

- Úhly (osa úhlu, velikost úhlu, přenášení úhlu, sčítání a odečítání graficky i písemně)

Leden - únor

- Desetinná čísla – dělení

Březen

- Shodná zobrazení (osová, středová souměrnost)

Duben

- Dělitelnost

Květen

- Trojúhelník (konstrukce SSS, SUS, USU, úhly v trojúhelníku, těžnice, výšky, kružnice opsaná a vepsaná)

Červen

- Krychle, kvádr
- Opakování

7. ročník

Září

- Opakování učiva šestého ročníku

Říjen - listopad

- Zlomky (rozšiřování, krácení, smíšená čísla, převody na desetinné číslo, sčítání, odečítání, násobení, dělení)

Prosinec

- Celá čísla, racionální čísla

Leden

- Rovnoběžníky (výšky, úhlopříčky, konstrukce, obvod, obsah)

Únor - březen

- Poměr
- Měřítko plánu a mapy
- Přímá a nepřímá úměrnost

Duben

- Procenta

Květen - červen

- Lichoběžník - vlastnosti, konstrukce, obvod, obsah
- Hranoly - povrch, objem
- Opakování

8. ročník

Září

- Opakování ze sedmého ročníku

Říjen

- Druhá mocnina, odmocnina
- Pythagorova věta

Listopad

- Mocnina s přirozeným mocnitelem
- Kruh, kružnice - obvod, obsah

Prosinec

- Válec

Leden

- Výrazy

Únor - březen

- Lineární rovnice

Duben

- Konstrukční úlohy

Květen

- Základy statistiky

Červen

- Opakování

9. ročník

Září

- Opakování učiva z předchozích ročníků
- Vyjádření neznámé ze vzorce
- Soustava dvou rovnic o dvou neznámých (sčítací metoda)

Říjen

- Soustava rovnic o dvou neznámých (dosazovací metoda)
- Soustava rovnic o dvou neznámých - slovní úlohy

Listopad

- Rovnice - opakování
- Funkce - pojem funkce

Prosinec

- Lineární funkce
- Pojem funkce, graf, rostoucí, klesající funkce
- Grafické řešení dvou rovnic o dvou neznámých

Leden

- Podobnost geometrických útvarů v rovině
- Podobnost trojúhelníků
- Postupný poměr

Únor

- Jehlan (výška, povrch, objem)
- Kužel (povrch, objem)

Březen

- Koule (povrch, objem)
- Goniometrické funkce

Duben

- Lomené výrazy
- Rovnost výrazů, úpravy algebraických výrazů
- Početní výkony s lomenými výrazy - sčítání, odečítání, násobení a dělení

Květen

- Rovnice s neznámou ve jmenovateli
- Finanční matematiky
- Statistika a pravděpodobnost

Červen

- Závěrečné opakování učiva z geometrie, algebry a aritmetiky

2. Přístupy k vyučování

Ve výuce matematiky na základní škole se mohou objevit dva přístupy, které používají učitelé ve výkladu látky. Dle mého názoru se ve většině případů setkáváme s tím, že učitel používá přístup transmisivní a málokdy se vyskytuje konstruktivistický.

2.1 Konstruktivistický přístup

Konstruktivismus je směr vyskytující se od druhé poloviny 20. století, který klade největší důraz na „aktivitu“ člověka a na jeho přístup k dané problematice. Hlavní roli v tom přístupu má motivace, protože, jak víme, tak bez motivace nemůžeme očekávat aktivitu žáků. Žák či student je veden k samostatnému zkoumání.

Výuka vedena tímto přístupem klade důraz na práci dětí ve skupině. Skupinová práce umožňuje společnou konstrukci poznatků. Během diskuse žák dostává prostor vyjádřit svůj vlastní názor a zároveň přijmout názory ostatních.

- Globální konstruktivismus

Základním prvkem v určité třídě je aktuální stav vědomostí a dovedností žáků. Podle názorů z knihy „Dítě, škola, matematika“, od autorů Milana Hejného a Františka Kuřiny, se dá o globálním konstruktivismu mluvit pouze v „homogenních“ a cílevědomých třídách, jelikož se celá třída musí přizpůsobit úrovni.

2.2 Transmisivní přístup

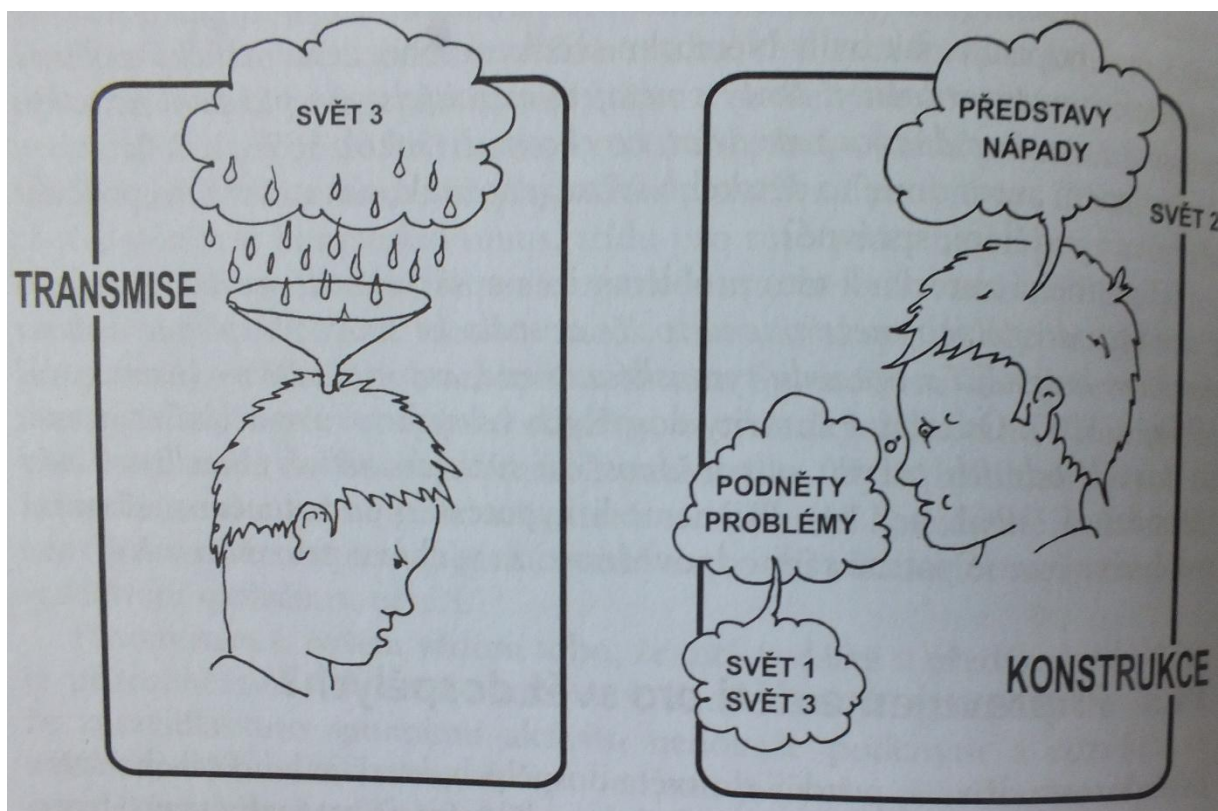
Transmise neboli „přenos“ je přístup, který vyjadřuje přenesení informací a znalostí z hlavy učitele do hlavy žáka. Nemusí se však jednat jen o učitele, tuto roli může nahradit rodič, instruktor, spolužák, televize, kniha nebo rozhlas. Přejímaná znalost je vždy podávána hotová a správně utříděná. Ten, kdo tuto znalost dostává, ji musí zařadit do již vzniklého systému svých znalostí. Jediný problém, který může nastat, je ten, že „podavatel“ informace má předem promyšlené, jak vysvětlit tuto problematiku, proto nevidí mezery, které se mohou ve výkladu vytvořit.

Výklad učiva:

V tomto přístupu se jedná o jednosměrnou komunikaci od učitele k žákovi nebo k více žákům. Učitel by měl mít komunikaci dostatečně promyšlenou a připravenou, zvláště začínající pedagog. Zpětná vazba, která učitele informuje o tom, jak moc žáci látce porozuměli, je například otázka: „Rozumíte tomu?“ nebo „Kdo tomu nerozuměl?“ Problém však nastává v tom, že žáci občas látce sice rozumí, ale nereagují na otázky.

Oboustranná komunikace probíhá tak, že učitel se ptá a žáci odpovídají. Pokud je odpověď správná, učitel ví, že žáci látce rozumí a chápou danou problematiku. Pokud ne, je třeba se zaměřit na to, zda nevědí jen něco, nebo neporozuměli celé problematice.

Rozdíl mezi těmito dvěma přístupy si můžeme graficky znázornit. Na níže uvedeném obrázku máme vlevo znázorněný transmisivní přístup, který je v obrázku nazván jen jako „transmise“. Na druhém obrázku je pod pojmem „konstrukce“ znázorněný konstruktivistický přístup (Hejný, Kuřina, 2009, s. 202)



3. Algebra

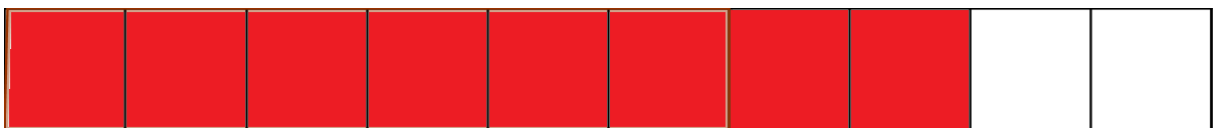
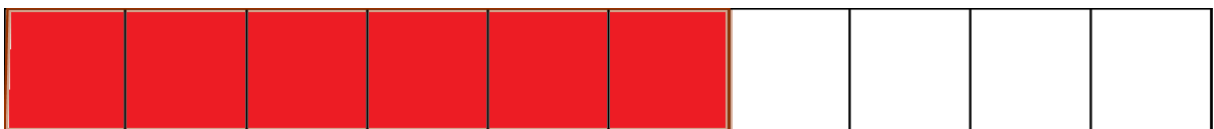
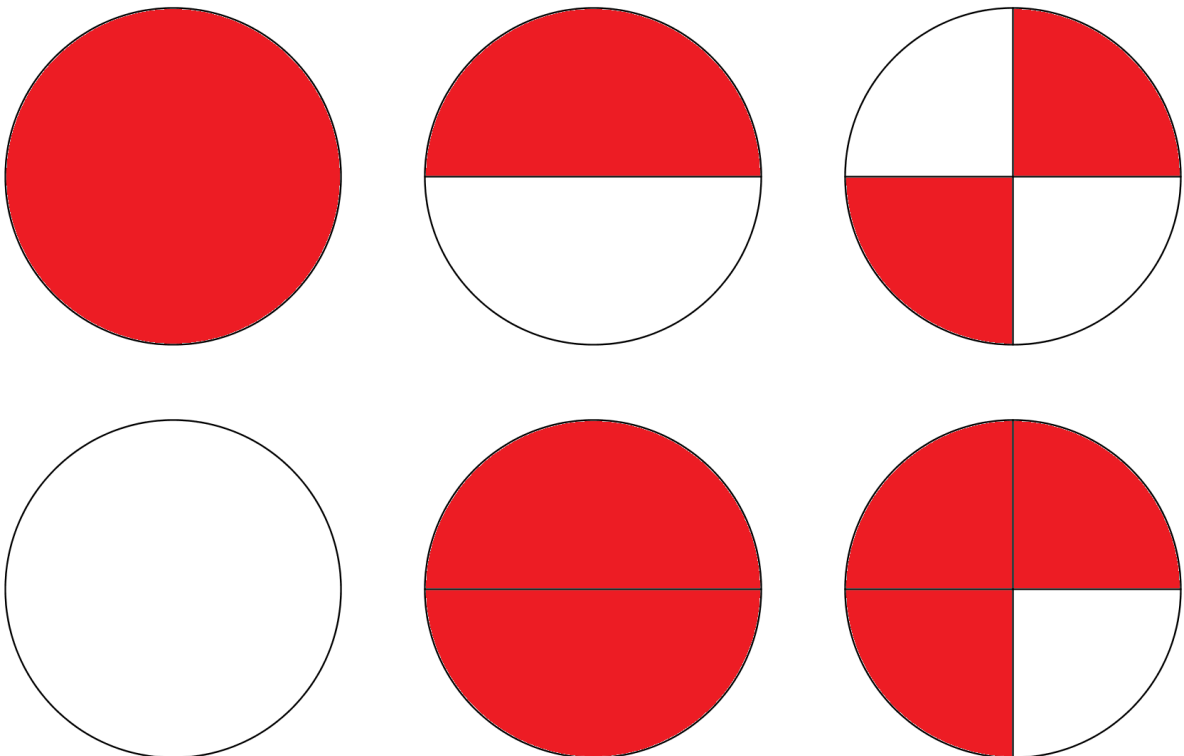
3.1 Procenta

Označujeme je symbolem %.

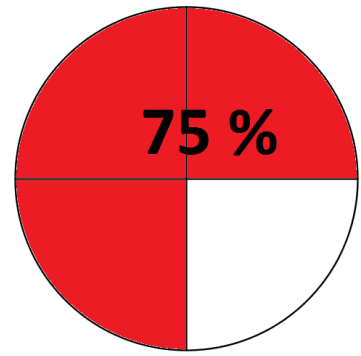
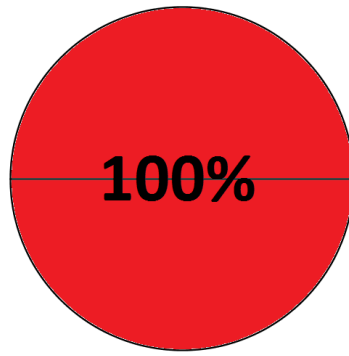
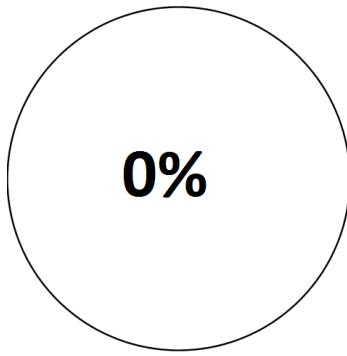
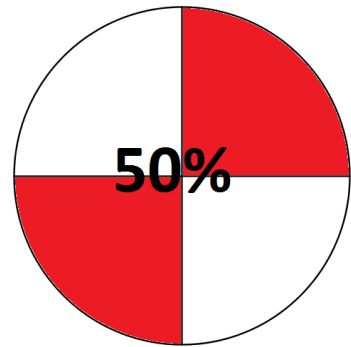
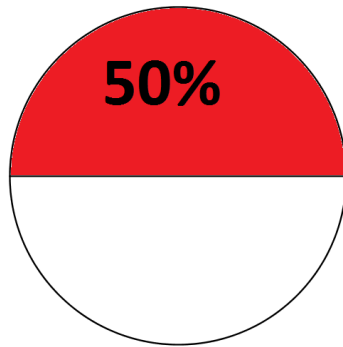
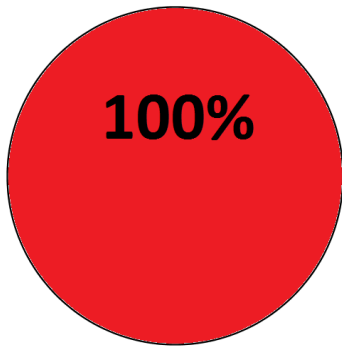
Procenta nám označují určitou část celku, konkrétně 1 % je setina celku → celek je jako takový roven 100 %.

Úvodní úloha

Dopište do kružnic počet procent, které tvoří červeně vyplněné části:



Řešení:



1) Křižovatkou projede za dopoledne 200 automobilů, z toho je 50 dodávek. Kolik dodávek pravděpodobně projede křižovatkou za týden, jestliže celkový počet automobilů, které za týden projely křižovatkou, je 6000?

Řešení:

200 aut 100 %

50 aut x %

$$\frac{x}{100} = \frac{50}{200}$$

$$x = \frac{50}{200} \cdot 100$$

$$x = 25\%$$

Vypočetli jsme, že v tomto provozu je 25% z automobilů dodávka. Dosadíme tedy počet aut za týden.

100 % 6000 aut

25 % x aut

$$\frac{x}{6000} = \frac{25}{100}$$

$$x = \frac{25}{100} \cdot 6000$$

$$x = 1500 \text{ dodávek}$$

Za týden projede křižovatkou pravděpodobně 1500 dodávek.

Dala by se tato úloha řešit jednodušeji bez použití procent?

Ano tuto úlohu můžeme řešit přes poměr.

Víme, že za dopoledne projede touto křižovatkou 200 automobilů, 50 z toho jsou dodávky.

Takže víme, že automobily x dodávky tudy projedou v poměru 3:1.

$$\frac{200}{50} = 4$$

Jelikož se v otázce ptáme, kolik automobilů to bude z 6000 automobilů, použijeme poměr.

Celkový počet vydělíme součtem poměrů:

$$\frac{6000}{4} = 1500$$

Nyní víme, že jeden díl má hodnotu 1500 automobilů. Jelikož automobily x dodávky jsou v poměru 3:1.

Dodávek tedy projede křižovatkou 1500.

Dopočtete, kolik automobilů projede křižovatkou bez dodávek:

Pomocí poměru:

$$3 \cdot 1500 = 4500$$

Pomocí odčítání:

$$6000 - 1500 = 4500$$

Křižovatkou projede 4500 automobilů.

2) Pracovníci jedné dílny obráběli během tří měsíců stejné součástky. Jejich výkon stoupal tak, že každý následující měsíc obrobili o 10 % více součástek než v předcházejícím měsíci. V posledním měsíci obrobili 242 součástek. Kolik součástek vyrobili v prvním měsíci? Kolik součástek obrobili celkem?

Řešení:

110 %242 ks

100 % x ks

$$\frac{x}{242} = \frac{100}{110}$$

$$x = \frac{100}{110} \cdot 242$$

$$x = 220 \text{ ks}$$

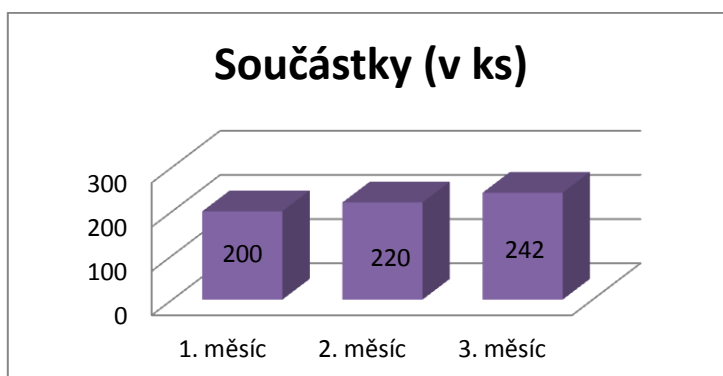
110 % 220ks

100 % x ks

$$\frac{x}{220} = \frac{100}{110}$$

$$x = \frac{100}{110} \cdot 220$$

$$x = 200 \text{ ks}$$



Celkem za tři měsíce obrobili 1324 ks.

3) Zahradnictví má připravit na prodej 6500 kusů exotické masožravky. Klíčivost těchto masožravek je 65 % a pěstební odpad je asi 15 % (množství uhynulých rostlin z vyklíčených semen). Kolik semen musí v zahradnictví zasít, aby připravili 6500 kusů k prodeji? Výsledek zaokrouhlete na stovky nahoru.

Řešení:

Nejprve si musíme spočítat, kolik semen musíme zasít, aby vyklíčilo 6500 kusů.

65 % 6500 kusů

100 % x kusů

$$\frac{x}{6500} = \frac{100}{65}$$

$$x = \frac{100}{65} \cdot 6500$$

$$x = 10000$$

Nyní víme, kolik sazenic musíme vysít před klíčivostí, ale musíme ještě započítat pěstební odpad.

85 % 10000 kusů

100 % x kusů

$$\frac{x}{10000} = \frac{100}{85}$$

$$x = \frac{100}{85} \cdot 10000$$

$$x = 11764,71$$

Po zaokrouhlení $x = 11800$ ks

V zahradnictví musí pracovníci zasadit 11800 kusů, aby bylo k prodeji připraveno 6500 kusů.

- 4) V jednom malém masokombinátu rozdělili maso na tři části: na vývoz, na domácí trh a část zůstane ve skladu. Na vývoz je určeno $\frac{5}{14}$ z celkové produkce, na domácí trh $\frac{7}{12}$ ze zbytku. Kolik procent zůstalo ve skladu?

Řešení:

Na vývoz $\frac{5}{14}$

Domácí trh $\frac{7}{12}$ ze zbytku $\left(1 - \frac{5}{14}\right)$

Sklad x

Nejprve spočítáme, jaká část půjde na domácí trh.

Zbytek po vývozu je:

$$1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$$

Domácí trh:

$$\frac{7}{12} \cdot \frac{9}{14} = \frac{63}{168}$$

Zkrátíme zlomek na základní tvar (vydělíme jmenovatel i činitel společným dělitelem, v tomto případě číslem 21).

$$\frac{63}{168} = \frac{3}{8}$$

Ve skladu tedy zbylo:

$$1 - \frac{5}{14} - \frac{3}{8} = \frac{15}{56}$$

Převédeme ne procenta:

$$\frac{15}{56} * 100 = 26,76 \%$$

Ve skladu zůstalo přibližně 26,76 % masa.

5) Aneta si chce koupit novou bundu, ale přijde jí moc drahá, jelikož stojí 2999 Kč. V pátek na ni dali slevu 15 % a v pondělí dalších 15 % z nové ceny. Když si pro ni šla v úterý, probíhala zde hodinovou akce 30 % slevy na všechno zboží z původní ceny. Vyplatí se jí koupit bundu v této hodině nebo počkat zpět na slevu 15 % a 15 %? Nebo vyjdou obě varianty stejně? Pokud vyjde desetinné číslo, zaokrouhlete na celé.

Řešení:

Nejprve si vypočteme, kolik by bunda stála při postupném zlevňování. Jelikož sleva je 15%, bude nová cena tvořena 85 % původní.

100 % 3000 Kč

85 % x Kč

$$\frac{x}{3000} = \frac{85}{100}$$

$$x = \frac{85}{100} \cdot 3000$$

$$x = 2550 \text{ Kč}$$

Druhé zlevnění probíhalo již z této ceny.

100 % 2550 Kč

85 % x Kč

$$\frac{x}{2550} = \frac{85}{100}$$

$$x = \frac{85}{100} \cdot 2550$$

$$x = 2167,5 \text{ Kč}$$

$$x = 2168 \text{ Kč}$$

Kdyby si bundu koupila za těchto podmínek, bude stát 2168 Kč.

Pokud by využila hodinové akce a koupila by si ji se slevou 30% z původní ceny, vypadalo by to následujícím způsobem (cena bude tvořená, po slevě 30%, 70 % z původní ceny):

100 % 3000 Kč

70 % x Kč

$$\frac{x}{3000} = \frac{70}{100}$$

$$x = \frac{70}{100} \cdot 3000$$

$$x = 2100 \text{ Kč}$$

Anetě se vyplatí koupit si bundu v této hodině a ušetří 68 Kč.

6) Paní Nováková přišla domů z nákupu a prohlížela si účtenku. Všimla si, že DPH z nákupu tvoří 79,68 Kč. Kolik korun stál celý nákup? Přičemž víme, že kupovala jen potraviny, na které se vztahuje snížená sazba DPH (15 %).

