**Univerzita Palackého v Olomouci**

**Přírodovědecká fakulta**


# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE


**2023** **Joanna Miturová**

# Univerzita Palackého v Olomouci
# Přírodovědecká fakulta
# Katedra algebry a geometrie


# Užití cyklografie v řešení úloh z planimetrie

**Bakalářská práce**


## Joanna Miturová


Studijní program: *Deskriptivní geometrie pro vzdělávání*

Studijní obor: *Deskriptivní geometrie pro vzdělávání maior*
*Matematika pro vzdělávání* minor

Forma studia: *Prezenční*

**Olomouc 2023** **Vedoucí práce: RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.**

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Olomouc 1. ledna 2023

……………………………………………

Joanna Miturová

# Poděkování

Chtěla bych poděkovat své vedoucí bakalářské práce RNDr. Lence Juklové, Ph.D. za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce.

# Bibliografická identifikace:

| | |
|---|---|
| **Autor:** | Joanna Miturová |
| **Název práce:** | Užití cyklografie v řešení úloh z planimetrie |
| **Typ práce:** | Bakalářská |
| **Pracoviště:** | Univerzita Palackého v Olomouci<br>Přírodovědecká fakulta<br>Katedra algebry a geometrie |
| **Vedoucí práce:** | RNDr. Lenka Juklová, Ph.D. |
| **Rok obhajoby práce:** | 2023 |
| **Klíčová slova:** | Cyklografie, planimetrie, Apolloniovy úlohy, Pappovy úlohy, GeoGebra, sbírka úloh, řešené úlohy |
| **Počet stran:** | 36 |
| **Počet příloh:** | 9 pracovních listů |
| **Jazyk:** | čeština |

**Abstrakt**

Bakalářská práce se věnuje cyklografii a konkrétně řešeným planimetrickým úlohám touto metodou. Slouží jako sbírka Apolloniových a Pappových úloh. První kapitola se věnuje teorii a druhá pak samotným úlohám. Úlohy jsou určeny jak k samostudiu, tak i jako učební materiál. Součástí práce jsou pracovní listy všech řešených úloh a také řešení úloh v programu GeoGebra.

## Bibliographical identification:

**Author:** Joanna Miturová

**Title of thesis:** Cyclography and solving planimetry problems

**Type of thesis:** Bachelor

**Department:** Palacký University Olomouc
Faculty of Science
Department of Algebra and Geometry

**Supervisor:** RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.

**The year of presentation:** 2023

**Keywords:** Cyclography, Apollonios’s problem; Pappos’s problem; GeoGebra, collection task, solved exercises

**Number of pages:** 36

**Number of appendices:** 9 worksheets

**Language:** Czech

**Abstract** The bachelor thesis is devoted to cyclography and specifically to planimetric problems solved by this method. It serves as a collection of Apollonius problems and Pappus problems. The first chapter is dedicated to the theory and the second to the problems themselves. The problems are intended both for self-study and as teaching material. The thesis includes worksheets for all solved problems as well as solutions to the problems in GeoGebra.

# OBSAH

# Úvod

Bakalářská práce se zabývá řešením některých planimetrických úloh pomocí cyklografie. Výstupem práce jsou řešené planimetrické úlohy a pracovní listy pro procvičení látky, ale především interaktivní pracovní listy vytvořené v dynamickém programu GeoGebra, pro snazší pochopení postupu konstrukcí, vhodné k využití ve výuce.

Téma práce jsem si zvolila podle prvního dojmu, neznalá látky, o které budu psát. Cyklografie mně po prvních úvodních hodinách zaujala na tolik, že jsem se do toho ponořila a s nedočkavostí jsem se látku učila sama.

První kapitola se věnuje vysvětlení, co to vlastně je cyklografie. Objasňuje základní pojmy a postup řešení úloh touto nelineární zobrazovací metodou. V druhé kapitole najdeme řešené Apolloniovy a Pappovy úlohy. Ke každému příkladu je vytvořen odkaz na řešení úlohy v GeoGebře.

Při psaní jsem využívala tři zdroje. Může se to zdát málo, na druhou stranu jsem z nich vyčetla vše, co jsem potřebovala.

Předpokládám, že čtenář je seznámen se základními znalostmi kótovaného promítání, vlastnostmi kuželoseček a konstrukcemi řezů kuželů.

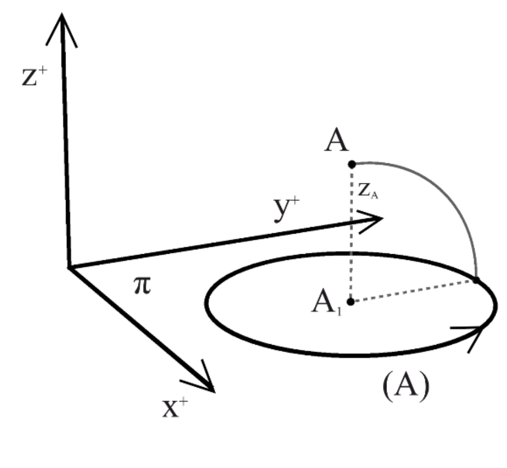
# Kapitola 1. Cyklografie

Cyklografie je zobrazovací metoda zabývající se studiem cyklického promítání – nejstarší nelineární zobrazovací metodou. Dále se podíváme, jak zobrazovací metodu zavádíme a chápeme.

## 1.1. Cyklický průmět bodu

Mějme vodorovnou rovinu $\pi$ čili *průmětnu* a bod $A$ v prostoru mimo ni. Pokud zavedeme určení bodu v prostoru pomocí pravoúhlých souřadnic, průmětna je určená osami $x, y$, osa $z$ je k nim kolmá tak, aby kladné směry os tvořily *pravotočivou soustavu.* Označme $A_1$ pravoúhlý průmět bodu $A$ do roviny $\pi$, čili jeho *půdorys*. Sestrojme kružnici $(A)$ se středem $A_1$ a poloměre $|AA_1|$. Pravoúhlým průmětem a kružnicí o poloměru rovném vzdálenosti bodu od průmětny (kótě) jsme jednoznačně přiřadili bodu v prostoru kružnici v $\pi$. Tedy kótou bodu je souřadnice $z$.

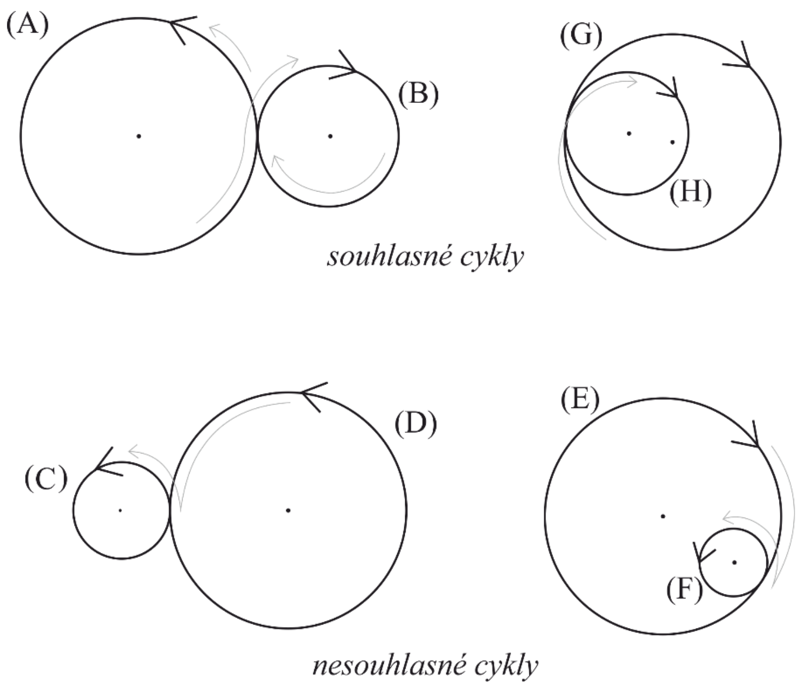
Obráceně však středu kružnice v rovině odpovídají dva body v prostoru o dané kótě, jeden $A$ nad průmětnou a druhý $A'$ pod ní. Abychom tuto dvojznačnost odstranili kružnici *orientujeme*. Máme-li danou pravotočivou soustavu souřadnic, pak zvolíme za průmětnu $\pi$ rovinu $xy$ a pro body s kladnou $z$-ovou souřadnicí kružnici orientujeme proti směru hodinových ručiček (*kladný* smysl otáčení) a pro zápornou $z$-ovou souřadnici kružnici orientujeme po směru hodinových ručiček (*záporný* smysl otáčení).




Obr. 1. *Cyklografický průmět bodu*

Takto je jednoznačně bodům v prostoru přiřazena orientovaná kružnice, tzv. *cykl* a naopak. Leží-li bod $P$ v průmětně $\pi$ zobrazí se jako kružnice s nulovým poloměrem čili $(P) = P_1$. Dvojici $A_1$, $(A)$ nazveme *cyklický průmět bodu* $A$. Tento způsob přiřazení bodů v prostoru a cyklů v průmětně se nazývá *cyklické promítání*. Popsaná zobrazovací metoda se nazývá *cyklografie*.

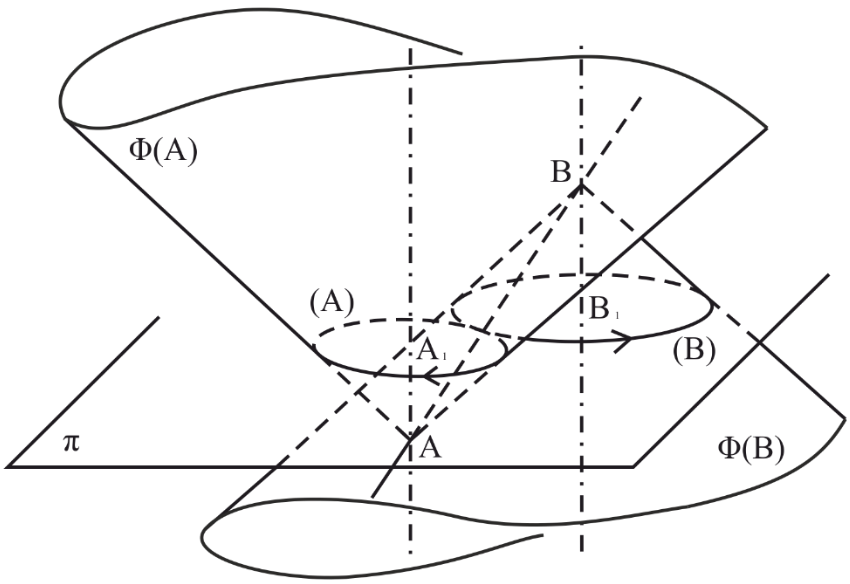
Každá neorientovaná kružnice v průmětně je *nositelkou* dvou cyklů. Dva cykly se dotýkají, jestliže se dotýkají jejich nositelky, a navíc jejich orientace je *souhlasná*, tj. v bodě dotyku se nemění směr pohybu (mohli bychom plynule přejít z jednoho cyklu na druhý).




Obr. 2. *Orientace cyklů*

Je dán bod $A$. Přímky procházející bodem $A$ s odchylkou $45°$ od průmětny se nazývají *povrchové přímky,* a tvoří kuželovou plochu $\Phi(A)$ s vrcholem $A$, resp. *cyklografický kužel* $\Phi(A)$. $\Phi(A)$ protíná průmětnu v nositelce cyklu $(A)$. Cyklografické kužele všech bodů prostoru jsou shodné, mají rovnoběžné povrchové přímky, dotýkají se podél nevlastní kuželosečky, kterou také nazýváme *základní kuželosečka*.

Dotýkají-li se dva cyklografické kužely $\Phi(A)$ a $\Phi(B)$, tak to znamená, že cykly $(A), (B)$ jsou shodně orientované. Navíc bod $B$ leží na cyklografickém kuželi $\Phi(A)$ bodu $A$ a naopak. Z toho plyne, že tyto kužely nemají společný pouze bod dotyku cyklů, ale celou přímku $AB$. Máme-li danou v rovině kružnici, můžeme jí přiřadit dva cykly, a tedy i dva cyklografické kužele. Převedeme tak situaci v rovině na situaci v prostoru a toho využíváme při řešení rovinných úloh pomocí prostorového řešení.



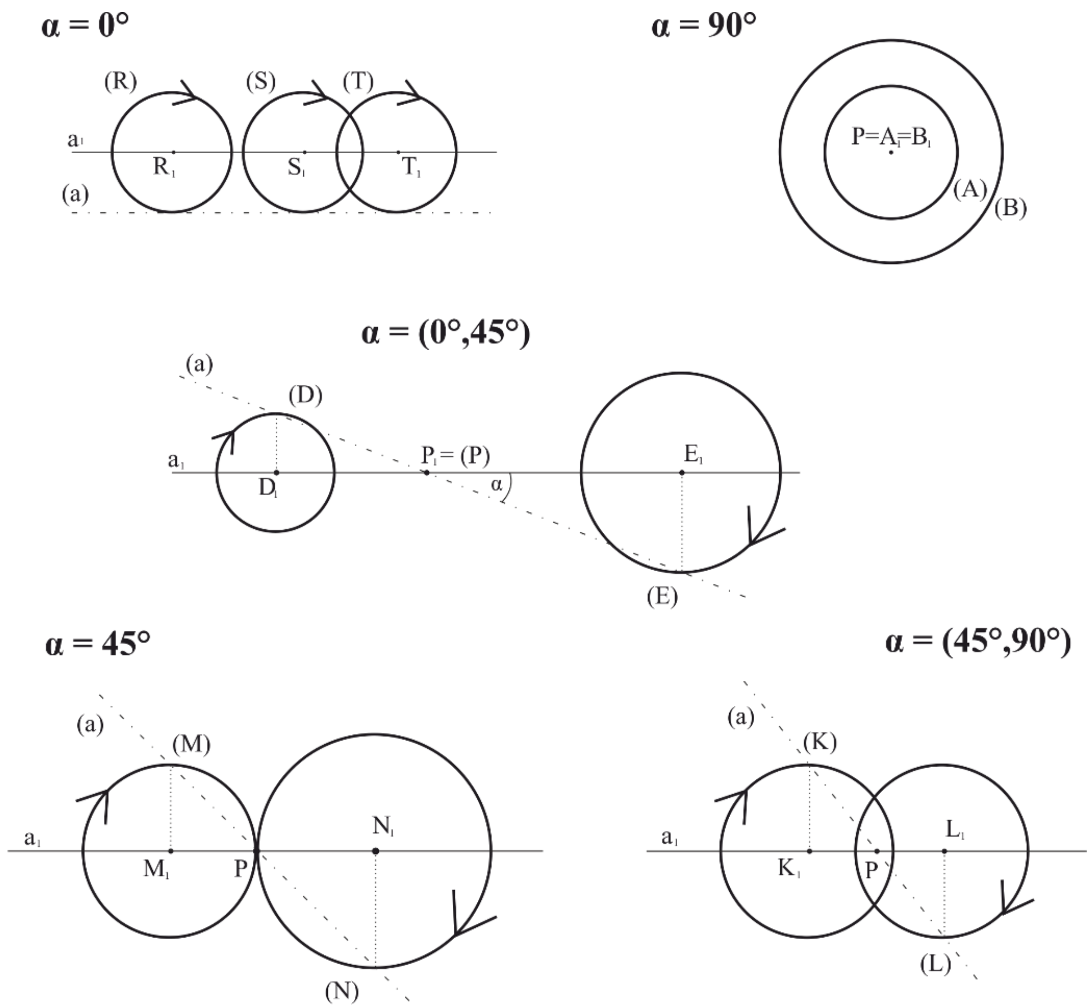

Obr. 3. *Zobrazení dvou dotýkajících se cyklografických kuželů*

## 1.2. Cyklický průmět přímky

Přímku sestrojujeme jako množinu bodů – *lineární řadu cyklů*. Pravoúhlé průměty bodů přímky $a$ tvoří přímku $a_1$, což je pravoúhlý průmět přímky $a$ do průmětny $\pi$. Každému bodu je přiřazen cykl, středy cyklů všech bodů vyplní přímku $a_1$. Na přímce různoběžné s průmětnou existuje bod $P$ ležící v $\pi$ – *stopník*. Je středem stejnolehlosti všech cyklů lineární řady cyklů $a$. Nazýváme ho také *nulový cykl řady*. Známe-li dva různé cykly $(A), (B)$ lineární řady cyklů, můžeme sklopit promítací rovinu přímky $a$ do $\pi$ a sestrojit libovolný další cykl řady $a$. Odchylka přímky od průmětny se určí stejně jako v kótovaném promítání, odchylka pravoúhlého průmětu $a_1$ od sklopené přímky $(a)$.

