Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATIKY

Mgr. Soňa Königsmarková

Problematika řešení soustav polynomiálních rovnic ve výuce matematiky

Dizertační práce

Doktorský studijní program: Specializace v pedagogice
Studijní specializace: Teorie vzdělávání v matematice
Školitel: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

ČESKÉ BUDĚJOVICE 2023

Poděkování

Děkuji svému školiteli prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za odborné a metodické vedení, cenné praktické rady a neocenitelnou pomoc týkající se mé dizertační práce a za konzultace v průběhu doktorského studia.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji dizertační práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své disertační práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 30. listopadu 2023 Soňa Königsmarková

Abstrakt

Cílem práce je zmapovat současný stav v oblasti výuky a žákovských řešitelských strategií u polynomiálních rovnic a využití těchto soustav rovnic při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti na různých typech škol a na základě toho navrhnout v odůvodněných případech obohacení výuky v této oblasti o metody odrážející současné trendy ve využití výpočetní techniky.

Vzhledem k uvedenému cíli se autorka zaměřuje na současný stav výuky soustav polynomiálních rovnic z hlediska užívaných metod řešení na ZŠ, na SŠ a na fakultách připravujících učitele matematiky, na řešení složitějších úloh, především úloh na množiny bodů dané vlastnosti budoucími učiteli matematiky a na potenciál systémů počítačové algebry pro zlepšení současného stavu.

Práce je rozdělena na 9 kapitol, přičemž v prvních čtyřech kapitolách je odůvodněna aktuálnost tématu, je uveden historický vývoj řešení úloh na soustavy rovnic a především aktuální stav dané problematiky z pohledu postavení učiva ve vzdělávacích programech a výskytu příslušných úloh v učebnicích, přijímacích a maturitních zkouškách a v matematické olympiádě. Vzhledem k tématu práce jsou uvedeny ukázky řešení úloh elementárními metodami i metodami, které se opírají o teorii Gröbnerových bází a využití výpočetní techniky. Pátá kapitola vymezuje cíle práce, další tři kapitoly se věnují vlastnímu výzkumu na SŠ a VŠ, který se zabývá řešením soustav polynomiálních rovnic a řešením úloh na množiny bodů dané vlastnosti z hlediska volby metod řešení a výskytu chyb při jejich použití. V závěrečné kapitole jsou shrnuty výsledky výzkumu a uvedena některá doporučení pro výuku na střední škole i pro přípravu budoucích učitelů matematiky. Přílohy obsahují původní a na základě výzkumu upravený návrh učebního materiálu o metodách řešení soustav polynomiálních rovnic a řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti pro nadané žáky SŠ a studenty učitelství na VŠ.

Klíčová slova: akční výzkum, GeoGebra, matematický software, metody řešení soustav rovnic, množiny bodů dané vlastnosti, soustavy polynomiálních rovnic

Abstract

The aim of this thesis is to map the current state of teaching and student problem solving strategies for polynomial equations. A substantial part of the work is devoted to the use of these systems of equations in solving problems of the loci of a given property at different types of schools. On this basis, where warranted, suggestions are made for enriching teaching in this area with methods reflecting current trends in the use of systems of computer algebra.

Considering the above objectives, the author focuses on the current state of teaching systems of polynomial equations in terms of the methods of solution used at primary schools, secondary schools and faculties preparing teachers of mathematics. The author does not neglect the solution of more complex problems, especially problems of the loci of a given property, by future mathematics teachers. The potential of computer algebra systems for improving the current state is also mentioned.

The thesis is divided into 9 chapters, with the first four chapters justifying the topicality of the topic. The historical development of the solution of problems on systems of equations and especially the current state of the subject from the point of view of the position of the curriculum and the occurrence of relevant problems in textbooks, entrance and final exams and in the Mathematical Olympiad are presented. Considering the topic of the thesis, examples of solving problems by elementary methods and methods based on the theory of Gröbner bases and the use of computer technology are given. The fifth chapter defines the objectives of the thesis. The next three chapters are devoted to the actual research at secondary and higher education institutions, which deals with the solution of systems of polynomial equations and the solution of problems of loci of a given property in terms of the choice of solution methods and the occurrence of errors in their use.The final chapter summarizes the research results and gives some recommendations for secondary school teaching and for the preparation of future mathematics teachers. Appendices contain an original and research-based draft of teaching material on methods of solving systems of polynomial equations and solving problems on sets of points given characteristics for gifted secondary school students and university teaching students.

Keywords: action research, GeoGebra, mathematical software, methods of solving systems of equations, loci of a given property, systems of polynomial equations

Použité zkratky

(řazení podle abecedy)

ACDCA - Rakouské centrum pro didaktiku počítačové algebry,

CAS (Computer Algebra Systems) - Systémy počítačové algebry,

FAV ZČU v Plzni - Fakulta aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni,

FPE ZČU v Plzni - Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni,

JU v Českých Budějovicích - Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích,

MO - matematická olympiáda,

PF JU v Českých Budějovicích - Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích,

PISA (Programme for International Student Assessment) - mezinárodní šetření (výzkum) pořádaný Organizací pro hospodářskou spolupráci a rozvoj (OECD); spočívá ve zjišťování výsledků patnáctiletých žáků z různých zemí v oblasti čtenářské, matematické a přírodovědné,

SŠ - střední škola,

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) - mezinárodní šetření (výzkum) o trendech v matematice a přírodních vědách žáků 4. a 8. tříd v USA ve srovnání se žáky v jiných zemích; šetření probíhá od roku 1995 každé 4 roky,

UK - Univerzita Karlova,

VŠ - vysoká škola,

ZŠ - základní škola,

ZČU v Plzni - Západočeská univerzita v Plzni.

Obsah

1 Úvod

Zamyslíme-li se nad interaktivním vývojem a vrátíme se zhruba o více než padesát let zpátky, můžeme sledovat revoluční vývoj matematických výpočtů. Pro složitější výpočty byly dlouho známy jen logaritmické tabulky a logaritmické pravítko. Náhle se objevily kalkulátory, na kterých bylo možné provádět numerické výpočty, a zmizely logaritmické tabulky i logaritmická pravítka. Vývoj techniky postupoval zejména v posledním půlstoletí nesmírně rychle. Kalkulátory byly stále dokonalejší a začaly se používat při výuce matematiky. Jedny z posledních modelů grafických a programovatelných kalkulátorů Texas Instruments - TI-92 a TI-92 plus se využívají dodnes. Hodí se na kreslení grafů, upravování výrazů, rozkládání polynomů i programování. Tyto kalkulátory umí vypočítat i složitější soustavy rovnic a používají k tomu Gröbnerovy báze.

V poslední době zaznamenáváme s masivním nasazením počítačů i při výuce stále intenzivnější využívání digitálních technologií, které ovlivňují žáky a pomáhají rozšiřovat jejich logické a matematické uvažování. V matematice se jedná především o takové typy softwaru, které přímo pomáhají k vlastnímu poznání a podpoře matematických dovedností žáků a ovlivňují jejich poznávací procesy. Pomáhají při složitých výpočtech, ale také žákům např. nabídnou obrázek, který jim pomůže lépe pochopit problém a najít jeho řešení. S obrázkem mohou pohybovat, a tím jim docházejí různé souvislosti. Mezi nejoblíbenější, nejjednodušší a nejdostupnější patří např. tabulkový software Microsoft Excel a různé grafické kalkulátory. Složitější, ale účinnější v oblastech algebry a geometrie, jsou pak např. počítačové algebraické systémy jako Maple nebo CoCoA a hodně perspektivní je dynamický software GeoGebra. Existuje velké množství počítačových informačních softwarů, které jsou velice dobře zpracované.

V dnešní době se na ZŠ, SŠ i VŠ hodně využívá program GeoGebra. V nedávné době se používal především program Cabri Geometrie, ale tento program uměl pouze nakreslit graf funkce. V GeoGebře je propojena syntetická a analytická geometrie s algebrou. GeoGebra tedy není jen prostředek na rýsování, ale má větší využití. Pomocí tohoto programu lze nejen narýsovat geometrické kostrukce, ale i řešit rovnice. K uvedeným výhodám lze přidat i další výhodu pro učitele matematiky, a to dostupnost tohoto matematického softwaru.

Pokud studenti na středních nebo vysokých školách použijí matematický software, jako např. Maple, GeoGebru nebo Wolfram Alpha, snadno najdou řešení soustav polynomiálních[1] rovnic. Učitelé matematiky na středních školách a studenti učitelství matematiky na pedagogických fakultách by měli znát alespoň základní princip algoritmů, které tyto matematické programy využívají. Učitelé a studenti by se neměli spokojit jen s výsledkem výpočtů, ale měli by poznat alespoň na elementární úrovni i některé speciální metody.

[1] Též se užívá pojem polynomická nebo algebraická rovnice.

1.1 Volba tématu a jeho aktuálnost

Ve vyučování matematiky na ZŠ a SŠ najdeme řadu témat, ve kterých lze využít matematický software. Zvolila jsem téma řešení soustav rovnic, které navíc umožňuje ukázat různé metody řešení i rozšíření jejich škály o metody, které využívají matematický software. Současně toto téma otevírá prostor pro ukázku toho, jak lze poznatky z tzv. "vyšší" matematiky přenést do školního prostředí. V práci se budu věnovat jak využití matematických softwarů k řešení soustav rovnic, tak problematice matematické podstaty takového řešení a možnostmi, jak s tímto teoretickým základem seznámit učitele matematiky a případně i žáky.

Ve středoškolské matematice i fyzice se většinou používá výrazné zjednodušení reálných problémů a z matematického hlediska se řeší prakticky jen soustavy lineárních rovnic. To je sice matematicky i výpočtově relativně jednoduchý problém, skutečné situace jsou však výrazně složitější jak z hlediska jejich popisu, tak z hlediska jejich řešení. Většina reálných dějů v přírodě představuje totiž nelineární a parametrické problémy, které je nutné řešit s užitím nelineárních rovnic.

Toto signalizuje, že nejen v blízké budoucnosti, ale již v současné době většina oborů nevystačí jen se zjednodušujícími lineárními modely. Využití nelineárních popisů a modelů fyzikální reality ovšem zřejmě nebude jen věcí vysokých škol a výzkumných pracovišť, ale postupně se bude objevovat i v běžnější praxi. Je jasné, že řešení nelineárních úloh je problém výrazně náročnější než řešení lineárních úloh. Je však nutné přihlédnout k tomu, že velmi silně se rozvíjející počítačová gramotnost a mohutný vývoj profesionálního softwaru umožňuje tyto náročnější úlohy řešit. Na řadě středních škol se žáci již seznamují s programy typu MATLAB a podobnými.

Absolventi našich středních škol by měli být připraveni na tento vývoj a měli by znát alespoň základní principy řešení úloh. Neměli by být jen pouhými uživateli rozsáhlých profesionálních balíků software, ale měli by mít i jisté povědomí o podstatě a principu řešených úloh a problémů. Do takové skupiny problémů zcela zjevně patří i problematika nelineárních úloh a systémů, kde je nutné využívat k popisu problému soustavu nelineárních rovnic a vědět o způsobech jejího řešení. Jistá průprava na úrovni myšlenkových postupů a základních informací by však podle mého mínění měla začínat již na druhém stupni základní školy. I tam by žáci měli tušit a vědět, že nás obklopují převážně nelineární děje, a že existují nelineární rovnice používané k jejich analýze. Měli by získat povědomí o existenci nelinearit a o tom, že slabé nelinearity lze často linearizovat, silné nelinearity je však nutné respektovat a přizpůsobit tomu metodu a způsob řešení.

Problematika nelineárních úloh otevírá obrovský prostor pro využití počítačů a většinou vede na některé metody numerické matematiky, z nichž velmi frekventované jsou např. metody nejmenších čtverců, Gaussova-Newtonova metoda a jiné. Numerické metody však značně zakrývají často pravou podstatu problému a vedou na přibližná řešení, i když ve většině případů použitelná. Téma Gröbnerovy báze, kterým se v práci budeme také zabývat, ukazuje využití počítačů i v analytické oblasti - v jakési čisté, exaktnější matematice. Obrovský rozvoj vědních disciplín a moderních technologií v posledních letech bude i tyto znalosti v blízké budoucnosti vyžadovat a je tedy nutné na to naši nastupující generaci připravovat. Nabízí se proto zařazení této nebo podobné problematiky ve formě a rozsahu odpovídajícím věku žáků a typu školy minimálně do výuky ve výběrových předmětech a ve výuce povinných předmětů a uvedení vhodného úvodu k této tématice. Reálné problémy se za účelem jejich analýzy a poznání modelují matematicko-fyzikálním modelem, který je většinou popsán soustavou příslušných rovnic.

Z uvedených důvodů by s danou tématikou měli být seznámeni během studia studenti matematických a fyzikálních aprobací fakult připravujících učitele, aby byli připraveni toto téma ve své pedagogické praxi aktivně používat a vysvětlovat.

Cílem práce je ukázat, jak lze v době rozvoje výpočetní techniky a jejího pronikání do všech sfér našeho života využít matematický software ke zvýšení efektivity vyučování matematiky a rozšíření řešitelných strategií. Pro tento účel byla vybrána dvě témata z učiva matematiky, která se v různé podobě objevují ve vyučování na různých stupních škol - ve škole základní, střední i ve vysokoškolské přípravě budoucích učitelů matematiky. Prvním tématem jsou soustavy rovnic o více neznámých, druhým množiny bodů dané vlastnosti. Spojujícím prvkem obou témat jsou soustavy rovnic a metody jejich řešení.

Řešení rovnic a jejich soustav patří k jednomu z hlavních témat matematiky na druhém stupni základních škol, na středních i vysokých školách. Na základních školách žáci řeší pouze jednoduché lineární rovnice a soustavy lineárních rovnic. Na středních školách se žáci setkávají se soustavami lineárních a kvadratických rovnic. Například při výuce analytické geometrie řeší i soustavy polynomiálních rovnic druhého stupně při hledání průsečíků dvou kuželoseček. Se soustavami polynomiálních rovnic vyšších stupňů se žáci SŠ setkávají v úlohách našich, resp. zahraničních matematických olympiád nebo v různých matematických soutěžích. Tyto úlohy řeší převážně jen obecnými matematickými úpravami. Většinou neznají metody, pomocí kterých by tyto soustavy rovnic bylo možné efektivně vyřešit. Na pedagogických fakultách se budoucí učitelé matematiky dozvídají o řešení soustav polynomiálních rovnic vyšších stupňů pouze okrajově. Studenti znají většinou jen Gaussovu eliminační metodu pro řešení soustav lineárních rovnic. Obecné metody na řešení soustav polynomiálních rovnic vyšších stupňů jsou založeny na podobném principu - postupné eliminaci proměnných.

Práce se zabývá metodami, které používají žáci běžně, ale především i metodami, které nabízí užití výpočetní techniky a softwaru, který je k dispozici na základních a středních školách. Součástí práce je rovněž stručný přehled teoretického základu, na jehož principu je řešení pomocí počítače prováděno.

Práce se člení na tři části - ontodidaktická část, pohled didaktiky matematiky a intervence vlastním akčním výzkumem. V úvodní části se věnuji kurikulární oblasti, analyzuji úlohy matematické olympiády, úlohy TIMSS a učebnice. Věnuji se historii výuky rovnic, zabývám se výhodami a nevýhodami využití digitálních technologií při výuce matematiky. Velká část práce zmiňuje metody řešení soustav polynomiálních rovnic vyšších stupňů ve vysokoškolské výuce matematiky. Teorie Gröbnerových bází je podrobně popsána v příloze 1. Následují aplikace Gröbnerových bází - hlavně množiny bodů dané vlastnosti. Ve druhé části se věnuji strategiím žáků a studentů při řešení soustav rovnic a provádím výzkum - na střední škole kvantitativně, na fakultách připravujících budoucí učitele kvalitativně. Třetí část je věnována akčnímu výzkumu, který zjišťuje potřeby a možnosti zapojení počítačové algebry a vhodného matematického softwaru do výuky. Výzkum je zaměřen na žáky středních škol s hlubším zájmem o matematiku a na studenty - budoucí učitele matematiky.

1.2 Přechod od řešení soustav polynomiálních rovnic v matematice k jejich vyučování na různých stupních škol

Již od dob významného českého pedagoga J. A. Komenského, tedy cca od 17. století a v dalších reformních obdobích školního vzdělávání byla vždy snaha přizpůsobit vzdělávací obsahy poznávacím schopnostem žáků. Protože se od učitelů očekává, že musí být schopni zprostředkovávat žákům vzdělávací obsahy v takové formě, aby jim žáci porozuměli, zapamatovali si je a uměli je i nadále používat a pracovat s nimi, je nutné, aby učitelé uměli redukovat, přetvářet a navracet do elementární podoby velké množství vědeckých poznatků.

Po 2. světové válce byla tendence naučit žáky na všech stupních vzdělávání co nejvíce a narůstal objem učiva. Od 2. poloviny 20. století se v celém světě významně zvýšila důležitost studia obsahové náplně vzdělávání a moderního pojetí školního kurikula matematiky v souvislosti s nárůstem vědomostí. Vzniklo a nadále vzniká množství studií věnovaných zprostředkování vzdělávacích obsahů poznávacím potřebám žáků. V roce 1958 užil poprvé Dietrich Hering (profesor didaktiky na univerzitě v Drážďanech) termín „didaktické zjednodušení“ ve své eseji o srozumitelnosti vědeckých a technických výrazů (pro oblast chemie). Známé je jeho tvrzení „didaktickým zjednodušením vědeckého tvrzení je přechod k obecnému tvrzení se stejným rozsahem platnosti týkajícího se stejného tématu za stejného hlediska“. Přibližně ve stejné době přišel s obdobným názorem na didaktické zprostředkování učiva Wolfgang Klafki (asistent na univerzitě v Hannoveru), který svou teorii založil na tzv. „didaktické analýze“ a věnoval se tomuto modelu s patřičnou důsledností. Klafki se orientoval nejen na výběr učiva, ale i na praktické zprostředkování vzdělávacích obsahů a v rámci didaktické analýzy učiva stanovil pět důležitých otázek, kterým je nutné se věnovat (exemplární význam obsahu, význam obsahu pro současnost, význam obsahu pro budoucnost, jaká je struktura obsahu, osvojení a zpřístupnění obsahu). V roce 1963 se snažil teorii Klafkiho rozvíjet Hans Bokelmann (profesor na univerzitě v Münsteru). Heringovy myšlenky zase rozvíjel Gustav Grüner (rodák z Aše a profesor na Technické univerzitě v Darmstadtu) pod pojmem „didaktická redukce“.(Knecht [44])

Odborný termín **didaktická transpozice** zavedl Yves Chevallard v roce 1985 na základě výzkumů v didaktice matematiky ve Francii a lze jej chápat jako didakticky upravený přenos vědecky získaných znalostí do vyučování. Znalosti, které se učí v matematice ve školách, pochází z vědeckého poznání, které se získává na vysokých školách a v různých vědeckých institucích. Abychom mohli znalosti transponovat z těchto prostředí do škol, musíme zajistit, aby se tyto znalosti vyučovaly smysluplně, byly pro žáky pochopitelné a užitečné, tedy analyzovat, co bude pro žáky důležité a jak jim učivo podat.(Chevallard [38])

Bohumil Grulich [24] ve svém článku z roku 1962 „K základům problematiky plynulého přechodu žáků z 5. do 6. ročníku" píše o **didaktické transpozici** jako o zajištění plynulosti přechodu žáků mezi jednotlivými soustavami vyučování, tedy přenášení didaktických metod z nižších stupňů do vyšších. Každý školský stupeň spočívá v jiných výchovně vzdělávacích metodách a formách výchovně vzdělávací práce s ohledem na věkové možnosti žáků a vývojové stupně. Vyšší vývojové stupně nepotlačují nižší vývojové stupně, ale přetvářejí je a zdokonalují, na pedagogy jsou kladeny jiné nároky. V období po 2. světové válce cca do šedesátých let 20. stol. se mimo jiné i ve výuce matematiky (a to nejen u nás) projevil problém, kdy docházelo ke zvětšování rozdílu v přístupu k matematickému vzdělávání na různých stupních a typech škol (první stupeň základní školy - druhý stupeň základní školy - střední škola) a bylo nutné se této problematice věnovat.

V osmdesátých, resp. devadesátých letech 20. století dochází nejen u nás, ale i ve světě k zásadním změnám ve vývoji didaktiky. V didaktice se setkáváme s mnoha modely procesu zprostředkování vědeckých poznatků, dovedností, postojů a hodnot žákům a tento proces nazýváme **didaktická transformace** obsahu. Pojem didaktická transformace má několik alternativních názvů, jako např. didaktické zjednodušení, didaktická redukce a anglo-americký koncept pedagogical content knowledge neboli didaktická znalost obsahu. Všechna tato označení mají jedno společné, a to vystihnout co nejlepší předání daného, z didaktického hlediska pečlivě vybraného vědeckého obsahu (transformandu), do podoby zjednodušeného a pro žáky srozumitelného vzdělávacího obsahu, resp. obsahu učení (transformatu), přičemž je však nutné přihlédnout ke schopnostem žáků i vzdělávacím cílům, které se vztahují k danému vzdělávacímu obsahu. Zjednodušeně řečeno, jedná se o co nejvhodnější transformaci znalostí učitele do vyučování. Didaktická transformace má v podstatě dvě fáze: fázi před výukou, kdy je obsah látky učitelem vybrán, zjednodušen a zoptimalizován, a fázi při výuce, kdy prochází dalším zoptimalizováním v souvislosti s pedagogickým působením učitele a rozumovými schopnostmi žáků.(Knecht [44])

Model **didaktické rekonstrukce** obsahu lze chápat jako prostředek uspořádaného pedagogického výzkumu oborové výuky. Při transformaci vědomostí z vědy do výuky je vhodné transformované znalosti didakticky rekonstruovat, a tím jsou žákům jasnější a srozumitelnější. Didaktická rekontrukce se zaměřuje na rekonstrukci vzdělávacího obsahu se zřetelem na určené vzdělávací cíle. Právě tento model zahrnuje všechny důležité složky transformace obsahu ve výuce a lze jej pokládat za celistvou výzkumnou a teoretickou koncepci pojetí didaktiky zaměřenou na podporu vzdělávací praxe. Didaktická rekonstrukce zahrnuje v podstatě tři fáze: objasnění vědeckých představ z oborového i didaktického pohledu, studium žákovských představ týkajících se obsahu učení a výzkum propojení procesů učení žáka s výukou učitele. Všechny tři fáze jsou ve velice těsném vztahu a jen společně mají svou váhu. Ucelenost modelu didaktické rekonstrukce vyžaduje kvalitní odborné schopnosti učitele a výrazně přispívá na aktivní kognitivní účast žáků při výuce. Vzhledem k tomu, že se didaktická rekonstrukce týká a vždy bude týkat konkrétních vzdělávacích obsahů, mají zde podstatnou roli oborové didaktiky jako spojení mezi vědeckými vědomostmi a vyučovaným předmětem.

V posledních 30 letech je výzkumu kvality výuky věnována velká pozornost. Přibližně od roku 2010 je rozvíjena specifická koncepce výzkumu v rámci obsahově zaměřeného přístupu ke vzdělávání, tzv. **Metodika 3A** ve spolupráci odborníků z Institutu výzkumu školního vzdělávání Pedagogické fakulty MU, Národního ústavu pro vzdělávání a učitelů ze základních a středních škol. Tato koncepce je opřena na podstatě Shulmanova termínu pedagogical content knowledge (didaktická znalost obsahu). To znamená, že kvalita výuky učitele je závislá na úspěšném spojení znalostí obsahu s pedagogickým porozuměním pro žáky. Jejím hlavním cílem je rozvíjet kvality didaktické znalosti obsahu v učitelském pojetí pro zlepšování výuky, vyhledávat a analyzovat kritická místa výuky, směřovat k takovému pojetí výzkumu a teoretického výkladu, které uchová zřetel k didaktické znalosti obsahu, ale bude svou úrovní zobecnění usilovat o překlenování odborné izolace oborových didaktik mezi sebou navzájem (Slavík, Janík [77]). Metodika 3A je v souladu s modelem **didaktické rekonstrukce** a je postupně úspěšně zaváděna do praxe.

Každá z výše uvedených koncepcí je součástí kvalitativního vývoje didaktického zprostředkovávání vzdělávacích obsahů. Přestože jsou různorodé, lze v nich najít společný primární prvek, a to důraz na výběr vzdělávacích obsahů s ohledem na kognitivní možnosti žáků.

Od přelomu 20. a 21. století, zejména v posledních 10 letech, je kladen velký důraz na kognitivismus, kde je chápáno poznání jako proces zpracování informace. Za vhodný prostředek ke zpracování informace jsou považovány informační technologie (matematické počítačové programy), které mohou být využívány při výuce matematiky při řešení matematických úloh.

1.3 Historie výuky soustav rovnic

S rovnicemi se setkáváme již v 18. století před. n. l. v Mezopotámii a ve starém Egyptě (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová [6]). Řešily se úlohy podobné těm, které se v dnešní době řeší pomocí lineárních rovnic a jejich soustav nebo pomocí kvadratických rovnic. O mnoho později, cca 2 tisíce let př. n. l., jsou dochovány záznamy ze staré Číny, Indie a Řecka a v těchto záznamech je již vidět opravdový zrod slovních úloh, které vedou k řešení pomocí lineárních rovnic.

V Mezopotámii byly používány pálené hliněné tabulky, které byly hodně odolné. Na různých klínopisných tabulkách jsou dochovány úlohy, které se v období př. n. l. řešily spíše geometricky – byly zaznamenány veličiny jako výška, délka ap., součin dvou veličin jako obsah nebo plocha, součin tří veličin jako objem. Dnes bychom takové úlohy řešili použitím rovnic nebo soustav lineárních rovnic. Babyloňané v době Chamurappiho ovládali jednoduchou formou metody řešení kvadratických rovnic, řešili i lineární rovnice o dvou neznámých a dokonce i problémy zahrnující kubické a bikvadratické rovnice. Na ukázku uvedeme dva příklady ze starověké babylonské matematiky, které vedou na soustavy lineárních rovnic.

Příklad (neúplný text z dochované tabulky AO8862):

…cihly, lidi a své dny sečetl jsem, to dá $(2, 20)$, $\frac{2}{3}$ lidí jsou mé dny.

Stanov cihly, lidi a dny.

Řešení: $(2, 20)$ číslo vyjádřené v šedesátkové soustavě, tj.

$(2, 20) = 2 \cdot 60^1 + 20 = 140.$

Podle přiloženého výpočtu lze úlohu interpretovat jako soustavu tří rovnic o třech neznámých.

Stanovíme počet cihel (x), počet lidí (y) a počet dnů (z).

$$\begin{array}{rcl}
x + y + z & = & 140 \\
x + y & = & 120 \\
\hline
\frac{2}{3} \cdot y & = & z \\
120 + z & = & 140 \\
z & = & 20 \\
\hline
\frac{2}{3} \cdot y & = & 20 \\
2y & = & 60 \\
y & = & 30 \\
x & = & 120 - y \\
x & = & 90
\end{array}$$

Mezopotámská tabulka uvádí správné řešení: 90 cihel, 30 lidí a 20 dní.

Úloha je umělá, sčítají se objekty různého typu.

Příklad (z dochované tabulky VAT8389):

Máme dvě pole. Z jedné jednotky bur prvního pole sklidíme 4 gur obilí, z plošné jednotky bur druhého pole sklidíme 3 gur obilí. Sklizeň z prvního pole převyšuje sklizeň z druhého pole o $(8, 20) = 500$ sila. Součet ploch polí je $(30, 0) = 1800$ sar. Jaké jsou výměry obou polí?

Zápisy v šedesátkové soustavě převedeme do desítkové soustavy:

$(8, 20) = 8 \cdot 60^1 + 20 = 500$

$(30, 0) = 30 \cdot 60^1 + 0 = 1800$

4 gur $= (20, 0)$ sila … 1200

$3 \text{ gur} = (15,0)\,\text{sila} \ldots 900$

Označme x a y výměry uvažovaných polí v jednotlivých sar, úlohu můžeme přepsat následující soustavou dvou rovnic o dvou neznámých.

$$\tfrac{20\cdot 60}{1800}\cdot x - \tfrac{15\cdot 60}{1800}\cdot y = 500$$

$$x + y = 1800$$

Soustava byla řešena metodou chybného předpokladu. Vycházeli z toho, že obě pole mají stejnou výměru, tedy $(15,0)$ sar.

Řešení dnešní metodou:

$$\begin{aligned} x + y &= 1800 \\ \tfrac{2}{3}\cdot x - \tfrac{1}{2}\cdot y &= 500 \end{aligned}$$

Vyjádříme $y = 1800 - x$

a dosadíme $\frac{2}{3}\cdot x - \frac{1}{2}\cdot(1800 - x) = 500$

$$\begin{aligned} \tfrac{7}{6}\cdot x &= 1400 \\ x &= 1200 \\ 1200 + y &= 1800 \\ y &= 600 \end{aligned}$$

Ve starověkém Egyptě byly řešeny často velmi zajímavé úlohy. Z této doby je dochováno jen málo textů, které vypovídají o různorodých metodách výpočtů. Nejstarší nalezené texty – papyry, jsou dochovány hlavně díky suchému klimatu. Vypovídají spíše o řešení jednodušších problémů. Složitější úlohy nejsou mnoho popisovány, ale je to hlavně proto, že je zachováno malé množství pramenů. O vynikajících znalostech a schopnostech tehdejších matematiků a filozofů nejsou pochybnosti, neboť nás o tom přesvědčují výsledky i v jiných oborech, např. rozvoj ve stavitelství, v zemědělství i v průmyslu. Mezi nejznámější dochované papyry patří určitě Rhindův papyrus. Svitek byl opsán písařem Ahmosem kolem roku 1650 př. n. l. z materiálů pocházejících z doby vlády Amenemheta III. (asi 1853 až 1809 př. n. l.). Při výrobě byl slepen ze 14 listů o šířce cca 30 cm a délce cca $5,5$ m a po nálezu byl rozříznut na dvě části (319 cm $\times$ 33 cm a 206 cm $\times$ 33 cm). Obsahuje 86 slovních úloh ze starého Egypta, které vedou často na lineární rovnice nebo jejich soustavy (úlohy na výpočet objemu sýpek, obsahů polí, krmivo pro zvířata nebo úlohy týkající se pyramid ap.). Tento papyrus dostal název po známém skotském právníkovi, egyptologovi Alexanderu Henry Rhindovi, který jej v roce 1858 zakoupil na trzích v Thébách (oblast současného Luxoru v Egyptě). Od r. 1864 je tento papyrus uložen v muzeu v Londýně.

V celé orientální matematice nenajdeme ani pokus o důkaz řešení. Ve všech knihách je pokaždé uveden jen popis pravidel „udělej to tak a tak“. Není nikde dochováno nic ani o způsobech, kterými by byly věty odvozeny. V minulosti byly různé snahy objasnit způsob, jakými Egypťané dospěli ke svým výsledkům, ale vždy se došlo k závěru, že všechny spočívaly na hypotézách.

V Číně a Indii používali v dobách př. n. l. k záznamům bambus nebo kůru, a proto není z té doby o matematice mnoho zachováno. Ze záznamů, které jsou k dispozici, je ale zřejmé, že úroveň v těchto východních zemích byla v dávné minulosti nižší než v Mezopotámii a v Egyptě.

Ve 2. tisíciletí př. n. l. začali v Číně používat papír. Vůbec prvním nejstarším dochovaným materiálem o matematice je dílo Matematika v devíti kapitolách. Tato učebnice vznikla pravděpodobně ve 2. až 1. stol. př. n. l. Je to nejvýznamnější spis starodávné čínské matematiky, ve kterém jsou slovní úlohy, které směřují i k lineárním rovnicím a soustavám lineárních rovnic se dvěma nebo více neznámými. Např. 7. kapitola se nazývá O přebytku a nedostatku (Zing bu zu) a obsahuje 20 úloh. V této kapitole je v úvodu uvedena metoda řešení slovních úloh pomocí soustav dvou lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a_1x - b_1 &= y \\ a_2x + b_2 &= y \end{aligned}$$

kde $a_1 > a_2$, b_1, b_2 jsou kladná racionální čísla.

Podle návodu lze zadaná čísla napsat do tabulky

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

a spočítat podíly:

$x = \frac{b_1+b_2}{a_1-a_2}$, $y = \frac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{a_1 - a_2}$.

Uvedeme příklad ze 7. kapitoly knihy Matematika v devíti kapitolách:

Několik lidí kupuje nějakou věc. Dá-li každý člověk po 8, je přebytek 3. Dá-li každý člověk po 7, je nedostatek 4. Ptáme se na počet lidí a cenu věci.

Označme x počet lidí a y cenu věci.

Zadání vede na soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 8x - 3 &= y \\ 7x + 4 &= y \end{aligned}$$

Řešení:

Označíme $a_1 = 8,\ a_2 = 7,\ b_1 = 3,\ b_2 = 4$.

Spočteme podíly:

$x = \frac{3+4}{8-7} = 7$,

$y = \frac{8 \cdot 4 + 7 \cdot 3}{8-7} = \frac{32+21}{1} = 53$.

Odpověď: Počet lidí je 7 a cena věci je 53.

8. kapitola se jmenuje Měření vedle sebe – Fang cheng, přičemž Fang označuje čtvercovou tabulku čísel. Tato kapitola obsahuje 18 slovních úloh, které vedou na soustavy lineárních rovnic s regulární maticí řádu n ($n = 2, 3, 4, 5$). Je zde

popsána metoda řešení těchto soustav rovnic, která se jen nepatrně liší od Gaussova eliminačního algoritmu.

Dále uvedeme příklad z 8. kapitoly knihy Matematika v devíti kapitolách.

Ze 3 snopů dobré úrody, 2 snopů průměrné úrody a 1 snopu špatné úrody získali 39 dou (zrna). Ze 2 snopů dobré úrody, 3 snopů průměrné úrody a 1 snopu špatné úrody získali 34 dou (zrna). Z 1 snopu dobré úrody, 2 snopů průměrné úrody a 3 snopů špatné úrody získali 26 dou (zrna). Ptáme se, kolik dou (zrna) se získá z jednoho snopu dobré, průměrné a špatné úrody.

Nechť x je počet dou (zrn) ve snopu dobré úrody, y počet dou (zrn) ve snopu průměrné úrody a z počet dou (zrn) ve snopu špatné úrody.

Zadání převedeme na soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

Cílem je dostat tabulku $\begin{vmatrix} 0 & 0 & j_3 \\ 0 & j_2 & c \\ j_1 & a & d \\ n_1 & b & e \end{vmatrix}$ a platí: $n_2 = \frac{b \cdot j_1 - a\ \cdot n_1}{j_2}$ $\quad n_3 = \frac{e \cdot j_1 - d \cdot n_1 - c \cdot n_2}{j_3}$.

Staří Číňané sestavovali tabulky, které upravovali.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{vmatrix}$$

$n_1 = 99$

$n_2 = \frac{24 \cdot 36 - 99}{5} = 153$

$n_3 = \frac{39 \cdot 36 - 99 - 2 \cdot n_2}{3} = 333$

$\mathbf{z} = \frac{n_1}{j_1} = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$

$\mathbf{y} = \frac{n_2}{j_1} = \frac{153}{36} = 4\frac{1}{4}$

$\mathbf{x} = \frac{n_3}{j_1} = \frac{333}{36} = 9\frac{3}{4}$

Výsledek: Z 1 snopu dobré úrody se získalo $9\frac{3}{4}$ dou, z 1 snopu průměrné úrody $4\frac{1}{4}$ dou, z 1 snopu špatné úrody $2\frac{3}{4}$ dou.

V Indii jsou první dochované matematické úlohy v nematematických dílech rovněž z 2. tisíciletí př. n. l. Nejznámější je spis Šalvasutra (Pravidla provazce), kde některé slovní úlohy již směřovaly k lineárním rovnicím nebo k soustavám lineárních rovnic o dvou nebo více neznámých, jiné ke kvadratickým rovnicím.

V Evropě se algebra a s ní spojené řešení rovnic rozvíjely až v období našeho letopočtu. Jejímu rozvoji předcházely krizové situace, jako zničení Knihovny v Alexandrii v 6. stol. n. l. a uzavření filozofických škol. V té době hlavně Arabové překládali do arabštiny řecké rukopisy, např. díla Archiméda, Euklida, apod. Na základě studií rukopisů a svých matematických schopností arabský matematik Muhammad Al-Chvárímí v 9. stol. n.l. sepsal dvě díla, a to početnici a učebnici algebry. Jeho druhé dílo obsahovalo nauku o řešení rovnic za použití kladných čísel. Objevem pozičního zápisu čísel se zjednodušilo počítání, a tak se matematika dostala do škol a obchodu a právě díky obchodu i do Evropy. Leonardo Pisánský (nar. 1170 v Pise), známý jako Fibonacci, při obchodních cestách navštívil např. severní Afriku, Egypt, ale i Sicílii, Řecko, Francii a jiné země. Seznámil se s důležitými matematickými díly z Egypta, Mezopotámie, Řecka apod. Získané vědomosti obohatil, zavedl počítání se zápornými čísly a sepsal několik významných matematických děl. V díle Liber abaci (1202) vysvětlil užití arabských číslic a mimo jiné jsou ve 12. kapitole řešeny soustavy lineárních rovnic. Ve svých dílech řeší dost složité soustavy rovnic, které se nedařilo v té době ani v době pozdější řešit žádným matematikům.

V historii řešení soustav lineárních rovnic byla velkým objevem teorie determinantů. Německý matematik a filozof G. W. Leibniz (nar. 1646) se dopracoval jako první k výrazu, který dnes nazýváme determinant. Vývoj teorie determinantů začal po uveřejnění Cramerova pravidla r. 1750, jejím autorem je švýcarský matematik a filozof G. Crammer (nar. 1704). Teprve ve 20. století, v roce 1966, bylo prokázáno, že o 2 roky dříve, tedy r. 1748, stejné pravidlo zveřejnil skotský matematik C. Maclaurin (nar. 1698). Přibližně ve stejné době se této zásadě přiblížil i L. Euler (nar. 1707). O jedno z prvních užití determinantů ve školách (námořní a později dělostřelecká) se postaral francouzský matematik É. Bézout (nar. 1730), který vydal šestidílnou učebnici matematiky (1764–1769), jejíž nejdůležitější část je věnována soustavám lineárních rovnic, teorii determinantů apod. I ve svých dalších publikacích se věnuje nejvíce této problematice. Francouzští matematici P. S. Laplace (nar. 1749), J. L. Lagrange (nar. 1736), A. T. Vandermonde (nar. 1735), J. P. M. Binet (nar. 1786), A. L. Cauchy (nar. 1789) se významně zasloužili o další rozvoj řešení soustav lineárních rovnic a svými novými objevy a publikacemi výrazně přispěli k rozvoji metod řešení soustav lineárních rovnic. Nejen ve Francii, ale i v Německu se problematice determinantů věnovali nejvýznamnější matematici, jako např. C. F. Gauss (nar. 1777), C. G. J. Jacobi a další. Zásadní vliv pro používání determinantů měly práce C. G. J. Jacobiho, jehož tři díla z roku 1841 byla hojně využívána v matematických oborech. Podle českého matematika, učitele a spisovatele Františka Josefa Studničky je ale za nejdůležitějšího zakladatele teorie determinantů považován A. L. Cauchy, který rozšířil základy do hloubky, věnoval se vytvoření pouček a vhodné symboliky. Na konci 1. poloviny 19. století se determinanty stávaly známé a bylo potřeba vypracovat vhodné učebnice. Toho se ujal např. anglický matematik W. Spottiswoode (1825–1883), italský matematik F. Brioschi (1824–1897), německý matematik H. R. Baltzer (1818–1887) a postupně se objevovaly další učebnice.

Téměř o 100 let později než byla objevena teorie determinantů (1750), byla objevena teorie matic (1858), i když se teorií matic zabýval Leonhard Euler (1707–1783) a ve svém díle z roku 1771 studoval reálné čtvercové matice třetího a čtvrtého řádu. Německý matematik Carl Friedrich Gauss (1777–1855) dospěl ve svém díle z roku 1801 k maticovému násobení. Na počátku 19. století se došlo k nutnosti nalézt nějakou metodu řešení soustav lineárních rovnic zvláště pro větší počet lineárních rovnic, která by byla efektivnější než dosud známé Cramerovo pravidlo. Carl Friedrich Gauss se v roce 1810 věnoval výpočtu oběžné dráhy planetky Pallas. Na základě astronomických pozorování této planetky sestavil 12 rovnic o 6 neznámých, popsal postup řešení, provedl eliminaci neznámých metodou nejmenších čtverců a dospěl k trojúhelníkové soustavě rovnic. Podobnými problémy se zabýval i ve druhé části známé práce *Theoria combinationis observationum erroribus minimis abnoxiae* (1823). Poznámky uvedené v jeho práci popisují postup, který známe jako Gaussův eliminační algoritmus. Základní myšlenka tohoto postupu má základy již z počátku našeho letopočtu ve staré Číně. Teorii řešení soustav lineárních rovnic pomocí matic se ve svých dílech zabývali např. německý matematik a žák C. F. Gausse Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823–1852), angličtí matematici Arthur Cayley (1821–1895), James Joseph Sylvester (1814–1897), Charles Lutwitdge Dodgson (1832–1898) a každý z těchto významných matematiků se zasloužil o významný posun v řešení soustav lineárních rovnic pomocí maticových operací. Do té doby se využívaly metody jednoho nebo dvou chybných předpokladů, metoda dosazovací a různé verze substitucí. V průběhu druhé poloviny 19. století se zabývalo mnoho významných matematiků řešením soustav lineárních rovnic prostřednictvím matic a tato teorie se výrazně rozvinula hlavně ve 20. století.