Řešení:

15 % 79,68 Kč

100 % x Kč

$$\frac{x}{79,68} = \frac{100}{15}$$

$$x = \frac{100}{15} \cdot 79,68$$

$$x = 531,2 \text{ Kč}$$

Nákup paní Novákové stál 531,2 Kč, jelikož neexistují již koruny nižší hodnoty než 1 Kč a paní platila hotově, zaokrouhlí se cena a u pokladny zaplatila 531 Kč.

7) V jednom nejmenovaném elektroru prodávali novou televizi. Její cenu stanovili na 9999 Kč. Jelikož zjistili, že v konkurenčních prodejnách mají cenu mnohem vyšší, rozhodli se ji zvýšit o 12 %. O pár týdnů později se na trhu objevila nová firma s cenou nižší, než tato nově nastavená, proto se rozhodli, že cenu sníží o 14 % z té zvýšené ceny. Kolik stojí televize v současné době? Ceny zaokrouhlete na celá čísla.

Řešení:

Nejprve si spočítáme, kolik televize stála po zdražení.

100 % 9999 Kč

112 % x Kč

$$\frac{x}{9999} = \frac{112}{100}$$

$$x = \frac{112}{100} \cdot 9999$$

$$x = 11198,88 \text{ Kč}$$

$$x = 11199 \text{ Kč}$$

Nyní ji ale zlevnili o 14 %.

100 % 11199 Kč

86 % x Kč

$$\frac{x}{11199} = \frac{86}{100}$$

$$x = \frac{86}{100} \cdot 11199$$

$$x = 9631,14 \text{ Kč}$$

$$x = 9631 \text{ Kč}$$

V současné době stojí televize 9631 Kč.

3.2 Převody jednotek

Úvodní úloha:

Doplňte tabulky.

- Délka

Máte zadáný 1 metr, doplňte chybějící hodnoty.

kilometr	metr	Decimetr	centimetr	milimetr
	1			

- Hmotnost

Máte zadáný 1 kilogram, doplňte chybějící hodnoty.

tuna	metrický cent	kilogram	dekagram	gram
		1		

- Obsah

Máte zadáný 1 metr čtvereční, doplňte chybějící hodnoty.

km ²	hektar	ar	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
			1			

- Objem

Máte zadáný 1 metr krychlový, doplňte chybějící hodnoty.

m ³	dm ³ = l	cm ³	mm ³
1			

- Čas

Máte zadanou 1 sekundu, dopňte chybějící hodnoty.

týden	den	hodina	minuta	sekunda
				1

Řešení:

- Délka

kilometr	metr	decimetr	centimetr	milimetr
0,001	1	10	100	1000

- Hmotnost

tuna	metrický cent	kilogram	dekagram	gram
0,001	0,01	1	100	1000

- Obsah

km ²	hektar	ar	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
0,000001	0,0001	0,01	1	100	10000	1000000

- Objem

m ³	dm ³ = l	cm ³	mm ³
1	1000	1000000	1000000000

- Čas

týden	den	hodina	minuta	sekunda
604800	86400	3600	60	1

- 8) Lucie koupila půl kg chleba, 3 balíčky kávy po 75g, 4 másla po 250g, 25 dkg salámu a 3 kg mouky. Jakou hmotnost v kg měl nákup. Zaokrouhlete na celé číslo.

Řešení:

Nejprve si vše převedeme na kilogramy.

Chléb: 0,500 kg

Káva: $3 \cdot 75g = 225g = 0,225 kg$

Máslo: $4 \cdot 250g = 1000g = 1 kg$

Salám: $25 dkg = 0,250 kg$

Mouka: 3 kg

$$0,5 + 0,225 + 1 + 0,250 + 3 = 4,975 kg$$

Lucky nákup vážil 4,975 kg, což po zaokrouhlení činí 5 kg.

- 9) Na běžeckých závodech se rozhodčí nemohli dohodnout, v jakém pořadí doběhli první tři závodníci (Petr, Pavel a Karel). Převed'te jejich časy na stejné jednotky a určete pořadí.

Petr 0,53 hodin

Pavel..... 34,18 minut

Karel 2070 vteřin

Řešení:

Všechny hodnoty převedeme na vteřiny.

Petr $0,53 \cdot 3600 = 1908$ vteřin

Pavel $34,18 \cdot 60 = 2050,8$ vteřin

Karel 2070 vteřin

Takže závodníci doběhli v tomto pořadí: Petr, Pavel a na třetím místě Karel.

3.3 Přímá a nepřímá úměrnost

Přímá úměrnost

O přímé úměrnosti můžeme mluvit, pokud se veličiny mění stejně. Obě se zvětšují, nebo se obě zmenšují. O kolik nebo kolikrát se zvětší první veličina, zvětší se i druhá. To samé platí i pro zmenšování.

Na tržišti prodávají jablka, za 1 kg zaplatí člověk 23 Kč. Kolik zaplatí za 5 kg?

1kg..... 23 Kč

↑5kgx Kč ↑

$$\frac{x}{23} = \frac{5}{1}$$

$$x = \frac{5}{1} \cdot 23$$

$$x = 115 \text{ Kč}$$

Takže za 5 kg jablek člověk zaplatí 115 Kč.

Nepřímá úměrnost

O nepřímé úměrnosti mluvíme, pokud máme dvě veličiny, pro které platí, že čím více se jedna veličina zvětšuje, tím se druhá veličina zmenšuje a naopak.

Na plaveckém stadionu potřebují odčerpávat vodu z jednoho bazénu. Jedno čerpadlo vodu odčerpá za 4 hodiny. Za jak dlouho by se voda odčerpala, kdybychom použili dvě naprosto stejná čerpadla? (pomineme rozbití, výpadek proudu,...)

↓1 čerpadlo 4 hodiny

2 čerpadla x hodin ↑

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot 4$$

$$x = 2$$

Dvě čerpadla odčerpají vodu za 2 hodiny.

10) Řidič policejního vozu počítal, že při průměrné rychlosti 60 km/h dojde na stanici za 1 hodinu a 30 minut. V polovině cesty se zdržel na 10 minut zastávkou na koblíhy. Jakou rychlostí pak musel jet, aby dorazil ve stejný čas na stanici?

Řešení:

Nejprve si spočítáme, jak je trasa dlouhá. Pro tu platí, že čím déle jedeme, tím dál dojedeme. Proto použijeme přímou úměrnost.

60 minut 60 kilometrů

90 minut x kilometrů

$$\frac{x}{60} = \frac{90}{60}$$

$$x = 90 \text{ kilometrů}$$

Víme, že policista musí ujet 90 kilometrů, po 45 kilometrech se zdržel. Nyní budeme počítat jeho rychlost. Čím rychleji jede, tím méně času potřebuje, proto použijeme nepřímou úměrnost.

45 minut 60 km/hodinu

35 minut x km/hodinu

$$\frac{x}{60} = \frac{45}{35}$$

$$x = \frac{45}{35} \cdot 60$$

$$x = 77,14 \text{ km/hod}$$

Policista musí jet minimální rychlostí 77,14 km/hod, aby na stanici dojel včas.

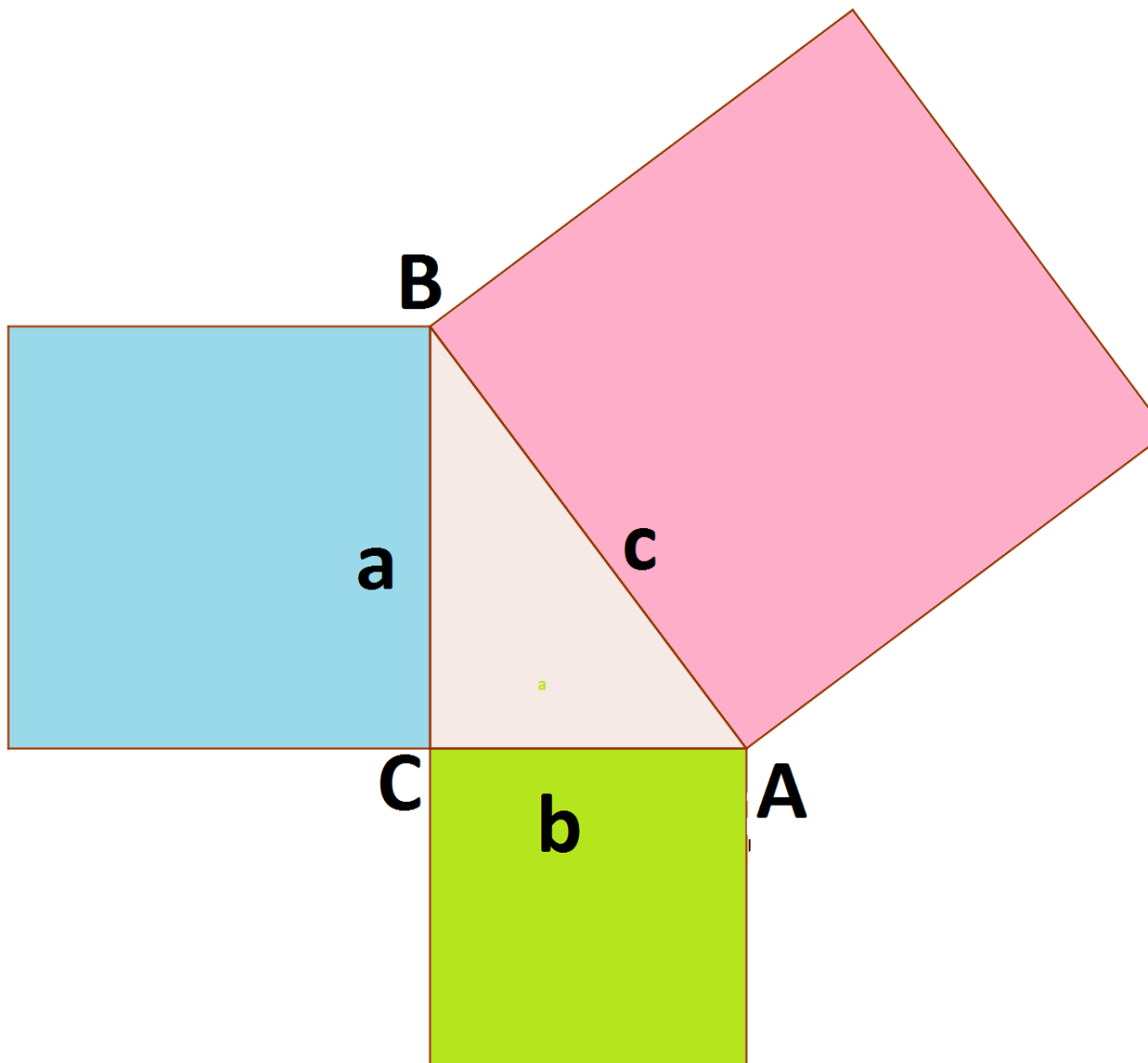
3.4 Pythagorova věta

Tato věta zní: „Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka je roven součtu obsahů čtverců nad jeho odvěsnami“. Matematicky se tato věta obvykle zapisuje takhle: ¹

$$c^2 = a^2 + b^2$$

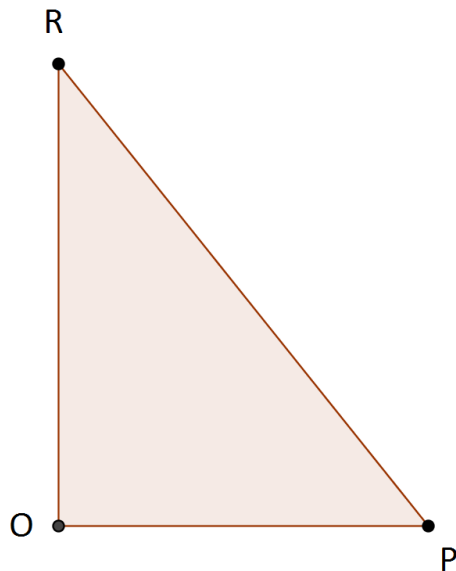
V tomto případě musí být strany „a“ a „b“ odvěsny a strana „c“ přepona.

Grafické znázornění:



¹ *Pythagorova věta* [online]. Nová média [cit. 2014-03-26]. Dostupné z: <http://www.matematika.cz/pythagorova-veta>

11) Dvě silnice spolu svírají pravý úhel. Na jedné silnici je 3 km od křižovatky místo P, na druhé silnici je 4 km od křižovatky místo R. Místa P a R jsou spojena přímou pěšinou. Chodec jde z místa R do místa P pěšinou průměrnou rychlostí 5 km/hod, auto jede z místa R do P po silnici průměrnou rychlostí 50 km/hod. Určete, za jak dlouho po příjezdu auta do místa P dorazí chodec, jestliže auto i chodec z místa R vyrazili současně.



Řešení:

Nejprve si musíme spočítat dráhy, které musí urazit, aby se dostali oba do místa R.

Vzdálenost přes pěšinu spočítáme pomocí Pythagorovy věty. Pěšinu si označíme například písmenem o .

$$o^2 = 3^2 + 4^2$$

$$o^2 = 9 + 16$$

$$o^2 = 25$$

$$o = \sqrt{25}$$

$$o = 5 \text{ km}$$

Automobil $3 \text{ km} + 4 \text{ km} = 7 \text{ km}$

Chodec 5 km

Čas automobilu:

50 km 60 minut

7 km x minut

$$\frac{x}{60} = \frac{7}{50}$$

$$x = \frac{7}{50} \cdot 60$$

$$x = 8,4 \text{ min}$$

Čas chodce:

Chodec ujde 5 km/hodinu, jelikož pěšina je dlouhá 5 km, víme, že cestu půjde

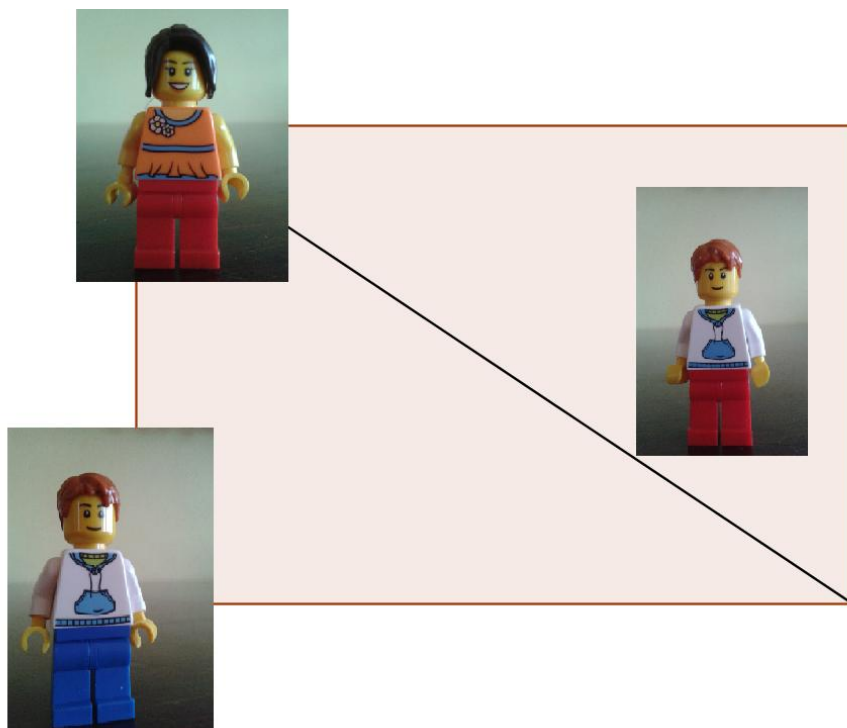
1 hodinu= 60 minut.

Jak dlouho bude čekat na chodce?

$$60 - 8,4 = 51,6 \text{ min}$$

Chodec dorazí o 51,6 minut později.

12) Princeznu Alexandru unesl drak Pucek. Už už ji chce pozřít, když tu se na protější straně pole, za kterým drak bydlí, objeví princové Jonáš a Kryštof. Rozběhnou se, jak nejrychleji mohou, k princezně. Jonáš běží nejkratší cestou přes rozorané pole. Pole je obdélníkové, běží tedy po úhlopříčce. Moc to nejde, trvá mu to 4 minuty. Kryštof běží mnohem rychleji po dobré cestě po obvodu rychlostí 4 m/s. Kdo bude u princezny dříve? Úhlopříčka pole měří 500 metrů, kratší strana 300 metrů.



Řešení:

$$500^2 = 300^2 + a^2$$

$$a^2 = 250000 - 90000$$

$$a^2 = 160000$$

$$a = 400 \text{ m}$$

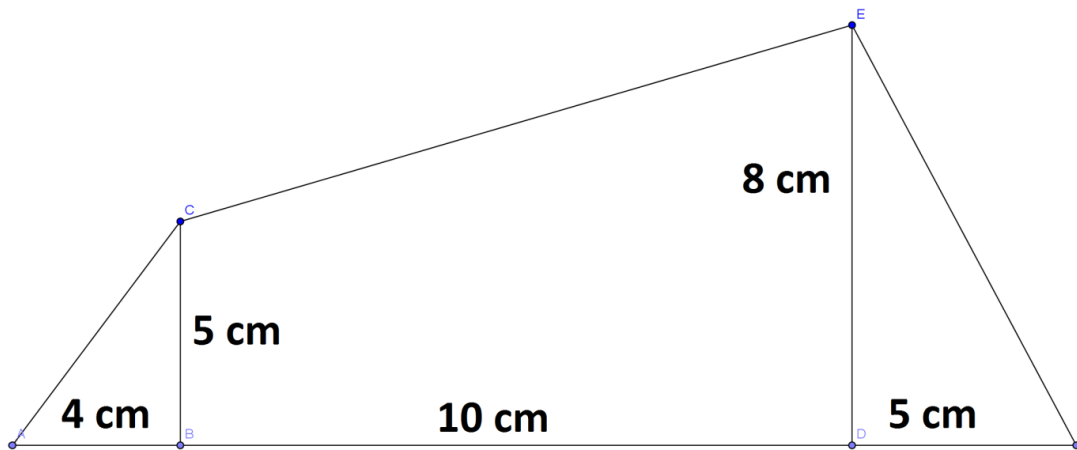
Nyní známe vzdálenosti obou princů. Princ Jonáš musí uběhnout vzdálenost 500 m, princ Kryštof musí zdolat dráhu dlouho 700 m.

Princ Kryštof běžel rychlostí 4 m/s. Jelikož musí uběhnout 700 m, tak tyto čísla podělíme $700/4 = 175\text{s} = 2 \text{ min } 55 \text{ s}$.

Princ Jonáš k princezně Alexandře doběhl za 4 minuty.

K Alexandře doběhne první princ Kryštof.

13) Na veletrhu je postaven model velkého párty stanu, jeho vrcholy si pojmenujeme A,B,C,D,E,F. Příčky BC a DE jsou kolmé v základně. Víme tyto vzdálenosti:
 AB = 4cm; BD = 10cm; DF = 5cm; BC = 5cm; DE = 8 cm. Spočítejte, jak dlouhá musí být plachta, aby pokryla celý model? Sečteme velikosti AC+CE+EF.



Řešení:

Když se podíváme na obrázek, tak je zjevné, že můžeme použít Pythagorovu větu, výsledky zaokrouhlíme na dvě desetinná místa. Nejprve si vezmeme pravoúhlý trojúhelník ABC a spočítáme přeponu b.

$$b^2 = 5^2 + 4^2$$

$$b^2 = 25 + 16$$

$$b = \sqrt{41}$$

$$b = 6,40\text{cm}$$

Nyní si vezmeme trojúhelník DEF a spočítáme velikost přepony d:

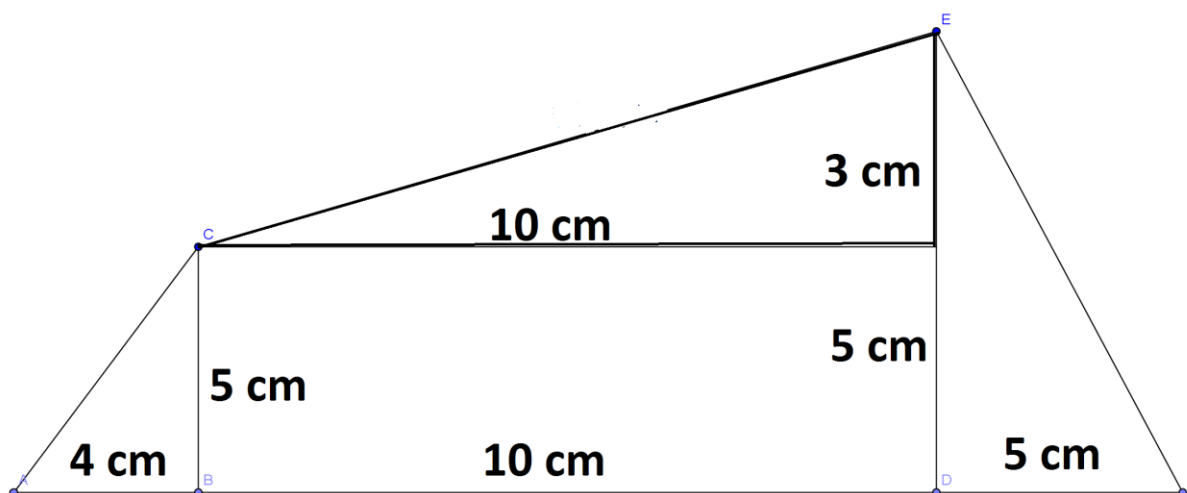
$$d^2 = 5^2 + 8^2$$

$$d^2 = 25 + 64$$

$$d = \sqrt{89}$$

$$d = 9,43\text{ cm}$$

Model stanu si můžeme ještě rozdělit tak, že nám vznikne obdélník a pravoúhlý trojúhelník, kterému budeme počítat přeponu.



Hledanou přeponu si nazveme například g .

$$g^2 = 10^2 + 3^2$$

$$g^2 = 100 + 9$$

$$g = \sqrt{109}$$

$$g = 10,44 \text{ cm}$$

Nyní sečteme všechny tři přepony:

$$6,40 + 9,43 + 10,44 = 26,27 \text{ cm}$$

Na pokrytí modelu stanu potřebujeme 26,27 po zaokrouhlení na celá čísla 27 cm plachty.

3.5 Rovnice

14) Řešte rovnici a proveďte zkoušku.

$$x - \left(0,75 - \frac{3}{8}\right) = 3 \cdot \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{12}\right)$$

$$x - \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}x\right) = 3 \cdot \left(\frac{3x - x}{12}\right)$$

$$x - \left(\frac{2 \cdot 3 - 3}{8}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3x - x}{12}\right)$$

$$x - \left(\frac{3}{8}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2x}{12}\right)$$

$$x - \left(\frac{3}{8}\right) = \left(\frac{2x}{4}\right) \quad / * 8$$

$$8x - 3 = 4x$$

$$8x - 4x = 3$$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$L: \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P: 3 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{12}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{12}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{48}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{16}\right) = 3 \cdot \frac{2}{16} = \frac{3}{8}$$

$$L = P$$

15) Jana zaplatila za oběd o 20 Kč méně než Anna a Anna zaplatila třikrát více než Hana.
Kolik zaplatila za oběd Hana, jestliže za oběd dala děvčata dohromady 400 Kč.

