UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Katedra algebry a geometrie

SBÍRKA ÚLOH Z MONGEOVA PROMÍTÁNÍ

Diplomová práce

Mgr. Stanislava Pospíšilová

Vedoucí práce Mgr. Marie Chodorová, Ph.D.

Olomouc 2020

Učitelství deskriptivní geometrie pro střední školy

Forma kombinovaná

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci včetně příloh vypracovala samostatně a použila jen uvedené bibliografické zdroje.

V Olomouci dne Mgr. Stanislava Pospíšilová

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych ráda poděkovala své vedoucí práce, Mgr. Marii Chodorové, Ph.D., za její odborné vedení, cenné rady, ochotu a pomoc při zpracování diplomové práce.

ABSTRAKT

Diplomová práce je zaměřena na geometrické úlohy řešené v Mongeově promítání. Text práce je napsán jako studijní materiál jak pro pedagogy, tak i studenty a mohl by být použit v semináři při výuce deskriptivní geometrie. Součástí práce jsou i pracovní listy se zadáním úkolů. Všechny úkoly jsou zpracovány v elektronické podobě a jsou uloženy na přiloženém CD. Příklady jsou narýsovány v programu GeoGebra.

ABSTRACT

The diploma thesis is primarily focused on solving geometric functions in Mongeon Projection. The text is written for pedagogues as well as students (could be used in the Descriptive Geometry seminar likewise) as a study material. The thesis includes worksheets with assignments. All of the task are worked out step by step in an electronic version and placed on the attached CD. The tasks are drawn in the GeoGebra program.

KLÍČOVÁ SLOVA

Mongeovo promítání, průmětna, zobrazení, otočení roviny, sklopení roviny, bod, přímka, rovina, různoběžky, rovnoběžky, mimoběžky, kolmice, průsečík, průsečnice, GeoGebra.

KEY WORDS:

Mongeon Projection, Projection Plane, Projection, Inclined and Oblique planes, Point, Line, Plane, Intersecting lines, Skew lines, Parralel lines, Perpendicular line, Intersection point, Line of intersection, GeoGebra.

PŘEHLED POUŽITÉHO ZNAČENÍ A ZKRATEK

π	půdorysna (xy)
ν	nárysna (xz)
A	bod A
$A[1;2;3]$	bod A o souřadnicích $x_A = 1$, $y_A = 2$, $z_A = 3$
a	přímka a
$a = AB$	přímka a určená body A, B
α	rovina α
$\alpha(1;2;3)$	rovina α určená třemi body $X[1;0;0]$, $Y[0;2;0]$, $Z[0;0;3]$
$\alpha = (a, b)$	rovina α určená přímkami a, b
$\alpha = (A, b)$	rovina α určená bodem A a přímkou b
$A \in b \; (A \notin b)$	bod A leží (neleží) na přímce b
$A \subset \alpha \; (a \subset \alpha)$	bod A leží v rovině α (přímka a leží v rovině α)
$a \cap b$	průsečík přímek a a b
$\lvert AB \rvert$	vzdálenost bodů A, B
$A \; (o = p_1^\alpha, A_1 \rightarrow A^0)$	osová afinita s osou $o = p_1^\alpha$ a párem odpovídajících si bodů: $A_1 \rightarrow A^0$
MP	Mongeovo promítání

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obsah

ÚVOD

V diplomové práci s názvem Sbírka úloh z Mongeova promítání se budu zabývat řešením příkladů v Mongeově promítání. Cílem této práce bylo vytvořit ucelený systém úloh polohových, metrických a úloh o hranatých a oblých tělesech, které se vyskytují v učebnicích deskriptivní geometrie na středních školách. Všechny příklady jsou krokově zpracovány a uloženy ve formátu pdf na přiloženém CD. Práce může posloužit jako inspirace pro učitele deskriptivní geometrie nebo jako vhodná pomůcka pro studenty. Cílem práce je, aby vyřešení většího počtu úloh z každé kapitoly poskytlo studentům záruku dobré a systematické přípravy pro studium dalších zobrazovacích metod. Záleží jen na studentovi, jestli bude chtít úlohy řešit ve sledu kapitol nebo na přeskáčku.

Diplomová práce je rozdělena do pěti kapitol. V první kapitole je stručně zavedeno Mongeovo promítání. Kapitola je hlavně zaměřená na teoretickou část Mongeova promítání. Čtenář je seznámen se zobrazováním základních útvarů – bod, přímka, rovina. Druhá kapitola se zabývá základními polohovými úlohami. Nejdříve jsou teoreticky a pak i prakticky v uceleném souboru 11 příkladů, rozebrány vzájemné polohy bodů, přímek a rovin. Třetí kapitola je věnovaná metrickým úlohám typu: velikost úsečky, odchylka přímky od průměten, odchylka roviny od průměten, vzdálenost bodu od přímky, vzdálenost bodu od roviny. Čtvrtá kapitola se zabývá konstrukčními úlohami o hranatých a oblých tělesech. Obsahuje tři řešené úlohy. V páté kapitole je obsaženo shrnutí.

U čtenáře se předpokládá znalost základních geometrických konstrukcí, umí sestrojit elipsu Rytzovou konstrukcí, dokáže zobrazovat útvary v osové afinitě, ovládá základy planimetrie a stereometrie.

Součástí práce jsou volné pracovní listy s předrýsovanými úkoly, které je možno použít přímo ve výuce.

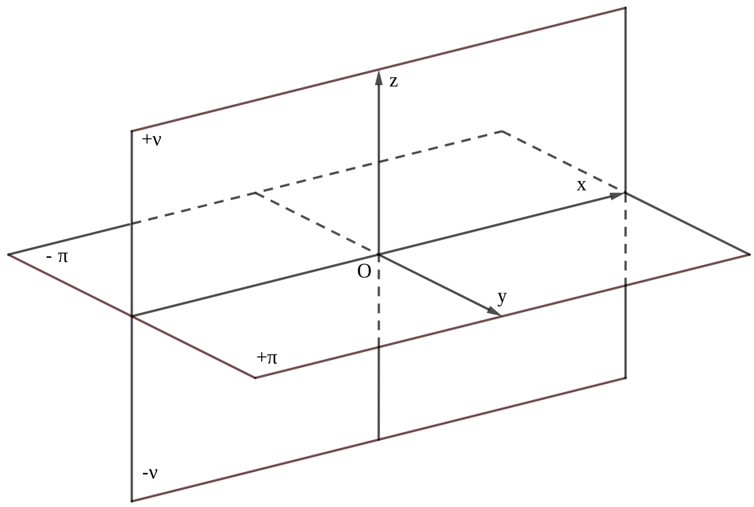
Při psaní diplomové práce jsem se inspirovala z [1], [2] a z vlastních pedagogických zkušeností.

1 MONGEOVO PROMÍTÁNÍ

1.1 Úvod do zobrazovací metody Mongeova promítání

Mongeovo promítání je pravoúhlé promítání na dvě k sobě navzájem kolmé průmětny. Výhodou Mongeova promítání je snadné řešení stereometrických úloh, nevýhodou je ale těžší orientace ve dvou obrazech na jeden objekt.

V prostoru zvolíme dvě navzájem kolmé roviny. Vodorovnou rovinu označíme π a nazveme **půdorysna**, rovinu k ní kolmou označíme ν a nazveme **nárysna**. Průsečnici rovin π a ν ztotožníme s osou x souřadnicového systému a nazveme ji **základnice**. Osu y zvolíme v rovině π a to tak, aby byla kolmá k ose x. Průsečík os x a y označíme O. Tímto bodem O vedeme osu z a to tak, že leží v rovině ν je kolmá k osám x a y (obr. 1.1).



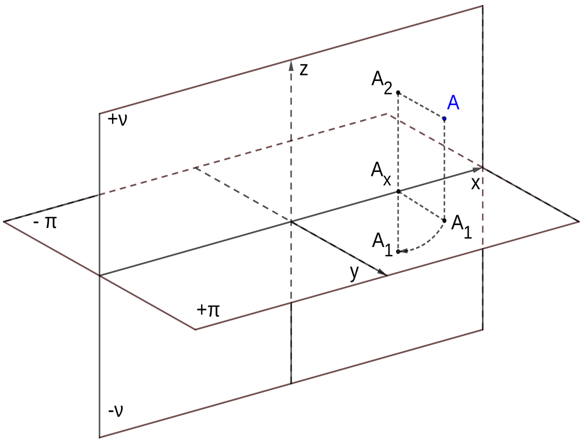
Obr. 1.1 Poloha průměten v Mongeově promítání.

1.2 Zobrazení bodu

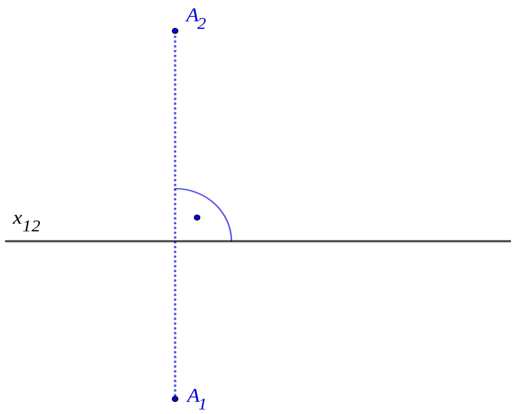
Bod A umístěný v prostoru se zobrazí pomocí první promítací přímky ${}^{1}s^{A}$ do půdorysny do bodu A_{1}. Bod A_1 se nazývá **půdorys bodu *A***. Pomocí druhé promítací přímky ${}^{2}s^{A}$ se bod A zobrazí do nárysny do bodu A_2. Bod A_2 se nazývá **nárys bodu *A***. Půdorysnu otočíme o 90° kolem osy x tak, že splyne kladná polorovina π se zápornou polorovinou ν a záporná polorovina π splyne s kladnou polorovinou ν. Body A_1 a A_2 se nazývají **sdružené obrazy bodu *A***. Přímka A_1A_2 je kolmá k ose x a nazývá se **ordinála** (obr. 1.2, 1.3.).

Nárysna a půdorysna rozdělí celý prostor na 4 kvadranty. Podle kladných nebo záporných hodnot *y*-nové a *z*-tové souřadnice lze určit, do kterého kvadrantu bod náleží.

Splývá-li nárys s půdorysem bodu, leží v tzv. **rovině totožnosti**, jsou-li nárys a půdorys bodu souměrně položeny podle osy *x*, leží v tzv. **rovině souměrnosti**.



Obr. 1.2 Zobrazení bodu.



Obr. 1.3 Zobrazení bodu v MP.

1.3 Zobrazení přímky

Zobrazení přímky v obecné poloze vzhledem k oběma průmětnám:

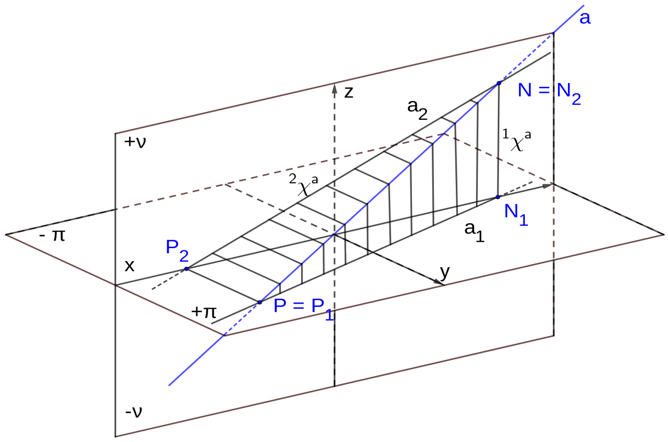
Přímkou *a* proložíme rovinu kolmou k půdorysně tzv. **první promítací rovinu** ${}^{1}\chi^{a}$. Průsečnice první promítací roviny a půdorysny je **půdorysný průmět přímky a_1.**

Přímkou *a* proložíme rovinu kolmou k nárysně tzv. **druhou promítací rovinu** ${}^{2}\chi^{a}$. Průsečnice druhé promítací roviny a nárysny je **nárysný průmět přímky a_2**.

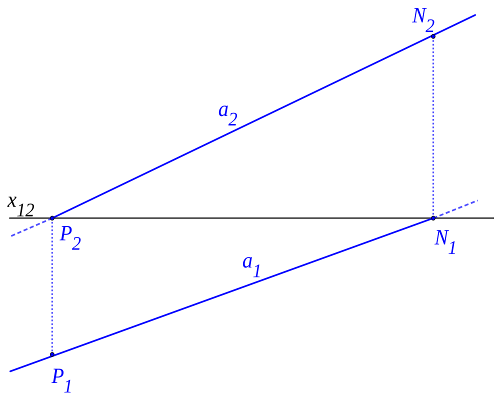
Promítací rovina je rovina kolmá k dané průmětně určená průmětem přímky.

Přímka *a* protíná průmětny (půdorysnu a nárysnu) ve dvou bodech *P* a *N* tzv. **stopnících**. Půdorysný stopník *P* přímky *a* je průsečík přímky *a* s půdorysnou. Leží v půdorysně, proto je jeho $z_p = 0$. Z toho vyplývá, že jeho nárysný obraz leží na ose x_{12}.

Nárysný stopník *N* přímky *a* je průsečík přímky *a* s nárysnou. Leží v nárysně, proto je jeho $y_N = 0$. Z toho plyne, že jeho půdorysný obraz leží na ose x_{12} (obr. 1.4, 1.5).

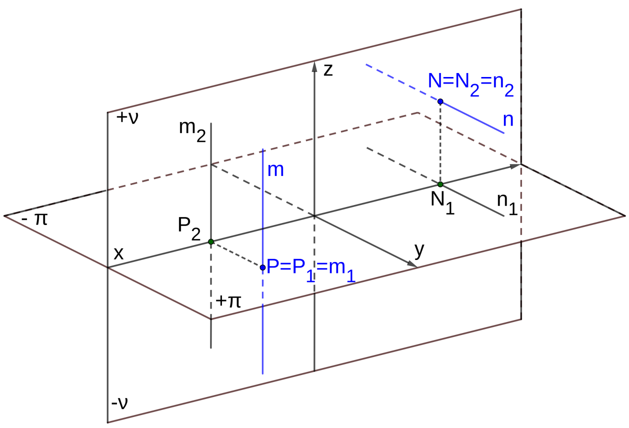


Obr. 1.4 Zobrazení přímky.

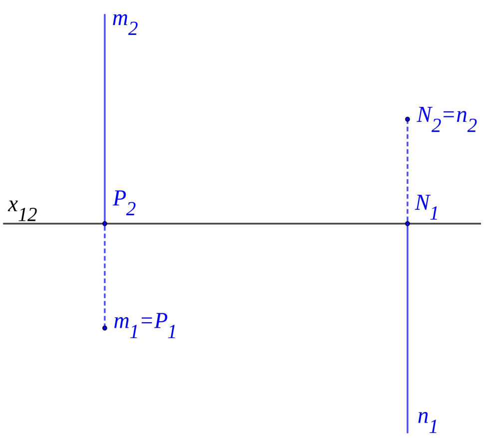


Obr. 1.5 Zobrazení přímky v MP.

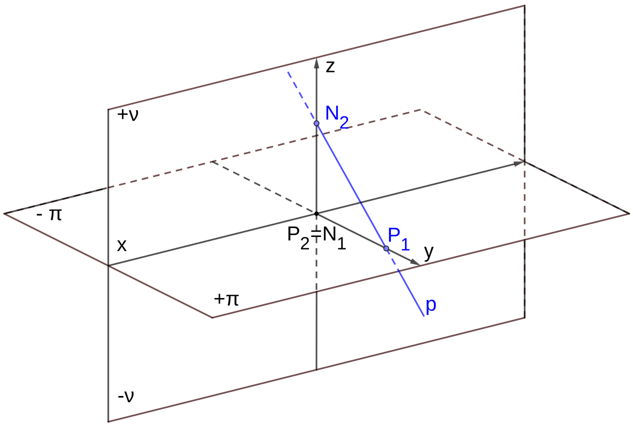
Speciální polohy přímky: přímka kolmá k půdorysně, přímka kolmá k nárysně, přímka kolmá k ose *x*, přímka rovnoběžná s půdorysnou, přímka rovnoběžná s nárysnou, přímka rovnoběžná s osou *x* (obr. 1.6. - 1.15).



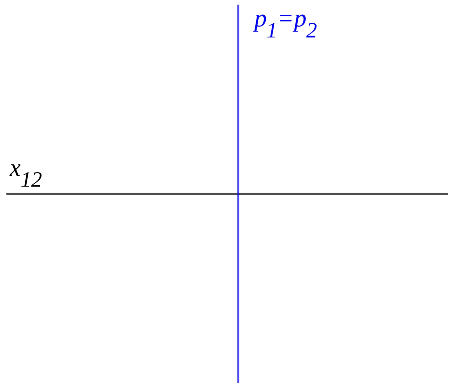
Obr. 1.6 Přímky kolmé k průmětnám.