V nedávné historii má nezastupitelnou roli v řešení soustav lineárních rovnic metoda Gaussovy eliminace. Pro práci se soustavami polynomiálních rovnic s více proměnnými je zajímavá také metoda Gröbnerových bází. Tuto teorii objevil a roku 1965 publikoval ve své dizertační práci dnes světoznámý matematik a vědec Bruno Buchberger. Teorii nazval Gröbnerovy základy na počest svého školitele profesora Wolfganga Gröbnera. Později svoji teorii dále rozvíjel a definitivní název používaný v dnešní době je Gröbnerovy báze. Bruno Buchberger (nar. 1942 v Rakousku) se celý život věnuje výzkumu a počítačové aplikaci Gröbnerových bází. Je zakladatelem Výzkumného ústavu pro symbolické výpočty (RISC, 1987) na Univerzitě Johanna Keplera v Linci v Rakousku. V současné době je profesorem počítačové matematiky na tomto ústavu, kde se ve spolupráci vědců a doktorandů věnuje tomuto tématu. Zároveň je zakladatelem časopisu The Journal of symbolic computation (1985) a zakladatelem The Hagenberg Software Park (1990), což je technologické centrum s více než 1000 oblastmi výzkumu a vývoje. Vynález teorie Gröbnerových bází si našel celou řadu aplikací v oblastech matematiky, vědy a techniky. Mnohé aplikace algoritmů, vytvořených na základě Gröbnerových bází, jsou obsaženy v současných matematických softwarech jako je Maple, Mathematica, Macsyma a Magma. Nezávisle na Buchbergerovi se této problematice věnoval také Heisuke Hironaka (nar. 1931 v Japonsku). Ten nazývá báze standardními.

2 Současný stav řešené problematiky

2.1 Zařazení učiva o soustavách polynomiálních rovnic a množinách bodů dané vlastnosti ve výuce na SŠ

Podle současných Rámcových vzdělávacích programů (http://www.nuv.cz/t/rvp) pro základní vzdělávání (RVP ZV) i Rámcových vzdělávacích programů pro gymnázia (RVP G) a Rámcových vzdělávacích programů pro střední odborné školy (RVP SOŠ) patří mezi nejdůležitější témata ve výuce matematiky sestavování a řešení soustav lineárních rovnic. RVP G a RVP SOŠ jsou rozšířeny o téma sestavování a řešení soustav lineárních a kvadratických rovnic, včetně jejich aplikací v analytické geometrii v rovině.

Jednotlivé školy si na školní úrovni tvoří své **školní vzdělávací programy** (ŠVP) v souladu se zásadami rámcově vzdělávacích programů.

Ve ŠVP na Střední průmyslové škole stavební v Plzni, kde působím jako učitelka matematiky, jsou soustavám lineárních rovnic o dvou, třech a více neznámých věnovány 4 vyučovací hodiny a soustavě kvadratické a lineární rovnice jsou věnovány pouze 2 hodiny.

S tématem práce souvisí očekávané výstupy žáka především v RVP pro základní vzdělávání, pro gymnázia a pro střední odborné vzdělávání.

V rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání ve vzdělávacím oboru Matematika a její aplikace na 2. stupni v tematickém okruhu Číslo a proměnná jsou kromě jiných zahrnuty následující očekávané výstupy žáka:

1. matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním,
2. formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav,
3. analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých reálných čísel.

V RVP G rovněž ve vzdělávacím oboru Matematika a její aplikace v tematickém okruhu Číslo a proměnná jsou očekávané výstupy žáka:

1. upravuje efektivně výrazy s proměnnými, určuje definiční obor výrazu,
2. rozkládá mnohočleny na součin vytýkáním a užitím vzorců, aplikuje tuto dovednost při řešení rovnic a nerovnic,
3. řeší lineární a kvadratické rovnice a nerovnice, řeší soustavy rovnic, v jednodušších případech diskutuje řešitelnost nebo počet řešení,

4. rozlišuje ekvivalentní a neekvivalentní úpravy,
5. geometricky interpretuje číselné, algebraické a funkční vztahy, graficky znázorňuje řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav,
6. analyzuje a řeší problémy, v nichž aplikuje řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav.

V RVP SOŠ ve vzdělávacím oboru Přírodovědné lyceum v tematickém okruhu Matematické vzdělávání v části Funkce a její průběh, řešení rovnic a nerovnic jsou očekávané výstupy žáka:

1. řeší lineární a kvadratické rovnice a jejich soustavy, lineární a kvadratické nerovnice,
2. třídí úpravy rovnic na ekvivalentní a neekvivalentní,
3. převádí jednoduché reálné situace do matematických struktur, pracuje s matematickým modelem a výsledek vyhodnotí vzhledem k realitě.

2.2 Soustavy polynomiálních rovnic v učebnicích ZŠ a SŠ

Obdobně jako při vyučování jiných partií matematiky na základní škole i ve výuce metod řešení soustav lineárních rovnic lze použít nejen klasické výkladové **transmisivní pojetí výuky**, ale poslední dobou je v moderní didaktice dávána přednost objevitelskému **konstruktivistickému pojetí výuky**, při němž k formulaci metod řešení dospívají žáci vlastním objevováním na základě postupného řešení systémů vhodně sestavených úloh. Jednu z možností takového konstruktivistického pojetí výuky matematiky na ZŠ a v nižších ročnících gymnázií poskytují Hejného učebnice vydané v nakladatelství H-mat.

U **transmisivního pojetí výuky** je důležitá aktivita učitele, kdy se učitel snaží předat žákům důležité informace většinou formou výkladu a žáci jsou v roli pasivních posluchačů. Učitelé vedou žáky přímou cestou k osvojování hotových vědomostí, snaží se splnit učební osnovy, ale neberou v úvahu schopnosti žáků a jejich potřeby. Výkladová výuka je v rámci možností doplňována názornými či praktickými pomůckami a učebními texty.

Konstruktivistické pojetí výuky je zaměřeno na rozvíjení činnosti žáků, učitel pomáhá žákovi k utváření vlastního porozumění, vede jej k samostatnosti a k logickému myšlení. Konstruktivistický styl podněcuje k vytváření vlastních myšlenek žáka a vyznačuje se aktivizujícími metodami, jako např. společnou prací ve skupinách, dialogem, diskusí, výukou podporovanou počítačem, různými situačními hrami, projektovou výukou apod.

Jako ukázku užití konstruktivistického stylu výuky soustav lineárních rovnic můžeme uvést následující příklad:

Příklad 2.1 *(Hošpesová [35]) Rozdělme 3 l vody do kelímků dvou velikostí - 0,5 l a 0,2 l tak, aby kelímky byly naplněny po rysku, byla použita všechna voda a kelímky obou velikostí.*

Řešení:

Žáci řeší úlohu nejprve skutečným rozléváním vody do kelímků. Postupně mohou přijít na dvě řešení, která můžeme považovat za separované modely.

$$\begin{aligned} 0,2\,\mathrm{l}\cdot 5 &= 1\,\mathrm{l}, \\ 0,5\,\mathrm{l}\cdot 4 &= \underline{2\,\mathrm{l}}, \\ &= 3\,\mathrm{l}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0,2\,\mathrm{l}\cdot 10 &= 2\,\mathrm{l}, \\ 0,5\,\mathrm{l}\cdot\ \ 2 &= \underline{1\,\mathrm{l}}, \\ &= 3\,\mathrm{l}, \end{aligned}$$

Dále bychom měli přejít k univerzálnímu modelu. Žáci by díky praktické ukázce pochopili, že neznámými jsou počty kelímků dané vlastnosti.

Obě metody, tedy **transmisivní metoda výuky** i **konstruktivistická metoda výuky**, mají své příznivce, jak bylo uvedeno výše, ale mají i své kritiky. Při používání **transmisivního** způsobu výuky vytýkají kritici problémy, jako nepozornost žáků, nevyhovující stejná rychlost výkladu pro všechny žáky bez zvážení jejich schopností, složitost zkontrolovat, zda žáci porozuměli probírané látce. Pokud žáci dostávají přímou cestou hotové vědomosti, kritici se domnívají, že nejsou připraveni na řešení životních problémů a nerozvíjí se jejich intelektuální schopnosti. Je však potřeba si uvědomit, že žáci mají mnohdy ucelený výklad. Tento způsob výuky je např. vhodný při výkladu složitější látky, kde jsou nutné širší znalosti, při zprostředkování pravidel a při výuce jazyků. Poslední dobou je velice oblíbená **konstruktivistická metoda výuky**, ale kritici poukazují na malou efektivitu pro získávání uceleného přehledu vědomostí, náročnost aktivizujících metod, složitost vytvořit prostředí pro hromadnou výuku s ohledem na předchozí znalosti a vědomosti žáků a problémy při používání pro získávání složitějších poznatků se širšími znalostmi.

Je jistě dobré používat ověřené výukové metody, ale naproti tomu je potřeba dát prostor i metodám novým, progresivním. Důležité však je dostatečně zhodnotit, v jaké situaci danou metodu použít. Učitel by měl mít možnost vybrat si metodu výuky, kterou považuje za nejvýhodnější, u které je přesvědčen, že je vhodná pro právě vyučované žáky s ohledem na předchozí zkušenosti žáků. Pokud bude nucen učit určitou metodou, o které není přesvědčen, že je správná a vhodná, jeho výuka nebude dobrá, ať se bude snažit co nejvíc.

Ve starších učebnicích (Bobok [10], Müllerová [55]) se soustavy lineárních rovnic probíraly již na počátku 2. stupně ZŠ. V 7. ročníku se vyučovala metoda dosazovací, metoda grafického řešení a slovní úlohy řešené pomocí soustav lineárních rovnic - úlohy o pohybu, o směsích a další. V 8. ročníku ZŠ se prohlubovaly znalosti o jedné lineární rovnici se dvěma neznámými a o soustavách dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. Opakuje se řešení soustav dvou lineárních rovnic graficky a dosazovací metodou. Pak se vysvětlí sčítací metoda a řeší se soustavy touto metodou.

Ve všech analyzovaných současných učebnicích se žáci seznamují s metodou dosazovací a metodou sčítací, metoda srovnávací je uváděna jenom v některých z nich (Půlpán, Čihák, Trejbal [68]). Grafické řešení rovnic je zařazováno buď přímo do kapitoly o metodách řešení soustavy rovnic, nebo je uváděno v rámci kapitoly věnované grafům lineární funce. Současní autoři vesměs vycházejí z řešených úloh, na kterých demonstrují metody řešení, jak vyplývá z porovnání vybraných učebnic pro ZŠ, které jsem provedla.

V současné době existuje velké množství různých učebnic pro základní a střední školy, které se zabývají soustavami rovnic, proto vyberu pouze některé. Posuzovány byly jednak učebice používané na školách, ve kterých probíhal výzkum, jednak jsem se snažila o zastoupení různých autorů a nakladatelství.

Porovnání vybraných učebnic pro ZŠ

Coufalová, J. a kol.: *Matematika pro 9. ročník základní školy.* Fortuna, Praha 2018.

Kapitolu soustavy lineárních rovnic se dvěma neznámými rozdělili autoři na sedm podkapitol. Nejprve na vzorovém příkladu vysvětlují řešení lineární rovnice se dvěma neznámými a soustavy rovnic se dvěma neznámými. Poté uvádějí, že pro lineární rovnici se dvěma neznámými platí stejné ekvivalentní úpravy jako pro lineární rovnici s jednou neznámou. Dále následují cvičení, ve kterých žáci mají vyjádřit jednu neznámou nebo neznámé spočítat. Některá cvičení jsou zadána pomocí tabulky. Na konci této podkapitoly je řečeno, že lineární rovnice se dvěma neznámými má nekonečně mnoho řešení v množině reálných čísel. V další podkapitole je uvedeno využití soustavy lineárních rovnic. Jsou zde dvě slovní úlohy a žáci mají vytvořit soustavu rovnic. Jedna slovní úloha je vyřešená, druhá ne. Pak jsou vysvětleny metody na řešení soustavy lineárních rovnic, a to metoda dosazovací a metoda sčítací. Obě podkapitoly začínají slovní úlohou. Chybí metoda srovnávací. Dále je poznamenáno, kolik řešení může mít soustava lineárních rovnic. Pak jsou uvedeny slovní úlohy na řešení soustav lineárních rovnic. V poslední kapitole jsou úlohy na opakování. Grafická metoda řešení soustav lineárních rovnic je uvedena až v následující kapitole Funkce. Učebnice je přehledná, učivo je zde dobře vysvětleno. Kapitoly začínají slovní úlohou, což propojuje téma s reálným životem. Je zde hodně úloh na procvičení.

Šarounová a kol.: *Matematika 9, I. díl.* Prometheus, Praha 1999.

Téma Soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými je součástí kapitoly Rovnice. Nejprve je zde opakování řešení jedné rovnice o jedné neznámé, pak si žáci zopakují rovnice s neznámou ve jmenovateli, poté navazuje podkapitola Úlohy o směsích. Následuje podkapitola Lineární rovnice se dvěma neznámými, která začíná řešením slovní úlohy. V dalších úlohách je ukázáno vyjadřování neznámé ze vzorce, dosazování hodnot a grafické řešení. Je zde hodně úloh na procvičování. Další podkapitolou je již soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. Začíná se úlohou, ve které uspořádané dvojice vyhovují oběma rovnicím. Dále je vysvětlena dosazovací, sčítací metoda a grafické řešení soustavy rovnic. Autoři uvádí velké množství vyřešených příkladů a příkladů na procvičování. Všechny uvedené metody jsou dostatečně vysvětleny. Je zde uvedeno, kolik řešení může mít soustava rovnic a všechny možnosti jsou vyřešeny, jak sčítací i dosazovací metodou, tak i graficky. Na konci jsou řešeny slovní úlohy. Celá kapitola je zakončena pěti slovními úlohami k procvičení.

Učebnice je přehledná, je zde dostatek vyřešených úloh i úloh k procvičování.

Trejbal, J.: *Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl.* SPN - pedagogické nakladatelství, Praha 1997.

Kapitolu Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými rozdělil autor do tří podkapitol. Nejprve je vysvětleno řešení lineární rovnice se dvěma neznámými. Autor začíná slovní úlohou, na které vysvětluje, co je lineární rovnice se dvěma neznámými, kolik a jaké může mít řešení. Dále jsou řešeny soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými metodou dosazovací, metodou sčítací i kombinací těchto dvou metod. Ve třetí podkapitole jsou řešeny slovní úlohy pomocí soustav dvou rovnic se dvěma neznámými. Jedna slovní úloha je vyřešena a několik slovních úloh je určeno k procvičování.

V této učebnici se soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými příliš nevysvětlují, spíše jen procvičují, a proto je zde uvedena řada příkladů k řešení.

Rosecká, Z. a kol.: *Algebra, učebnice pro 9. ročník.* Nová škola, s. r. o., Brno 2000.

Téma Soustava rovnic o dvou neznámých je v kapitole Lineární rovnice. První části této kapitoly se věnují řešení rovnic i slovních úloh, řešení lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli, vyjádření neznámé ze vzorce a nerovnicím. Pak následuje soustava rovnic o dvou neznámých. Na rozdíl od jiných učebnic se nezačíná s lineární rovnicí se dvěma neznámými. Úvodní slovní úloha je zadána pomocí obrázků a na této slovní úloze je vysvětlena soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Na stejné stránce vedle této úlohy je vyřešena složitější slovní úloha. Jedna rovnice obsahuje neznámou ve jmenovateli. Dále se pokračuje s vysvětlením metod na řešení soustav rovnic. Jsou vysvětleny metody dosazovací, sčítací i srovnávací. Jsou ukázány soustavy rovnic s různým počtem řešení. Následuje několik cvičení na jednodušší soustavy rovnic. Poté jsou řešeny slovní úlohy o pohybu, o společné práci a o směsích. Grafické řešení soustavy rovnic je začleněno do kapitoly Funkce.

V učebnici je učivo vysvětleno srozumitelně, stručně a je zde uvedeno i velké množství obrázků, barevné znázorňování výsledků, postupů, apod. Počet úloh na procvičování je také velký, ale je zde i mnoho rébusů, testů a různých zajímavostí, které upoutají.

Půlpán, Z., Čihák, M., Trejbal, J.: *Matematika pro základní školy - algebra.* SPN - pedagogické nakladatelství, Praha 2010.

V této učebnici autoři vytvořili kapitolu přímo s názvem Soustava dvou rovnic se dvěma neznámými. První podkapitola začíná jednou rovnicí se dvěma neznámými.

Autoři uvedli motivující slovní úlohu na jednu rovnici se dvěma neznámými. Úloha je přehledně vyřešena a poté je uvedena základní definice lineární rovnice se dvěma neznámými. Následují další úlohy na jednu lineární rovnici se dvěma neznámými. Další podkapitolou je Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. Autoři zde uvádí definici soustavy rovnic a metody řešení. Vysvětleny jsou všechny metody - dosazovací, sčítací, srovnávací a kombinovaná. Grafické řešení soustavy lineárních rovnic se dvěma neznámými je v závěru kapitoly Lineární funkce. V podkapitole Soustava dvou rovnic se dvěma neznámými je velký počet úloh vyřešených i k procvičování. V závěru je shrnutí všech metod řešení a uvedeno, kolik může mít soustava rovnic řešení. Následuje podkapitola Rovnice a jejich soustavy kolem nás, kde jsou uvedeny slovní úlohy na řešení soustav rovnic. Autoři řeší slovní úlohy o pohybu, o společné práci a o směsích. Na konci jsou uvedeny úlohy na procvičení.

Učivo je srozumitelně vysvětleno. Důležité informace jsou barevně zvýrazněny. Je zde uveden velký počet úloh na procvičování, obzvláště hodně slovních úloh. V závěru kapitoly jsou krátké poznámky z historie matematiky.

Molnár, J. a kol.: *Matematika 9 - učebnice s komentářem pro učitele.* Prodos, Olomouc 2001.

V kapitole Soustavy lineárních rovnic začínají autoři základními pojmy a metodami řešení. Autoři vysvětlují metodu sčítací a metodu dosazovací. Několik příkladů je vyřešeno a velký počet úloh je určen k procvičení. Autoři vysvětlují, kdy má soustava jedno řešení, nekonečně mnoho řešení a kdy nemá soustava žádné řešení. Další podkapitola se věnuje grafickému řešení soustav lineárních rovnic se dvěma neznámými. Třetí podkapitola se věnuje slovním úlohám. Poslední podkapitola obsahuje úlohy k procvičení.

Učebnice je srozumitelně členěna, obsahuje dostatek úloh na procvičení dané problematiky. Kapitola o slovních úlohách by mohla být podrobnější, z mého pohledu by mělo být uvedeno více vyřešených slovních úloh.

Porovnání vybraných učebnic pro SŠ

Na střední škole se většinou soustavy lineárních rovnic opakují a nově se učí soustava lineární a kvadratické rovnice a soustavy kvadratických rovnic. Uvedu některé učebnice pro SŠ.

Cizlerová, M. a kol.: *Matematika pro SŠ - 2. díl,* podtitul *Výrazy, rovnice a nerovnice*, Didaktis, Brno 2013.

Soustavy lineárních rovnic jsou součástí tématického celku **Lineární rovnice, nerovnice a jejich soustavy**. Nejprve autoři vysvětlují lineární rovnice o dvou neznámých. Poté vysvětlují soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a metody řešení (sčítací, dosazovací a srovnávací). Následně vyřešili vzorové příklady. Dále je popsáno, kolik může mít soustava rovnic řešení. Autoři nezapomněli ani na ukázku grafického řešení soustavy lineárních rovnic. Následně řeší dva příklady na soustavy tří lineárních rovnic se třemi neznámými, včetně řešení pomocí matic. V další kapitole se věnují slovním úlohám na řešení soustav rovnic, uvádí zde slovní úlohy o společné práci, o směsích a o pohybu. V tématickém celku Kvadratické rovnice, nerovnice a jejich soustavy jsou začleněny soustavy lineární a kvadratické rovnice se dvěma neznámými. V této části je uveden postup řešení takové soustavy a jsou vyřešeny soustavy rovnic, které mají jedno, dvě nebo žádné řešení.

Učebnice je graficky velmi pěkně zpracována. Učivo je přehledně a srozumitelně vysvětleno. V učebnici by mohlo být více úloh na procvičování, ale toto je zajištěno v pracovním sešitě, který je doporučen ke knize. Na každé straně knihy jsou po stranách uvedeny nějaké zajímavosti, znalosti či připomenutí, v jakém učivu dále se budou vědomosti používat; jsou uvozeny otázkami, jako např. Víte, že?, Vzpomeňte si! Kam dál?, což je velice poutavé. Učebnicová sada /tedy učebnice a pracovní sešit/ je velmi dobře vzájemně propojena.

Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky*, 10. přepracované vydání, Prometheus, Praha 2015.

Kniha **Přehled středoškolské matematiky** má celkem již 10 upravených vydání (1. vydání je z roku 1972, 10. vydání z roku 2015). Toto dílo nevzniklo prvotně jako učebnice pro střední školy s didaktickým systémem učiva, avšak obsahuje ucelený přehled středoškolské matematiky. 10 upravených vydání svědčí o tom, že je kniha opravdu dobře zpracovaná a dlouhodobě žádaná. Je vhodná nejen pro studenty středních škol, ale i pro studenty vysokých škol, kteří z ní mohou čerpat při opakování a prohlubování znalostí středoškolské matematiky. Kniha je rozdělena do 10 ucelených tématických celků. **Rovnicemi a nerovnicemi** se zabývá 5. kapitola. Její podkapitoly jsou přehledně členěny do částí týkajících se lineárních, kvadratických, iracionálních, exponenciálních, logaritmických a goniometrických rovnic. Další podkapitoly se věnují speciálně lineárním a kvadratickým nerovnicím. V následující podkapitole **Soustavy rovnic s více neznámými** je nejprve vysvětlen pojem soustavy rovnic, poté autor uvádí, jaké druhy soustav rovnic se rozlišují a jaké metody lze pro jejich řešení použít. Zvláštní pozornost je věnována soustavám dvou (tří) lineárních rovnic se dvěma (třemi) neznámými.

Následně je ukázáno i grafické řešení vybraných typů soustav nerovnic s více neznámými. V závěru této kapitoly je představena podkapitola **Slovní úlohy vedoucí k řešení rovnic a nerovnic**.

Boček, L. a kol.: *Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice*, Prometheus, Praha 1994.

Jako jedna z monotématických učebnic matematiky pro gymnázia vytvořených ve spolupráci s odbornou skupinou Jednoty českých matematiků a fyziků vznikla kniha s tématem **Rovnice a nerovnice**. Na úvod se věnuje lineárním rovnicím a nerovnicím s jednou neznámou. Dále přechází k soustavám lineárních rovnic a nerovnic s více neznámými, včetně jejich grafického řešení. Druhá tématická část je věnována kvadratické verzi rovnic, nerovnic a soustav i rovnicím vyšších řádů. V závěru jsou uvažovány tyto rovnice a nerovnice s přidaným parametrem. Výhodou této učebnice je mnoho řešených příkladů i neřešených příkladů určených k procvičování v každé kapitole.

Vošický, Z.: *Matematika v kostce pro střední školy*, Fragment, Havlíčkův Brod 2007.

V knize Matematika v kostce najdeme základní přehled středoškolské matematiky. Není považována za učebnici, ale pro výuku ji lze použít i z důvodu, že je koncipována jako pracovní sešit s klíčem a testy na procvičování. Autor nejprve vysvětluje rovnice a jejich řešení, lineární a kvadratické rovnice a teprve poté následuje kapitola **Soustava rovnic**. Kapitola začíná definicí soustavy rovnic a pokračuje řešením soustav rovnic pomocí známých metod. Jsou zde vyřešeny dvě soustavy lineárních rovnic. První soustava je vyřešena metodou dosazovací a metodou sčítací a v poznámce je zmíněno i geometrické řešení. Druhá soustava je řešena pomocí substituce. Podle mého názoru je zde řešení soustav rovnic vysvětleno velice stručně. Na konci každé kapitoly jsou sice příklady k procvičování dané látky a test určený k prověření matematických znalostí z dané oblasti středoškolské matematiky, ale domnívám se, že vzhledem k obtížnosti látky je zde velmi málo příkladů k procvičování.

Učebnice pro ZŠ	Úvodní úloha ke kapitole soustavy rovnic	Metody řešení soustav rovnic	Počet vyřešených úloh	Úlohy k procvičení	Přehlednost	Motivační prvky
Coufalová, J. a kol.: Matematika pro 9. ročník základní školy	slovní úloha (na 1 rovnici o 2 neznámých)	dosazovací, sčítací, grafická	větší počet	větší počet	ano	nejsou
Půlpán, Z., Čihák, M., Trejbal, J.: Matematika pro ZŠ - algebra	žádná, rovnou soustava rovnic, motivující úloha na jednu rovnici se 2 neznámými	dosazovací, sčítací, srovnávací, grafická	velký počet	větší počet	ano	barevné zvýraznění, poznámky z historie
Molnár, J. a kol.: Matematika 9 - učebnice s komentářem pro učitele	žádná, úvodní pojmy a hned metody řešení	sčítací, dosazovací, grafická	méně	větší počet	ano	nejsou
Herman, J. a kol.: Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií, rovnice a jejich soustavy	slovní úloha	dosazovací, sčítací, srovnávací	větší počet	větší počet	ano	obrázky
Binterová, H. a kol.: Matematika 9, Algebra, učebnice pro zákl. školy a víceletá gymnázia	slovní úloha	dosazovací, sčítací, okrajově grafická	větší počet	větší počet	ano	obrázky, symboly
Šarounová a kol.: Matematika 9, I. díl	slovní úloha na lineární rovnici se 2 neznámými	dosazovací, sčítací, (kombinovaná), grafická	větší počet	pět slovních úloh	ano	po straně na stránkách jsou barevné pruhy
Trejbal J.: Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl	slovní úloha	dosazovací, sčítací, (kombinovaná)	jedna slovní úloha	větší počet	ne	nejsou
Rosecká, Z. a kol.: Algebra, učebnice pro 9. ročník	slovní úloha zadaná obrázkem	dosazovací, sčítací, srovnávací, grafická	větší počet	velký počet	ano	obrázky, barevné znázorňování, rébusy, testy, zajímavosti
Učebnice pro SŠ	**Úvodní úloha ke kapitole soustavy rovnic**	**Metody řešení soustav rovnic**	**Počet vyřešených úloh**	**Úlohy k procvičení**	**Přehlednost**	**Motivační prvky**
Cízlerová, M. a kol.: Matematika pro SŠ - 2. díl	žádná	sčítací, dosazovací, srovnávací, grafická	větší počet, navíc soustava rovnic se 3 neznámými, i maticově	málo	ano	zajímavosti, zvýraznění potřebných a získaných znalostí
Boček, L. a kol.: Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice	slovní úlohy	sčítací, dosazovací, srovnávací, grafická	větší počet	větší počet	ano	nejsou
Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, 10. přepracované vydání	slovní úlohy	sčítací, dosazovací, srovnávací, grafická	větší počet	větší počet	ano	nejsou

Tabulka 1: **Souhrn analýzy uvedených učebnic**

Odlišný způsob výuky je volen v učebnicích (Hejný, Šalom [31], [32]), kde se používá „Hejného metoda“. Tato Hejného metoda využívá samostatného objevování žáků. Opírá se o 12 klíčových principů: budování schémat, práce v prostředích, prolínání témat, rozvoj osobnosti, skutečná motivace, reálné zkušenosti, radost z matematiky, vlastní poznatek, role učitele, práce s chybou, přiměřené výzvy a podpora spolupráce.

V těchto učebnicích nejsou graficky zvýrazněné vzorečky nebo poučky, protože podle Hejného se vzorečky obrací k dlouhodobé paměti žáků, do které se ukládají jako izolovaná fakta. Jako taková fakta se stávají překážkou pro porozumění. Tyto učebnice vedou žáky k tomu, aby důležité poznatky objevili samostatně nebo s pomocí učitele a spolužáků a aby se tyto poznatky dostávaly do povědomí žáků jako zážitky a byly propojeny na další poznatky, které se objevily v procesu řešení příslušné úlohy. U žáků se rozvíjí schopnost řešit soustavu rovnic metodou pokus-omyl. Využívají se již známá prostředí, např. Děda Lesoň. To již žáci znají z řešení rovnic na 1. stupni ZŠ. Děda Lesoň má spoustu zvířátek a pořádá pro ně hry. Nejoblíbenější je přetahovaná, kdy mezi sebou zvířátka soutěží a přetahují se v družstvech. Žák řešením situací ze hry postupně odhaluje pravidla na ekvivalentní úpravy soustav rovnic. Použití Hejného metody na výuku nelineárních rovnic je ale podle mého názoru problematické.

2.3 Úlohy na soustavy polynomiálních rovnic v jednotných přijímacích zkouškách na SŠ a v jednotných státních maturitních zkouškách z matematiky

V současné době probíhají z matematiky jednotné přijímací zkoušky na SŠ a jednotné maturitní zkoušky.

Pro **přijímací zkoušky** by měl žák znát (http://www.nuv.cz/t/rvp):

- řešit a tvořit slovní úlohy na sčítání, odčítání, násobení a dělení s využitím matematizace reálné situace,
- využívat úsudek při řešení slovních úloh a jednoduchých problémů,
- matematizovat reálné situace,
- řešit soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými metodou dosazovací a sčítací,
- řešit slovní úlohy z praxe,
- provést rozbor úlohy,
- pro řešení zvolit známý algoritmus nebo řešit úlohu úsudkem,
- provést zkoušku správnosti řešení.

Pro potřeby práce byly posouzeny úlohy z přijímacích zkoušek na SŠ v letech 2017 - 2022.

Na ukázku uvedu příklad slovní úlohy na řešení soustav lineárních rovnic z přijímacích zkoušek na SŠ 2017 (2. řádný termín).

Příklad 2.2 *V promítacím sále bylo přítomno 100 platících osob. Cena vstupenky pro dospělého je* 200 *Kč, pro dítě* 150 *Kč. V pokladně bylo vybráno za vstupenky* 16000 *Kč.*

a) Vypočtěte, o kolik procent je vstupenka pro dítě levnější než vstupenka pro dospělého.

b) Vypočtěte, kolik dětí bylo v promítacím sále.

c) Vypočtěte, kolik Kč bylo vybráno v pokladně za vstupné pro dospělé.

Řešení:

a)

$$\begin{array}{lcr} 100\ \% & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 200\ \text{Kč} \\ \text{x}\ \% & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 150\ \text{Kč} \\ \hline & \text{x} = 75 & \end{array}$$

Vstupenka pro dítě byla o 25 % levnější.

b)

$$\begin{array}{rcr} x + y & = & 100, \\ 200x + 150y & = & 16000, \\ \hline -200x - 200y & = & -20000, \\ 200x + 150y & = & 16000, \\ \hline -50y & = & -4000, \\ y & = & 80. \end{array}$$

V promítacím sále bylo 80 dětí.

c) Dospělých bylo $100 - 80 = 20$; $20 \cdot 200 = 4000$.

V pokladně bylo vybráno za vstupné pro dospělé 4000 Kč.

Závěr: V přijímacích zkouškách se soustavy rovnic vyskytují v rámci slovních úloh. Jen vyřešení soustavy rovnic se téměř nevyskytuje. Žáci musí sestavit soustavu rovnic a poté ji vyřešit. Výše uvedenou úlohu 2.2 b) vyřešilo správně 33, 73 % žáků, špatně 66, 25 % žáků, c) správně 67, 1 % a špatně 32, 9 % žáků.

V katalogu **požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky** platném od školního roku 2015/16 je formulováno, co by měl žák znát a umět. Všeobecně by měl žák umět matematizovat reálné situace, pracovat s matematickým modelem a ověřit reálný model z hlediska reálné situace.

V části Algebraické rovnice a nerovnice by měl žák zvládnout:

- užít pojmy rovnice a nerovnice s jednou neznámou,
- užít ekvivalentní úpravy rovnice a nerovnice,
- provádět zkoušku.

V části Lineární rovnice a jejich soustavy žák musí zvládnout:

- umět řešit lineární rovnice o jedné neznámé,
- vyjádřit neznámou ze vzorce,
- řešit početně soustavy lineárních rovnic,
- řešit graficky soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých,
- užít lineární rovnice a jejich soustavy při řešení slovních úloh.

K řešení slovních úloh by měl žák rovněž umět využít nepřímé úměrnosti a užít kvadratickou rovnici.

Státní maturitní zkouška má formu didaktického testu, který je tvořen různými typy uzavřených úloh, otevřených úloh se stručnou odpovědí a otevřených úloh se širokou odpovědí. Pro potřeby práce byly analyzovány úlohy z didaktických testů maturitních zkoušek z let 2017 - 2022. V didaktickém testu tvoří rovnice a nerovnice přibližně $12-20\,\%$.

Na ukázku uvedu příklady slovních úloh na soustavy rovnic z maturitních zkoušek - jaro 2017, jaro 2018 a jaro 2019 (http://novamaturita.cz).

Příklad z maturitní zkoušky - jaro 2017 (příklad 15):

Příklad 2.3 *Na stole jsou dvě hromádky mincí. Obě hromádky obsahují pouze pětikorunové a dvoukorunové mince. První hromádka s 32 mincemi obsahuje pětinu všech pětikorunových mincí a polovinu všech dvoukorunových mincí. Druhá hromádka obsahuje zbývajících 68 mincí. Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtěte v korunách hodnotu všech mincí na stole. (Uveďte celý postup řešení a odpověď zapište celou větou.)*

Řešení:

x … počet dvoukorun v obou hromádkách,

y … počet pětikorun v obou hromádkách.

V první hromádce je 32 mincí, což je $\frac{1}{5}y$ (počet pětikorun) a $\frac{1}{2}x$ (počet dvoukorun). Druhá hromádka obsahuje 68 mincí, což je $\frac{4}{5}y$ (počet pětikorun) a $\frac{1}{2}x$ (počet dvoukorun).

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{5}y + \tfrac{1}{2}x &= 32, \\ \tfrac{4}{5}y + \tfrac{1}{2}x &= 68, \\ \hline \tfrac{3}{5}y &= 36, \\ y &= 60\,\text{mincí pětikorun}, \end{aligned}$$

tedy $x = 40$ (mincí dvoukorun) $\Rightarrow 60 \cdot 5 + 40 \cdot 2 = 380$.

Hodnota všech mincí na stole je 380 Kč.

Příklad z maturitní zkoušky - jaro 2018 (příklad 15):

Příklad 2.4 *Pan Kocour uvažuje o výhodné investici, ale jeho kapitál by pokryl jen třetinu investice. Proto nabídl spoluúčast panu Malému, jehož kapitál je o 200 miliónů korun vyšší než kapitál pana Kocoura. Aby společně pokryli celou investici, každý z nich uvolní celou polovinu svého kapitálu. Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtěte v korunách: 1. hodnotu kapitálu pana Kocoura, 2. částku, kterou na investici uvolní pan Malý. (Uveďte celý postup řešení, popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď.)*

Řešení:

1. Kapitál: Kocour $\dots x$,
   Malý $\dots x+200$,
   investice $\dots y$

$$\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{3}y, \\ 3x &=& y, \\ \frac{x}{2}+\frac{x+200}{2} &=& y, \\ \hline x+x+200 &=& 2y, \\ 2x+200 &=& 6x, \\ 200 &=& 4x, \\ x &=& 50. \end{array}$$

   Pan Kocour měl kapitál ve výši 50 000 000 Kč.

2. $\frac{x+200}{2} = \frac{50+200}{2} = 125.$
   Pan Malý investuje 125 milionů korun.

Příklad z maturitní zkoušky - jaro 2019 (příklad 14):

Příklad 2.5 *Během prvních 5 dnů se vyrobilo denně v průměru o čtvrtinu výrobků méně než se vyrobilo v každém z 10 následujících dnů. Celkem se tak za 15 dnů vyrobilo 2 200 výrobků. Užitím rovnice nebo soustavy rovnic určete celkový počet výrobků vyrobených za prvních 5 dnů. (Uveďte celý postup řešení, popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď.)*

Řešení:
Označíme průměrný počet výrobků vyrobených v každém z prvních 5 dnů x a průměrný počet výrobků vyrobených v každém z následujících 10 dnů y.

$$\begin{array}{rcl} 5x+10y &=& 2200, \\ x &=& \frac{3}{4}y, \\ \hline 5\cdot\frac{3}{4}y+10y &=& 2200, \\ 15y+40y &=& 8800, \\ 55y &=& 8800, \\ y &=& 160 \\ 5\cdot\frac{3}{4}\cdot 160 &=& 600. \end{array}$$

V prvních 5 dnech se vyrobí 600 výrobků.

Z následující tabulky (2) je vidět, jaká byla úspěšnost žáků při řešení jednotlivých úloh. Příklad 2.3 vyřešilo správně 48, 05 % žáků, příklad 2.4 vyřešilo správně 33, 84 % žáků a příklad 2.5 vyřešilo správně 40, 32 % žáků.

Výsledky maturitních testů - příklady užitím rovnice, resp. soustavy rovnic							
MATEMATIKA 2017 jaro - DIDAKTICKÝ TEST (příklad 2.3)							
maximálně 3 body	ČÍSLO ÚLOHY (příklad 4.3)	ČÍSLO PODÚLOHY	TYP ÚLOHY	POČET ŽÁKŮ			
				ŘÁDNÝ TERMÍN %	OPRAVNÝ TERMÍN %	NÁHRADNÍ TERMÍN %	NEPOVINNÁ ZKOUŠKA %
0 bodů	15	0	OÚ	42,72	79,82	82,47	44,98
1 bod	15	0	OÚ	3,00	4,06	1,55	4,21
2 body	15	0	OÚ	6,23	3,49	4,12	5,18
3 body	15	0	OÚ	**48,05**	12,63	11,86	45,63
Celkem %				100,00	100,00	100,00	100,00
MATEMATIKA 2018 jaro - DIDAKTICKÝ TEST (příklad 2.4)							
maximálně 3 body	ČÍSLO ÚLOHY (příklad 4.3)	ČÍSLO PODÚLOHY	TYP ÚLOHY	POČET ŽÁKŮ			
				ŘÁDNÝ TERMÍN %	OPRAVNÝ TERMÍN %	NÁHRADNÍ TERMÍN %	NEPOVINNÁ ZKOUŠKA %
0 bodů	15	1	OÚ	21,30	26,99	26,11	21,60
1 bod	15	1	OÚ	2,41	1,01	0,00	2,43
2 body	15	1	OÚ	5,24	1,57	0,64	5,34
3 body	15	1	OÚ	**33,84**	3,25	5,10	33,74
vynechaná odpověď	15	1	OÚ	37,20	67,17	68,15	36,89
Celkem %				100,00	100,00	100,00	100,00
MATEMATIKA 2019 jaro - DIDAKTICKÝ TEST (příklad 2.5)							
maximálně 3 body	ČÍSLO ÚLOHY (příklad 4.3)	ČÍSLO PODÚLOHY	TYP ÚLOHY	POČET ŽÁKŮ			
				ŘÁDNÝ TERMÍN %	OPRAVNÝ TERMÍN %	NÁHRADNÍ TERMÍN %	NEPOVINNÁ ZKOUŠKA %
0 bodů	14	0	OÚ	26,75	37,42	31,06	26,20
1 bod	14	0	OÚ	0,74	0,39	0,00	0,72
2 body	14	0	OÚ	2,54	1,05	3,03	3,37
3 body	14	0	OÚ	**40,32**	7,76	11,36	27,88
vynechaná odpověď	14	0	OÚ	29,65	53,38	54,55	41,83
Celkem %				100,00	100,00	100,00	100,00

Tabulka 2: **Výsledky maturitních testů 2017 - 2019**

(ke zpracování tabulky byla použita data z https://data.cermat.cz, menu Maturitní zkouška)

Závěr: Soustavy rovnic se v maturitních zkouškách vyskytují téměř jen při řešení slovních úloh. Žáci mohou použít buď soustavu rovnic, nebo jen jednu rovnici. V řádném termínu vyřeší slovní úlohu přibližně třetina žáků, v opravném termínu žáci totálně selhávají, správně vyřeší slovní úlohu pouze cca 3 % žáků.

2.4 Obtíže žáků a kritická místa v učivu při řešení soustav lineárních rovnic a slovních úloh

Jako kritická místa v matematice (Vondrová a kol. [86]) se označují ty oblasti matematiky, v nichž žáci často a opakovaně selhávají, jinak řečeno, které nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a aby mohla být tvořivě užívána v každodenním životě. Řešení soustav lineárních rovnic patří mezi kritická místa výuky matematiky na ZŠ a v nižších ročnících gymnázií. (Vondrová a kol. [86]) S většími problémy se učitelé tradičně setkávají při řešení příslušných aplikačních úloh (slovních úloh) vedoucích na řešení soustav lineárních rovnic. V článku Proulx, Beisiegel, Miranda, Simmt [66] došli k závěru, že soustavy rovnic jsou na středních školách vnímány jako relativně jednoduché téma. Je to jen pokračování řešení rovnic a problémů jedné proměnné. Z různých učebnic a dalších dokumentů bylo zjištěno, že řešení soustav rovnic se často zavádí pomocí grafů a poté se řeší různé příklady na soustavy rovnic pomocí algebraických metod. Grafické přístupy se ale tolik nevyužívají z důvodu jednoduchosti používání algebraických metod. Gannon a Schultz [21] dospěli k tomu, že ačkoliv geometrie motivuje existenci řešení, student se rychle vrací k režimu algebry. Grafy jsou chápány při řešení soustav rovnic jen jako sekundární. Sfard a Linchevski [74] diskutují o tom, že studenti, kteří používají jen algebraické metody a nepochopí princip, jsou pak bezradní, když jejich mechanické postupy selžou.

Pokud studenti řešili soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2(x-3) &= 1-y, \\ 2x+y &= 7, \end{aligned}$$

provedli substituci a dostali $7 = 7$. Studenti došli k závěru, že $x = 0$ a dopočetli $y = 7$.

Matematika by měla být více než jen řešení problémů pomocí mechanických postupů. Student by měl při matematice nepřetržitě uvažovat, vytvářet smysly, reflexe a kriticky hodnotit. Při výuce soustav rovnic bychom se měli zaměřit na tyto čtyři oblasti:

- význam soustav rovnic (soustava rovnic není systém nezávislých rovnic, ale množin rovnic, které jsou ve vztahu konjunkce),
- způsoby reprezentace soustavy rovnic (algebraická reprezentace, slovní problém popisující situaci nebo graf),
- způsoby řešení soustav rovnic (algebraické metody - substituce, eliminace, srovnání, s použitím tabulky hodnot a grafy),

- interpretace řešení soustavy rovnic (graficky žák vidí, že se přímky protínají nebo jsou rovnoběžné, algebraicky to není tak zřejmé).

Studenti se nejčastěji setkávají se soustavou rovnic, která má jen jediné řešení. Měli by se více setkávat i s ostatními případy.