Poloha přímky vzhledem k průmětně. Odchylka $|a_1, (a)| = \alpha$ :

- $\alpha = 0°$ … přímka je rovnoběžná s $\pi$ a všechny její cykly jsou shodné
- $0° < \alpha < 45°$ … nulový cykl $P$, resp. $(P)$ leží vně každého cyklu řady
- $\alpha = 45°$ … všechny cykly řady se dotýkají v bodě $(P)$
- $45° < \alpha < 90°$… nulový cykl $P$, resp. $(P)$ leží uvnitř každého cyklu
- $\alpha = 90°$ … cykly jsou soustředné kružnice se středem v $(P)$, každá kružnice s nenulovým poloměrem je nositelkou dvou cyklů přímky




Obr. 4. *Poloha přímky vzhledem k průmětně*

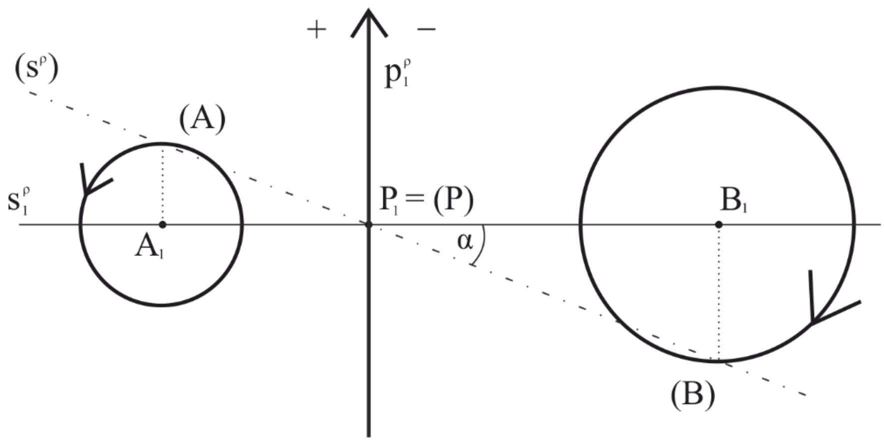
# 1.3. Cyklický průmět roviny

Cyklický průmět roviny nazýváme *cyklické pole*. Opět ji zobrazujeme jako množinu jejích cyklů. Stopa roviny $\rho$, tj. průsečnice roviny $\rho$ s průmětnou $\pi$, se nazývá *osa cyklického pole* nebo také *paprsek*. Hlavní přímky roviny jsou rovnoběžné se stopou, spádové přímky jsou kolmé ke stopě roviny. Odchylka roviny od průmětny je rovna odchylce její spádové přímky od $\pi$.

Ze zobrazení spádové přímky vyplývá, že je-li odchylka $|\rho,\pi| = \alpha$ pak:

* $\alpha = 0°$ … rovina je rovnoběžná s průmětnou, nemá osu, všechny její cykly jsou shodné
* $0° < \alpha < 45°$ … stopník spádové přímky leží vně všech jejích cyklů, tj. žádný cykl roviny neprotíná osu
* $\alpha = 45°$ … všechny cykly se dotýkají osy
* $45° < \alpha < 90°$… cykly protínají stopu pod stejným úhlem; úhel, pod jakým protíná přímka kružnici se definuje jako úhel, který přímka svírá s tečnou sestrojenou v jejím průsečíku s kružnicí
* $\alpha = 90°$ … na ose leží středy všech cyklů cyklického pole

Stopa $p^\rho$ roviny $\rho$, která není s $\pi$ rovnoběžná ani k ní kolmá, rozděluje průmětnu $\pi$ na dvě poloroviny. V jedné polorovině leží středy cyklů roviny záporně orientovaných a ve druhé polorovině leží středy cyklů roviny kladně orientovaných. Osu cyklického pole (paprsek) také můžeme orientovat. Směr paprsku určíme tak, aby orientace cyklů daného cyklického pole a paprsku byla souhlasná, tj. neměnil se směr pohybu při přechodu z cyklů na paprsek.




Obr. 5. *Zobrazení roviny*

Hledáme-li tedy společnou tečnu dvou kružnic, úlohu v rovině převedeme na řešení prostorové úlohy. Kružnice orientujeme a sestrojujeme rovinu, která obsahuje dané cykly a jejíž odchylka od $\pi$ je $45°$, tj. sestrojujeme společnou tečnou rovinu dvou kuželových ploch. Uvažujeme-li obou orientacích každé kružnice, dostaneme odpovídající počet řešení.

## 1.4. Množiny středů kružnic

Nyní zjistíme, jak najít množinu středů cyklů dotýkajících se dvou různých cyklů nebo cyklu a paprsku.

Středy cyklů, které se dotýkají dvou cyklů $(A), (B)$ podle předchozího, jsou body ležící na obou cyklografických kuželech $\Phi(A)$, $\Phi(B)$, tzn. že hledáme průnik dvou cyklografických kuželů.

Dva různé cyklografické kužele se vždy protnou, obecně v průnikové křivce čtvrtého stupně. Kužele mají rovnoběžné povrchové přímky a dotýkají se podél nevlastní kuželosečky. Znamená to, že se průnik rozpadá na dvě kuželosečky – vlastní a nevlastní. [1] Vlastní kuželosečka leží v rovině $\rho$ a tedy řešení úlohy převedeme na konstrukci řezu kužele rovinou.

Pro cykl $(A)$ a paprsek $p^{\rho}$ platí obdobně jak pro dva cykly, že středy cyklů dotýkající se cyklografického kužele $\Phi(A)$ a roviny $\rho$ jsou průnikem těchto dvou útvarů. To znamená, že opět řešíme řez kužele rovinou. Vzhledem k odchylce $45°$ roviny od průmětny $\pi$ je řezem parabola.

Hledáme-li množinu středů kružnic, které se dotýkají dvou daných kružnic nebo kružnice a přímky, řešíme předchozí úlohy, přičemž uvažujeme veškeré možné kombinace orientací daných útvarů. Některá řešení jsou souměrná podle průmětny $\pi$, tedy splývají, proto volíme kombinace tak, abychom dostali různá řešení.

V případě již uvedeného bodu dotyku na cyklu nebo paprsku je tím daná povrchová přímka cyklografického kužele, na níž leží hledaný střed cyklu.

[1] Vlastní kuželosečka = cyklografická kružnice, regulární kuželosečka.

Nevlastní kuželosečka = základní kuželosečka (viz. *1.1. Cyklický průmět bodu*)

# Kapitola 2.
# Řešení Pappových a Apolloniových úloh

Apolloniovy úlohy jsou takové úlohy, kde máme zadány tři navzájem různé objekty (bod, přímka nebo kružnice) v libovolné kombinaci tak, že bod neleží na přímce (kružnici) a přímka není tečnou kružnice.

Pappovy úlohy jsou speciální případy Apolloniových úloh, ve kterých je zadaným objektem alespoň jeden bod a přímka nebo kružnice. Bod pak leží na přímce, resp. kružnici a hledaná kružnice se přímky, resp. kružnice, dotýká v tomto bodě. Lze také řešit zobecněnou Apolloniovu úlohu, kdy se hledaná kružnice nedotýká dané přímky, ale protíná ji pod daným úhlem.

Při řešení úloh pomocí cyklografie tyto rovinné úlohy převedeme na prostorové tak, že danou přímku považujeme za stopu dvou rovin s danou odchylkou od průmětny, kružnici za nositelku dvou různých cyklů, bod je nulovým cyklem ležícím v průmětně a hledáme cyklografické kužele jejichž vrcholy leží v daných rovinách, resp. na daných cyklografických kuželech.

Všechny řešené úlohy jsou vyřešené pro všechny orientace v programu GeoGebra, v textu práce je zvolena konkrétní poloha daných útvarů a popsáno řešení dané úlohy metodami cyklografie.

Kniha: Cyklografie

## 2.1. Apolloniovy úlohy

Apolloniových úloh je deset:

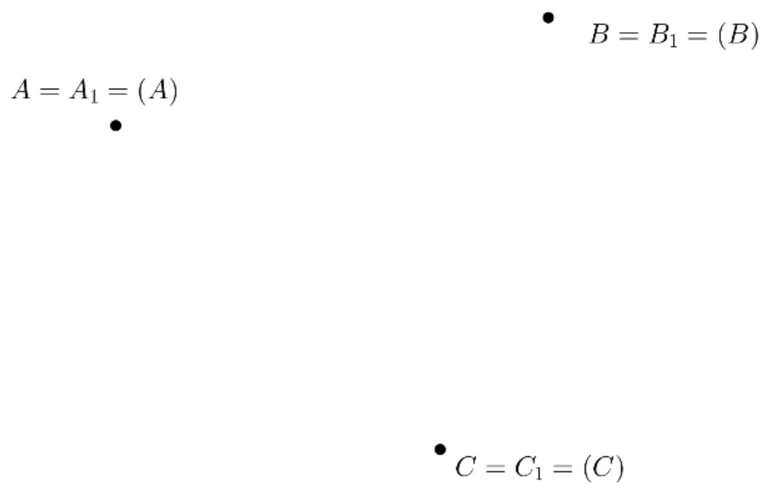
- Typ BBB – bod, bod, bod
- Typ BBp – bod, bod, přímka
- Typ BBk – bod, bod, kružnice
- Typ Bpp – bod, přímka, přímka
- Typ Bpk – bod, přímka, kružnice
- Typ Bkk – bod, kružnice, kružnice
- Typ ppp – přímka, přímka, přímka
- Typ ppk – přímka, přímka, kružnice
- Typ pkk – přímka, kružnice, kružnice
- Typ kkk – kružnice, kružnice, kružnice

Ukážeme si řešení sedmi z těchto úloh. Tato řešení jsou jednoduchá, elegantní a jsou snadněji konstruovatelná než řešení planimetrickými prostředky, např. pomocí kruhové inverze. Řešení zbylých úloh pomocí cyklografie je zbytečně složité, daleko efektivnější je řešit zbylé úlohy pomocí známých planimetrických konstrukcí.

Postup řešení je následující – nejprve rovinnou úlohu převedeme na situaci v prostoru, tj. orientujeme přímky, resp. kružnice a tím jim jednoznačně přiřadíme rovinu, resp. cyklografický kužel. Úlohu vyřešíme v prostoru. Vzhledem k tomu, že kružnice (s výjimkou nulového cyklu) je nositelkou dvou cyklů a každá přímka stopou dvou rovin, je třeba uvažovat o různých kombinacích orientací, abychom dostali všechna řešení. Vzhledem k tomu, že cyklografické kužele určené kružnicemi i roviny určené přímkami jsou souměrné podle $\pi$, některé kombinace orientací mají shodný pravoúhlý průmět do $\pi$, a tedy splývající řešení (která samozřejmě do počtu řešení počítáme pouze jednou).

***Příklad 1.***

Sestrojte kružnici, která prochází danými body $A, B, C$.

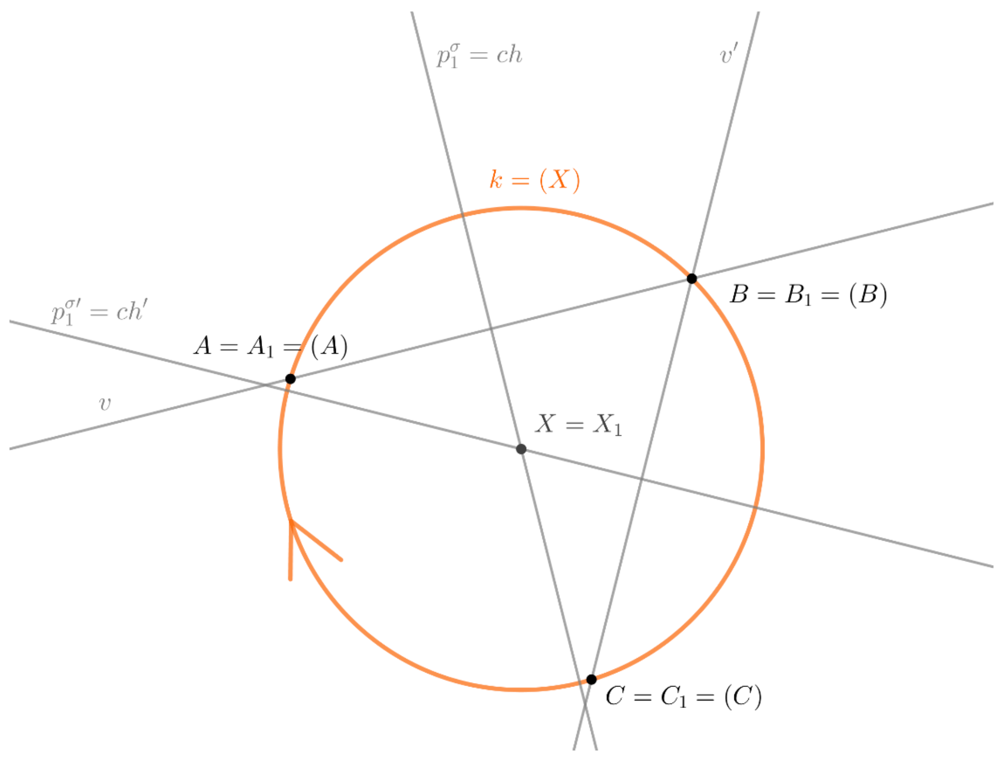



***Řešení:***

Body $A, B, C$ jsou nulovými cykly $(A), (B), (C)$ s vrcholy $A_1, B_1, C_1$. Středy hledaných cyklů leží na průsečnici rovin (což jsou také chordály daných nulových cyklů), podle nichž jsou souměrné dva kužele, a tedy i jejich průniková křivka. Průsečík $X$ chordál $ch$ a $ch'$ je vrchol hledaného cyklografického kužele $\Phi(X)$.