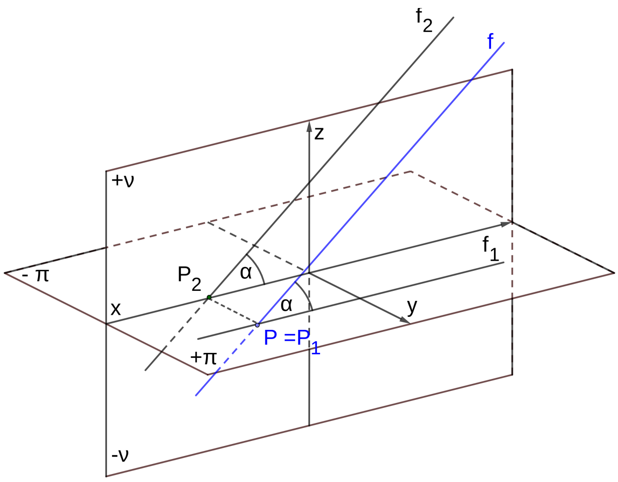
Obr. 1.7 Přímky kolmé k průmětnám v MP.



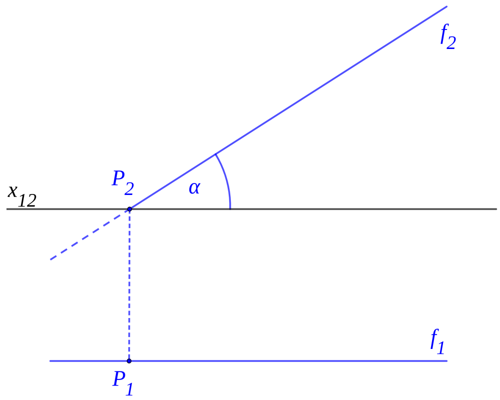
Obr. 1.8 Přímka kolmá k ose x.



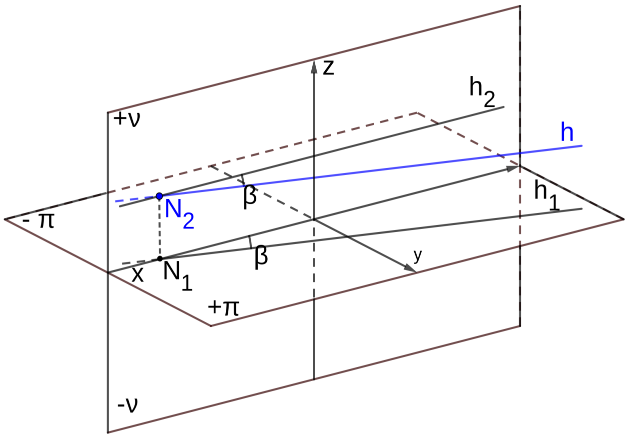
Obr. 1.9 Přímka kolmá k ose x v MP.



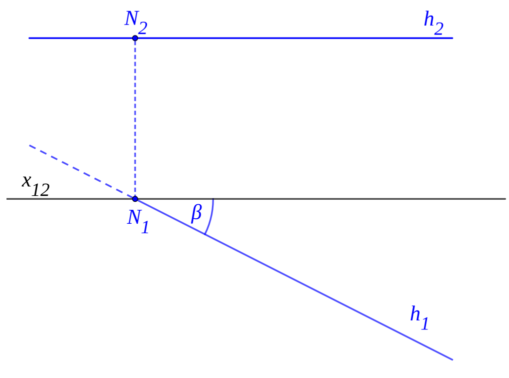
Obr. 1.10 Přímka rovnoběžná s nárysnou .



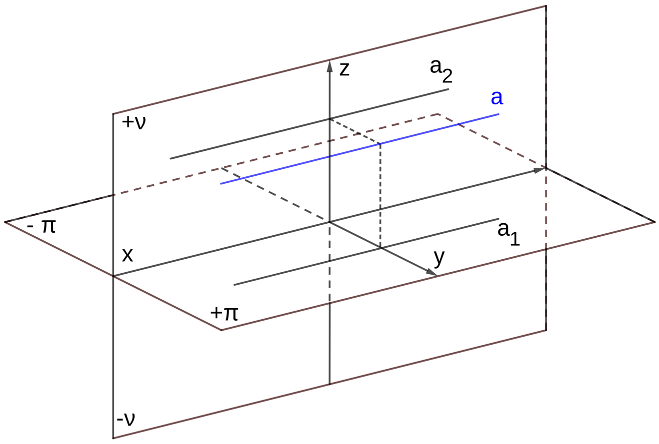
Obr. 1.11 Přímka rovnoběžná s nárysnou v MP.



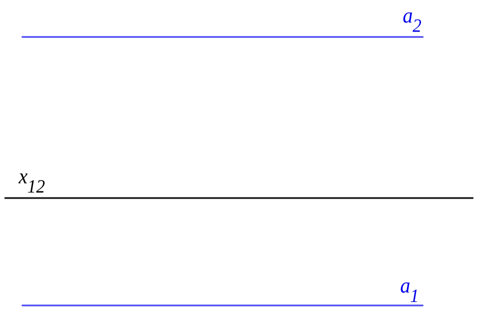
Obr. 1.12 Přímka rovnoběžná s půdorysnou.



Obr. 1.13 Přímka rovnoběžná s půdorysnou v MP.



Obr. 1.14 Přímka rovnoběžná s osou x.

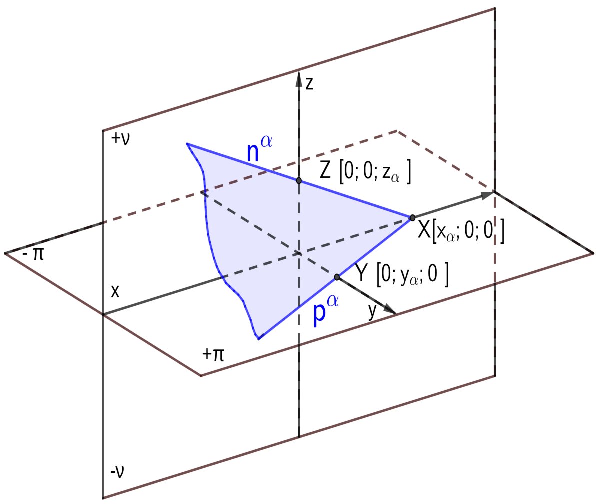


Obr. 1.15 Přímka rovnoběžná s osou x v MP.

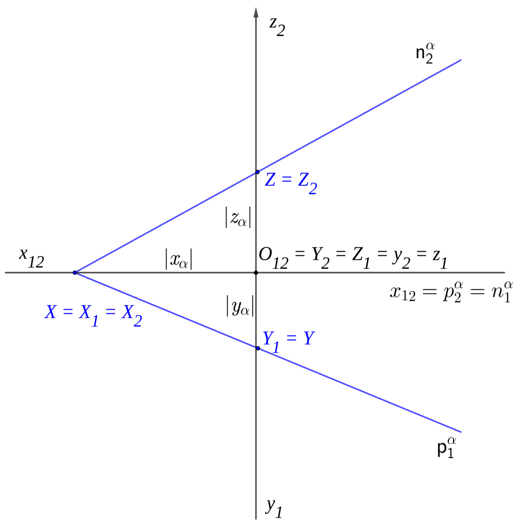
1.4 Zobrazení roviny

Zobrazení roviny v obecné poloze vzhledem k oběma průmětnám:

Půdorysným obrazem obecné roviny je celá půdorysna. Nárysným obrazem obecné roviny je celá nárysna. Průsečnice této roviny s půdorysnou je **půdorysná stopa roviny p^α**. Průsečnice této roviny s nárysnou je **nárysná stopa roviny n^α**. Půdorysná a nárysná stopa se protínají na ose *x* (obr. 1.16, 1.17).

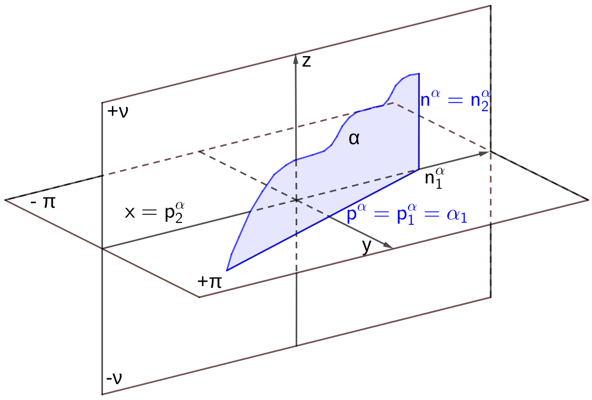


Obr. 1.16 Zobrazení roviny.

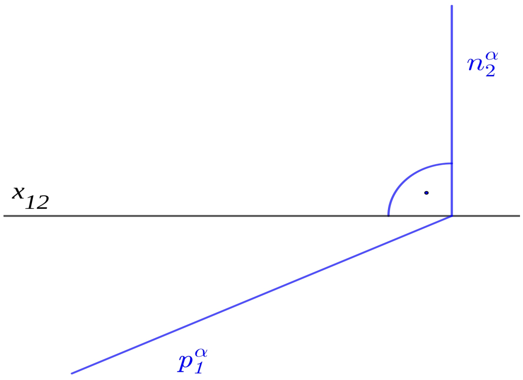


Obr. 1.17 Zobrazení roviny v MP.

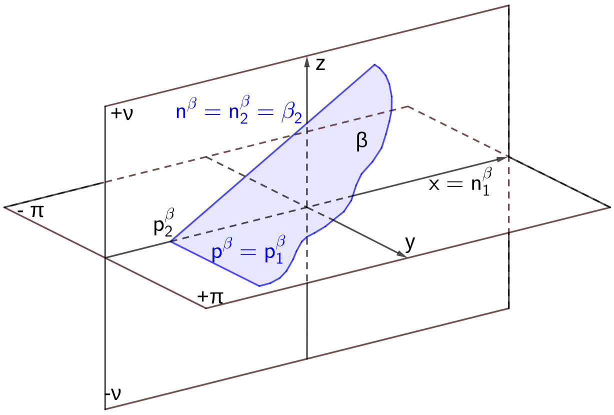
Zobrazení rovin ve speciálních polohách: rovina kolmá k půdorysně, rovina kolmá k nárysně, rovina rovnoběžná s půdorysnou, rovina rovnoběžná s nárysnou, rovina obsahující osu *x*, rovina rovnoběžná s osou *x*, rovina kolmá k ose *x* (obr. 1.18 -1.31).



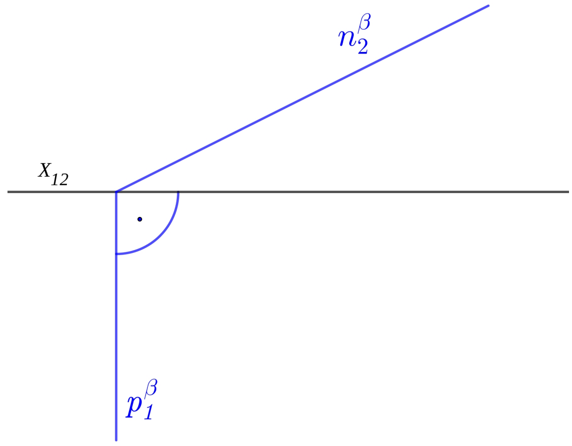
Obr. 1.18 Rovina kolmá k půdorysně.



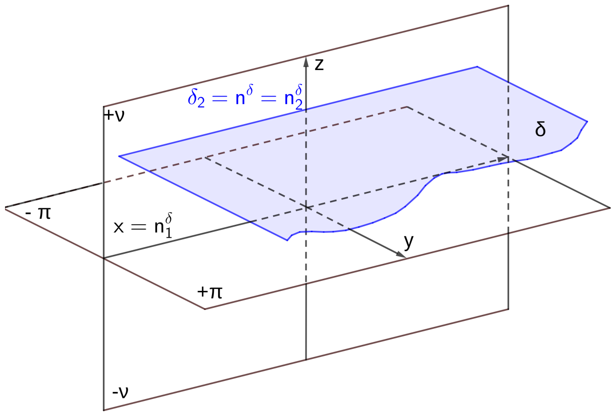
Obr. 1.19 Rovina kolmá k půdorysně MP.



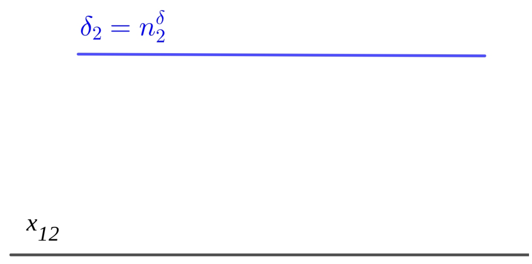
Obr. 1.20 Rovina kolmá k nárysně.



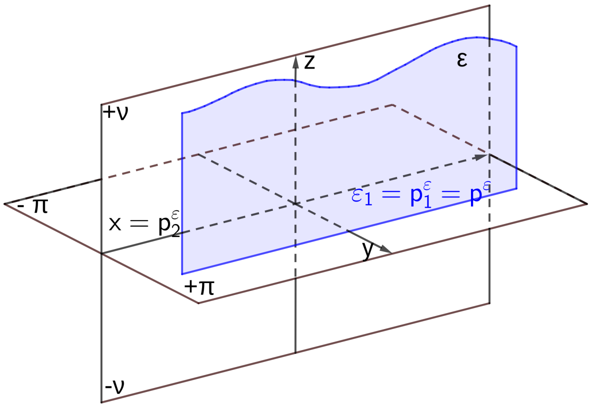
Obr. 1.21 Rovina kolmá k nárysně v MP.



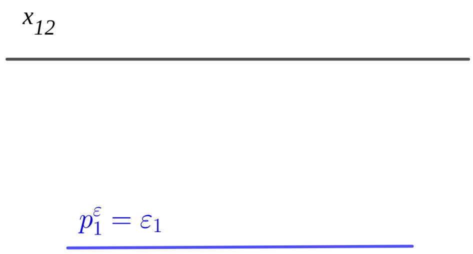
Obr. 1.22 Rovina rovnoběžná s půdorysnou.



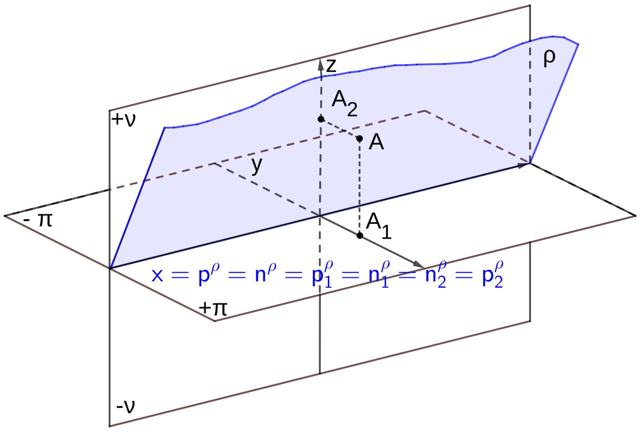
Obr. 1.23 Rovina rovnoběžná s půdorysnou v MP.



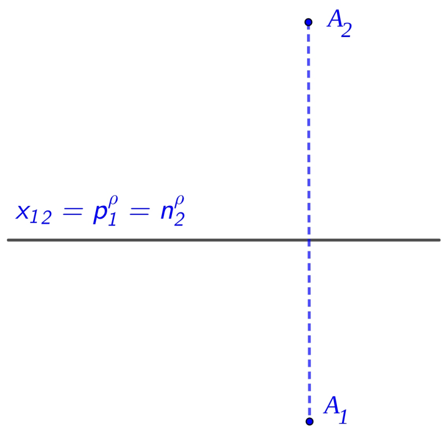
Obr. 1.24 Rovina rovnoběžná s nárysnou.



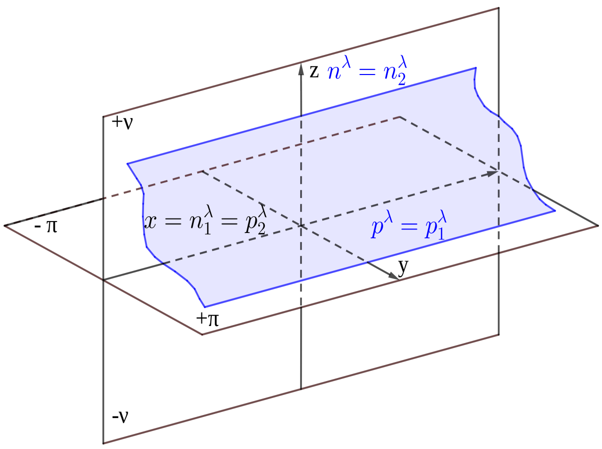
Obr. 1.25 Rovina rovnoběžná s nárysnou v MP.



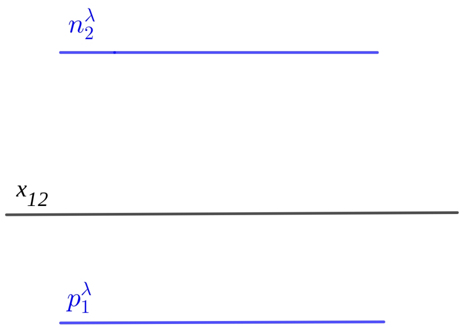
Obr. 1.26 Rovina procházející osou x.