V článku se Lagasse [47] věnoval dvěma způsobům, které studenti VŠ používají při řešení soustav lineárních rovnic, když mají na výběr z více možností. Studenti řešili soustavy lineárních rovnic nejvíce pomocí substituce, dále pomocí eliminace, dosazováním možností a pomocí grafu. Metodu substituce si pamatovali nejvíce a byla jimi považována za nejjednodušší. V USA dnes často používají standardizované testy, kde má student na výběr z několika možností.

Rendl, Vondrová [70] uvádějí problémy žáků 8. ročníků při řešení soustav rovnic, které se projevily i v mezinárodním šetření TIMSS a negativně ovlivnily celkové hodnocení českých žáků.

Poznámka. Česká republika se účastní v matematické oblasti dvou důležitých mezinárodních šetření PISA (vznik 2000) a TIMSS (vznik 1995), jejichž hlavním záměrem je poskytnout informace o úspěšnosti a efektivitě vzdělávacích programů v jednotlivých zemích.

Šetření PISA (Programme for International Student Assessment) probíhá od roku 2000 v tříletých intervalech a jeho cíle spočívají v opakovaném zjišťování výsledků patnáctiletých žáků v oblasti čtenářské, matematické a přírodovědné. V ČR proběhlo v matematické oblasti hlavní šetření na jaře roku 2022 a zveřejnění výsledků je plánováno na 3. čtvrtletí 2023.

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) se Česká republika účastní již od roku 1995. Jedná se o mezinárodní srovnávací studii, která ve čtyřletých intervalech zjišťuje úroveň vědomostí a dovedností žáků 4. a 8. tříd v matematice a v přírodních vědách. Toto šetření je doplněno o dotazníky pro žáky, jejich rodiče, učitele i ředitele škol a za jejich přispění lze objektivněji vysvětlit rozdíly ve výsledcích žáků, škol i jednotlivých zemí. V roce 2023 se uskutečňuje osmý cyklus šetření TIMSS za účasti více než 60 zemí z celého světa vč. ČR, přičemž v ČR proběhl hlavní sběr dat v květnu 2023 a zveřejnění výsledků je plánováno na konci roku 2024.

Jednotlivé země se do šetření nemusí zapojovat v plném rozsahu. Česká republika se šetření TIMSS účastní od začátku s výjimkou ročníku 2002/03. Do testování bývali zahrnuti žáci 4. a 8. tříd, ale již potřetí jsou v ČR testováni pouze žáci 4. ročníku (2011, 2015, 2019).

Následně si ukážeme dvě úlohy z šetření TIMSS 2007 (Rendl, Vondrová [70]), které žákům činily potíže:

Úloha M10-07:

$x + y = 12$ a $2x + 5y = 36$. Kolik jsou hodnoty x a y?

a) $x = 2, y = 10$ b) $x = 4, y = 8$ c) $x = 6, y = 6$ d) $x = 8, y = 4$

Úspěšnost této úlohy činila jen $40,1\,\%$, což je o $5\,\%$ za mezinárodním průměrem. Špatné výsledky ukazovaly na problémy se substitucí či s pochopením, že dvojice čísel musí vyhovovat oběma rovnicím a ne pouze jedné z nich.

Úloha M08-08:

Která ze čtyř nabízených rovnic má jako řešení danou dvojici čísel $x = 3$ a $y = 8$?

Žákům byly nabídnuty 4 rovnice: $3x - 8y = 0$, $8x + 3y = 0$, $3x + 3y = 24$, $3x - 8y = 24$, z nichž u jedné dostáváme po dosazení rovnost. Žáci často chybovali tím, že zaměňovali x a y při dosazování (13, 2 % žáků) a vybrali $3x - 8y = 24$. Jako nejčastější špatná odpověď (25, 4 % žáků) byla vybrána rovnice $8x + 3y = 24$, což vypadá, že žáci dosazovali zvlášť *číslo* x a zvlášť *číslo* y a druhou proměnnou vždy ignorovali.

Z celkové analýzy šetření TIMSS (i PISA) je zřejmé, že žákům dělá problémy postihnout závislosti dvou proměnných jako rovnice o dvou neznámých a především popis situace pomocí algebraického zápisu - pomocí rovnice nebo soustavy rovnic.

Soustavy rovnic využívají žáci ZŠ i SŠ při řešení slovních úloh. Některé slovní úlohy řeší žáci již na ZŠ, ale ve středoškolské matematice je těmto slovním úlohám věnována větší pozornost. Studentům řešení slovních úloh často činí velké potíže. Největším problémem bývá správně sestavit soustavu rovnic. (Vondrová [87])

Podle zaměření můžeme rozdělit aplikační úlohy vedoucí na soustavu rovnic na tyto typy (Polák [62]):

- úlohy o rozdělování celku na části,
- úlohy o pohybu,
- úlohy o společné práci,
- úlohy o směsích.

Jak řešit slovní úlohy na soustavu rovnic?

1. Pozorně přečteme text slovní úlohy, abychom pochopili, co je dáno (podmínka úlohy) a co máme vypočítat (otázka úlohy). Označíme neznámé. Jsou-li v úloze fyzikální veličiny, uvážíme, v jakých jednotkách získáme výsledek. Všechny podmínky úlohy vyjádříme pomocí neznámých, obdržíme výrazy a pak sestavíme soustavu rovnic.
2. Vyřešíme soustavu rovnic.
3. Správnost získaného výsledku ověříme zkouškou. Získaný výsledek vyjádříme slovní odpovědí.

Nejtěžší bývá pro žáky bod 1 - matematizace reálné situace, neboť nejsou schopni z textu sestavit rovnici. Právě na to je důležité se při výuce zaměřit a věnovat této části více pozornosti.

Pochopení textu v souvislosti s představou o dané situaci a podstatě problému lze považovat za kritické místo při řešení uvedených typů slovních úloh. Velký problém činí převod textu do matematického zápisu. Příčiny obtížnosti slovních úloh jsou podmíněny *charakterem samotných úloh*, kdy žákům připadají tyto úlohy náročné již od prvního pohledu, neboť nejsou pořád stejné a pak *charakteristikou žáka*, kdy při čtení nejsou žáci často ochotni si pečlivě, někdy raději i opakovaně, přečíst text až do konce, a tím si vytváří bariéru. V neposlední řadě lze uvést příčiny na rozhraní *charakteristik žáka, jeho přístupu k učení a didaktických příčin.* Tedy někteří žáci se snaží naučit řešení slovních úloh mechanicky podle vzorového řešení, což může být zčásti způsobené samotnými žáky, ale i didaktickými přístupy učitele, kdy učitel vede žáky sám k postupu a nedá jim možnost vytvořit si představu a přemýšlet o vhodném způsobu výpočtu.

Ve všech případech je důležitá *motivace*, *odstranění bázně* ze slovních úloh a přiblížení *spojení se skutečným životem.* Učitelé toho mohou dosáhnout pomocí následujících postupů:

- *Konceptuální porozumění*, tzn. vést žáky k důkladnému pochopení textu, toho, co se od nich žádá, a k představě přibližného výsledku. Tedy číst si text opakovaně, příp. i poslouchat čtení textu, dělat společný zápis úlohy a odpovídat na návodné otázky učitele a nechat žáky počítat úlohu podle sebe. U některých slovních úloh (např. na směsi nebo o pohybu) je dobré provést grafické znázornění situace, které donutí žáky k důkladnému seznámení s textem.
- *Procedurální porozumění*, tedy klást důraz na vzorové úlohy a rozdělení slovních úloh do základních typů, což žákům umožní, aby po vyřešení několika úloh stejného typu byli schopni vyřešit další podobné úlohy.

2.5 Využitelnost CAS při výuce matematiky

Od zavedení kalkulátorů odborníci řešili spor, zda digitální a počítačové technologie používat při výuce matematiky či nikoliv. Vznik CAS (Computer Algebra Systems - systémy počítačové algebry) v 70. letech a následné zavedení do výuky v 80. letech tento spor ještě více prohloubilo. CAS jsou v podstatě softwarové balíčky, které provádějí výpočty na základě instrukcí od žáka a některé nabízejí i grafické znázornění. CAS se používá hodně k individuální výuce (žáci samostatně řeší některé příklady nebo je dostanou jako domácí úkoly), prezentaci učitelů pomocí grafických zápisů a různých simulací. Umožňují tvořit komplikovanější úkoly a poskytují okamžitou zpětnou vazbu žákům.

V letech 1996 - 2000 byly zaváděny kalkulátory TI-92 do výuky matematiky a tím se začala měnit výuka matematiky bez počítače na výuku s CAS. Docházelo k diskusím o obsahu a organizaci výuky. Jako velká výhoda se jevilo schématické znázornění, rychlé konstrukce, tabulky, grafy, což začalo vést k lepšímu porozumění problému. Důležité byly komunikace o pojmech a o situacích, které nastaly během řešení. Bylo pozorováno hlubší porozumění pojmům a postupům. CAS nemůže nahradit učitele, ale pomáhá učiteli při výkladu, vytváří větší časový prostor na procvičování, učitel musí být přesný při formulování otázek a úvah. S kalkulátorem TI-92 docházelo k lepší skupinové práci ve třídě, žáci se více zapojili a sami kladli dotazy.(Kutzhler [46])

Problematikou zavedení CAS do výuky se zabývá řada autorů. Dále uvedeme náměty a názory některých z nich.

V článku (Peschek, Schneider [61]) dochází k diskusi, že student by měl umět vyřešit jednoduché rovnice a ke složitějším je vhodné využívat CAS. Německý pedagog a didaktik matematiky Heymann vnímá problém v používání či nepoužívání CAS v komunikaci mezi odborníky a laiky, mezi odborníky a učiteli a mezi učiteli a žáky. Známý německý matematik R. Fischer dělí výuku s používáním CAS na 3 oblasti:

1. základní znalosti (pojmy) - měli by žáci zvládnout,
2. operativní znalosti a dovednosti (řešení problémů, důkazy) pomocí CAS,
3. reflexe - učitel hovoří s žáky o řešení pomocí CAS, o operacích, které provedli, o situacích, které nastaly.

Začlenění CAS do základních předmětů, jako je matematika a přírodní vědy všeobecně, je jedním ze způsobů, jak již do základní školy vnést výuku rané informatiky (Rich, Yaday, Larimore [71]).

Většina současných matematiků zastává názor, že CAS činí matematiku zajímavou a užitečnou (např. Arikawe [1], Aydm [4], Tokpah [83]) a konstatují, že CAS zmenšují množství drobných rutinních procesů, které jsou pro žáky časově náročné a ručně komplikované, pomáhají při chápání matematických pravidel, rozvíjí důvěru v řešení problémů, zlepšují prostorovou představivost a tím vším přispívají ke zlepšení vztahů žáků k matematice a zpříjemňují matematiku jako celek. Naproti tomu také zastánci CAS varují a upozorňují na problémy podporování závislosti na počítačích na úkor rozvoje matematických a výpočetních dovedností, na podceňování znalostí a úspěchů žáků, apod.

Při používání CAS je nutné nejprve provést analýzu v oblasti implementace schopností informačních technologií do procesu výuky matematiky (Zhang [94]), stanovit metodologické cíle a pedagogickou proveditelnost jejich využití při výuce matematiky na střední škole, v souvislosti s rozvojem kognitivního myšlení studentů pak formulovat požadavky na strukturu a obsah vzdělávacích materiálů; určit hlavní oblasti přípravy učitelů v používání informačních technologií v procesu výuky matematiky; určit organizační formy a metody informačních technologií, zejména matematických informačních systémů v procesu rozvíjení kognitivního zájmu studentů v oblasti formování aplikované orientace výuky matematiky. K tomu by bylo vhodné zařadit pro učitele kurzy využívání informačních technologií ve výuce matematiky a provádět reflexi účinnosti.

Za použití CAS je pro žáky jednoduché vygenerovat graf či obrázek (Artigue [2]), ale musí ho umět popsat, poznat, že by bylo potřeba, aby se graf zobrazil v jiném intervalu. Učitelé se setkávají s obtížemi při používání CAS, kdy žák neučiní správné rozhodnutí, a proto je nutná doprovodná diskuse při zadávání úkolu, při rozhodování o použití vhodné metody analýzy a při posouzení získaných výsledků.

Používání matematických programů ve školské matematice má stále širší využití. Pokud je počítač vybaven vhodnými výukovými programy, může pomoci učiteli zvýšit efektivitu výuky, studentům zjednodušit zpracování příkladů, tedy může být prostředkem efektivních výpočtů a navíc může napomoci k tvorbě grafů či matematických obrázků. Užití matematických programů je účelné především ze dvou důvodů, a to jako vhodný pomocný didaktický prostředek pro zkvalitnění výuky a jako výpočetní prostředek pro řešení obtížnějších úloh, např. zejména složitějších soustav polynomiálních rovnic.

Bernhard Kutzler, ACDCA (Rakouské centrum pro didaktiku počítačové algebry), přednáška na konferenci „Užití počítačů ve výuce matematiky“, České Budějovice, 6. - 8. 11. 2003:

„Existuje tisíce cest, jak používat CAS pro vyučování, dobré i špatné. Špatné nebo lépe nevhodné přístupy často přicházejí od technických nadšenců z řad učitelů, kteří používají CAS už proto, že existují a že je možné je používat konkrétní cestou. Ale CAS by nikdy neměly řídit matematiku, kterou učíme, naše matematika by měla řídit (a používat) CAS!“

Helmut Heugl (ředitel rakouského projektu Derive):

„Jestliže použití CAS není ospravedlněno pedagogicky, je pedagogicky ospravedlněno CAS nepoužívat.“

Z dostupných materiálů lze usoudit, že zapojení CAS do výuky matematiky je rozporuplné a i vědečtí pracovníci nejsou jednotni ve svých závěrech.

CAS byly vytvořeny proto, aby rychle počítaly a dávaly výsledky, ale žáci a studenti by nejprve měli sami zvládnout matematické operace na jednodušších úlohách a soustavách nižšího řádu a pak by mohli CAS bez problémů používat i na složitější úlohy. Pro rozvoj matematického vzdělávání není efektivní tyto softwary používat, aniž by studenti znali sami postupy řešení. Kdyby je neznali, mohlo by dojít i k chybám při zadávání úkolu a z toho by plynulo, že výpočty by byly chybné a studenti by nad chybami ani neuvažovali a neodhalili by jejich závažnost a tím použitelnost výsledků.

CAS mají mnoho zastánců i protivníků. Ve světě jsou projekty, které se zabývají používáním těchto programů ve školách, na druhé straně jsou školské systémy, které tyto programy příliš nepoužívají a mezi ně se dosud řadí i české školství. Speciální programy se v českém školství zpravidla používají až ve vyšších stupních vzdělávání (často až na vysokých školách), kdy studenti prošli základními výukovými procesy. Je dobře, že v té době umí již řešit rovnice, soustavy rovnic, apod., ale není zbytečně pozdě zařazovat speciální matematické software do výuky? Vzhledem k tomu, že chceme, aby české školství bylo na vyšší úrovni a rozvíjelo se, bylo by vhodné zařadit používání speciálních matematických softwarů do výuky již na 2. stupni ZŠ a samozřejmě na středních a vysokých školách, ale nezapomínat při tom na správné vysvětlení matematických postupů. Ačkoliv je patrné, že se u nás situace každým rokem zlepšuje, stále není na takové úrovni, jak by bylo žádoucí.

Pro využití ve školské praxi je důležité vybrat správný software pro danou výuku. Program musí být cenově dostupný, maximálně funkční pro probírané téma, měl by mít jednoduché ovládání, hodně intuitivní a v češtině. Je pravděpodobné, že ovládání v angličtině by mohlo podporovat i zvyšování jazykových schopností studentů, ale pro studenty, kteří mají s výpočty v matematice problémy, je to nevhodné. Například program GeoGebra splňuje všechny uvedené předpoklady pro výuku matematiky na SŠ. Geometrické i algebraické nástroje programu lze použít pro různá témata na SŠ, např. zobrazení grafů funkcí při řešení rovnic a nerovnic, úprava matematických výrazů, analytická geometrie, apod.

Má-li mít použití CAS pro studenty smysl, musí mít základ v dobré didaktice a mít jasně definované cíle (Leinbach, Pountney, Etchells [50]). Důležitým cílem výuky matematiky s CAS je, aby se studenti stali aktivními účastníky, kteří plánují strategii řešení problémů a jejich realizaci za pomoci zkušeného pedagoga, matematika. Za tímto účelem autoři spojili použití CAS se stávajícím klasifikačním schématem pro matematické úlohy zvaným MATH Taxonomy a na konkrétních příkladech ilustrovali, jak lze pomocí tohoto záměru stanovit cíle výuky matematiky.

S prohlubující se reformou vzdělávání stále více učitelů matematiky navrhuje, aby studenti mohli používat tabletové počítače ve výuce (Yang [92]), zejména v aspektu zvládnutí matematických znalostí. Ve studii bylo vybráno 152 středoškolských studentů a výsledky ukázaly, že tabletový počítač má pozitivní vliv na využívání matematických znalostí při řešení složitých problémů a při řešení obecných matematických problémů. Ukázalo se ale, že použití tabletových počítačů mělo negativní vliv na běžnou aplikaci znalostí studentů při řešení jednoduchých problémů.

Podle kanadského matematika Fernanda Hitta [33] lze učitele matematiky rozdělit do tří kategorií, a to na učitele s bezmezným nadšením pro používání počítačových technologií ve výuce, na učitele, kteří počítačové technologie přímo odmítají, protože si myslí, že jejich zavedení do výuky brzdí rozvoj matematických dovedností a logického myšlení, a na učitele, kteří pomalu s rozvahou a obavami zavádějí CAS do výuky.

Na základě uvedených poznatků z výše citovaných článků vyplývá, že zavedení matematických počítačových programů do výuky má své výhody:

- motivace a větší zajímavost výuky matematiky - pracovat s programem je pro žáky zábavnější než neustálé drilování učitelem, žáci spolu mohou soutěžit s pomocí počítače, mají okamžitou zpětnou vazbu výpočtů,
- okamžitá názornost - pokud může žák názorně vidět to, o čem učitel mluví, dokáže si představit nový pojem nebo vztah, snadněji porozumí vysvětlované látce,
- dynamika - vysvětlovanou látku předvede učitel na velkém množství případů a pokud je to potřeba, i na speciálních případech,
- zvýšení efektivity výuky - počítač rychleji generuje nová zadání a kontroluje správnost žákova řešení,
- zvýšení aktivity žáků - žák pracuje na svém počítači sám, nemusí se přizpůsobovat ostatním, program může zopakovat postup řešení kolikrát je potřeba,
- usnadnění práce učiteli při vymýšlení písemných testů - příklady, které dobře vycházejí, podobné varianty testů, příprava prezentací.

Používání počítačových technologií nese i určitá rizika a nevýhody:

- učitel musí perfektně znát obsah učiva, pedagogiku a technologie, které může při výuce používat s ohledem na správné vyhodnocení kognitivních možností žáků,
- v souvislosti s probíranou látkou a kognitivními možnostmi žáků použít vhodné počítačové technologie (pokud by byl používán nevhodně zvolený program, může dojít k situaci, že žák nerozumí tomu, co má dělat, a naučí se používat příkazy intuitivně),
- učitel ani žák se nesmí soustředit pouze na zvládnutí počítačové technologie místo samotné matematiky, učitel nemůže vyžadovat znalosti nesouvisející s přemýšlením nad daným matematickým problémem.

2.6 Možnosti využívání digitálních technologií při výuce geometrie

Velmi diskutovanou otázkou využití počítače při výuce matematiky se nyní budeme zabývat z užšího pohledu výuky soustav rovnic a jejich aplikace při řešení geometrických úloh.

Co všechno bychom měli žáky na ZŠ a SŠ a studenty na VŠ učit o soustavách rovnic a kdy stačí zjistit řešení pomocí počítače?

V minulosti byly provedeny výzkumy zkoumající změny prostorových schopností studentů za použití počítačových softwarů jako je GeoGebra nebo Cabri 3D a bylo zjištěno, že tyto programy jsou velmi úspěšné v rozvoji dovednosti v oblasti prostorové vizualizace (Karakus, Aydin [43]).

V roce 1985 probíhala studie zabývající se integrací CAS do vysokoškolské matematiky (Lavicza [49]), do které se zapojilo v první fázi 22 matematiků ze 3 zemí (Velká Británie, USA a Maďarsko). Výsledky byly velmi optimistické - zlepšení učení studentů a lepší komunikace ve třídě. CAS má budoucnost být nejrozšířenějším softwarovým balíčkem ve vysokoškolském matematickém vzdělávání. Do druhé fáze studie bylo zapojeno 35 tisíc matematiků, kteří spolupracovali na tvorbě materiálů, docházelo ke společným workshopům na podporu využití počítačových technologií v matematice a také bylo nutné zvážit souvislosti s preduniverzitní výukou (méně Maďarsko, více USA, Velká Británie).

V článku (Attorps, Björk, Radic [3]) se poukazuje na nedávný výzkum na základních a středních školách, přičemž bylo zjištěno, že žáci, kteří používali počítačové technologie, měli lepší výsledky v učení oproti žákům, kteří počítačové technologie nepoužívali.

V posledních letech je prováděna řada studií, které se snaží zjistit vliv použití CAS na schopnost prostorových vizualizací, jak už bylo zmíněno i v předchozí části o GeoGebře. Při jedné takové studii (Karakus, Aydin [43]) byla zapojena skupina studentů bakalářského studia, u které probíhala výuka pomocí počítačového softwaru Maple. Studie zkoumala, zda použití tohoto softwaru má vliv na rozvoj prostorových vizualizačních dovedností vysokoškoláků. Výsledkem bylo, že výuka pomocí softwaru Maple měla výrazně pozitivní účinek. Podobný výzkum zahrnující 3D zobrazení pomocí prostředí Maple provedli v Kalifornii pedagogové Travis a Lennon (1997) v kurzu Calculus II a bylo zjištěno, že toto prostředí zlepšilo prostorové dovednosti studentů a výrazně přispělo ke zlepšení postoje některých studentů k matematice.

Huang (2013) zkoumal problémy studentů s vysokými prostorovými schopnostmi a s nízkými prostorovými schopnostmi a zjišťoval, jaký typ vizuálních obrazů je vhodné používat při řešení problémů v oblasti integrálního počtu. Výsledky ukázaly, že studenti s vysokými vizualizačními schopnostmi jsou při řešení úspěšnější, využívají obrazy podporující představivost spolu s algebraickými výpočty, a studenti s nízkými vizualizačními schopnostmi využívají více paměťové obrazy. Z toho jednoznačně vyplývá, že CAS podporuje rozvoj vizualizačních schopností všech studentů.

V článku (Hašek, Zahradník [27]) autoři představili použití softwaru GeoGebra k řešení geometrických problémů na kuželosečkách a geometrických míst z učebnice z 18. století. Na příkladech je předvedeno, jak použití tohoto programu pomohlo porozumět metodě, kterou dřívější matematici používali při řešení kuželoseček spolu s řešením problémů množin bodů. Použití počítače změnilo staré problémy, které se z pohledu studentů řešily zvláštním způsobem, na atraktivní moderní problémy, které studenty zaujaly.

Xiaoling [90] se rovněž přiklání k názoru, že výuka matematiky za použití počítačových technologií ještě více procvičuje logické myšlení studentů. Na základě nové kurikulární reformy se matematika stala jedním z nejdůležitějších předmětů ve vzdělávání. Za účelem zvýšení efektivity výuky matematiky stále více učitelů využívá počítačové technologie k výuce a za použití „obrazu, textu, zvuku“ optimalizuje proces výuky a zvyšuje efekt výuky.

Matematici Buteau, Jarvis, Lavicza [13] se ve svém článku opírají o názory jiných matematiků na zavedení CAS do výuky matematiky a zdůrazňují, že studenti musí porozumět základním matematickým konceptům a teprve poté mohou používat CAS na zdokonalení se v problému. Např. Berry (1999) zastává názor, že „studenti by měli být schopni dělat vše pomocí pera a papíru a poté i pomocí počítačové techniky“. White (1997) zastává názor, že „kreativní aplikace technologií dají i méně zručným studentům nástroje, které je dovedou tam, kam dříve nemohli snadno dojít“. Xie (1994) tvrdí, že „studenti jsou spíše než pasivní příjemci přednášek vyzváni, aby se stali aktivními studenty; studenti se aktivněji zapojují do hledání řešení otázek a problémů a výsledkem je, že jsou více motivovaní a nadšení pro účast na procesu učení“. Lavicza (2008) sdílí názor, že „vznik počítačů a matematického softwaru dále umožnil matematikům zapojit studenty do výzkumných aktivit“. Tyto a podobné názory považuji za zcela zásadní při rozhodování o míře využití CAS při výuce matematiky a dalších disciplín, které matematiku výrazně používají.

Je nutno dodat, že v 21. století jsou počítačové technologie nezbytné pro výuku matematiky i přírodních věd, je však nutné vhodně skloubit jejich využití s pochopením fyzikální a logické podstaty problému. Žák a student by měl v těchto technologiích vidět především prostředek ke zvládnutí dané problematiky pro rozsáhlejší a robustnější úlohy a systémy. Zároveň by si měl ale zachovat kritický přístup k získaným výsledkům a závěrům. Naučit se učit matematiku pomocí CAS je výzva (Zbiek [93])!

Zvláštní pozornosti se využití digitálních technologií těší u úloh zaměřených na množiny bodů dané vlastnosti, které jsou obvykle pro žáky těžko uchopitelné. Této problematice se budeme věnovat v další kapitole.

2.7 Využití digitálních technologií při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti

Množiny bodů dané vlastnosti jsou velmi důležitým pojmem v geometrii, neboť slouží jako nástroj pro řešení různých problémů a umožňují provádět geometrické konstrukce (Segal, Stupel, Oxman [73]).

Dynamická geometrie nabízí nové možnosti pro hledání množin bodů dané vlastnosti. Využití v Cabri příkazů Stopa a Locus umožňuje komplexní rozbor dané křivky. Stopa i Locus jsou příkazy, které nám nakreslí množinu bodů, kdy jeden bod vykresluje množinu, zatímco druhým bodem pohybujeme po nějakém objektu.

Studie (Noss, Cha [57]) se zabývala otázkami: Jaké mají studenti znalosti o geometrickém místě bodů (Locusu)? Jaké jsou nové aspekty, které se objevují, když studenti zkoumají, jakou dostanou množinu, když pohybují bodem? Tato studie se zabývala dvěma úlohami: 1. Najděte množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných bodů. 2. Najděte množinu všech bodů, které mají dvakrát větší vzdálenost od jednoho než od druhého bodu. Studenti znají většinou jen kruh, kolmici a osu úhlu. Ví, že když chtějí najít množinu všech bodů, které jsou stejně vzdálené od dvou daných bodů, tak sestrojí kolmici k úsečce určené těmito body. Pro studenty je důležité, aby věděli, jak převést hledanou množinu do jazyka analytické geometrie. Studenti nejprve používali příkaz Stopa v Cabri a hádali, jakou dostanou množinu bodů. Poté až příkaz Locus.

Software GeoGebra využili při výuce množin bodů dané vlastnosti i (Sy Nam, Nguyen, Tuong, Haas, Lavicza, Kreis [79]) na bázi učení založeného na řešení problému (Problem-Based Learning). Realizovali učební proces směřující k detekci a nápravě chyb při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti. Zjistili, že tento proces vedl ke zvýšení zájmu studentů.

Další studie byla také zaměřena na hledání množin bodů dané vlastnosti (El Aydi, Bendaoud, Sbaa, Berkatou, Benhmida [19]). Experiment byl založen na řešení následujícího problému: V rovině je dán trojúhelník ABC a jeho orthocentrum H. Určete množinu bodů H, když se C pohybuje po dané přímce. Úloha byla zadána 100 budoucím učitelům matematiky a fyziky na dvě hodiny. Úkol vyřešili pouze 2 studenti, ostatní jej nevyřešili a nenapadlo je použít k řešení analytickou geometrii. Poté, co se problém kolektivně vyřešil pomocí softwaru GeoGebra, studenti významně ocenili používání matematického softwaru. Hledání množiny bodů pomocí softwaru GeoGebra činí tuto aktivitu atraktivnější.

Studie (Emul, Gulkilik, Kaplan [20]) zkoumá, jak učitelé matematiky začlenili prostředí dynamické geometrie do svého uvažování při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti. Učitelé matematiky používali software dynamické geometrie k uplatnění svých myšlenek a názorů a aktivně k testování nebo zdůvodňování svých myšlenek.

Na základě prostudované literatury se zdá, že vhodné využití geometrického softwaru vede ke zvýšenému zájmu studentů o danou problematiku pravděpodobně v důsledku toho, že si danou situaci dokáží lépe představit.

3 Metody řešení soustav polynomiálních rovnic

3.1 Příklady řešení soustav polynomiálních rovnic vyšších stupňů elementárními metodami

V matematice na ZŠ se řeší jen jednodušší soustavy lineárních rovnic o dvou, popř. třech neznámých, na SŠ i některé soustavy lineárních a kvadratických rovnic. S řešeními speciálních typů soustav polynomiálních rovnic i vyšších stupňů se setkávají účastníci matematických olympiád ve středoškolských kategoriích A, B, popř. C. Úlohy jsou voleny tak, že soustavy rovnic lze řešit použitím elementárních metod, jež představují speciální případy *eliminačních metod*. Tyto metody jsou založeny na postupné *eliminaci* (tj. postupném vylučování) neznámých, čímž se dospívá k jedné rovnici o jedné neznámé (příp. o více neznámých), ze které lze určit hledané hodnoty této neznámé (popř. těchto neznámých). Při postupné eliminaci neznámých se užívají *důsledkové* a speciálně *ekvivalentní úpravy soustav rovnic*. U těch se od dané soustavy rovnic dospívá k ekvivalentní soustavě rovnic, která má právě tatáž řešení jako původní soustava rovnic.

Nejčastěji užívané ekvivalentní úpravy soustavy rovnic (Polák [62])

- Nahrazení libovolné rovnice soustavy rovnicí, která je s ní ekvivalentní, tj. má totéž řešení. Získává se zejména těmito ekvivalentními úpravami:
  - K oběma stranám rovnice přičteme totéž číslo nebo výraz s neznámými, který je definován v celém oboru, v němž se rovnice řeší.
  - Obě strany rovnice násobíme stejným číslem různým od nuly nebo výrazem s neznámými, který je definován a je nenulový v celém oboru, v němž se rovnice řeší.
- Nahrazení libovolné rovnice soustavy součtem této rovnice a libovolné jiné rovnice soustavy, resp. vhodně zvolené lineární kombinace ostatních rovnic soustavy.

- Dosazení neznámé nebo výrazu s neznámou z jedné rovnice soustavy do jiné její rovnice.

Poznámka. Pokud jsou při řešení soustavy rovnic použity jen ekvivalentní úpravy, není nutné provádět zkoušku dosazením vypočtených kořenů do dané soustavy rovnic. V případě použití důsledkových úprav, které nejsou ekvivalentní (typickým případem je umocnění obou stran rovnice na druhou), zkouška dosazením kořenů do původní soustavy rovnic je nutná. Z didaktických důvodů většinou zkoušku provádíme i při použití ekvivalentních úprav, aby si žáci plně uvědomili, že po dosazení vypočítaných hodnot musíme získat rovnost ze všech rovnic.

Základní elementární metody řešení soustav polynomiálních rovnic o dvou, resp. více neznámých (Švrček [82])

Metoda dosazovací (*substituční*, ve smyslu substituce jako dosazení) - spočívá ve vyjádření některé neznámé z rovnic soustavy a dosazením do ostatních rovnic soustavy.

Metoda sčítací (*adiční*) - je založena na ekvivalentní úpravě soustavy rovnic sečtením jejich vhodných lineárních kombinací.

Metoda substituční (ve smyslu substituce jako záměny neznámých) - spočívá v nahrazení původních neznámých řešené soustavy rovnic vhodně zvolenými novými neznámými. Pro soustavy polynomiálních rovnic vyšších stupňů jsou tyto metody zobecněním metod používaných ve školské matematice pro řešení soustav lineárních rovnic.

Některé další elementární metody řešení soustav polynomiálních rovnic (s názvy podle použitých úprav) (Švrček [82])

Metoda rozkladu na součinový tvar (faktorizace) - spočívá v úpravách mnohočlenů v rovnicích ekvivalentních soustav na součinový tvar.

Metoda doplňování na „úplný čtverec“ - využívá úpravy kvadratických trojčlenů na druhou mocninu lineárních dvojčlenů.

Metoda užití nerovností a odhadů - je založena na použití vhodných algebraických nerovností, např. nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem nebo Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti.

Metoda užití analytické geometrie, popř. grafů funkcí (grafická metoda) - je založena na geometrické interpretaci rovnic řešené soustavy jako souřadnicových vyjádření geometrických útvarů v rovině, resp. v prostoru.

Metoda použití extremálních prvků - vychází ze zkoumání extremálních prvků (maxim, resp. minim) v množině všech řešení dané soustavy polynomiálních rovnic.

Příklad 3.1 *Řešte v oboru reálných čísel soustavy rovnic*

$$a)\begin{aligned} x+y &= 7,\\ xy &= -18, \end{aligned}\quad b)\begin{aligned} x-y &= -8,\\ xy &= 20, \end{aligned}\quad c)\begin{aligned} x^2+y^2 &= \tfrac{3}{4},\\ xy &= -\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Komentář: S řešením soustav polynomiálních rovnic tohoto typu se setkáváme ve středoškolské analytické geometrii při určování průsečíků či bodů dotyku přímek a kuželoseček. V soustavách rovnic a), b) první rovnice jsou rovnicemi přímek a druhé rovnice jsou rovnicemi rovnoosých hyperbol (grafů nepřímých úměrností.) V soustavě rovnic c) první rovnice je rovnicí kružnice, druhá rovnice je rovnicí rovnoosé hyperboly. Prozkoumáme, jakými elementárními metodami lze řešit soustavy rovnic a), b), c).

Řešení:

a) Při použití *metody dosazovací* vyjádříme z 1. rovnice soustavy neznámou $y = 7 - x$ a dosazením do 2. rovnice dostáváme kvadratickou rovnici $x^2 - 7x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-9) = 0$, jež má kořeny $x_1 = -2$, $x_2 = 9$. K nim z 1. rovnice určíme příslušné hodnoty y: $y_1 = 9$, $y_2 = -2$. Daná soustava má tedy dvě řešení $[x_1, x_2] = [-2; 9]$, $[x_2, y_2] = [9; -2]$.

   Z tvaru dané soustavy rovnic c) vyplývá, že ji lze řešit též pomocí analogického tvaru *Viètových vztahů* mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice. V našem případě je to kvadratická rovnice $t^2 - 7t - 18 = 0$ (neboť $p = x_i + y_i = -7$, $q = x_i y_i = 18$) s neznámou t reprezentující obě neznámé x, y. Její řešení jsou $t_1 = -2$, $t_2 = 9$ a příslušná řešení dané soustavy rovnic jsou $[t_1, t_2]$ a $[t_2, t_1]$, tj. $[-2; 9]$, $[9; -2]$. Zkoušku dosazením u obou postupů není třeba provádět, neboť veškeré úpravy jsou v nich ekvivalentní.

b) Soustavu rovnic b) řešíme obdobně jako soustavu a). Přitom ve druhém postupu se vychází z její úpravy na tvar $x + (-y) = -8$, $x \cdot (-y) = -20$. Oběma postupy dospějeme k tomu, že daná soustava rovnic má právě dvě řešení $[x_1, y_1] = [2; 10]$, $[x_2, y_2] = [-10; 2]$.

c) Soustavu rovnic c) by bylo možné též řešit metodou dosazovací, avšak není to vhodné: Jednak by bylo třeba použít důsledkovou úpravu soustavy (umocnění druhé rovnice na druhou: $x^2y^2 = \frac{1}{16}$), jež není ekvivalentní. Hlavně však řešení soustavy rovnic bychom dostali ve tvaru odmocnin z iracionálních výrazů.

   Jeden ze vhodných postupů řešení soustavy rovnic c) vychází z použití vzorce $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ k její úpravě na ekvivalentní soustavu $(x+y)^2 = \frac{1}{4}$, $xy = -\frac{1}{4}$, přičemž 1. rovnice je splněna, právě když $x+y = \pm\frac{1}{2}$. Dostáváme tak dvě ekvivalentní soustavy rovnic

   $x + y = \frac{1}{2},\ xy = -\frac{1}{4} \vee x + y = -\frac{1}{2},\ xy = -\frac{1}{4}.$

   Můžeme je řešit *dosazovací metodou* (popř. užitím *Viètových vzorců*), jež vede na řešení kvadratických rovnic $4x^2 - 2x - 1 = 0 \vee 4x^2 + 2x - 1 = 0$. Jejich kořeny jsou $x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$ a $x_{3,4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$. Příslušné hodnoty y jsou $y_{1,2} = \frac{1}{2} - x_{1,2} = \frac{1}{4} \mp \frac{\sqrt{5}}{4}$ a $y_{3,4} = -\frac{1}{2} - x_{3,4} = -\frac{1}{4} \mp \frac{\sqrt{5}}{4}$.

   Soustava rovnic c) má tedy celkem 4 řešení:

   $[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}]$, $[\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}]$, $[-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}]$,$[-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}]$.

Jednodušší postup řešení soustavy rovnic c) vychází z její ekvivalentní úpravy na soustavu rovnic: $x^2+y^2 = \frac{3}{4}$, $2xy = -\frac{1}{2}$, kterou řešíme *sčítací metodou.* Sečtením obou rovnic dostáváme a jejich odečtením získáváme ekvivalentní soustavu rovnic:

$(x+y)^2 = \frac{1}{4}$, $(x-y)^2 = \frac{5}{4}$, odkud $x+y = \pm\frac{1}{2}$, $x-y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Sečtením a odečtením těchto rovnic dostáváme

$2x = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$,

$2y = \pm\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{4} \mp \frac{\sqrt{5}}{4}$,

odkud plyne, že řešeními dané soustavy rovnic c) jsou dvojice $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$, $[x_4, y_4]$ tytéž, jako při předchozím postupu řešení.

Příklad 3.2 *Řešte v oboru reálných čísel soustavy rovnic*

$$a)\ \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 24, \\ x + y &= 12, \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 16, \\ xy &= 15. \end{aligned}$$

Komentář: V soustavě rovnic a) i b) 1. rovnice jsou středové rovnice rovnoosých hyperbol, 2. rovnice soustavy a) je rovnice přímky a 2. rovnice soustavy b) je rovnicí rovnoosé hyperboly (grafu nepřímé úměrnosti $y = \frac{15}{x}$). Ukážeme, jakými elementárními metodami můžeme tyto soustavy řešit.

Řešení:

a) Užitím vzorce $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ upravíme řešenou soustavu rovnic a) na ekvivalentní tvar $(x+y)(x-y) = 24$, $x+y = 12$. Odtud plyne, že $x-y = 2$. K řešení soustavy získaných dvou rovnic použijeme *sčítací metodu.* Sečtením těchto rovnic dostáváme $2x = 14 \Rightarrow x = 7$ a jejich odečtením: $2y = 10 \Rightarrow y = 5$. Daná soustava rovnic má tedy jediné řešení $[7; 5]$. (Protože byly použity jen ekvivalentní úpravy rovnic, není nutná zkouška dosazením.)

b) Soustavu rovnic b) upravíme umocněním 2. rovnice na druhou (tj. důsledkovou neekvivalentní úpravou) na tvar $x^2 - y^2 = 16$, $x^2y^2 = 225$. Tuto soustavu rovnic řešíme snadno *dosazovací metodou.* Z 2. rovnice vyjádříme $y^2 = \frac{225}{x^2}$ $(x \neq 0)$ a po dosazení do 1. rovnice dostáváme při vynásobení x^2 bikvadratickou rovnici $x^4 - 16x^2 - 225 = 0$, kterou řešíme užitím substituce: $t = x^2$. Získaná kvadratická rovnice $t^2 - 16t - 225 = 0$ má kořeny $t_1 = 25$, $t_2 = -9$, z nichž pouze první splňuje podmínku $x^2 > 0$. Ze zpětných substitucí vypočteme kořeny $x_{1,2} = \pm 5$ a $y_{1,2} = \pm 3$. Protože při řešení soustavy rovnic c) byla použita neekvivalentní důsledková úprava, je nutná zkouška dosazením, jíž zjišťujeme, že z možných 4 řešení pouze dvě $[5; 3]$, $[-5; -3]$ jsou řešení soustavy rovnic c). (Uvažte též, že alternativní řešení pomocí Viètových vztahů pro x^2 a $-y^2$ by bylo zcela obdobné.)

Příklad 3.3 *V oboru reálných čísel řešte soustavy rovnic*

$$a)\; \begin{aligned} x^2 &= 5x + y, \\ y^2 &= x + 5y, \end{aligned} \qquad b)\; \begin{aligned} 2x^2 - 3y &= 23, \\ 3y^2 - 8x &= 59. \end{aligned}$$

Komentář: Soustavu rovnic a) lze snadno řešit kombinací metody sčítací a metody rozkladu. K řešení soustavy rovnic b) použijeme metodu dosazovací.

Řešení:

a) Při použití *sčítací metody* odečteme 2. rovnici soustavy a) od její 1. rovnice, čímž dostáváme rovnici $x^2 - y^2 = 4x - 4y \Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 4(x - y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - y)(x + y - 4) = 0$ v *součinovém tvaru.* S danou soustavou rovnic je tedy ekvivalentní soustava rovnic $(x - y)(x + y - 4) = 0$, $y^2 = x + 5y$.