Řešení:

Hana x

Anna $3 \cdot x$

Jana $(3 \cdot x - 20)$

$$400 = x + 3 \cdot x + 3 \cdot x - 20$$

$$420 = 7x$$

$$x = 60$$

Za oběd Hana zaplatila 60 Kč, Anna 180 Kč a Jana 160 Kč, tudíž dohromady děvčata zaplatila 400 Kč.

16) Na účtu bylo za 2 kg brambor 21,60 Kč a za půl kila cibule 5,70 Kč.

Co je dražší, 1 kg brambor, nebo 1 kg cibule, a o kolik?

Řešení:

2kg brambor 21,60 Kč

0,5 kg cibule 5,70 Kč

1kg brambor..... x

1kg cibule y

$$x = \frac{21,60}{2}$$

$$x = 10,80 \text{ Kč}$$

$$y = 5,70 \cdot 2$$

$$y = 11,40 \text{ Kč}$$

$$\text{Rozdíl cen: } y - x \rightarrow 11,40 - 10,80 = 0,60$$

Brambory jsou levnější než cibule o 0,60 Kč.

3.6 Společný násobek/dělitel

17) Dvě auta odvázejí z téhož pole řepku olejků. Obě jezdí stejnou průměrnou rychlostí. Auto s mechanickým vyklápěním potřebuje na cestu do cukrovaru a zpět 18 minut. Auto, které nemá mechanické vyklápění, potřebuje na tutéž cestu o 6 minut déle. Obě auta vyjedou ráno současně. Kolikrát se setkají na poli za osmi hodinovou směnu?

Řešení

18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360	
378	396	414	432	450	468	486														
24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	360	384	408	432	456	480	

V tabulce jsme si znázornili, že oba automobily vyjíždějí v čase současně. První automobil jezdí v intervalu 18 minut a druhý automobil v intervalu 24 minut. Žlutou barvou jsou zvýrazněny časy, kdy se automobily setkají, z čehož vyplývá, že se potkají celkem 6x na poli.

Matematicky se tento problém dá spočítat následovně:

Najdeme společný násobek čísel 18 a 24 = $N_{(18;24)}$

Nejprve si obě čísla rozložíme na prvočísla:

$$18 = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$24 = 3 \cdot 3 \cdot 4$$

$$N_{(18;24)} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4$$

$$N_{(18;24)} = 72$$

Obě auta jezdí celou směnu = 8 hodin = 480 minut, proto následně vydělíme:

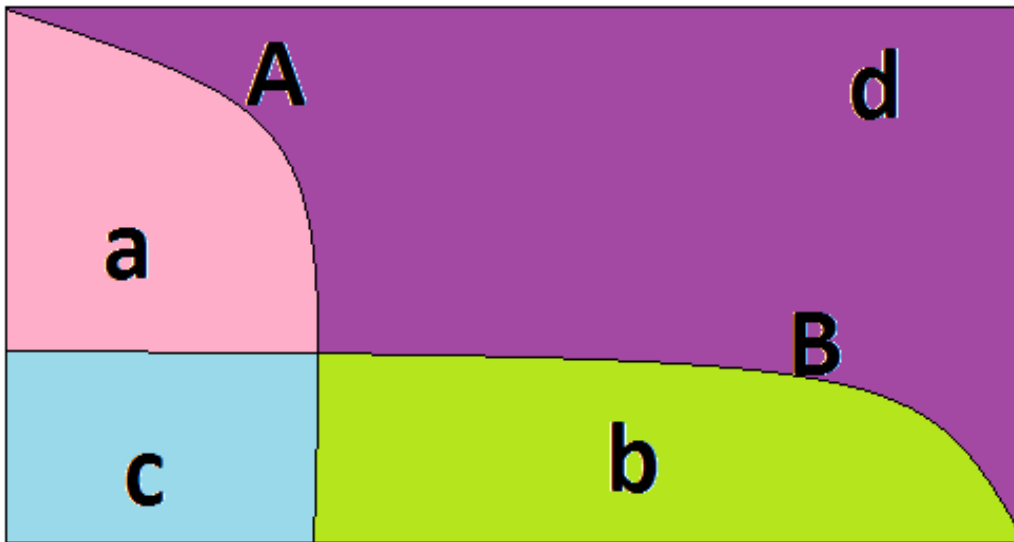
$$480/72 = 6,67$$

Z tohoto výsledku můžeme usoudit, že se obě auta potkala na poli šestkrát.

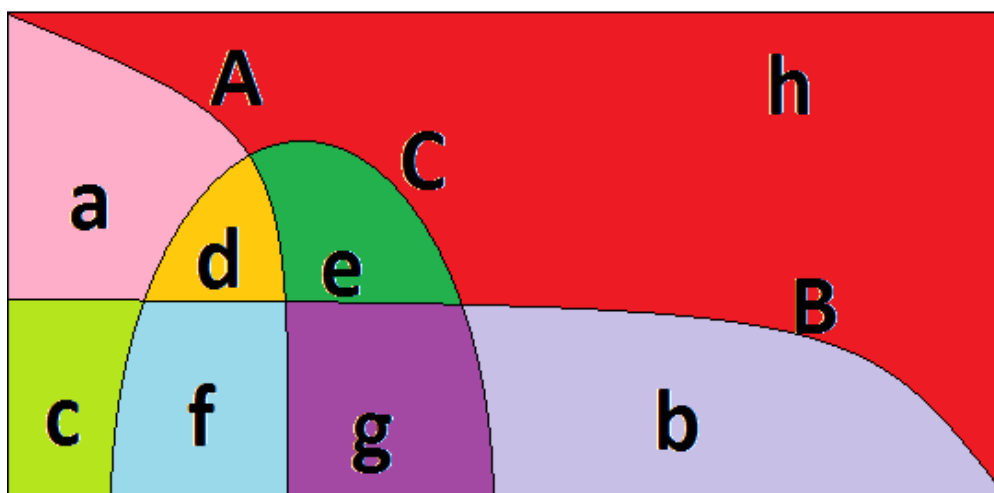
3.7 Vennovy diagramy

V této kapitole budeme řešit úlohy pomocí obrázků. Ty jsou následující podle toho, z kolika množin se skládají.

- Pro dvě množiny („A“ a „B“)



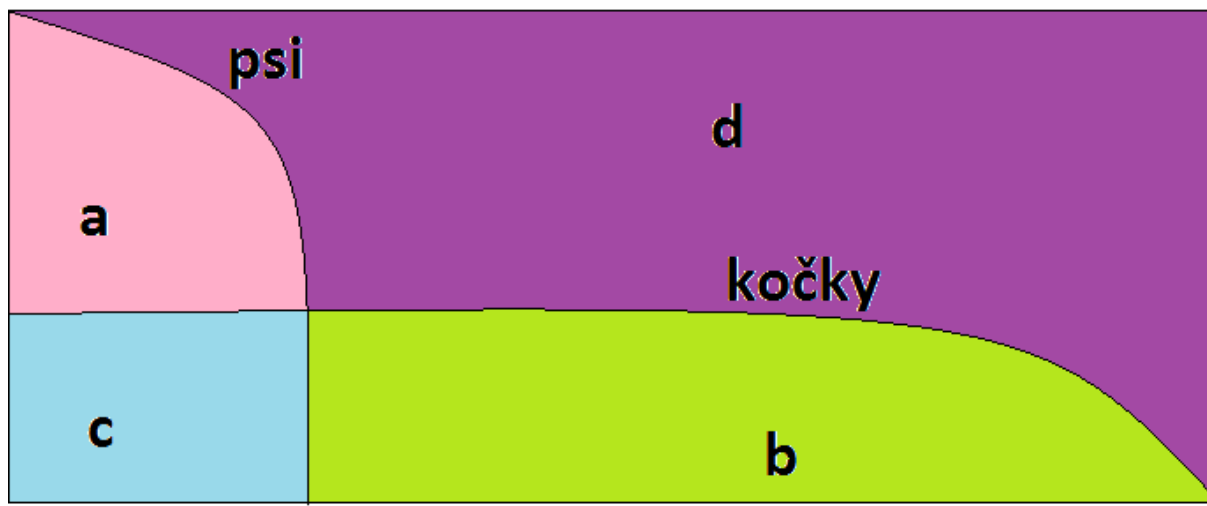
- Pro tři množiny (množina A, B a C)



Příklady s dvěma množinami

18) Ve třídě je 30 žáků, z toho 13 žáků, kteří mají psa, 15 žáků, kteří mají kočku a 23 žáků, kteří mají alespoň jedno z těchto zvířat. Kolik žáků má psa i kočku? Žádný ze žáků nemá více zvířat od jednoho druhu.

Řešení:



Označíme si počet žáků, kteří mají jen psy písmenem „a“, kteří mají jen kočky písmenem „b“, ti, kteří mají oboje písmenem „c“ a žáky, kteří nemají ani jedno písmenem „d“.

Vytvoříme rovnice.

$$a + b + c + d = 30$$

$$a + b + c = 23$$

$$a + c = 13$$

$$b + c = 15$$

Druhou rovnicí dosadíme do první.

$$(a + b + c) + d = 30$$

$$23 + d = 30$$

$$d = 7$$

Z posledních dvou rovnic si vyjádříme a a b .

$$a = 13 - c$$

$$b = 15 - c$$

A dosadíme do druhé rovnice.

$$(13 - c) + (15 - c) + c = 23$$

$$13 - c + 15 - c + c = 23$$

$$28 - c = 23$$

$$-c = -5$$

$$c = 5$$

Neznámou c dosadíme ještě do předposledních dvou rovnic, abychom vypočetli, kolik žáků má jen psa a kolik jen kočku.

$$a + c = 13$$

$$a + 5 = 13$$

$$a = 8$$

$$b + c = 15$$

$$b + 5 = 15$$

$$b = 10$$

Počet žáků, kteří mají psa i kočku je 5 a počet žáků, kteří nemají ani jedno z těchto zvířat je 7.
Pouze psa má 8 žáků a pouze kočku 10.

19) Do prvních ročníků univerzity chodí 117 studentů, z toho jich 94 chodí jíst do menzy (buď na obědy, nebo na večeře nebo na obojí). Na nejvýše jedno jídlo chodí 59 studentů. Na obědy chodí o 24 studentů více než na večeři. Kolik studentů chodí na obědy, večeře, obojí, nebo nenačítají menzu vůbec?

Řešení:

Znázorníme si to pomocí neznámých a diagramu.



Sestavíme si rovnice, které plynou ze zadání:

$$a + b + c + d = 117$$

$$a + b + c = 94$$

$$b + c + d = 59$$

$$b + a = a + c + 24$$

Z prvních dvou rovnic si můžeme vypočítat, kolik je d , víme, že $a + b + c = 94$, a to dosadíme do první rovnice.

$$94 + d = 117$$

$$d = 23$$

Nyní použijeme d a dosadíme ho do třetí rovnice, tím si vyjádříme, kolik je $b + c$, to následně vložíme do druhé rovnice a dopočteme hodnotu a .

$$b + c + 23 = 59$$

$$b + c = 36$$

Dosadíme do druhé rovnice:

$$a + 36 = 94$$

$$a = 58$$

Ze čtvrté rovnice si vyjádříme b :

$$b + 58 = 58 + c + 24$$

$$b = c + 24$$

Vyjádřené b dosadíme do třetí rovnice:

$$c + 24 + c + 23 = 59$$

$$2c + 47 = 59$$

$$2c = 12$$

$$c = 6$$

Nyní dosadíme c do vyjádřeného b s dopočteme.

$$b = 6 + 24$$

$$b = 30$$

Shrnutí:

$$a = 58$$

$$b = 30$$

$$c = 6$$

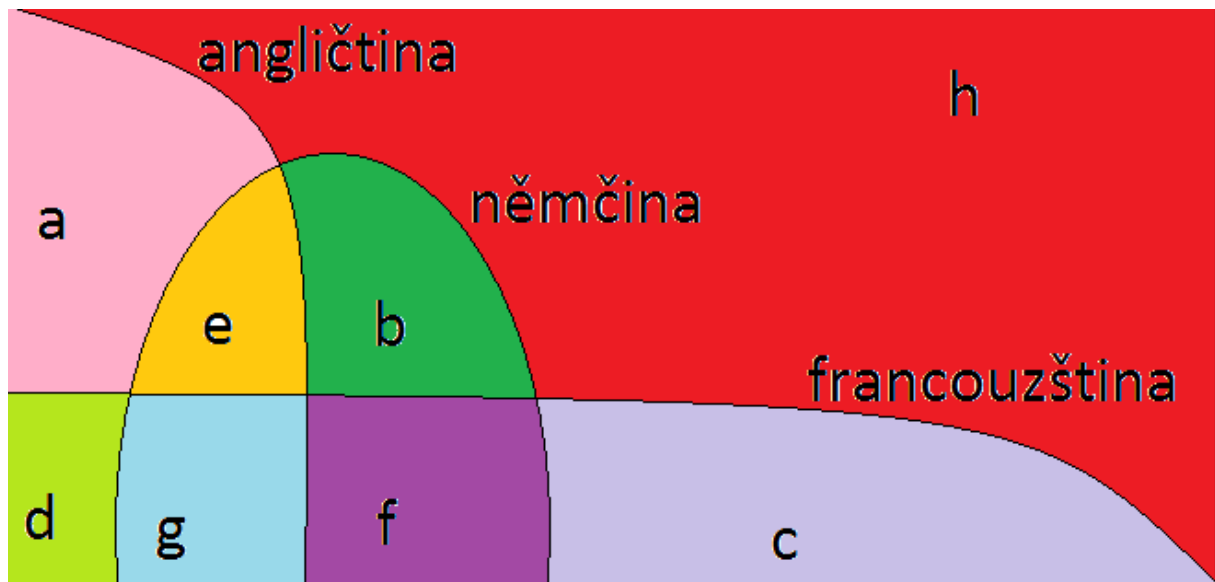
$$d = 23$$

Do menzy pouze na obědy chodí 30 studentů, pouze na večere 6 studentů, na obědy i večere chodí 58 studentů a menzu nenavštěvuje 23 studentů.

20) V jedné malé firmě pracuje 77 zaměstnanců. Anglický jazyk ovládá 50 z nich, německý jazyk ovládá 32 z nich a francouzský jazyk ovládá 31. Anglicky i německy hovoří 19 lidí, anglicky i francouzsky 20 lidí, německy i francouzsky 15 lidí a všemi třemi jazyky hovoří 9 lidí. Kolik zaměstnanců hovoří pouze jedním jazykem a kolik zaměstnanců nehovoří žádným jazykem?

Řešení:

Vytvoříme si diagram:



Sestavíme si rovnice ze zadání:

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 77$$

$$a + e + d + g = 50$$

$$b + e + f + g = 32$$

$$c + d + f + g = 31$$

$$e + g = 19$$

$$d + g = 20$$

$$f + g = 15$$

$$g = 9$$

Dosadíme si hodnotu g do předposledních rovnic:

$$e + g = 19$$

$$e + 9 = 19$$

$$e = 10$$

$$d + g = 20$$

$$d + 9 = 20$$

$$d = 11$$

$$f + g = 15$$

$$f + 9 = 15$$

$$f = 6$$

Získané neznámé dosadíme do další rovnice:

$$d + g + f + c = 31$$

$$11 + 9 + 6 + c = 31$$

$$26 + c = 31$$

$$c = 5$$

$$b + f + g + e = 32$$

$$b + 6 + 9 + 10 = 32$$

$$b + 25 = 32$$

$$b = 7$$

$$a + d + e + g = 50$$

$$a + 11 + 10 + 9 = 50$$

$$a + 30 = 50$$

$$a = 20$$

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 77$$

$$20 + 7 + 5 + 11 + 10 + 6 + 9 + h = 77$$

$$68 + h = 77$$

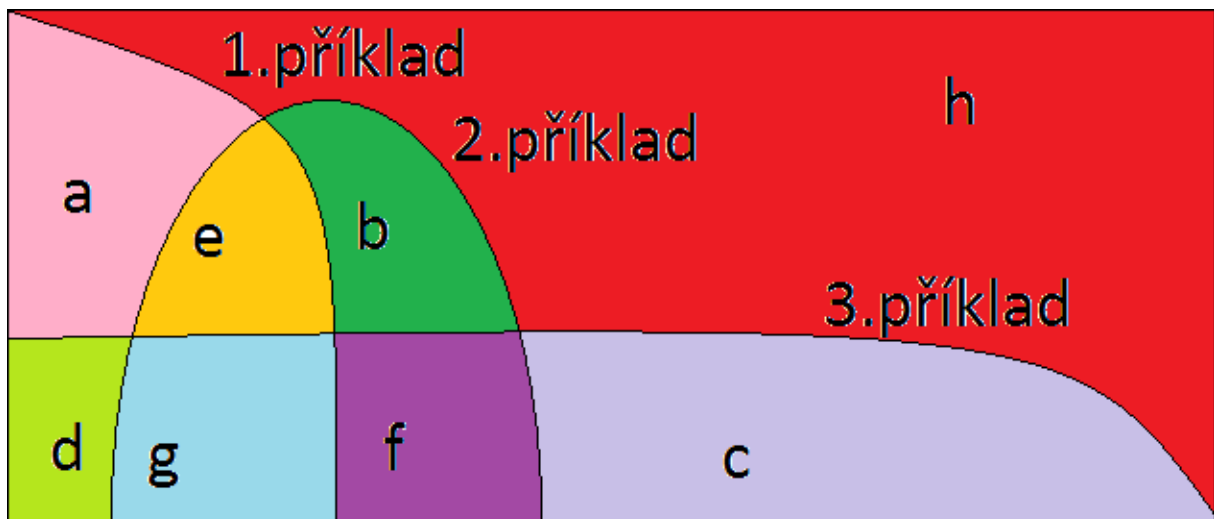
$$h = 9$$

V této firmě 9 lidí nemluví žádným jazykem. Pouze anglicky mluví 20 lidí, pouze německy 7 lidí, pouze francouzsky 5 lidí.

21) V osmých třídách dostali žáci test z matematiky, který obsahoval 3 příklady. První příklad vypočetlo 19 žáků, druhý 15 žáků a třetí 18 žáků. První a druhý příklad vypočetlo 7 žáků, druhý a třetí 8 žáků a první a třetí 12 žáků. Všechny tři příklady vypočetli pouze 4. Kolik žáků nevypočetlo žádný příklad a kolik pouze jeden?

Řešení:

Vytvoříme si diagram.



Sestavíme si rovnice ze zadání:

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 32$$

$$a + d + e + g = 19$$

$$b + e + f + g = 15$$

$$c + d + f + g = 18$$

$$e + g = 7$$

$$d + g = 12$$

$$f + g = 8$$

$$g = 4$$

Pomocí hodnoty $g = 4$ dopočteme neznámé d, e, f :

$$e + g = 7$$

$$e + 4 = 7$$

$$e = 3$$

$$d + g = 12$$

$$d + 4 = 12$$

$$d = 8$$

$$f + g = 8$$

$$f + 4 = 8$$

$$f = 4$$

Vyšlé neznámé dosadíme do čtvrté rovnice a dopočítáme hodnotu c .

$$d + g + f + c = 18$$

$$8 + 4 + 4 + c = 18$$

$$16 + c = 18$$

$$c = 2$$

Další neznámé dosadíme do třetí rovnice a dopočítáme hodnotu b .

$$b + e + f + g = 15$$

$$b + 3 + 4 + 4 = 15$$

$$b + 11 = 15$$

$$b = 4$$

Pro výpočet neznámé a dopočítáme z druhé rovnice.

$$a + d + e + g = 19$$

$$a + 8 + 3 + 4 = 19$$

$$a + 15 = 19$$

$$a = 4$$

A nyní spočítáme, kolik žáků nevypočítalo ani jeden příklad z první rovnice:

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 32$$

$$4 + 4 + 2 + 8 + 3 + 4 + 4 + h = 32$$

$$29 + h = 32$$

$$h = 3$$

Žádný příklad nevypočetli 3 žáci, pouze první vypočetli 4 žáci, pouze druhý také 4 žáci a pouze třetí 2 žáci.

3.8 Výrazy s proměnnou

Úvodní úloha:

Zapiš jako výraz.

- a) Součet proměnných k a l

$$k + l$$

- b) Rozdíl proměnných k a l

$$k - l$$

- c) Součin proměnných k a l

$$k \cdot l$$

- d) Podíl proměnných k a l

$$\frac{k}{l}$$

- e) Čtyřnásobek proměnné m zvětšený o 6

$$4 \cdot m + 6$$

- f) Pětinu proměnné m zmenšenou o 3

$$\frac{1}{5} \cdot m - 3$$

- g) Druhá mocnina součtu m a n

$$(m + n)^2$$

- h) Polovina součtu $2m$ a $4n$

$$\frac{(2 \cdot m + 4 \cdot n)}{2}$$

- i) Čtyřnásobek rozdílu $2p$ a $2q$

$$4 \cdot (2 \cdot p - 2 \cdot q)$$

- j) Čtvrtina x zvětšena o trojnásobek y

$$\frac{1}{4} \cdot x + 3 \cdot y$$

- k) Rozdíl druhých odmocnin $4a$ a $16b$

$$\sqrt{(4 \cdot a - 16 \cdot b)}$$

- l) Dvě osminy ze součtu $3a$ a $6b$

$$\frac{2}{8} \cdot (3 \cdot a + 6 \cdot b)$$

22) Od součtu čísel 270 a 321 odečti součin čísel 13 a 12.

$$270 + 321 = 591$$

$$13 \cdot 12 = 156$$

$$591 - 156 = 435$$

23) K součinu čísel 12 a 6 přičtěte podíl čísel 183 a 61.

$$12 \cdot 6 = 72$$

$$\frac{183}{61} = 3$$

$$72 + 3 = 75$$

24) Rozdíl čísel 159 a 75 vynásobte součtem 15 a 5.

$$159 - 75 = 84$$

$$15 + 5 = 20$$

$$84 \cdot 20 = 1680$$

25) K podílu čísel 105 a 35 přičtěte rozdíl čísel 78 a 49.

$$\frac{105}{35} = 3$$

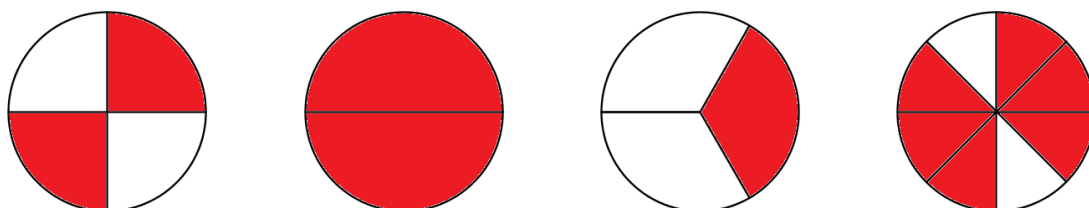
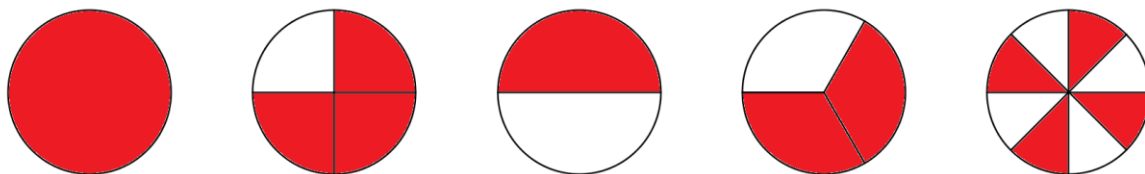
$$78 - 49 = 29$$

$$3 + 29 = 32$$

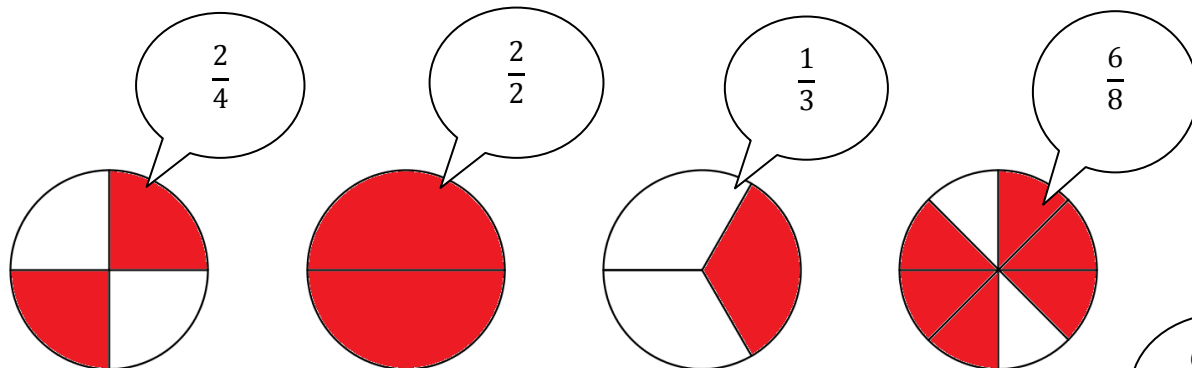
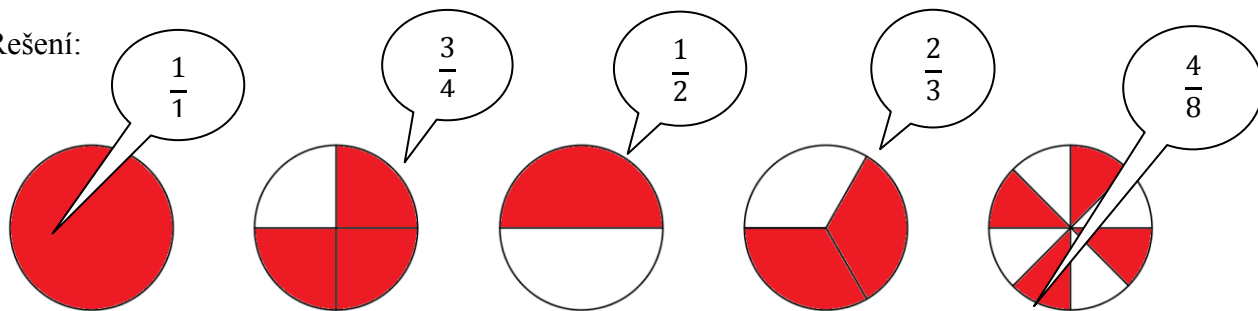
3.9 Zlomky

Úvodní úloha:

Zapište pomocí zlomků červeně vyplněnou část kruhu.