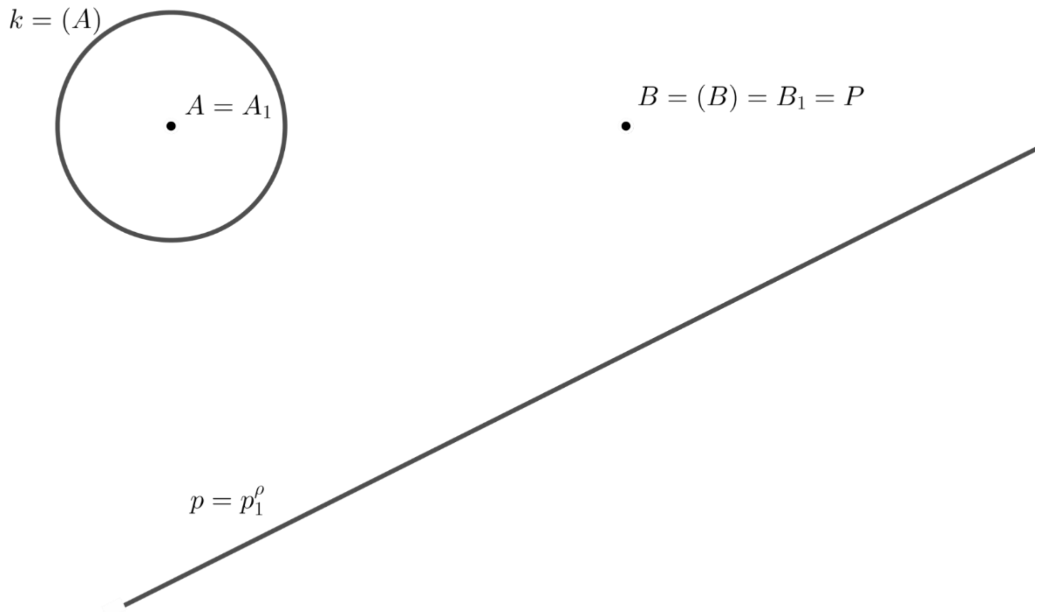
Získali jsme jediné řešení.

GeoGebra – řešení BBB



## *Příklad 2.*

Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem $B$, dotýká se dané přímky $p$ a dané kružnice $k$.




***Řešení:***

Zvolíme orientaci kružnice a přímky. Kružnice $k$ je řídící křivkou cyklografického kužele $\Phi(A)$ s vrcholem $A$, bod $B$ je vrcholem cyklografického kužele $\Phi(B)$ a paprsek $p$ je stopou roviny $\rho$, která má od průmětny odchylku $45°$. Středy hledaných cyklů leží současně na cyklografických kuželech $\Phi(A), \Phi(B)$ a v rovině $\rho$. Hledáme body, které leží v rovině $\rho$ a patří průnikové křivce kuželů $\Phi(A)$ a $\Phi(B)$. Středy cyklů leží na průsečnici $s$ stopy roviny $\sigma$ (chordály) cyklů $(A)$ a $(B)$ a stopy roviny $\rho$. Uvažujme vrcholové roviny $\sigma', \rho'$ [2] rovnoběžné s rovinami $\rho, \sigma$ cyklografického kužele $\Phi(A)$. Roviny $\sigma', \rho'$ se protínají v přímce $s'$. Přímka $s'$ prochází bodem $A$ a průsečíkem $S'$ půdorysných stop $p_1^{\rho'}$, $p_1^{\sigma'}$ rovin $\sigma', \rho'$. Přímka $s$ je rovnoběžná s $s'$ a prochází průsečíkem $S$ půdorysných stop $p_1^{\rho}, p_1^{\sigma}$ rovin $\rho, \sigma$. Uvažujme rovinu $\beta$ určenou přímkami $s$ a $s'$. Stopou roviny je přímka $SS'$ a v rovině také leží bod $A$, je to tedy vrcholová přímka kužele $\Phi(A)$.

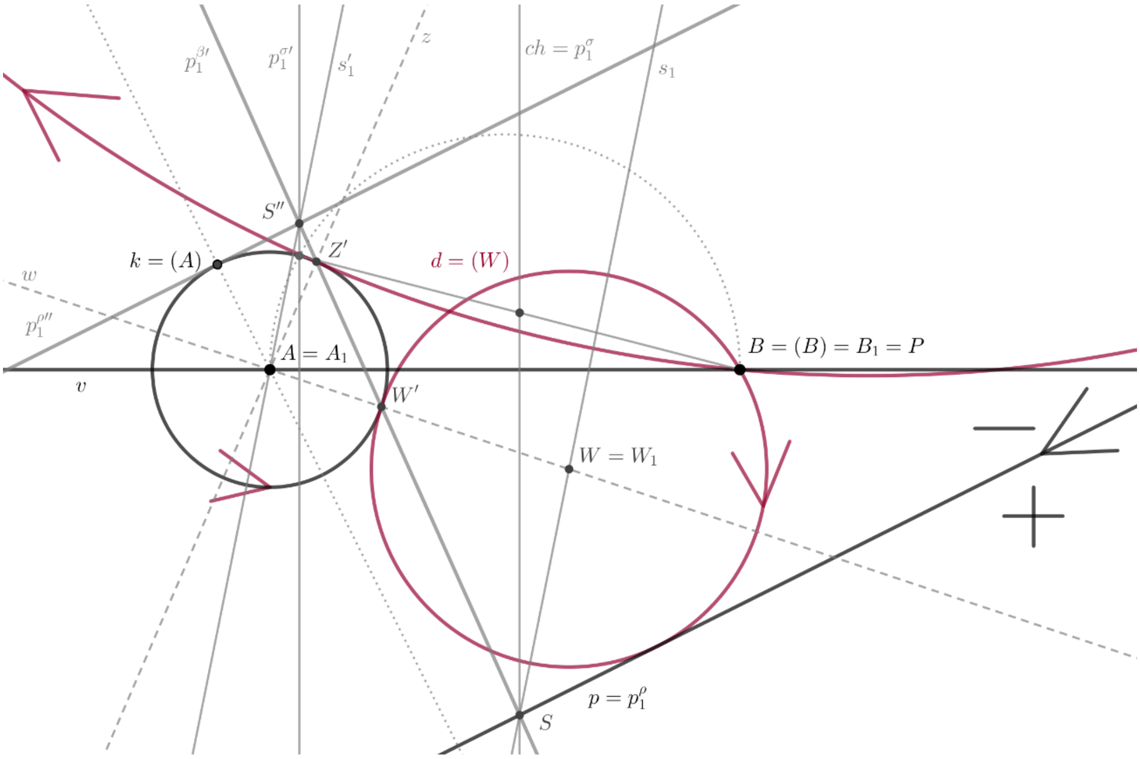
[2] Půdorysná stopa roviny $\rho'$ přímka $p_1^{\rho'}$ je tečna $(A)$ rovnoběžná s $p_1^{\rho}$ tak, aby byla souhlasně orientovaná s $(A)$.
Půdorysná stopa roviny $\sigma'$ přímka $p_1^{\sigma'}$ je spojnicí bodů dotyku tečen vedených z $B_1$ k $(A)$.

Rovina $\beta$ protne cyklografický kužel $\Phi(A)$ v povrchových přímkách $w, z$ různoběžných s přímkou $s$. Hledané středy cyklů jsou průsečíky $W, Z$ přímky $s$ po řadě s přímkami $w, z$.

Získali jsme 2 řešení úlohy, zbývající řešení obdržíme různými kombinacemi orientací kružnice a přímky.

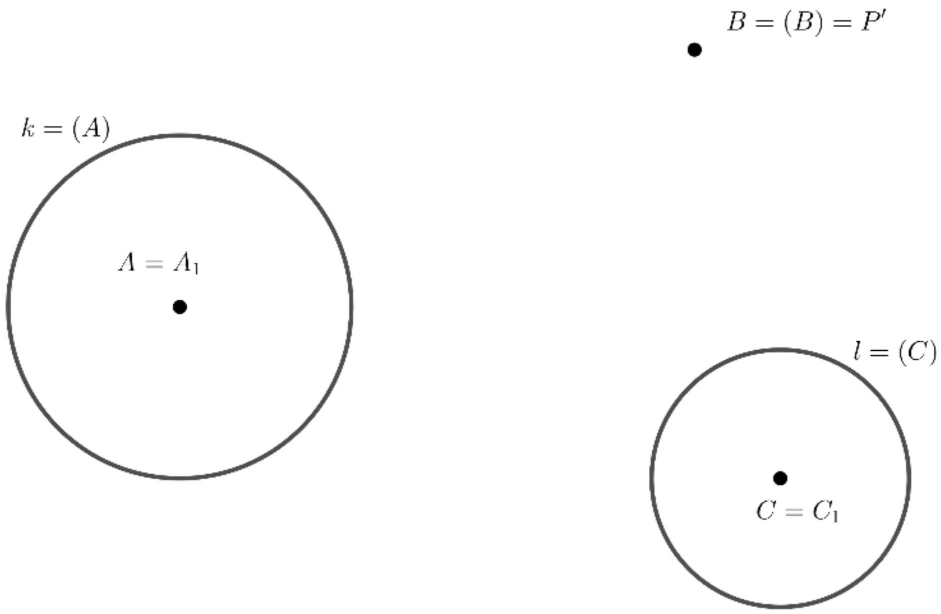
Tato úloha má pro všechny kombinace orientací 4 řešení.

[GeoGebra – řešení Bpk]



## *Příklad 3.*

Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem $B$, dotýká se daných kružnic $k, l$.




***Řešení:***

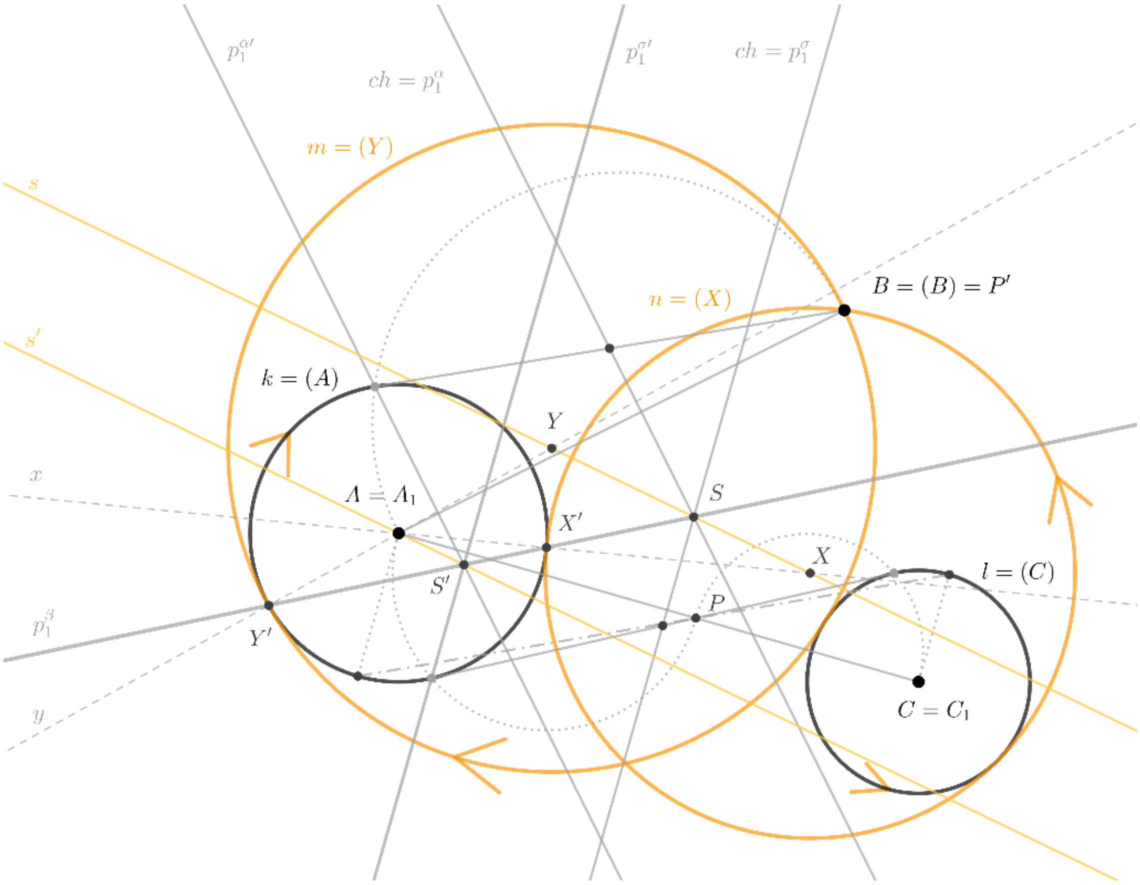
Zvolíme orientaci kružnic. Kružnice $k$ je řídící křivkou cyklografického kužele $\Phi(A)$ s vrcholem $A$, kružnice $l$ je řídící křivkou cyklografického kužele $\Phi(C)$ s vrcholem $C$ a bod $B$ je vrcholem cyklografického kužele $\Phi(B)$. Středy hledaných cyklů leží současně na cyklografických kuželech $\Phi(A)$, $\Phi(B)$ a $\Phi(C)$. Hledáme body, které patří průniku kuželů $\Phi(A)$, $\Phi(B)$ a $\Phi(C)$. Středy cyklů leží na průsečnici $s$ stopy roviny $\sigma$ (chordály) cyklů $(A)$ a $(C)$ a stopy roviny $\alpha$ (chordály) cyklů $(A)$ a $(B)$. Uvažujme vrcholové roviny $\sigma', \alpha'$ [3] cyklografického kužele $\Phi(A)$, které se protínají v přímce $s'$. Přímka $s'$ prochází bodem $A$ a průsečíkem $S'$ půdorysných stop $p_1^{\alpha'}$, $p_1^{\sigma'}$ rovin $\alpha'$, $\sigma'$. Přímka $s$ je rovnoběžná s $s'$ a prochází průsečíkem $S$ půdorysných stop $p_1^{\alpha}$, $p_1^{\sigma}$ rovin $\alpha, \sigma$. Uvažujme rovinu $\beta$ určenou přímkami $s$ a $s'$. Stopou roviny je přímka $SS'$ a v rovině také leží bod $A$, je to tedy vrcholová přímka kužele $\Phi(A)$. Rovina $\beta$ protne cyklografický kužel $\Phi(A)$ v povrchových přímkách $x, y$ různoběžných s přímkou $s$. Hledané středy cyklů jsou průsečíky $X, Y$ přímky $s$ po řadě s přímkami $x, y$.