$x = y \wedge y^2 = x + 5y \Leftrightarrow x^2 = 6x \Leftrightarrow x(x - 6) = 0$, tj. $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 6$, nebo $x + y - 4 = 0 \wedge y^2 = x + 5y \Leftrightarrow y = 4 - x \wedge y^2 = x + 5y \Leftrightarrow (4 - x)^2 =$ $= x + 5(4 - x) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 20 - 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 = 0$

a tato kvadratická rovnice má kořeny $x_{3,4} = 2(1 \pm \sqrt{2})$, jimž přísluší hodnoty $y_{3,4} = 4 - 2(1 \pm \sqrt{2}) = 2(1 \mp \sqrt{2})$. Protože byly použity jen ekvivalentní úpravy dané soustavy rovnice, má tedy 4 řešení: $[x_1, y_1] = [0; 0]$, $[x_2, y_2] = [6; 6]$, $[x_3, y_3] = [2(1 + \sqrt{2}); 2(1 - \sqrt{2})]$, $[x_4, y_4] = [2(1 - \sqrt{2}); 2(1 + \sqrt{2})]$.

b) Při řešení soustavy rovnic b) *dosazovací metodou* vyjádříme z její 1. rovnice neznámou $y = \frac{1}{3}(2x^2 - 23)$ a dosazením do 2. rovnice dostáváme po úpravě rovnici 4. stupně pro neznámou x: $x^4 - 23x^2 - 6x + 88 = 0$. Má dva celé kořeny $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, jimž přísluší hodnoty $y_1 = \frac{1}{3}(2x_1^2 - 23) = -5$, $y_2 = \frac{1}{3}(2x_2^2 - 23) = 3$. Po vydělení polynomu $x^4 - 23x^2 - 6x + 88$ součinem kořenových činitelů $(x - 2)(x + 4) = x^2 + 2x - 8$, dostáváme jeho rozklad $x^4 - 23x^2 - 6x + 88 = (x^2 + 2x - 8)(x^2 - 2x - 11)$. Zbývá tedy řešit kvadratickou rovnici $x^2 - 2x - 11 = 0$, jež má diskriminant $D = 48 \Rightarrow \sqrt{D} = 4\sqrt{3}$. Její kořeny jsou $x_{3,4} = 1 \pm 2\sqrt{3}$ a přísluší jim hodnoty $y_{3,4} = \frac{1}{3}(2x_{3,4}^2 - 23) =$ $= 1 \pm \frac{8}{3}\sqrt{3}$. V postupu řešení byly použity jen ekvivalentní úpravy dané soustavy rovnic, takže není nutné provést zkoušku dosazením získaných kořenů do rovnic soustavy b). Má tedy 4 řešení: $[x_1, y_1] = [2; -5]$, $[x_2, y_2] = [-4; 3]$, $[x_3, y_3] = [1 + 2\sqrt{3}; 1 + \frac{8}{3}\sqrt{3}]$, $[x_4, y_4] = [1 - 2\sqrt{3}; 1 - \frac{8}{3}\sqrt{3}]$.

Příklad 3.4 *V oboru reálných čísel řešte soustavy rovnic*

$$a)\; \begin{aligned} x^3 - y^3 &= 8, \\ x - y &= 2, \end{aligned} \qquad b)\; \begin{aligned} x + yz &= 2, \\ y + zx &= 2, \\ z + xy &= 2. \end{aligned}$$

Komentář: Soustavu rovnic a) lze vyřešit snadno kombinací sčítací metody s metodou rozkladu a dosazovací metodou. Soustavu rovnic b) vyřešíme taktéž kombinací těchto metod.

Řešení:

a) 1. rovnici soustavy a) upravíme užitím vzorce $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ a dosadíme do ní z 2. rovnice $x - y = 2$. Dostáváme tak soustavu rovnic $x^2 + xy + y^2 = 4$, $x - y = 2$, kterou řešíme dosazovací metodou. Dosazením $y = x-2$ nabývá 1. rovnice po úpravě tvaru $x^2-2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$. Má kořeny $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, jimž přísluší hodnoty $y_1 = -2$, $y_2 = 0$. Ekvivalentní daná soustava rovnic b) má tedy 2 řešení: $[x_1, y_1] = [0; -2]$, $[x_2, y_2] = [2; 0]$.

b) Vyjdeme z použití *sčítací metody*: Od 1. rovnice soustavy b) odečteme její 2. rovnici a od 2. rovnice odečteme 3. rovnici, čímž dostáváme: $x-y+(y-x)z = 0$, $y - z \ + x(z - y) = 0$. Tuto soustavu rovnic upravíme na součinové tvary: $(x - y)(1 - z) = 0$, $(y - z)(1 - x) = 0$ a z 1. rovnice dané soustavy plyne kvadratická rovnice pro neznámou: $x^2 + x - 2 = 0$, jež má kořeny $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, přičemž příslušné hodnoty pro y a z jsou $y_1 = z_1 = 1$, $y_2 = z_2 = -2$. Daná ekvivalentní soustava rovnic b) má tedy právě dvě řešení: $[x_1, y_1, z_1] = [1; 1; 1]$, $[x_2, y_2, z_2] = [-2; -2; -2]$.

Soustavy polynomiálních rovnic s parametry

Všechny příklady soustav polynomiálních rovnic, jež jsme dosud řešili, byly soustavy rovnic s určitými reálnými koeficienty. V úlohách matematických olympiád (MO) se však často vyskytují soustavy rovnic, které kromě neznámých obsahují další reálné proměnné, nazývané *parametry*. Podstatnou součástí řešení těchto soustav rovnic je provedení *diskuse řešení* z hlediska možných hodnot těchto parametrů.

Příklad 3.5 *V oboru reálných čísel řešte soustavy rovnic s parametrem* $a \in \mathbb{R}$

$$a)\ \begin{aligned}(7-a)x+ay &= 5,\\ (1+a)x+3y &= 5,\end{aligned}\qquad b)\ \begin{aligned}x^2 &= 2ax+ay,\\ y^2 &= ax+2ay,\end{aligned}\qquad c)\ \begin{aligned}x+y+z &= 1,\\ x+ay+z &= a,\\ x+y+az &= a^2.\end{aligned}$$

Komentář: Soustavu lineárních rovnic a) lze snadno řešit metodou sčítací, resp. metodou dosazovací (z 2. rovnice vyjádříme $y = \frac{1}{3}[5 - (a + 1)x]$ a dosadíme do 1. rovnice) v kombinaci s metodou rozkladu. Soustavu rovnic b) je výhodné řešit kombinací metody sčítací a metody rozkladu. Soustavu rovnic c) vyřešíme kombinací metody dosazovací a metody rozkladu.

Řešení:

1. Při použití *sčítací metody* pro řešení soustavy rovnic a) odečteme od 1. rovnice 2. rovnici a dostaneme tak rovnici $6x-2ax+ay-3y = 0$, kterou upravíme rozkladem její levé strany na součinový tvar $(a-3)(y-2x) = 0$. Danou soustavu rovnic a) můžeme proto řešit *metodou rozkladu* tak, že namísto ní řešíme ekvivalentní soustavu rovnic: $(7-a)x+ay = 5$, $(a-3)(y-2x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a \ = 3 \vee y = 2x$. Pro $a = 3$ nabývá 1. rovnice tvaru $4x + 3y = 5$ a její kořeny jsou všechna $x = t$, $y = \frac{1}{3}(5 - 4t)$, kde $t \in \mathbb{R}$. Pro $a \neq 3$ a $y = 2x$ je

1. rovnice $(a+7)x = 5$, takže pro $a \neq -7$ má jediný kořen $x = \frac{5}{a+7}$, jemuž přísluší $y = 2x = \frac{10}{a+7}$. Pro $a = -7$ rovnice $0x = 5$ nemá řešení.

Protože všechny uvedené úpravy soustavy rovnic a) byly ekvivalentní, na základě *diskuse řešení* dospíváme k výsledkům: Pro $a = 3$ má soustava rovnic a) nekonečně mnoho řešení tvaru $[t, \frac{1}{3}(5-4t)]$, kde $t \in \mathbb{R}$. Pro každé $a \neq 3 \wedge a \ \neq -7$ má právě jedno řešení $[-\frac{5}{a+7}, \frac{10}{a+7}]$. Pro $a = -7$ nemá žádné řešení.

2. *Metodu sčítací* pro řešení soustavy rovnic b) použijeme vhodně tak, že rovnice této soustavy sečteme a dále od 1. rovnice odečteme 2. rovnici. Získáváme tak ekvivalentní soustavu rovnic $x^2+y^2 = 3a(x+y)$, $x^2-y^2 = a\ (x-y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-y)(x+y-a) = 0 \Leftrightarrow x = y \vee x+y = a$. *Metodou rozkladu* dostáváme tedy řešení: Je-li $x = 1$, 1. rovnice po úpravě nabývá tvaru $x^2 - 3ax = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x(x-3a) = 0$, tj. má řešení $x = 0$, a tedy $y = 0$, $x = 3a$, $y = 3a$ a pro každé $a \in \mathbb{R}$. Pro $x \in y \wedge x+y = a \ \Leftrightarrow y = a\ -x$ po dosazení do 1. rovnice dostáváme kvadratickou rovnici pro x v anulovaném tvaru $x^2 - ax - a^2 = 0$. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ má právě dva kořeny: $x_{1,2} = \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, jimž přísluší $x_{1,2} = \frac{a}{2}(1 \mp \sqrt{5})$. Protože všechny použité úpravy dané soustavy rovnic b) byly ekvivalentní, vede nás *diskuse řešení* k výsledkům: Pro každé $a \in \mathbb{R}$ má daná soustava rovnic řešení $[0; 0]$, $[3a; 3a]$, $[\frac{a}{2}(1+\sqrt{5}; 1-\sqrt{5}]$, $[\frac{a}{2}(1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}]$.

3. Při řešení soustavy rovnic c) *dosazovací metodou* vyjádříme ze 3. rovnice soustavy $z = 1-x-y$ a po dosazení do 1. a 2. rovnice soustavy dostáváme pro x, y ekvivalentní soustavu rovnic.

   $x + ay + 1 - x - y = a \ \Leftrightarrow (a-1)y = a\ -1,$

   $x + a\ + a\ - ax - ay = a^2 \Leftrightarrow (1-a)x + (1-a)y = (a-1)a.$

   Pro $a = 1$ tato soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení: $x = t$, $y = u$, kde $t, u \in \mathbb{R}$ a příslušné $z = 1-t-u$. Pro $a \neq 1$ je z 1. rovnice $y = 1$, z 2. rovnice $x = -a-1$, a tedy $z = a\ + 1$. Protože všechny provedené úpravy byly ekvivalentní, *diskuse řešení* vede k závěru: Soustava rovnic c) má pro $a = 1$ nekonečně řešení tvaru $[t, u, 1-t-u]$, $t, u \in \mathbb{R}$ a pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ má právě jedno řešení $[-a-1, 1, a\ + 1]$.

3.2 Analýza úloh matematické olympiády

Analýzu úloh matematické olympiády (MO) souvisejících s problematikou řešení soustav rovnic a množin bodů dané vlastnosti jsem provedla ze dvou hledisek:

- Analýza typů úloh a možnosti jejich řešení.
- Analýza výskytu těchto úloh v MO a úspěšnost jejich řešení.

V obou analýzách jsem se zaměřila na úlohy z matematických olympiád, které se týkaly soustav rovnic.

1. Analýza typu úloh a možnosti jejich řešení

Jak již bylo uvedeno, v matematické olympiádě se objevují i náročnější úlohy na řešení pomocí soustav rovnic nebo přímo složitější soustavy rovnic. V této části uvedeme ukázky takových úloh a jejich řešení.

Příklad 3.6 ***(61. ročník MO, 2011/2012, A-S-1)***

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + 3y &= 4y^3, \\ y + 3x &= 4x^3. \end{aligned}$$

Komentář: Daná soustava rovnic má stejný tvar pro neznámé $x, y \in \mathbb{R}$, takže pokud má řešení $[a, b]$, je jejím řešením též $[b, a]$. Řešit ji lze zřejmě metodou sčítací nebo metodou dosazovací.

Řešení metodou sčítací:

Sečtením první a druhé rovnice a po vydělení čtyřmi dostáváme rovnici

$$x + y = x^3 + y^3$$

a odečtením první rovnice od druhé rovnice a po vydělení dvěma získáváme rovnici

$$x - y = 2(x^3 - y^3).$$

Použitím vzorců $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ a $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ upravíme soustavu rovnic na anulovaný součinový tvar.

Místo původní soustavy rovnic řešíme tak ekvivalentní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2 - 1) &= 0, \\ (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{2}) &= 0. \end{aligned}$$

Uvážíme všechny možnosti jejího splnění:

i) Je-li $x + y = 0 \wedge x - y = 0$, pak $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$. Nalezli jsme tak první řešení dané soustavy rovnic $[0, 0]$.

ii) Pokud $x - y = 0 \wedge x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$, pak z první rovnice vyplývá, že $x = y$ a po dosazení do druhé rovnice dostáváme kvadratickou rovnici $y^2 - 1 = 0$, jež má kořeny $y_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$. Další řešení dané soustavy rovnic tedy jsou $[1, 1]$ a $[-1, -1]$.

iii) Pokud $x + y = 0 \wedge x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{2} = 0$, pak z první rovnice dostáváme, že $x = -y$. Dosadíme do rovnice, získáváme kvadratickou rovnice $y^2 = \frac{1}{2}$, jež má kořeny $y_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_{3,4} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nalezli jsme tak další řešení dané soustavy rovnic $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ a $[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

iv) Poslední případ: $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \wedge x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{2} = 0$.

Pokud tyto dvě rovnice sečteme, dostáváme $2x^2 + 2y^2 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$.

Jestliže je odečteme, dostáváme $-2xy - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow xy = -\frac{1}{4}$.

Získali jsme tak ekvivalentní soustavu rovnic $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ a $xy = -\frac{1}{4}$.

Tuto soustavu rovnic lze řešit různými postupy.

Např. použitím vzorce $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, z něhož po dosazení dostaneme $(x + y)^2 = \frac{3}{4} + 2 \cdot (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$, a tedy $x + y = \frac{1}{2} \vee x + y = -\frac{1}{2}$. Hodnoty x a y určíme užitím Viètových vztahů jako řešení kvadratických rovnic:

$$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{a} \quad t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = 0.$$

Kořeny těchto rovnic jsou $t_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$ a $t_{3,4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$, takže poslední 4 řešení dané soustavy rovnic jsou

$[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}; \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}]$, $[\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}; \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}]$, $[-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}; -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}]$, $[-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}; -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}]$.

Protože použité úpravy rovnic byly vesměs ekvivalentní, není nutné provádět zkoušku dosazením.

Závěr: Celkem má tedy daná soustava rovnic právě devět řešení.

Řešení metodou dosazovací:

Z první rovnice vyjádříme $x = 4y^3 - 3y$ a dosadíme do druhé rovnice, čímž dostáváme rovnici pro neznámou y:

$$y + 3(4y^3 - 3y) = 4(4y^3 - 3y)^3,$$

kterou lze upravit na anulovaný tvar:

$$y(32y^8 - 72y^6 + 54y^4 - 15y^2 + 1) = 0.$$

Prvním kořenem této rovnice je $y_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$.

Další kořeny získáme řešením rovnice

$$32y^8 - 72y^6 + 54y^4 - 15y^2 + 1 = 0,$$

jež má kořeny $y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$ a $y_2 = -1 \Rightarrow x_2 = -1$.

Lze ji tedy upravit na součinový tvar

$$(y^2-1)(32y^6-40y^4+14y^2-1)=0$$

a další kořeny získáme řešením rovnice

$$32y^6-40y^4+14y^2-1=0.$$

Užitím substituce $y^2=t$ ji převedeme na ekvivalentní kubickou rovnici

$$32t^3-40t^2+14t-1=0,$$

jež má racionální kořen $t=\frac{1}{2}\Rightarrow y^2=\frac{1}{2}$, a tedy $2y^2-1=0$.

Řešenou rovnici pro y můžeme tedy vyjádřit v součinovém tvaru

$$(2y^2-1)(16y^4-12y^2+1)=0.$$

Kvadratická rovnice $2y^2-1=0$ má dva kořeny: $y_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x_4=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Poslední (iracionální) kořeny dostaneme řešením rovnice

$$16y^4-12y^2+1=0,$$

kterou lze převést užitím úpravy $16y^4-12y^2+1=(4y^2-1)^2-4y^2=$ $=(4y^2-1)^2-(2y)^2=(4y^2-1+2y)(4y^2-1-2y)$ na součinový tvar

$$(4y^2+2y-1)(4y^2-2y-1)=0.$$

Řešením ekvivalentní soustavy kvadratických rovnic

$$4y^2+2y-1=0 \quad \text{a} \quad 4y^2-2y-1=0$$

získáváme zbývající kořeny y_5 až y_8 a odtud určíme příslušné x_5 až x_8 jako při 1. způsobu řešení.

Závěr: Celkem tedy opět získáme 9 řešení dané soustavy rovnic.

Příklad 3.7 ***(57. ročník MO, 2007/2008, A-S-1)***

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2-y &= z^2,\\ y^2-z &= x^2,\\ z^2-x &= y^2. \end{aligned}$$

Komentář: Všimneme si symetrie dané soustavy rovnic a možnosti vyrušení kvadratických členů v rovnicích při užití sčítací metody řešení. Alternativně lze využít sečtení všech tří rovnic, jímž dostáváme, že $z = -x - y$.

Řešení:

Sečtením 2. a 3. rovnice dané soustavy dostáváme po úpravě rovnici $z^2 - x^2 = x + z$, kterou převedeme na ekvivalentní součinový tvar:

$(x + z)(x - z + 1) = 0.$

Uvážíme dvě možnosti splnění této rovnice:

a) $x + z = 0$, a tedy $z = -x$.

   Dosazením $z = -x$ do 1. rovnice soustavy získáme kořen $y_1 = 0$.

   Dosadíme jej do 2. rovnice soustavy ve tvaru $x = x^2$ a po úpravě dostaneme ekvivalentní rovnici v součinovém tvaru:

   $x(x-1) = 0$, která má kořeny: $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$. Dopočteme: $z_1 = 0$, $z_2 = -1$.

b) $z - x - 1 = 0$, a tedy $z = x + 1$.

   Dosadíme $z = x + 1$ do 1. rovnice soustavy:

$$\begin{aligned} x^2 - y &= (x+1)^2, \\ x^2 - y &= x^2 + 2x + 1, \\ y &= -2x - 1. \end{aligned}$$

   Dosadíme $y = -2x - 1$ a $z = x + 1$ do 3. rovnice soustavy:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 - x &= (-2x-1)^2, \\ x^2 + 2x + 1 - x &= 4x^2 + 4x + 1, \\ -3x^2 - 3x &= 0, \\ 3x(x+1) &= 0. \end{aligned}$$

   Tato rovnice má kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = 0$.

   Dopočteme $y_1 = 1$ a $y_2 = -1$, $z_1 = 0$ a $z_2 = 1$.

Závěr: Daná soustava rovnic má právě čtyři řešení: $[0, 0, 0]$, $[1, 0, -1]$, $[-1, 1, 0]$, $[0, -1, 1]$.

Příklad 3.8 *(53. ročník MO, 2003/2004, A-S-3)*

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 2yz &= 6(y + z - 2), \\ y^2 + 2xz &= 6(z + x - 2), \\ z^2 + 2xy &= 6(x + y - 2). \end{aligned}$$

Komentář: Danou soustavu rovnic vyřešíme užitím sčítací (adiční) metody v kombinaci s metodou rozkladu. Postup řešení lze ještě zjednodušit, jestliže sečtením všech tří rovnic soustavy získáme rovnici $(x + y + z - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + y + z - 6 = 0$.

Řešení:

Odečtením první rovnice soustavy od druhé rovnice dostaneme rovnici

$$y^2 - x^2 + 2xz - 2yz = 6x - 6y,$$

kterou postupně upravíme na součinový tvar:

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 + 2z(x-y) - 6(x-y) &= 0, \\ (x-y)(x+y-2z+6) &= 0. \end{aligned}$$

Obdobně odečtením první rovnice dané soustavy od třetí rovnice dostaneme po úpravě rovnici v součinovém tvaru:

$$(x-z)(x+z-2y+6) = 0.$$

Získáváme tak soustavu rovnic ekvivalentní s původní soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} x^2 + 2yz - 6(y+z-2) &= 0, \\ (x-y)(x+y-2z+6) &= 0, \\ (x-z)(x+z-2y+6) &= 0. \end{aligned}$$

Rozlišíme 4 případy možností rovnosti nule činitelů v posledních dvou rovnicích:

1. $x = y \wedge x = z$, tj. $y = z = x$. Dosazením do 1. rovnice soustavy dostaneme rovnici $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0$, která má dvojnásobný kořen $x_1 = 2$, jemuž příslušejí kořeny $y_1 = 2$, $z_1 = 2$, a tedy $[x_1, y_1, z_1] = [2, 2, 2]$ je řešením dané soustavy rovnic.
2. $x = y \wedge x + z - 2y + 6 = 0$, a tedy $y = x$ a $z = x - 6$. Dosazením do 1. rovnice soustavy nabývá rovnice tvaru $x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 0$. Tato kvadratická rovnice má dvojnásobný reálný kořen $x_2 = 4$, jemuž příslušejí kořeny $y_2 = 4$, $z_2 = -2$, takže $[x_2, y_2, z_2] = [4, 4, -2]$ je řešením dané soustavy rovnic.
3. $x + y - 2z + 6 = 0 \wedge x - z = 0$. Obdobným postupem jako v předchozím případě dostáváme třetí řešení dané soustavy rovnic $[x_3, y_3, z_3] = [4, -2, 4]$.
4. $x + y - 2z + 6 = 0 \wedge x + z - 2y + 6 = 0$. Odečteme-li tuto druhou rovnici od první, dostaneme $3y - 3z = 0$, a tedy $y = z$. Po dosazení $y = x + 6$. Pokud dosadíme do první rovnice řešené soustavy, nabývá rovnice tvaru $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0$. Tato kvadratická rovnice má dvojnásobný kořen $x_4 = -2$, jemuž příslušejí $y_4 = z_4 = 4$, takže daná soustava rovnic má další řešení $[x_4, y_4, z_4] = [-2, 4, 4]$.

Závěr: Daná soustava rovnic má v oboru reálných čísel právě 4 řešení:

$$[2, 2, 2], [4, 4, -2], [4, -2, 4], [-2, 4, 4].$$

Příklad 3.9 *(54. ročník MO, 2004/2005, A-II-2)*

V oboru celých čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x(y+z+1) &= y^2 + z^2 - 5, \\ y(z+x+1) &= z^2 + x^2 - 5, \\ z(x+y+1) &= x^2 + y^2 - 5. \end{aligned}$$

Komentář: Zadanou soustavu rovnic lze opět řešit kombinací metody sčítací a metody rozkladu polynomů, přičemž ve třech rozkladech se vyskytuje společný činitel.

Řešení:

Od 1. rovnice dané soustavy odečteme 2. rovnici:

$$xz - yz + x - y = y^2 - x^2$$

a získanou rovnici upravíme na součinový tvar:

$$(x - y)(x + y + z + 1) = 0.$$

Obdobně odečtením 3. rovnice od 2. rovnice dané soustavy a 3. rovnice od 1. rovnice po analogických úpravách dostaneme další dvě rovnice v součinových tvarech:

$$\begin{aligned} (y - z)(x + y + z + 1) &= 0, \\ (x - z)(x + y + z + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Ve všech 3 rovnicích této ekvivalentní soustavy rovnic se vyskytuje společný činitel $x + y + z + 1$.

Proto při jejím řešení rozlišíme, zda $x + y + z + 1 = 0$ a nebo $x + y + z + 1 \neq 0$:

1. Nechť $x + y + z + 1 = 0$, takže je zároveň

   $$\begin{aligned} y + z + 1 &= -x, \\ x + z + 1 &= -y, \\ x + y + 1 &= -z, \end{aligned}$$

   a tedy danou soustavu rovnic lze vyjádřit ve tvaru:

   $$\begin{array}{rcl} x(-x) & = & y^2 + z^2 - 5, \\ y(-y) & = & z^2 + x^2 - 5, \\ z(-z) & = & x^2 + y^2 - 5, \\ \hline -x^2 & = & y^2 + z^2 - 5, \\ -y^2 & = & z^2 + x^2 - 5, \\ -z^2 & = & x^2 + y^2 - 5, \\ \hline \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 & = & 5. \end{array}$$

   Daná soustava rovnic je tak pro $x + y + z + 1 = 0$ ekvivalentní s jedinou rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, která vzhledem k tomu, že druhé mocniny reálných čísel jsou nezáporné, má v $\mathbb{R}$ pouze taková řešení $[x_i, y_i, z_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, pro něž trojice $[x_i^2, y_i^2, z_i^2]$ je až na pořadí prvků $[4, 1, 0]$. Proto $[x_i, y_i, z_i]$ jsou permutace některé trojice $[\pm 2, \pm 1, 0]$. Znaménka u x_i, y_i, z_i určíme z podmínky $x + y + z + 1 = 0$. Této podmínce vyhovují jen trojice $[-2, 1, 0]$ a libovolné její permutace.

   Dostaneme právě 6 řešení dané soustavy rovnic:

   $[-2, 1, 0], [-2, 0, 1], [1, -2, 0], [1, 0, -2], [0, 1, -2], [0, -2, 1]$.

2. Nechť $x + y + z + 1 \neq 0$.

   Pak musí být $x - y = 0 \wedge y - z = 0 \wedge x - z = 0$, tj. $x = y = z$.

   Rovnice dané soustavy tedy nabývají všechny stejného tvaru:

$$
\begin{aligned}
x(x+x+1) &= x^2+x^2-5,\\
\text{čili}\quad 2x^2+x &= 2x^2-5,
\end{aligned}
$$

tj. mají jediné řešení $x=y=z\ =-5$, $[x_7,y_7,z_7]=[-5,-5,-5]$.

Závěr: Daná soustava rovnic má právě 7 řešení:

$$[-2,1,0],[-2,0,1],[1,-2,0],[1,0,-2],[0,1,-2],[0,-2,1],[-5,-5,-5].$$

Příklad 3.10 ***(69. ročník MO, 2019/2020, A-III-3)***

Uvažujme soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x^2-3y+p &= z,\\
y^2-3z+p &= x,\\
z^2-3x+p &= y
\end{aligned}
$$

s reálným parametrem p.

a) Pro $p \geqq 4$ řešte uvažovanou soustavu v oboru reálných čísel.

b) Dokažte, že pro $p \in \langle 1,4)$ každé reálné řešení soustavy splňuje rovnosti $x=y=z$

Komentář: Řešení první části příkladu a) lze provést pomocí rovnice získané sečtením všech rovnic dané soustavy. Při řešení druhé části příkladu b) vycházíme z inspirace vzorovým (autorským) řešením. Alternativně by bylo možné využít symetričností dané soustavy rovnic a řešit ji b) sčítací metodou v kombinaci s metodou rozkladu polynomů.

Řešení:

a) Sečtením všech tří rovnic dostaneme: $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z+3p=0$.

Doplníme na úplné čtverec a upravíme:

$$
\begin{aligned}
(x-2)^2-4+(y-2)^2-4+(z-2)^2-4+3p &= 0,\\
(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2+3p-12 &= 0.
\end{aligned}
$$

Diskuse řešení:

$p>4$ je levá strana kladná, a tedy rovnost nule nastat nemůže.

Pro $p=4$ je $x=y=z\ =2$, a tedy $[2,2,2]$ je řešením původní soustavy.

Závěr: Daná soustava rovnic má pro $p=4$ jediné řešení $[x_1,y_1,z_1]=[2,2,2]$ a pro $p>4$ nemá žádné řešení.

b) Pro $p \in \langle 1, 4)$ nejdříve ukážeme, že x, y, z jsou nezáporná reálná čísla.

Předpokládejme, že $y < 0$.

Pak z 1. a 3. rovnice dané soustavy rovnic plyne, že platí $x^2 - z + p < 0$ a $z^2 - 3x + p < 0$.

Protože je $p > 0$, dostáváme odtud, že $z > x^2 + p > 0$ a $3x > z^2 + p > 0$, a tedy je $x > 0$ a $z > 0$.

Zároveň platí nerovnosti:

$$\begin{aligned} x^2 - z + p < 0 \leqq (x - \sqrt{p})^2 &= x^2 - 2x\sqrt{p} + p, \\ z^2 - 3x + p < 0 \leqq (z - \sqrt{p})^2 &= z^2 - 2z\sqrt{p} - p. \end{aligned}$$

Odtud porovnáním levých a pravých stran nerovností dostáváme vzhledem k tomu, že je $p \geqq 1$:

$$\begin{aligned} &z > 2x\sqrt{p} \geqq 2x, \\ &x > \tfrac{2}{3}z\sqrt{p} \geqq \tfrac{2}{3}z. \end{aligned}$$

Tyto nerovnosti však neplatí pro žádná kladná x, z. Dospěli jsme tak ke sporu, čili nemůže platit předpoklad $y < 0$, tj. je $y \geqq 0$.

Předpokládejme dále, že $x \geqq y \geqq 0$ a $x \geqq z \geqq 0$.

Pak platí: $x^2 \geqq z^2$, $-3y \geqq -3x$, a proto $z = x^2 - 3y + p \geqq z^2 - 3x + p = y$,

tudíž je $x \geqq z \geqq y \geqq 0$.

To však znamená, že je $-3y \geqq -3z$ a zároveň $x^2 \geqq y^2$,

takže $z = x^2 - 3y + p \geqq y^2 - 3z + p = x$.

Proto je $z \geqq x$, a tedy vzhledem k předpokladu, že $x \geqq z$, musí být $x = z$. Po dosazení do dané soustavy rovnic a odečtení třetí rovnice od první dostáváme:

$$\begin{aligned} x^2 - 3y + p - x^2 + 3x - p &= z - y, \\ 3(x - y) &= x - y, \text{čili } 2(x - y) = 0, \text{takže } x = y. \end{aligned}$$

Celkem $x = y = z$.

Závěr: Pro každé $p \in \langle 1, 4)$ je daná soustava rovnic ekvivalentní s kvadratickou rovnicí $a^2 - 4a + p = 0$, jež má kořeny $a_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - p}$, takže řešení dané soustavy jsou $[a_1, a_1, a_1]$ a $[a_2, a_2, a_2]$.

U následujících příkladů jsem zjistila, že byli studenti velmi málo úspěšní.

Příklad 3.11 *(60. ročník MO, 2010/2011, A-III-3)*

Předpokládejme, že reálná čísla x, y, z vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 54. \end{aligned}$$

Dokažte, že pak platí následující tvrzení:

a) Každé z čísel xy, yz, zx je alespoň 9, avšak nejvýše 25.

b) Některé z čísel x, y, z je nejvýše 3 a jiné z nich je alespoň 5.

Řešení:

a) Z první rovnice vyjádříme: $x + y = 12 - z$, tedy $(x + y)^2 = (12 - z)^2$.

Druhou rovnici soustavy upravíme: $x^2 + y^2 = 54 - z^2$

Získáme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &= (12 - z)^2 \\ x^2 + y^2 &= 54 - z^2 \end{aligned}$$

Po odečtení:

$$\begin{aligned} 2xy &= (12 - z)^2 - (54 - z^2) \\ 2xy &= 144 - 24z + z^2 - 54 + z^2 \\ 2xy &= 2z^2 - 24z + 90 \\ xy &= z^2 - 12z + 45 \\ xy &= (z - 6)^2 + 9 \\ xy &= (z - 6)^2 + 9 \geq 9 \end{aligned}$$

Dále platí:

$0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 54 - z^2 - 2\left((z - 6)^2 + 9\right) =$

$= 54 - z^2 - 2(z^2 - 12z + 45) = -3z^2 + 24z - 36 = -3\left((z - 4)^2 - 4\right)$

Musí být $(z - 4)^2 \leq 4$, z je v intervalu $2 \leq z \leq 6$

Proto $(z - 6)^2 \leq (2 - 6)^2 = 16 \quad (z - 6)^2 + 9 \leq 25$

Platí tedy $9 \leq xy \leq 25$

b) Dostaneme, že $xy + yz + xz = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2} = \frac{12^2 - 54}{2} = 45$

$(x - 3)(y - 3) + (y - 3)(z - 3) + (x - 3)(z - 3) =$

$= xy - 3x - 3y + 9 + yz - 3y - 3z + 9 + xz - 3x - 3z + 9 = xy + yz + xz - 6x -$
$-6y - 6z + 27 = xy + yz + xz - 6(x + y + z) + 27 = xy + yz + xz - 6 \cdot 12 + 27 = 0$

Čísla $(x - 3)$, $(y - 3)$ a $(z - 3)$ nejsou všechna kladná čísla $\Rightarrow$ jedno z čísel musí být nejvýše 3.

Upravíme ještě vztah $(x - 5)(y - 5) + (y - 5)(z - 5) + (x - 5)(z - 5) =$

$= xy + yz + xz - 10(x + y + z) + 75 = 0.$

Všechna z čísel $(x - 5)$, $(y - 5)$ a $(z - 5)$ nemohou být záporná, alespoň 1 z čísel x, y, z tedy musí být nejméně 5.

Příklad 3.12 ***(66. ročník MO, 2016/2017, A-II-3)***

V závislosti na reálném parametru k určete počet řešení soustavy rovnic v oboru reálných čísel:

$$\begin{array}{rcl} x^2+kxy+y^2 &=& z, \\ y^2+kyz+z^2 &=& x, \\ z^2+kzx+x^2 &=& y. \end{array}$$

Řešení:

Nejprve pro: $x=y=z$

$$\begin{array}{rcl} x^2+kx^2+x^2 &=& x \\ \hline 2x^2+kx^2 &=& x \\ (k+2)x^2 &=& x \end{array}$$

$(x,y,z)=(0,0,0)$ pro libovolné k

Pro $k \neq -2$

$\left(\frac{1}{k+z}, \frac{1}{k+z}, \frac{1}{k+z}\right)$

$$\begin{array}{rcl} \hline (1) x^2+kxy+y^2 &=& z \\ (2) y^2+kyz+z^2 &=& x \\ (3) z^2+kzx+x^2 &=& y \\ \hline \end{array}$$

Odečteme $(1)-(2)$

$x^2+kxy+y^2-y^2-kyz-z^2=z\ -x$

$(x^2-z^2)+ky(x-z)=z\ -x$

$(x+z)(x-z)+ky(x-z)+(x-z)=0$

$(x-z)(x+z\ +ky+1)=0$

Podobně odečtením 3. rovnice od 2. dostaneme $(y-x)(y+x+kz+1)=0$

V případě $x \neq y \neq z\ \neq x$ se 1. a 2. rovnice zredukují na

$$\begin{array}{rcl} x+z\ +ky+1 &=& 0 \\ y+x+kz+1 &=& 0 \end{array}$$

Odečtením těchto rovnic dostaneme $(y-z)(k-1)=0$,

takže musí být $k=1$ a $x+y+z\ =-1$.

Pro $k=1$ vychází, že $z=x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4} \geq 0$

a podobně $x \geq 0$, $y \geq 0$, takže $x+y+z\ \geq 0$.

Soustava je cyklická, tudíž předpokládejme $x \neq y = z$.

Rovnice (1) bude $x+y+ky+1=0$, tedy $x=-(k+1)y-1$, původní soustava se redukuje na $(k+2)y^2+(k+1)y+1=0$.

Pro $k=-2$ dostaneme lineární rovnici, která má řešení $(0,1,1)$.

Pro $k \neq -2$ musíme vyřešit kvadratickou rovnici: $D = (k+1)^2 - 4(k+2) = k^2 - 2k - 7 \geq 0$.

$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4\cdot 7}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$

Pro $k = 1 \pm 2\sqrt{2}$ dostaneme $y_0 = -\frac{k+1}{2(k+2)} = 1 \mp \sqrt{2}$, $x_0 = \frac{(k+1)^2}{2(k+2)} - 1 = 1$.

Řešení soustavy rovnic jsou 3 permutace trojice (x_0, y_0, y_0).

Pro $k \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1 - 2\sqrt{2}) \cup (1 + 2\sqrt{2}, +\infty)$ má kvadratická rovnice 2 řešení $y_{1,2} = \frac{-k-1 \pm \sqrt{k^2-2k-7}}{2(k+2)}$, $x_{1,2} = -(k+1)y_{1,2} - 1$.

Řešením jsou tři permutace (x_1, y_1, y_1) a (x_2, y_2, y_2).

interval pro k	(0,0,0)	$\left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}\right)$	rovnice(3)	celkově
$(-\infty, -2)$	1	1	6	8
-2	1	1	3	4
$(-2, 1-2\sqrt{2})$	1	1	6	8
$1-2\sqrt{2}$	1	1	3	5
$(1-2\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$	1	1	0	2
$1+2\sqrt{2}$	1	1	3	5
$(1+2\sqrt{2}, \infty)$	1	1	6	8

Dále ukáži řešení úlohy na množiny bodů dané vlastnosti. Při řešení této úlohy byli studenti velmi málo úspěšní.

Příklad 3.13 ***(63. ročník MO, 2013/2014, A-III-2)***

V rovině, v níž je dána úsečka AB, uvažujme trojúhelníky XYZ takové, že X je vnitřním bodem úsečky AB, trojúhelníky XBY a XZA jsou podobné ($\triangle XBY \sim \triangle XZA$) a body A, B, Y, Z leží v tomto pořadí na kružnici. Najděte množinu středů všech úseček YZ.

Řešení:

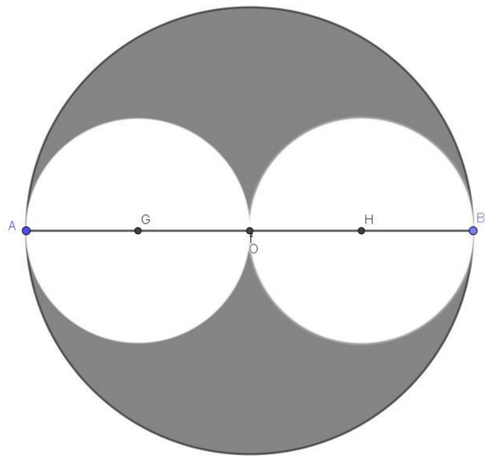
Body YZ leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AB. Úhly XAZ a BYX jsou shodné.

Sestrojme obraz Y' bodu Y v souměrnosti podle přímky AB. Bude platit, že $|BAZ| = |\sphericalangle BY'Z|$.

Bod Y' bude ležet také na kružnici k jako body A, B, Y, Z. Přímka AB prochází středem O kružnice k, takže AB je průměr této kružnice.

Střed M tětivy YZ leží uvnitř kružnice k. Úhly OMZ a OMY jsou pravé úhly, proto úhly AMO a BMO musí být ostré. M tedy leží v průniku vnějších oblastí Thaletových kružnic nad průměry AO a BO.

Dá se ukázat, že tyto dvě podmínky na bod M už vymezují množinu, kterou hledáme. Řešením je tedy vnitřek kruhu s průměrem AB a středem O bez kruhů s průměry AO a BO.



Obrázek 1: **Řešení příkladu (63. ročník MO, 2013/2014, A-III-2)**

2. Analýza výskytu těchto úloh v MO a úspěšnost jejich řešení

Pro analýzu úloh na úrovni ústředního kola jsem zvolila posledních 20 let, tedy ročníky 53/2004 až 72/2023. Úlohy na řešení soustav rovnic o více proměnných se vyskytovaly pouze v některých ročnících (viz tabulka 3). Ještě nižší výskyt jsem zaznamenala na úrovni krajského kola (viz tabulka 4). Všimneme-li si úspěšnosti řešení v obou uvedených tabulkách, vidíme, že v ústředním kole se pohybuje procento úspěšnosti v rozmezí do jedné třetiny. V krajském kole jsou rozdíly v úspěšnosti řešení mezi jednotlivými úlohami mnohem výraznější. Příklad 3 (roč. 66/2017) nevyřešil žádný účastník, naproti tomu příklad 2 (roč. 71/2022) vyřešil správně každý druhý žák. Úlohy na množiny bodů se ve zkoumaném období vyskytovaly ještě méně, objevují se pouze ve dvou ročnících na celostátní úrovni. Řešitelé v nich byli ještě méně úspěšní než u předchozího typu úloh (úspěšnost pouze 2 % - roč. 59/2010 a 11,11 % - roč. 63/2014). Provedená analýza ukazuje, že řešení zkoumaných typů úloh je náročné i pro talentované žáky a bylo by proto vhodné zaměřit se na ně v matematických seminářích a dalších formách práce s talentovanými žáky a potenciálními řešiteli matematické olympiády. Zde by učitel mohl žáky seznámit i s dalšími metodami řešení těchto úloh.