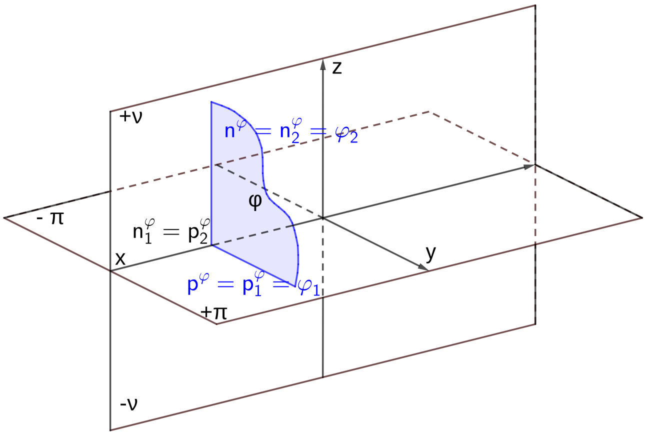
Obr. 1.27 Rovina procházející osou x v MP.

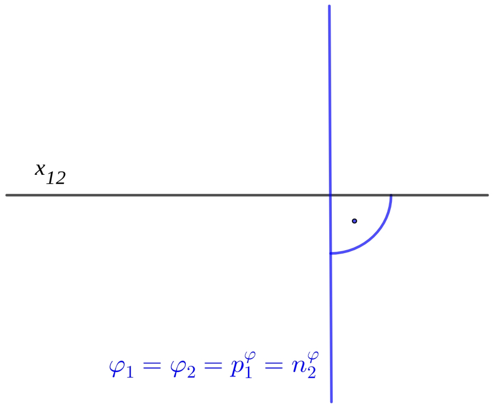


Obr. 1.28 Rovina rovnoběžná s osou x.



Obr. 1.29 Rovina rovnoběžná s osou x v MP.



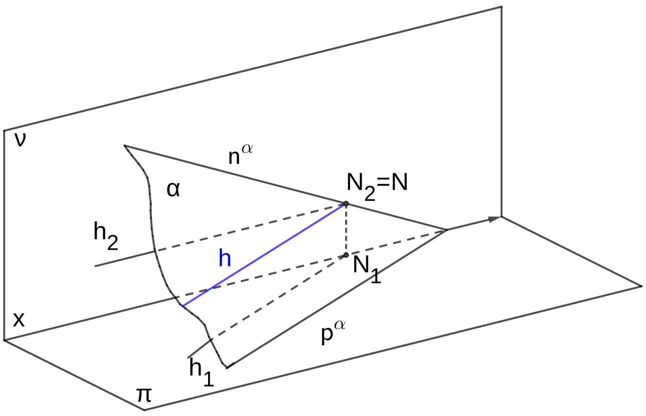


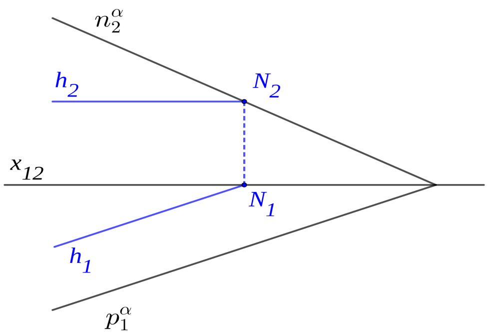
Obr. 1.30 Rovina kolmá k ose x.

Obr. 1.31 Rovina kolmá k ose x v MP.

1.5 Hlavní přímky roviny

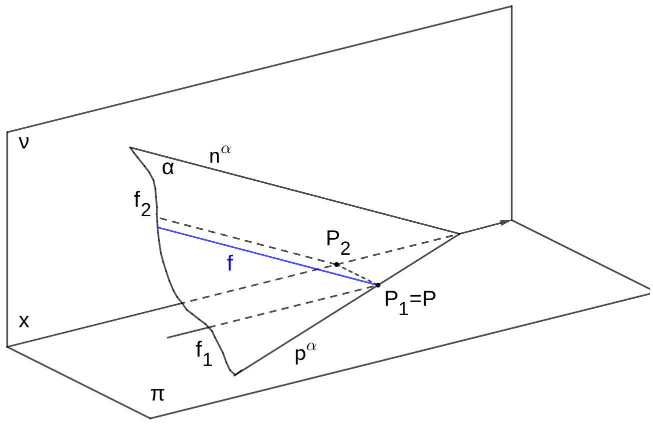
Hlavní přímky první (druhé) osnovy jsou přímky roviny, které jsou rovnoběžné s půdorysnou (nárysnou) a tedy i se stopou roviny. Hlavní přímky rovnoběžné s půdorysnou (nárysnou) se nazývají **horizontální** (**frontální**) (obr. 1.32 – 1.35).



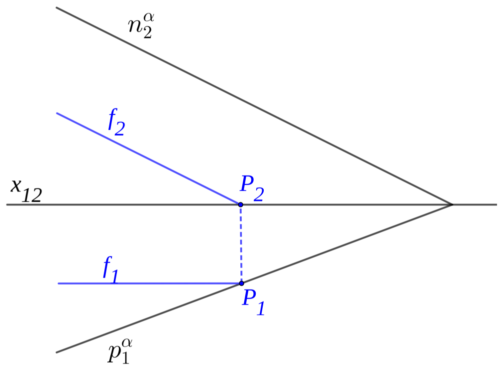


Obr. 1.32 Hlavní přímka první osnovy.

Obr. 1.33 Hlavní přímka první osnovy v MP.



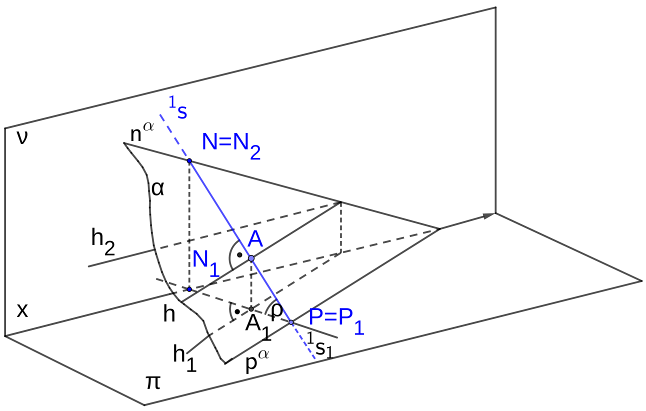
Obr. 1.34 Hlavní přímka druhé osnovy.



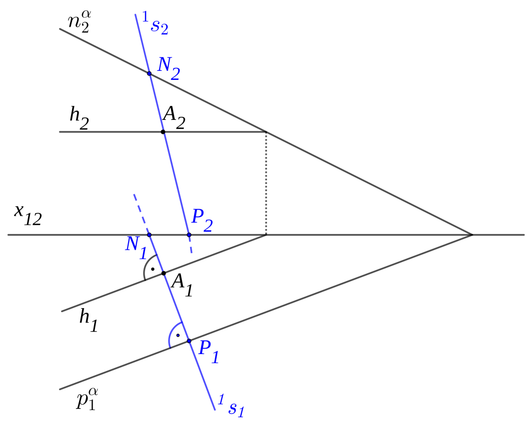
Obr. 1.35 Hlavní přímka druhé osnovy v MP.

1.6 Spádové přímky roviny

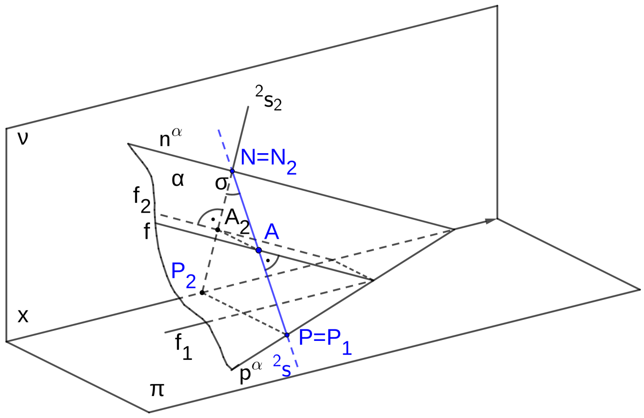
Spádové přímky první (druhé) osnovy jsou přímky, které leží v rovině a jsou kolmé k hlavním přímkám roviny, a tedy i ke stopám roviny (obr. 1.36 – 1.39).



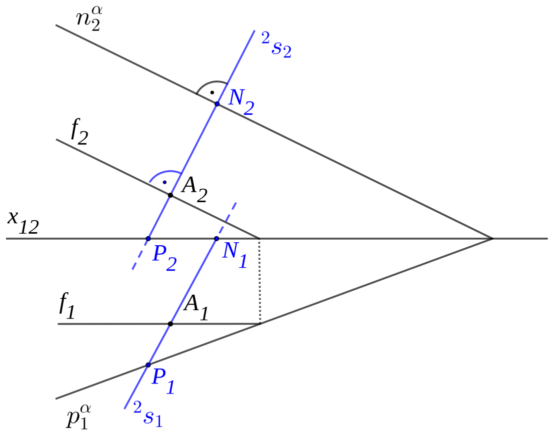
Obr. 1.36 Spádová přímka první osnovy.



Obr. 1.37 Spádová přímka první osnovy v MP.



Obr. 1.38 Spádová přímka druhé osnovy.

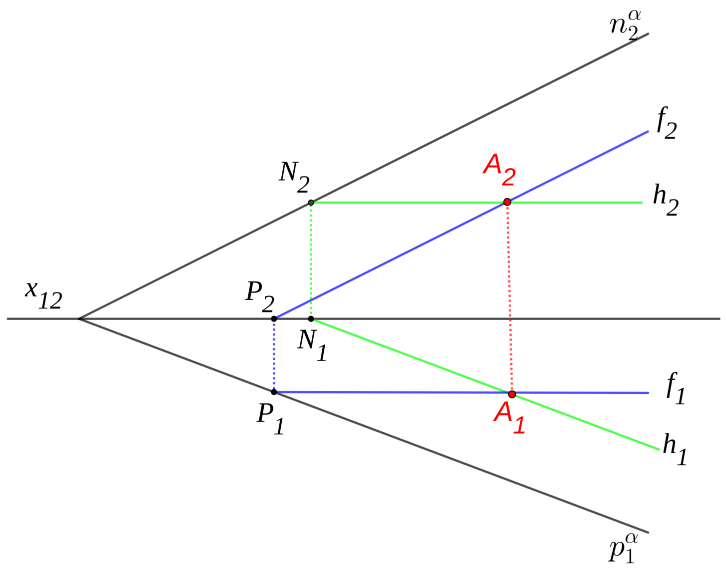


Obr. 1.39 Spádová přímka druhé osnovy v MP.

2 POLOHOVÉ ÚLOHY

2.1 Bod ležící v rovině

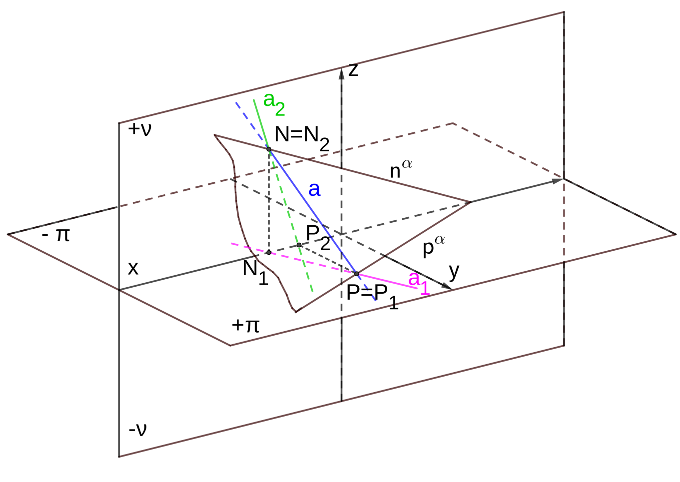
Leží-li bod A v rovině α, leží na některé přímce této roviny. Vhodnější než volit libovolnou přímku, je vést bodem A hlavní přímku první (druhé) osnovy (obr. 2.1).



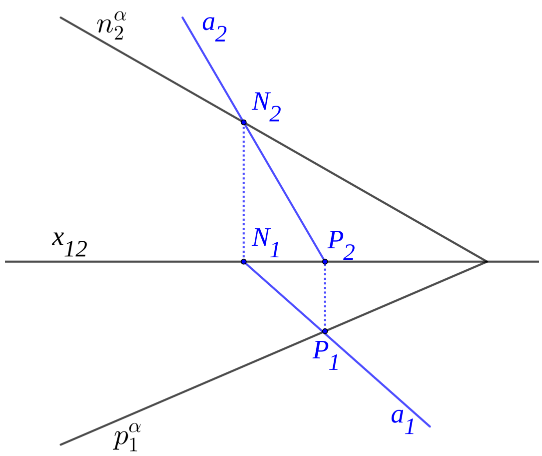
Obr. 2.1 Bod patřící rovině.

2.2 Přímka ležící v rovině

Leží-li přímka a v rovině α, leží její stopníky na stopách roviny α (obr. 2.2, 2.3).



Obr. 2.2 Přímka ležící v rovině.



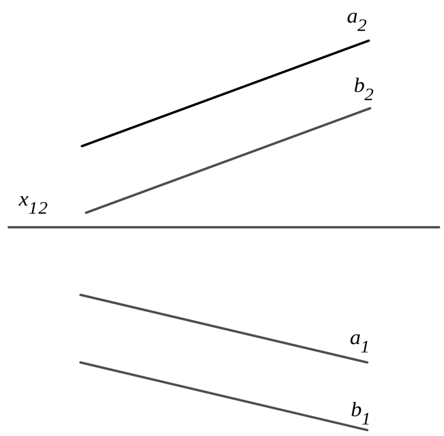
Obr. 2.3 Přímka ležící v rovině v MP.

2.3 Vzájemná poloha přímek

Existují tři různé polohy dvou přímek: rovnoběžné, různoběžné mimoběžné.

2.3.1 Rovnoběžné přímky

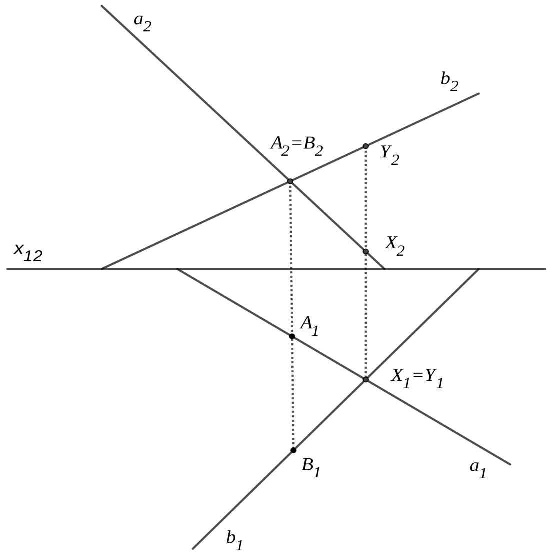
Rovnoběžné přímky, které nejsou ve speciální poloze, mají rovnoběžné promítací roviny první i druhé osnovy, a proto i jejich průměty jsou rovnoběžné (obr. 2.4).



Obr. 2.4 Rovnoběžné přímky.

2.3.2 Různoběžné přímky

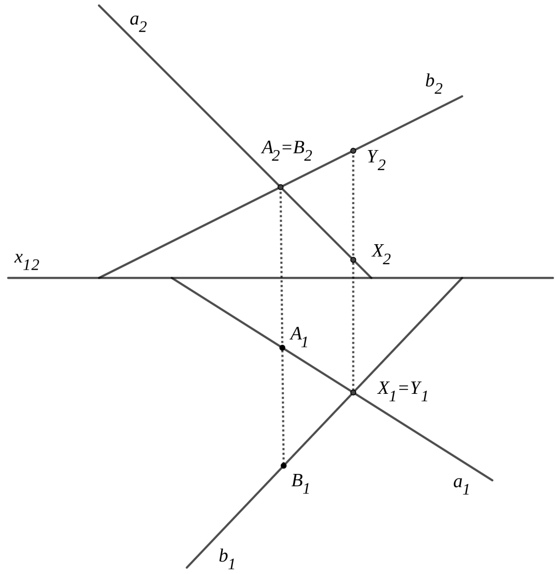
Pro různoběžné přímky, které nejsou ve speciální poloze platí, že průsečíky půdorysných a nárysných obrazů těchto přímek leží na ordinále (obr. 2.5).



Obr. 2.5 Různoběžné přímky.

2.3.3 Mimoběžné přímky

Pro mimoběžné přímky, které nejsou ve speciální poloze platí, že průsečíky půdorysných a nárysných obrazů těchto přímek neleží na ordinále (obr. 2.6).