[3] Půdorysná stopa roviny $\alpha'$ přímka $p_1^{\alpha'}$ je spojnicí bodů dotyku tečen vedených z $B_1$ k $(A)$. Půdorysná stopa roviny $\sigma'$ přímka $p_1^{\sigma'}$ je spojnicí bodů dotyku tečen vedených z $C_1$ k $(A)$.

Získali jsme 2 řešení úlohy, zbývající řešení obdržíme různými kombinacemi orientací kružnic.

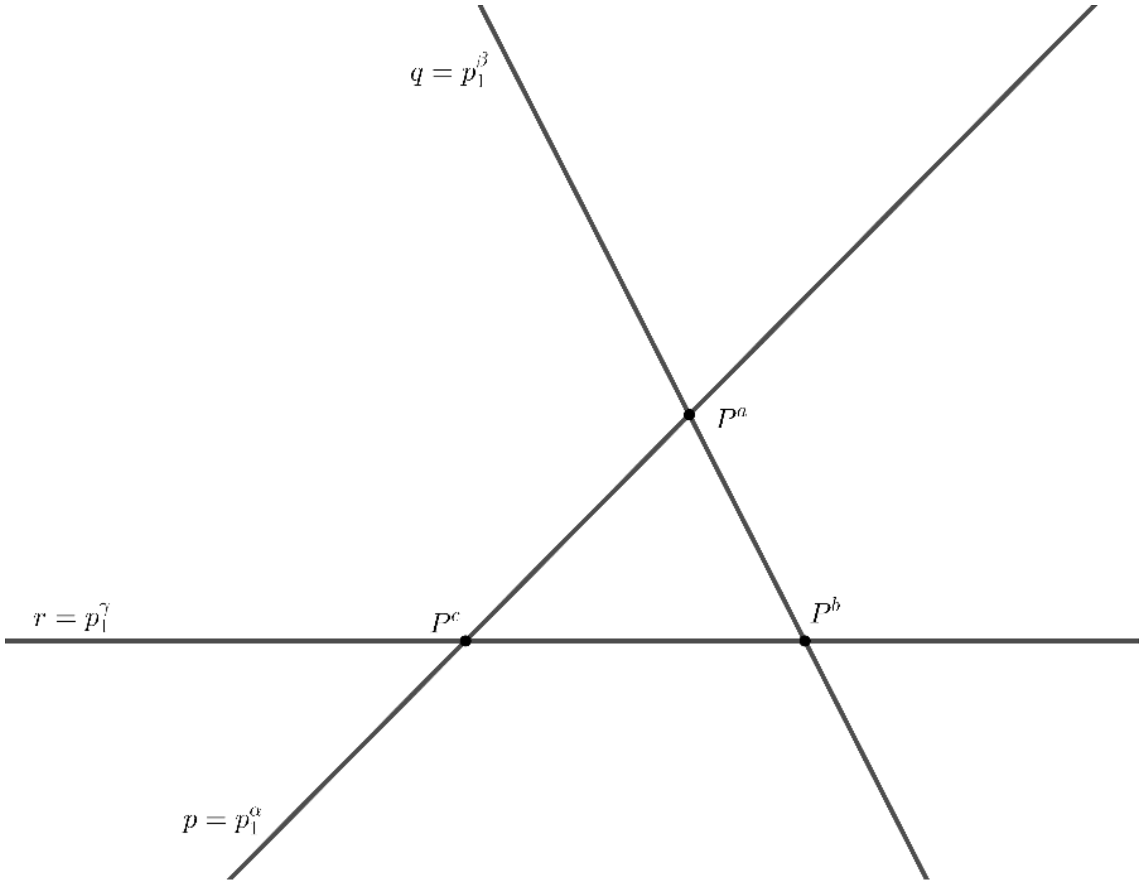
Tato úloha má pro všechny kombinace orientací 4 řešení.

[GeoGebra – řešení Bkk]



### *Příklad 4.*

Sestrojte kružnici, která se dotýká daných přímek $p, q, r$.




***Řešení:***

Zvolíme orientaci přímek. Paprsek $p$ je stopou roviny $\alpha$, paprsek $q$ je stopou roviny $\beta$ a paprsek $r$ je stopou roviny $\gamma$, které mají od průmětny odchylku $45°$. Středy hledaných cyklů leží současně ve všech rovinách. Hledáme body, které jsou průsečíkem průsečnic rovin. Při konstrukci průsečnic si pomůžeme sestrojením hlavních přímek rovin. Středy cyklů leží na průsečnici $a_1$ roviny $\alpha$ a $\beta$, na průsečnici $b_1$ roviny $\gamma$ a $\beta$.[4] Hledaný střed cyklů je průsečík $X$ průsečnic $a_1$ a $b_1$.

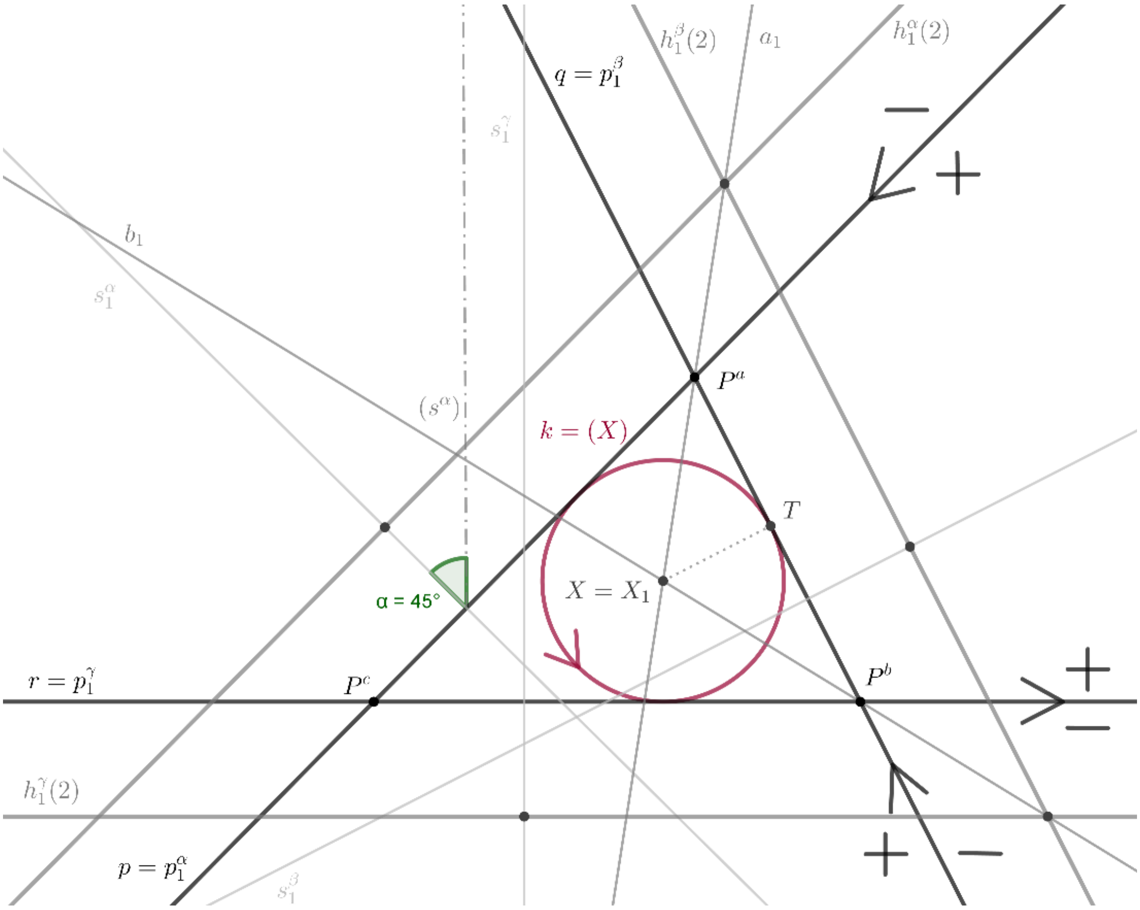
Získali jsme jedno řešení úlohy, zbývající řešení obdržíme různými kombinacemi orientací přímek.

Tato úloha má pro všechny kombinace orientací 4 řešení.

---

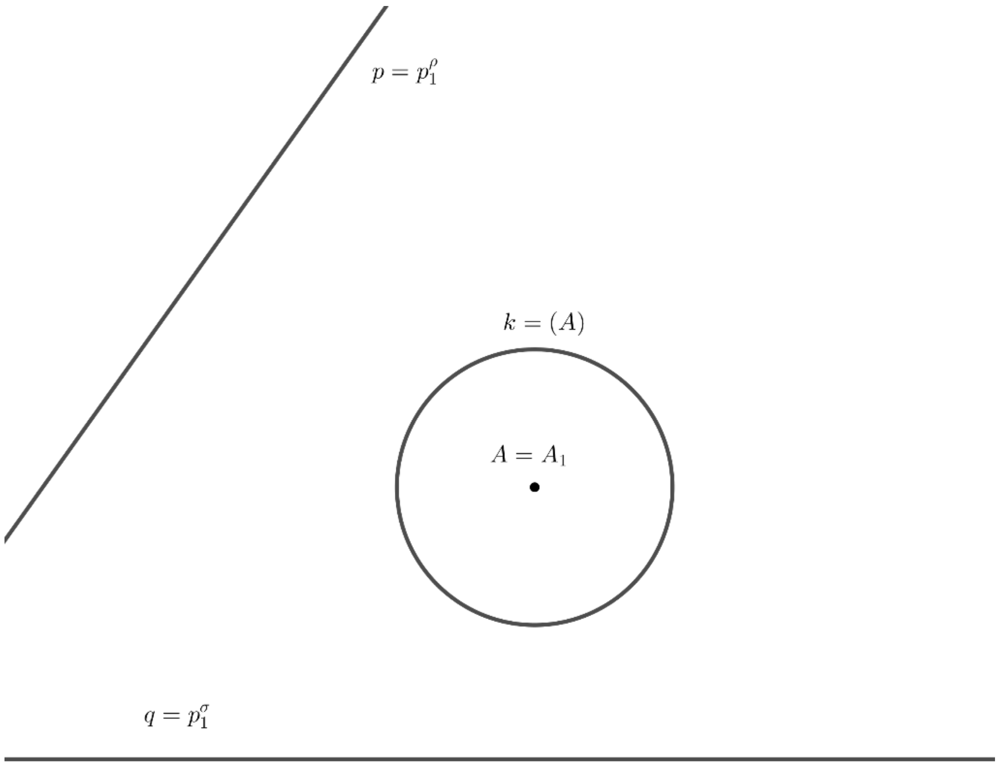
[4] Pro konstrukci středu $X$ není třeba hledat třetí průsečnici $c_1$, konstrukce průsečnice $c_1$ může sloužit jako kontrola přesnosti rýsování.

[GeoGebra – řešení ppp]



## *Příklad 5.*

Sestrojte kružnici, která se dotýká daných přímek $p$, $q$ a dané kružnice $k$.




***Řešení:***

Zvolíme orientaci kružnice a přímek. Kružnice $k$ je řídící křivkou cyklografického kužele $\Phi(A)$ s vrcholem $A$, paprsek $p$ je stopou roviny $\rho$ a paprsek $q$ je stopou roviny $\sigma$, které mají od průmětny odchylku $45°$. Středy hledaných cyklů leží současně na cyklografickém kuželi $\Phi(A)$ a v rovinách $\rho$ a $\sigma$. Hledáme body, které leží v rovinách $\rho$, $\sigma$ a patří kuželu $\Phi(A)$. Středy cyklů leží na průsečnici $s$ stopy roviny $\sigma$ a stopy roviny $\rho$. Uvažujme vrcholové roviny $\sigma', \rho'$ [5] cyklografického kužele $\Phi(A)$, které se protínají v přímce $s'$. Přímka $s'$ prochází bodem $A$ a průsečíkem $S'$ půdorysných stop $p_1^{\rho'}$, $p_1^{\sigma'}$ rovin $\sigma'$, $\rho'$. Přímka $s$ je rovnoběžná s $s'$ a prochází průsečíkem $S$ půdorysných stop $p_1^{\rho}$, $p_1^{\sigma}$ rovin $\rho$, $\sigma$. Uvažujme rovinu $\beta$ určenou přímkami $s$ a $s'$. Stopou roviny je přímka $SS'$ a v rovině také leží bod $A$, je to tedy vrcholová přímka kužele $\Phi(A)$.