Matematická olympiáda - kategorie A ústřední kolo					
	Ročník/Rok 60/2011	**Ročník/Rok 61/2012**	**Ročník/Rok 64/2015**	**Ročník/Rok 68/2019**	**Ročník/Rok 69/2020**
Počet bodů	Příklad 3	Příklad 6	Příklad 4	Příklad 1	Příklad 3
0	14	6	14	6	15
1	14	10	5	4	1
2	1	2	8	6	15
3	3	0	4	2	5
4	0	3	3	2	1
5	3	1	0	5	1
6	1	8	5	6	1
7	4	15	6	10	8
Celkem žáků	40	45	45	41	47
% žáků, kteří vyřešili příklad na max. počet bodů	**10,00%**	**33,33%**	**13,33%**	**24,39%**	**17,02%**

Tabulka 3:
Analýza úloh MO (Kategorie A, ústřední kolo), roč. 58/2009 – 72/2023

Matematická olympiáda - kategorie A Plzeňský kraj				
	Ročník/Rok 66/2017	**Ročník/Rok 69/2020**	**Ročník/Rok 71/2022**	**Ročník/Rok 72/2023**
Počet bodů	Příklad 3	Příklad 1	Příklad 2	Příklad 2
0	14	8	3	8
1	1	6	1	4
2	1	0	0	3
3	1	3	1	1
4	0	2	0	0
5	0	1	1	2
6	0	5	6	1
Celkem žáků	17	25	12	19
% žáků, kteří vyřešili příklad na max. počet bodů	**0,00%**	**20,00%**	**50,00%**	**5,26%**

Tabulka 4:
Analýza úloh MO (Kategorie A, Plzeňský kraj), roč. 62/2013 – 72/2023

Matematická olympiáda - kategorie A ústřední kolo		
	Ročník/Rok 59/2010	**Ročník/Rok 63/2014**
Počet bodů	Příklad 4	Příklad 2
0	13	25
1	3	2
2	9	2
3	6	6
4	12	3
5	4	0
6	2	2
7	1	5
Celkem žáků	50	45
% žáků, kteří vyřešili příklad na max. počet bodů	**2,00%**	**11,11%**

Tabulka 5: **Analýza řešení úloh na množiny bodů**

3.3 Vlastní zkušenosti s CAS ve výuce matematiky

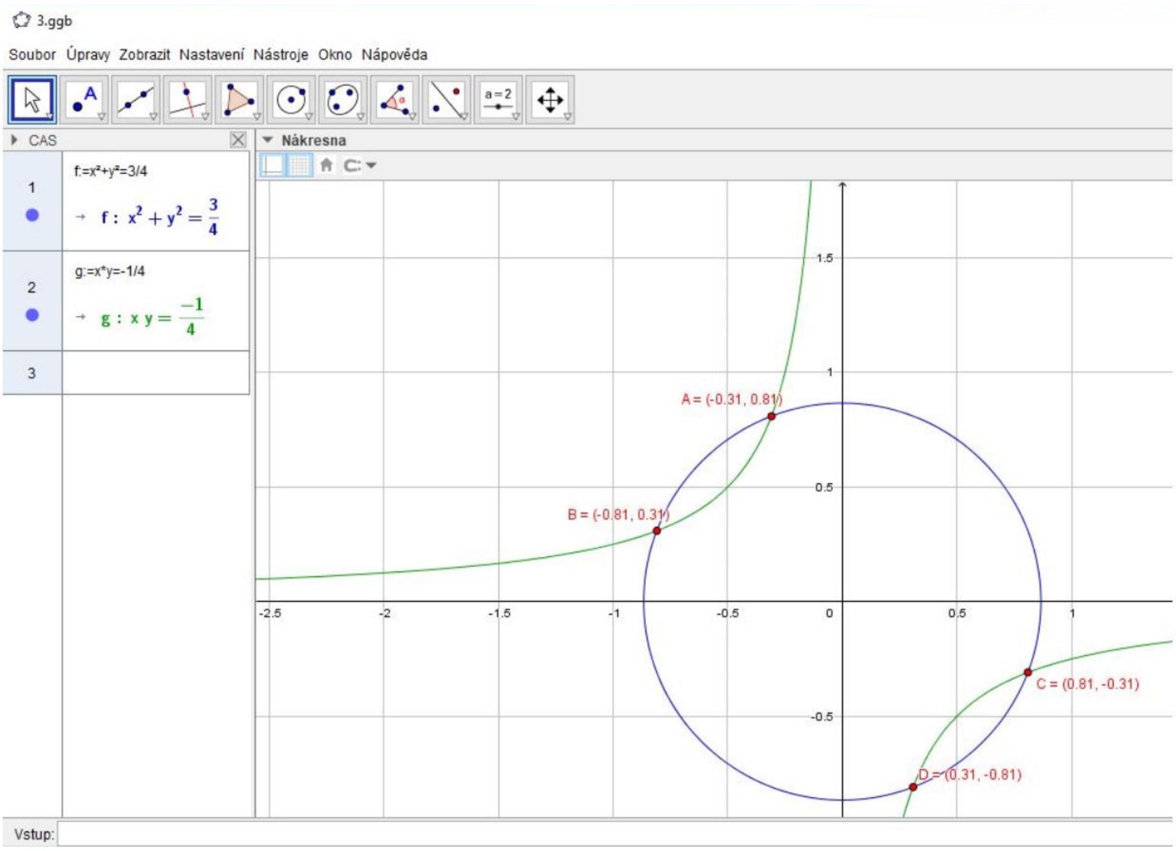
V této kapitole uvedu některé své zkušenosti s využitím digitálních technologií při distanční výuce v období pandemie Covid-19 na Střední průmyslové škole stavební v Plzni. Online výuka probíhala více než rok a bylo tedy mnoho příležitostí seznámit žáky s matematickými programy. Komunikovala jsem s žáky výhradně přes internet. Nejčastěji jsem používala program GeoGebra a Wolfram Alpha. V obou těchto programech jsem s žáky řešila příklady, ověřovala výpočty nebo jsem jim ukazovala grafy - lépe si představili řešení soustav lineárních i polynomiálních rovnic. Probírala jsem s žáky různá témata, kde bylo možné matematický software využít. Pro žáky bylo užití digitálních technologií zajímavé a přínosné, což usuzuji právě na základě vyjádření žáků. Některé matematické programy mnozí žáci vůbec neznali a setkali se s nimi úplně poprvé - např. Wolfram Alpha. V průběhu distanční výuky klesala motivace žáků k učení a právě používání moderních technologií ve výuce zvyšovalo její efektivnost. Většina žáků dosud znala pouze internetovou aplikaci Photomath (u níž se na mobilním telefonu vyfotografuje příklad a žáci ihned dostanou řešení). Toto je ovšem zcela pasivní a didakticky neúčinné využití digitálních technologií. Jako mnohem výukově efektivnější se ukázalo systematické používání dostupného softwaru GeoGebra a Wolfram Alpha (viz např. následující ukázky řešení příkladů z kap. 3.1).

Ukázky řešení příkladů užitím matematických programů

Pomocí programu GeoGebra:

Příklad 3.14 ***(Př. 3. 1 c)***

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \tfrac{3}{4}, \\ xy &= -\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$



Obrázek 2: **Řešení příkladu 3.14 pomocí programu GeoGebra**

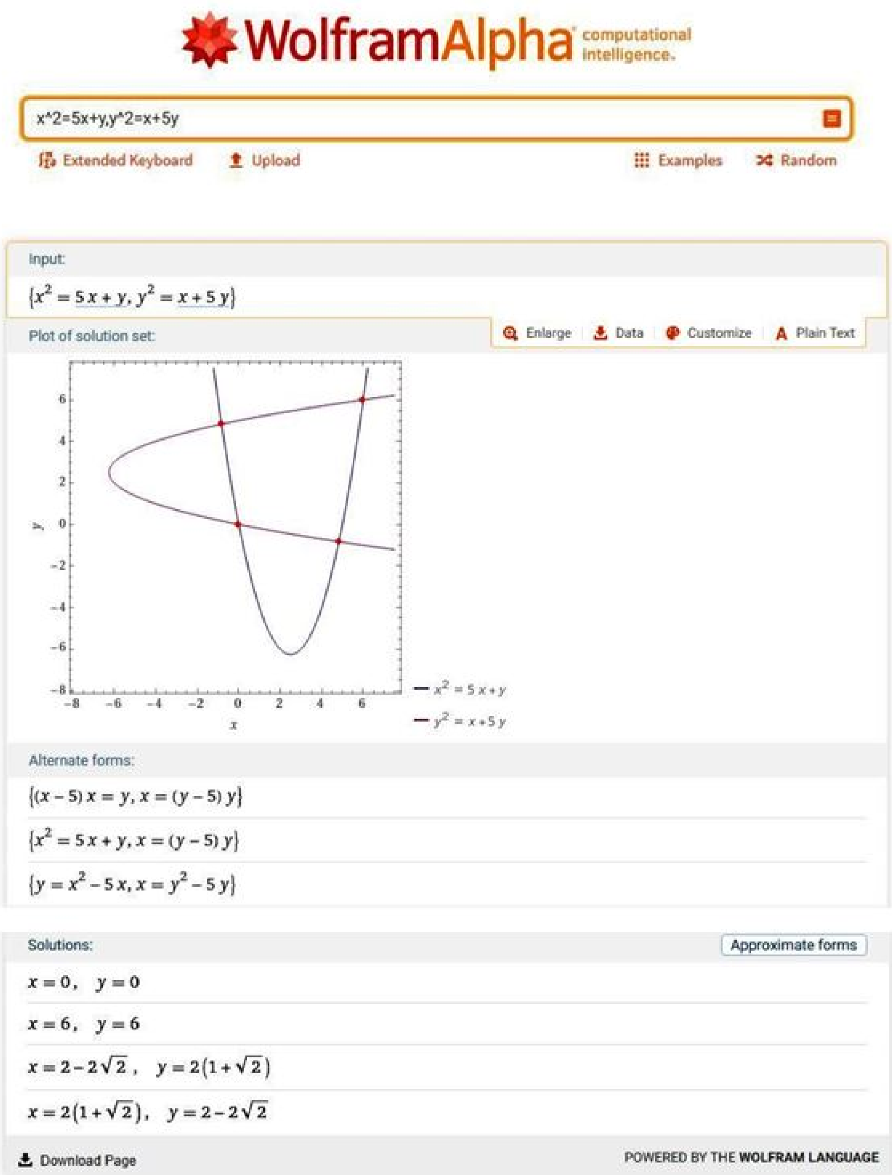
Komentář: Žáci vidí zobrazené křivky (hyperbola a kružnice), jejich průsečíky jsou tedy řešením soustavy rovnic. Soustava rovnic má 4 řešení: $[-0,31; 0,81]$, $[-0,81; 0,31]$, $[0,81; -0,31]$ a $[0,31; -0,81]$.

Řešení soustav rovnic pomocí programu Wolfram Alpha:

Program nám zobrazí rovnice a žáci též vidí výsledek soustavy rovnic - průsečík křivek. Dokonce program určí i řešení. Žák tedy nemusí umět výsledek „přečíst“ z grafu, nemusí ani rozumět tomu, kde se vzal.

Příklad 3.15 ***(Př. 3. 3 a)***

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 5x + y,\\
y^2 &= x + 5y.
\end{aligned}
$$



Obrázek 3: **Řešení příkladu 3.15 pomocí programu Wolfram Alpha**

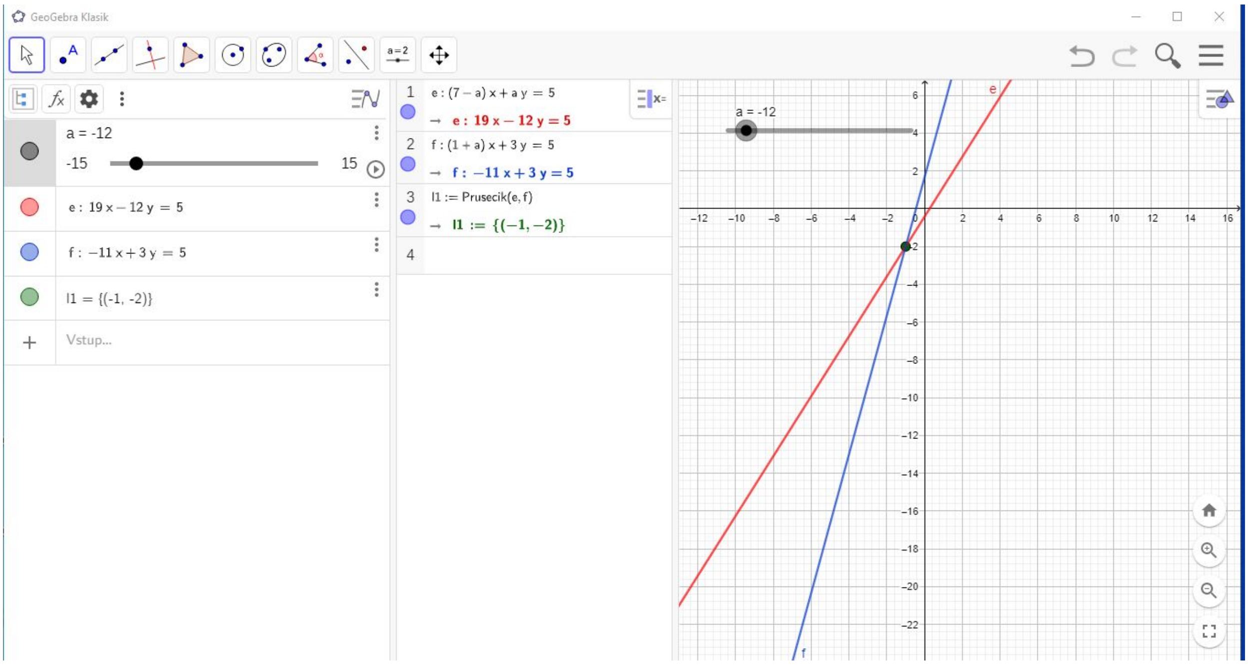
Řešení soustav polynomiálních rovnic s parametrem

Při řešení soustavy polynomiálních rovnic s parametry v programu GeoGebra je názorně vidět, jak se řešení mění v závislosti na hodnotách parametru.

Příklad 3.16 ***(Př. 3. 5 a)***

$$\begin{aligned}(7-a)x+ay &= 5,\\ (1+a)x+3y &= 5.\end{aligned}$$

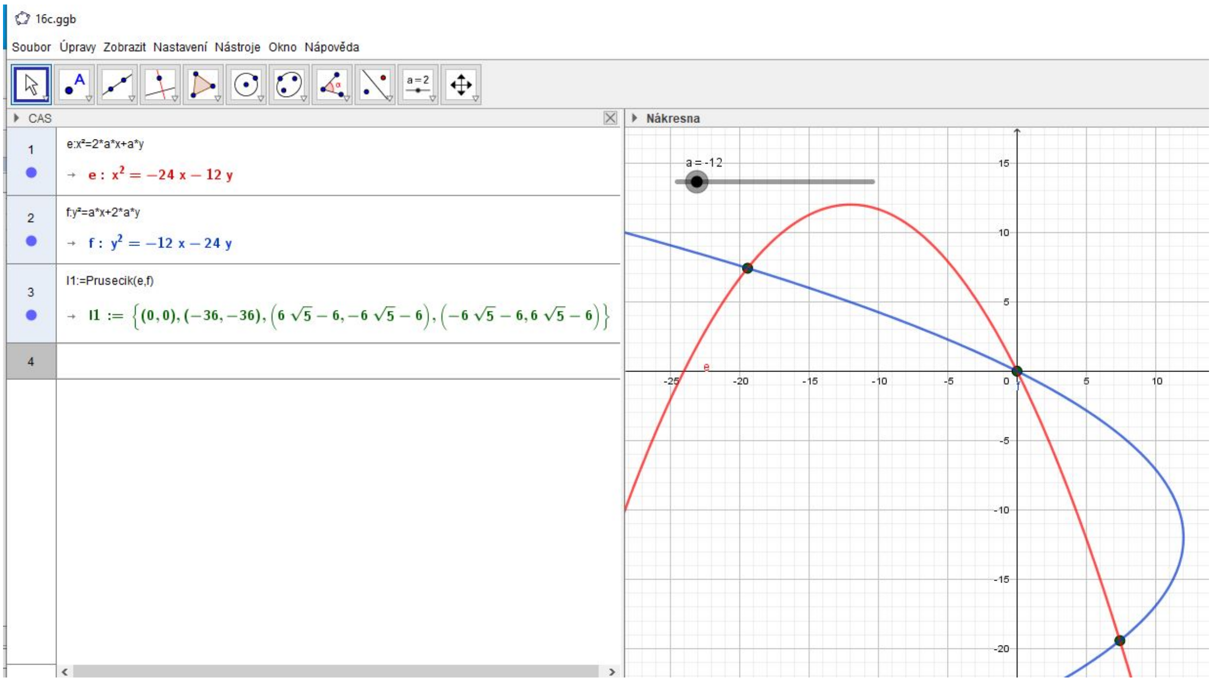
Pro žáky je řešení soustav rovnic s parametrem obtížné. V soustavě rovnic je z jejich pohledu mnoho neznámých. V programu GeoGebra můžeme vidět, jaká jsou řešení pro různá a. Pohybujeme posuvníkem a vidíme různá řešení. Z obrázku 4 je vidět, že soustava rovnic má jedno řešení pro $a = -12$.



Obrázek 4: **Řešení příkladu 3.16 pomocí programu GeoGebra pro** $a = -12$

Příklad 3.17 ***(Př. 3. 5 b)***

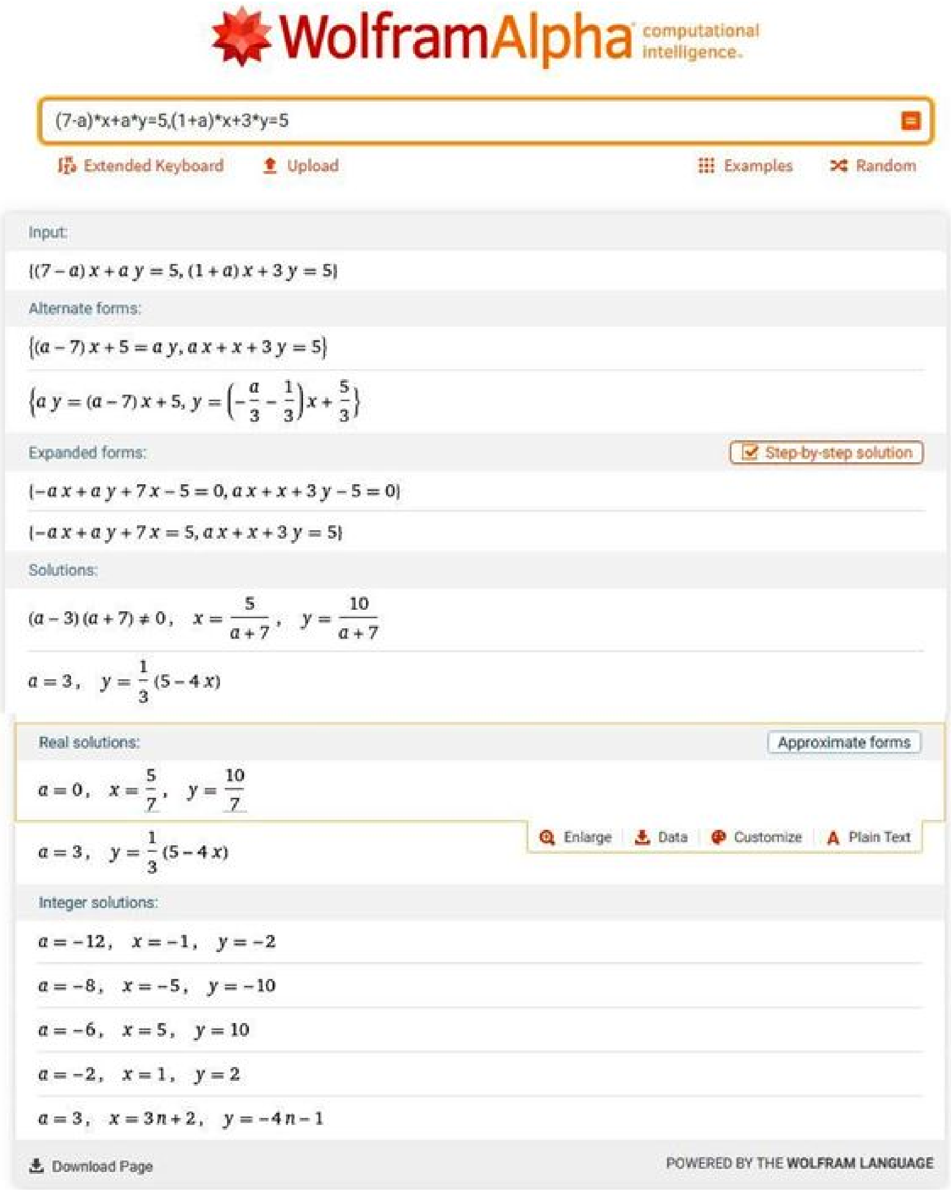
$$\begin{aligned} x^2 &= 2ax + ay, \\ y^2 &= ax + 2ay. \end{aligned}$$



Obrázek 5: **Řešení příkladu 3.17 pomocí programu GeoGebra pro** $a = -12$

Příklad 3.18 ***(Př. 3. 5 a)***

$$\begin{aligned}(7-a)x+ay &= 5,\\ (1+a)x+3y &= 5.\end{aligned}$$



Obrázek 6: **Řešení příkladu 3.18 pomocí programu Wolfram Alpha**

Diskuse řešení: Chybí, že pro $a = -7$ daná soustava rovnic nemá řešení.

Závěr: Na uvedeném příkladu můžeme vhodně demonstrovat, že se nemůžeme spokojit jen s tím, jaké řešení nám dal počítač.

Jsem přesvědčená, že je prospěšné a efektivní přiměřené zapojení matematických programů do výuky matematiky žáků na 2. stupni ZŠ a na SŠ. S jejich užitím je výuka jistě zajímavější a může žáky motivovat k většímu zájmu o matematiku. Z uvedených ukázek vyplývá, že použití softwarových balíčků může zefektivnit výuku a svojí názorností umožnit žákům pochopit danou problematiku v některém učivu, například právě u soustavy rovnic s parametrem.

4 Využití eliminace při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti

Eliminace v GeoGebře je založena na použití moderních metod řešení – Gröbnerových bází. Cílem je získat soustavu rovnic, která bude ekvivalentní s danou soustavou, ale bude se snáze řešit. Princip je podobný jako u Gaussovy eliminační metody – úprava na trojúhelníkový tvar.

S tématem množiny bodů dané vlastnosti se setkávají již žáci základních škol. Toto téma patří mezi obtížná témata ve školské matematice na všech stupních. Při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti na SŠ je výhodné použít počítač - např. program GeoGebra. Pro studenty je nejtěžší sestavit rovnice, pak soustavu rovnic upravit, eliminovat určité neznámé a poznat, o jakou množinu se jedná. S vyřešením soustavy rovnic a s určením, o jakou křivku se jedná, může pomoci např. program GeoGebra. Studenti mohou s jeho pomocí experimentovat a seznamovat se s novými křivkami. Mohou se však při řešení setkat s problémy, že získají nulový eliminační ideál nebo navíc nějakou množinu bodů jako např. přímku nebo kružnici.

Čím je učivo obsahově složitější, tím je větší pravděpodobnost, že by žákům pomohl při učení obrazový materiál (Mareš [53]). V matematice má většina obrázků význam:

- reprezentující - tuto funkci mají takové obrázky, které pomáhají u žáků a studentů vytvářet obrazové představy a konkretizovat a souhrnně zobrazovat vztahy a pojmy (grafy, obrázky těles nebo geometrických obrazců);
- organizující - tato funkce pomáhá ve změně žákových deklarativních znalostí ve znalosti procedurální, tedy dává již známé věci do souvislostí (obrázek průběhu experimentu, vývojový diagram, rozkreslený postup konstrukce); u vizuálních důkazů tuto funkci mají statické vizuální důkazy, které mají více kroků (dynamické vizuální důkazy, které ukazují přímou souvislost počáteční a koncové fáze důkazu);
- interpretující - tato funkce se snaží usnadnit žákům pochopení neznámých pojmů, které jsou těžko představitelné, např. abstraktní pojmy nebo příliš malé či velké systémy (atom, sluneční soustava);
- transformující - tato funkce má za cíl ovlivnit způsob žákova učení, tedy jakým způsobem zpracovává informace (obrázek učiní poznatky konkrétnější

a lépe zapamatovatelné), vizuální zobrazení pomáhá přesvědčit o správnosti, ale také přispívá k lepšímu uchovávání v paměti.

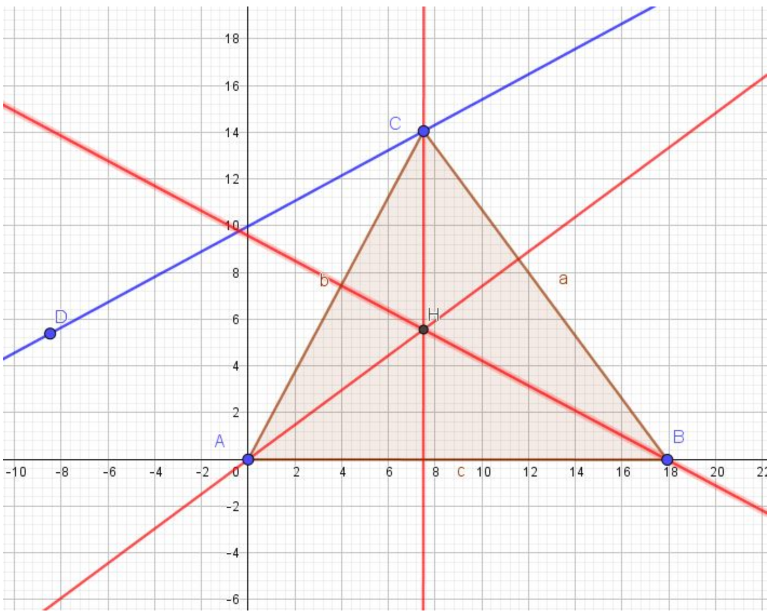
Obrázky interpretující a transformující (vizuální důkazy) podporují lepší představivost. Příklady na množiny bodů dané vlastnosti rozvíjí geometrickou představivost studentů, pomáhají chápat vztahy mezi objekty a jejich vlastnostmi. Proto se do výuky o množinách bodů dané vlastnosti zavádí programy dynamické geometrie, tzv. programy DGS (Cabri, GeoGebra). Pro určení rovnice dané křivky využijeme programy CAS (CoCoA, Maple a také i GeoGebra).

Při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti pomůže program GeoGebra:

- při eliminaci proměnných,
- ukáže nám množinu všech řešení.

Na následujících příkladech, jejichž řešení jsem provedla, ukážeme možný postup řešení, ale i úskalí, se kterými se řešitel může setkat.

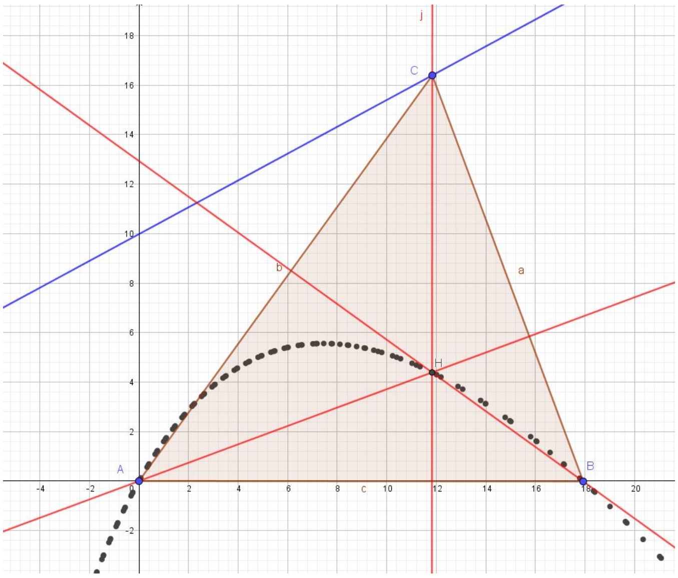
Příklad 4.1 *Je dána úsečka AB a přímka p. Určete množinu průsečíků výšek H trojúhelníku ABC, jestliže se bod C pohybuje po dané přímce p.*



Obrázek 7: **Zadání příkladu 4.1**

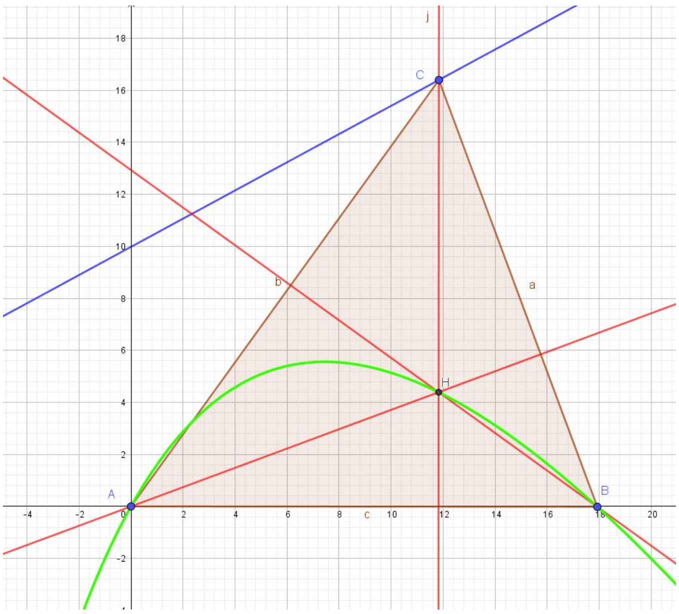
Řešení:

1. Zjistíme množinu bodů pomocí příkazu Stopa v GeoGebře. To nám napoví, o jakou množinu by se mohlo jednat.



Obrázek 8: **Množina bodů - Stopa, příklad 4.1**

2. Lze použít i příkaz Locus v GeoGebře (také napoví, o jakou množinu bodů se jedná).



Obrázek 9: **Množina bodů - Locus, příklad 4.1**

Vypadá to, že hledanou množinou je parabola. Nemůžeme to ale říci, mohla by to být hyperbola, ale může to být i úplně jiná množina bodů.

Provedeme výpočet:

3. Sestavíme rovnice: Zavedeme soustavu souřadnic.

Zvolíme $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [u, v]$, $H = [p, q]$.

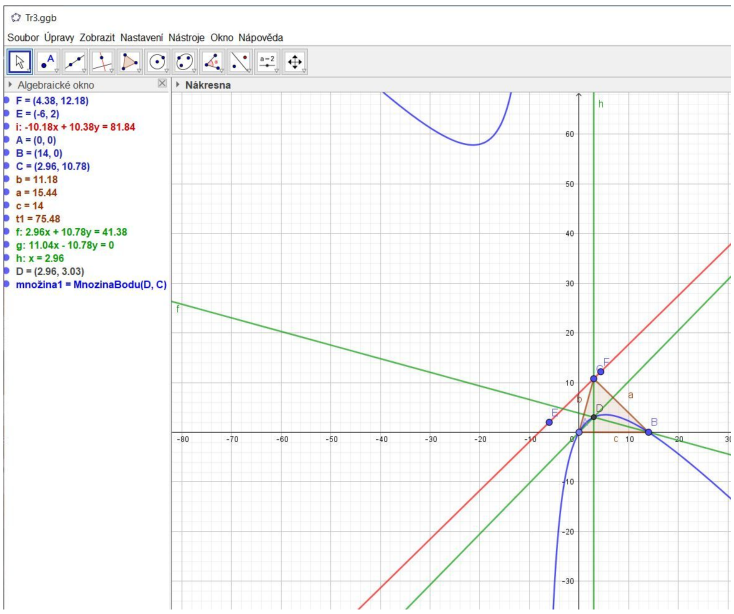
$$
\begin{array}{ll}
HC \perp AB: & p - u = 0 \\
HA \perp BC: & p(u - a) + qv = 0 \\
C \in p: & ku + lv + m = 0 \\
 & v = -\frac{k}{l}u - \frac{m}{l}
\end{array}
$$

Eliminujeme u, v.

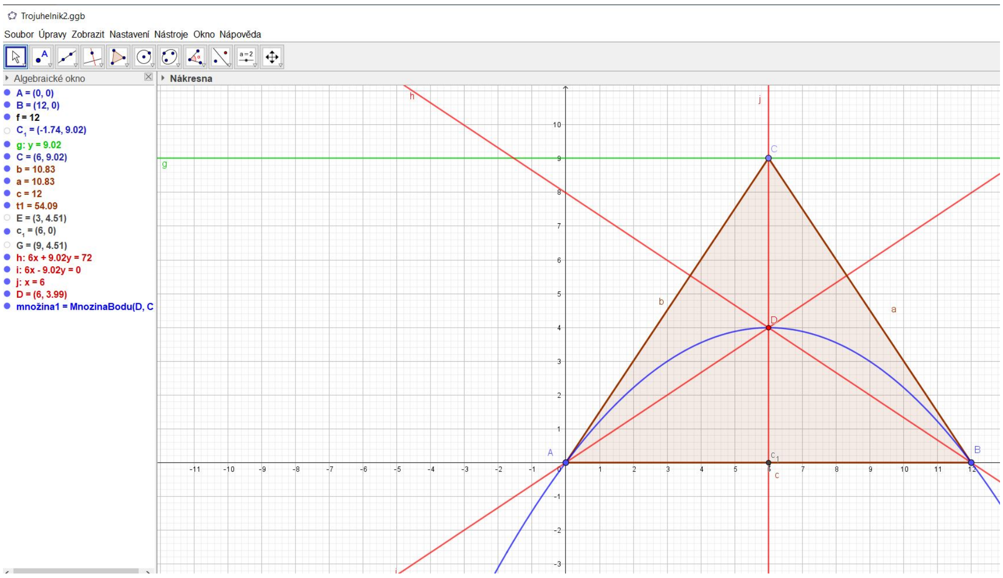
$$
\begin{aligned}
p &= u \\
p(p - a) + qv &= 0 \\
p(p - a) + q\left(-\tfrac{k}{l}p - \tfrac{m}{l}\right) &= 0 \\
lp^2 - lpa - kpq - mq &= 0
\end{aligned}
$$

Dostali jsme polynomiální rovnici 2. stupně. Z teorie kuželoseček plyne, že se jedná o **hyperbolu**.

Pokud je přímka rovnoběžná s přímkou $AB \Rightarrow v = -\frac{m}{l}$ dostaneme rovnici $lp^2 - lpa - qm = 0$. Jedná se o **parabolu**.



Obrázek 10: **Hyperbola, příklad 4.1**



Obrázek 11: **Parabola, příklad 4.1**

Závěr: Zde se ukazuje, jak je důležitá rovnice množiny bodů. Bez ní nejsme schopni určit, o jakou množinu bodů se jedná.

Při využití GeoGebry není hned jasné, že se jedná o hyperbolu, je dobře vidět jen jedna větev hyperboly.

Ještě je možné řešit speciální polohy přímky, tj. když přímka p bude strana trojúhelníku ABC nebo pokud přímka p bude kolmá na stranu AB.

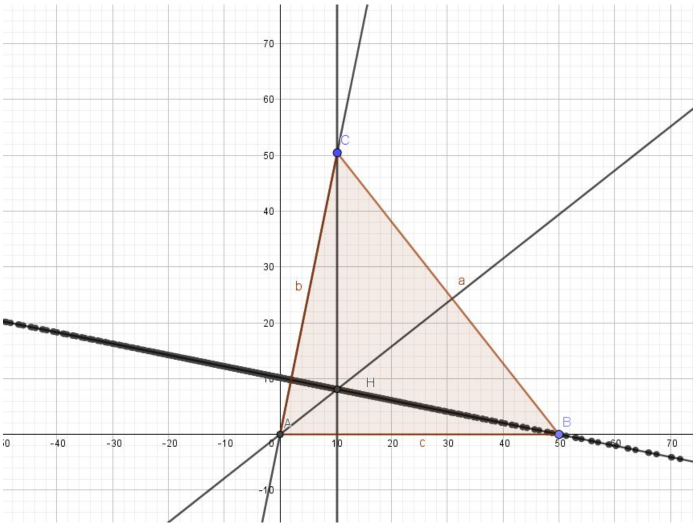
Pokud je přímka p stranou trojúhelníku, je množinou bodů přímka (viz obr. 12 a 13).

Výpočet:

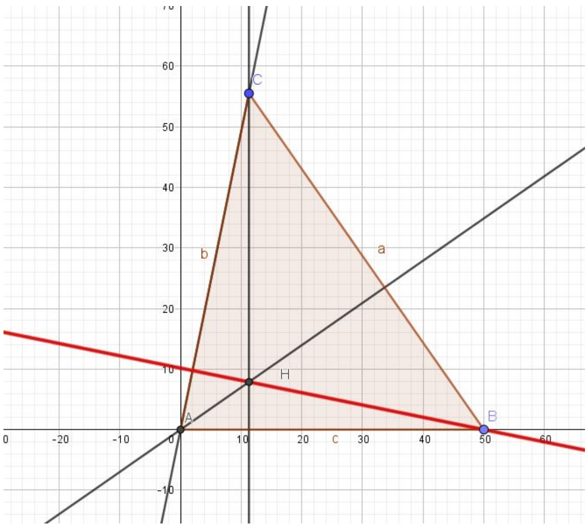
Použijeme

$$\begin{array}{lrcl}
 & p-u & = & 0 \\
 & p(u-a)+qv & = & 0 \\
C \in p: & ru+sv & = & 0 \\
\hline
 & v & = & -\frac{r}{s}u \\
 & p(p-\frac{r}{s}q-a) & = & 0 \\
 & p=0\,\text{nebo}\,p-\frac{r}{s}q-a & = & 0
\end{array}$$

to je přímka procházející bodem B kolmá k AC (přímka $p=0$ je tam navíc).



Obrázek 12**: Speciální případ 1 - Stopa, příklad 4.1**

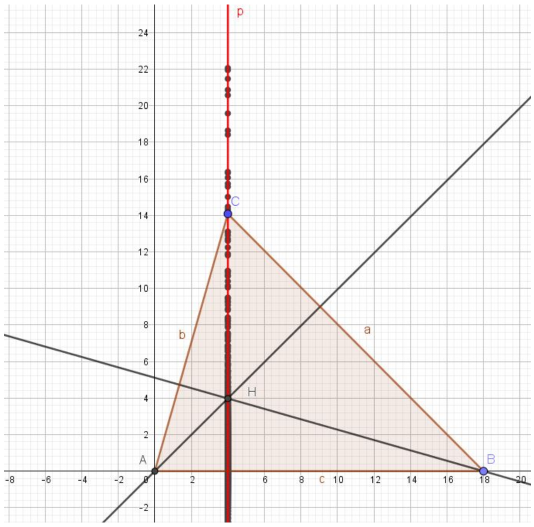


Obrázek 13**: Speciální případ 1 - Locus, příklad 4.1**

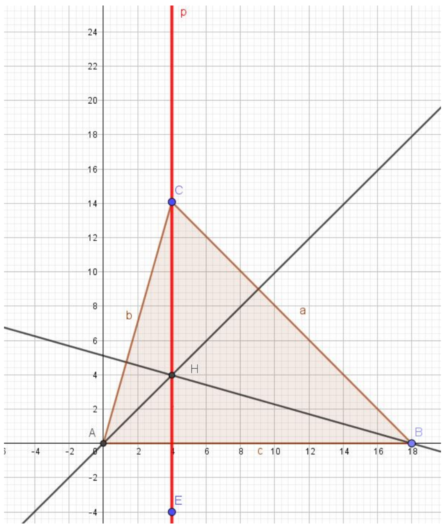
Pokud je přímka p kolmá na stranu AB, pak je množinou bodů přímka (viz obr. 14 a 15).

Výpočet:

$$\begin{array}{ll}
HB \perp AC: & u(a-p) - qv = 0 \\
HA \perp BC: & p(u-a) + qv = 0 \\
C \in p: & ku = c \\
\hline
u & = \frac{c}{k} \\
p(u-a) + u(a-p) & = 0 \\
p\left(\frac{c}{k} - a\right) + \frac{c}{k}(a-p) & = 0 \\
-pak + ca & = 0\,(\text{přímka})
\end{array}$$



Obrázek 14**: Speciální případ 2 - Stopa, příklad 4.1**



Obrázek 15**: Speciální případ 2 - Locus, příklad 4.1**

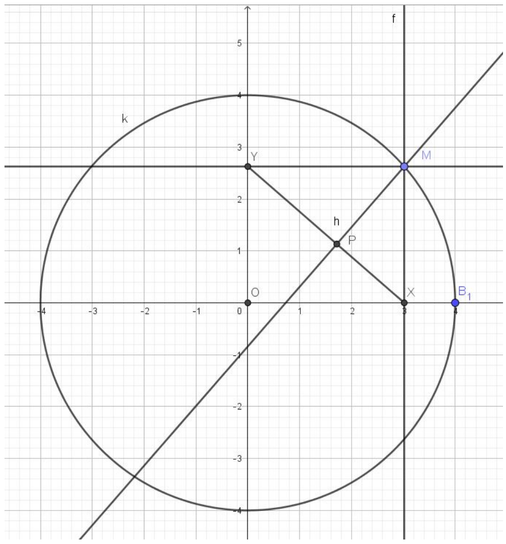
Tento příklad může být použit jako motivační příklad, lze jej řešit i s žáky na ZŠ. Žáci sestrojí výšky trojúhelníku a najdou jejich průsečík. Poté pohybují bodem C a vidí hledanou křivku. Mohou využít příkaz Stopa v GeoGebře.

V další části se budeme věnovat úlohám, při jejichž řešení mohou nastat problémy:

- objeví se navíc jiná množina,
- eliminační ideál je roven nule, ale řešení existuje. (Řešením je polynom v proměnných p, q a polynom, který obsahuje jiné parametry u, v. Hledaný polynom je v součinu s jiným polynomem, který obsahuje u, v a součin je roven nule. Eliminace je správně, počítač nám odpoví, že tam takový polynom není. Problémem je, jak druhý polynom odstranit. Musí se přidat nějaká doplňující podmínka. Pokud dáme podmínku, která je různá od nuly, pak nám počítač najde hledaný polynom.)

V další části se seznámíme s množinami bodů, které většinou nejsou pro studenty známé.

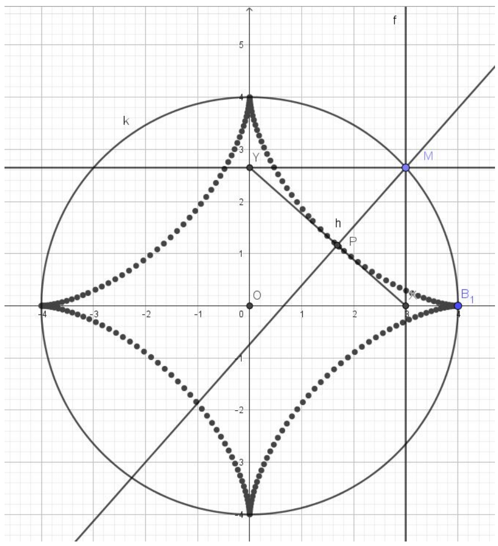
Příklad 4.2 *Je dána kružnice k se středem O a poloměrem a. Libovolným bodem $M = [u, v] \in k$ veďte kolmice k průměrům kružnice k v souřadnicových osách x, y a jejich paty označte X, Y. K úsečce XY sestrojte kolmici vedenou bodem $M = [u, v]$ a její patu označte $P = [p, q]$. Určete křivku, která je množinou všech těchto pat P kolmic, pokud se M pohybuje po kružnici k.*



Obrázek 16**: Zadání příkladu 4.2**

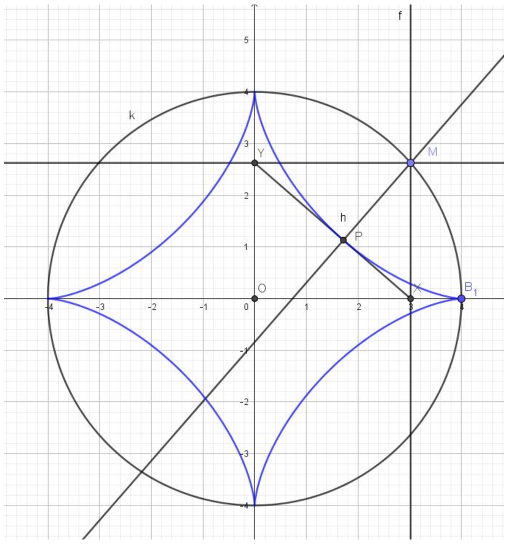
Řešení:

Nejprve využijeme příkaz Stopa v GeoGebře. Napoví nám, o jakou množinu bodů se jedná.