Řešení:



26) Upravte zlomek.

$$\frac{\left(\frac{9}{2} - \left(\frac{5}{6} - 1\frac{2}{4}\right)\right)}{\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3} + \frac{29}{30}\right)} = \frac{\frac{9}{2} - \frac{5}{6} - \frac{6}{4}}{\frac{18-20+29}{30}} = \frac{\left(\frac{54-10-18}{12}\right)}{\frac{27}{30}} = -\frac{\frac{26}{12}}{\frac{27}{30}} = \frac{26}{12} \cdot \frac{30}{27} = \frac{780}{324} = \frac{65}{27}$$

27) V sadu byla $\frac{1}{3}$ třešní, $\frac{2}{5}$ jabloní, $\frac{2}{10}$ švestek a 15 hrušní. Kolik bylo celkem stromů v sadu?

Řešení:

Víme, že celý sad nám tvoří jeden celek, proto sečteme zlomky, které máme a vypočteme si, jaký zlomek nám zůstává na hrušně.

$$1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{10}\right) = 1 - \left(\frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3}{30}\right) = 1 - \left(\frac{10 + 12 + 6}{30}\right) = 1 - \frac{28}{30} = \frac{2}{30}$$

Nyní víme, že na 15 hrušní nám zbyl podíl $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$, a tak aby vznikl celek, tak to vynásobíme 15, aby vznikl celek roven 1.

$$15 \cdot \frac{1}{15} = 1$$

Takže v sadu je 225 stromů.

Můžeme si spočítat podíl ostatních stromů:

Třešně $\frac{1}{3} \cdot 225 = 75$

Jabloně $\frac{2}{5} \cdot 225 = 90$

Švestky $\frac{2}{10} \cdot 225 = 45$

Hrušně 15

Pro kontrolu si můžeme sečíst, jestli nám opravdu součet dává 225.

$$75 + 90 + 45 + 15 = 225$$

4 Geometrie

4.1 Obvody a obsahy

Úvodní úloha:

Místo teček doplňte slova z nabídky.

- Jsem čtverec, všechny strany mám dlouhé, díky tomu svůj obvod spočítám všech stran. Tudíž vzorec vypadá následovně: Díky stejně dlouhým stranám mám i jednoduchý vzorec na obsah:
- Jsem obdélník, mám čtyři strany, dvě jsou stejně dlouhé a mezi všemi je pravý úhel. Obvod spočítám pomocí sečtení všech stran a vzoreček vypadá: A obsah spočítám pomocí sousedních stran:
- Jsem trojúhelník, mám pouze strany. Kdybych se spojil dvakrát, tak vytvořím obdélník nebo rovnoběžník. Obvod spočítám sečtením všech tří stran. Při výpočtu obsahu využiji vlastnosti, že jsem půlka obdélníku nebo rovnoběžníku:
- Jsem kružnice, jsem... .. a jako jediná mám ve vzorečkách konstantu Obvod mohu spočítat pomocí poloměru i průměru. Když k němu použiju poloměr, vypadá následovně: Pomocí průměru: I ve výpočtu obsahu použiju konstantu:
- Jsem lichoběžník, takže vypadám jako useknutý Jelikož mám čtyři strany, tak obvod spočítám takto: A obsah spočítáme pomocí tohoto vzorečku:
- Jsem rovnoběžník, na rozdíl od obdélníku mé úhly mezi sousedními stranami nesvírají úhel. Jelikož mám strany, obvod spočítám A obsah spočtu pomocí výšky následovně:

Nabídka slov:

$$o = 2 \cdot (a + b), \quad o = 4 \cdot a, \quad o = a + b + c,$$

$$o = a + b + c + d, \quad o = \pi \cdot d,$$

$$o = a + b + c + d, \quad o = 2 \cdot \pi \cdot r$$

stejně, protějšší, kulatá

sečtením, násobením, tři,

π , trojúhelník, pravý, čtyři

$$S = a \cdot b, \quad S = \pi \cdot r^2, \quad S = \frac{c \cdot v_c}{2},$$

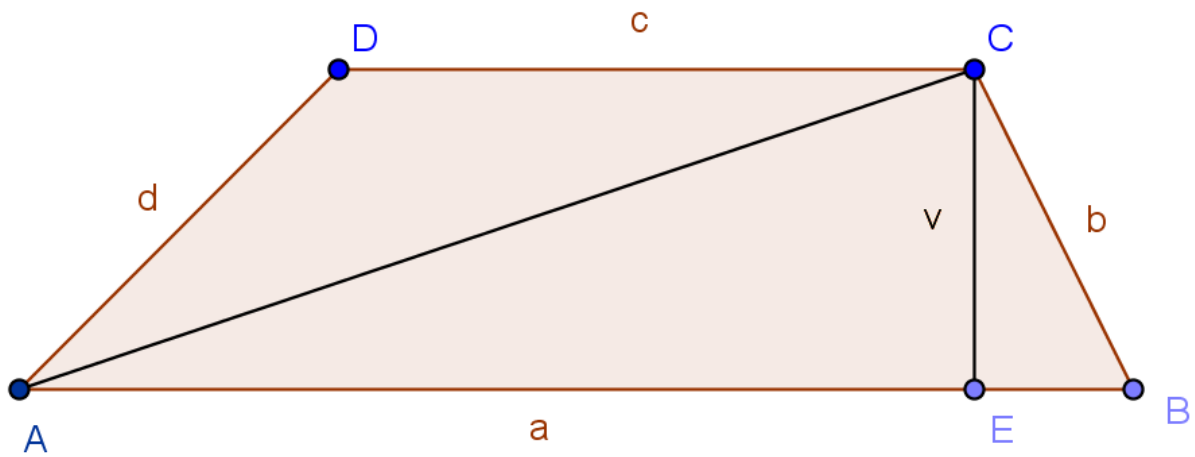
$$S = a \cdot v, \quad S = \frac{a + c}{2} \cdot v,$$

$$S = a \cdot a,$$

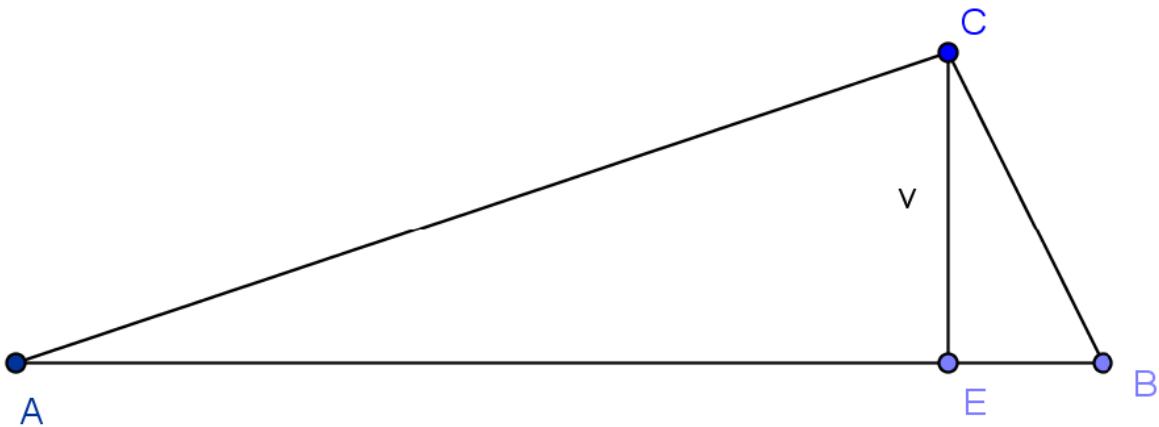
Řešení:

- Jsem čtverec, všechny strany mám **stejně** dlouhé, díky tomu svůj obvod spočítám **sečtením** všech stran. Tudiž vzorec vypadá následovně: $o = 4 \cdot a$. Díky stejně dlouhým stranám mám i jednoduchý vzorec na obsah: $S = a \cdot a$.
- Jsem obdélník, mám čtyři strany, **protější** dvě jsou stejně dlouhé a mezi všemi je pravý úhel. Obvod spočítám pomocí sečtení všech stran a vzoreček vypadá: $o = 2(a + b)$. A obsah spočítám pomocí **násobení** sousedních stran: $S = a \cdot b$.
- Jsem trojúhelník, mám pouze **tři** stany. Kdybych se spojil dvakrát, tak vytvořím obdélník nebo rovnoběžník. Obvod spočítám sečtením všech tří stran. $o = a + b + c$. Při výpočtu obsahu využiji vlastnosti, že jsem půlka obdélníku nebo rovnoběžníku: $S = \frac{c \cdot v_c}{2}$.
- Jsem kružnice, jsem **kulatá** a jako jediná mám ve vzorečkách konstantu π . Obvod mohu spočítat pomocí poloměru i průměru. Když k němu použiju poloměr, vypadá následovně: $o = 2 \cdot \pi \cdot r$. Pomocí průměru: $o = \pi \cdot d$. I ve výpočtu obsahu použiju konstantu: $S = \pi \cdot r^2$.
- Jsem lichoběžník, takže vypadám jako useknutý **trojúhelník**. Jelikož mám čtyři strany, tak obvod spočítám takto: $o = a + b + c + d$. A obsah spočítáme pomocí tohoto vzorečku: $S = \frac{a+c}{2} \cdot v$.
- Jsem rovnoběžník, na rozdíl od obdélníku mé úhly mezi sousedními stranami nesvírají **pravý** úhel. Jelikož mám **čtyři** strany, obvod spočítám $o = a + b + c + d$. A obsah spočtu pomocí výšky následovně: $S = a \cdot v$.

Zkuste odvodit vzoreček na výpočet obsahu lichoběžníku ABCD:

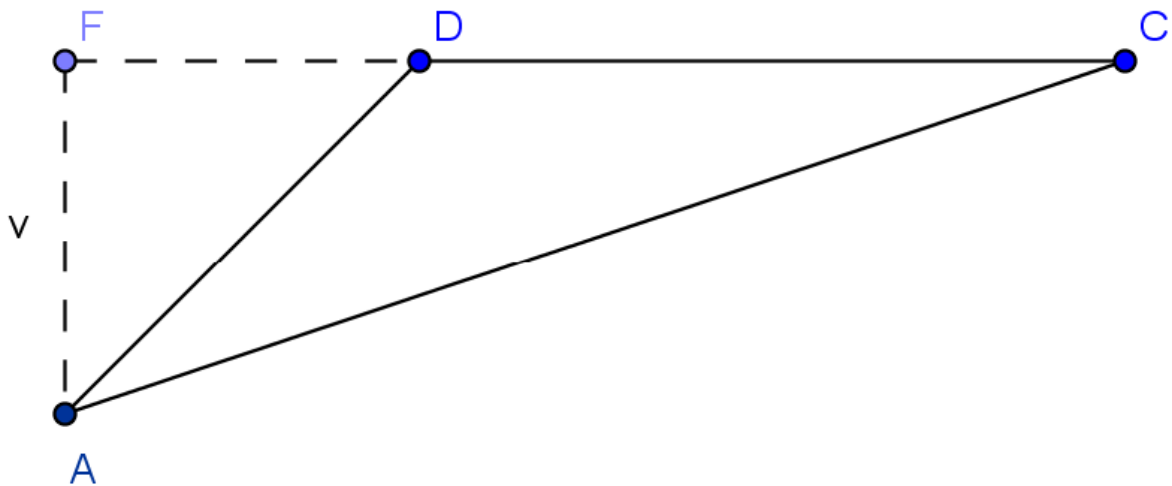


Rozdělíme si lichoběžník na dva trojúhelníky: ABC; ACD.



Zapište vzoreček na výpočet obsahu trojúhelníku ABC:

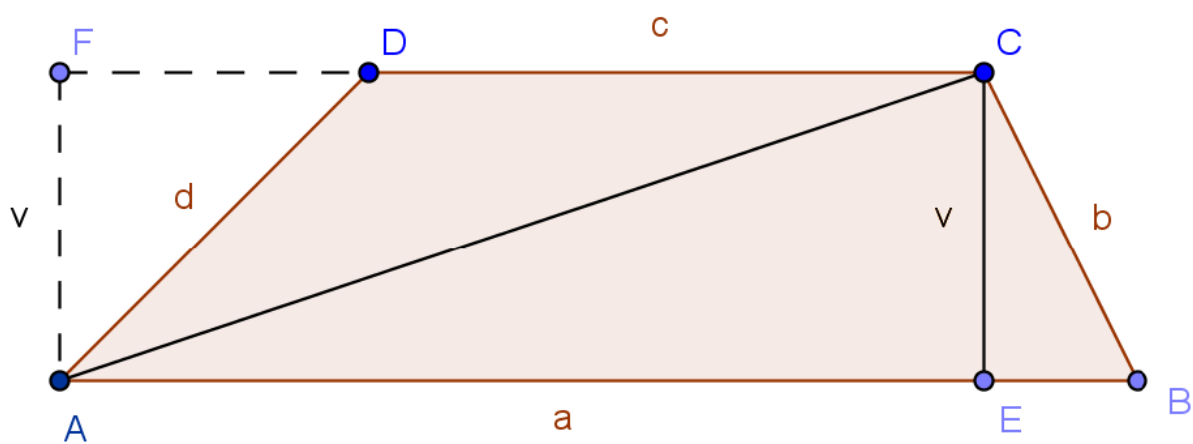
$$S = \dots$$



Zapište vzoreček na výpočet obsahu trojúhelníku ACD:

$$S = \dots$$

Spojením trojúhelníků vznikne lichoběžník ABCD.



Sjednotíme výše uvedené trojúhelníky:

$$S = S_{ABC} + S_{ACD}$$

Dosaďte:

$$S =$$

Upravte:

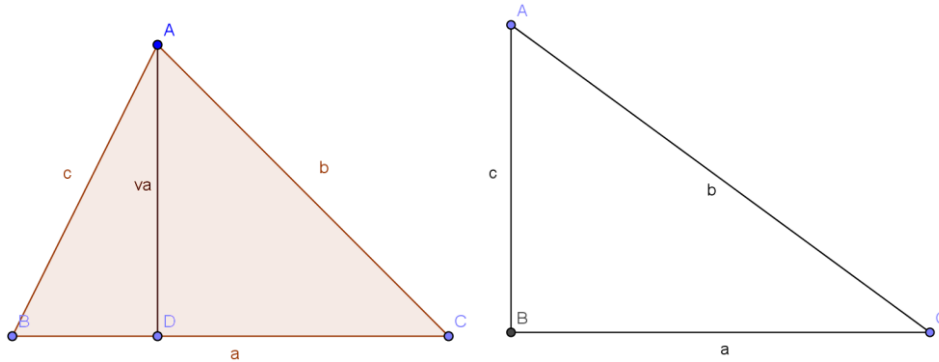
$$S =$$

Řešení:

$$S = \frac{a + c}{2} \cdot v$$

Souhrn vzorečků

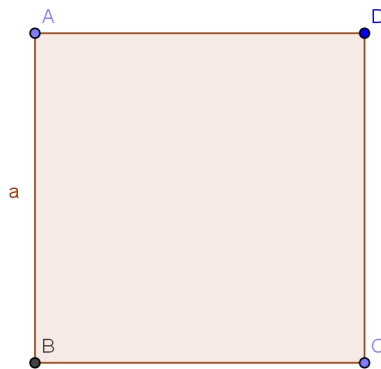
- Trojúhelník



$$o = a + b + c$$

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

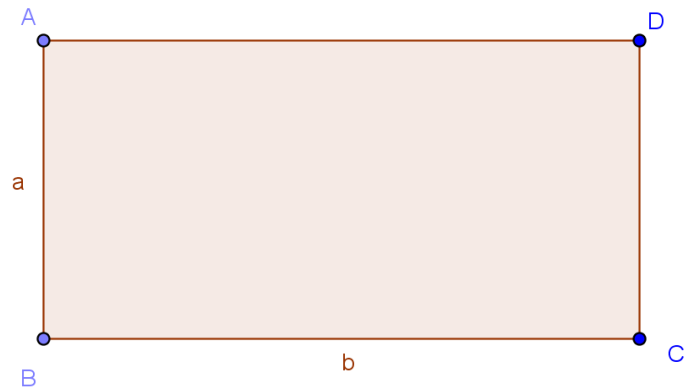
- Čtverec



$$o = 4 \cdot a$$

$$S = a \cdot a$$

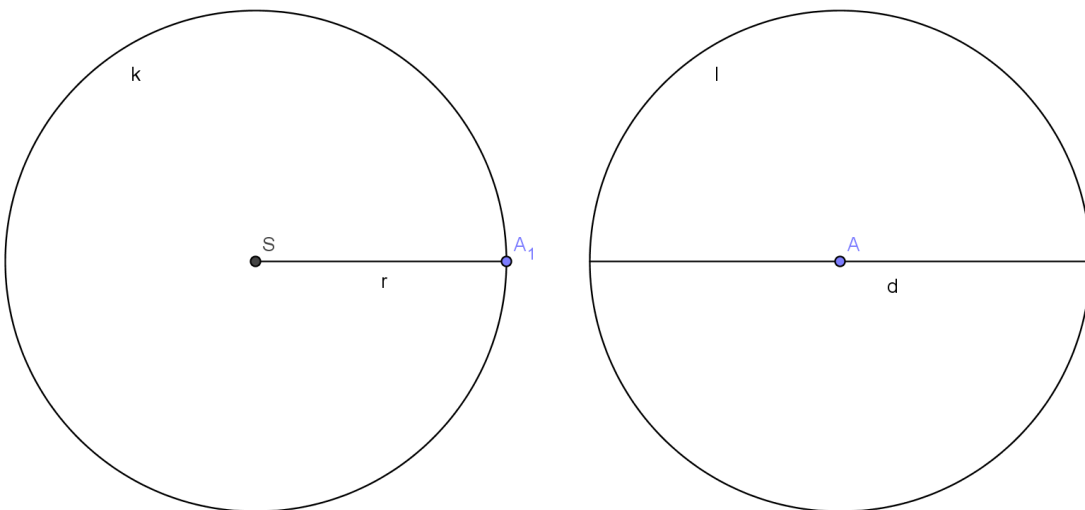
- Obdélník



$$o = 2 \cdot (a + b)$$

$$S = a \cdot b$$

- Kružnice

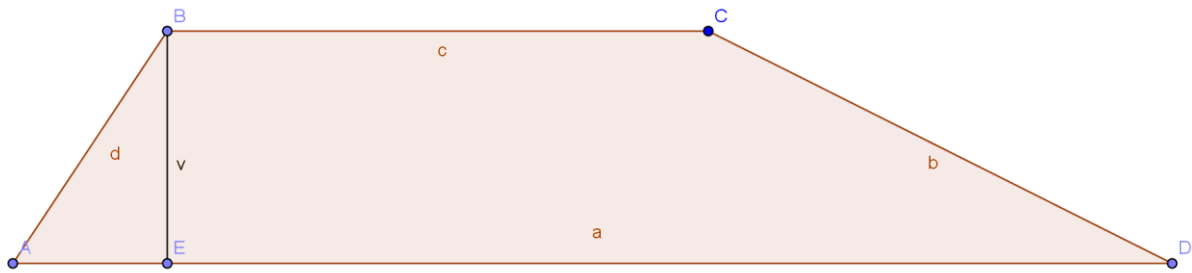


$$o = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$o = \pi \cdot d$$

$$S = \pi \cdot r^2$$

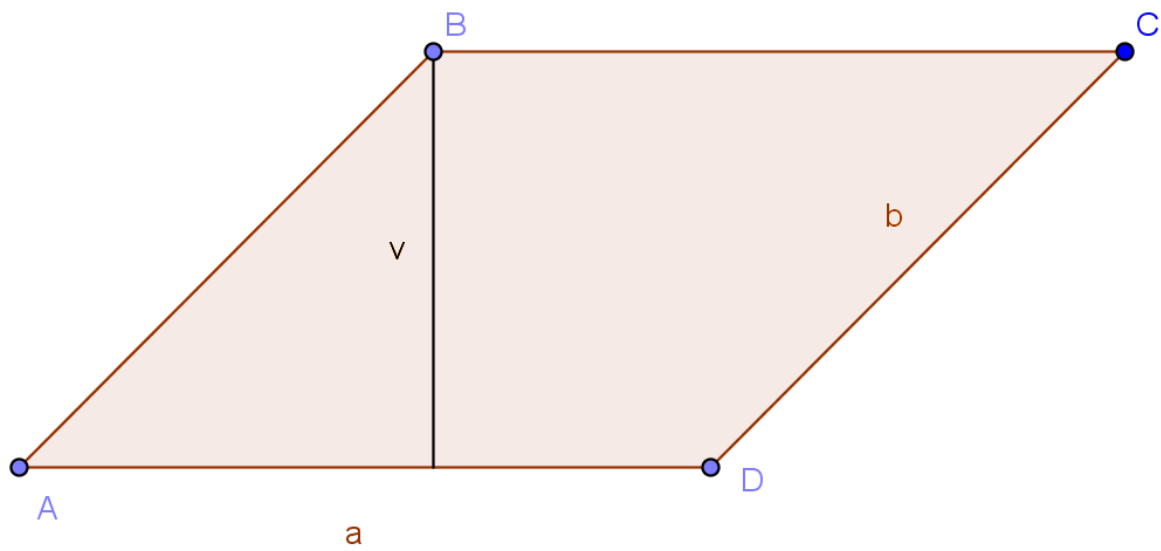
- Lichoběžník



$$o = a + b + c + d$$

$$S = \frac{a + c}{2} \cdot v$$

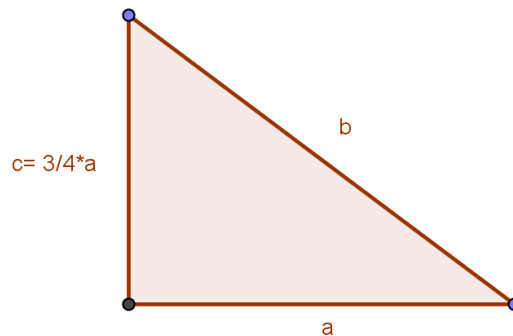
- Rovnoběžník



$$o = 2 \cdot (a + b)$$

$$S = a \cdot v$$

28) Určete obvod pravoúhlého trojúhelníku, jestliže délka jedné odvěsny je 75 % délky druhé odvěsny a jeho obsah je 6 cm^2 .