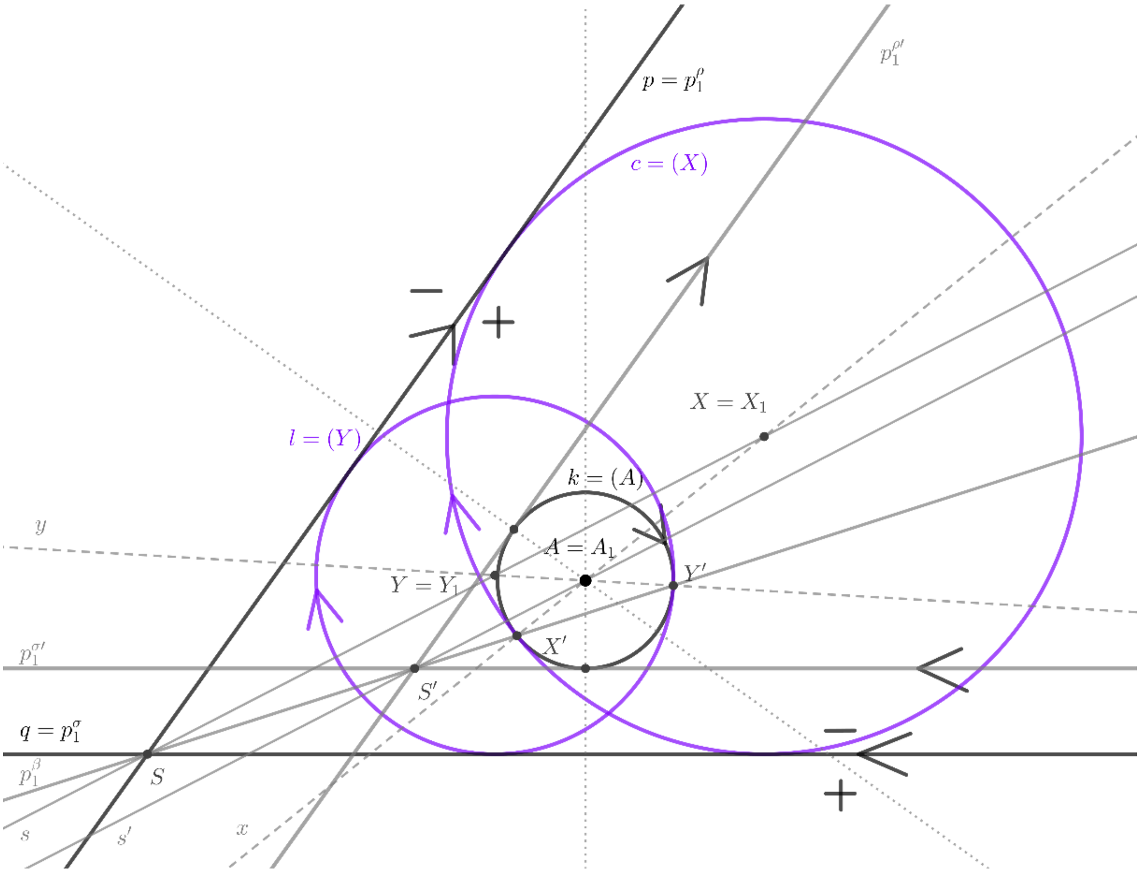
[5] Půdorysná stopa roviny $\rho'$ přímka $p_1^{\rho'}$ je tečna $(A)$ rovnoběžná s $p_1^{\rho}$ tak, aby byla souhlasně orientovaná s $(A)$.
Půdorysná stopa roviny $\sigma'$ přímka $p_1^{\sigma'}$ je tečna $(A)$ rovnoběžná s $p_1^{\rho}$ tak, aby byla souhlasně orientovaná s $(A)$.

Rovina $\beta$ protne cyklografický kužel $\Phi(A)$ v povrchových přímkách $x, y$ různoběžných s přímkou $s$. Hledané středy cyklů jsou průsečíky $X, Y$ přímky $s$ po řadě s přímkami $x, y$.

Získali jsme 2 řešení úlohy, zbývající řešení obdržíme různými kombinacemi orientací kružnice a přímky.

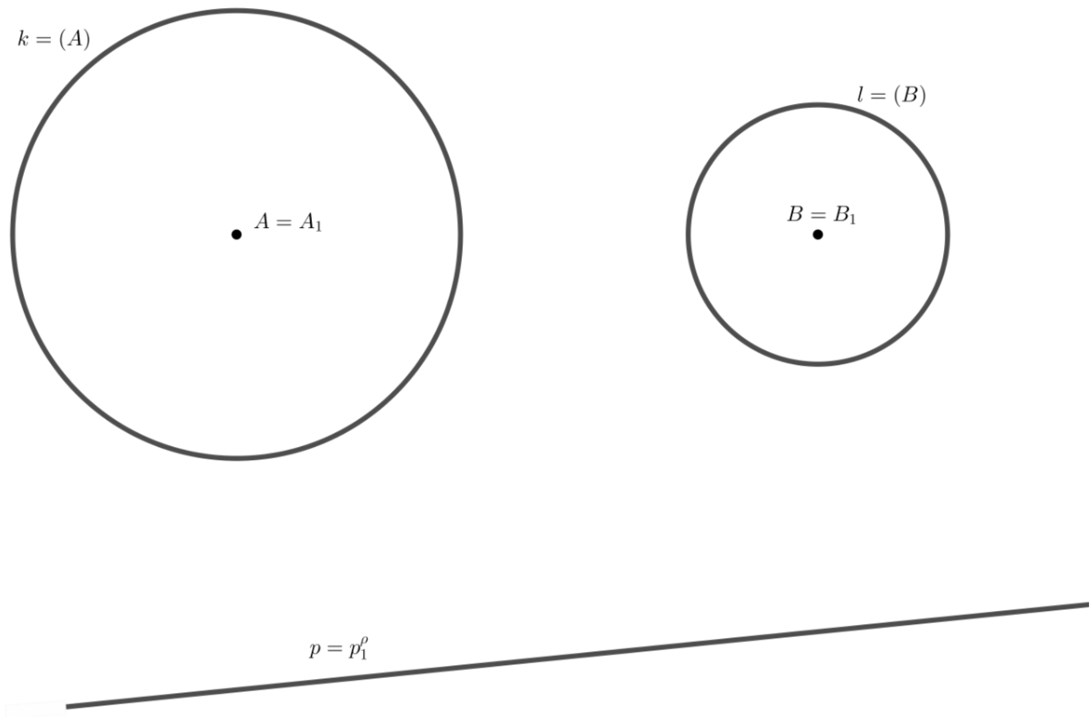
Tato úloha má pro všechny kombinace orientací 4 řešení.

[GeoGebra – řešení ppk]



## *Příklad 6.*

Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky $p$ a daných kružnic $k, l$.




***Řešení:***

Zvolíme orientaci kružnic a přímky. Kružnice $k$ je řídící křivkou cyklografického kužele $\Phi(A)$ s vrcholem $A$, kružnice $l$ je řídící křivkou cyklografického kužele $\Phi(B)$ s vrcholem $B$ a paprsek $p$ je stopou roviny $\rho$, která má od průmětny odchylku 45°. Středy hledaných cyklů leží současně na cyklografických kuželech $\Phi(A)$, $\Phi(B)$ a v rovině $\rho$. Hledáme body, které leží v rovině $\rho$ a patří průnikové křivce kuželů $\Phi(A)$ a $\Phi(B)$. Středy cyklů leží na průsečnici $s$ stopy roviny $\sigma$ (chordály) cyklů $(A)$ a $(B)$ a stopy roviny ρ. Uvažujme vrcholové roviny $\sigma', \rho'$[6] cyklografického kužele $\Phi(A)$, které se protínají v přímce $s'$. Přímka $s'$ prochází bodem $A$ a průsečíkem $S'$ půdorysných stop $p_1^{\rho'}$, $p_1^{\sigma'}$ rovin $\sigma', \rho'$. Přímka $s$ je rovnoběžná s $s'$ a prochází průsečíkem $S$ půdorysných stop $p_1^{\rho}$, $p_1^{\sigma}$ rovin $\rho, \sigma$. Uvažujme rovinu $\beta$ určenou přímkami $s$ a $s'$. Stopou roviny je přímka $SS'$ a v rovině také leží bod $A$, je to tedy vrcholová přímka kužele $\Phi(A)$.

---

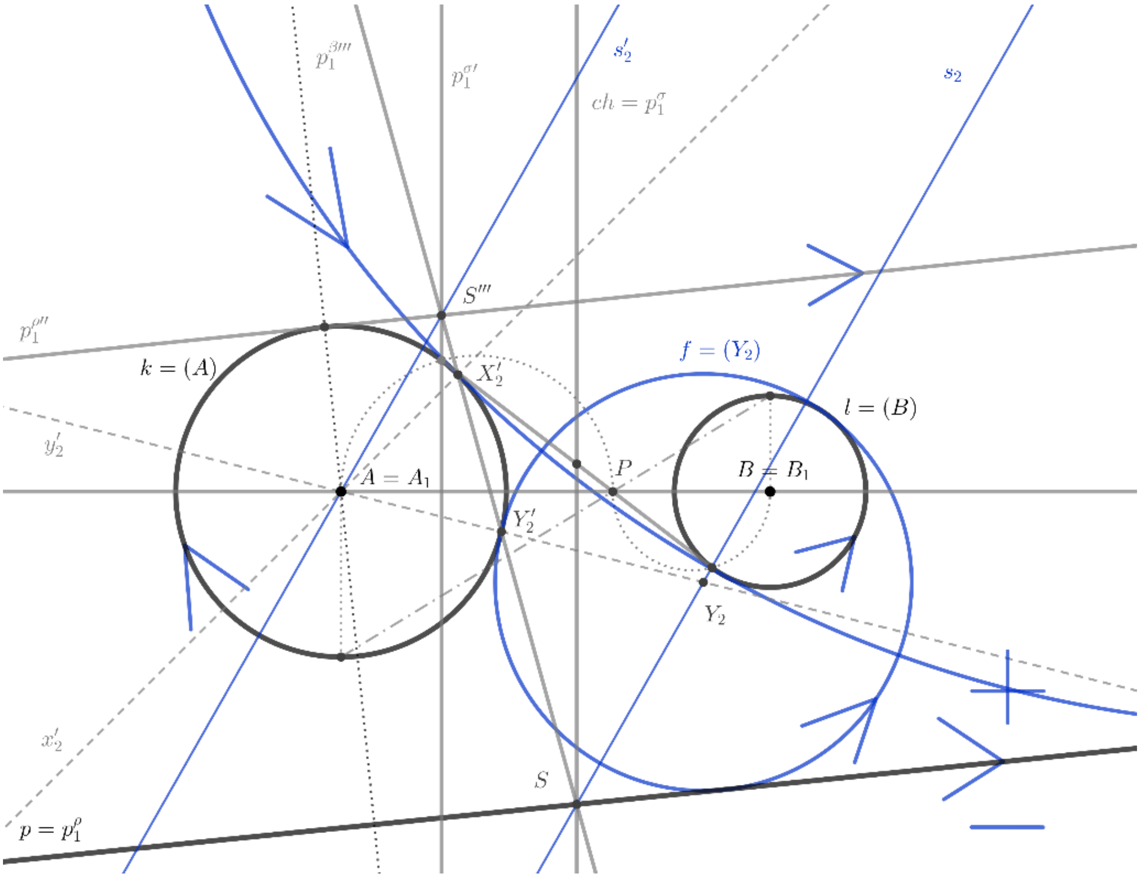
[6] Půdorysná stopa roviny $\rho'$ přímka $p_1^{\rho'}$ je tečna $(A)$ rovnoběžná s $p_1^{\rho}$ tak, aby byla souhlasně orientovaná s $(A)$.
Půdorysná stopa roviny $\sigma'$ přímka $p_1^{\sigma'}$ je spojnicí bodů dotyku tečen vedených z $B_1$ k $(A)$.

Rovina $\beta$ protne cyklografický kužel $\Phi(A)$ v povrchových přímkách $x, y$ různoběžných s přímkou $s$. Hledané středy cyklů jsou průsečíky $X, Y$ přímky $s$ po řadě s přímkami $x, y$.

Získali jsme 2 řešení úlohy, zbývající řešení obdržíme různými kombinacemi orientací kružnic.

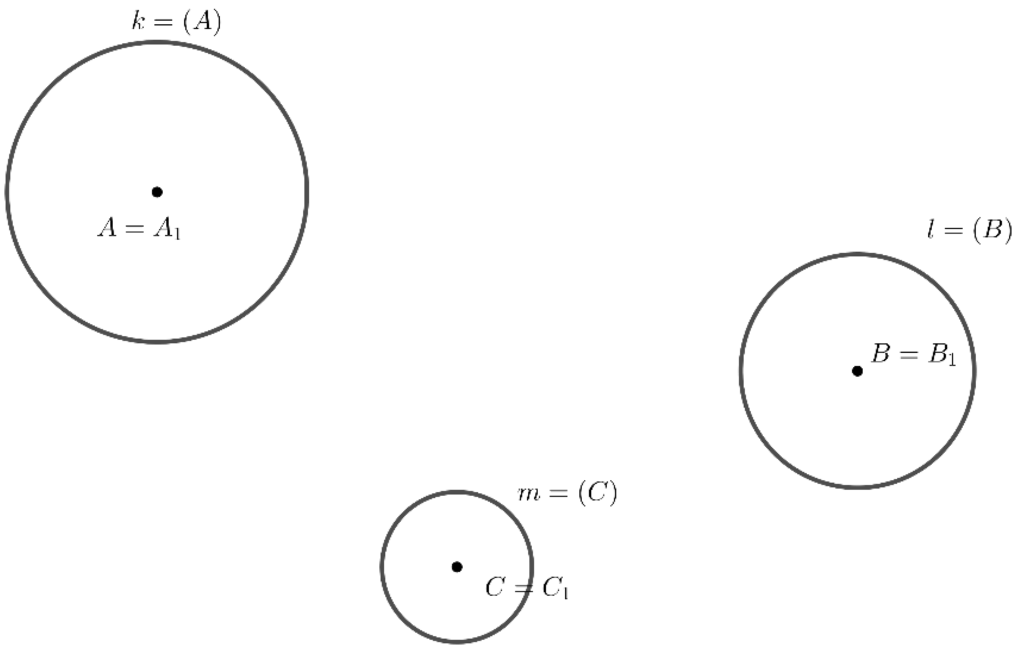
Tato úloha má pro všechny kombinace orientací 8 řešení.

[GeoGebra – řešení pkk]



### *Příklad 7.*

Sestrojte kružnici, která se dotýká daných kružnic $k, l, m$.