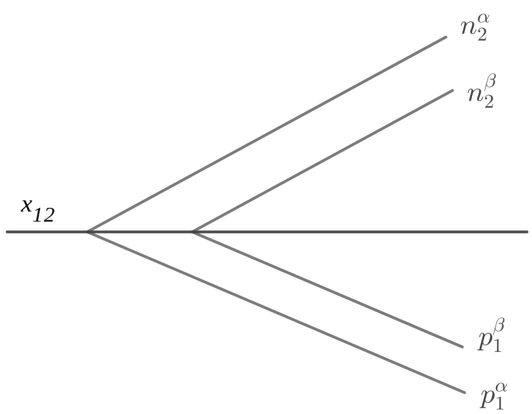


Obr. 2.6 Mimoběžné přímky.

2.4 Vzájemná poloha rovin

2.4.1 Rovnoběžné roviny

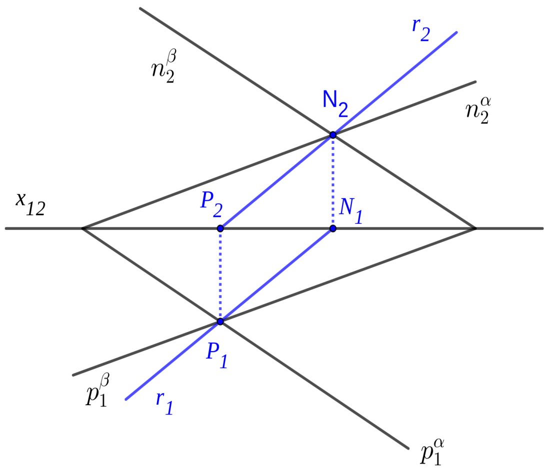
Dvě roviny jsou rovnoběžné, jsou-li rovnoběžné jejich půdorysné i nárysné stopy (obr. 2.7).



Obr. 2.7 Rovnoběžné roviny.

2.4.2 Různoběžné roviny, průsečnice různoběžných rovin

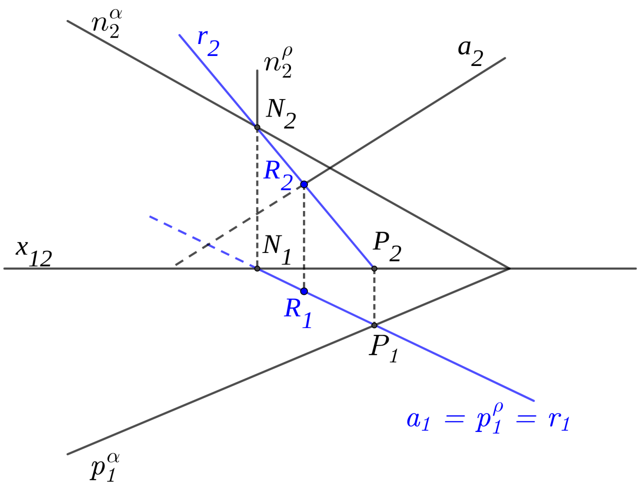
Společná přímka různoběžných rovin se nazývá **průsečnice**. K určení průsečnice *r* potřebujeme dva body. Jeden bod je průsečík půdorysných stop rovin, druhým bodem je průsečík nárysných stop rovin (obr. 2.8): $P\in p^{\alpha}\cap p^{\beta}$, $N\in n^{\alpha}\cap n^{\beta}$.



Obr. 2.8 Průsečnice různoběžných rovin.

2.4.3 Průsečík přímky a roviny

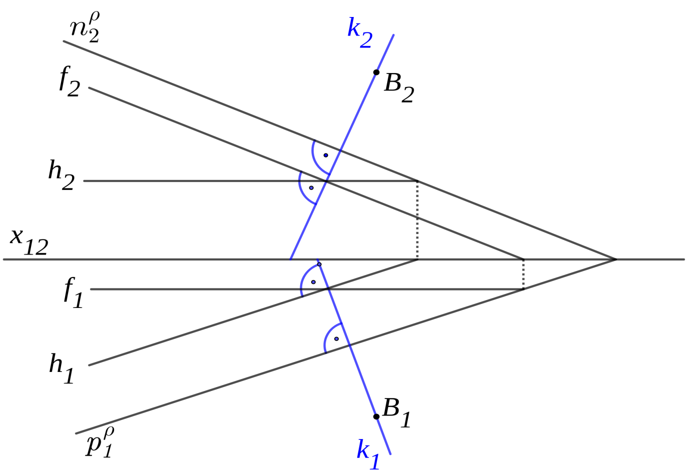
Přímkou *a* proložíme libovolnou pomocnou rovinu ρ, a tím převedeme úlohu na průsečnici dvou rovin. Aby úloha byla co nejjednodušší, proložíme přímkou první (druhou) promítací rovinu ρ: $a_1=\rho_1=p_{1,}^{\rho}\ n_2^{\rho}\perp x_{12}$. Půdorysný obraz r_1 průsečnice se kryje s půdorysným obrazem přímky *a*: $a_1=p_1^{\rho}=r_1$. Nárysný obraz r_2 průsečnice odvodíme ze stopníků přímky r_1: $r_2=P_2N_2$. Pro nárysný obraz průsečíku *R* platí: $R_2\in r_2\cap a_2$. Půdorysný obraz průsečíku *R* najdeme na ordinále a na půdorysném obrazu přímky *a*. Přímka *r* se nazývá nárysně (půdorysně) **krycí přímka** (obr. 2.9).



Obr. 2.9 Průsečík přímky a roviny.

2.4.4 Přímka kolmá k rovině

Je-li rovina rovnoběžná s některou průmětnou, je jedním průmětem kolmice bod. Není-li rovina rovnoběžná s některou z průměten, je půdorysný obraz kolmice kolmý k půdorysu všech hlavních přímek první osnovy, a tedy i k půdorysné stopě roviny: $(k_1 \perp p_1^{\rho}) \wedge (k_1 \perp h_1)$ a nárysný obraz kolmice je kolmý k nárysu všech hlavních přímek druhé osnovy, a tedy i k nárysné stopě roviny: $(k_2 \perp n_2^{\rho}) \wedge (k_2 \perp f_2)$ (obr. 2.10).

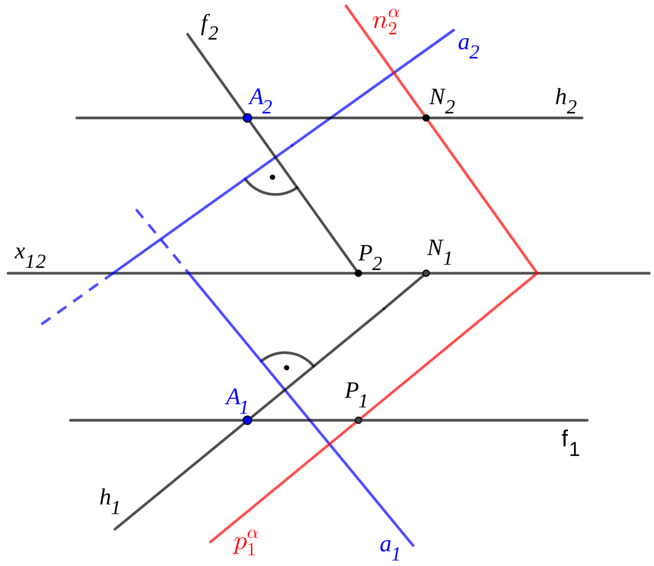


Obr. 2.10 Přímka kolmá k rovině.

2.4.5 Rovina kolmá k přímce

Rovina kolmá k přímce *a* procházející bodem *A*:

hledaná rovina je určena hlavními přímkami první a druhé osnovy: $A_1 \in h_1 \perp a_1$, $A_2 \in f_2 \perp a_2$, $A_1 \in f_1 \| x_{12}$, $A_2 \in h_2 \| x_{12}$. Stopy roviny pak určíme ze stopníků P a N hlavních přímek $p_1^\alpha : (P_1 \in p_1^\alpha) \wedge (p_1^\alpha \perp a_1)$, $n_2^\alpha : (N_2 \in n_2^\alpha) \wedge (n_2^\alpha \perp a_2)$ (obr. 2.11).

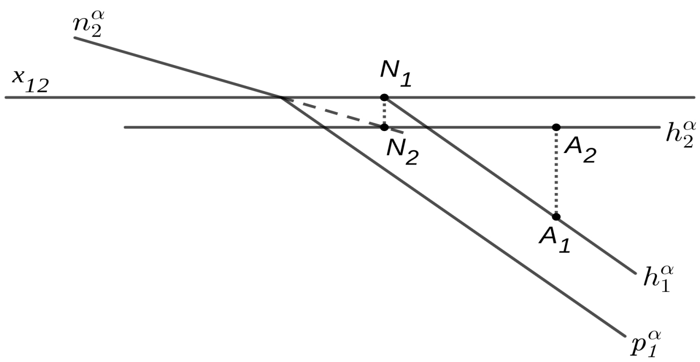


Obr. 2.11 Rovina kolmá k přímce.

2.5 Sbírka polohových úloh

Příklad 2.1

Určete nárysný obraz bodu *A* tak, aby ležel v rovině α, je-li rovina α zadaná svými stopami.



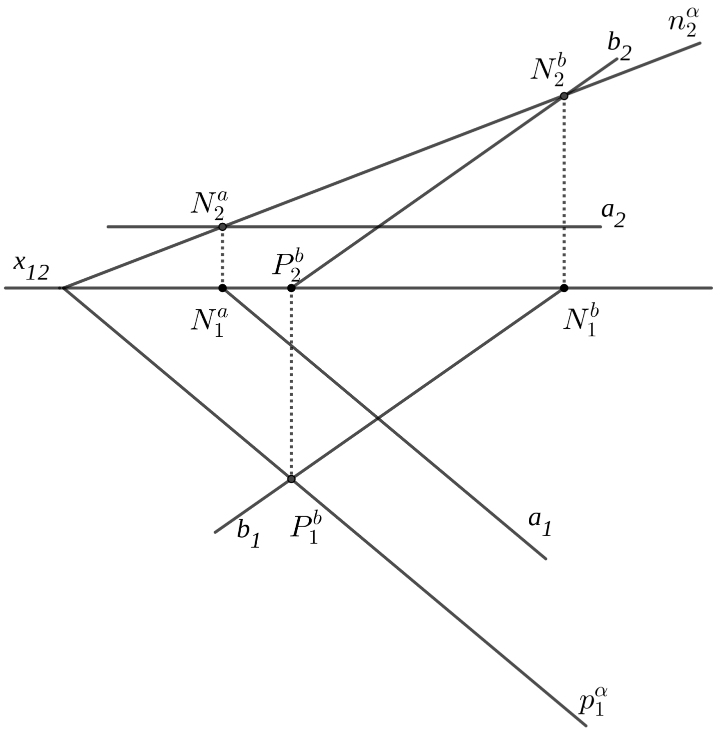
Obr. 2.12 Obraz bodu ležícího v rovině.

Řešení:

Protože bod *A* leží v rovině α: $A \subset \alpha$, leží také na některé přímce této roviny, tedy i na hlavních přímkách první a druhé osnovy. Na obrázku je zvolena hlavní přímka první osnovy procházející půdorysným obrazem bodu *A:* $(A_1 \in h_1) \wedge (h_1 \| p_1^\alpha)$. Nárysný obraz hlavní přímky *h* určíme pomocí nárysného stopníku *N:* $(N_2 \in h_2) \wedge (h_2 \| x_{12})$. Nárysný obraz bodu *A* pak leží na průsečíku nárysného obrazu hlavní přímky první osnovy a ordinály bodu *A* (obr. 2.12).

Příklad 2.2

Určete stopy roviny α dané různoběžkami *a, b.*



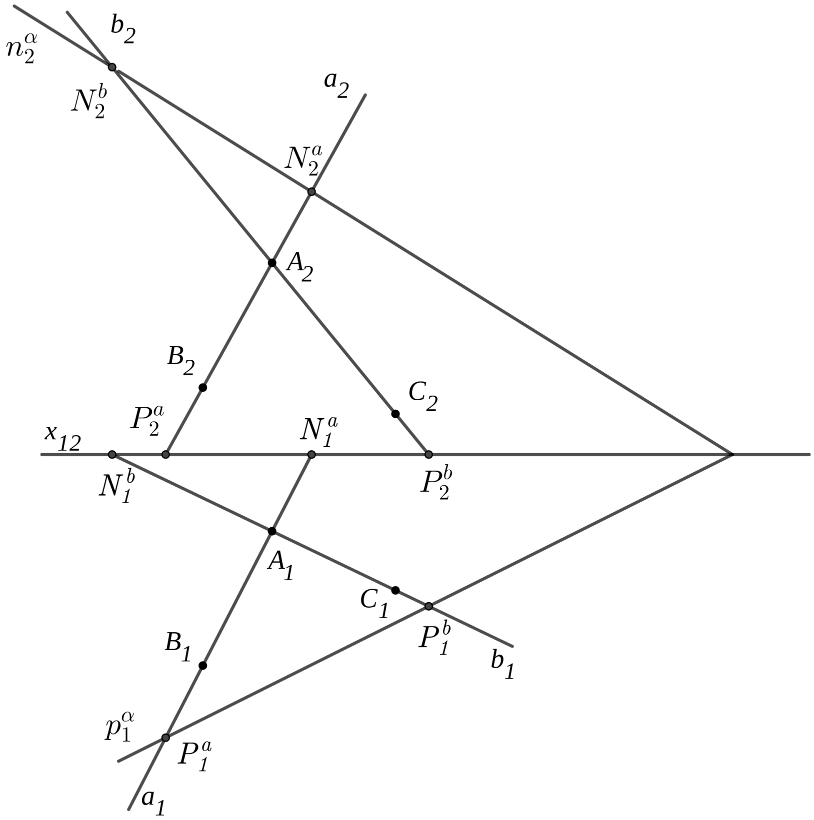
Obr. 2.13 Rovina určená různoběžkami.

Řešení:

Určíme nárysné stopníky obou přímek. Nárysná stopa roviny α prochází těmito stopníky. Vzhledem k tomu, že přímka *a* je hlavní přímka první osnovy (nárysný obraz přímky *a* je rovnoběžný s osou *x*), bude půdorysná stopa roviny α rovnoběžná s půdorysným obrazem přímky *a*. Stačí tedy v průsečíku nárysné stopy roviny a osy *x* vést přímku rovnoběžnou s půdorysným obrazem přímky *a* (obr. 2.13).

Příklad 2.3

Určete stopy roviny, která je dána třemi body *A*, *B*, *C*.



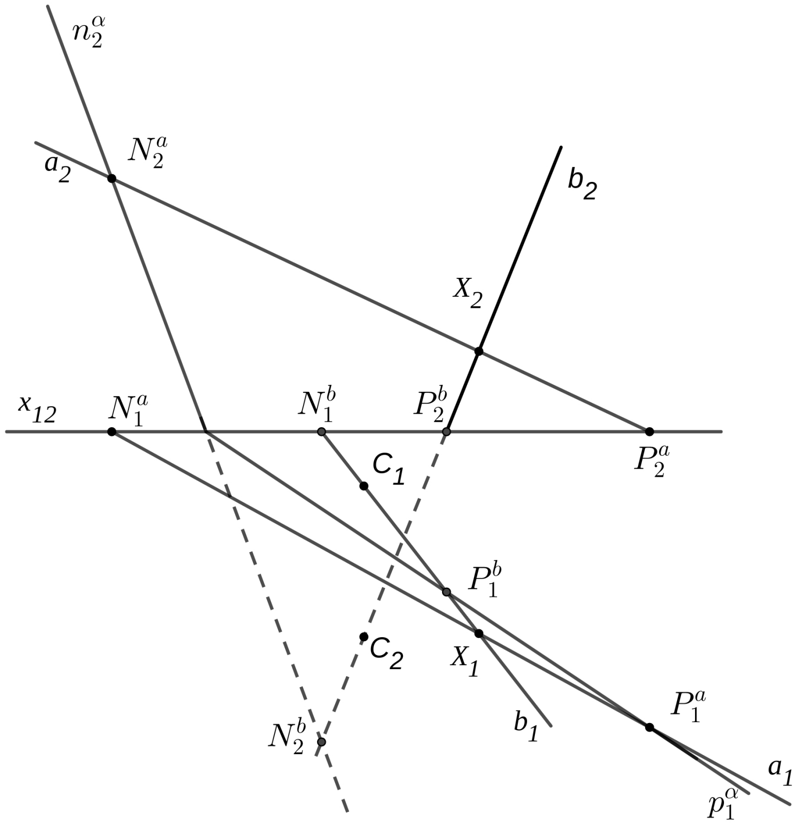
Obr. 2.14 Rovina určená třemi body.

Řešení:

Každá rovina je třemi body jednoznačně určena. Stopníky všech přímek roviny leží na stopách roviny. Třemi body lze vést tři různé přímky, nám stačí zvolit dvě z nich. Dle kapitoly 1.3 určíme půdorysné stopníky P_1^a, P_1^b přímek *a*, *b*. Půdorysná stopa roviny tedy prochází půdorysnými stopníky těchto přímek; $p_1^\alpha = P_1^a P_1^b$. Vzhledem k tomu, že nárysná stopa roviny prochází také průsečíkem půdorysné stopy roviny s osou *x*, stačí určit pouze jeden nárysný stopník jedné z přímek *a*, *b*, např. N_1^a. Nárysná stopa roviny potom prochází tímto stopníkem a průsečíkem půdorysné stopy s osou *x* (obr. 2.14).