Řešení:

Nejprve si vypočteme, jak dlouhá bude strana a . Jelikož se jedná o pravoúhlý trojúhelník, použijeme vzoreček na obsah, kam vložíme velikosti odvěsen.

$$S = \frac{a \cdot c}{2}$$

$$6 = \frac{a \cdot \frac{3}{4} \cdot a}{2} \quad / \cdot 2$$

$$12 = \frac{3}{4} \cdot a^2 \quad / \cdot 4$$

$$48 = 3 \cdot a^2 \quad / : 3$$

$$16 = a^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$a = 4 \text{ cm}$$

Strana b tvoří $\frac{3}{4} \cdot a$

$$b = \frac{3}{4} \cdot 4$$

$$b = 3 \text{ cm}$$

Obvod zjistíme sečtením všech tří stran. Velikost přepony spočítáme pomocí Pythagorovy věty, která má vzoreček v našem případě $b^2 = a^2 + c^2$

$$b^2 = 4^2 + 3^2$$

$$b^2 = 16 + 9$$

$$b^2 = 25$$

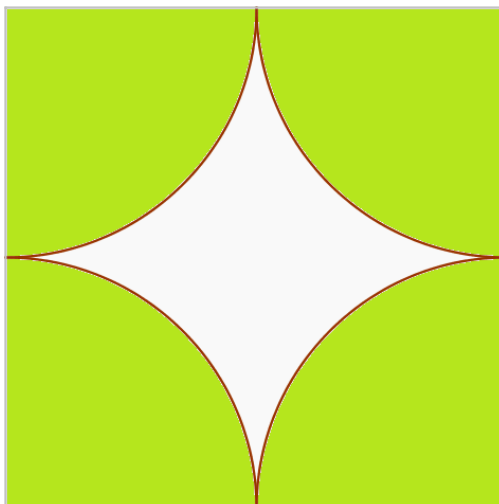
$$b = \sqrt{25}$$

$$b = 5 \text{ cm}$$

$$o = 3 + 4 + 5$$

$$o = 12 \text{ cm}$$

29) Na obrázku je ve čtverci se stranou $a = 4 \text{ cm}$ narýsován bílý obrazec, jehož hranici tvoří čtvrtkružnice. Urči obvod a obsah bílého útvaru.



Řešení:

Když se na útvar podíváme a trochu pootočíme, zjistíme, že zelená plocha nám tvoří kružnici. Proto obsah bílé plochy můžeme spočítat rozdílem plochy čtverce a plochy kružnice.

$$S_{\text{čtverce}} = a^2$$

$$S_{\text{čtverce}} = 4^2$$

$$S_{\text{čtverce}} = 16 \text{ cm}^2$$

Jelikož $a = 4 \text{ cm}$, tak víme, že poloměr kružnice bude $\frac{1}{2}a = 2 \text{ cm}$.

$$S_{\text{kružnice}} = \pi \cdot r^2$$

$$S_{\text{kružnice}} = 3,14 \cdot 2^2$$

$$S_{\text{kružnice}} = 3,14 \cdot 4$$

$$S_{\text{kružnice}} = 12,56 \text{ cm}^2$$

Rozdílem těchto dvou obsahů zjistíme obsah bílé plochy.

$$S_{\text{bílá}} = 16 - 12,56$$

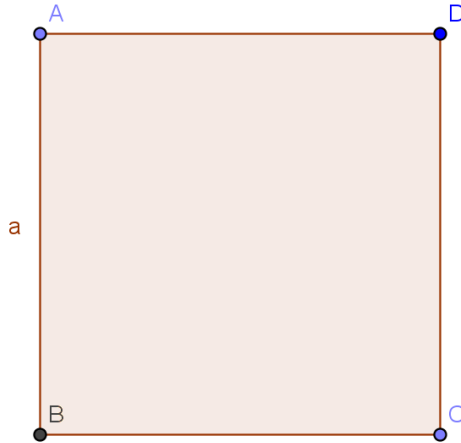
$$S_{\text{bílá}} = 3,44 \text{ cm}^2$$

Obsah bílé plochy je roven $3,44 \text{ cm}^2$.

30) Čtverec ABCD má obsah 144 cm^2 . Jaký obsah má obdélník, který má jednu stranu o délce 4cm a obvod stejný jako čtverec?

Řešení:

Nejprve si musíme spočítat, jak dlouhá je strana a .



$$S = a^2$$

$$a^2 = 144$$

$$a = \sqrt{144}$$

$$a = 12 \text{ cm}$$

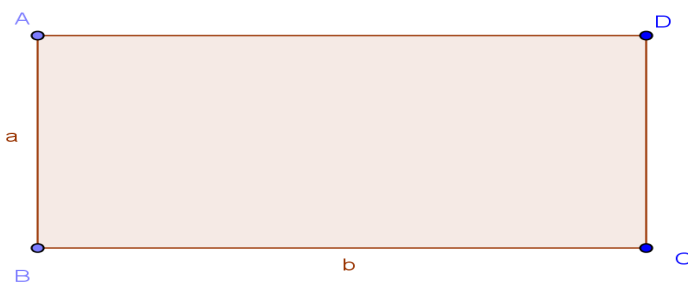
Obsah čtverce:

$$o = 4 \cdot a$$

$$o = 4 \cdot 12$$

$$o = 48 \text{ cm}$$

Nyní známe jednu stranu obdélníku ABCD a obvod, který musí obdélník mít.



$$o = 2 \cdot (a + b)$$

$$o = 2 \cdot (4 + b)$$

$$48 = 8 + 2 \cdot b$$

$$40 = 2 \cdot b$$

$$b = 20 \text{ cm}$$

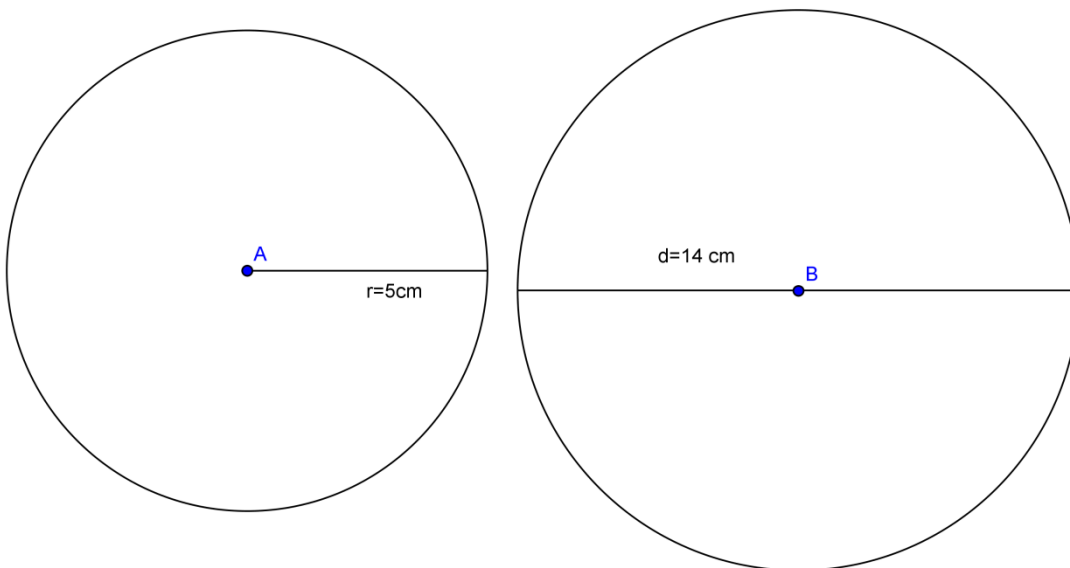
Strana $a = 4 \text{ cm}$ a strana $b = 20 \text{ cm}$. Nyní můžeme spočítat obsah tohoto obdélníku ABCD.

$$S = a \cdot b$$

$$S = 4 \cdot 20$$

$$S = 80 \text{ cm}^2$$

31) Jaký je součet obvodů kružnic?



Řešení:

Nejprve si spočítám obvod kružnice se středem v bodě A (zadáno poloměrem r).

$$o = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$o = 2 \cdot 3,14 \cdot 5$$

$$o = 31,4 \text{ cm}$$

Obvod kružnice se středem v bodě B (zadáno průměrem).

$$o = \pi \cdot d$$

$$o = 3,14 \cdot 14$$

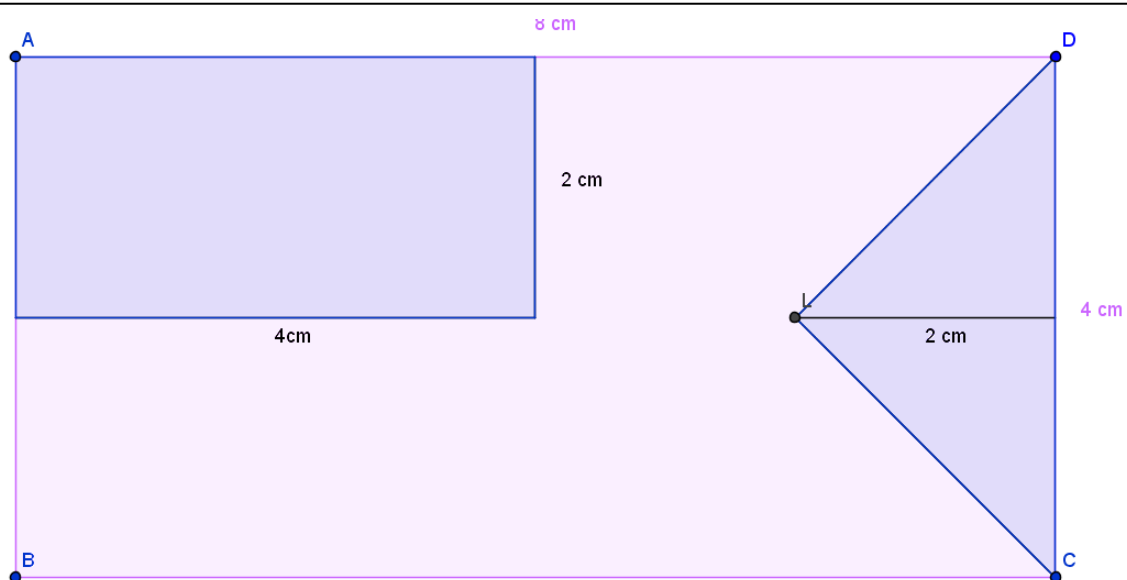
$$o = 43,96 \text{ cm}$$

Součet obvodů kružnic:

$$o = 31,4 + 43,96$$

$$o = 75,36 \text{ cm}$$

32) Vypočítejte velikost fialové plochy (obdélník ABCD bez menšího obdélníku a trojúhelníku).



Řešení:

Nejjednodušší způsob je vypočítat plochu celého obdélníku ABCD, od kterého následně odečteme plochu trojúhelníku a menšího obdélníku.

Obsah obdélníku ABCD (strana a= straně c= 4cm; strana b se rovná straně d= 8cm).

$$S = a \cdot b$$

$$S = 4 \cdot 8$$

$$S = 32 \text{ cm}^2$$

Nyní si vypočteme obsah malého obdélníku, ve kterém jsou rozměry stran 4 cm a 2 cm.

$$S = a \cdot b$$

$$S = 4 \cdot 2$$

$$S = 8 \text{ cm}^2$$

Obsah trojúhelníku (obsah trojúhelníku spočítáme jako: (velikost základny vynásobíme výškou na základnu) a po té vydělíme 2:

$$S = \frac{l \cdot vl}{2}$$

$$S = (4 \cdot 2)/2$$

$$S = 4 \text{ cm}^2$$

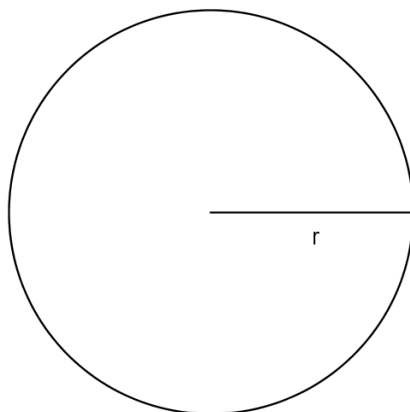
Obsah fialové plochy:

$$S = 32 - 8 - 4$$

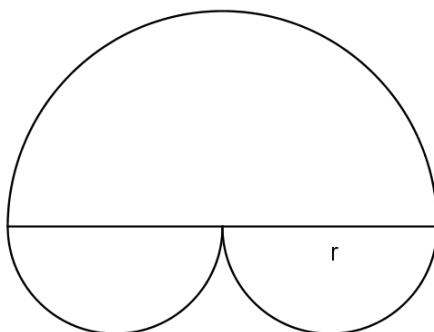
$$S = 20 \text{ cm}^2$$

33) Porovnejte, jaký obrazec má největší obvod, přičemž základem všech je kružnice s poloměrem 2cm.

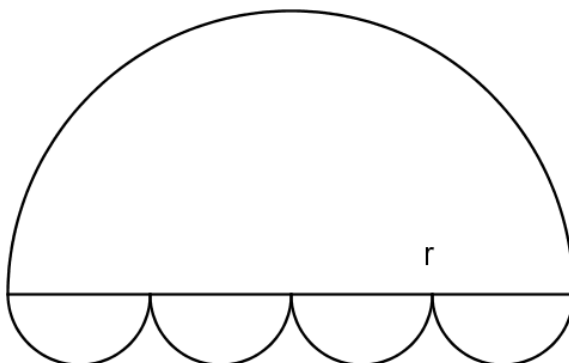
a)



b)



c)



Řešení:

Nejprve si vypočteme obvod kružnice, z obrázku "a", která má poloměr $r = 2$ cm:

$$o = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$o = 2 \cdot 3,14 \cdot 2$$

$$o = 12,56 \text{ cm}$$

Nyní spočítáme obvod útvaru na obrázku "b" (složený z jedné půlkružnice s poloměrem $r = 2$ cm a 2 půlkružnice s poloměrem $r_1 = 1$ cm) :

$$o = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} + 2 \cdot \pi \cdot r_1$$

$$o = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 2}{2} + 2 \cdot 3,14 \cdot 1$$

$$o = 6,28 + 6,28$$

$$o = 12,56 \text{ cm}$$

Poslední útvar na obrázku "c" je složený z půlkružnice s poloměrem $r = 2$ cm a 4 půlkružnice s poloměrem $r_2 = 0,5$ cm.

$$o = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} + 4 \cdot \pi \cdot r_2$$

$$o = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 2}{2} + 4 \cdot 3,14 \cdot 0,5$$

$$o = 6,28 + 6,28$$

$$o = 12,56 \text{ cm}$$

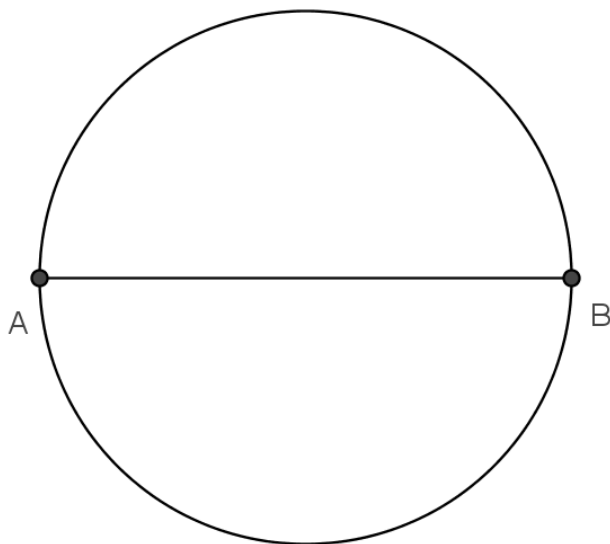
Všechny tři útvary, které mají jako základ poloměr kružnice 2 cm, mají stejný obvod.

34) Máme zadanou úsečku AB, která je dlouhá 4 cm, viz obrázek níže. Na úsečce AB vytvoříme:

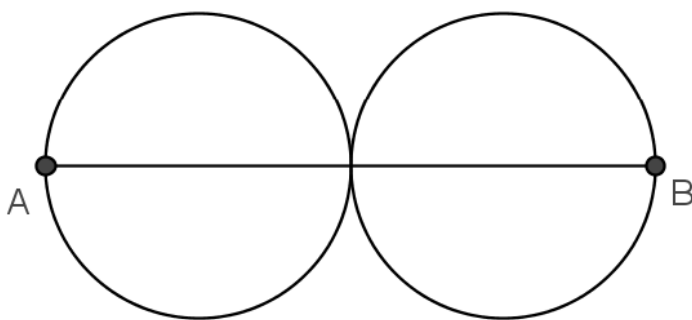
- a) Jednu kružnici s poloměrem $r_1 = 2 \text{ cm}$.
- b) Dvě kružnice s poloměrem $r_2 = 1 \text{ cm}$.
- c) Čtyři kružnice s poloměrem $r_3 = 0,5 \text{ cm}$.

Vypočítejte obvody a seřadte od největšího po nejmenší.

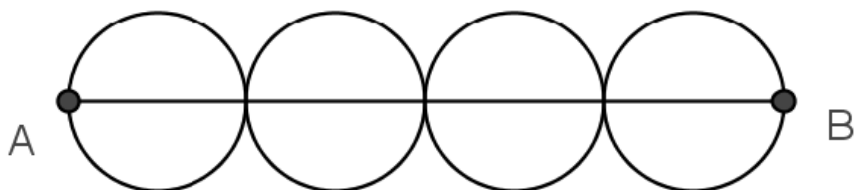
a)



b)



c)



Řešení:

Spočítáme si obvody jednotlivých kružnic na úsečce AB.

a)

$$o = 2 \cdot \pi \cdot r_1$$

$$o = 2 \cdot 3,14 \cdot 2$$

$$o = 12,56 \text{ cm}$$

b)

$$o = 2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot r_2)$$

$$o = 2 \cdot (2 \cdot 3,14 \cdot 1)$$

$$o = 12,56 \text{ cm}$$

c)

$$o = 4 \cdot (2 \cdot \pi \cdot r_3)$$

$$o = 4 \cdot (2 \cdot 3,14 \cdot 0,5)$$

$$o = 12,56 \text{ cm}$$

Nyní jsme vypočetli, že obvody všech tří jsou shodné. Můžeme toto říct i o jejich obsahích?

a)

$$S = \pi \cdot r_1^2$$

$$S = 3,14 \cdot 2^2$$

$$S = 3,14 \cdot 4$$

$$S = 12,56 \text{ cm}^2$$

b)

$$S = 2 \cdot (\pi \cdot r_2^2)$$

$$S = 2 \cdot (3,14 \cdot 1^2)$$

$$S = 2 \cdot 3,14 \cdot 1$$

$$S = 6,28 \text{ cm}^2$$

c)

$$S = 4 \cdot (\pi \cdot r_3^2)$$

$$S = 4 \cdot (3,14 \cdot 0,5^2)$$

$$S = 4 \cdot (3,14 \cdot 0,25)$$

$$S = 3,14 \text{ cm}^2$$

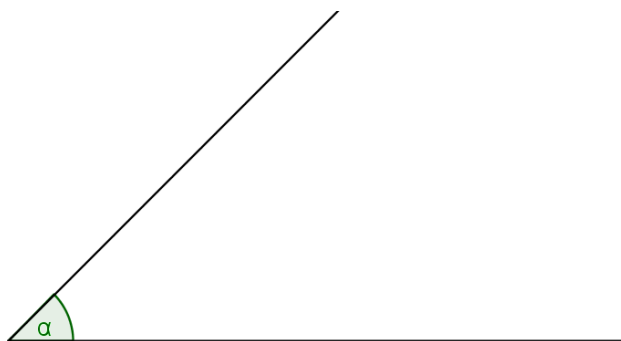
Při pohledu na výsledky je zřejmé, že obsahy se na rozdíl od obvodů liší.

4.2 Úhly

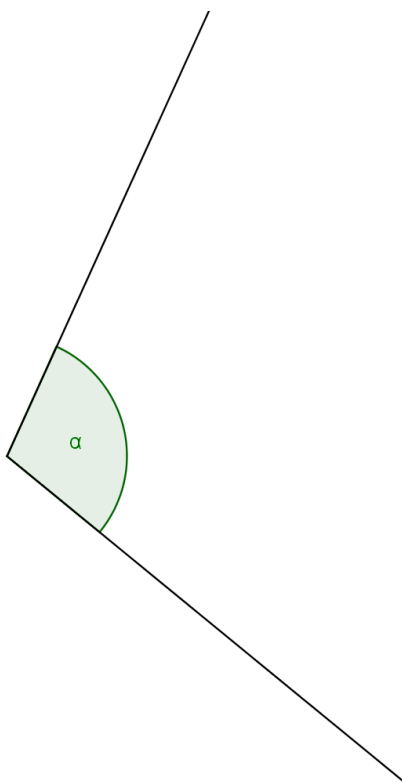
Dělení úhlu podle velikosti.

Doplňte názvy úhlů podle popis a obrázku. Vybírejte z variant za větou. Písmenka, která jsou za správnými variantami v závorce, si zapište a posléze z nich vytvořte chybějící slovo v otázce na konci textu.