Obrázek 17**: Množina bodů - Stopa, příklad 4.2**

Poté využijeme příkaz Locus v GeoGebře.



Obrázek 18**: Množina bodů - Locus, příklad 4.2**

Dále provedeme ruční výpočet:

Sestavíme rovnice pro určení souřadnic bodů $P[p,q]$ hledané křivky. Body Y, P, X jsou kolineární, takže pro jejich souřadnice $[0,v]$, $[p,q]$, $[u,0]$ platí:

$$\begin{vmatrix} 0 & v & 1 \\ p & q & 1 \\ u & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{čili } uv - uq - vp = 0.$$

Z podmínky $MP \perp XY$ plyne, že $(P - M) \cdot (X - Y) = 0$,

a tedy: $(p - u, q - v) \cdot (u, -v) = 0$, tedy $(p - u)u - (q - v)v = 0$.

Dostáváme tak soustavu rovnic pro neznámé p, q:

$$\begin{aligned} -vp - uq + uv &= 0, \\ up - vq - u^2 + v^2 &= 0, \end{aligned}$$

s doplňkovou podmínkou pro parametry u, v:

$$M = [u, v] \in k \;\Rightarrow u^2 + v^2 = a^2.$$

Eliminaci parametrů u, v z této soustavy rovnic snadno provedeme užitím parametrického vyjádření kružnice k:

$$u = a\ \cos t, \quad v = a\ \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi).$$

Po dosazení dostáváme soustavu lineárních rovnic pro neznámé p, q:

$$a \sin t\, p - a\ \cos t\, q = -a^2 \sin t \cos t,$$

$$a \cos t\, p - a\ \sin t\, q = a^2(\cos^2 t - \sin^2 t),$$

jež má řešení:

$$p = \frac{a^3 \cos^3 t}{a^2} = a\ \cos^3 t,\ q = \frac{a^3 \sin^3 t}{a^2} = a\ \sin^3 t.$$

Parametr t eliminujeme tak, že vypočteme:

$\cos t = \sqrt[3]{\frac{p}{a}}$, $\sin t = \sqrt[3]{\frac{q}{a}}$ a dosadíme do rovnice (doplňkové podmínky) $\sin^2 t + \sin^2 t = 1$.

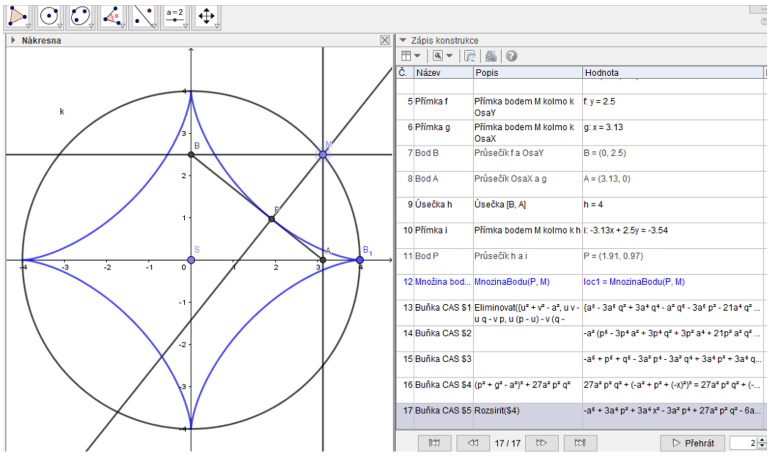
Dostáváme implicitní vyjádření hledané křivky ve tvaru:

$$(\sqrt[3]{\tfrac{p}{a}})^2 + (\sqrt[3]{\tfrac{q}{a}})^2 = 1 \text{ čili } \sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} = \sqrt[3]{a^2}.$$

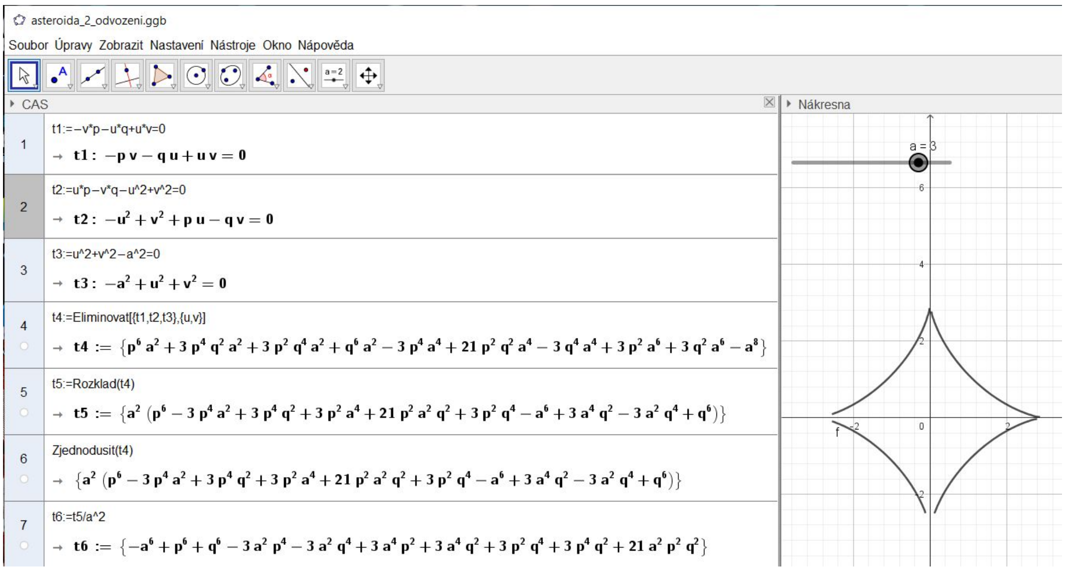
Dostaneme rovnici křivky, kterou nazýváme **asteroida**

Rovnici $p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ lze upravit na ekvivalentní tvar

$$(p^2 + q^2 - a^2)^3 + 27a\ p^2q^2 = 0.$$



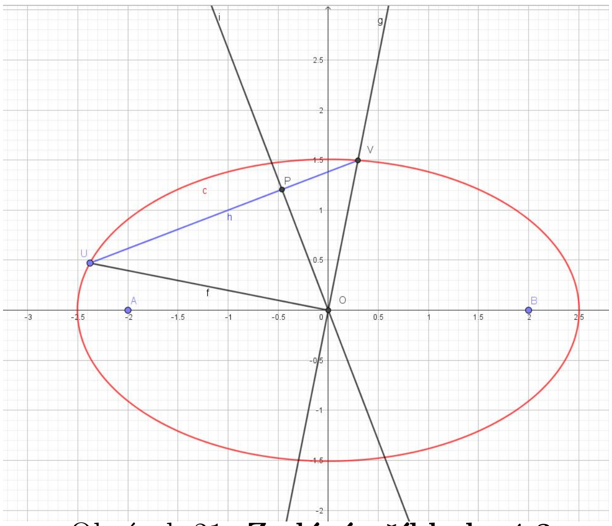
Obrázek 19: **Asteroida, příklad 4.2**



Obrázek 20: **Výpočet v GeoGebře, příklad 4.2**

Poznámka. Křivku asteroidu jako první zkoumal dánský matematik a astronom Ole Christensem Römer v r. 1674. V letech 1691 - 1692 její vlastnosti studoval švýrcarský matematik a fyzik Johann Bernoulli. Poznatky o ní lze též nalézt v korespondenci německého matematika a filozofa Gottfrieda Wilhelma Leibnize z r. 1715. Název asteroida byl použit v literatuře poprvé roku 1836 a pochází z řec. „aster“ („hvězda“).

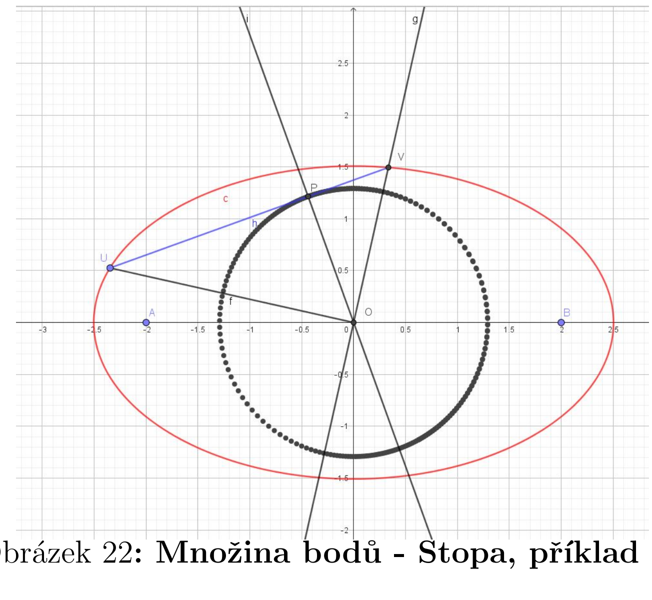
Příklad 4.3 *Je dána tětiva elipsy UV, střed elipsy O a platí, že $OU \perp OV$. Určete množinu pat kolmic P, které dostaneme tak, že z bodu O sestrojíme kolmici na tětivu UV, pokud se bod U pohybuje po elipse.*



Obrázek 21: **Zadání příkladu 4.3**

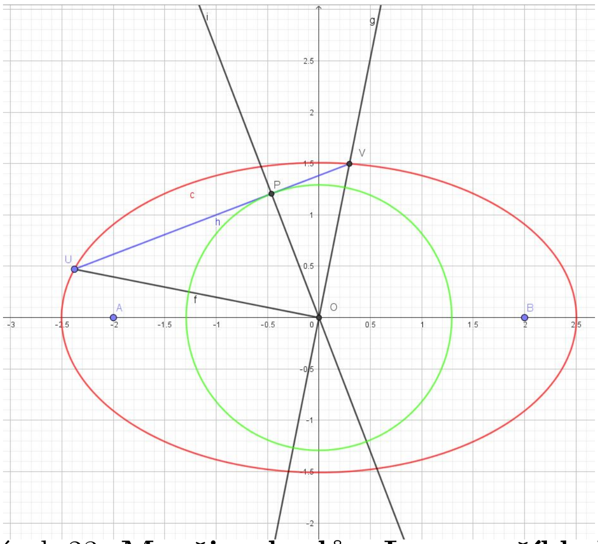
Řešení:

Nejprve využijeme příkaz Stopa v GeoGebře. Napoví nám, o jakou množinu bodů se jedná.



Obrázek 22: **Množina bodů - Stopa, příklad 4.3**

Poté využijeme příkaz Locus v GeoGebře. Vidíme, jakou množinu bodů hledáme.



Obrázek 23: **Množina bodů - Locus, příklad 4.3**

Ruční výpočet:

Označme $O = [0, 0]$, $U = [u_1, u_2]$, $V = [v_1, v_2]$ a $P = [p, q]$.

$OU \perp OV$: $(-u_1, -u_2) \cdot (-v_1, -v_2) = 0$,

tedy $u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$

$OP \perp UV$: $(p, q) \cdot (v_1 - u_1, v_2 - u_2) = 0$

$p(v_1 - u_1) + q(v_2 - u_2) = 0$

$P \in UV$: $\vec{u} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2)$

$\vec{n} = (u_2 - v_2, v_1 - u_1)$

$(u_2 - v_2)x + (v_1 - u_1)y + c = 0$

$U \in UV$: $(u_2 - v_2)u_1 + (v_1 - u_1)u_2 + c = 0$

$c = v_2 u_1 - v_1 u_2$

$(u_2 - v_2)x + (v_1 - u_1)y + v_2 u_1 - v_1 u_2 = 0$

$P \in UV$: $(u_2 - v_2)p + (v_1 - u_1)q + v_2 u_1 - v_1 u_2 = 0$

Body U, V leží na elipse: $\frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} = 1$, $\frac{v_1^2}{a^2} + \frac{v_2^2}{b^2} = 1$

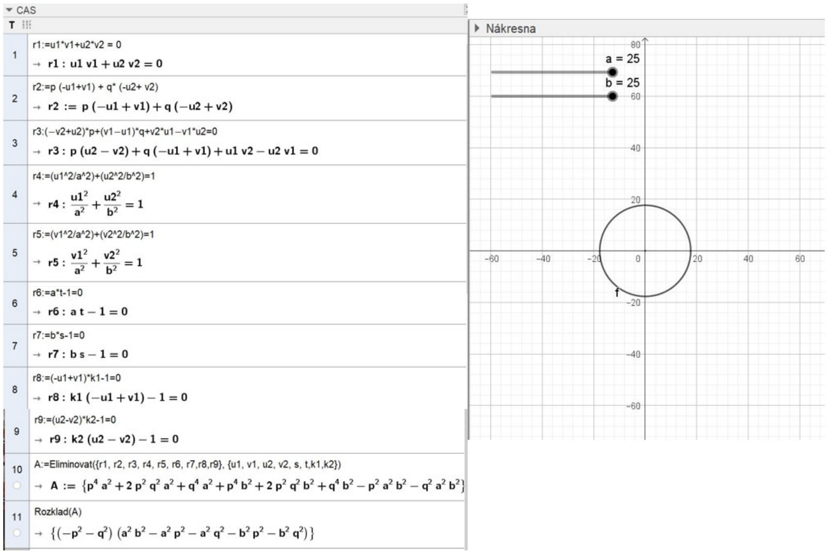
Dostali jsme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
u_1 v_1 + u_2 v_2 &= 0 \\
p(v_1 - u_1) + q(v_2 - u_2) &= 0 \\
p(u_2 - v_2) + q(v_1 - u_1) + v_2 u_1 - v_1 u_2 &= 0 \\
u_1^2 b^2 + u_2^2 a^2 &= a^2 b^2 \\
v_1^2 b^2 + v_2^2 a^2 &= a^2 b^2
\end{aligned}$$

Z této soustavy chceme eliminovat proměnné u_1, v_1, u_2, v_2.

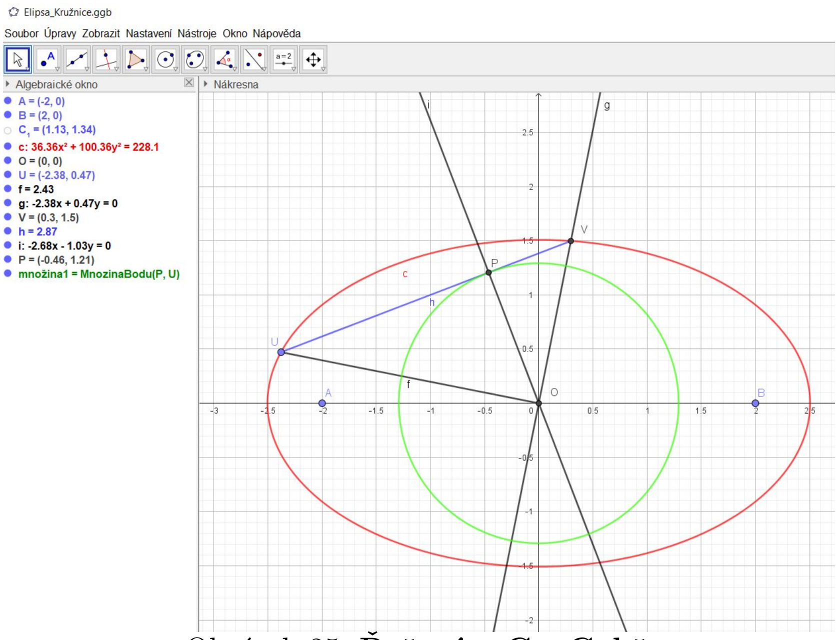
Ručně tato eliminace není snadná.

Pro nalezení množiny bodů nám pomůže GeoGebra.



Obrázek 24: **Řešení v GeoGebře, příklad 4.3**

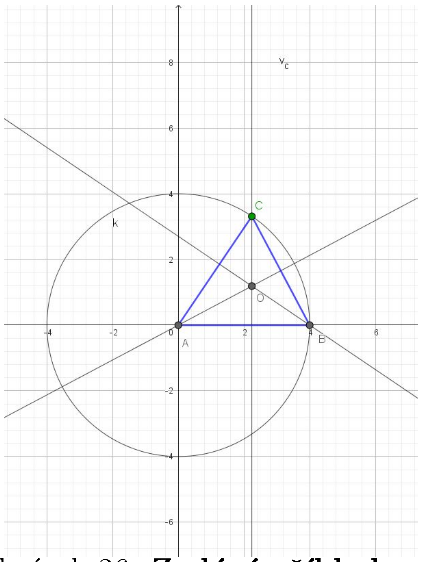
Dostali jsme rovnici: $p^4a^2+2p^2q^2a^2+q^4a^2+p^4b^2+2p^2q^2b^2+q^4b^2-p^2a^2b^2-q^2a^2b^2=0$.
Po rozkladu získáme: $(-p^2-q^2)\cdot(a^2b^2-a^2p^2-a^2q^2-b^2p^2-b^2q^2)=0$.
$p \neq q \rightarrow a^2b^2-a^2p^2-a^2q^2-b^2p^2-b^2q^2=0$.
Hledanou množinou bodů je tedy kružnice.



Obrázek 25: **Řešení v GeoGebře**

Dále budeme řešit úlohy, kde se objeví při řešení v GeoGebře jiná množina nebo v GeoGebře získáme prázdný ideál.

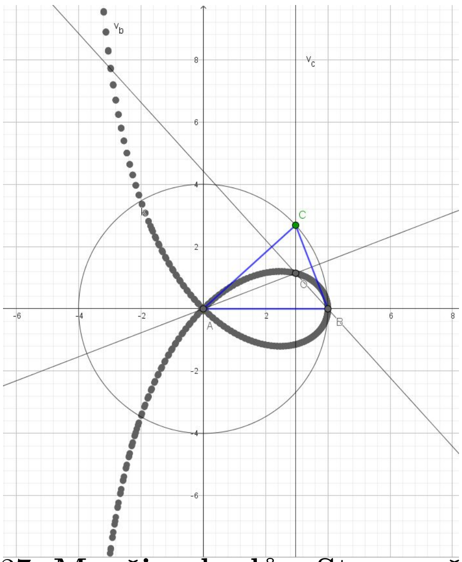
Příklad 4.4 *Je dána úsečka AB a bod C, který leží na kružnici k se středem v bodě A a poloměrem AB. Určete množinu průsečíků výšek H trojúhelníku ABC, pohybuje-li se bod C po kružnici.*



Obrázek 26**: Zadání příkladu 4.4**

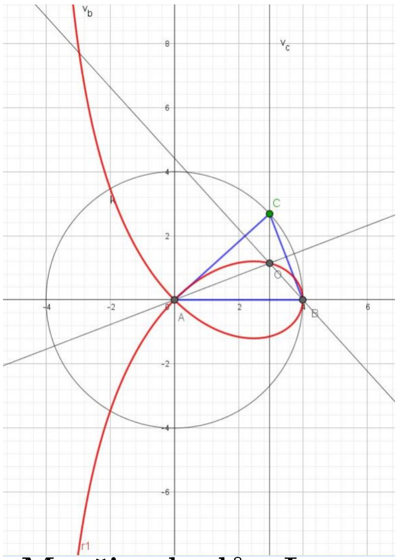
Řešení:

Zjistíme množinu bodů pomocí příkazu Stopa v GeoGebře.



Obrázek 27**: Množina bodů - Stopa, příklad 4.4**

Použijeme příkaz Locus v GeoGebře (the tracer H, the mover C), ukáže nám množinu bodů a tím nám napoví, jak příklad řešit. Ruční výpočet:



Obrázek 28**: Množina bodů - Locus, příklad 4.4**

Trojúhelník umístíme do soustavy souřadnic tak, že $A = [0,0]$, $B = [a,0]$, $C = [u,v]$. Bod $O = [p,q]$. Kružnice k má tedy rovnici $x^2 + y^2 = a^2$. Bod $C \in k$: $u^2 + v^2 - a^2 = 0$.

1. způsob:

Výšky trojúhelníku mají rovnice:

$$\begin{aligned} v_a: &\quad (u-a)x + vy &= 0, \\ v_b: &\quad ux + vy - ua &= 0. \end{aligned}$$

Bod $O = [p,q]$ leží na výškách:

$$\begin{aligned} O \in v_a: &\quad (u-a)p + vq &= 0, \\ O \in v_b: &\quad up + vq - ua &= 0. \end{aligned}$$

Získáme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - a^2 &= 0, \\ (u-a)p + vq &= 0, \\ up + vq - ua &= 0. \end{aligned}$$

Bod $C = [u,v]$ je pohyblivý bod, proto ze soustavy eliminujeme proměnné u, v a tím dostaneme rovnici křivky. Eliminace proměnných u, v *vyžaduje hodně matematických úprav*. Pomocí GeoGebry bychom proměnné snadno eliminovali pomocí funkce Eliminovat (u,v).

Ze soustavy eliminujeme ručně proměnné u, v.

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - a^2 &= 0, \\ up - ap + vq &= 0, \\ up + vq - ua &= 0. \end{aligned}$$

Ze druhé rovnice vyjádříme $u = \frac{ap-vq}{p}$ a dosadíme do 1. a 3. rovnice:

$$\begin{array}{rcl}
(\frac{ap-vq}{p})^2 + v^2 - a^2 &=& 0,\\
\frac{ap-vq}{p} \cdot p + vq - \frac{ap-vq}{p} \cdot a &=& 0,\\
\hline
\frac{a^2p^2-2apv\ q+v^2q^2}{p^2} + v^2 - a^2 &=& 0,\\
ap - vq + vq - \frac{a^2p-v\ qa}{p} &=& 0.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
a^2p^2 - 2a\ pv\ q + v^2q^2 + v^2p^2 - a^2p^2 &=& 0,\\
\hline
ap^2 - v\ qp + v\ qp - a^2p + v\ qa &=& 0.
\end{array}$$

Z druhé rovnice po úpravě $ap^2 - a^2p + v\ qa\ = 0$ vyjádříme $v = \frac{a^2p-ap^2}{qa}$ a dosadíme do 1. rovnice:

$$\begin{array}{rcl}
a^2p^2 - 2a\ p(\frac{a^2p-ap^2}{qa})q + (\frac{a^2p-ap^2}{qa})^2q^2 + (\frac{a^2p-ap^2}{qa})^2p^2 - a^2p^2 &=& 0,\\
-2p(a^2p - a\ p^2) + \frac{a^4p^2-2a^2pa\ p^2+a^2p^4}{a^2} + \frac{a^4p^2-2a^2pa\ p^2+a^2p^4}{q^2a^2} \cdot p^2 &=& 0,\\
-2a^2q^2p(a^2p - a\ p^2) + q^2a^4p^2 - 2a^3p^3q^2 + a^2p^4q^2 + a^4p^4 - 2a^3p^5 + a^2p^6 &=& 0,\\
-2a^4p^2q^2 + 2a^3p^3q^2 + q^2a^4p^2 - 2a^3p^3q^2 + a^2p^4q^2 + a^4p^4 - 2a^3p^5 + a^2p^6 &=& 0,\\
-a^4p^2q^2 + a^2p^4q^2 + a^4p^4 - 2a^3p^5 + a^2p^6 &=& 0,\ / : a^2p^2\\
-a^2q^2 + p^2q^2 + a^2p^2 - 2ap^3 + p^4 &=& 0.
\end{array}$$

Tato rovnice je rovnicí hledané křivky. Rovnici se budeme snažit dále upravit. V tomto okamžiku nám také může pomoci GeoGebra.

$$\begin{array}{rcl}
-a^2q^2 + p^2q^2 + a^2p^2 - a\ p^3 - a\ p^3 + p^4 &=& 0,\\
p(p^3 + pq^2 - a\ p^2) - a(p^3 + a\ q^2 - ap^2) &=& 0.
\end{array}$$

Přičteme a odečteme člen apq^2 a dostaneme:

$$\begin{array}{rcl}
p(p^3 + pq^2 - ap^2 + a\ q^2) - a\ (p^3 + pq^2 - ap^2 + aq^2) &=& 0,\\
(p - a) \cdot (p^3 + pq^2 - ap^2 + aq^2) &=& 0,\\
(p - a) \cdot [p(p^2 + q^2) - a\ (p^2 - q^2)] &=& 0.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
p^2(p^2 + q^2) - ap(p^2 + q^2) - ap(p^2 - q^2) + a^2(p^2 - q^2) &=& 0,\\
(p^2 + q^2)(p^2 - ap) - (p^2 - q^2)(ap - a^2) &=& 0,\\
(p^2 + q^2) \cdot p(p - a) - (p^2 - q^2) \cdot a(p - a) &=& 0,\\
p(p^2 + q^2) - a\ (p^2 - q^2) &=& 0.
\end{array}$$

Proměnné p, q nahradíme x, y a dostaneme: $x(x^2 + y^2) \ = \ a\ (x^2 - y^2)$.

2. způsob:

Soustava rovnic pro neznámé p, q s parametry u, v:

$$\begin{array}{lll}
O \in v_a & \Rightarrow & (u - a)p + vq = 0,\\
O \in v_c & \Rightarrow & p = u,\\
C \in k & \Rightarrow & u^2 + v^2 = a^2 \ldots \text{podmínka pro parametry u, v}\\
\hline
\end{array}$$

Eliminace parametrů u, v:

Eliminace u:

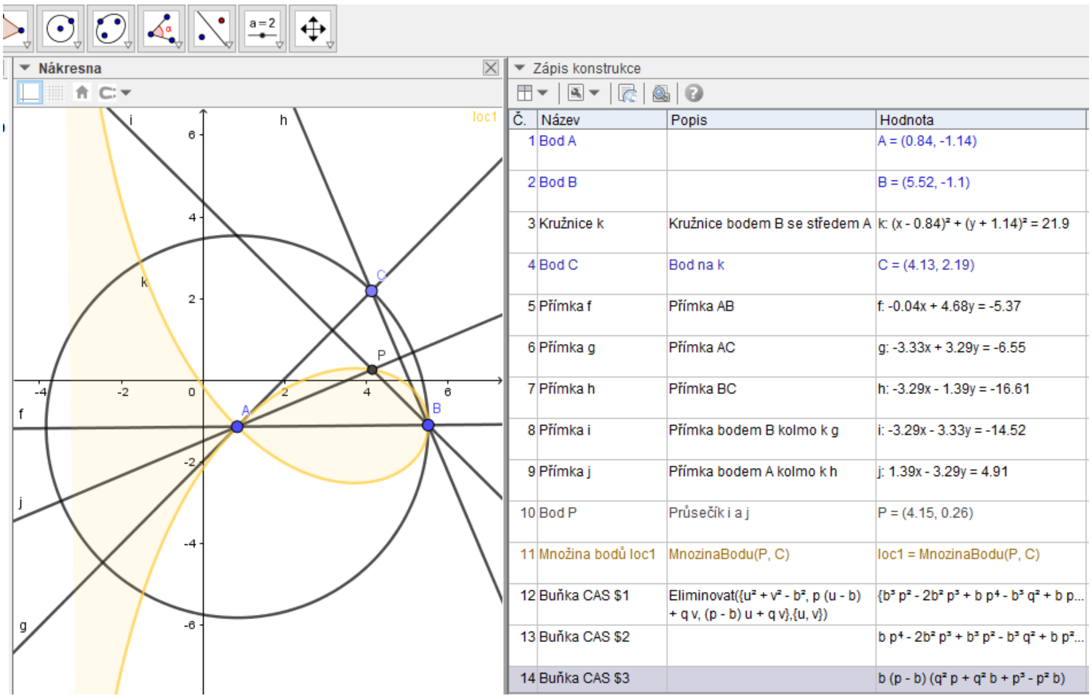
$u = p$ dosadíme do 1. a 3. rovnice.

Eliminace v:

$$\begin{array}{l} (p-a)p = -vq \quad |^2 \\ p^2 + v^2 = a^2 \;\Rightarrow\; v^2 = a^2 - p^2 \\ \hline (p-a)^2p^2 = v^2q^2 \\ (p-a)^2p^2 = (a^2-p^2)q^2 \\ (p-a)^2p^2 + (p^2-a^2)q^2 = 0 \mid : (p-a) \neq 0 \\ \underline{(p-a)p^2 + (p+a)q^2 = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{p(p^2+q^2) - a\,(p^2-q^2) = 0} \end{array}$$

Tuto rovnici napíšeme do GeoGebry a zjistíme, jak křivka vypadá.

Jedná se o **strofoidu**.

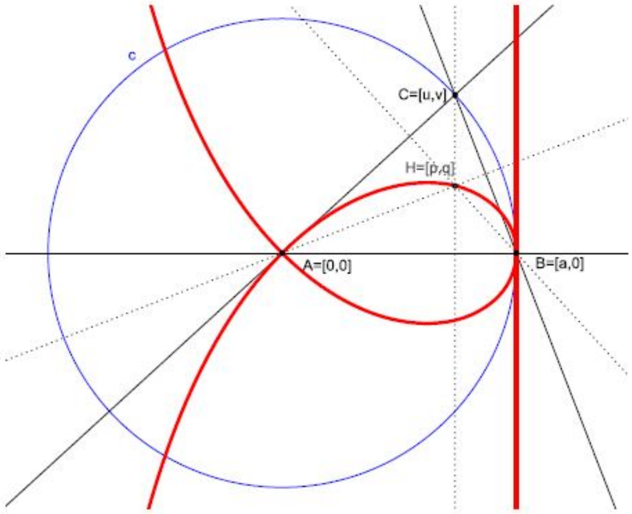


Obrázek 29: Strofoida

Za použití příkazu Eliminovat v GeoGebře

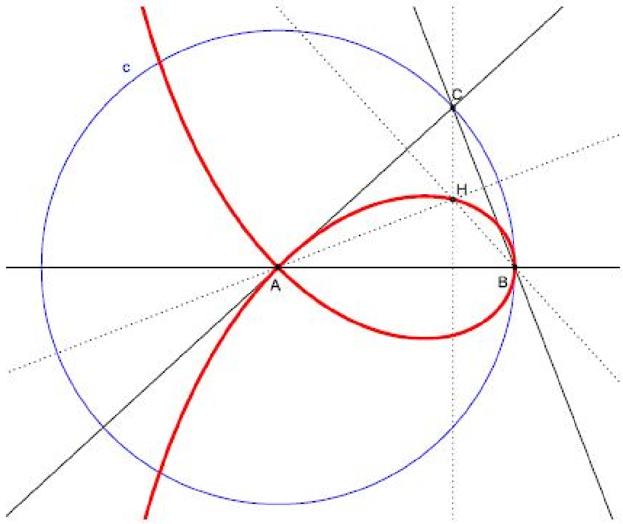
Dostaneme rovnici 4. stupně, dáme faktorizovat a dostaneme lineární a kubickou rovnici.

Lineární rovnice reprezentuje přímku a kubická rovnice je rovnicí strofoidy.



Obrázek 30: **Strofoida a přímka, příklad 4.4**

Problém nastává, když C dojde do B, tedy když přímka BC není definována, tj. když $u = a$, $v = 0$, potom systém $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, $h_3 = 0$ přechází v rovnici $p - a = 0$, která reprezentuje přímku. Pokud tedy nechceme tuto přímku, musíme přidat podmínku $B \neq C$. Pak eliminujeme u, v, t. Dostaneme rovnici strofoidy $p^3 - ap^2 + aq^2 + pq^2 = 0$.



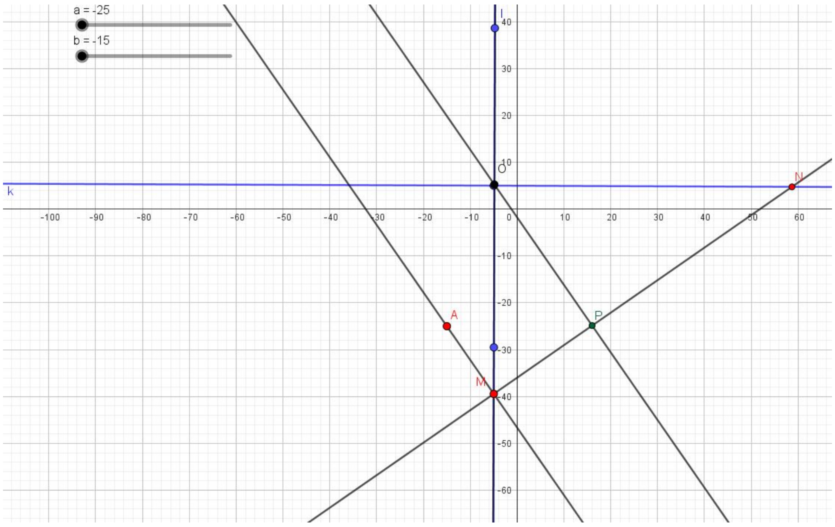
Obrázek 31: **Strofoida, příklad 4.4**

Závěr: Při eliminaci proměnných můžeme získat polynomiální rovnici, která ale nereprezentuje křivku.

Příkaz Locus - počítač řeší numericky, tedy každému bodu na ose x přiřadí y, pokud se dostane do $B = C$, bodu na ose x by přiřadil nekonečně mnoho bodů - tuto možnost počítač vyloučí, proto se neobjeví přímka.

Poznámka. Křivku strofoidy jako první popsal ve svých dopisech italský matematik a fyzik Evangelista Torricelli kolem roku 1645. Znovu ji objevil anglický matematik Isaac Barrow ve své práci z roku 1670. Název strofoida z latinského „strophos“ („kroucený pás“) pochází až z roku 1848.

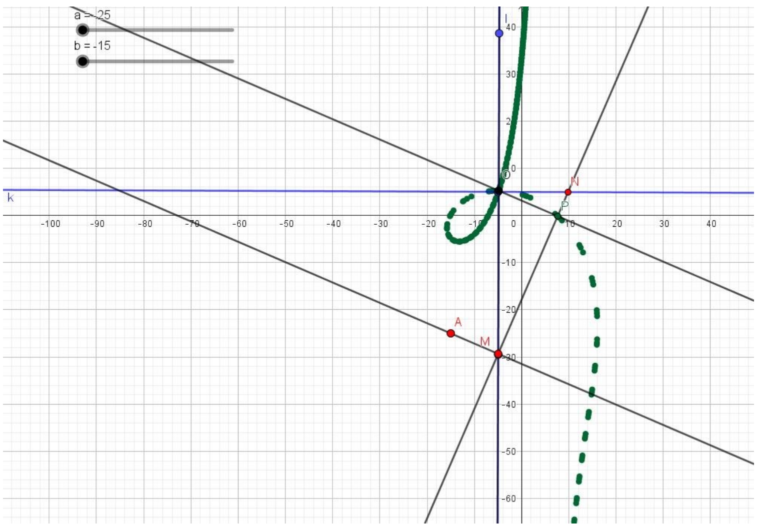
Příklad 4.5 *Jsou dány dvě na sebe kolmé přímky k, l, bod O je jejich průsečík. Bod A leží ve vzdálenosti b od přímky k a ve vzdálenosti a od přímky l. Pro libovolný bod M ležící na l sestrojme bod N na k tak, že MN je kolmá na AM. Určete množinu všech bodů paty kolmic P, sestrojené z O na MN, pokud se bod M pohybuje po přímce l.*



Obrázek 32**: Zadání příkladu 4.5**

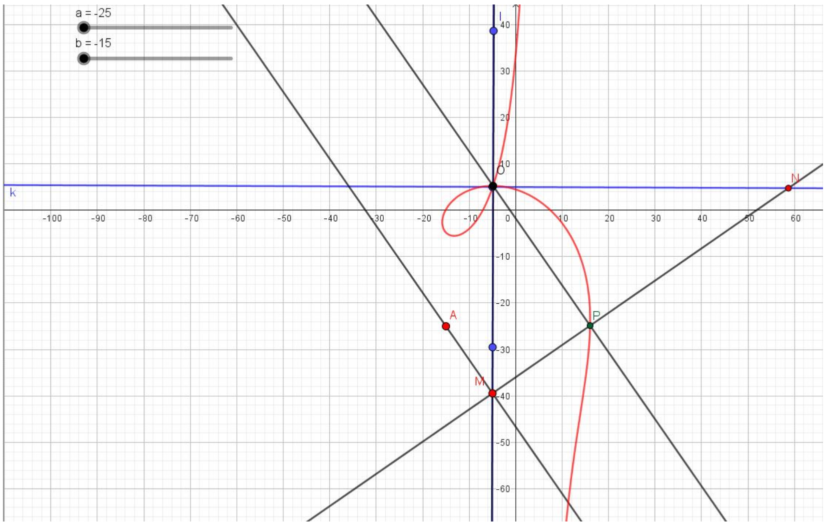
Řešení:

Nejprve zkusíme příkaz Stopa v GeoGebře.



Obrázek 33**: Množina bodů - Stopa, příklad 4.5**

Poté použijeme příkaz Locus v GeoGebře.



Obrázek 34**: Množina bodů - Locus, příklad 4.5**

Dále vyřešíme ručně.

Označme body: $A = [a, b]$, $M = [0, v]$, $N = [u, 0]$, $P = [p, q]$, $O = [0, 0]$.

1. způsob výpočtu:

$$
\begin{aligned}
AM \perp MN \quad & (M - A)(N - M) = 0 \\
& (-a, v - b)(u, -v) = 0 \\
& -au - v^2 + vb = 0 \\
OP \perp MN \quad & (P - O)(N - M) = 0 \\
& (p, q)(u, -v) = 0 \\
& pu - qv = 0 \\
P \in MN \quad & \vec{u}_{MN} = (u, -v), \vec{n}_{MN} = (v, u) \\
& vp + uq - uv = 0
\end{aligned}
$$

Dostaneme tedy soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
-au - v^2 + vb &= 0 \\
pu - qv &= 0 \\
vp + uq - uv &= 0
\end{aligned}
$$

Budeme eliminovat proměnné u, v.

$$
\begin{aligned}
up &= qv \\
u &= \tfrac{qv}{p}
\end{aligned}
$$

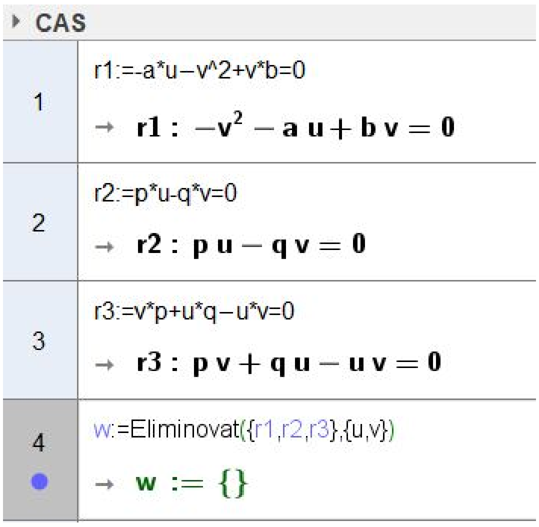
$$
\begin{aligned}
-a\left(\frac{qv}{p}\right) - v^2 + vb &= 0 \\
vp + \left(\frac{qv}{p}\right) q + \left(\frac{qv}{p}\right) v &= 0 \\
-aqv - v^2p + vbp &= 0 \\
vp^2 + q^2v - qv^2 &= 0 \\
\hline
v &\neq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-aq - vp + bp &= 0 \\
p^2 + q^2 - qv &= 0 \\
-qv &= -p^2 - q^2 \\
v &= \frac{p^2+q^2}{q}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-aq - \left(\frac{p^2+q^2}{q}\right) p + bp &= 0 \\
-aq^2 - p^3 - q^2p + bqp &= 0 \\
aq^2 + p^3 + q^2p - bqp &= 0 \\
p(p^2+q^2) - q(aq+bp) &= 0
\end{aligned}
$$

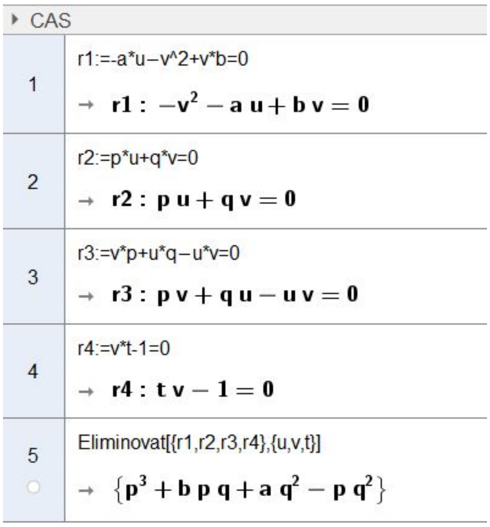
Dostali jsme křivku, která se nazývá **ofiurida**, neboli **zmijí ocas**.

Pokud použijeme eliminaci v GeoGebře, pak dostaneme **nulový eliminační ideál**.



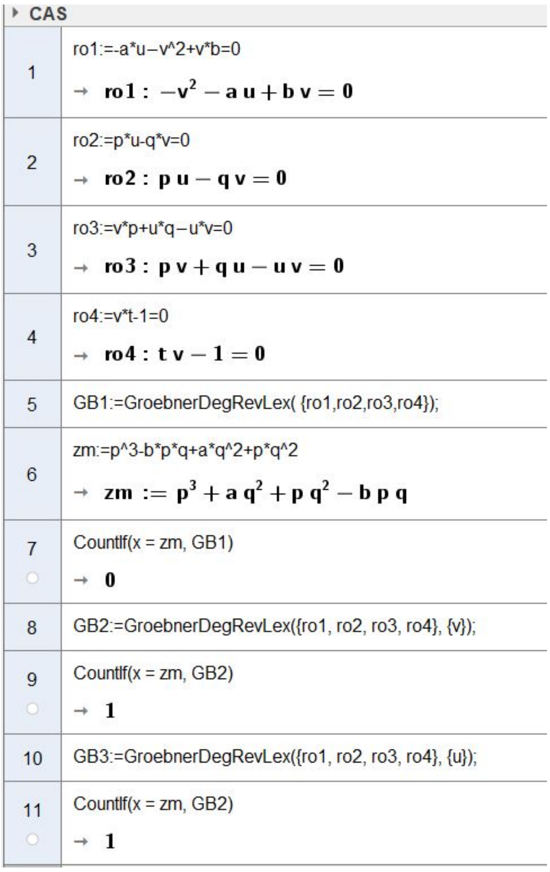
Obrázek 35: **Výpočet v GeoGebře, příklad 4.5**

Proč jsme dostali nulový eliminační ideál? Zřejmě se jedná o součin dvou výrazů, který se rovná nule. Musíme přidat nějakou další podmínku. Při ručním výpočtu jsme využili podmínku $v \neq 0$. Přidáme tedy $vt - 1 = 0$, kde t je pomocná proměnná. Tato rovnice znamená, že v je různé od nuly.