Příklad 2.4

Určete stopy roviny α, která je určena přímkou *a* a bodem *C*.



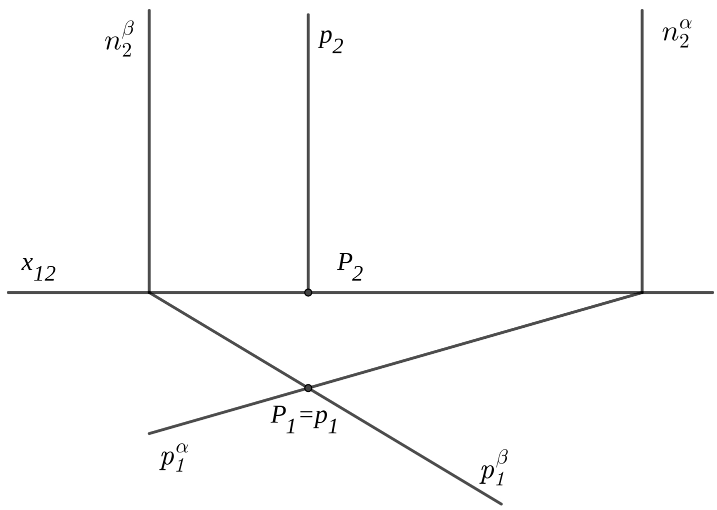
Obr. 2.15 Rovina určená přímkou a bodem.

Řešení:

Jedním bodem a přímkou je rovina jednoznačně určena. Bodem *C* vedeme libovolnou přímku roviny α, různoběžnou s přímkou *a*. To znamená, že průsečík půdorysů spolu s průsečíkem nárysů přímek *a* a *b* leží na jedné ordinále. Dále pokračujeme jako v příkladu 2.3 (obr. 2.15).

Příklad 2.5

Určete průsečnici rovin α a β.



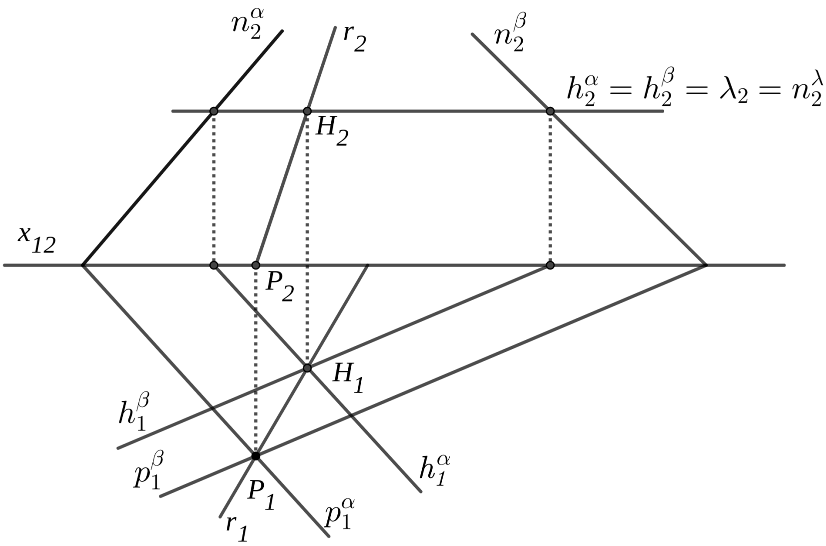
Obr. 2.16 Průsečnice rovin kolmých k půdorysně.

Řešení:

Průsečnice rovin α a β je přímka p daná sdruženými průměty p_1 a p_2. Vzhledem k tomu, že obě roviny jsou ve speciální poloze – kolmé k půdorysně, je průsečnice těchto rovin také kolmá k půdorysně. Půdorysný obraz této průsečnice se zobrazí jako bod: $P_1 = p_1$, nárysný obraz přímky p je kolmý k ose x_{12} a prochází nárysným obrazem P_2 půdorysného stopníku P (obr. 2.16).

Příklad 2.6

Určete průsečnici rovin α a β, jejichž nárysné stopy se protnou mimo nákresnu.



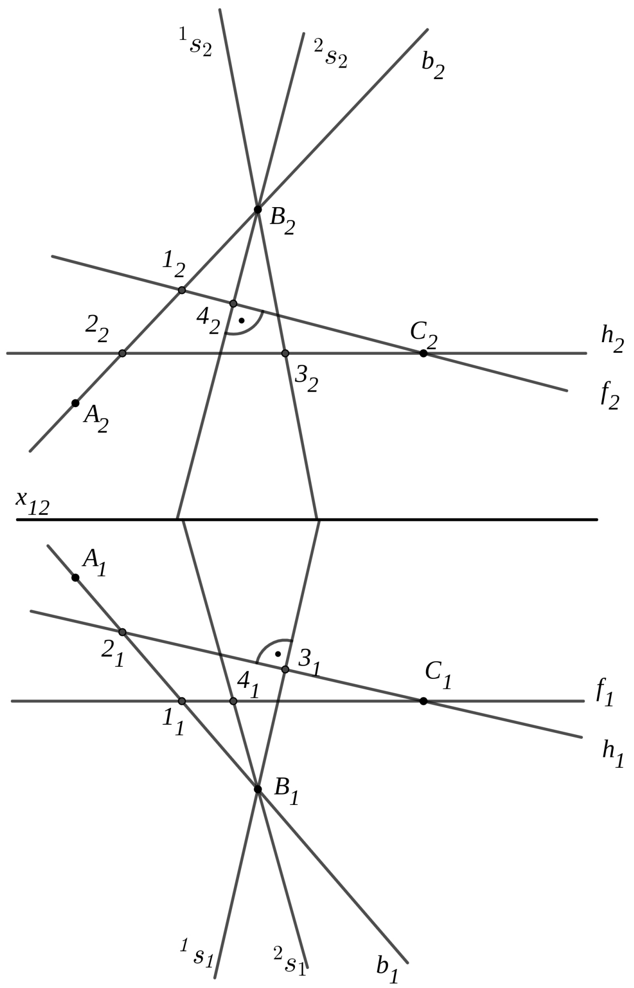
Obr. 2.17 Průsečnice rovin.

Řešení:

K určení průsečnice r rovin α a β potřebujeme 2 body. Jeden bod určíme jako průsečík půdorysných stop rovin: $P_1 \in p_1^\alpha \cap p_1^\beta$, $P_2 \in x_{12}$ a na ordinále bodu P. Nárysné stopy se protnou mimo nákresnu, proto si zvolíme libovolnou rovinu λ rovnoběžnou s půdorysnou: $\lambda_2 \| x_{12}$. Rovina λ protne obě roviny v hlavních přímkách druhé osnovy: $h_2^\alpha = h_2^\beta = \lambda_2$. Pomocí jejich nárysných stopníků sestrojíme půdorysné obrazy hlavních přímek první osnovy rovin α a β: $h_1^\alpha \| p_1^\alpha$ a $h_1^\beta \| p_1^\beta$. Obě tyto hlavní přímky leží v jedné horizontální rovině. Průsečík těchto přímek je bod H: $H_1 \in h_1^\alpha \cap h_1^\beta$, $H_2 \in x_{12}$ a na ordinále bodu H. Průsečnice rovin α a β je tak body P a H jednoznačně určena (obr. 2.17).

Příklad 2.7

Bodem *B* roviny určené body *A, B, C* veďte spádové přímky první a druhé osnovy.



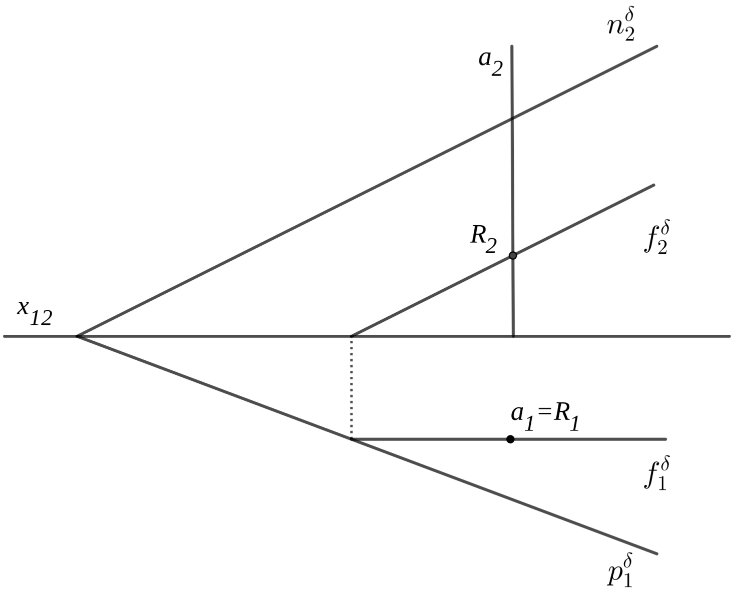
Obr. 2.18 Spádové přímky roviny.

Řešení:

Spádové přímky jsou přímky kolmé na stopy roviny, ale také na hlavní přímky roviny. Nemusíme tedy sestrojovat stopy roviny, stačí najít hlavní přímky první a druhé osnovy procházející například bodem: $h_2 : (h_2 \| x_{12}) \wedge (C_2 \in h_2)$, h_1 určíme pomocí průsečíku s přímkou *b*, kde $b = AB$, $f_1 : (f_1 \| x_{12}) \wedge (C_1 \in f_1)$, f_2 určíme pomocí průsečíku s přímkou *b*. Dle vlastností spádových přímek platí, že $({}^1s_1 \perp h_1) \wedge (B_1 \in {}^1s_1)$ a $({}^2s_2 \perp f_2) \wedge (B_2 \in {}^2s_2)$. Druhé obrazy spádových přímek odvodíme pomocí průsečíků 3_1 a 4_2 (obr. 2.18).

Příklad 2.8

Určete průsečík roviny δ zadané svými stopami a přímky a kolmé k půdorysně.



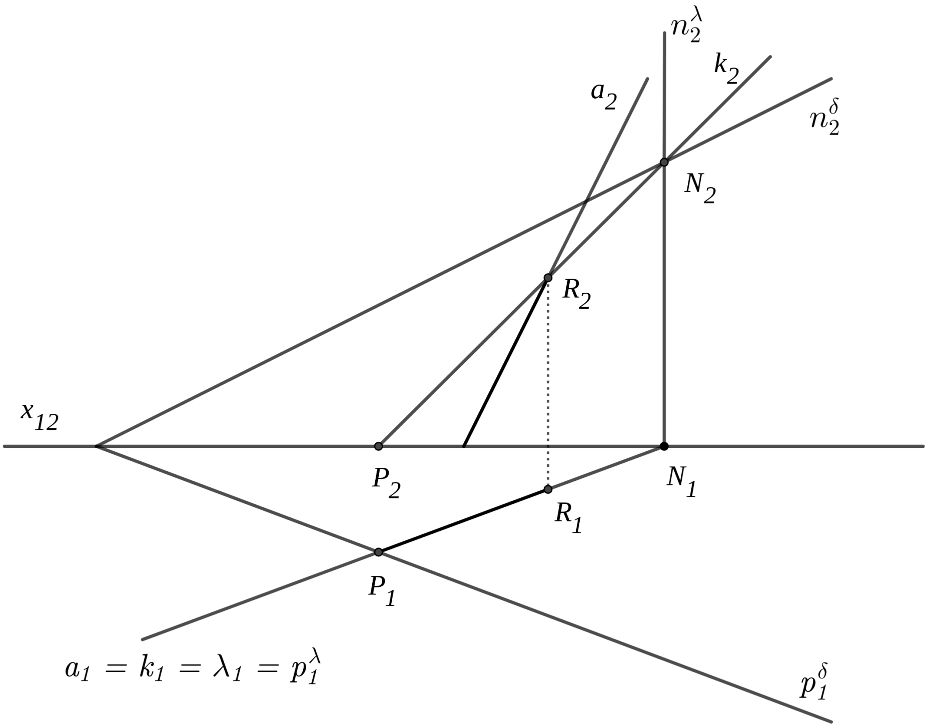
Obr. 2.19 Průsečík roviny a přímky kolmé k půdorysně.

Řešení:

Přímka a je ve speciální poloze – kolmá k půdorysně. Půdorysné obrazy všech bodů takové přímky leží na půdorysném obrazu a_1 přímky a. Proto i půdorysný obraz průsečíku bude ležet na a_1: $R_1 = a_1$. Nárysný obraz R_2 průsečíku R určíme pomocí hlavní přímky druhé osnovy (obr. 2.19).

Příklad 2.9

Určete průsečík roviny δ určené svými stopami a přímky a v obecné poloze vzhledem k průmětnám.



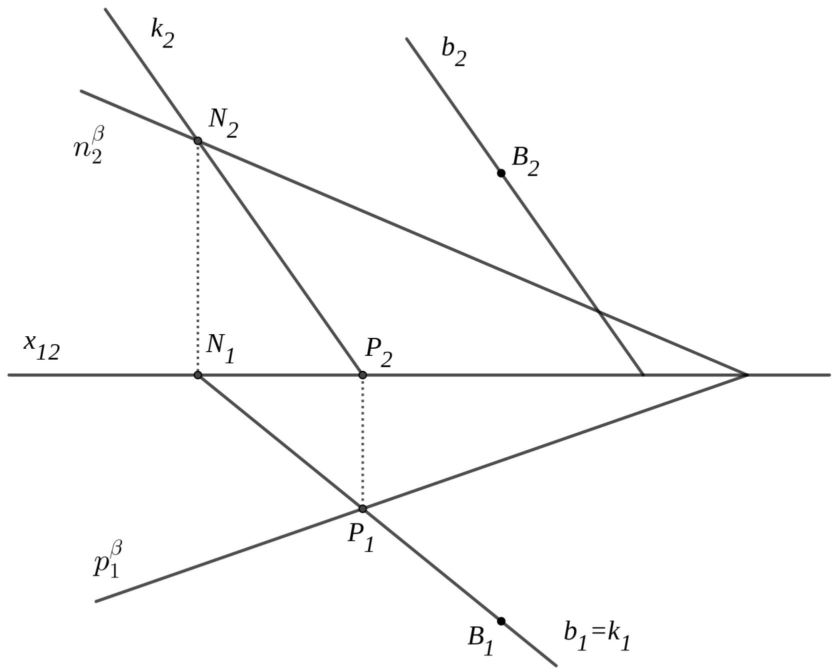
Obr. 2.20 Průsečík přímky v obecné poloze a roviny.

Řešení:

Postupuje dle kapitoly 2.4.3. Přímkou a proložíme rovinu λ kolmou k půdorysně (nárysně) a tím úlohu převedeme na průsečnici rovin λ *a* δ. Příklad je řešen pomocí půdorysně krycí přímky. Přímkou a proložíme první promítací rovinu λ. První obraz průsečnice promítací roviny λ a roviny δ splyne s půdorysným obrazem přímky a: $a_1 = k_1$. Z půdorysného obrazu přímky k vyplyne jeho nárysný obraz: $k_2 = P_2N_2$. Průsečík přímky s rovinou je průsečík přímek a a k: $R_2 \in a_2 \cap k_2$. Půdorysný obraz bodu R najdeme na ordinále na půdorysu přímky a: $R_1 \in a_1$ (obr. 2.20).

Příklad 2.10

Zobrazte nárysný obraz přímky *b*, která prochází bodem *B* a je rovnoběžná s rovinou *β*.



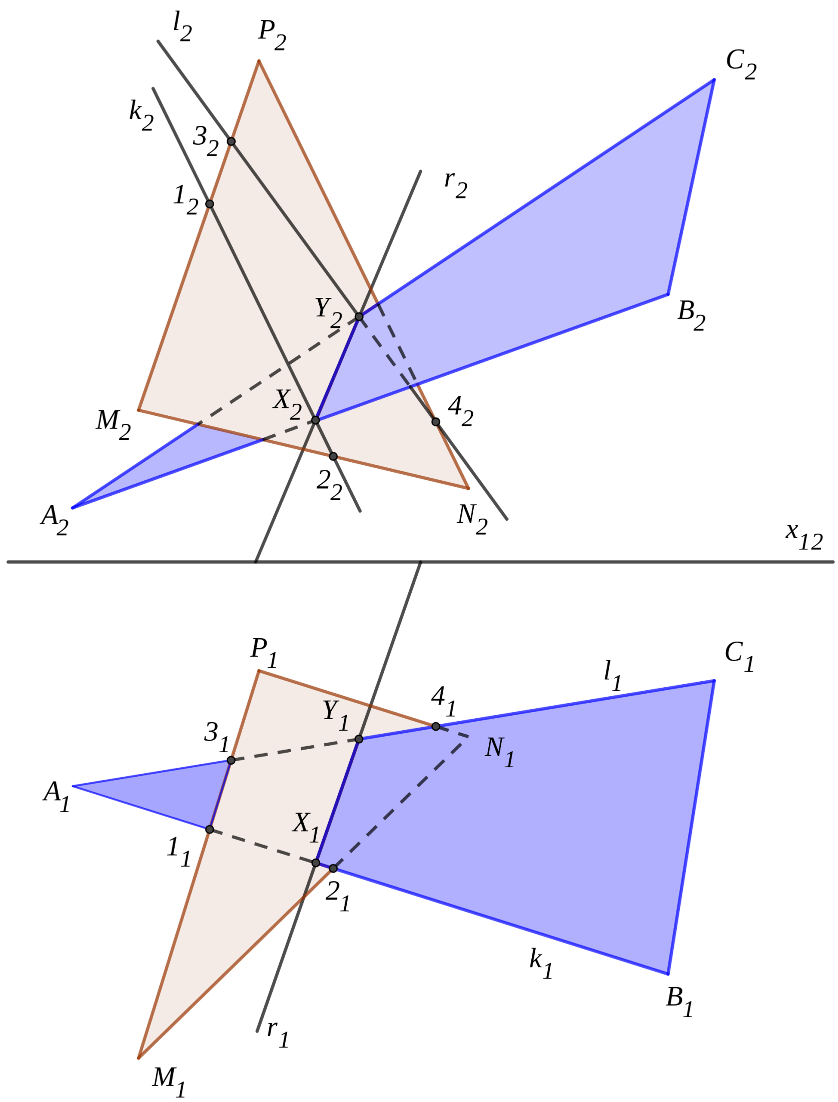
Obr. 2.21 Přímka rovnoběžná s rovinou.