***Řešení:***

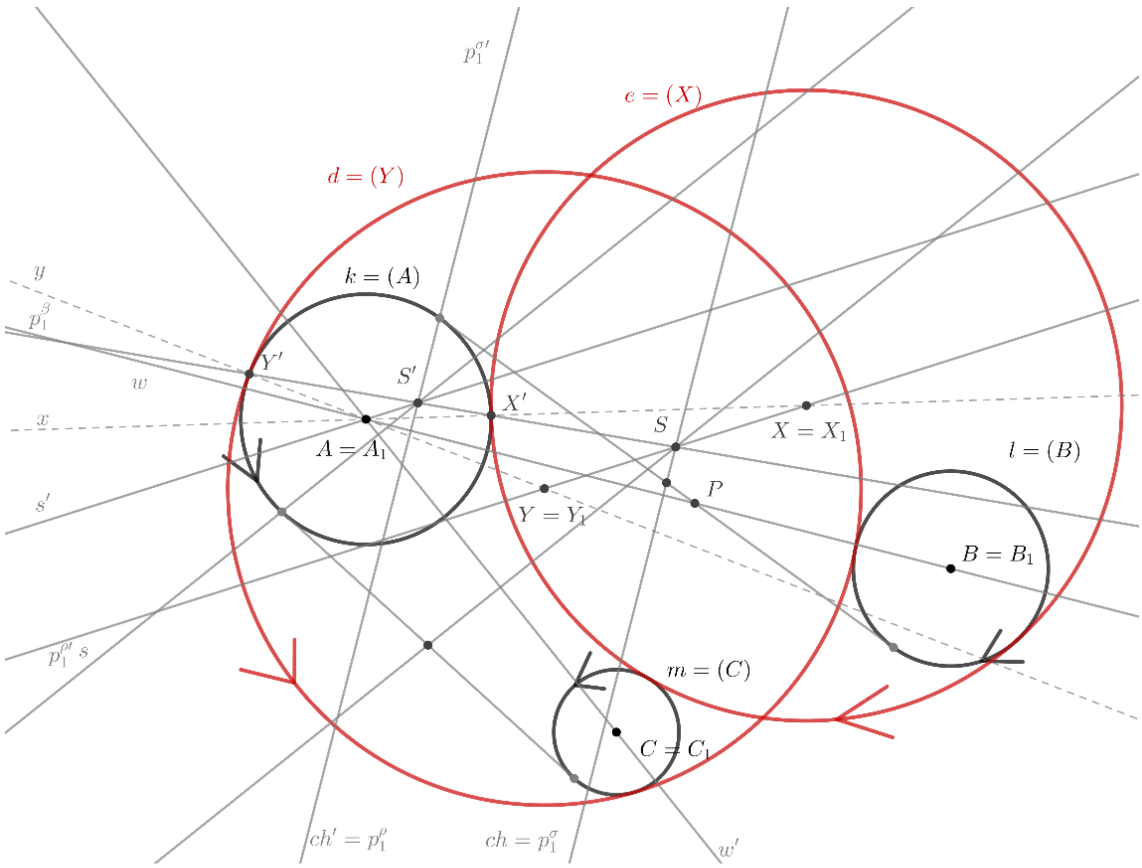
Zvolíme orientaci kružnic. Kružnice $k$ je řídící křivkou cyklografického kužele $\Phi(A)$ s vrcholem $A$, kružnice $l$ je řídící křivkou cyklografického kužele $\Phi(B)$ s vrcholem $B$ a kružnice $m$ je řídící křivkou cyklografického kužele $\Phi(C)$ s vrcholem $C$. Středy hledaných cyklů leží současně na cyklografických kuželech $\Phi(A)$, $\Phi(B)$ a $\Phi(C)$. Hledáme body, které patří průnikové křivce kuželů $\Phi(A)$, $\Phi(B)$a $\Phi(C)$. Středy cyklů leží na průsečnici $s$ stopy roviny $\sigma$ (chordály) cyklů $(A)$ a $(B)$ a stopy roviny $\rho$ (chordály) cyklů $(A)$ a $(C)$. Uvažujme vrcholové roviny $\sigma', \rho'$[7] cyklografického kužele $\Phi(A)$, které se protínají v přímce $s'$. Přímka $s'$ prochází bodem $A$ a průsečíkem $S'$ půdorysných stop $p_1^{\rho'}, p_1^{\sigma'}$ rovin $\sigma', \rho'$. Přímka $s$ je rovnoběžná s $s'$ a prochází průsečíkem $S$ půdorysných stop $p_1^{\rho}, p_1^{\sigma}$ rovin $\rho, \sigma$. Uvažujme rovinu $\beta$ určenou přímkami $s$ a $s'$. Stopou roviny je přímka $SS'$ a v rovině také leží bod $A$, je to tedy vrcholová přímka kužele $\Phi(A)$. Rovina $\beta$ protne cyklografický kužel $\Phi(A)$ v povrchových přímkách $x, y$ různoběžných s přímkou $s$. Hledané středy cyklů jsou průsečíky $X, Y$ přímky $s$ po řadě s přímkami $x, y$.

[7] Půdorysná stopa roviny $\rho'$ přímka $p_1^{\rho'}$ je spojnicí bodů dotyku tečen vedených z $C_1$ k $(A)$.
Půdorysná stopa roviny $\sigma'$ přímka $p_1^{\sigma'}$ je spojnicí bodů dotyku tečen vedených z $B_1$ k $(A)$.

Získali jsme 2 řešení úlohy, zbývající řešení obdržíme různými kombinacemi orientací kružnic.

Tato úloha má pro všechny kombinace orientací 8 řešení.

GeoGebra – řešení kkk



## 2.2. Pappovy úlohy

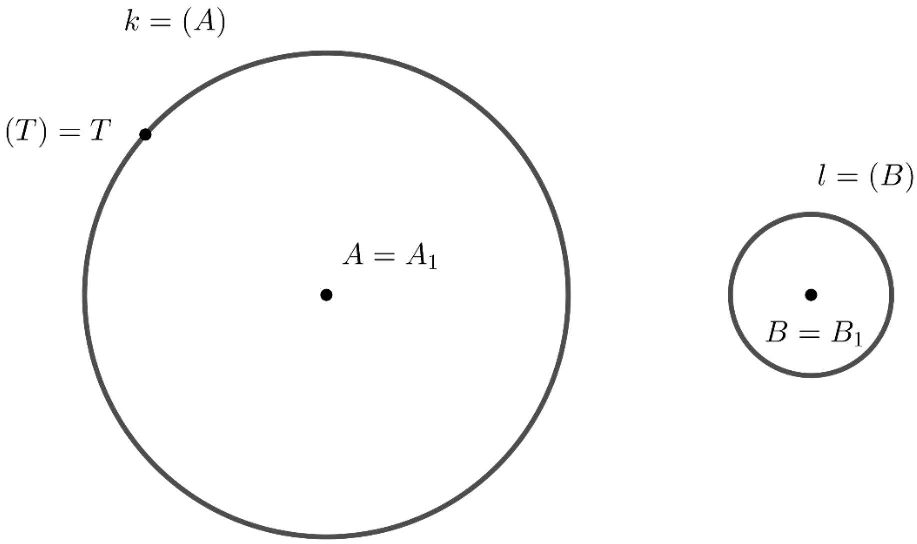
Pappových úloh je šest:

- Typ B(kB) – bod, kružnice a bod dotyku na kružnici
- Typ p(kB) – přímka, kružnice a bod dotyku na kružnici
- Typ k(kB) – kružnice, kružnice a bod dotyku na kružnici
- Typ B(pB) – bod, přímka a bod dotyku na přímce
- Typ p(pB) – přímka, přímka a bod dotyku na přímce
- Typ k(pB) – kružnice, přímka a bod dotyku na přímce

Ukážeme si řešení dvou z těchto úloh. Tato řešení jsou jednoduchá, elegantní a jsou snadněji konstruovatelná než řešení planimetrickými prostředky, např. pomocí kruhové inverze. Řešení zbylých úloh pomocí cyklografie je zbytečně složité, daleko efektivnější je řešit zbylé úlohy pomocí známých planimetrických konstrukcí.

***Příklad 1.***

Sestrojte kružnici, která se v daném bodě $T$ dotýká dané kružnice $k$ a dotýká se další kružnice $l$.



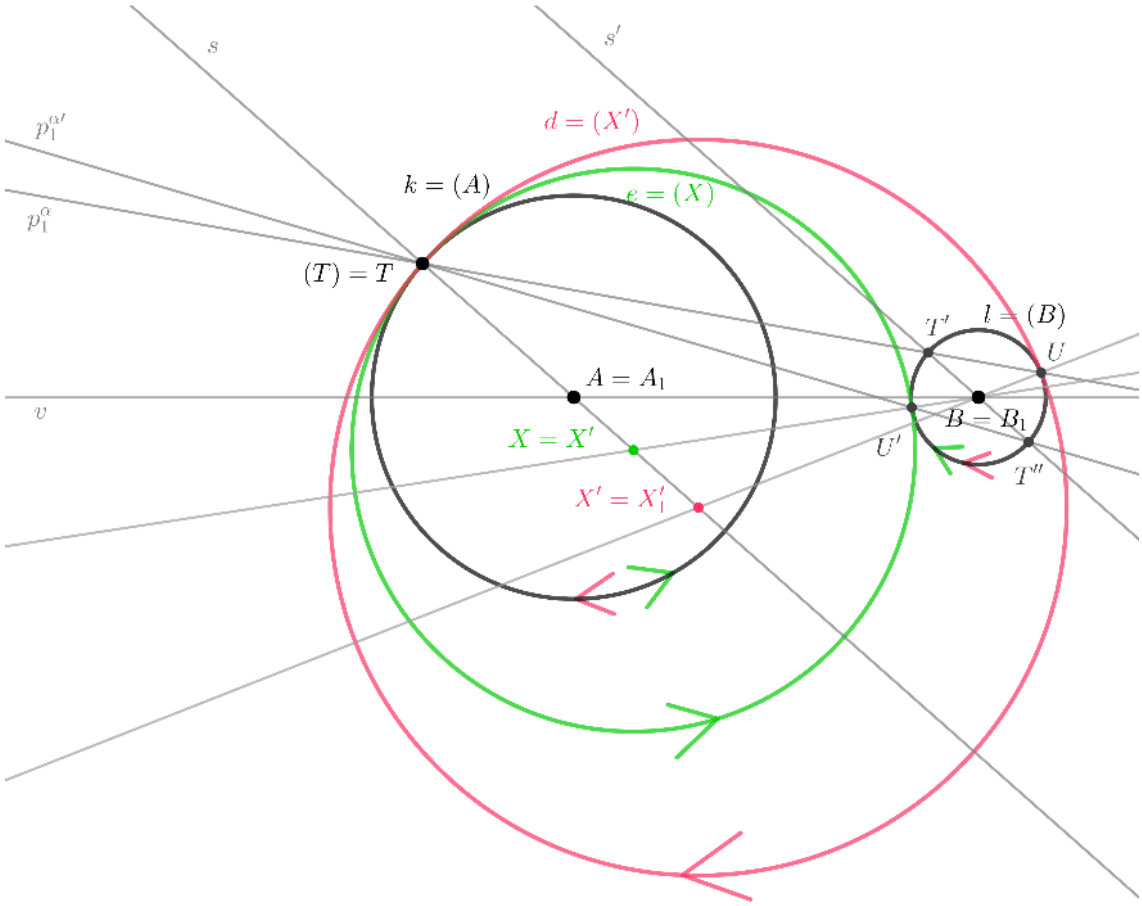

***Řešení:***

Zvolíme libovolně orientaci kružnic. Orientovaná kružnice $k$ je pak řídící křivkou cyklografického kužele $\Phi(A)$ s vrcholem $A$, obdobně kružnice $l$ je řídící kružnicí cyklografického kužele $\Phi(B)$ s vrcholem $B$. Hledáme bod $X$, který patří oběma cyklografickým kuželům. Jelikož známe bod dotyku $T$ na kružnici $k$, známe tak povrchovou přímku cyklografického kužele $\Phi(A)$, na které $X$ leží. Na $\Phi(B)$ leží povrchová přímka $BT'$, rovnoběžná s $AT$. Přímka $TT'$ je pak stopou roviny určené přímkami $AT$ a $BT'$, (tj. vrcholy kuželů $\Phi(A)$, $\Phi(B)$ v této rovině leží), uvedená rovina protíná $\Phi(B)$ ještě v povrchové přímce $BU$, která je různoběžná s $AT$. Průsečík $X$ přímek $AT$ a $BU$ je vrchol hledaného cyklografického kužele $\Phi(X)$.

Získali jsme jedno řešení úlohy, zbývající řešení obdržíme různými kombinacemi orientací kružnic.

Tato úloha má pro všechny kombinace orientací 2 řešení.

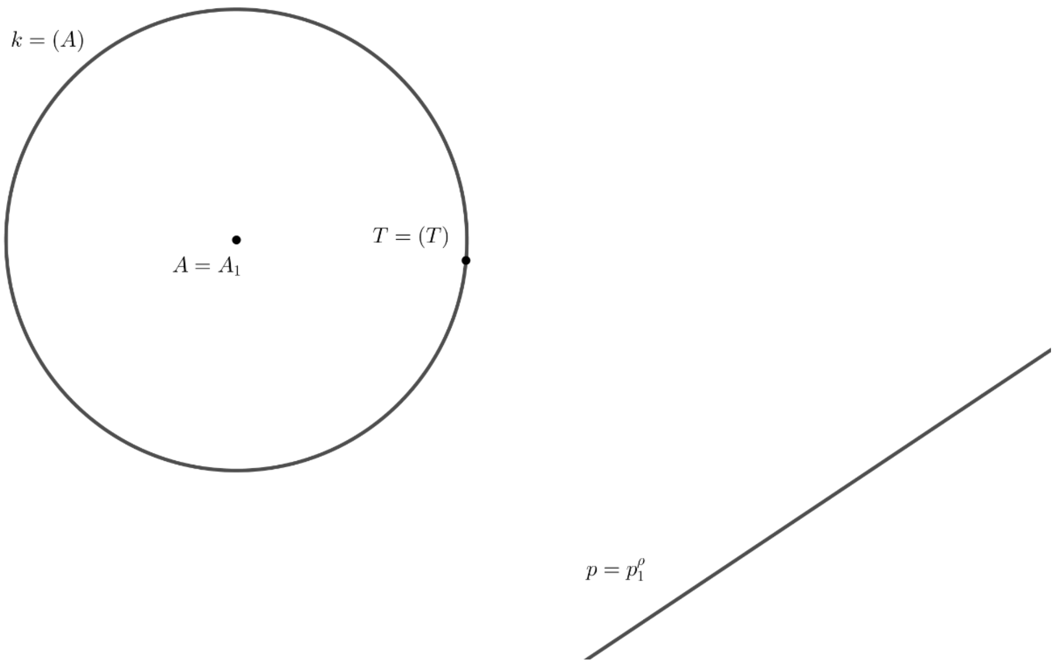
GeoGebra – řešení k(kB)



$s$
$s'$
$p_1^{\alpha'}$
$p_1^{\alpha}$
$d = (X')$
$k = (A)$
$e = (X)$
$(T) = T$
$T'$
$l = (B)$
$U$
$A = A_1$
$v$
$B = B_1$
$X = X'$
$U'$
$T''$
$X' = X_1'$

***Příklad 2.***

Sestrojte kružnici, která se v daném bodě $T$ dotýká dané kružnice $k$ a dotýká se další přímky $p$.