Obrázek 36: **Výpočet v GeoGebře, příklad 4.5**

Zjistíme Gröbnerovu bázi.



Obrázek 37: **Výpočet v GeoGebře, příklad 4.5**

Pomocí GeoGebry zjistíme, že polynomy $v \cdot (p^3 + pq^2 + aq^2 - p^2qb) = 0$ a

$u \cdot (p^3 + pq^2 + aq^2 - p^2qb) = 0$ patří do Gröbnerovy báze, ale nepatří tam polynom

$p^3 + pq^2 + aq^2 - p^2qb = 0.$

2. způsob výpočtu:

Využijeme jen $OP \perp MP$ a $PM \perp AM$. Dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 - qv &= 0 \\ -pa + qv - qb - v^2 + vb &= 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $v = \frac{p^2+q^2}{q}$ a dosadíme do druhé rovnice:

$$-pa + q\left(\frac{p^2+q^2}{q}\right) - qb - \left(\frac{p^2+q^2}{q}\right)^2 + \left(\frac{p^2+q^2}{q}\right)b = 0$$

Po úpravě dostaneme:

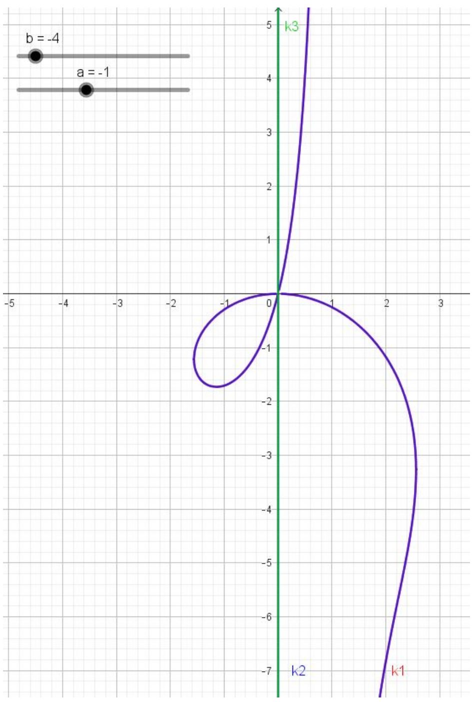
$$p^4 + p^2q^2 + paq^2 - p^2qb = 0$$

Rozložíme na součin:

$$p(p^3 + pq^2 + aq^2 - pqb) = 0$$

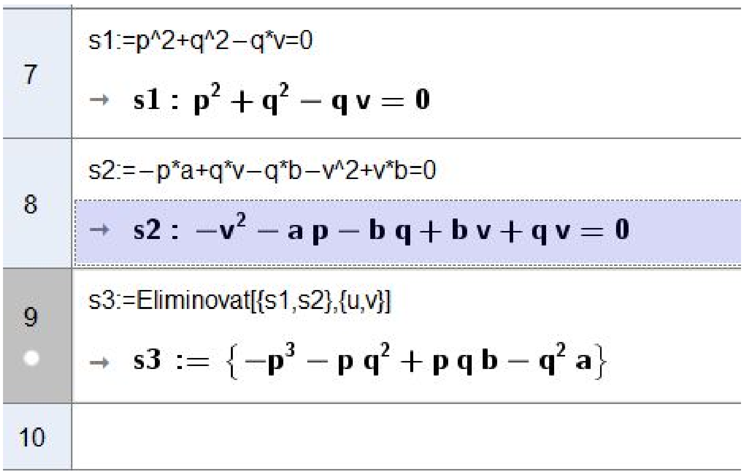
Dostaneme **přímku** $p = 0$ a **rovnici ofiuridy**.

Přidali bychom podmínku $p \neq 0$. (Bod $P \neq O$.)



Obrázek 38: **Ofiurida a přímka, příklad 4.5**

Pokud eliminujeme v GeoGebře, pak dostaneme jen **ofiuridu**:



Obrázek 39: **Výpočet v GeoGebře, příklad 4.5**

3. způsob výpočtu:

Využijeme:

$AM \perp MN : -au - v^2 + vb = 0.$

MNP jsou kolineární: $vp + uq - uv = 0$,

$AM \| OP$, tedy $\begin{vmatrix} v-b & a \\ -q & p \end{vmatrix} = 0$ a dostaneme $vp - pb + aq = 0$.

Dostali jsme opět soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} -au - v^2 + vb &= 0 \\ -vp + uq - uv &= 0 \\ vp - pb + aq &= 0 \end{aligned}$$

Vyjádříme z první rovnice $u = \frac{vb-v^2}{a^2}$ a z třetí rovnice $v = \frac{pb-aq}{p}$.

Dosadíme do druhé rovnice:

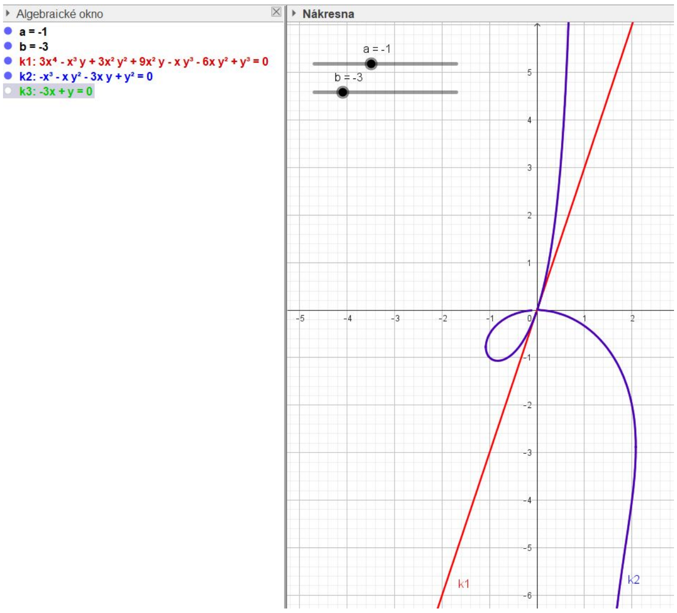
$$\frac{pb-aq}{p}p + \frac{\left(\frac{pb-aq}{p}\right)\cdot b - \left(\frac{pb-aq}{p}\right)^2}{a}q - \frac{\left(\frac{pb-aq}{p}\right)\cdot b - \left(\frac{pb-aq}{p}\right)^2}{a} \cdot \frac{pb-aq}{p} = 0$$

Upravíme a dostaneme:

$$abp^4 - a^3q^3 + 2a^2q^2pb + p^2q^2ab - aqp^2b^2 - pq^3a^2 - a^2p^3q = 0$$

Rozložíme na součin: $-a(bp - qa) \cdot (bqp - q^2p - q^2a - p^3) = 0$

Získáme **rovnici přímky** a **ofiuridy**.



Obrázek 40: **Ofiurida a přímka, příklad 4.5**

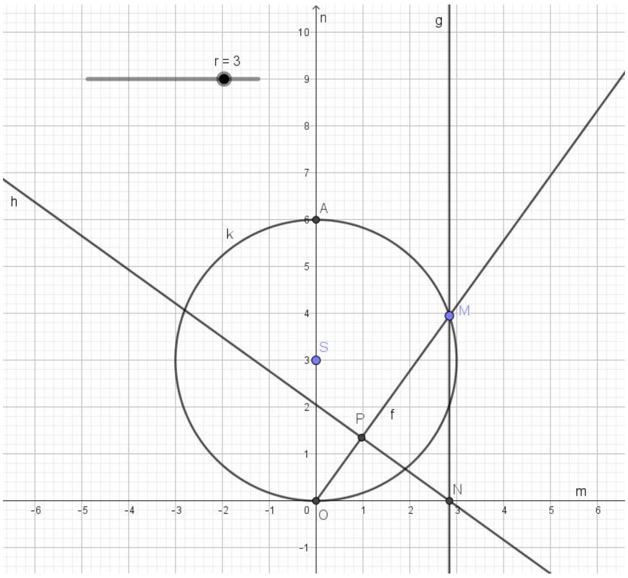
Pokud se M dostane do O, pak by zbyla rovnice $pb-qa=0$. Přímku nedostaneme, pokud přidáme podmínku $M \neq O$, nebo jako v předchozím způsobu $vt-1=0$.

Při použití příkazu Eliminovat v GeoGebře dostaneme:

11	t1:=−a*u−v^2+v*b=0 → $\mathbf{t1:\ -v^2 - a\,u + b\,v = 0}$
12	t2:=v*p+u*q−u*v=0 → $\mathbf{t2:\ p\,v + q\,u - u\,v = 0}$
13	t3:=v*p−p*b+a*q → $\mathbf{t3 := a\,q - b\,p + p\,v}$
14	t4:=Eliminovat[{t1,t2,t3},{u,v}] → $\mathbf{t4 := \{a\,b\,p^4 - a\,b^2\,p^2\,q - a^2\,p^3\,q + 2\,a^2\,b\,p\,q^2 + a\,b\,p^2\,q^2 - a^3\,q^3 - a^2\,p\,q^3\}}$
15	t5:=Rozklad(t4) → $\mathbf{t5 := \{-a\,(b\,p - q\,a)\,(b\,q\,p - q^2\,p - q^2\,a - p^3)\}}$

Obrázek 41: **Výpočet v GeoGebře, příklad 4.5**

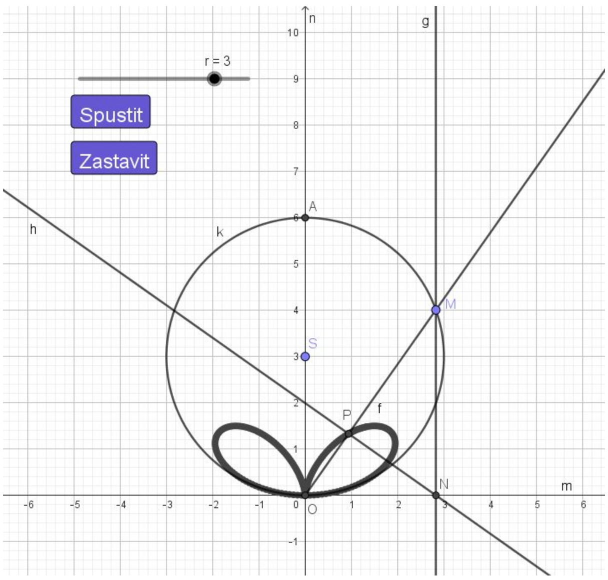
Příklad 4.6 *Jsou dány dvě na sebe kolmé přímky m, n, které se protínají v bodě O. Je dán bod A na n a kružnice k s průměrem OA. Z libovolného bodu M sestrojme kolmici na m, získáme bod N. Z bodu N sestrojme kolmici na MO, získáme bod P. Určete množinu všech bodů P, pokud se M pohybuje po kružnici k.*



Obrázek 42**: Zadání příkladu 4.6**

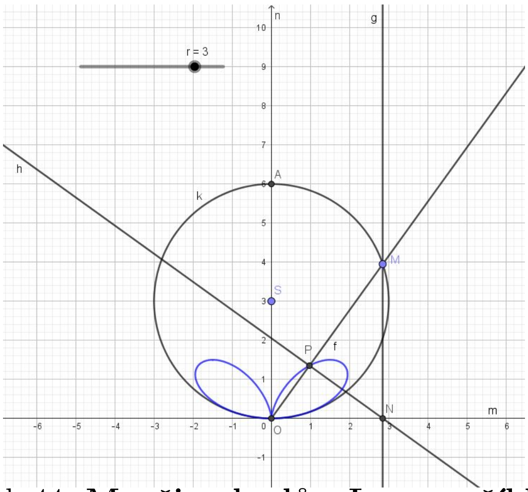
Řešení:

Nejprve použijeme příkaz Stopa v GeoGebře.



Obrázek 43**: Množina bodů - Stopa, příklad 4.6**

Poté příkaz Locus - vykreslí nám množinu bodů.



Obrázek 44**: Množina bodů - Locus, příklad 4.6**

Ruční výpočet:

$M \in c : u^2 + \left(v - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$,

$PN \perp MO : (p-u)u + qv = 0$,

P, M, O jsou kolineární: $pv \ - qu = 0$

Vyjádříme: $u = \frac{pv}{q}$

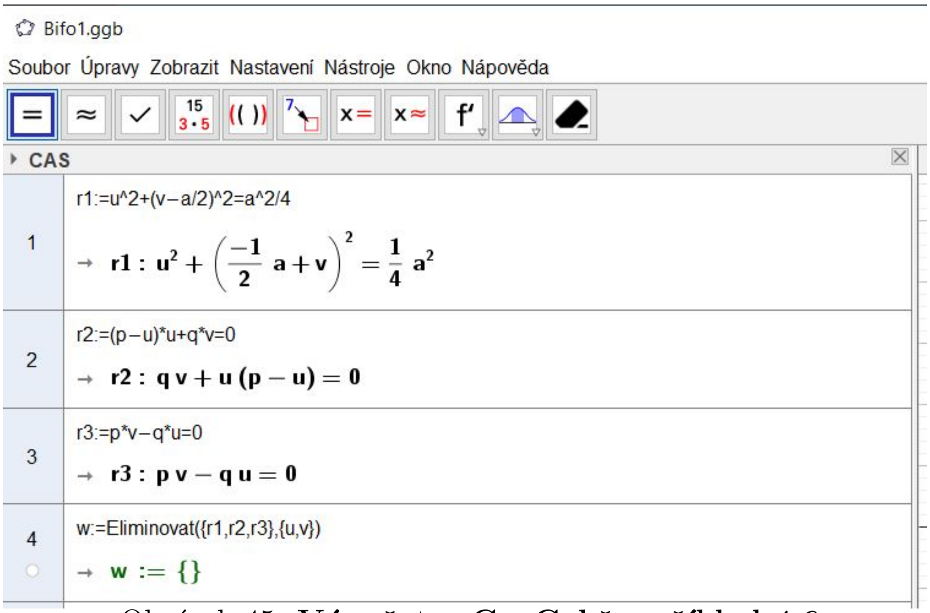
$$\begin{aligned}
\left(p - \frac{pv}{q}\right)\frac{pv}{q} + qv &= 0 \\
\frac{p^2v}{q} - \frac{p^2v^2}{q^2} + qv &= 0 \\
p^2vq - p^2v^2 + q^3v &= 0, \quad \text{předpokládejme } v \neq 0 \\
p^2q - p^2v + q^3 &= 0 \\
v &= \frac{q^3+p^2q}{p^2} \\
\frac{p^2v^2}{q^2} + \left(v - \frac{a}{2}\right)^2 &= \frac{a^2}{4} \\
\frac{p^2v^2}{q^2} + v^2 - 2v\cdot\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} &= \frac{a^2}{4} \\
\frac{p^2v^2}{q^2} + v^2 - va &= 0, \quad v \ \neq 0 \\
p^2v + vq^2 - aq^2 &= 0 \\
v(p^2+q^2) = aq^2 & \\
v = \frac{aq^2}{p^2+q^2} &
\end{aligned}$$

Tedy:

$$\begin{aligned}
\frac{q^3+p^2q}{p^2} &= \frac{aq^2}{p^2+q^2} \\
\frac{q^3+p^2q}{p^2} &= \frac{a}{\frac{p^2+q^2}{q^2}} \\
(q^3+p^2q)(p^2+q^2) &= aq^2p^2 \\
q^3p^2 + q^5 + p^4q + p^2q^3 &= aq^2p^2 \\
q^2p^2 + q^4 + p^4 + p^2q^2 &= aqp^2 \\
p^4 + 2q^2p^2 + q^4 &= aqp^2 \\
(p^2+q^2)^2 &= aqp^2
\end{aligned}$$

Dostali jsme rovnici křivky, která se nazývá bifolium (dvojlist).

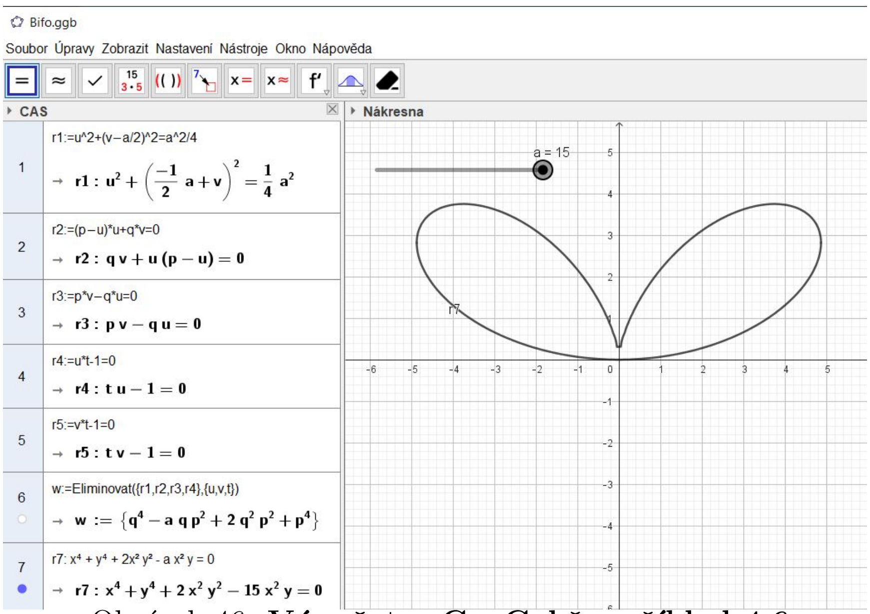
Výpočet v GeoGebře (eliminační ideál vyjde roven nule).



Obrázek 45: **Výpočet v GeoGebře, příklad 4.6**

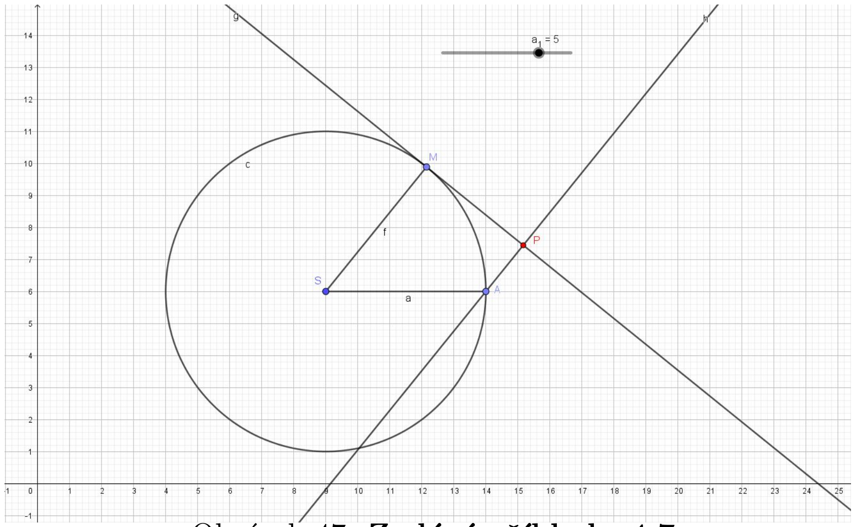
Můžeme předpokládat, že $v \neq 0$ (protože pokud $v = 0$, potom $M = 0$ a přímka OM není definována.

Po přidání podmínky $vt - 1 = 0$ (t je pomocná proměnná), dostaneme rovnici křivky - bifolium.



Obrázek 46: **Výpočet v GeoGebře, příklad 4.6**

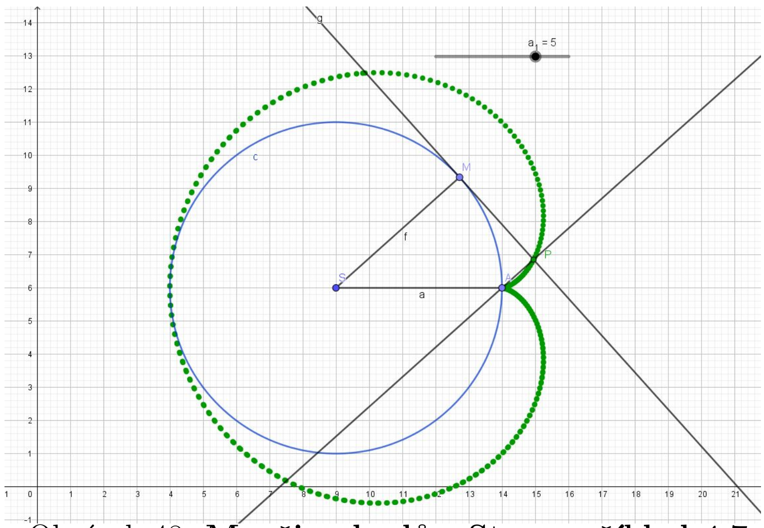
Příklad 4.7 *Nechť je dána kružnice k a bod A, $A \in k$. Nechť t je tečna kružnice v bodě M. Určete množinu všech bodů P, které leží na kolmici z A k tečně t a na tečně t, pokud pohybujete bodem M po kružnici k.*



Obrázek 47: **Zadání příkladu 4.7**

Řešení:

Nejprve využijeme příkaz Stopa v GeoGebře. Napoví nám, o jakou množinu se jedná.



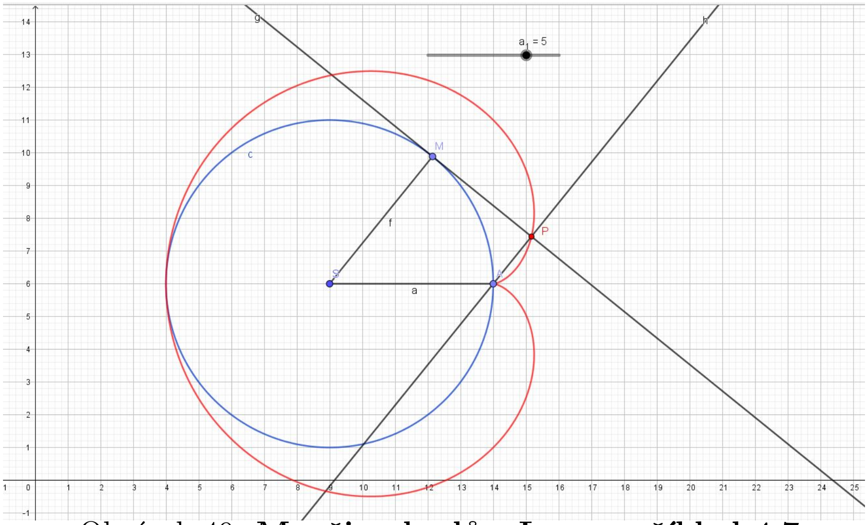
Obrázek 48: **Množina bodů - Stopa, příklad 4.7**

Poté využijeme příkaz Locus v GeoGebře.

Ruční výpočet:

Nechť k je kružnice se středem v $B = [a, 0]$, bod $A = [0, 0]$ leží na kružnici k a libovolný bod $M \in k$ je bodem dotyku tečny t.

Označme $M = [u, v]$ a $P = [p, q]$.



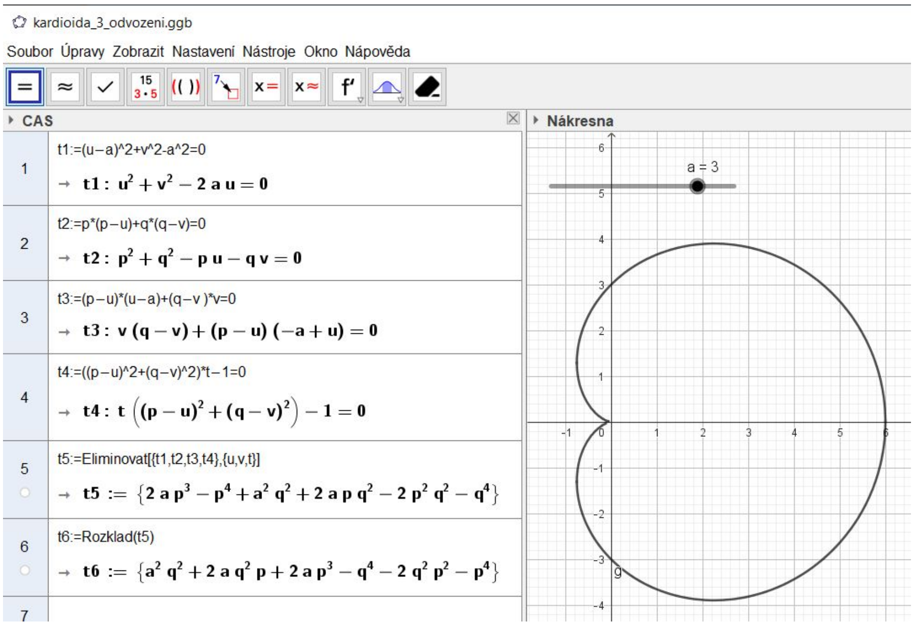
Obrázek 49: **Množina bodů - Locus, příklad 4.7**

Potom dostáváme:

$$M \in c \Leftrightarrow h_1 : (u-a)^2 + v^2 = a^2,$$
$$AP \perp MP \Leftrightarrow h_2 : p(p-u) + q(q-v) = 0,$$
$$PM \perp BM \Leftrightarrow h_3 : (p-u)(u-a) + (q-v) \cdot v \ = 0.$$

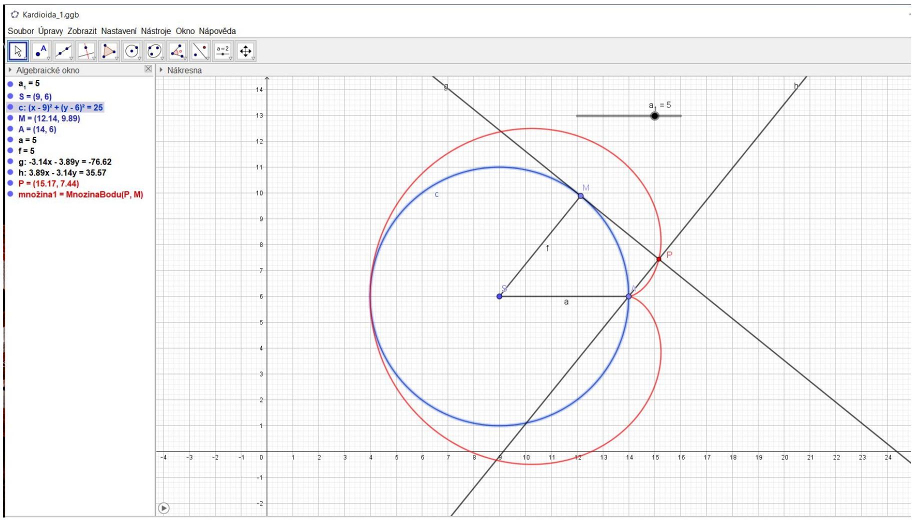
Budeme eliminovat u, v ze soustavy rovnic. V GeoGebře dostaneme pomocí příkazu Eliminovat rovnici:

$$(p^2 + q^2 - 2ap)\left((p^2 + q^2 - ap)^2 - a^2(p^2 + q^2)\right) = 0$$



Obrázek 50: **Výpočet v GeoGebře, příklad 4.7**

Jedná se o algebraickou křivku 4. stupně, která se skládá z kružnice $p^2+q^2-2ap=0$ a kardioidy, jež má rovnici $(p^2+q^2-ap)^2-a^2(p^2+q^2)=0$.



Obrázek 51: **Kardioida a kružnice, 4.7**

Kružnice se objeví, pokud bod P přejde do bodu M, tedy přímka PM není definována. Jestliže $u=p$ a $v=q$, pak dostaneme $p^2+q^2-2ap=0$, $h_2=0$, $h_3=0$.

Předpokládejme, že $P \neq M$, tj. $((p-u)^2+(q-v)^2)\,t-1=0$.

Poznámka. Pokud použijeme příkaz LocusEquation v GeoGebře, dostaneme správnou rovnici množiny bodů.

5 Cíle práce

Cílem práce je zmapovat současný stav v oblasti výuky a žákovských řešitelských strategií u polynomiálních rovnic a využití těchto soustav rovnic při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti na různých typech škol a na základě toho navrhnout v odůvodněných případech obohacení výuky v této oblasti o metody odrážející současné trendy ve využití výpočetní techniky. Problematika je zkoumána komplexně od SŠ až po přípravu učitelů, práce se zaměřuje i na studenty středních odborných škol, kteří nebývají tak často objektem výzkumu. V přípravě učitelů se budu věnovat především řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti.

Vzhledem k uvedenému cíli se zaměříme na:

a) současný stav výuky soustav polynomiálních rovnic z hlediska užívaných metod řešení na ZŠ, na SŠ a na fakultách připravujících učitele matematiky,

b) na řešení složitějších úloh, především úloh na množiny bodů dané vlastnosti, budoucími učiteli matematiky,

c) potenciál systémů počítačové algebry pro zlepšení současného stavu.

Na základě prostudované literatury a zkušeností z praxe jsem stanovila následující **výzkumné otázky a dílčí cíle**:

1. Jaké jsou strategie pro řešení soustav rovnic u žáků SŠ a studentů VŠ?
2. Jaké jsou strategie pro řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti u budoucích učitelů (studentů VŠ)?
3. Jaké jsou možnosti využití systémů počítačové algebry při řešení soustav polynomiálních rovnic a hledání množin bodů dané vlastnosti žáky SŠ a studenty VŠ?

Dílčí cíle:

1. Popsat stav současné výuky soustav polynomiálních rovnic na ZŠ a SŠ z hlediska metod řešení těchto soustav.
2. Prozkoumat strategie žáků a studentů při řešení soustav polynomiálních rovnic s důrazem na množiny bodů dané vlastnosti.
3. Pomocí participativního akčního výzkumu vytvořit učební materiál zaměřený na využití výpočetní techniky při řešení soustav polynomiálních rovnic. Vydefinovat rozsah využití vzniklého materiálu.

Výzkumná otázka 1 bude řešena v kapitole 6. Výzkumná otázka 2 bude řešena v kapitole 7 a výzkumná otázka 3 bude řešena v kapitole 8.

Jak již bylo naznačeno, práce obsahuje tři základní kapitoly - ontodidaktický pohled, strategie řešení žáků a studentů při řešení soustav rovnic (u SŠ spíše kvantitativní pohled, u VŠ kvalitativní) a akční výzkum.

6 Strategie řešení soustav rovnic na SŠ

6.1 Metodologie

V této podkapitole uvedeme metody, které budou použity pro vlastní řešení zkoumané problematiky v kapitolách 6, 7 a 8.

a) **Analýza a priori**

   Analýza a priori je podle teorie didaktických situací v matematice a podle Guy Brousseaua [12] jedním z důležitých nástrojů, které mají učitelé k dispozici při tvorbě přípravy výuky matematiky. Cílem analýzy a priori je co nejvíce a nejdetailněji odhadnout průběh vyučovací hodiny zejména s orientací na rozdělení vyučovací hodiny do jednotlivých úseků, na znalosti nezbytné pro řešení příkladů, na správné a chybné řešení příkladů, ale také na možné reakce žáků a reakce učitele na tyto reakce, tzn. chyby a jejich nápravy.

Analýza a priori je pro učitele velmi významná a má nezastupitelnou hodnotu. Napomáhá učiteli při přípravě výuky a způsobu přenosu obsahu žákům a upozorňuje na případná úskalí při výuce a možné těžkosti při řešení příkladů.

Analýzu a priori využiji na provedení analýzy úloh, zaměření se na možné metody řešení - žákovské strategie a na předpokládané chyby.

b) **Metoda didaktický test**

Tuto metodu v případě kvalitně vytvořeného didaktického testu můžeme zařadit do kvalitativního výzkumu. Pomocí připraveného didaktického testu je možné objektivně zjistit úroveň zvládnutí učiva respondentů/žáků. Výzkumný pracovník/učitel získá nestranný pohled na to, jak probíhala výuka a jaké výsledky si z výuky respondenti/žáci odnesli. Didaktický test na rozdíl od zkoušky se liší tím, že je navrhován a hodnocen podle předem stanovených pravidel.

Didaktický test je objektivní, přičemž spolehlivost testu může být kontrolována opakovaným použitím testu, je náročný na vnímavost žáka.

Metodu didaktický test jsem využila ve výuce na SŠ, při matematickém kempu a na VŠ. Na SŠ jsem zadala žákům úlohy na soustavy lineárních rovnic a slovní úlohy na řešení pomocí lineárních rovnic nebo soustav lineárních rovnic. Na VŠ jsem studentům zadala úlohy v předmětu Obecná algebra (KMT/OA/3).

c) **Metoda řízený rozhovor**

Metoda řízeného rozhovoru patří mezi metody kvalitativního výzkumu. Je založena na přímém dotazování, tedy na verbální komunikaci individuální či skupinové. Rozhovor k dané problematice probíhá mezi výzkumným pracovníkem/učitelem a respondentem/žákem (individuální) nebo výzkumným pracovníkem/učitelem a skupinou/třídou (skupinový). Při přípravě řízeného rozhovoru je nutno dbát na jasné určení problému a poté na určení dotazovaných (správný výběr respondentů/žáků). Musí být předem promyšlena volba typu rozhovoru a jasná formulace otázek. Je dobré prověřit si u respondentů/žáků správnou formulaci otázek a příp. je upřesnit.

V akademickém roce 2020/2021 jsem dělala rozhovory na SŠ po zpracování testu, kde jsem zjišťovala, proč studenti volili k řešení danou metodu, a s vysokoškolskými pedagogy na téma využití Gröbnerových bází při řešení soustav polynomiálních rovnic.

d) **Metoda dotazník**

Metoda dotazník, nebo-li dotazníkové šetření, je zařazena mezi metody kvantitativního výzkumu, kdy za krátký časový úsek je možné zjistit velké množství informací. Při dotazníkovém šetření mohou být odpovědi na otázky otevřené (neurčují přesný obsah ani formu), uzavřené (volba mezi 2 nebo více možnostmi, např. ano - ne - nevím) nebo s připraveným výběrem možností, kdy respondent/žák vybírá určitý bod na dané stupnici možností.

Tuto metodu jsem využila při výuce na SŠ, na matematickém kempu a při výuce předmětu Obecná algebra (KMT/OA/3) ke zjištění informací, názorů a pocitů studentů.

V rámci práce byly provedeny výzkumné sondy zaměřené na:

1. řešení soustav lineárních rovnic žáky SŠ,
2. řešení slovních úloh žáky SŠ,
3. řešení soustav polynomiálních rovnic nadanými žáky SŠ,
4. řešení soustav polynomiálních rovnic studenty učitelství matematiky,
5. řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti studenty učitelství matematiky.

Cílem všech sond bylo zjistit úspěšnost řešitelů a metody, které k řešení daného typu úloh použili.

6.2 Výzkumný soubor

Úlohy na řešení soustav lineárních rovnic a slovních úloh jsem zadala 76 žákům gymnázií a 78 žákům 1. ročníku Střední průmyslové školy dopravní v Plzni a 27 žákům 1. ročníku technického lycea Střední průmyslové školy stavební v Plzni. Žáci absolvovali různé základní školy (z Plzně a okolí). Úlohy byly zadány koncem prosince, tedy dříve, než v 1. ročníku nebo u gymnázií i v kvartě proběhlo opakování metod řešení soustav lineárních rovnic.

Výzkumným souborem pro řešení soustav polynomiálních rovnic a zodpovězení otázek bylo 5 studentů SŠ, kteří se zúčastnili matematického kempu a 11 studentů Fakulty pedagogické ZČU v Plzni.

Pro úlohy na množiny bodů dané vlastnosti tvořilo výzkumný soubor 6 studentů. Jednalo se o 3 studenty Fakulty pedagogické Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích a 3 studenty Fakulty pedagogické Západočeské univerzity v Plzni. Studenti učitelství matematiky v Českých Budějovicích řešili úlohy v rámci Geometrického semináře v angličtině, samostatně vypracovávali semestrální práci. Studenti učitelství matematiky řešili úlohy samostatně po výuce daného tématu v předmětu Obecná algebra (KMT/OA/3) v budově Fakulty pedagogické.

6.3 Realizace výzkumu na SŠ

6.3.1 Empirická sonda - řešení soustav lineárních rovnic na SŠ v Plzni

Středoškolští učitelé uvádějí, že při přechodu žáků ZŠ na SŠ se ukazuje, že úroveň jejich znalostí a dovedností z matematiky je z různých ZŠ (s rozdílnými ŠVP) velmi odlišná a někdy prakticky téměř nulová. Tyto skutečnosti vedou středoškolské učitele matematiky k tomu, že speciálně ve výuce partie o řešení soustav lineárních rovnic postupují často bez jakékoliv návaznosti na výstupy ze ZŠ.

Abychom zjistili, zda je takový přístup oprávněný, byla připravena empirická sonda zaměřená na to, co žáci SŠ znají o soustavách lineárních rovnic ze ZŠ.

Cíl: Zjistit, jaké znalosti a dovednosti v oblasti řešení soustav rovnic mají žáci nastupující na SŠ.

V souvislosti s uvedeným cílem formulujeme tři výzkumné otázky:

1. Jsou studenti schopni vyřešit předložené úlohy?
2. Jakým způsobem úlohy vyřeší? Kterou metodu žáci použijí nejčastěji?
3. Proč si vybrali právě danou metodu?

Odpovědi na výzkumné otázky byly hledány pomocí testu, který obsahoval 6 úloh na řešení soustav rovnic.

Úlohy jsem volila tak, aby žáci mohli využít jak metodu sčítací, tak dosazovací, a aby počítali i se zlomky. Do testu byla zařazena rovněž soustava 3 rovnic se 3 neznámými. Byla vybrána soustava rovnic, která má i nekonečně mnoho řešení, a soustava, která nemá řešení.

Metoda sběru dat: Písemné zpracování předložených úloh studenty.

Doba vypracování: 2 vyučovací hodiny (1,5 hodiny čistého času).

Možnost použití pomůcek: Papír, propisovací tužka, kalkulátor.

Průběh: V oboru reálných čísel řešte soustavy rovnic:

Úloha 1:

$$\begin{aligned} 4x+3y &= -4 \\ 6x+5y &= -7 \end{aligned}$$

Dá se předpokládat, že studenti budou řešit danou soustavu některou z metod, se kterými se seznámili na základní škole - metodou sčítací, metodou dosazovací či grafickým znázorněním. Abychom mohli analyzovat jejich postup, uvedeme stručně základní kroky řešení soustavy jednotlivými metodami. (Grafická metoda není uvedena, protože ji nikdo nepoužil.)

Sčítací metoda:

Řešení:

$$\begin{aligned} 4x+3y &= -4 \quad / \cdot 6 \\ 6x+5y &= -7 \quad / \cdot (-4) \end{aligned}$$

Krok 1 … Rovnice vynásobíme vhodnými čísly.

Krok 2 … Po sečtení rovnic dostaneme: $-2y = 4$.

Krok 3 … Zjistíme $y = -2$.

Krok 4 … Dopočteme $x = \frac{1}{2}$.

Dosazovací metoda:

Řešení:

Z první rovnice vyjádříme např. $x = -1 - \frac{3}{4}y$ a dosadíme do druhé rovnice

$$\begin{aligned} 6 \cdot (-1 - \tfrac{3}{4})y + 5y &= -7 \\ -6 - \tfrac{18}{4}y + 5y &= -7 \\ \tfrac{1}{2}y &= -1 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

a dopočteme $x = \frac{1}{2}$.

Krok 5 ... Vyjádření neznámé z jedné rovnice.

Krok 6 ... Dosazení neznámé do druhé rovnice a úprava rovnice.

Krok 7 ... Vypočtení jedné neznámé.

Krok 8 ... Vypočtení druhé neznámé.

Krok 9 (společný pro obě metody) ... Zápis řešení jako uspořádaná dvojice $[x, y]$.

Úloha 2:

$$\begin{aligned} 4x - y &= -1 \\ 6x + 3y &= 12 \end{aligned}$$

Sčítací metoda:

Řešení:

$$\begin{aligned} 4x - y &= -1 \quad / \cdot 3 \\ 6x + 3y &= 12 \quad / \cdot 1 \end{aligned}$$

Krok 1 ... Vynásobení rovnic vhodnými čísly.

Krok 2 ... Sečtení rovnic a správná úprava: $18x = 9$.

Krok 3 ... Správné vyřešení jedné neznámé, tedy $x = \frac{1}{2}$.

Krok 4 ... Správné dopočtení druhé neznámé, tedy $y = 3$.

Dosazovací metoda:

Řešení:

Vyjádříme např. $y = 1 + 4x$ a dosadíme do druhé rovnice. Dostaneme:

$$\begin{aligned} 6x + 3(1 + 4x) &= 12 \\ 18x &= 9 \\ x &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Po dosazení do vztahu $y = 1 + 4x$ získáme $y = 3$.

Krok 5 ... Vyjádření neznámé.

Krok 6 ... Dosazení neznámé do rovnice a úprava rovnice.

Krok 7 ... Vypočtení jedné neznámé.

Krok 8 ... Vypočtení druhé neznámé.

Krok 9 (společný pro obě metody) ... Zápis řešení jako uspořádaná dvojice $[x, y]$.

Úloha 3:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 6x - 4y &= 3 \end{aligned}$$

Sčítací metoda:

Řešení:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \quad / \cdot (-2) \\ 6x - 4y &= 3 \end{aligned}$$

Krok 1 ... Vynásobení rovnic vhodnými čísly.

Krok 2 ... Sečtení rovnic a správná úprava: $0y = 5$.

Krok 3 ... Diskuse řešení, tedy že soustava rovnic nemá řešení.

Dosazovací metoda:

Řešení:

Krok 5 ... Vyjádření jedné neznámé, např. $y = -2 + \frac{3}{2}x$.

Krok 6 ... Dosazení do druhé rovnice a správná úprava rovnice, např. $0x = -5$.

Krok 7 ... Diskuse řešení.

Úloha 4:

$$\begin{aligned} \tfrac{x+3}{2} - 5 &= y \\ y + \tfrac{7}{2} &= \tfrac{1}{2}x \end{aligned}$$

Sčítací metoda:

Řešení:

$$\begin{array}{rcl} \frac{x+3}{2} - 5 &=& y/\cdot 2, \\ y + \frac{7}{2} &=& \frac{1}{2}x/\cdot 2 \\ \hline x + 3 - 10 &=& 2y \\ 2y + 7 &=& x \\ \hline x - 2y &=& 7 \\ -x + 2y &=& -7 \\ \hline 0 &=& 0 \end{array}$$

Krok 1 ... Úprava rovnic, zbavení se zlomků.