Řešení:

Je-li přímka *b* s rovinou *β* rovnoběžná, pak rovina *β* obsahuje nekonečně mnoho přímek, které jsou s přímku *b* rovnoběžné. Jednou z těchto přímek je i přímka *k*, pro niž je $b_1 = k_1$ a jejíž nárysný obraz odvodíme z jejich stopníků. Nárysný obraz přímky *b* prochází nárysem bodu *B* a je rovnoběžný s nárysným obrazem přímky *k*: $(B_2 \in b_2) \wedge (b_2 \| k_2)$ (obr. 2.21).

Příklad 2.11

Sestrojte průsek trojúhelníků *ABC* a *MNP*.



Obr. 2.22 Průsek trojúhelníků.

Řešení:

Příklad jde řešit více způsoby.

1. způsob: Trojúhelníkem *ABC* proložíme rovinu a najdeme její stopy (viz příklad 2.3). Trojúhelníkem *MNP* proložíme druhou rovinu a najdeme její stopy. Hledáme průsečnici těchto rovin dle kapitoly 2.4.2.

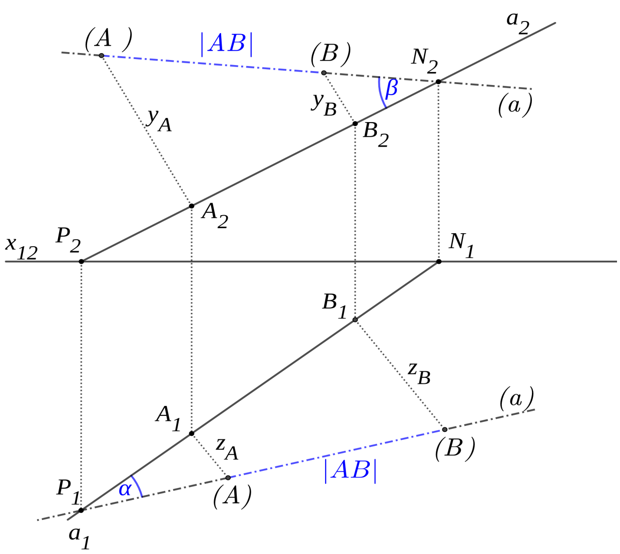
2. způsob: Pomocí hlavních přímek najdeme 2 body průsečnice trojúhelníků (viz příklad 2.6).

3. způsob: Postupně hledáme průsečíky stran jednoho z trojúhelníků s rovinou druhého trojúhelníku (viz příklad 2.9). V našem případě hledáme průsečík *X* strany *AB* s rovinou trojúhelníku *MNP* a průsečík *Y* strany *AC* s trojúhelníkem *MNP*. Průsečnice rovin trojúhelníku je přímka $r = XY$. Nakonec zjistíme viditelnost (obr. 2.22).

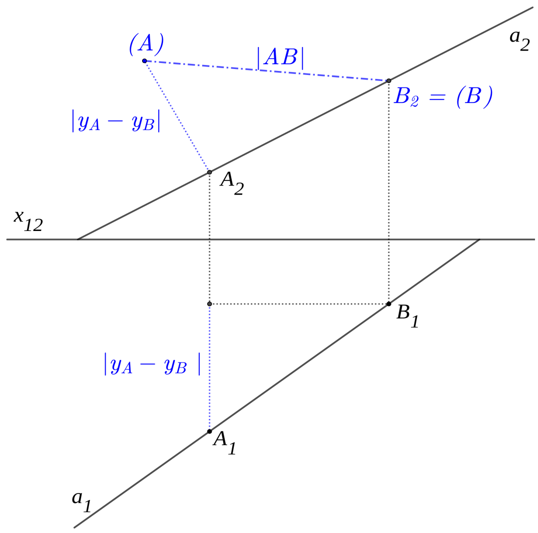
3 ZÁKLADNÍ METRICKÉ ÚLOHY

3.1 Velikost úsečky, odchylka přímky od průměten

Velikost úsečky i odchylku přímky od průměten zjistíme sklopením příslušné promítací roviny. Pro určení skutečné velikosti úsečky však stačí využít kladného rozdílu *y*-nových (*z*-tových) souřadnic (obr. 3.1, 3.2).

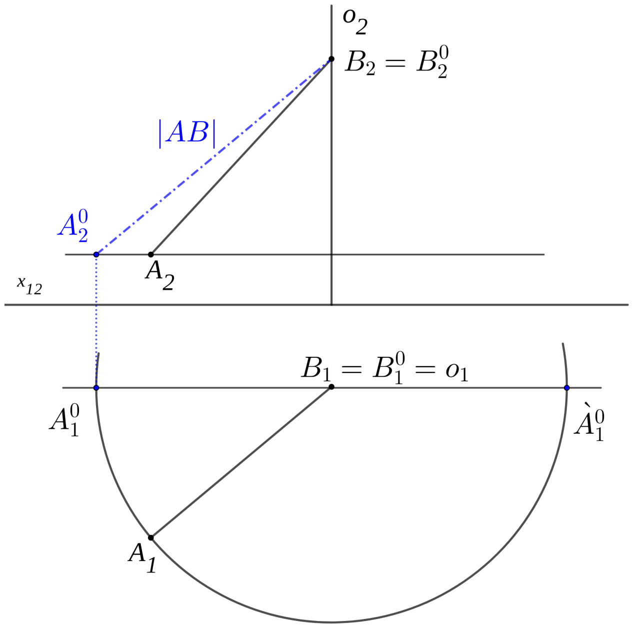


Obr. 3.1 Určení velikosti úsečky pomocí promítacího lichoběžníku.



Obr. 3.2 Určení velikosti úsečky pomocí rozdílového trojúhelníku.

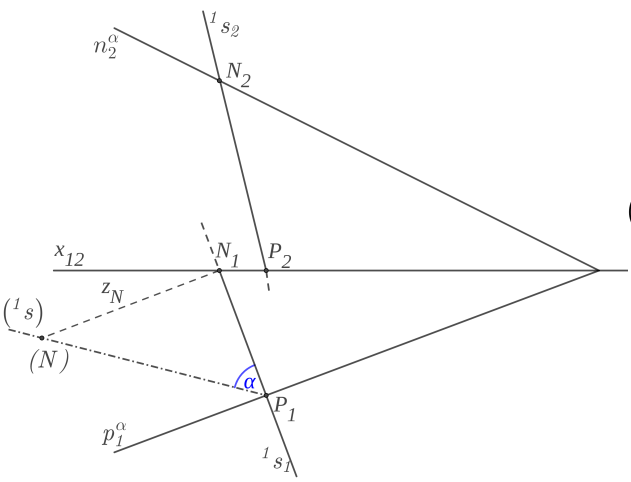
Další varianta pro určení skutečné velikosti úsečky je otočení úsečky do roviny rovnoběžné s nárysnou nebo půdorysnou. Úsečku *AB* otočíme kolem osy *o*: $B \in o, o \perp \pi$ (bod *B* zůstane na místě, otočíme pouze bod *A*) do roviny rovnoběžné s nárysnou. Útvary ležící v rovině rovnoběžné s nárysnou vidíme ve skutečné velikosti, proto $|AB| = |A^0 B^0|$ (obr. 3.3).



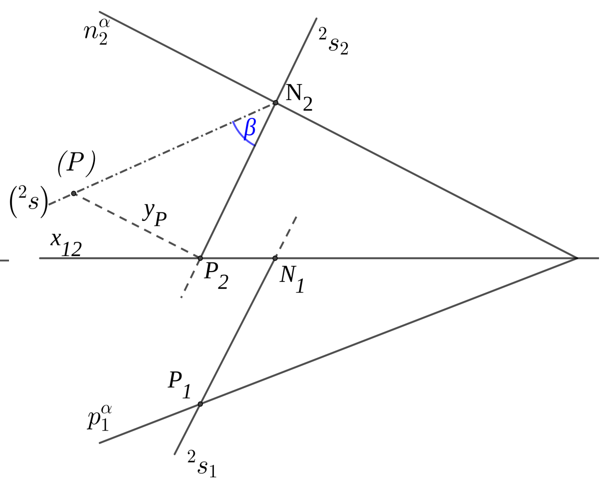
Obr. 3.3 Otočení úsečky do roviny rovnoběžné s nárysnou.

3.2 Odchylka roviny od průměten

Odchylku roviny od půdorysny (nárysny) určíme sklopením první (druhé) promítací roviny spádové přímky první (druhé) osnovy do půdorysny (nárysny) (obr. 3.4, 3.5).



Obr. 3.4 Odchylka roviny od půdorysny.



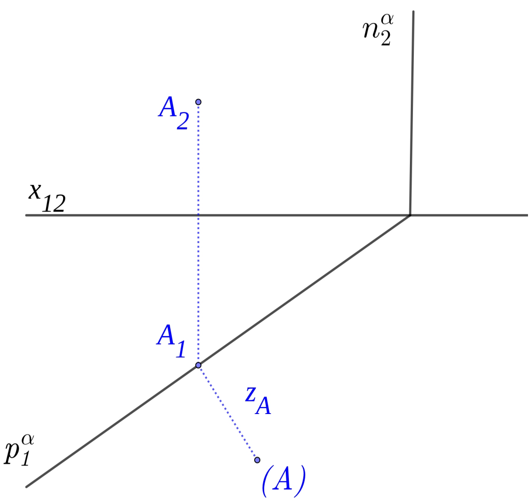
Obr. 3.5 Odchylka roviny od nárysny.

3.3 Sklopení roviny

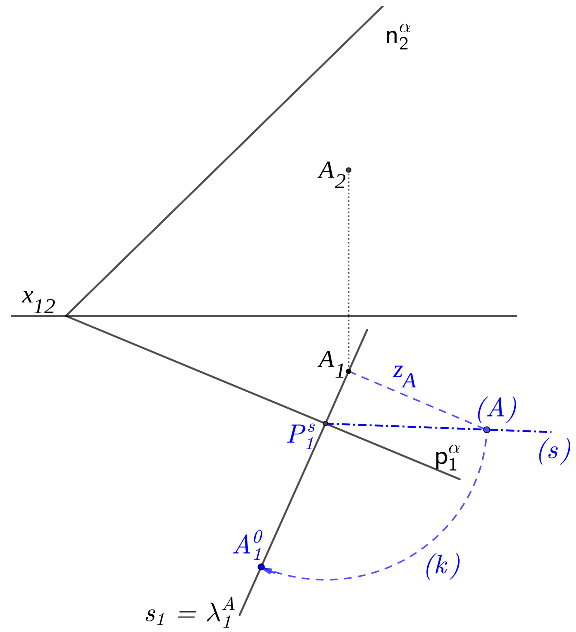
Sklopit rovinu kolmou k půdorysně (nárysně), znamená otočit každý bod této roviny o 90° kolem půdorysné (nárysné) stopy této roviny do půdorysny (nárysny): $A_1(A) \perp p_1^\alpha$, $|A_1(A)| = z_A$ (obr. 3.6).

3.4 Otočení roviny *α*

Otočit rovinu v obecné poloze znamená, otočit každý bod této roviny kolem půdorysné (nárysné) stopy této roviny do půdorysny (nárysny). **Roviny otáčení** bodů dané roviny jsou kolmé k půdorysné (nárysné) stopě roviny, tedy i k půdorysně (nárysně). Kružnice *k* se nazývá **kružnice otáčení** bodů. V MP se zobrazí jako kolmice ke stopě roviny. Středem otáčení je půdorysný stopník spádové přímky první osnovy (nárysný stopník spádové přímky druhé osnovy). Pro poloměr otáčení platí, že $r = |P_1^s(A)|$. Průsečíky kružnice *k* s půdorysnou (nárysnou) jsou otočené body A^0 (obr. 3.7).



Obr. 3.6 Sklopení roviny.

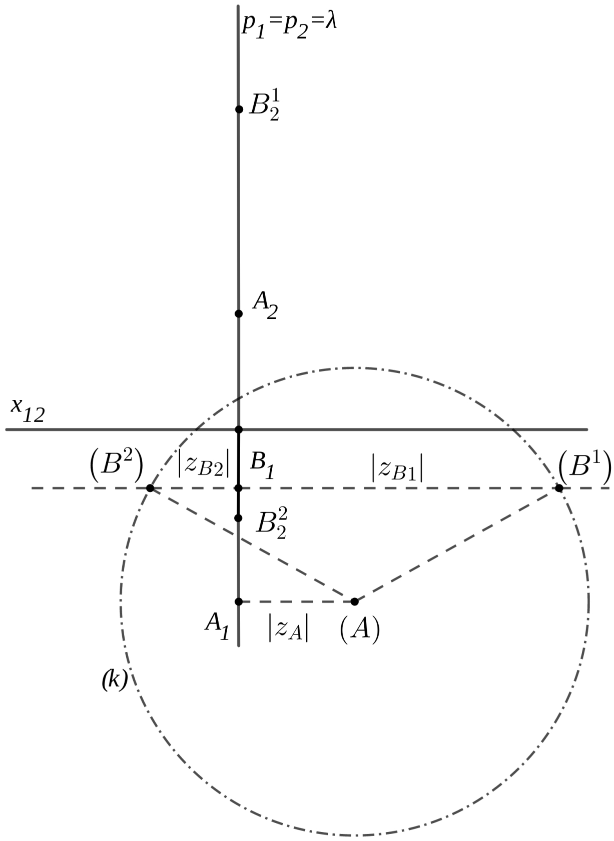


Obr. 3.7 Otočení roviny.

3.5 Sbírka úloh

Příklad 3.1

Je dána přímka *p* a bod *A* tak, že $A \in p$. Určete nárysný obraz bodu $B \in p$ tak, aby velikost úsečky *AB* byla 4 cm.



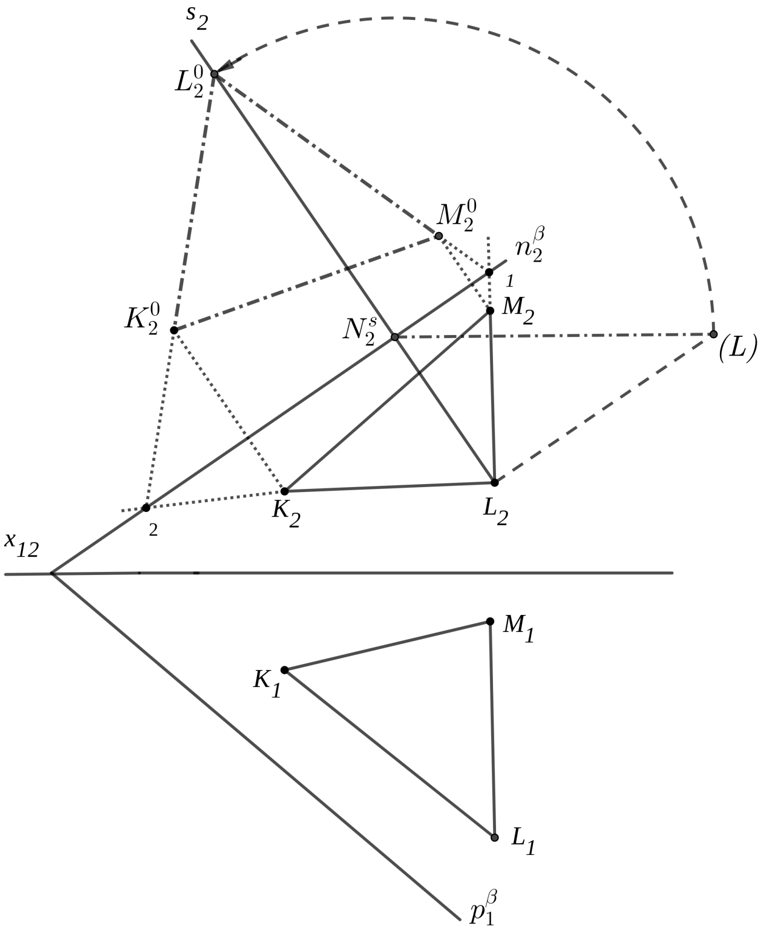
Obr. 3.8 Velikost úsečky na přímce kolmé k ose x.