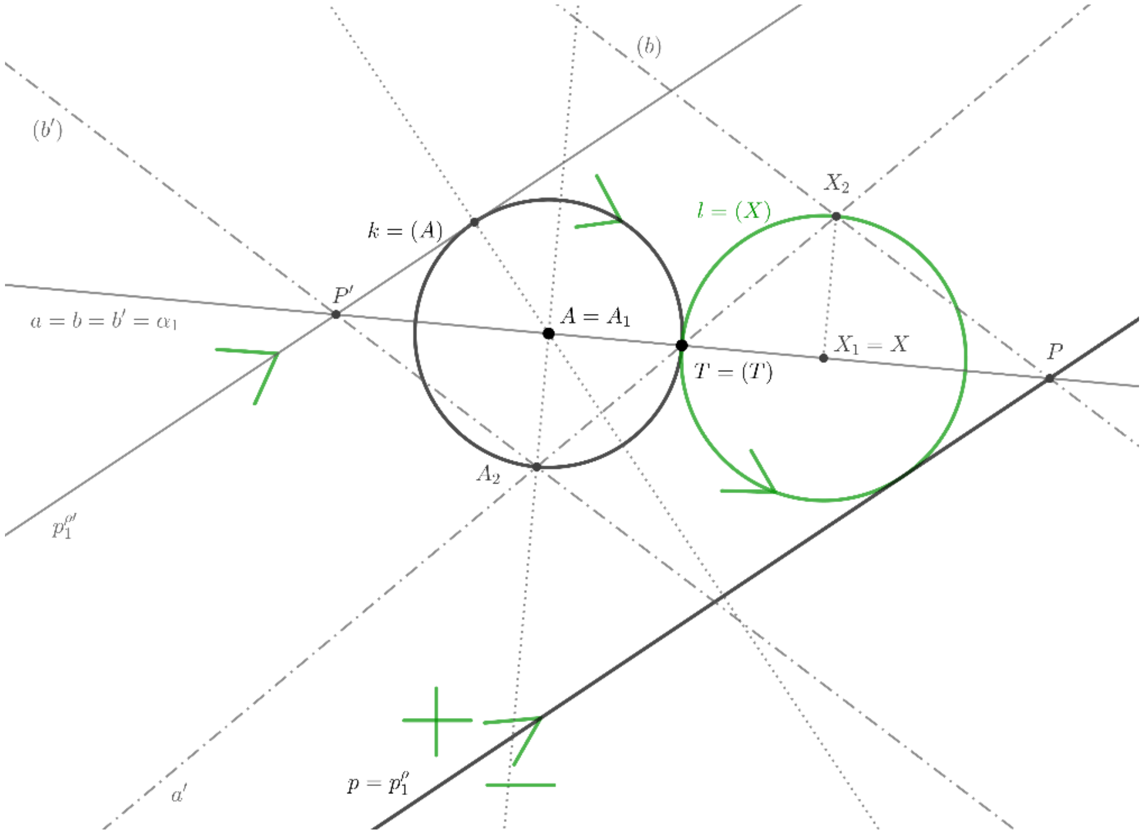

***Řešení:***

Zvolíme libovolně orientaci kružnice a přímky. Orientovaná kružnice $k$ je pak řídící křivkou cyklografického kužele $\Phi(A)$ s vrcholem $A$, paprsek $p$ je stopou roviny ρ, která má odchylku od průmětny 45°. Hledaný cykl $(X)$ leží v rovině ρ a dotýká se cyklu $(A)$ v bodě $T$, proto leží také na přímce $AT$. Hledáme tedy průsečík přímky $AT$ s rovinou $\rho$. V pravoúhle promítací rovině $\alpha$ přímky $a$ leží také průsečnice $b$ rovin $\rho$ a $\alpha$ . Stopník přímky $b$ leží na stopě roviny $\rho$. Sestrojíme vrcholovou rovinu $\rho'$ rovnoběžnou s rovinou $\rho$. Ta se dotýká $\Phi(A)$ podél přímky $b'$ rovnoběžné s přímkou $b$, její stopník leží na stopě roviny $\rho'$ a přímka $b'$ leží rovněž v rovině $\alpha$. Sklopením roviny $\alpha$ získáme hledaný střed cyklu $X$, který je průsečíkem přímky $a$ s přímkou $b$.

Získali jsme jedno řešení úlohy, zbývající řešení obdržíme různými kombinacemi orientací kružnice a přímky.

Tato úloha má pro všechny kombinace orientací 2 řešení.

GeoGebra – řešení p(kB)



$(b)$
$(b')$
$X_2$
$l = (X)$
$k = (A)$
$P'$
$A = A_1$
$a = b = b' = \alpha_1$
$T = (T)$
$X_1 = X$
$P$
$A_2$
$p_1^{\rho'}$
$a'$
$p = p_1^{\rho}$

# Závěr

Cílem práce bylo vypracovat sbírku několika řešených planimetrických úloh pomocí cyklografie. Výsledkem práce je 9 řešených úloh i s jejími pracovními listy. Ve výše vypracovaných úlohách jsem znázornila pouze částečné řešení zadání pro lepší přehlednost postupu. Mohla jsem si to dovolit, protože každý příklad obsahuje odkaz pro celkové řešení úlohy v programu GeoGebra. V GeoGebře pomocí posuvníků můžeme zobrazit řešení pro všechny orientace útvarů, kde řešení nejsou souměrná podle průmětny. Díky GeoGebře si čtenář může pořádně prohlédnout postup řešení konkrétního zadání, což jak doufám mu pomůže v porozumění zobrazovací metody.

Sbírku úloh řešených cyklografií by jistě šlo rozšířit o další příklady, které by byly zaměřené na planimetrické úlohy, kde v rovině hledáme kružnici, která kromě dotyku s danými útvary protíná přímku nebo přímky pod určeným úhlem.

S výsledkem práce jsem spokojená. Psaní a vypracovávání úloh mně bavilo a zároveň také učilo volit pouze podstatné informace, abych čtenáře zbytečně nezaplavila nedůležitými poznatky.

# Literatura

L. Juklová, **Aplikace deskriptivní geometrie. Základy kartografie a cyklografie**, skriptum UP, 2013

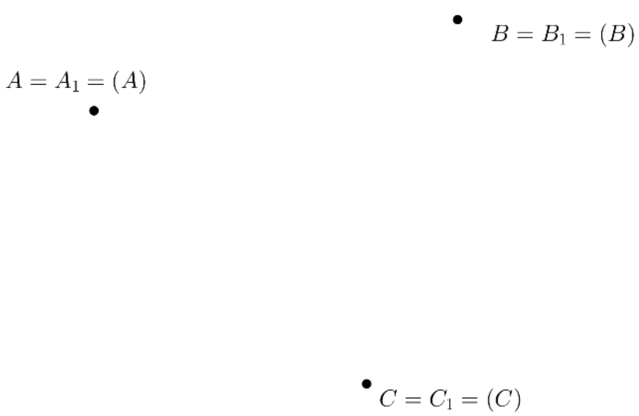
L. Seifert, **Cyklografie**, JČMF, Praha, 1949

F. Machala, M. Sedlářová, Srovnal, **Konstrukční geometrie**, UP Olomouc, 2002

# Přílohy

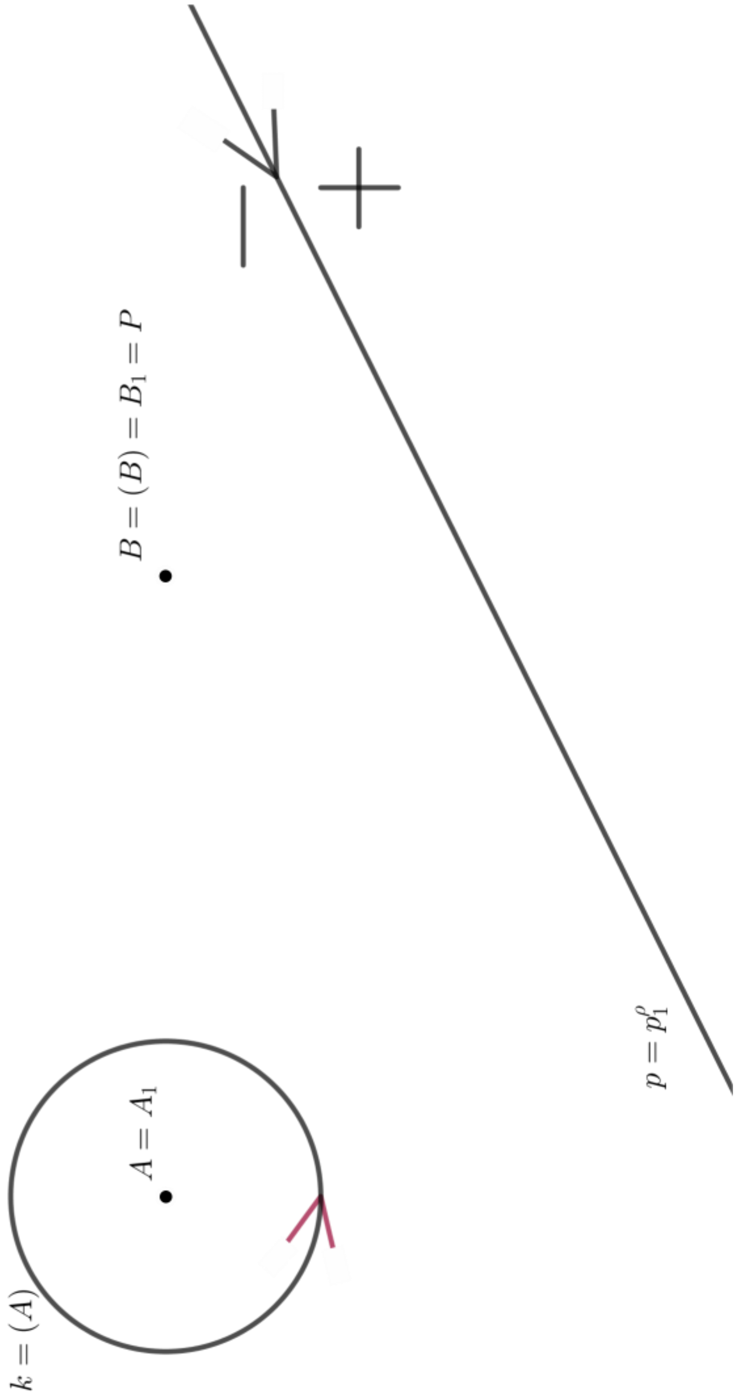
## *Úloha BBB*

Sestrojte kružnici, která prochází danými body $A, B, C$.



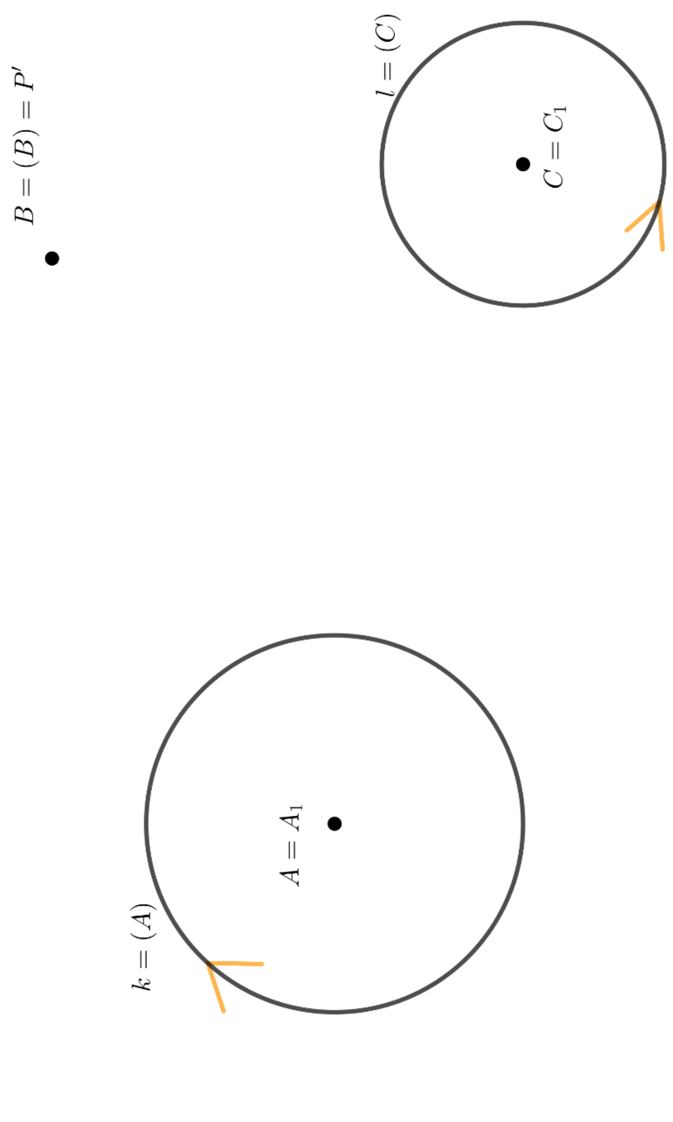
## *Úloha Bpk*

Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem $B$, dotýká se dané přímky $p$ a dané kružnice $k$ (při dané orientaci).



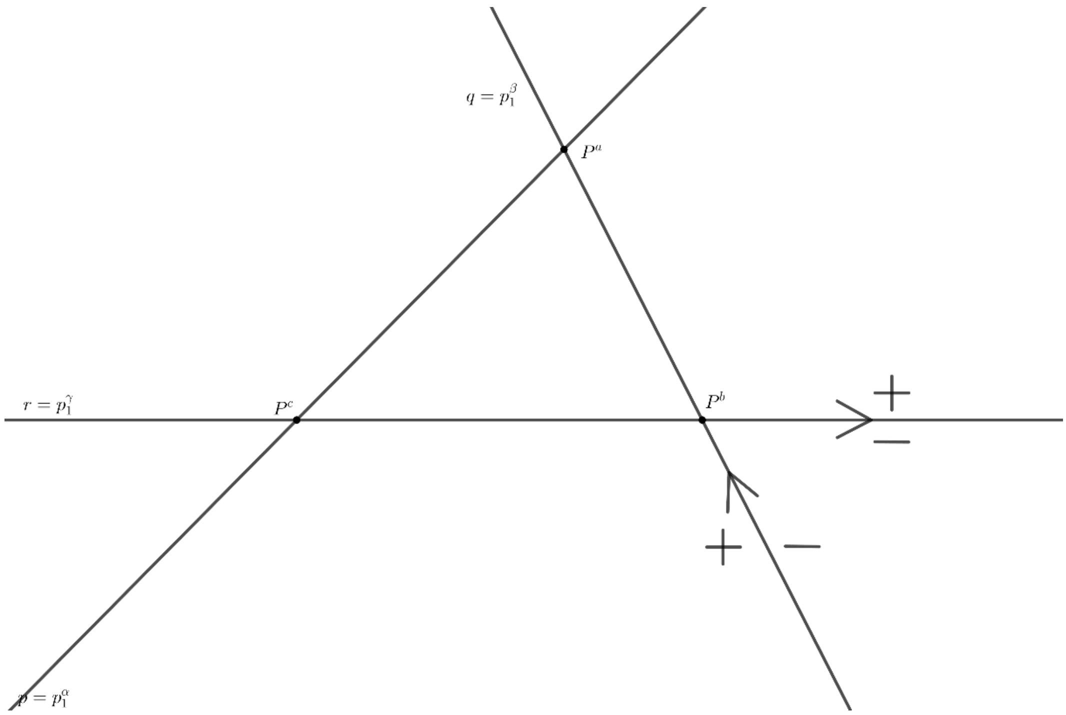
## *Úloha Bkk*

Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem $B$, dotýká se daných kružnic $k, l$ (při dané orientaci).