- úhel má velikost větší jak 0° a menší než 90° .
Pravý (g), Tupý (o), Ostrý (l)



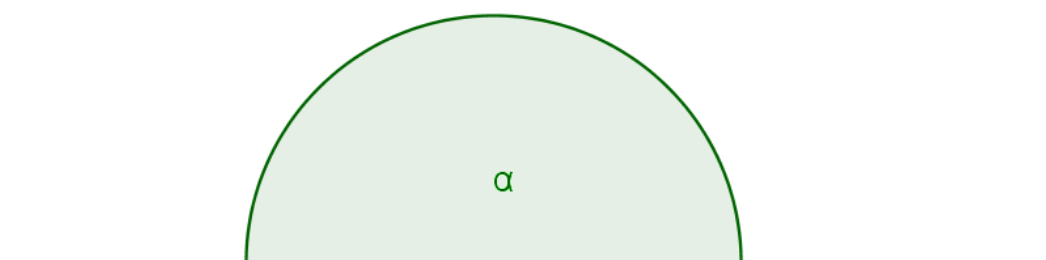
- úhel je větší než 90° a menší než 180° .
Přímý (z), Tupý (h), Pravý (c)



- úhel má velikost 90° .
Pravý (m), Přímý (a), Tupý (q)



- úhel má velikost 180° .
Tupý (ž), Ostrý (k), Přímý (ě)

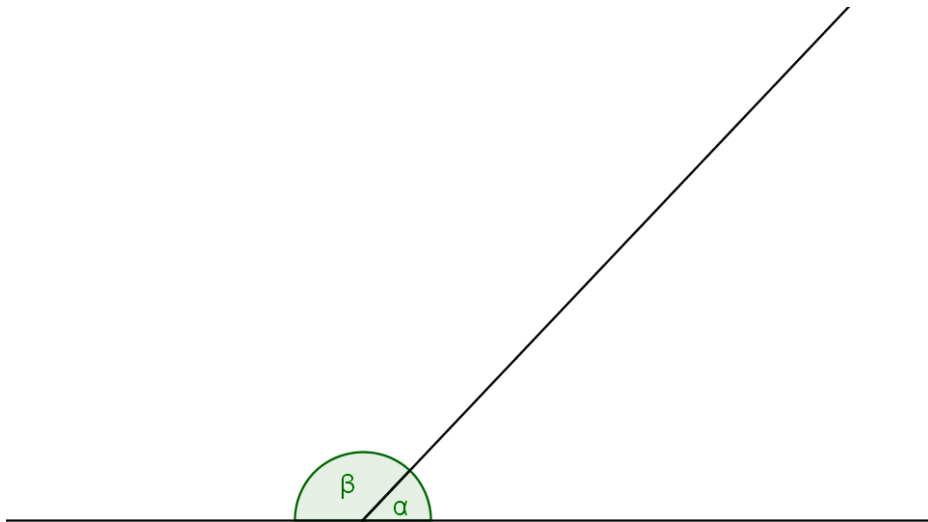


..... úhly

Součet velikostí úhlů je roven 180° .

Vedlejší (ú), Vrcholové (k), Souhlasné (a)

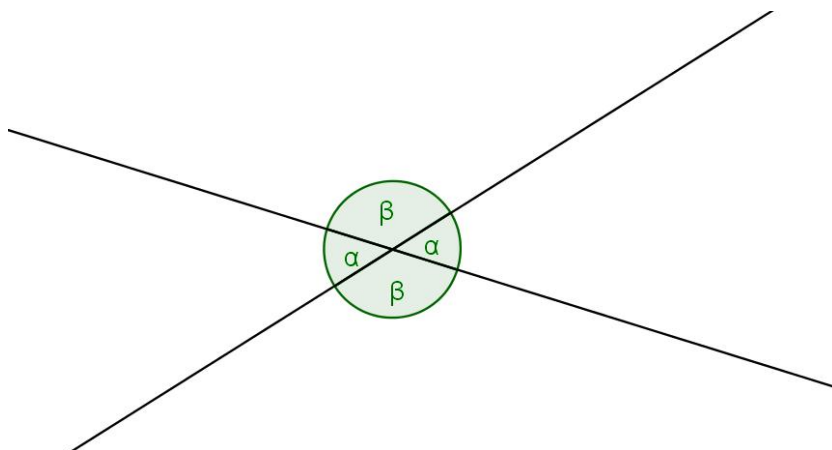
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



..... úhly:

..... úhly jsou vždy shodné jako na obrázku. $\alpha = \alpha$ a $\beta = \beta$.

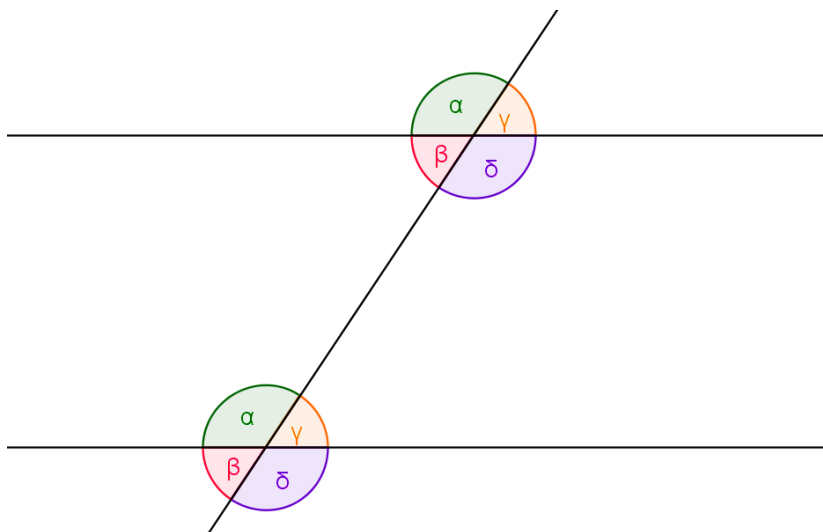
Vedlejší (u), Vrcholové (o), Souhlasné (é)



..... úhly

Pokud máme dvě přímky rovnoběžné, vznikají nám úhly viz obrázek. Barevně shodné úhly se shodují.

Vrcholové (t), Souhlasné (r), Vedlejší (l)



A zároveň z definice vrcholových úhlů víme, že :

$$\alpha = \delta$$

$$\beta = \gamma$$

Doplňte slovo složené z písmenek ze správných variant:

Úhly rýsuje pomocí

Řešení: úhloměr

Příklady:

35) Jaký úhel svírají hodinová a minutová ručička v 14 hodin?

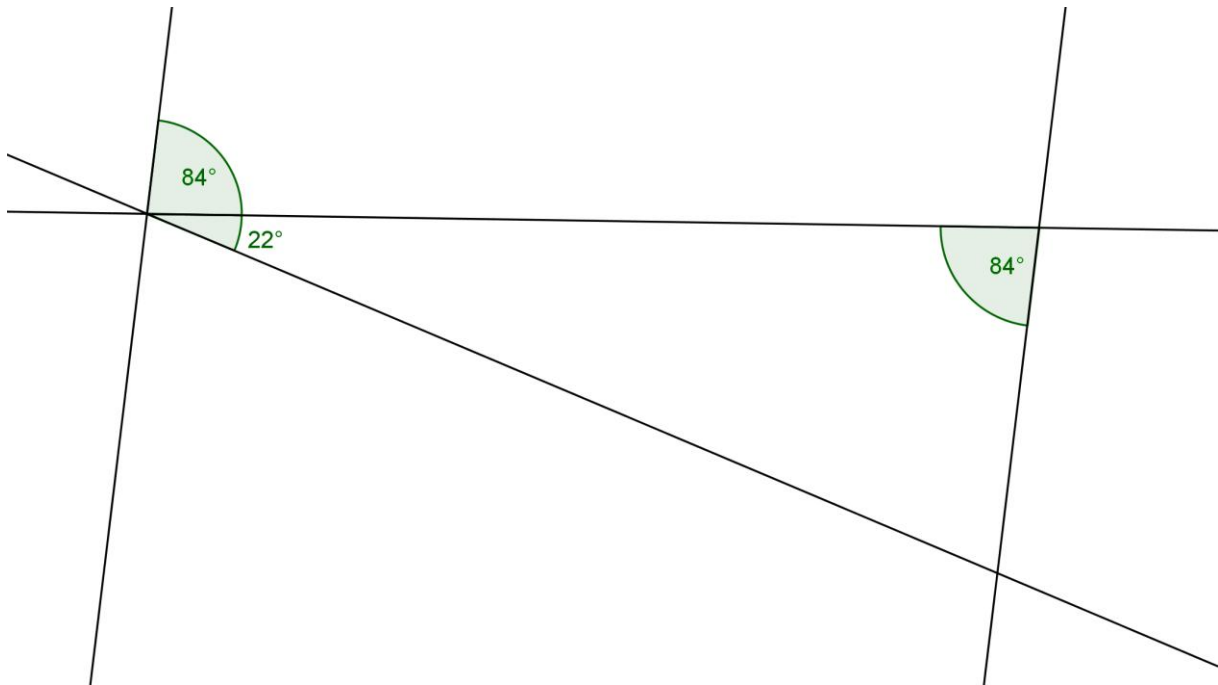
Řešení:

Hodové ručičky mohou svírat úhel od 0° až do 360° , což je právě ve 12:00.

$360/12 = 30$ (zjistili jsme, že úhel mezi každou následující hodinou je 30°). Jelikož je 14:00 (2 hodiny) vynásobíme $30 \cdot 2 = 60^\circ$

Hodinové ručičky ve 14:00 svírají úhel 60° .

36) Dopačítejte velikosti úhlů (svislé přímky jsou rovnoběžné).

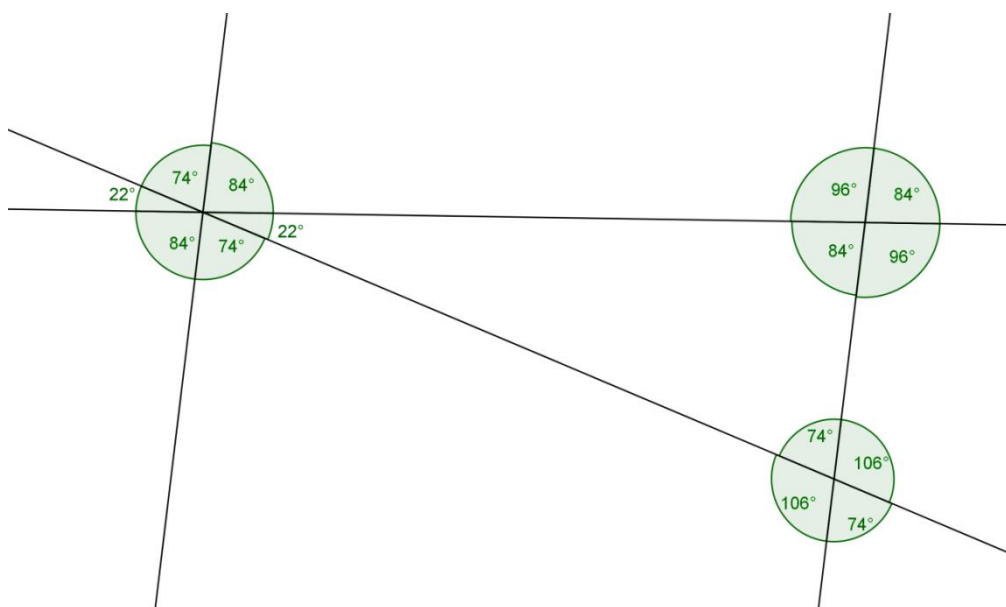


Řešení:

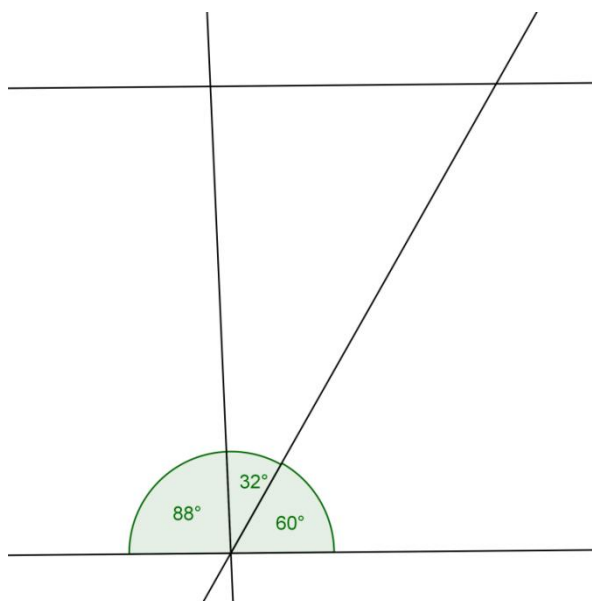
Nejprve si spočítáme velikost úhlu, který se nachází vedle zadaných, jedná se o vedlejší úhly a jejich součet musí být roven 180° .

$$180 - 84 - 22 = 74$$

Protější úhly doplníme pomocí vlastností o vrcholových úhlech. Svislé čáry jsou rovnoběžné, tak zde můžeme použít vlastnosti souhlasných vrcholů a pomocí vedlejších dopočítáme zbylé.

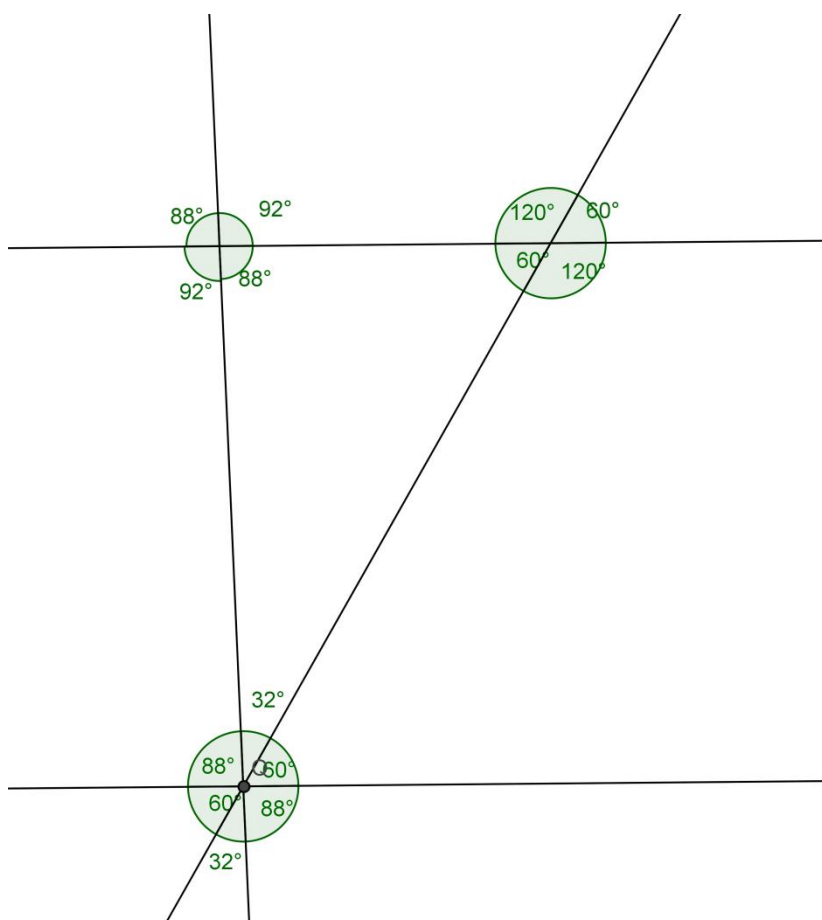


37) Doplňte úhly:

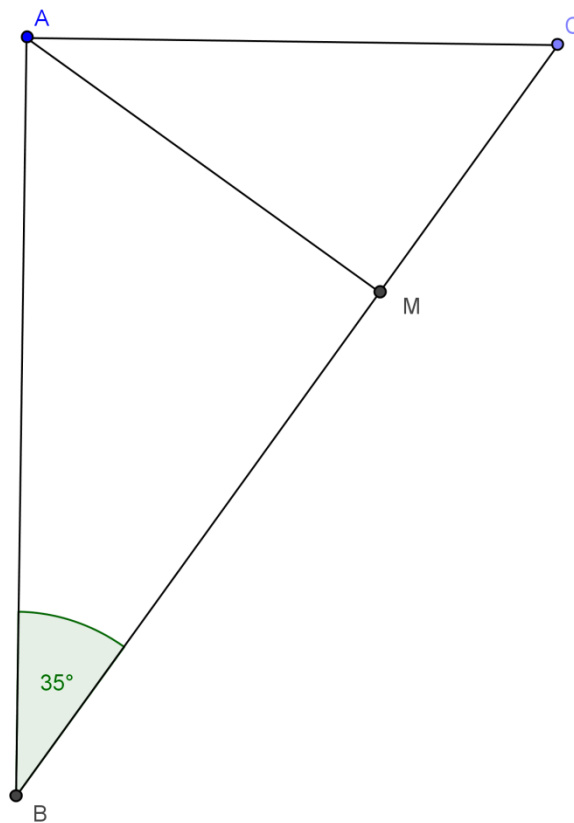


Řešení:

Pomocí znalostí o vrcholových úhlech si doplníme zbývající úhly kolem dolního vrcholu. Jelikož víme, že vodorovné čáry jsou rovnoběžně, použijeme zde vlastnosti souhlasných úhlů. A zbylé úhly spočítáme jako vedlejší úhly na součet 180° .



38) ABC je pravoúhlý trojúhelník. Přímka AM je kolmá k BC. Velikost úhlu BCA je 35° .
Určete velikost úhlu MAC.



Řešení:

Nejprve si spočítáme velikost úhlu u vrcholu C. Víme, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180° . V trojúhelníku ABC známe již dva úhly (úhel u vrcholu B, který je roven 35° a úhel u vrcholu A, jelikož je pravoúhlý, tak tento úhel je roven 90°), tak dopočteme i úhlem třetí.

Velikost úhlu u vrcholu C označíme ' γ '.

$$\gamma = 180 - (35 + 90)$$

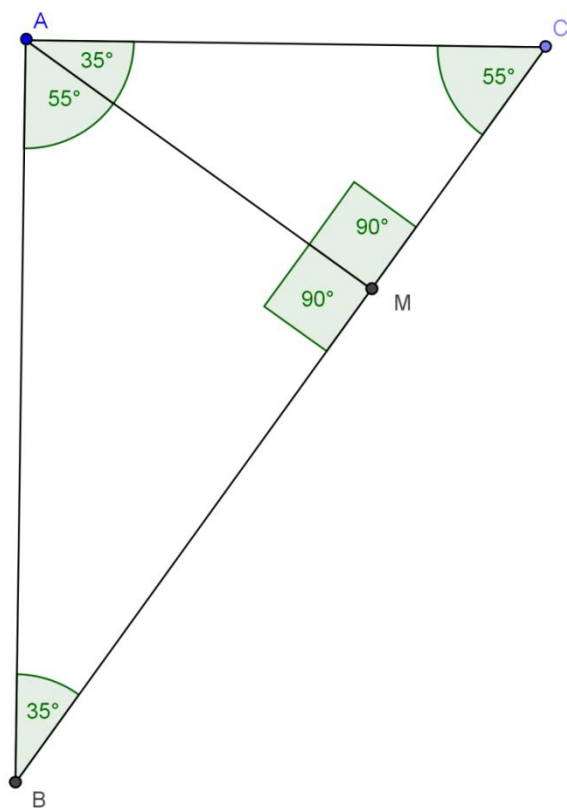
$$\gamma = 55^\circ$$

Nyní si vezme menší trojúhelník MAC. Opět známe dvě velikosti úhlu. U vrcholu M se velikost úhlu rovná 90° , ve výpočtu výše jsme vypočítali, že $\gamma=55^\circ$ a nyní spočteme velikost úhlu u vrcholu A. Tento úhel si označíme α .

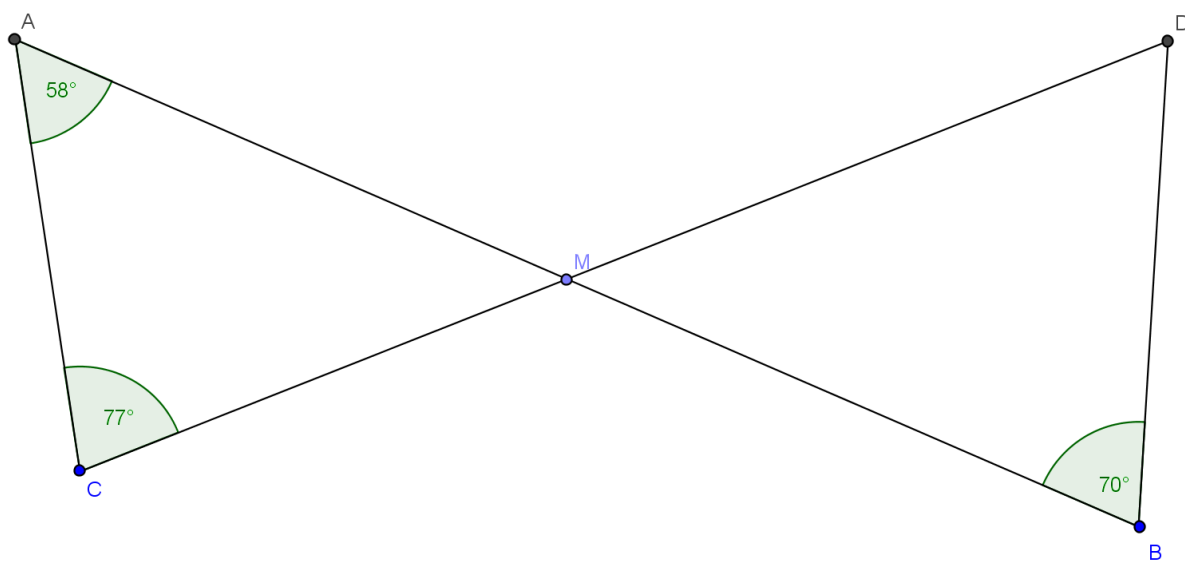
$$\alpha = 180 - (90 + 55)$$

$$\alpha = 35^\circ$$

Po dopočtení zbylých úhlů vypadá trojúhelník následovně:



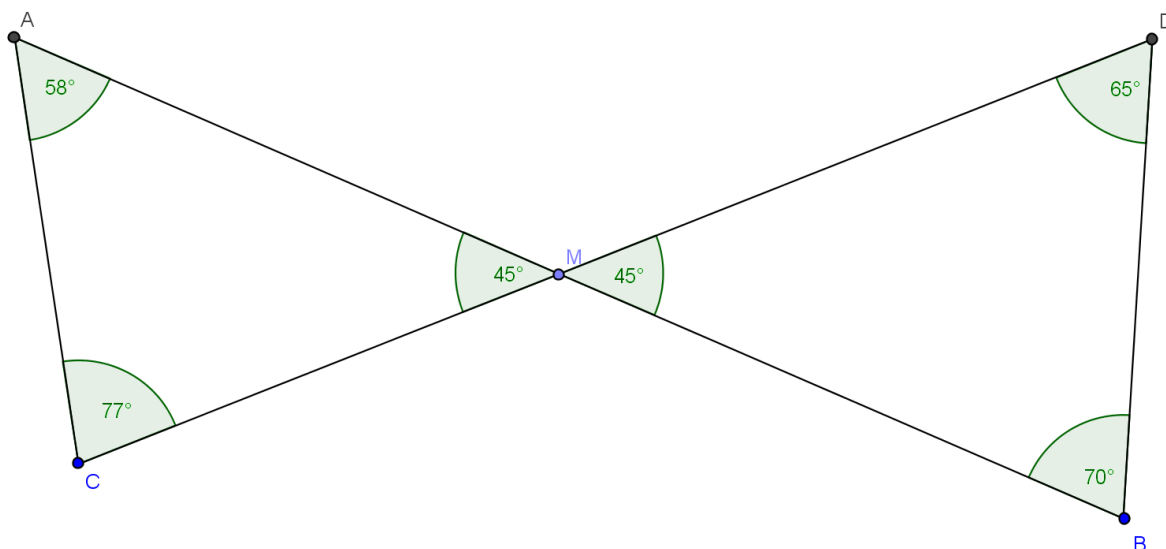
39) Doplňte chybějící úhly:



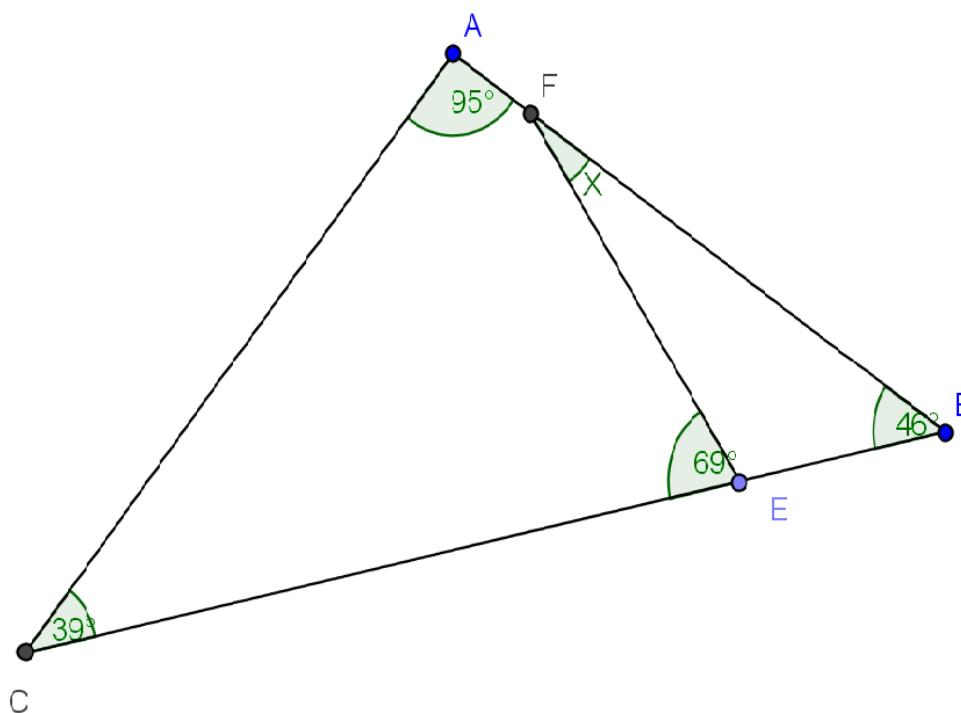
Řešení:

Nejprve si vezmeme trojúhelník ACM, ve kterém máme zadané dva úhly a dopočteme třetí pomocí vlastnosti, která nám říká, že součet úhlů v trojúhelníku je 180° . Další vlastnost úhlů nám říká, že úhel protější u stejného vrcholu je stejně velký, tím pádem získáme opět dva úhly trojúhelníku BDM a dopočteme třetí.