Řešení:

Přímka *p* je ve speciální poloze – kolmá k ose *x*. Přímkou *p* proložíme rovinu *λ* kolmou k ose *x* a rovinu *λ* sklopíme podle kapitoly 3.3: $A_1 \rightarrow (A)$. Množina všech bodů roviny *λ*, které mají od bodu *A* vzdálenost 4 cm, leží na kružnici se středem v bodě *A* a poloměrem 4 cm: $(k) = ((A), r = 4\,cm)$. Ve sklopení roviny *λ* se bod *B* zobrazí do bodu ležícího na kružnici: $(B_1 \rightarrow (B)) \wedge ((B) \in (k))$. Nárysnou kótu bodu *B* určíme jako vzdálenost půdorysného obrazu bodu *B* a sklopeného obrazu bodu *B*: $z_B = |B_1(B)|$ (obr. 3.8). Úloha má 2 řešení.

Příklad 3.2

Určete skutečnou velikost trojúhelníku *KLM* ležícího v rovině *β,* jestliže je trojúhelník zadaný svým nárysným obrazem a rovina *β* je zadaná stopami.



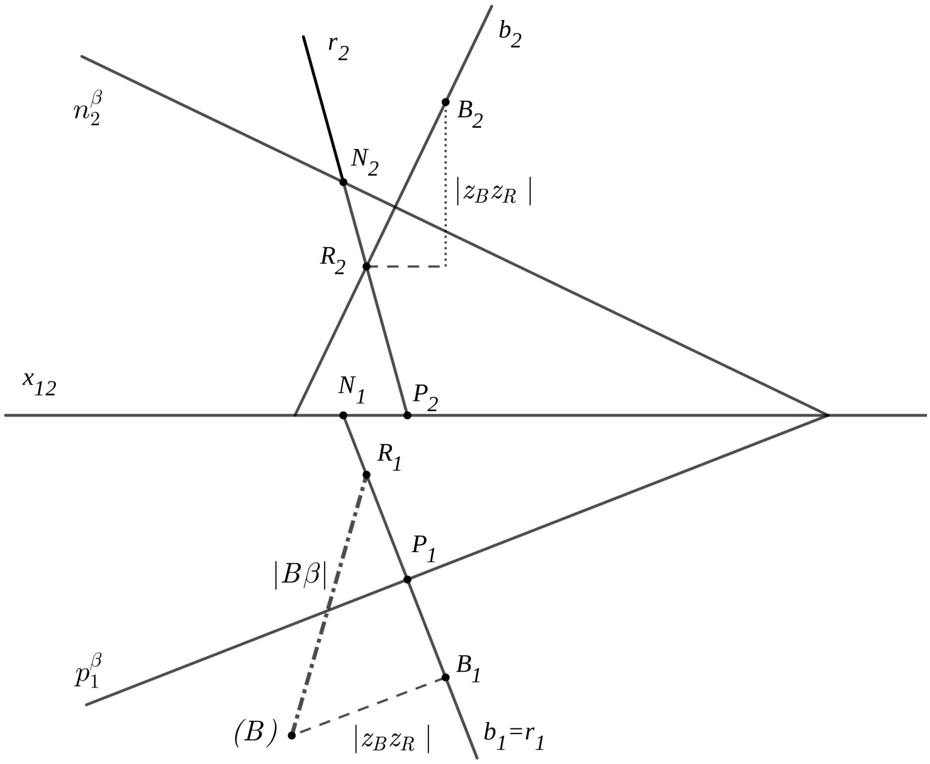
Obr. 3.9 Skutečná velikost trojúhelníku.

Řešení:

Pomocí hlavních přímek první (druhé) osnovy určíme půdorysný obraz trojúhelníku *KLM* tak, aby trojúhelník ležel v rovině *β*. Skutečnou velikost trojúhelníku určíme otočením roviny *β* kolem nárysné stopy n^β do nárysny. Jeden bod například *L* otočíme postupem z odstavce 3.4 do bodu L_2^0 . Další body trojúhelníku buď otočíme stejným postupem nebo užitím osové afinity $A\left(o=n_2^\beta, L_2 \rightarrow L_2^0\right)$ (obr. 3.9).

Příklad 3.3

Je zadaná rovina β svými stopami a bod *B.* Určete vzdálenost bodu *B* od roviny β.



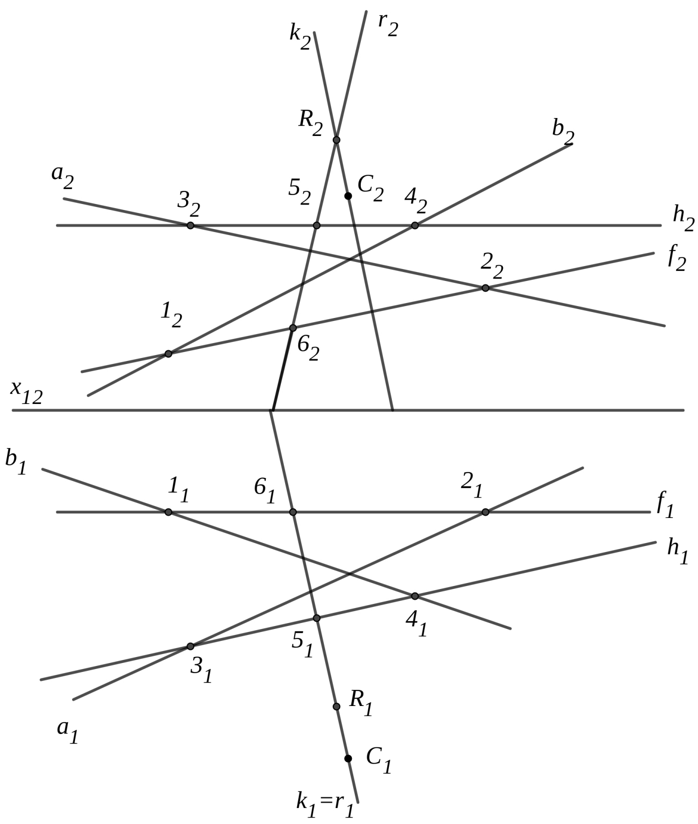
Obr. 3.10 Vzdálenost bodu od roviny.

Řešení:

Vzdálenost bodu od roviny je vzdálenost bodu od svého pravoúhlého průmětu do roviny. Proto bodem *B* vedeme kolmici *b* k rovině β: $(b_1 \perp p_1^\beta) \wedge (B_1 \in b_1)$, $(b_2 \perp n_2^\beta) \wedge (B_2 \in b_2)$. Sestrojíme průsečík *R* kolmice *b* s rovinou β pomocí půdorysně krycí přímky a postupu z odstavce 2.4.3: $R_2 \in b_2 \cap r_2$, $R_1 \in b_1$ a na ordinále z bodu R_2. Velikost úsečky *BR* určíme například sklopením rozdílového trojúhelníku bodů *B* a *R*: $|B\beta| = |RB|$ (obr. 3.10).

Příklad 3.4

Určete patu kolmice *k* vedené bodem *C* k rovině *ρ* určené různoběžkami *a*, *b*.



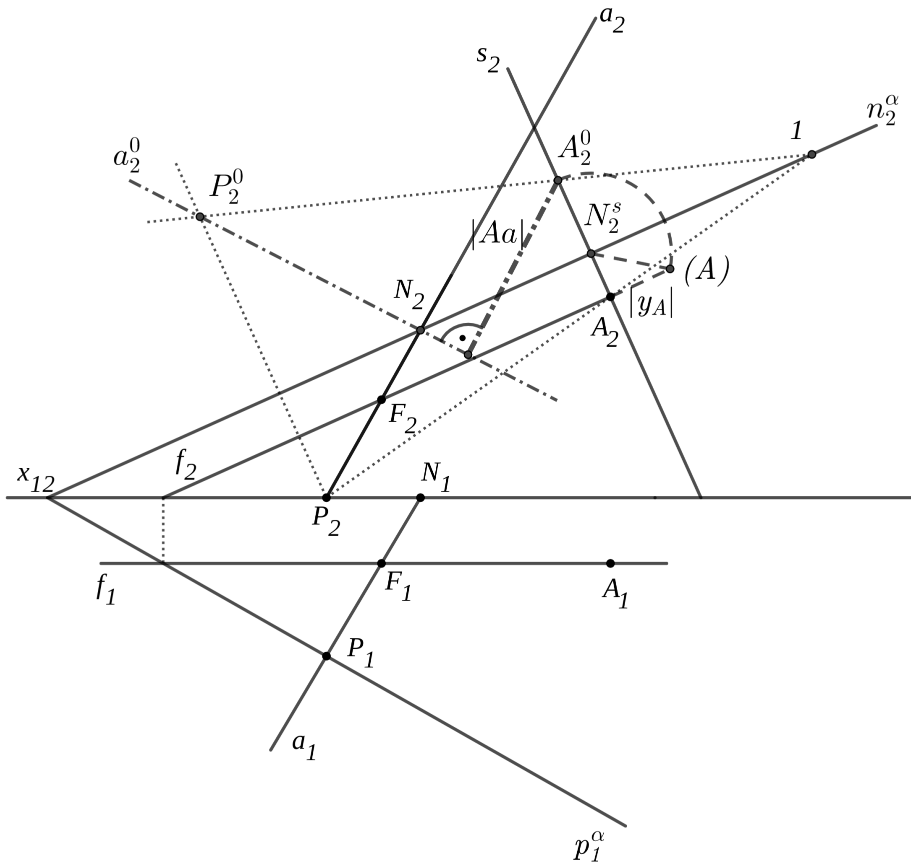
Obr. 3.11 Pata kolmice k vedené bodem C k rovině ρ.

Řešení:

Podle kapitoly 2.4.4 je půdorysný (nárysný) obraz kolmice kolmý k půdorysné (nárysné) stopě roviny, ale i k půdorysu (nárysu) všech hlavních přímek první (druhé) osnovy. Nemusíme tedy sestrojovat stopy roviny *ρ*, stačí sestrojit hlavní přímky první a druhé osnovy. K jejich konstrukci využijeme vlastností hlavních přímek roviny a jejich průsečíků *1, 2, 3, 4* s přímkami *a* a *b*. Půdorysným obrazem přímky *k* je k_1, pro niž platí: $(C_1 \in k_1) \wedge (k_1 \perp h_1)$ a nárysným obrazem přímky *k* je k_2: $(C_2 \in k_2) \wedge (k_2 \perp f_2)$. Průsečík *R* kolmice *k* s rovinou *ρ* = (*a, b)* sestrojíme pomocí půdorysně krycí přímky *r:* $r_1 = k_1$. Nárysný obraz přímky *r* odvodíme pomocí jejích průsečíků *5, 6* s hlavními přímkami: $r_2 = 5_2 6_2$. Nárys R_2 průsečíku *R* je průsečíkem přímek k_2 a r_2: $R_2 \in k_2 \cap r_2$. Půdorys bodu *R* leží na ordinále a na $r_1 = k_1$ (obr. 3.11).

Příklad 3.5

Určete vzdálenost bodu *A* od přímky *a*.



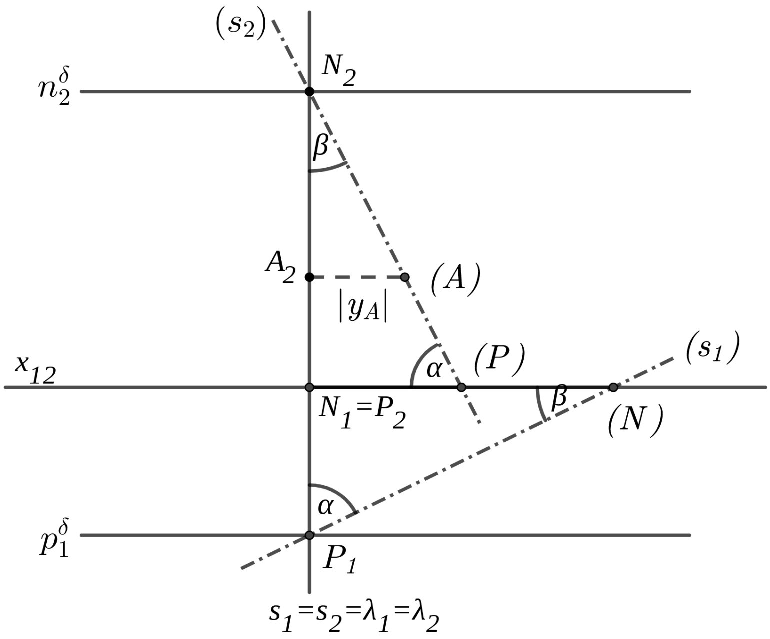
Obr. 3.12 Vzdálenost bodu od přímky.

Řešení:

Zadaná přímka *a* a bod *A* určují rovinu *α*: *α* = (*Aa*). Vzdálenost bodu *A* od přímky *a* v rovině *α* je vzdálenost bodu *A* od paty kolmice vedené bodem *A* k dané přímce *a*. Sestrojíme tedy stopy roviny *α* například pomocí hlavních přímek druhé osnovy podle příkladu 2.4. Rovinu *α* otočíme kolem nárysné stopy n^α do nárysny. Otočíme bod *A* podle konstrukce z kapitoly 3.4. Otočený obraz nárysného obrazu přímky *a* sestrojíme pomocí afinity $A\left(o=n_2^\alpha, A_2 \rightarrow A^0\right): a_2 \rightarrow a^0$. Vzdálenost bodu *A* od přímky *a* pak leží na kolmici z bodu A^0 k otočené přímce a^0: $|Aa|=|A^0 a^0|$ (obr. 3.12).

Příklad 3.6

Určete odchylky roviny δ zadanou svými stopami od průměten a zjistěte *y*-novou kótu bodu $A \in \delta$ zadaného svým nárysným obrazem A_2.



Obr. 3.13 Odchylka roviny rovnoběžné s osou x od průměten.

Řešení:

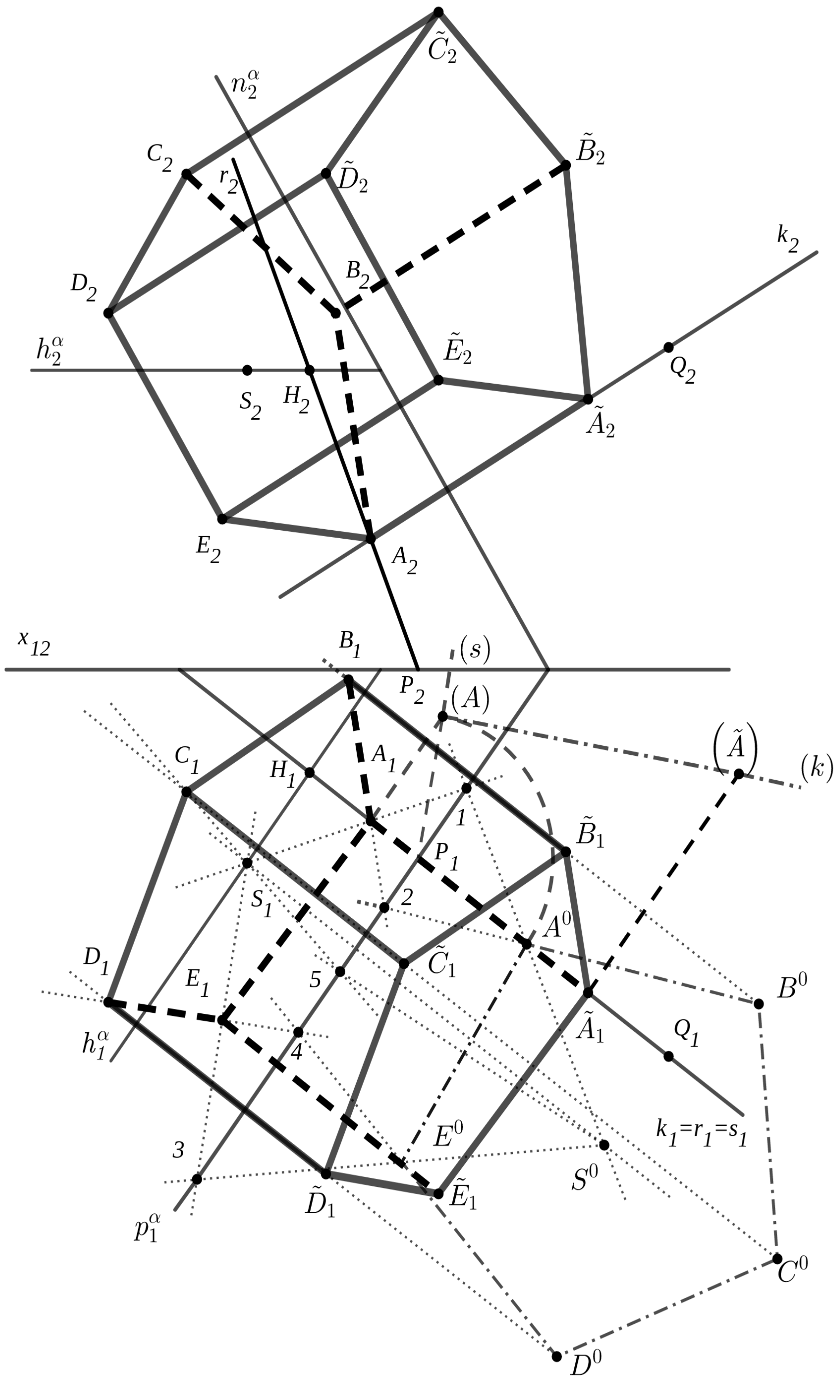
Dle kapitoly 3.2 určíme odchylku rovin od průměten sklopením promítacích rovin spádových přímek. Rovina δ je ve speciální poloze – rovnoběžná s osou *x*. Bodem *A* proložíme rovinu λ kolmou k ose *x*. Průsečnicí rovin λ a δ jsou spádové přímky první i druhé osnovy. Ve sklopení roviny λ určíme odchylku roviny δ od průměten i *y*-novou souřadnici bodu *A* (obr. 3.13).