## *Úloha ppp*

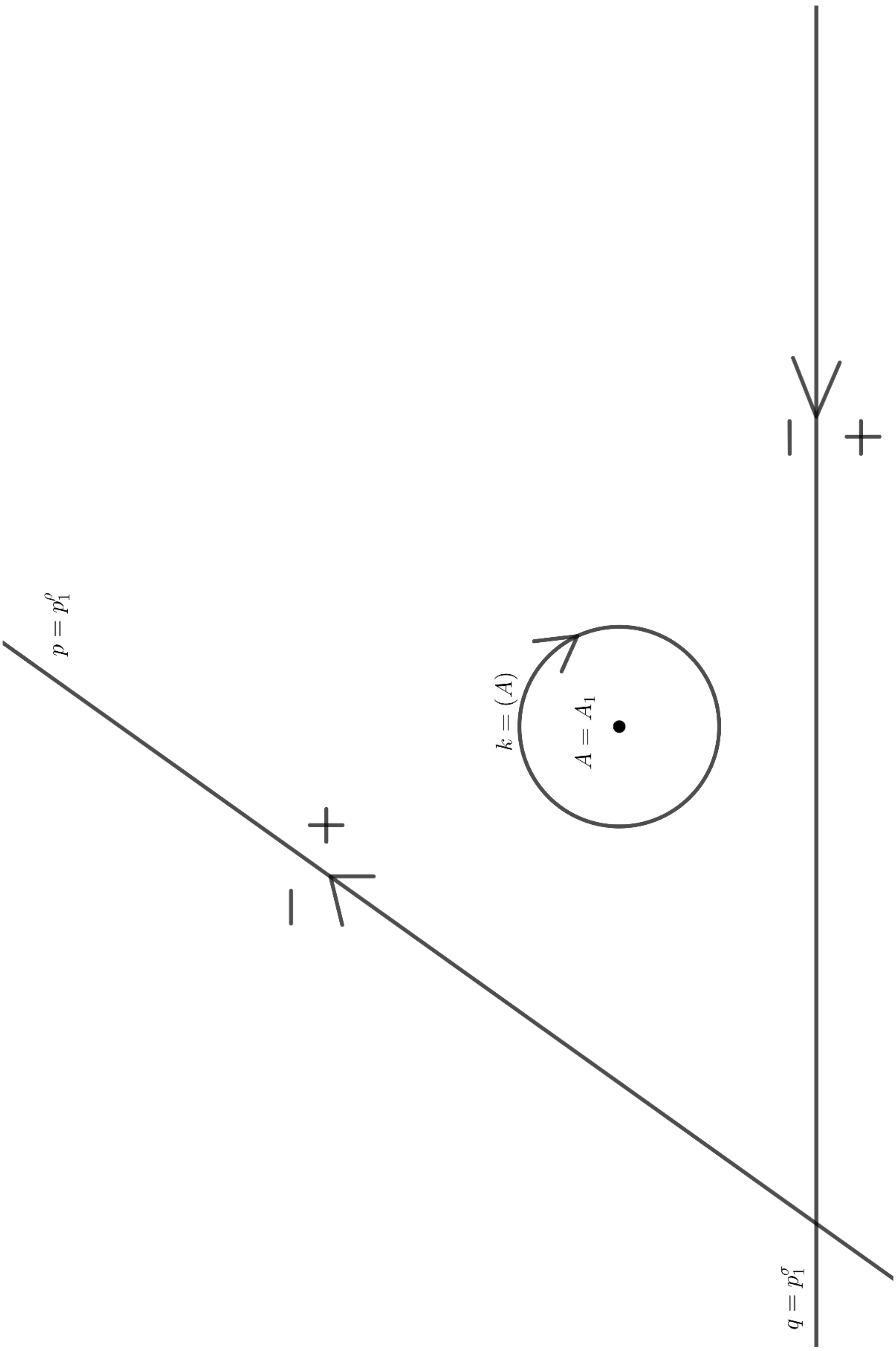
Sestrojte kružnici, která se dotýká daných přímek $p, q, r$ (při dané orientaci).[8]




[8] Na pracovní list se vlezou všechna 4 řešení.

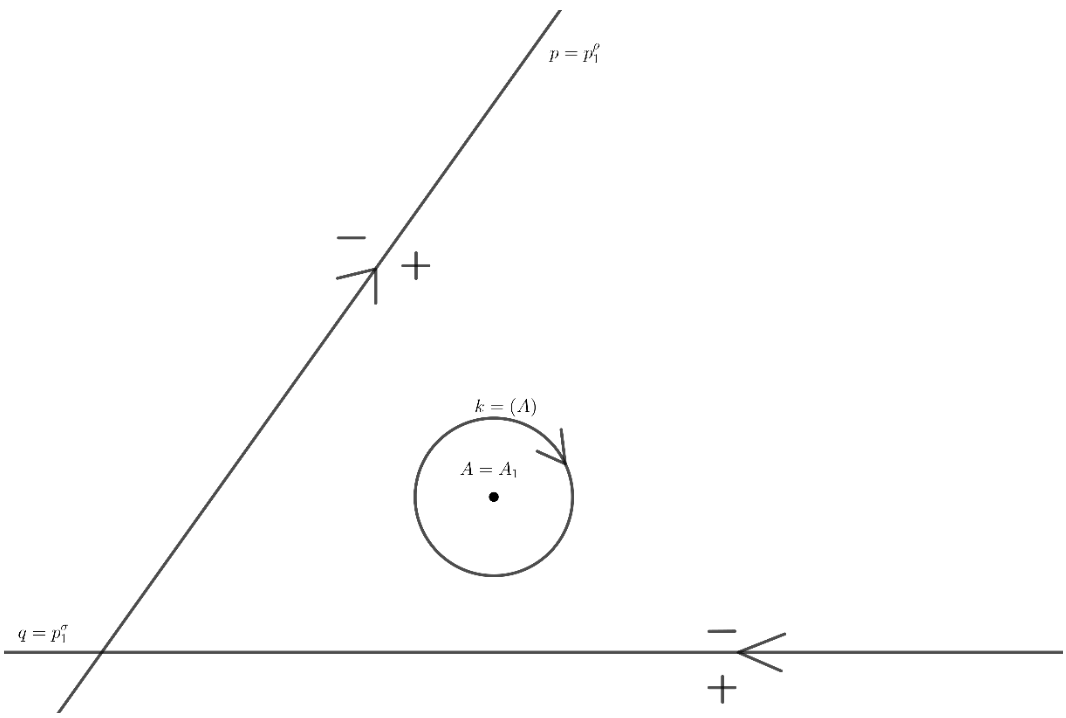
### *Úloha ppk*

Sestrojte kružnici, která se dotýká daných přímek $p$, $q$ a dané kružnice $k$ (při dané orientaci).



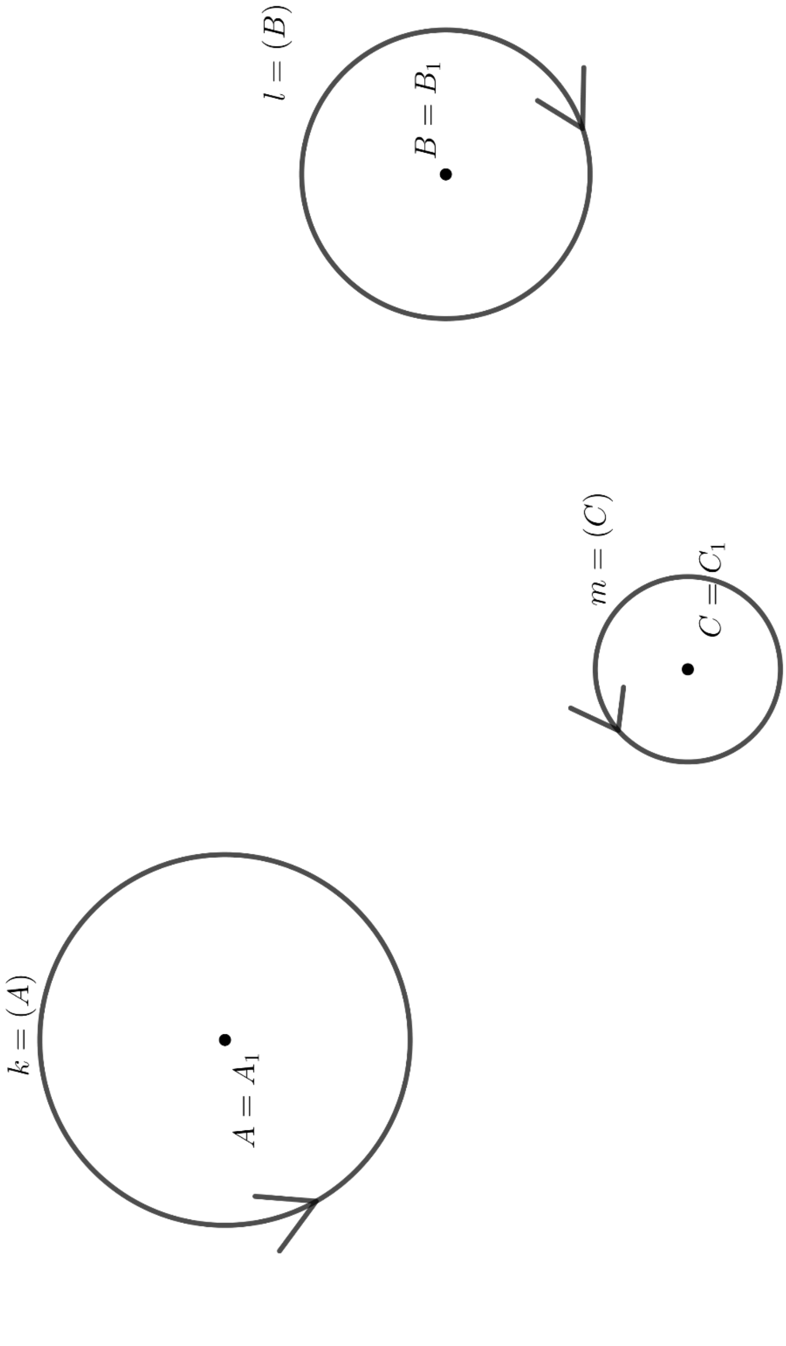
### *Úloha pkk*

Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky $p$ a daných kružnic $k, l$ (při dané orientaci).



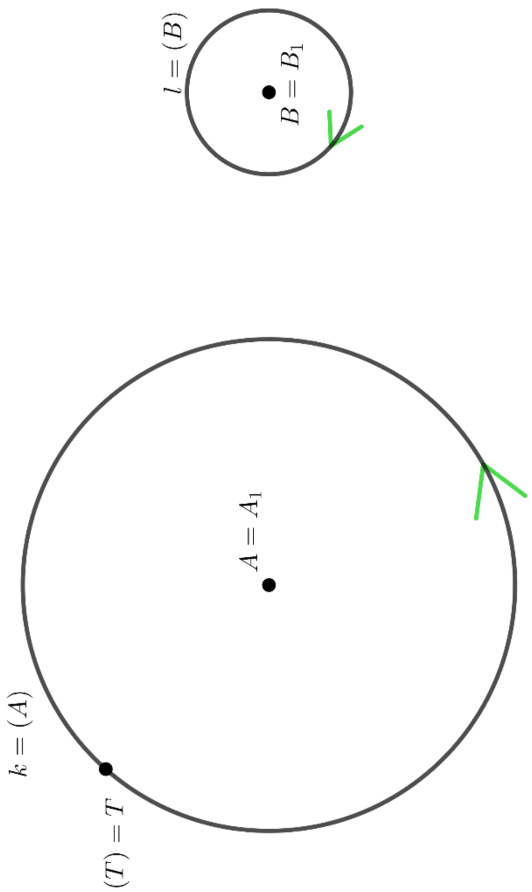
## *Úloha kkk*

Sestrojte kružnici, která se dotýká daných kružnic $k, l, m$ (při dané orientaci).



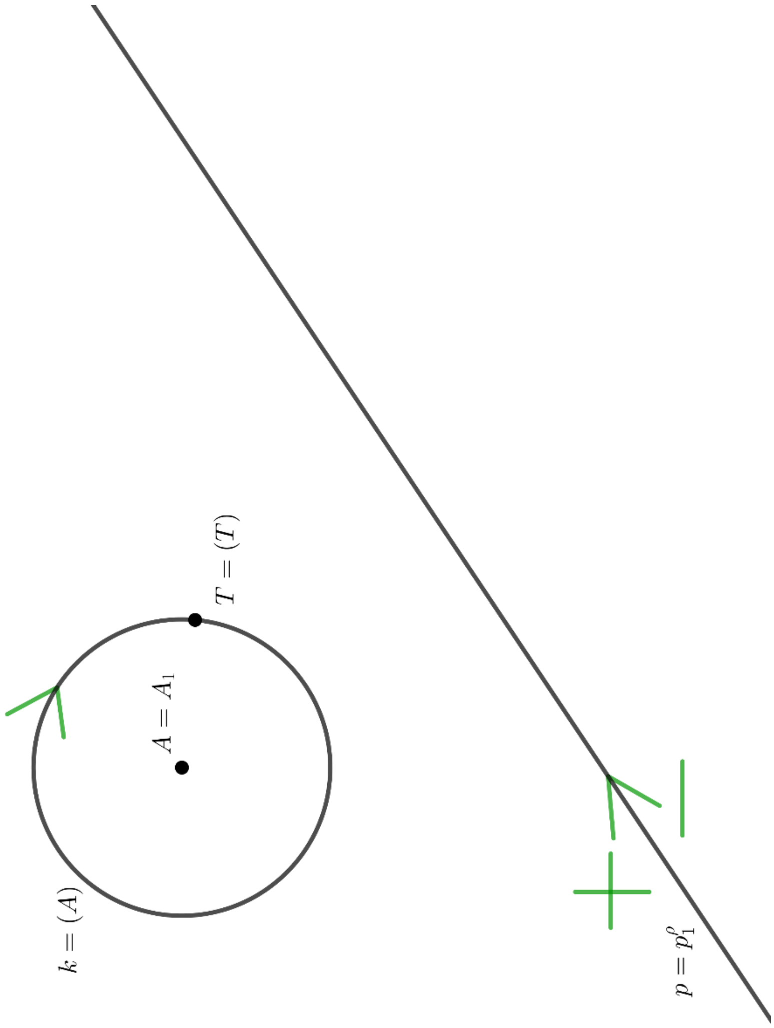
## *Úloha k(kB)*

Sestrojte kružnici, která se v daném bodě $T$ dotýká dané kružnice $k$ a dotýká se další kružnice $l$ (při dané orientaci).



### *Úloha p(kB)*

Sestrojte kružnici, která se v daném bodě $T$ dotýká dané kružnice $k$ a dotýká se další přímky $p$ (při dané orientaci).[9]




[9] Na pracovní list se vejdou obě řešení.