Dopočtené úhly:



40) Určete velikost úhlu x:



Řešení:

Nejprve si spočteme velikost vedlejšího úhlu u vrcholu E, hledaný úhel si pojmenujeme například ρ , jelikož jejich součet musí být roven 180° , je zřejmé, že tento úhel bude mít velikost 111° .

$$\rho = 180 - 69$$

$$\rho = 111^\circ$$

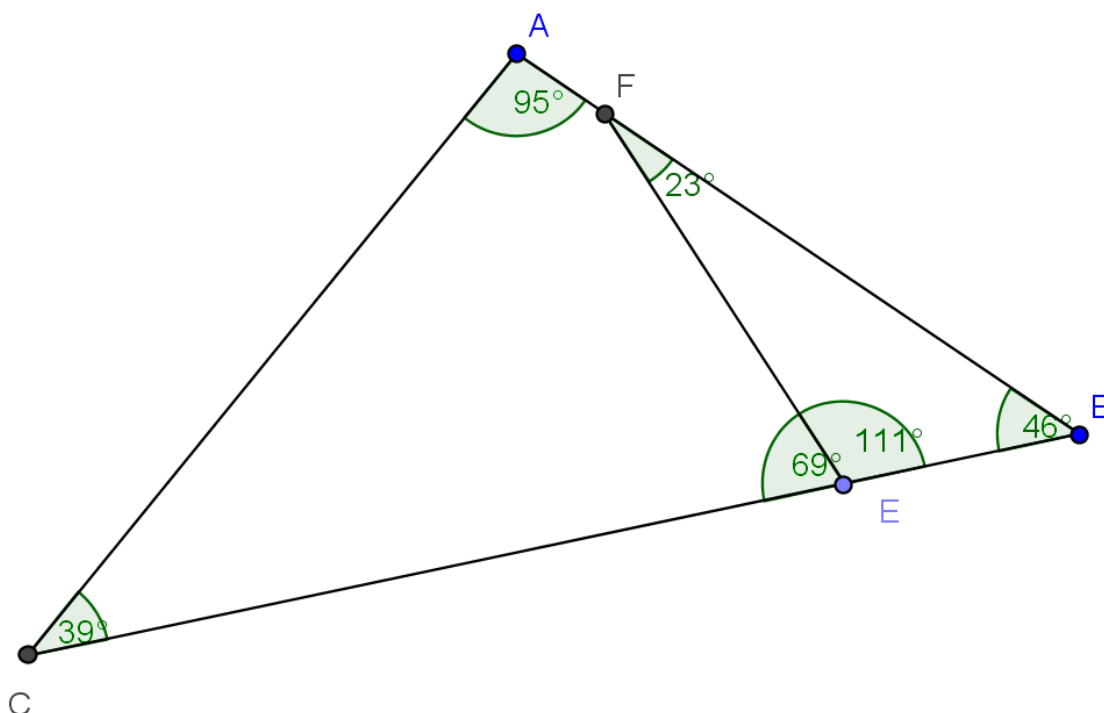
Nyní spočteme velikost úhlu x (součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven 180°).

$$x = 180 - (111 + 46)$$

$$x = 180 - 157$$

$$x = 23^\circ$$

Trojúhelník s doplněním úhlů vypadá následovně:



5 Logika a logické úlohy

41) Martin, Jaromír, Vojtěch, Kristián a Libor závodili na motorkách. Každý z nich měl jinou barvu čísla - žluté, zelené, červené, modré a oranžové. Kristián ani Libor neměli zelené číslo. Kristián byl rychlejší než Martin a Libor. Modré číslo dojelo dříve než Liborovo a Vojtěchovo. Žluté číslo bylo rychlejší než zelené a oranžové. Martin a Libor skončili před oranžovým číslem. Jaromír skončil před modrým a žlutým číslem. Kdo měl jakou barvu čísla a v jakém pořadí dojeli do cíle?

Dle mého názoru je nejlepší použít papírky, které nám budou znázorňovat barvy a jména. Pomocí nich můžeme přisuzovat určité vlastnosti.

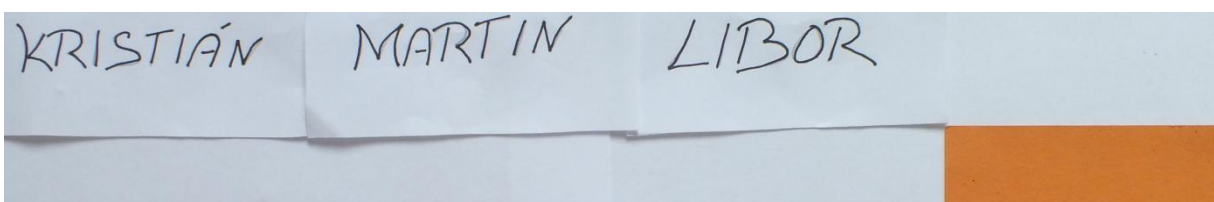


Řešení:

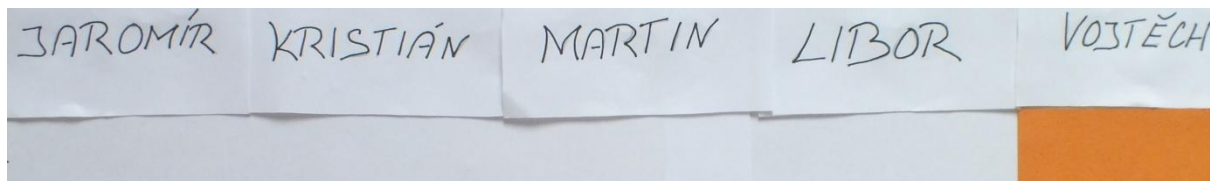
Jelikož Kristián byl rychlejší než Martin a Libor, dáme si cedulky se jmény zatím v tomto pořadí, Kristián, Martin a Libor.



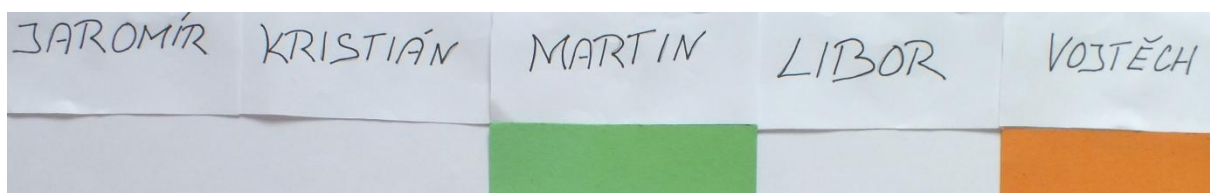
Další záchytný bod je ten, že Martin a Libor skončili před oranžovým číslem, tudíž oranžovou kartičku vložíme za jména.



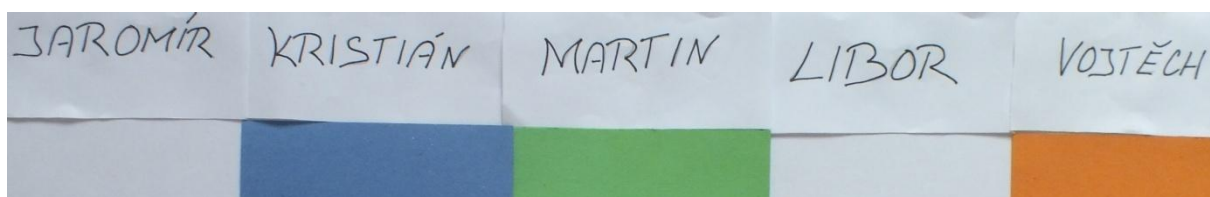
Jelikož Jaromír skončil před žlutým a modrým, dojel úplně první. Kartičku s jeho jménem vložíme na první pozici, a z toho nám také vyplývá, že poslední závodník je zbylý Vojtěch.



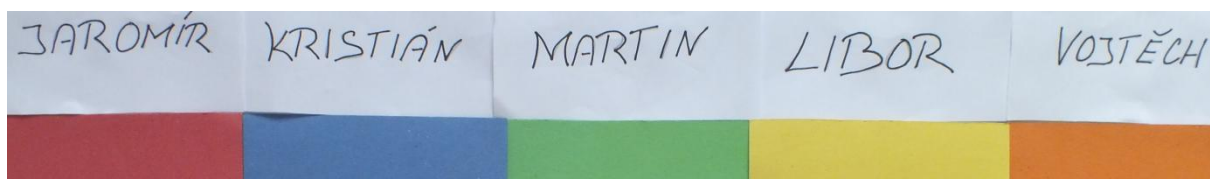
Když se vrátíme k barvám, tak zelenou, mohl mít pouze Martin nebo Jaromír, jelikož některé barvy byly dříve než zelená, je jasné, že tato barva nemůže patřit Jaromírovi a patří Martinovi.



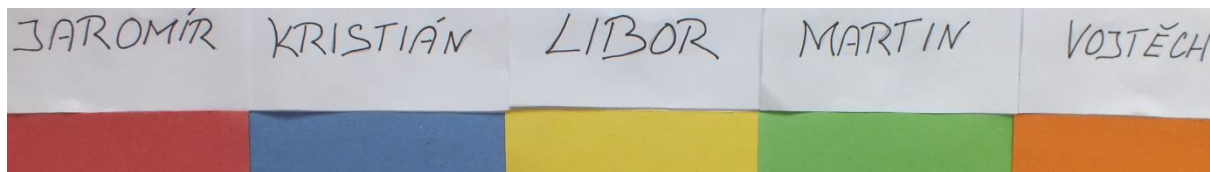
Modré číslo dojelo dříve než Liborovo a Vojtěchovo a zároveň později než Jaromírovo, patří tedy Kristiánovi.



Máme zbývající dvě barvy, jelikož Jaromír dojel před žlutou, patří mu barva červená a na Libora tedy zbyla barva žlutá.



Jelikož žluté číslo bylo rychlejší než zelené a oranžové, musíme prohodit pořadí Martina a Libora, které jsme na začátku dali prozatímně. Tudíž konečný výsledek vypadá následovně.



42) V kavárně se sejde pět kamarádek, každá z nich se jmenuje jinak, mají rády jinou barvu, dělají jiný sport, pijí jiný nápoj a pracují na různých pozicích. Co ke které patří?

Jména: Hana, Iva, Jana, Lucka, Terka

Barva: modrá, růžová, oranžová, zelená, žlutá,

Sport: basketbal, florbal, fotbal, tenis, volejbal

Nápoj: čaj, horká čokoláda, káva, víno, voda

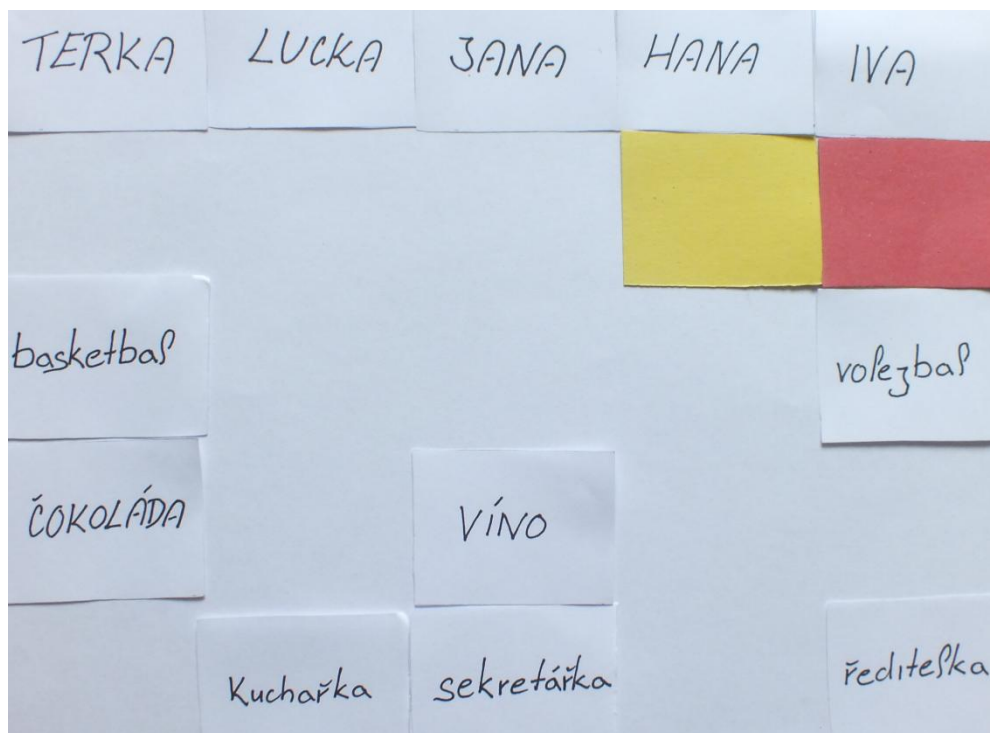
Povolání: kuchařka, ředitelka, sekretářka, učitelka, úřednice

- Nejoblíbenější barva Hany je žlutá.
- Ta, jejíž neoblíbenější barva je růžová, hraje volejbal.
- Sekretářky nejoblíbenější nápoj je víno.
- Terka pije nejraději horkou čokoládu a hraje basketbal.
- Tenistka nepije kávu ani čaj.
- Jana je sekretářka.
- Čaj pije milovnice modré barvy.
- Iva nemá ráda modrou barvu.
- Fotbalistka má ráda zelenou barvu.
- Iva je ředitelka a má ráda růžovou.
- Učitelka pije vodu.
- Lucka je kuchařka.
- Kávu nepije ta, která má ráda zelenou barvu.

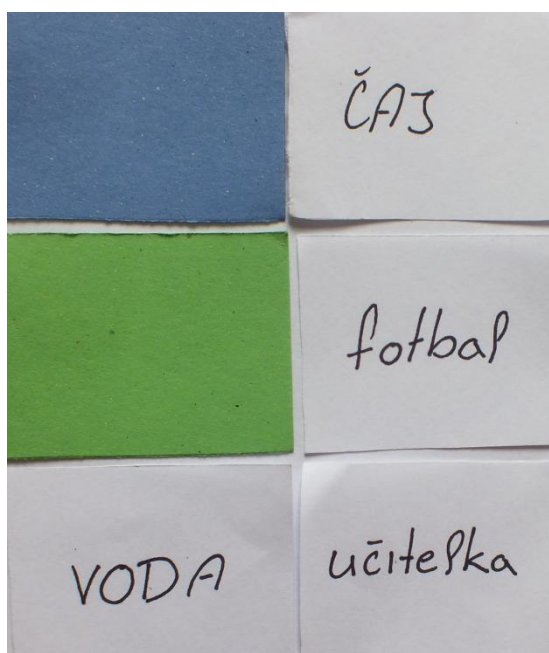
Otázka: Kdo hraje florbal?

Řešení:

Nejprve si sestavíme tabulku se jmény. Je jedno, v jakém jsou pořadí, poté k nim přidáme věci, které známe ze zadání.



Ze zadání ještě známe další kombinace:



Z výše uvedených kombinací víme, že modrá barva patří buď k Terce, Luce nebo Janě. Jelikož k modré barvě patří čaj, tak Janu a Terku můžeme vyloučit, jelikož pijí čokoládu a víno. Barvy nám zbyly jen oranžové a zelené, ale jelikož k zelené je spojen fotbal, tak tato kombinace může patřit pouze Janě, protože Terka hraje basketbal. Z povolání nám zbyla úřednice a učitelka, jelikož učitelka pije vodu, je zřejmé, že jí je Hana a Terka je úřednice.

TERKA	LUCKA	JANA	HANA	IVA
basketbal		fotbal		volejbal
ČOKOLÁDA	ČAJ	VÍNO	VODA	
úřednice	Kuchařka	sekretářka	učitelka	ředitelka

Jediný, kdo ještě nemá nápoj je Iva, proto k ní přiřadíme kávu. Zbyly nám dva sporty, a to florbal a tenis. Jelikož ze zadání víme, že teniska nepije kávu ani čaj, nemůže jí být Lucka, ale Hana, tudíž hledaná florbalistka je Lucka.

TERKA	LUCKA	JANA	HANA	IVA
basketbal	florbal	fotbal	tenis	volejbal
ČOKOLÁDA	ČAJ	VÍNO	VODA	KÁVA
úřednice	Kuchařka	sekretářka	učitelka	ředitelka

43) Einsteinova hádanka:

Einstein sestavil tuto hádanku a prohlásil, že pouze 2% lidí ji budou umět vyřešit. Patříte mezi ně?

Máme pět různobarevných domů. V každém z nich bydlí člověk jiné národnosti. Každý majitel pije určitý druh nápoje, kouří určitou značku cigaret a má určité domácí zvíře. Žádný z nich nemá stejné zvířátko, nekouří stejnou značku cigaret ani nepije stejné nápoje. Kdo je majitelem rybiček?

- Brit bydlí v červeném domě.
- Švéd má doma psa.
- Dán pije čaj.
- Zelený dům stojí nalevo od bílého domu.
- Majitel zeleného domu pije kávu.
- Člověk kouřící Pall Mall má papouška.
- Majitel žlutého domu kouří Dunhill.
- Obyvatel prostředního domu pije mléko.
- Nor bydlí v prvním domě.
- Člověk kouřící Blends má souseda s kočkou.
- Soused majitele koně kouří Dunhill.
- Člověk kouřící Bluemasters pije pivo.
- Němec kouří cigarety Prince.
- Nor bydlí vedle modrého domu.
- Soused člověka kouřícího Blends pije vodu.

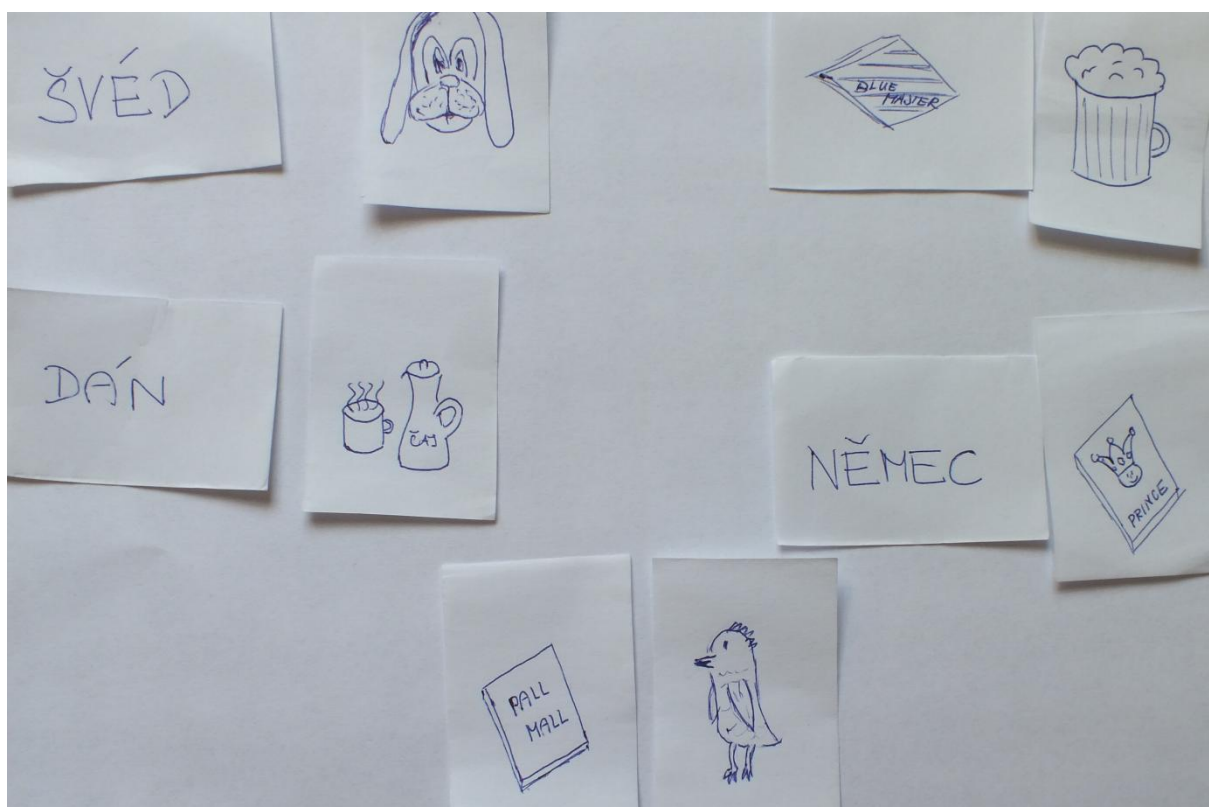
Řešení:

Nejprve si ze zadání sestavíme vše, co víme:

Nor bydlí v prvním domě, jeho soused má modrou střechu. V prostředním domě se pije mléko a v zeleném káva, jelikož vpravo od bílého musí být bílý, tak víme, že domy jsou v tomto pořadí: žlutý, modrý, červený, zelený a bílý. Ještě víme, že nor kouří Dunhill a v modrém domě mají koně. Viz obrázek.