4 TĚLESA

4.1 Sbírka úloh těles

Příklad 4.1

Zobrazte kolmý pětiboký hranol, jehož dolní podstava leží v rovině $\alpha(3; 4; 5)$, střed podstavy je bod $S[-2; 3; ?]$, jedna jeho boční hrana prochází bodem $Q[5; 6; 5]$ a výška hranolu v = 5 cm.



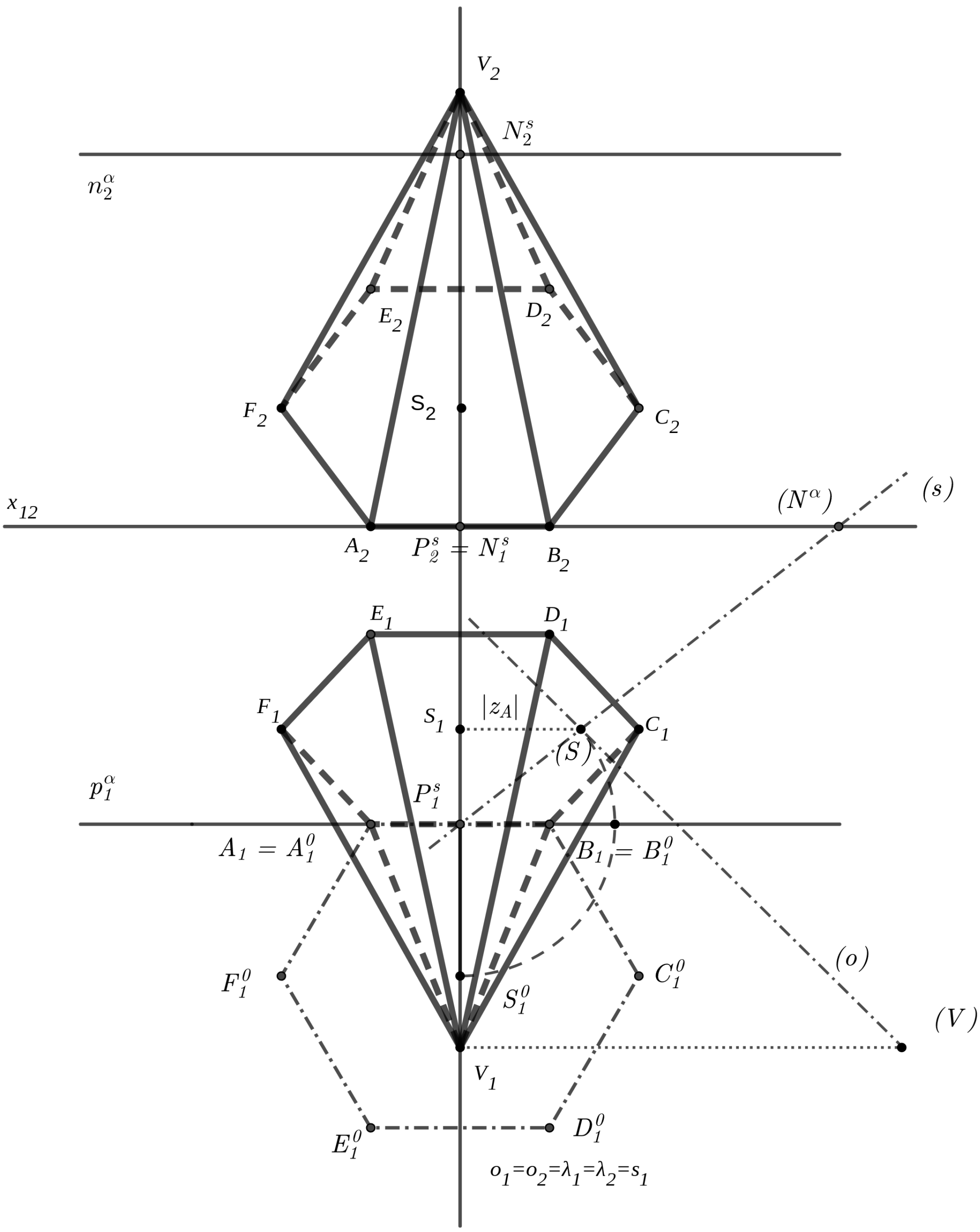
Obr. 4.1 Hranol.

Řešení:

Nejprve sestrojíme zadání. Pomocí hlavních přímek první osnovy najdeme nárysný obraz S_2 středu dolní podstavy. Vzhledem k tomu, že bodem Q je určena jedna boční hrana kolmého hranolu, vedeme bodem Q přímku k kolmou k rovině α: $Q \in k \perp \alpha$, $Q_1 \in k_1 \perp p_1^\alpha$, $Q_2 \in k_2 \perp p_2^\alpha$ (postupem z kapitoly 2.4.4). Jeden z vrcholů dolní podstavy je průsečíkem roviny α a kolmice k: $A \in \alpha \cap k$. Řešíme např. pomocí první krycí přímky r: $P_1 \in r_1 \cap h_1^\alpha$, $H_1 \in r_1 \cap h_1^\alpha$, $r_2 = P_2 H_2$, $A_2 \in r_2 \cap k_2$, $A_1 \in k_1$ a na ordinále (postupem z kapitoly 2.4.3). Rovinu α otočíme kolem půdorysné stopy p_1^α do půdorysny (postupem z kapitoly 3.4), kde sestrojíme pravidelný pětiúhelník $A^0 B^0 C^0 D^0 E^0$. Pro odvození půdorysného pětiúhelníku $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ použijeme afinitu $\mathcal{A}\left(o = p_1^\alpha, A_1 \rightarrow A^0\right)$. Nárysný obraz pětiúhelníku $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2$ sestrojíme užitím hlavních přímek roviny α. Jeden z vrcholů horní podstavy hranolu určíme sklopením kolmice k do π: $(A) \in (k) \perp (s)$, kde s je spádová přímka náležící rovině α v bodě A. Na (k) sestrojíme bod ($\bar{A}$) tak, aby $|(A)(\bar{A})| = v = 5$ cm. Z bodu ($\bar{A}$) odvodíme bod $\bar{A}_1$: $\bar{A}_1 \in k_1$ a pomocí ordinály bod $\bar{A}_2$: $\bar{A}_2 \in k_2$. $|A_1 \bar{A}_1|$ je délka bočních hran hranolu v půdorysu, $|A_2 \bar{A}_2|$ je délka bočních hran v nárysu. Máme dvě možná řešení. V grafickém řešení je vyznačena varianta, kdy hranol leží nad rovinou α. Nakonec určíme viditelnost obrazů (obr. 4.1).

Příklad 4.2

Sestrojte pravidelný šestiboký kolmý jehlan, jehož podstava leží v rovině $\alpha(\infty; 4; 5)$, vrchol $V[0; 7; 4]$ a jedna jeho hrana podstavy leží v půdorysně.



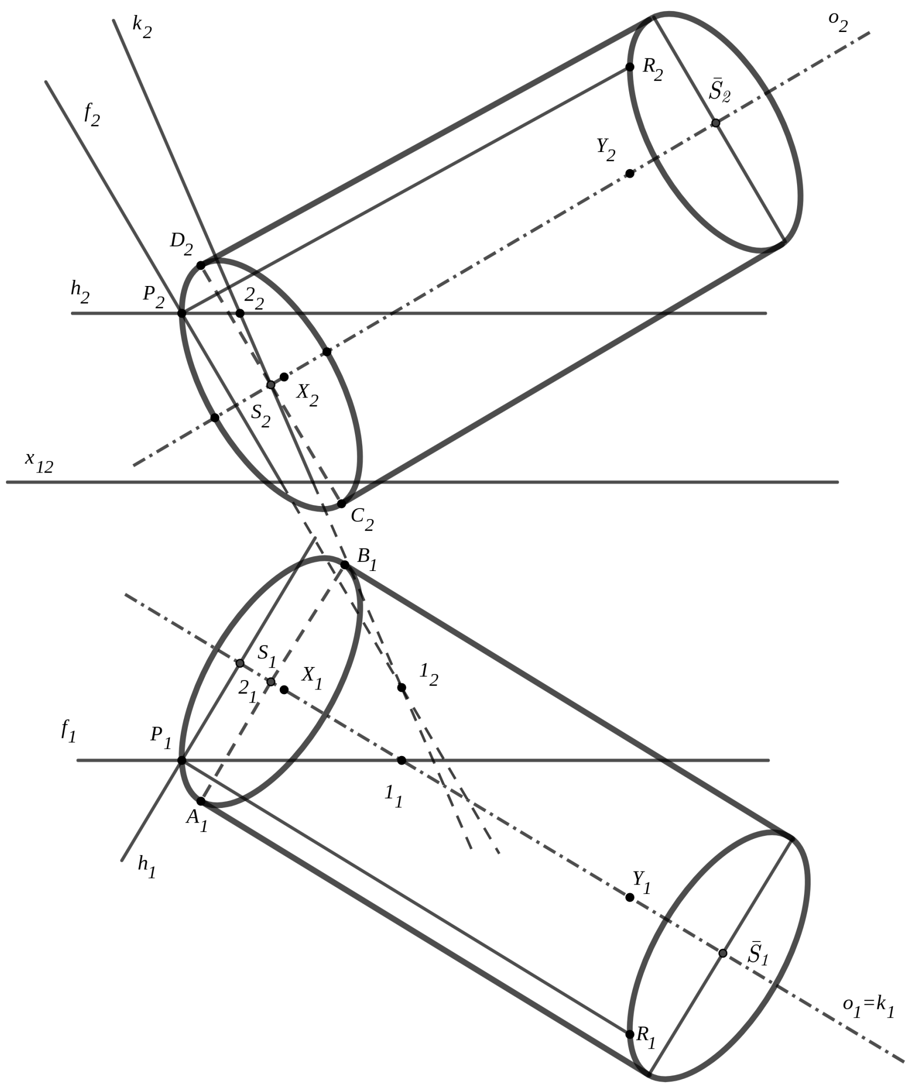
Obr. 4.2 Jehlan.

Řešení:

Osa kolmého jehlanu prochází jeho vrcholem a je kolmá k rovině podstavy. Vrcholem *V* tedy vedeme přímku *o* kolmou k rovině *α*: $V \in o$ a $o \perp \alpha$. Sestrojíme tedy: $(V_1 \in o_1) \wedge (o_1 \perp p_1^\alpha)$ $(V_2 \in o_2) \wedge (o_2 \perp n_2^\alpha)$. Průsečík přímky *o* a roviny *α* je střed podstavy – bod *S:* $S \in \alpha \cap o$. Střed podstavy *S* určíme sklopením první promítací roviny *λ* přímky *o:* $(S) \in (s) \cap (o)$, kde *s* je spádová přímka roviny *α*. Rovinu *α* otočíme kolem p_1^α půdorysné stopy do půdorysny, kde sestrojíme šestiúhelník $A^0 B^0 C^0 D^0 E^0 F^0$ tak, aby jedna jeho hrana ležela na půdorysné stopě p_1^α a střed měl v bodě S^0. Pomocí afinity $A(\, p_1^\alpha,\ S_1 \rightarrow S^0)$ sestrojíme půdorysný obraz podstavy jehlanu $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$. Boční hrany sestrojíme spojením vrcholů podstavy s vrcholem jehlanu. Obraz podstavy do nárysny přeneseme například pomocí pomocné přímky obsahující hranu podstavy *EF* a vlastností šestiúhelníku. Boční hrany opět sestrojíme jako spojnice vrcholů podstavy s vrcholem jehlanu. Odvodíme viditelnost obrazů (obr. 4.2).

Příklad 4.3

Sestrojte válec, který vznikne rotací úsečky *PR* kolem osy *o*, která prochází body *X* a *Y*, jejichž souřadnice jsou: *X*[-2; 3; 1,5], *Y*[3; 6; 4,5], *P*[-3,5; 4; 2,5] a *R*[3; 8; 6].



Obr. 4.3 Válec.

Řešení:

Rovina podstav je kolmá k ose *o*, proto *s*estrojíme rovinu *ρ* kolmou k ose *o* a procházející bodem *P*: $(\rho \perp o) \wedge (P \in \rho)$. K jejímu sestrojení použijeme hlavní přímky první a druhé osnovy: $P_1 \in o_1 \perp h_1$, $P_1 \in f_1 \| x_{12}$, $P_2 \in o_2 \perp h_2$, $P_1 \in f_1 \| x_{12}$. Stopy roviny *ρ* není třeba sestrojovat. Střed podstavy je průsečíkem roviny *ρ* a osy *o*: $S \in o \cap \rho$. Řešíme např. pomocí první krycí přímky *k*: $o_1 = k_1$, $1_1 \in f_1 \cap k_1$, $2_1 \in h_1 \cap k_1$, $k_2 = 1_2 2_2$, $S_2 \in k_2 \cap o_2$, $S_1 \in o_1$ a na ordinále (postupem z kap. 2.4.3). Rovina podstavy je vzhledem k průmětnám v obecné poloze, proto sdružené obrazy podstav kružnice jsou elipsy. Hlavní poloosa elipsy v půdorysně i nárysně má stejnou velikost *r*, která je rovna vzdálenosti bodů *P* a *S*. Velikost *r* najdeme v otočení úsečky *PS* do roviny rovnoběžné s nárysnou podle kapitoly 3.1: $r = |PS| = |P^0 S^0|$. Velikosti vedlejších poloos zjistíme proužkovou metodou. Druhé podstavy válce sestrojíme tak, že posuneme elipsy první podstavy ve směru os o velikost úsečky *PR*. Boční površky jsou tvořeny tečnami k elipsám podstav. Odvodíme viditelnost obrazů (obr. 4.3).

5 SHRNUTÍ

Cílem mé práce bylo vytvořit ucelený přehled teoretické části a sbírky úloh z Mongeova promítání jak pro učitele, tak i pro studenty deskriptivní geometrie na středních školách a vyšších ročnících gymnázia.

V první kapitole je popsán princip Mongeovo promítání. Čtenář se seznámí se způsobem zobrazování bodu, přímky a roviny, a to včetně jejich speciálních poloh vzhledem k průmětnám. Pro rozvoj prostorové představivosti je každá poloha vykreslena nejdříve v prostoru a následně v MP. Dále se v této kapitole věnuji hlavním a spádovým přímkám roviny.

Druhá kapitola je zaměřena na polohové vlastnosti bodů, přímek a rovin. Daná kapitola je rozdělena na část teoretickou a část praktickou. Nejdříve jsou popsány postupy konstrukce pro sestrojení průsečíku přímky s rovinou, průsečnice rovin, přímka kolmá k rovině a rovina kolmá k přímce. Po teoretické části následuje sbírka úloh, ve které čtenář procvičí dané konstrukce a ucelí si všechny informace dané problematiky.

Třetí kapitola se zabývá metrickými úlohami typu: velikost úsečky, odchylka přímek od průměten, odchylka rovin od průměten, sklopení roviny a otočení roviny do průmětny. V teoretické části jsou probrány postupy konstrukcí a opět následuje sbírka úloh. Ke všem úlohám této diplomové práce je vždy přiložený postup a správné řešení.

Čtvrtá kapitola je věnovaná konstrukcím hranatých a oblých těles. Předpokládá se, že čtenář ovládá základy stereometrie, planimetrie, konstrukce kuželoseček a učiva probraného v kapitole jedna, dvě a tři.

Doporučila bych tuto sbírku úloh jako učební pomůcku v hodinách deskriptivní geometrie pro studenty 3. a 4. ročníků středních technických škol, popřípadě studentům septimy a oktávy.

Vypracování této diplomové práce pro mě bylo velkým přínosem, prohloubila jsem si znalosti v dané problematice a myslím si, že mohu být studentům deskriptivní geometrie adekvátně nápomocna.

Všem, kteří budou s touto sbírkou úloh pracovat, přeji mnoho úspěchů.

POUŽITÁ LITERATURA

1. POMYKALOVÁ, Eva. *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. Praha: Prometheus, 2010. ISBN 978-80-7196-400-1.
2. URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965.