Následně si spojíme zbylé kombinace podle zadání:



Nyní si napíšeme varianty, v jakých domech se co může vyskytovat.

- Blends (víme, že jeho sousedi mají kočku a pijí vodu): modrý a zelený
- Němec + Prince: modrý, zelený nebo bílý
- Pivo + Blue master: bílý nebo modrý
- Dán + čaj: bílý nebo modrý

Když se podíváme na poslední dvě varianty, je zřejmé, že nemohou být v jednom domě, jelikož se v něm vyskytují dva nápoje. Zvolíme si proto například, že Dán + čaj patří do modrého domu a do bílého přiřadíme pivo + Blue master. Jelikož soused od Blends pije vodu, může jím být jen Nor a dán v modrém domě kouří Blends. Cigarety nám chybí jen v červeném a zeleném domě, jelikož jsou spojeny s Němcem, můžeme červenou variantu, kde bydlí Brit vyloučit. Na Švéda a psa tedy zbyl poslední bílý dům. Poslední cigarety, které nám zbyly, jsou Pall Mall, které jsou spojené s papouškem a patří k Britovi do bílého domu.



Nyní nám zbyly jen hledané rybičky a kočka. Jelikož kočku má soused od Blends, je jejím majitelem Nor a rybičky má v zeleném domě Němec.



Pro přehlednost viz tabulka:

*	1.dům	2.dům	3.dům	4.dům	5.dům
Barva	Žlutá	Modrá	Červená	Zelená	bílá
národnost	Nor	Dán	Brit	Němec	Švéd
Nápoj	Voda	Čaj	Mléko	Káva	pivo
Cigarety	Dunhill	Blends	Pall Mall	Prince	Bluemasters
Zvíře	kočka	Kůň	Papoušek	Rybičky	pes

Pro kontrolu si můžete zkusit, že Dán, který pije čaj, by bydlel v bílém domě, zjistíte, že by se nám tato možnost vyloučila. Na modrý dům by připadly dva druhy cigaret.

44) Jana vyhodila z okna svého pokoje dva míče, jeden byl fotbalový a druhý byl tenisový. Než je pustila, byly středy obou míčů v rovině. Který míč musí proletět větší vzdálenost, než spadne na zem?

Řešení:

Tenisový míček, jelikož jeho poloměr je menší než fotbalového míče, proto musí uletět větší vzdálenost, než spadne na zem.

45) Máte šest sklenic v řadě. Sklenice se střídají - plná, prázdná, plná, prázdná,... Tím, že pohneme, přesuneme, přelijeme, nebo jinak přendáme pouze jednou sklenkou, docílíme toho, že budou v řadě stát nejprve tři plné, pak tři prázdné sklenice.



Řešení:

Vezmeme pátou sklenici a její obsah vlijeme do sklenice číslo dvě.

46) V jedné malé vesničce na severu Čech s názvem Drbohlavičky přišli s nápadem, že v této vesnici nikdo nebude mít stejný počet vlasů na hlavě. Nikdo z nich nesmí překročit trojciferné číslo, tudíž nejvíce může člověk mít 999 vlasů. Kolik je ve vesnici obyvatel, když byly vyčerpány všechny varianty s počtem vlasů?

Řešení:

V této vesničce žije 1000 obyvatel, nejméně vlasů má plešatý obyvatel, a poté má každý obyvatel o vlas více než předchozí až k poslednímu, který má 999. ($999+1=1000$)

47) V bedně je šest krabic, v každé krabici je pět krabiček, v každé krabičce jsou dvě truhličky, v každé truhličce jsou tři balíčky a v každém balíčku jsou dvě panenky. Kolik panenek je v bedně?

Řešení:

$$1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 360$$

48) Na otázku „Kolik je ti let?“ odpověděla Zuzanka: Když za 11 let svůj věk vynásobím 5, bude mi právě 100 let. Kolik jí je teď?

Řešení:

Vytvoříme si rovnici, ve které Zuzančin věk označíme x .

$$(x + 11) \cdot 5 = 100$$

$$5 \cdot x + 55 = 100$$

$$5 \cdot x = 100 - 55$$

$$5 \cdot x = 45$$

$$x = 9$$

V současné době je Zuzance 9 let.

49) Novákovi mají dvě děti. Výška syna je $1/4$ výšky táty, výška dcery je $3/5$ výšky mámy, výška táty je $20/19$ výšky mámy a táta se synem mají dohromady 250 cm. Kolik měří každý člen rodiny?

Řešení:

Ze zadání víme, že táta se synem mají dohromady 250 cm. Nejprve si určíme, že máma měří x centimetrů a dopočteme tuto hodnotu.

$$\frac{20}{19}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{20}{19}x = 250$$

$$\frac{20}{19}x + \frac{20}{76}x = 250 \quad / \cdot 76$$

$$80x + 20x = 19000$$

$$100x = 19000 \quad / 100$$

$$x = 190 \text{ cm}$$

$$\text{Otec: } \frac{20}{19} \cdot 190 = 200 \text{ cm}$$

$$\text{Syn: } \frac{1}{4} \cdot 200 = 50 \text{ cm}$$

$$\text{Dcera: } \frac{3}{5} \cdot 190 = 114 \text{ cm}$$

50) Boris má dnes polovinu let Adama. Za 3 roky bude Borisovi tolik, co je Adamovi dnes. Kolik let je dnes Borisovi?

Řešení:

Adamovi je x let, Borisovi je $\frac{x}{2}$ let, za 3 roky bude Borisovi x (tolik, co je Adamovi teď).

$$\frac{x}{2} + 3 = x \quad / \cdot 2$$

$$x + 6 = 2x$$

$$6 = x$$

$$x = 6$$

Borisovi za 3 roky bude 6 let, tudíž v současné době jsou mu 3 roky.

51) Táta se synem mají dnes dohromady 64 let. Syn má $\frac{1}{3}$ let otce. Za kolik let bude mít syn polovinu otcových let?

Řešení:

Otec: x , syn $\frac{1}{4} \cdot x$

$$x + \frac{1}{3}x = 64 \quad / \cdot 3$$

$$3x + x = 192$$

$$4x = 192$$

$$x = 48$$

V současné době je otcí 48 let a synovi 16 let.

Za kolik let bude synovi polovina? (počet let = y)

$$\frac{48 + y}{2} = 16 + y \quad / \cdot 2$$

$$48 + y = 32 + 2y$$

$$16 = y$$

$$y = 16$$

Za 16 let bude synovi polovina otcovo věku.

52) Šest závaží (1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg a 6 kg) bylo rozděleno do tří misek. V každé misce byla dvě závaží. V první misce měla závaží hmotnost 9 kg. V druhé misce měla závaží hmotnost 4 kg. Jaká závaží jsou ve třetí misce?

Řešení:

Nejprve si rozdělíme, jaká kombinace závaží nám vytvoří určité hmotnosti.

9 kg: 5 kg + 4 kg

4 kg: 3 kg + 1 kg

Na poslední misce nám tedy zůstala závaží o hmotnosti 6 kg a 2 kg. Tudíž součet hmotností na třetí misce je 8 kg.

53) Jaké je čtyřmístné číslo, ve kterém je první číslo jednou polovinou druhého, třetí je součtem prvního a druhého a poslední je třikrát druhé číslo?

Řešení:

Na první místo si zkusíme dát číslo 1, jelikož číslo na prvním místě je $\frac{1}{2}$ druhého, tak na druhé pozici bude číslo 2, třetí je jejich součet, tudíž číslo 3 a na posledním místě je dvojnásobek druhého, tudíž číslo 6. Kdybychom si na první pozici dali číslo větší než 1, nevyházelo by na čtvrtém místě číslo, které by splňovalo výše uvedené podmínky. Výsledkem je tedy číslo 1236.

54) Jaká čísla 1-9 musíte doplnit do tabulky, aby jejich součty v řádcích a sloupcích byly rovny číslům napsaným kolem těchto polí? V modře uvedených částech jsou uvedené součty.

16	8	21	
			12
			13
			20

Řešení:

Jeden ze způsobů rozložení čísel:

16	8	21	
4	4	4	12
4	1	8	13
8	3	9	20

Vezmeme si první řádek, tady si můžeme rovnoměrně rozdělit číslo 12 na $3 \cdot 4$. Nyní budeme rozdělovat číslo 13, podíváme se, jaký musí být počet v sloupcích a podle toho rozdělíme, například na $4 + 1 + 8$. A nyní musíme dopočítávat, na poslední místo v prvním sloupci nám zbylo číslo 8 ($16 - 4 - 4$), na druhé místo dáme číslo 3 ($8 - 4 - 1$) a na poslední číslo 9 ($21 - 4 - 8$). Nyní nám součet musí dát 20 ($8 + 3 + 9 = 20$). Tím jsme si ověřili, že jsme čísla zvolili správně. Pokud by nám to nevyšlo, hledali bychom jinou variantu.

55) Součet tří po sobě jdoucích čísel je 93. Jaká jsou to čísla?

Řešení:

První z čísla si označíme x , jelikož jde o tři po sobě jdoucí čísla, označíme si je: x , $(x+1)$ a $(x+2)$. Jelikož se jedná o součet, vytvoříme si rovnici:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 93$$

Odstraníme si závorky:

$$x + x + 1 + x + 2 = 93$$

Sečteme levou stranu:

$$3x + 3 = 93$$

$$3x = 93 - 3$$

$$3x = 90$$

Pravou i levou stranu rovnice vydělíme 3:

$$x = 30$$

Když se jedná o tři po sobě jdoucí čísla, je zřejmé, že první číslice je 30, druhá 31 a třetí 32.

56) Babička má na dvoře kuřata a kořata, mají celkem 15 hlaviček a 14 křidélek. Kolik mají dohromady nožiček?

Řešení:

14 křidélek $14/2 = 7$ (Každé kuře má 2 křídla, proto vydělíme $14/2$ a zjistíme, že na dvoře je 7 kuřat)

Počet hlav : $15-7$ (odečteme počet kuřat a vyjde nám, že je tam 8 kořata)

Počet nohou

$$\text{Kořata: } 8 \cdot 4 = 32$$

$$\text{Kuřata: } 7 \cdot 2 = 14$$

$$32 + 14 = 46$$

Celekem mají 46 nožiček.

Dala by se tato úloha řešit pomocí rovnic?

Počet koček si označíme jako neznámou „ x “ a počet kuřat „ y “.

Víme, že všech zvířat je dohromady 15:

$$x + y = 15$$

Dále víme, že mají 14 křidélek(kočky nemají žádné a kuřata 2):

$$0x + 2y = 14$$

Sestavíme soustavu rovnic:

$$x + y = 15$$

$$\underline{0x + 2y = 14}$$

První rovnici si vynásobíme (-2):

$$-2x - 2y = -30$$

$$\underline{0x + 2y = 14}$$

Nyní rovnice sečteme:

$$-2x + 0y = -16$$

$$-2x = -16$$

Celou rovnici vydělíme (-2)

$$x = 8$$

Nyní víme, že bylo 8 koček, vložíme x do první rovnice:

$$x + y = 15$$

$$8 + y = 15$$

$$y = 7$$

U babičky na dvoře bylo 8 koček a 7 kuřat. Otázkou bylo, kolik nohou mají dohromady, víme, že kočka má nohy 4 a kuře 2 proto:

$$8 \cdot 4 + 7 \cdot 2 = 32 + 14 = 46$$

Zvířata měla dohromady 46 nohou.

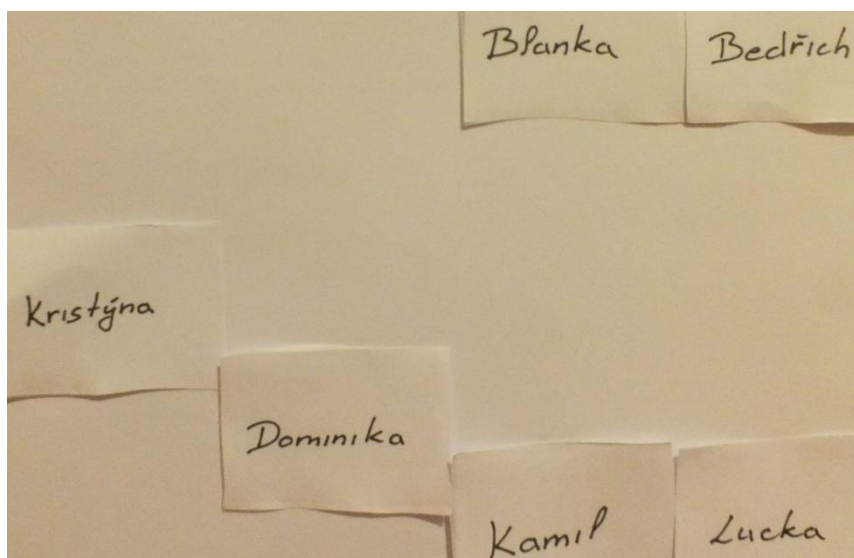
57) V 8.B se paní učitelka během občanské výchovy rozhodla, že budou dělat skupinovou práci a rozdělila děti do 4 skupin po 8. V prvních třech skupinách se děti rozsadily bez problému, jen v jedné nastal problém s tím, jak si ke stolu sednout. Děti se začaly dohadovat a měly následující kritéria:

(v této skupině se děti jmenují následovně: Aneta, Adam, Bedřich, Blanka, Dominika, Kamil, Lucka a Kristýna)

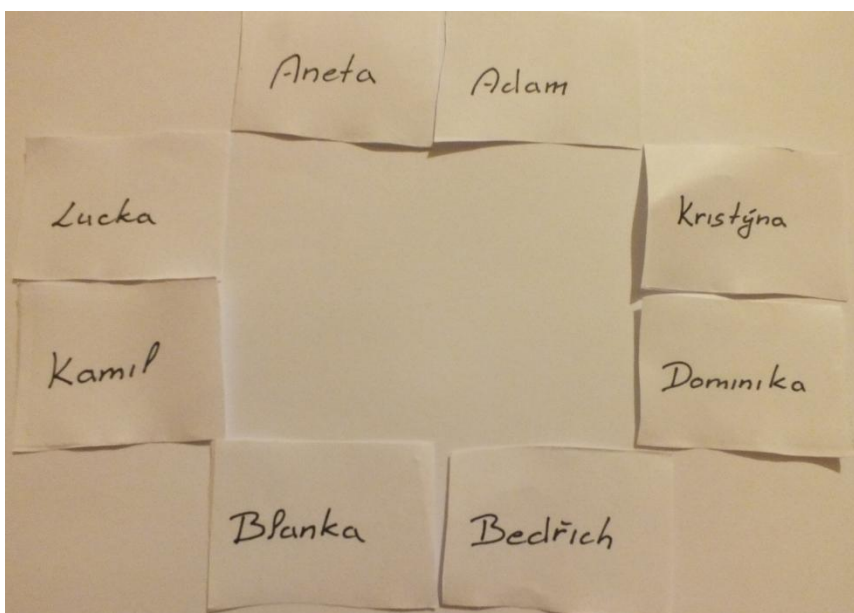
- Aneta chce sedět vedle Adama.
- Bedřich chce sedět s Blankou.
- Kamil sedí vedle Dominiky nebo Lucky.
- Kristýna sedí vedle Dominiky.
- Aneta a Adam nesedí vedle Bedřicha ani vedle Blanky.
- Bedřich nesedí vedle Kamila, nebo vedle Kristýny.
- Dominika a Lucka nesedí vedle sebe.
- Adam nesedí vedle Dominiky nebo Lucky.
- Aneta nesedí vedle Kamila.

Jak se tato situace mohla vyřešit?

Nejprve si sestavíme skupiny spolužáků, kteří chtějí sedět vedle sebe.



Teď se zaměříme na spolužáky, kteří nechtějí sedět vedle sebe a zkusíme sestavit obraz toho, jak by to mohlo vypadat.



6 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit sbírku řešených problémových úloh z algebry a geometrie. Každý příklad ve sbírce je vysvětlen a vyřešen. U některých příkladů je text doplněn obrázky, ty mají sloužit k zamyšlení a pomoci při řešení, jedná se o fotky, obrázky, dělané v programu GeoGebra, nebo malování, grafy a tabulky.

Nejprve jsem se zabývala ŠVP s názvem „Chceme a dokážeme“ ze ZŠ T. G. Masaryka v Písku, díky němuž jsem analyzovala učivo základní školy. K analýze jsem též použila tematický plán z druhé základní školy.

První kapitola se věnovala algebře a má devět podkapitol. Tyto podkapitoly se vždy věnují různým tématům jako procenta, převody jednotek atd.

V druhé kapitole bylo hlavní téma geometrie, kde byly příklady rozděleny na výpočty obvodů a obsahů a dopočty úhlů. V této kapitole je u všech příkladů obrázek, který pomáhá k zapojení představivosti.

Třetí kapitola je zaměřena na logiku a logické uvažování. V této kapitole nejde jednoznačně říci, že napsaný postup je jediný správný. V této části záleží na individuálním uvažování člověka.

7 Zdroje:

[1] KLAPETEK, Milan. *Komunikace, argumentace, rétorika*. 1. vyd. Praha: Grada, 2008, 247 s. ISBN 978-80-247-2652-6.

[2] KOPKA, Jan. *Hrozny problémů ve školské matematice*. Vyd. 1. Ústí nad Labem: Univerzita J.E. Purkyně, 1999, 194 s. Acta Universitatis Purkynianae. ISBN 80-704-4247-6.

[3] HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Vyd. 1. Praha: Portál, 2001, 187 s. Pedagogická praxe. ISBN 80-717-8581-4.

[4] BĚLOUN, František a František KUŘINA. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 8. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 254 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-719-6104-3.

[5] KUŘINA, František a František KUŘINA. *Umění vidět v matematice: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 8. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990, 254 s. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-042-3753-3.

[6] KUŘINA, František a Jana CACHOVÁ. *Matematika a porozumění světu: setkání s matematikou po základní škole*. Vyd. 1. Praha: Academia, 2009, 332 s. ISBN 978-802-0017-437.

Časopisy:

[7] *21.století: Mozkovna*. 1/2013. Dostupné z: <https://cs.publero.com/title/21-stoleti-mozkovna/1-13>

[8] *21.století: Mozkovna*. 2/2013. Dostupné z: <https://cs.publero.com/title/21-stoleti-mozkovna/2-13>

Učebnice ZŠ

[9] PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL a Jitka BOUŠKOVÁ. *Matematika 6 pro základní školy: aritmetika*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007, 135 s. ISBN 978-807-2353-644.

[10] PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL a Jitka BOUŠKOVÁ. *Matematika 6 pro základní školy: aritmetika*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007, 136 s. ISBN 978-807-2353-651.

[11] PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL a Jitka BOUŠKOVÁ. *Matematika 7 pro základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2008, 86 s. ISBN 9788072353989.

[12] PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL a Jitka BOUŠKOVÁ. *Matematika 7 pro základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2008, 86 s. ISBN 978-807-2353-996.

[13] PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL a Jitka BOUŠKOVÁ. *Matematika 8 pro základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2009, 2 sv. ISBN 9788072352414.

[14] PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL a Jitka BOUŠKOVÁ. *Matematika 8 pro základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2009, 2 sv. ISBN 978-80-7235-420-7.

[15] PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK a Josef TREJBAL. *Matematika 9 pro základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2010, 102 s. Acta Universitatis Purkynianae. ISBN 978-807-2354-894.

[16] PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK a Josef TREJBAL. *Matematika 9 pro základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2010, 155 s. Acta Universitatis Purkynianae. ISBN 978-807-2354-870.

Pracovní sešity

[17] BOUŠKOVÁ, Jitka, Milena BRZOŇOVÁ, Zdeněk PŮLPÁN, Michal ČIHÁK a Milena BRZOŇOVÁ. *Matematika 6: pro základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007, 2 sv. ISBN 978-80-7235-365-1.

[18] PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Jitka BOUŠKOVÁ, Milena BRZOŇOVÁ a Milena BRZOŇOVÁ. *Matematika 6: pro základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007, 2 sv. ISBN 978-80-7235-366-8.

[19] BOUŠKOVÁ, Jitka, Milena BRZOŇOVÁ, Jitka BOUŠKOVÁ, Milena BRZOŇOVÁ a Milena BRZOŇOVÁ. *Matematika 7 pro základní školy: pro základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2008, 63 s. ISBN 978-807-2354-122.

[20] BOUŠKOVÁ, Jitka, Milena BRZOŇOVÁ, Josef TREJBAL, Milena BRZOŇOVÁ a Milena BRZOŇOVÁ. *Matematika 7 pro základní školy: geometrie : pracovní sešit*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2008, 63 s. ISBN 978-807-2353-934.

[21] PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL, Jitka BOUŠKOVÁ a Milena BRZOŇOVÁ. *Matematika 8 pro základní školy: geometrie : pracovní sešit*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2009, 2 sv. ISBN 978-80-7235-420-7.

[22] PŮLPÁN, Zdeněk, Josef TREJBAL, Jitka BOUŠKOVÁ a Milena BRZOŇOVÁ. *Matematika 8 pro základní školy: geometrie : pracovní sešit*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2009, 2 sv. ISBN 978-80-7235-422-1.

[23] PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL, Jitka BOUŠKOVÁ a Milena BRZOŇOVÁ. *Matematika 9 pro základní školy: aritmetika*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2010, 2 sv. ISBN 97880723549887.

[24] PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL, Jitka BOUŠKOVÁ a Milena BRZOŇOVÁ. *Matematika 9 pro základní školy: aritmetika*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2010, 2 sv. ISBN 978-80-7235-490-0.

Elektronické zdroje:

[25] HEJNÝ, Milan a Darina JIROTKOVÁ. *Matematické úlohy pro druhý stupeň základního vzdělávání: náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007*

[online]. 1. vyd. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2010, 111 s. [cit. 2014-04-15].

ISBN 978-80-211-0612-3. Dostupné z: <http://www.csicr.cz/getattachment/cz/O-nas/Mezinarodni-setreni-archiv/VVV/VYUZITI-VYSLEDKU-VYZKUMU-PRO-PODPORU-SKOL-A-JEJICH/Matem-ulohy-pro-2-stupen-publikace.pdf>

[25] Problem of the Week. [online]. [cit. 2014-04-15]. Dostupné z:

<http://www.cemc.uwaterloo.ca/resources/potw.php>

[26] *Pythagorova věta* [online]. 2006-2014 [cit. 2014-04-16]. Dostupné z:

<http://www.matematika.cz/pythagorova-veta>

[27] *Úhel* [online]. 2006-2014 [cit. 2014-04-16]. Dostupné z: <http://www.matematika.cz/uhel>

[28] *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* [online]. Editor Milan Hejný, Jarmila Novotná,

Nad'a Vondrová. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004, viii, 212 s.

[cit. 2014-04-16]. ISBN 80729018931. Dostupné z:

http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_59.pdf

[29] *Hádanky a hlavolamy* [online]. 18.2.2013 [cit. 2014-04-24]. Dostupné z: <http://hadanky-a-hlavolamy.webnode.cz/news/einsteinova-hadanka/>