Krok 2 ... Sečtení rovnic: $0 = 0$.

Krok 3 ... Diskuse řešení, tedy konstatování, že soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení.

Dosazovací metoda:

Řešení:

Krok 5 ... Vyjádření jedné neznámé, popř. úprava rovnice. Např. $y = \frac{x+3}{2} - 5$ nebo $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$.

Krok 6 ... Dosazení do druhé rovnice a správná úprava rovnice.

Krok 7 ... Diskuse řešení.

Úloha 5:

$$\begin{aligned} \tfrac{x+y}{5} + \tfrac{y}{5} &= -2 \\ \tfrac{2x-y}{3} - \tfrac{3x}{4} &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Sčítací metoda:

Řešení:

$$\begin{array}{rcr} x + 2y & = & -10 \\ 8x - 4y - 9x & = & 18 \\ \hline x + 2y & = & -10 \\ -x - 4y & = & 18 \end{array}$$

Krok 1 ... Úprava rovnic, vynásobení, abychom odstranili zlomky.

Krok 2 ... Vynásobení rovnic vhodnými čísly, sečtení rovnic: $-2y = 8$.

Krok 3 ... Vyjádření jedné neznámé $y = -4$.

Krok 4 ... Dopočtení druhé neznámé $x = -2$.

Dosazovací metoda:

Řešení:

Krok 5 ... Úprava rovnic, vyjádření jedné neznámé, např. $\frac{y}{5} = -2 - \frac{x+y}{5}$, tedy

$$\begin{aligned} y &= -10 - x - y \\ 2y &= -10 - x \\ y &= -5 - \tfrac{1}{2}x \end{aligned}$$

Krok 6 ... Dosazení do rovnice a následná úprava.

Krok 7 ... Vypočtení jedné neznámé.

Krok 8 ... Vypočtení druhé neznámé.

Úloha 6:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 4y + 7z &= 8 \\ 3x + 5y + 10z &= 10 \end{aligned}$$

Sčítací metoda:

Řešení:

$$\begin{array}{rcl} -2x - 2y - 4z &=& 0 \\ 2x + 4y + 7z &=& 8 \\ 3x + 5y + 10z &=& 10 \\ \hline x + y + 2z &=& 0 \\ 2y + 3z &=& 8 \\ 3x + 5y + 10z &=& 10 \\ \hline -3x - 3y - 6z &=& 0 \\ 2y + 3z &=& 8 \\ 3x + 5y + 10z &=& 10 \\ \hline 2y + 4z &=& 10 \\ 2y + 3z &=& 8 \\ 3x + 5y + 10z &=& 10 \\ \hline 3x + 5y + 10z &=& 10 \\ 2y + 3z &=& 8 \\ z &=& 2 \\ \hline z &=& 2 \\ y &=& 1 \\ x &=& -5 \end{array}$$

Krok 1 … Vhodné vynásobení a sečtení rovnic.

Krok 2 … Další vhodné vynásobení a sečtení vhodných rovnic.

Krok 3 … Získání soustavy 2 rovnic o 2 neznámých.

Krok 4 … Vypočtení jedné neznámé.

Krok 5 … Vypočtení druhé neznámé.

Krok 6 … Vypočtení třetí neznámé.

Dosazovací metoda:

Řešení:

Krok 7 … Vyjádření neznámé, např. $x = -y - 2z$.

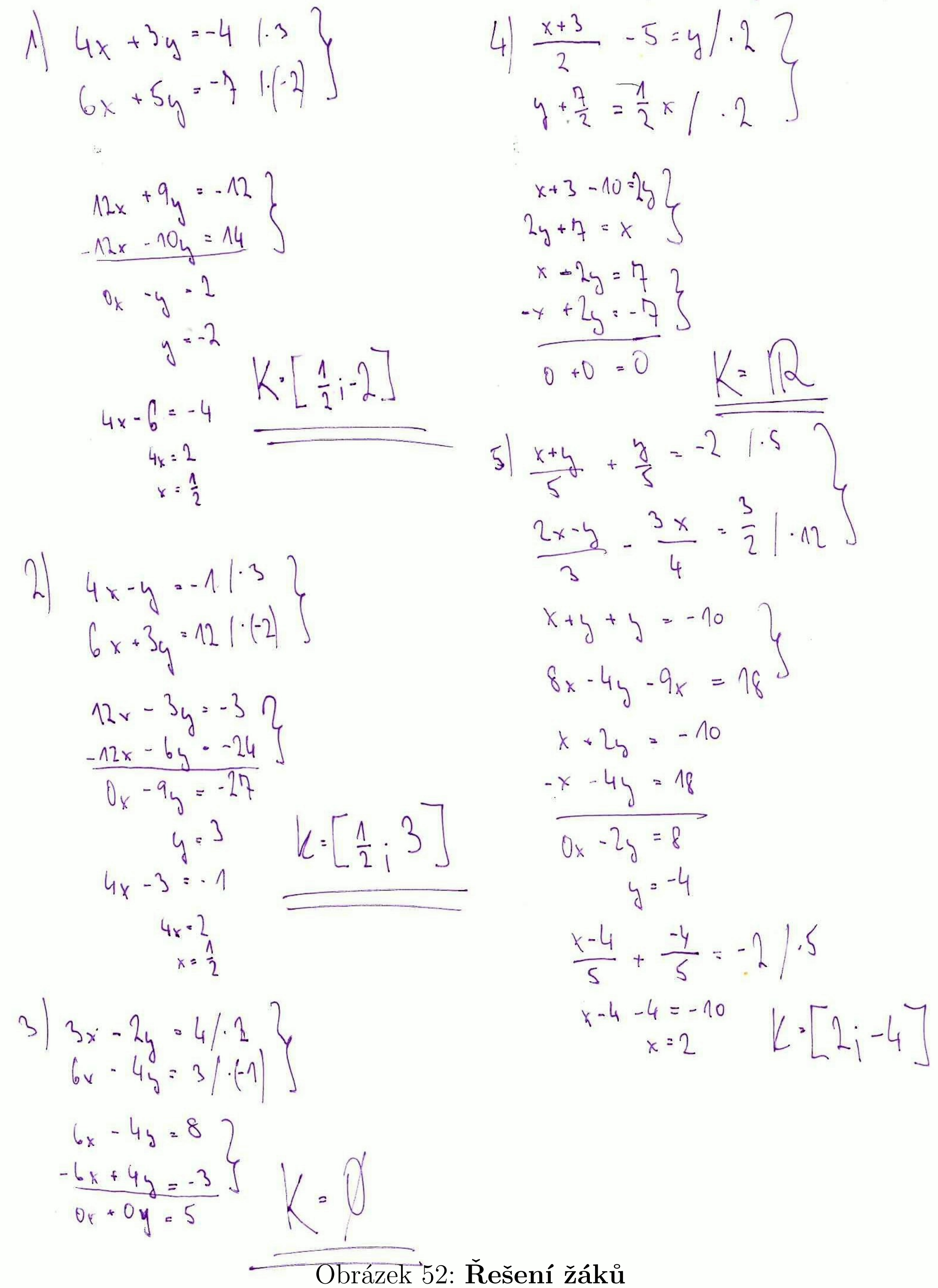
Krok 8 … Dosazení do dalších dvou rovnic a zisk soustavy 2 rovnic o 2 neznámých.

Krok 9 … Vypočtení neznámých.

Provedla jsem analýzu jednotlivých žákovských řešení. Zaznamenávala jsem provedené kroky žáků. Někdy to nebylo vůbec jednoduché a bylo těžké se orientovat v nepřehledném zápisu a škrtání. Setkala jsem se třeba i s tím, že žáci měli správně další postup, i když některý předchozí krok byl chybný nebo byl vynechán.

Dále uvádím ukázky některých žákovských řešení, popis analýzy jejich řešení a celkové výsledky provedené analýzy v daném souboru žáků.

Žáci gymnázií (76 žáků)



1) $4x+3y=-4 \;|\cdot 3$, $6x+5y=-7 \;|\cdot(-2)$

$12x+9y=-12$, $-12x-10y=14$

$0x-y=2$

$y=-2$

$4x-6=-4$

$4x=2$

$x=\frac{1}{2}$

$K=[\frac{1}{2};-2]$

2) $4x-y=-1 \;|\cdot 3$, $6x+3y=12 \;|\cdot(-2)$

$12x-3y=-3$, $-12x-6y=-24$

$0x-9y=-27$

$y=3$

$4x-3=-1$

$4x=2$

$x=\frac{1}{2}$

$K=[\frac{1}{2};3]$

3) $3x-2y=4 /\cdot 2$, $6x-4y=3 /\cdot(-1)$

$6x-4y=8$, $-6x+4y=-3$

$0x+0y=5$

$K=\emptyset$

4) $\frac{x+3}{2}-5=y /\cdot 2$, $y+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}x /\cdot 2$

$x+3-10=2y$, $2y+7=x$

$x-2y=7$, $-x+2y=-7$

$0+0=0$

$K=\mathbb{R}$

5) $\frac{x+y}{5}+\frac{y}{5}=-2 \;|\cdot 5$, $\frac{2x-y}{3}-\frac{3x}{4}=\frac{3}{2} \;|\cdot 12$

$x+y+y=-10$, $8x-4y-9x=18$

$x+2y=-10$, $-x-4y=18$

$0x-2y=8$

$y=-4$

$\frac{x-4}{5}+\frac{-4}{5}=-2 /\cdot 5$

$x-4-4=-10$

$x=2$

$K=[2;-4]$

Obrázek 52: **Řešení žáků**

KVARTA

6) $x+y+2z=0 \;|\cdot(-1)$
$2x+4y+7z=8 \;|\cdot(-1)$
$3x+5y+10z=10 \;|\cdot 1$

$-x-y-2z=0$
$-2x-4y-7z=-8$
$3x+5y+10z=10$

$0x+0y+z=2$
$z=2$

$x+y+4=0$
$2x+4y+14=8$
$3x+5y+20=10$

$x+y=-4 \;|\cdot(-9)$
$2x+4y=-6 \;|\cdot 1$
$3x+5y=-10 \;|\cdot 1$

$-9x+-9y=36$
$2x+4y=-6$
$3x+5y=-10$

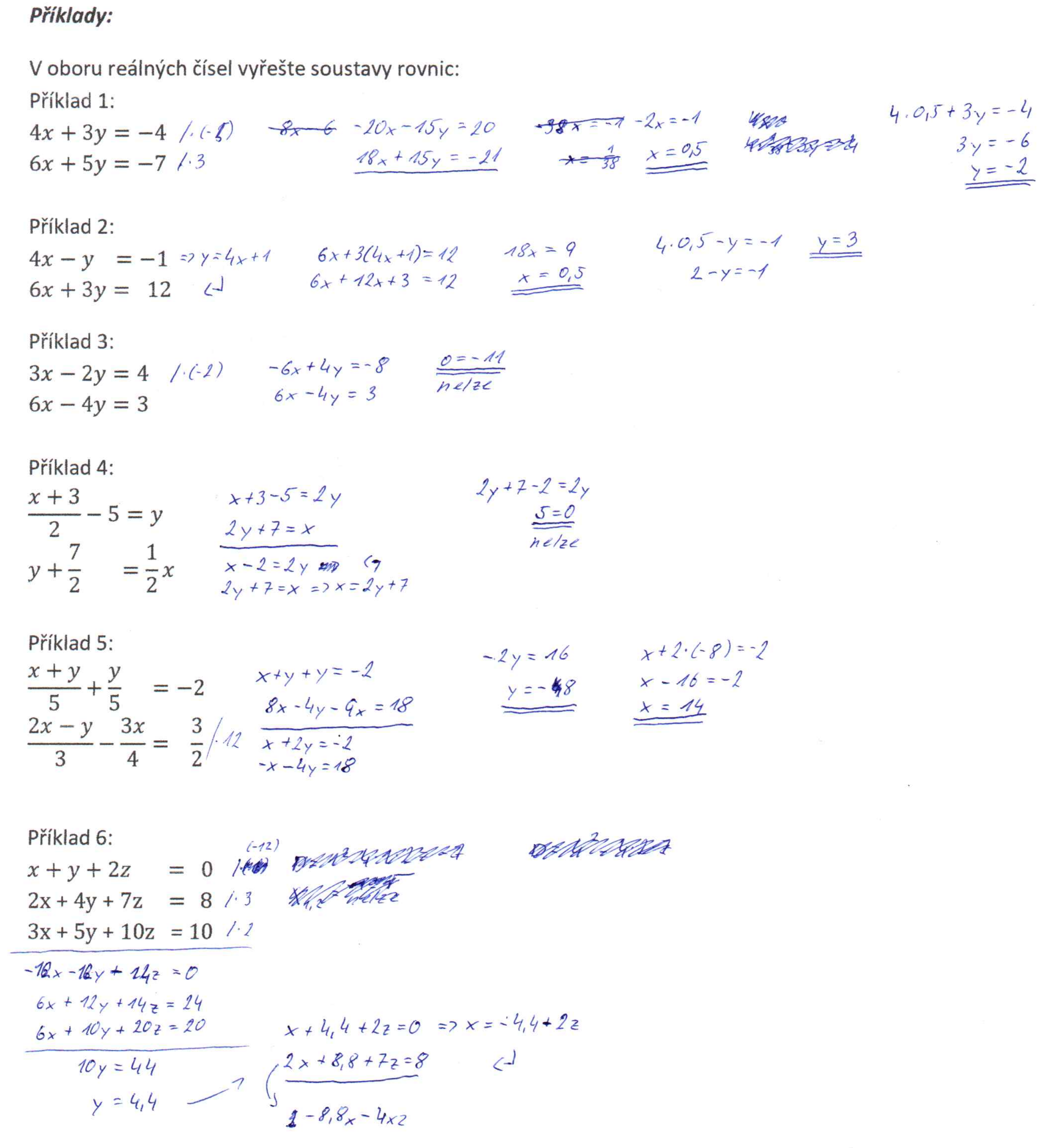
$4x+0y=20$
$4x=20$
$x=5$

$5+y+4=0$
$y=-9$

$K=[5;-9;2]$

Obrázek 53: **Řešení žáků**

Analýza příkladu 1: Žák provedl vynásobení první rovnice číslem 3 a vynásobení druhé rovnice číslem -2) (krok 1), obě rovnice sečetl (krok 2), správně určil hodnotu jedné neznámé $y=-2$ (3. krok) a dopočítal i hodnotu druhé neznámé a zapsal řešení (4. krok).



Obrázek 54: **Řešení žáků**

Analýza příkladu 4: Žák se chtěl správně zbavit zlomků. Chtěl tedy vynásobit obě rovnice dvěma. Chybně vynásobil první rovnici soustavy. Zapomněl dvěma vynásobit i číslo -5. Obdobně i v příkladu 5. Při vynásobení první rovnice soustavy pěti zapomněl vynásobit pěti i číslo -2. Žádný krok nebyl proveden správně.

Po provedení analýzy jednotlivých prací byly výsledky vyjádřené absolutními četnostmi výskytu kroků řešení shrnuty do tabulky 6 a výsledky vyjádřené relativními četnostmi do tabulky 7.

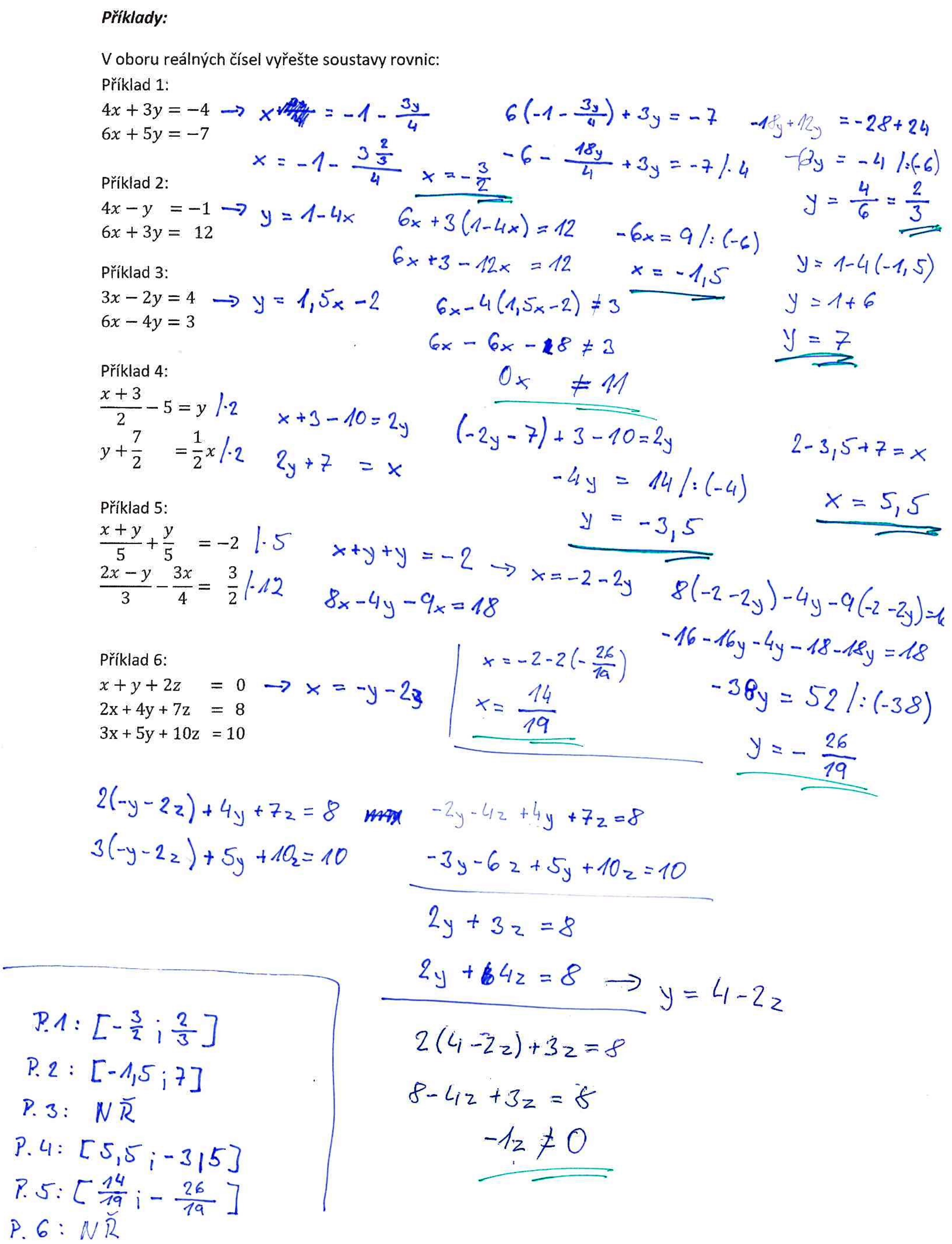
Úspěšnost řešení žáků						
Sčítací metoda						
	Krok 1	**Krok 2**	**Krok 3**	**Krok 4**	**Krok 5**	**Krok 6**
Příklad 1	40	36	36	36	-	-
Příklad 2	32	28	28	28	-	-
Příklad 3	32	32	32	-	-	-
Příklad 4	40	28	28	-	-	-
Příklad 5	36	20	20	20	-	-
Příklad 6	20	20	16	16	12	12
Dosazovací metoda						
	Krok 5	**Krok 6**	**Krok 7**	**Krok 8**	**Krok 9**	
Příklad 1	32	32	32	32	64	
Příklad 2	32	32	20	20	48	
Příklad 3	36	36	16	-	-	
Příklad 4	36	32	24	-	-	
Příklad 5	24	16	16	8	-	
Příklad 6	-	-	28	28	12	

Tabulka 6: **Řešení žáků gymnázií (absolutní četnosti)**

Úspěšnost řešení žáků (v %)						
Sčítací metoda						
	Krok 1	**Krok 2**	**Krok 3**	**Krok 4**	**Krok 5**	**Krok 6**
Příklad 1	52,6	47,4	47,4	47,4	-	-
Příklad 2	42,1	36,8	36,8	36,8	-	-
Příklad 3	42,1	42,1	42,1	-	-	-
Příklad 4	52,6	36,8	36,8	-	-	-
Příklad 5	47,4	26,3	26,3	26,3	-	-
Příklad 6	26,3	26,3	21,1	21,1	15,8	15,8
Dosazovací metoda						
	Krok 5	**Krok 6**	**Krok 7**	**Krok 8**	**Krok 9**	
Příklad 1	42,1	42,1	42,1	42,1	84,2	
Příklad 2	42,1	42,1	26,3	26,3	63,2	
Příklad 3	47,4	47,4	21,1	-	-	
Příklad 4	47,4	42,1	31,6	-	-	
Příklad 5	31,6	21,1	21,1	10,5	-	
Příklad 6	-	-	36,8	36,8	15,8	

Tabulka 7: **Řešení žáků gymnázií (relativní četnosti)**

Žáci střední průmyslové školy (105 žáků)



Příklady:

V oboru reálných čísel vyřešte soustavy rovnic:

Příklad 1:

$4x + 3y = -4$
$6x + 5y = -7$

Příklad 2:

$4x - y = -1$
$6x + 3y = 12$

Příklad 3:

$3x - 2y = 4$
$6x - 4y = 3$

Příklad 4:

$\frac{x+3}{2} - 5 = y$
$y + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}x$

Příklad 5:

$\frac{x+y}{5} + \frac{y}{5} = -2$
$\frac{2x-y}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{3}{2}$

Příklad 6:

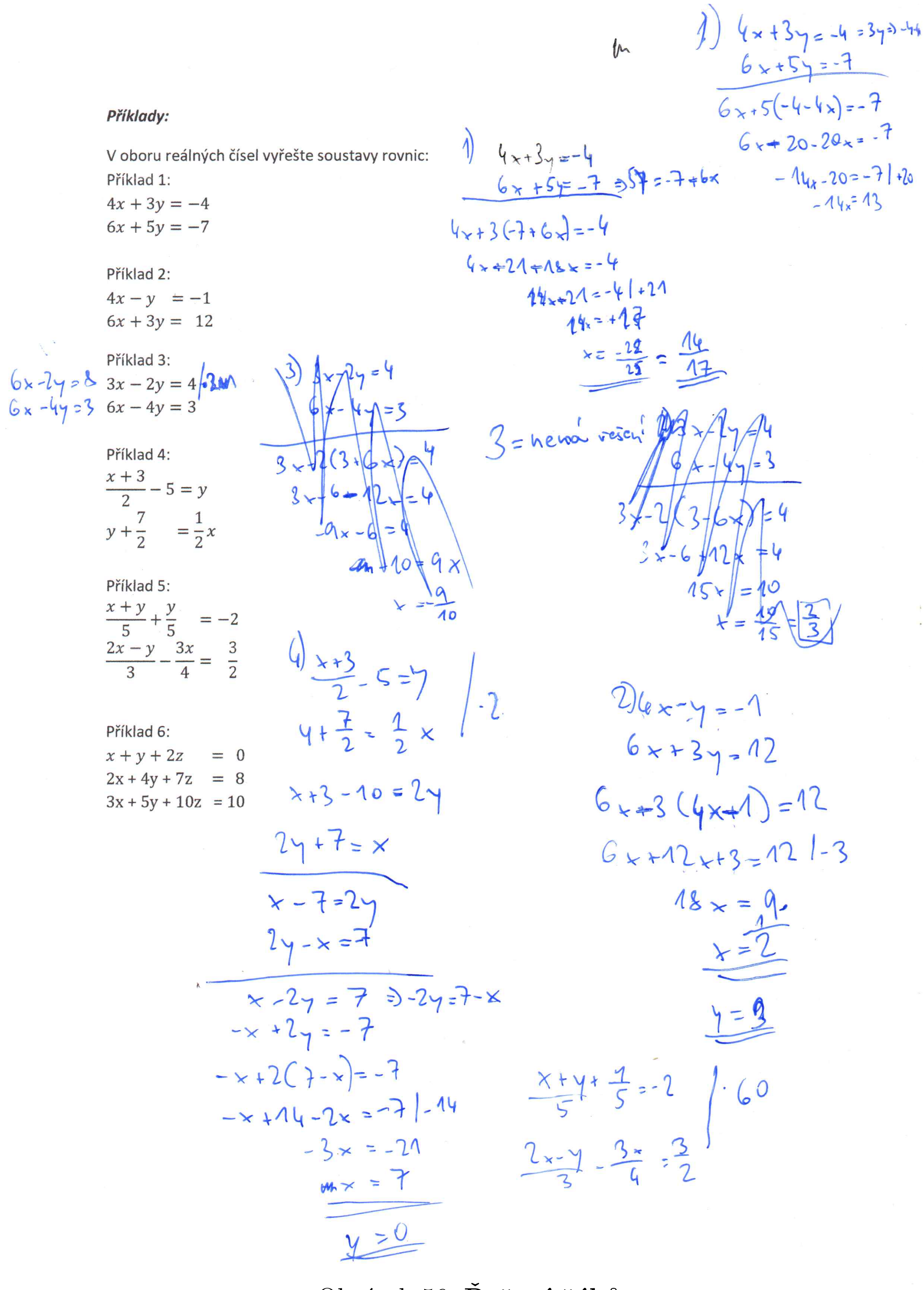
$x + y + 2z = 0$
$2x + 4y + 7z = 8$
$3x + 5y + 10z = 10$

P.1: $[-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}]$
P.2: $[-1{,}5; 7]$
P.3: NŘ
P.4: $[5{,}5; -3{,}5]$
P.5: $[\frac{14}{19}; -\frac{26}{19}]$
P.6: NŘ

Obrázek 55: **Řešení žáků**

Analýza příkladů 2 a 3: V příkladu 2 žák použil metodu dosazovací. Z první rovnice soustavy si chybně vyjádřil $y = 1 - 4x$. Žádné další kroky tedy nebyly provedeny správně.

V příkladu 3 použil žák také dosazovací metodu. Vyjádření $y = 1,5x - 2$ z první rovnice bylo správně. Ovšem po dosazení do druhé rovnice soustavy udělal žák chybu při odstraňování závorek.



Obrázek 56: **Řešení žáků**

Analýza příkladu 4: Žák si nejprve jednotlivé rovnice soustavy upravil, správně se zbavil zlomků. Krok 1 tedy provedl správně. Pak použil dosazovací metodu. Z upravené první rovnice soustavy si vyjádřil $-2y$. Dosadil toto vyjádření $(-2y = 7 - x)$ do druhé rovnice za y, tedy ne za $-2y$. Dospěl tedy ke špatnému řešení dané soustavy rovnic. Další kroky už nebyly správné.

Obdobně jako u žáků gymnázií jsou absolutní i relativní četnosti výskytů jednotlivých kroků řešení soustavy v tabulkách (tabulka 8, tabulka 9).

Úspěšnost řešení žáků						
Sčítací metoda						
	Krok 1	**Krok 2**	**Krok 3**	**Krok 4**	**Krok 5**	**Krok 6**
Příklad 1	64	58	40	40	—	—
Příklad 2	46	44	38	38	—	—
Příklad 3	44	39	30	—	—	—
Příklad 4	38	31	27	—	—	—
Příklad 5	37	31	29	28	—	—
Příklad 6	24	21	19	18	18	18
Dosazovací metoda						
	Krok 5	**Krok 6**	**Krok 7**	**Krok 8**	**Krok 9**	
Příklad 1	8	8	6	6	9	
Příklad 2	22	20	16	16	8	
Příklad 3	4	4	3	—	—	
Příklad 4	11	7	5	—	—	
Příklad 5	12	8	8	8	—	
Příklad 6	—	—	2	—	—	

Tabulka 8: **Řešení žáků průmyslových škol (absolutní četnosti)**

Úspěšnost řešení žáků (v %)						
Sčítací metoda						
	Krok 1	**Krok 2**	**Krok 3**	**Krok 4**	**Krok 5**	**Krok 6**
Příklad 1	61,0	55,2	38,1	38,1	—	—
Příklad 2	43,8	41,9	36,2	36,2	—	—
Příklad 3	41,9	37,1	28,6	—	—	—
Příklad 4	36,2	29,5	25,7	—	—	—
Příklad 5	35,2	29,5	27,6	26,7	—	—
Příklad 6	22,9	20,0	18,1	17,1	17,1	17,1
Dosazovací metoda						
	Krok 5	**Krok 6**	**Krok 7**	**Krok 8**	**Krok 9**	
Příklad 1	7,6	7,6	5,7	5,7	8,6	
Příklad 2	21,0	19,0	15,2	15,2	7,6	
Příklad 3	3,8	3,8	2,9	—	—	
Příklad 4	10,5	6,7	4,8	—	—	
Příklad 5	11,4	7,6	7,6	7,6	—	
Příklad 6	—	—	1,9	—	—	

Tabulka 9: **Řešení žáků průmyslových škol (relativní četnosti)**

Vyhodnocení získaných dat je provedeno v kapitole 6.3.3.

6.3.2 Empirická sonda - řešení slovních úloh pomocí soustav lineárních rovnic na SŠ

Protože se domnívám, že slovní úlohy jsou jedním z kritických míst v matematice nejen na základní, ale i na střední škole (viz kap. 2.4), provedla jsem další empirickou sondu.

Sondou jsem si chtěla ověřit, zda to platí i pro studenty nastupující na SŠ.

Cíl: Zjistit, jak žáci využívají k řešení slovních úloh lineární rovnice nebo soustavy linárních rovnic.

Definování výzkumných otázek:

1. Mají žáci naučené způsoby řešení? Nebo objevují nové řešitelské strategie?
2. Používají žáci k matematizaci reálné situace rovnici nebo soustavu rovnic?

Struktura testu: Vybrala jsem slovní úlohy o pohybu a na společnou práci. Volila jsem taková čísla, aby po správném sestavení rovnic nebyl výpočet obtížný, protože těžiště testu je v matematizaci reálné situace.

Metoda sběru dat: Písemné zpracování předložených slovních úloh žáky.

Doba vypracování: 2 vyučovací hodiny, tedy 90 minut času.

Možnost použití pomůcek: Papír, propisovací tužka, kalkulátor.

Příklad 1:

Na stole jsou dvě hromádky mincí. Obě hromádky obsahují pouze pětikorunové a dvoukorunové mince. První hromádka s 32 mincemi obsahuje pětinu všech pětikorunových mincí a polovinu všech dvoukorunových mincí. Druhá hromádka obsahuje zbývajících 68 mincí. Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtěte v korunách hodnotu všech mincí na stole. (Uveďte celý postup řešení a odpověď zapište celou větou.)

Možné řešení:

počet 5 Kč mincí $\ldots p$

počet 2 Kč mincí $\ldots d$

$$p + d = 100$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{5} + \frac{d}{2} &= 32 \\ \frac{4p}{5} + \frac{d}{2} &= 68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4p}{5} - \frac{p}{5} &= 68 - 32 \\ \frac{3p}{5} &= 36 \\ 3p &= 180 \\ p &= 60 \\ p + d &= 100 \\ d &= 40 \end{aligned}$$

$5 \cdot 60 + 2 \cdot 40 = 300 + 80 = 380$ Kč

Hodnota všech mincí (2 Kč i 5 Kč) je 380 Kč.

Příklad 2:

Rychlík ujede vzdálenost z místa A do místa B za 4 hodiny 20 minut. Osobní vlak, jehož průměrná rychlost je o 30 km/h menší, ujede tuto vzdálenost za 7 hodin 40 minut. Jaká je rychlost rychlíku a osobního vlaku?

Možné řešení:

$$\begin{aligned}
\text{rychlík} \ldots t_r = 4\,\text{h}\,20\,\text{min.} &= 4\tfrac{1}{3}\,\text{h},\\
\text{osobní vlak} \ldots t_o = 7\,\text{h}\,40\,\text{min.} &= 7\tfrac{2}{3}\,\text{h},\\
v_r &= ?\\
v_o &= ?\\
\hline
s_o &= v_o \cdot t_o\\
s_r &= v_r \cdot t_r \qquad v_r = 69\,\text{km/h},\\
\hline
(v_r - 30) \cdot t_o &= v_r \cdot t_r\\
(v_r - 30) \cdot 7\tfrac{2}{3} &= v_r \cdot 4\tfrac{1}{3}\\
\hline
\tfrac{23v_r}{3} - \tfrac{23\cdot 30}{3} &= \tfrac{13v_r}{3}\\
\tfrac{10}{3}v_r &= \tfrac{690}{3}
\end{aligned}$$

$v_o = 69 - 30 = 39\,\text{km/h}$,

$s_r = 4\frac{1}{3} \cdot 69 = \frac{13}{3} \cdot 69 = 299$ km,

$s_o = 7\frac{2}{3} \cdot 39 = \frac{23}{3} \cdot 39 = 299$ km.

Rychlost rychlíku je 69 km/h a rychlost osobního vlaku je 39 km/h. Vzdálenost z místa A do místa B je 299 km.

Příklad 3:

Dělník a učeň vykonají společnou práci za 6 hodin. Dělník ji sám vykoná za 10 hodin. Za jak dlouho by ji vykonal sám učeň?

Možné řešení:

dělník a učeň společně	......	6 hodin
dělník sám	......	10 hodin
učeň sám	......	x hodin

$$\begin{aligned}
\tfrac{6}{10} + \tfrac{6}{x} &= 1,\\
\tfrac{6}{x} &= \tfrac{10}{10} - \tfrac{6}{10},\\
\tfrac{6}{x} &= \tfrac{4}{10},\\
4x &= 60,\\
x &= 15.
\end{aligned}$$

Učeň by sám vykonal práci za 15 hodin.

Příklad 4:

Závod A je schopen splnit zakázku za 12 dnů, závod B splní tutéž zakázku za 18 dní. Za kolik dní bude zakázka splněna, jestliže první 2 dny na ní pracuje jen závod A a zbývající dny pak oba závody?

Možné řešení:

A . . . . 12 dní

B . . . . 18 dní

$$\begin{aligned} \tfrac{x}{12} + \tfrac{x-2}{18} &= 1, \\ 3x + 2x - 4 &= 36, \\ x &= 8. \end{aligned}$$

Zakázka bude splněna za 8 dní.

Příklad 5:

Petr vyšel z domova v 10:45 hodin průměrnou rychlostí 5 km/h, za 1/2 hodiny za ním vyjel na kole po stejné dráze Honza průměrnou rychlostí 20 km/h. Za kolik minut Honza dohoní Petra a kolik km přitom ujede?

Možné řešení:

Petr vyšel v 10:45 hodin . . . $v_P = 5$ km/h

Honza na kole . . . $v_H = 20$ km/h

$s_P = v_P \cdot t = 5 \cdot t$

$$\begin{aligned} s_P &= s_H, \\ v_P \cdot t &= v_H(t - 0,5), \\ 5 \cdot t &= 20(t - 0,5), \\ -15t &= -10, \\ s &= \tfrac{2}{3}\,\mathrm{h} = 40\,\mathrm{min.}, \\ 10\,\mathrm{h}\,45\,\mathrm{min.} + 40\,\mathrm{min.} &= 11\,\mathrm{h}\,25\,\mathrm{min.} \end{aligned}$$

$s_P = v_P \cdot t = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ km (Petr),

$s_H = v_H \cdot (t - 0,5) = 20 \cdot (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) = 20 \cdot \frac{1}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$ km (Honza).

Honza dohoní Petra za 40 minut, tj. v 11 hodin 25 minut a ujede vzdálenost $\frac{10}{3}$ km.

Zhodnocení vypracování slovních úloh:

Krok 1 . . . Správné sestavení rovnice nebo soustavy rovnic.

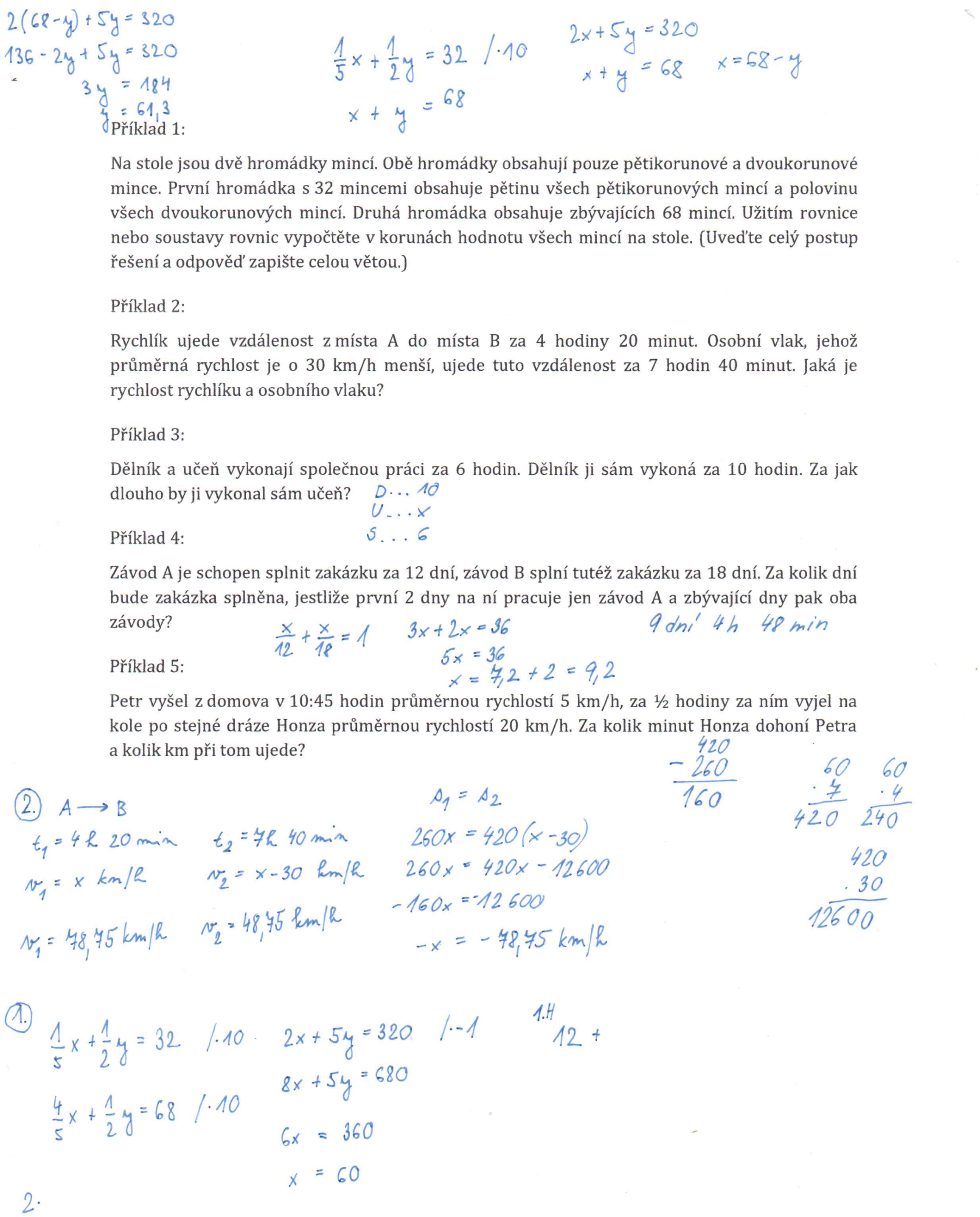
Krok 2 . . . Správné vyřešení rovnice nebo soustavy rovnic.

Krok 3 . . . Dojít ke správnému řešení pokusem, úvahou nebo odhadem.

Krok 4 . . . Správná interpretace výsledku.

Žáci gymnázií

Opět uvedeme ukázku žákovských prací, aby bylo zřejmé, jakým způsobem jsem prováděla analýzu jednotlivých řešení.



$2(68-y)+5y=320$
$136-2y+5y=320$
$3y=184$
$y=61{,}3$

$\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}y=32 \quad /\cdot 10$
$x+y=68$

$2x+5y=320$
$x+y=68 \quad x=68-y$

Příklad 1:

Na stole jsou dvě hromádky mincí. Obě hromádky obsahují pouze pětikorunové a dvoukorunové mince. První hromádka s 32 mincemi obsahuje pětinu všech pětikorunových mincí a polovinu všech dvoukorunových mincí. Druhá hromádka obsahuje zbývajících 68 mincí. Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtěte v korunách hodnotu všech mincí na stole. (Uveďte celý postup řešení a odpověď zapište celou větou.)

Příklad 2:

Rychlík ujede vzdálenost z místa A do místa B za 4 hodiny 20 minut. Osobní vlak, jehož průměrná rychlost je o 30 km/h menší, ujede tuto vzdálenost za 7 hodin 40 minut. Jaká je rychlost rychlíku a osobního vlaku?

Příklad 3:

Dělník a učeň vykonají společnou práci za 6 hodin. Dělník ji sám vykoná za 10 hodin. Za jak dlouho by ji vykonal sám učeň?

D … 10
U … x
S … 6

Příklad 4:

Závod A je schopen splnit zakázku za 12 dní, závod B splní tutéž zakázku za 18 dní. Za kolik dní bude zakázka splněna, jestliže první 2 dny na ní pracuje jen závod A a zbývající dny pak oba závody?

$\frac{x}{12}+\frac{x}{18}=1 \quad 3x+2x=36$
$5x=36$
$x=7{,}2+2=9{,}2$
9 dní 4 h 48 min

Příklad 5:

Petr vyšel z domova v 10:45 hodin průměrnou rychlostí 5 km/h, za ½ hodiny za ním vyjel na kole po stejné dráze Honza průměrnou rychlostí 20 km/h. Za kolik minut Honza dohoní Petra a kolik km při tom ujede?

(2.) A → B

$t_1 = 4\,h\ 20\,min \quad t_2 = 7\,h\ 40\,min$
$v_1 = x\ km/h \quad v_2 = x-30\ km/h$
$v_1 = 78{,}75\ km/h \quad v_2 = 48{,}75\ km/h$

$s_1 = s_2$
$260x = 420(x-30)$
$260x = 420x - 12600$
$-160x = -12600$
$-x = -78{,}75\ km/h$

$420 - 260 = 160$
$60 \cdot 7 = 420 \quad 60 \cdot 4 = 240$
$420 \cdot 30 = 12600$

(1.)
$\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}y=32 \quad /\cdot 10 \qquad 2x+5y=320 \quad /\cdot -1$
$\frac{4}{5}x+\frac{1}{2}y=68 \quad /\cdot 10 \qquad 8x+5y=680$
$6x=360$
$x=60$

1.H
12 +

2.

Obrázek 57: **Řešení žáků**

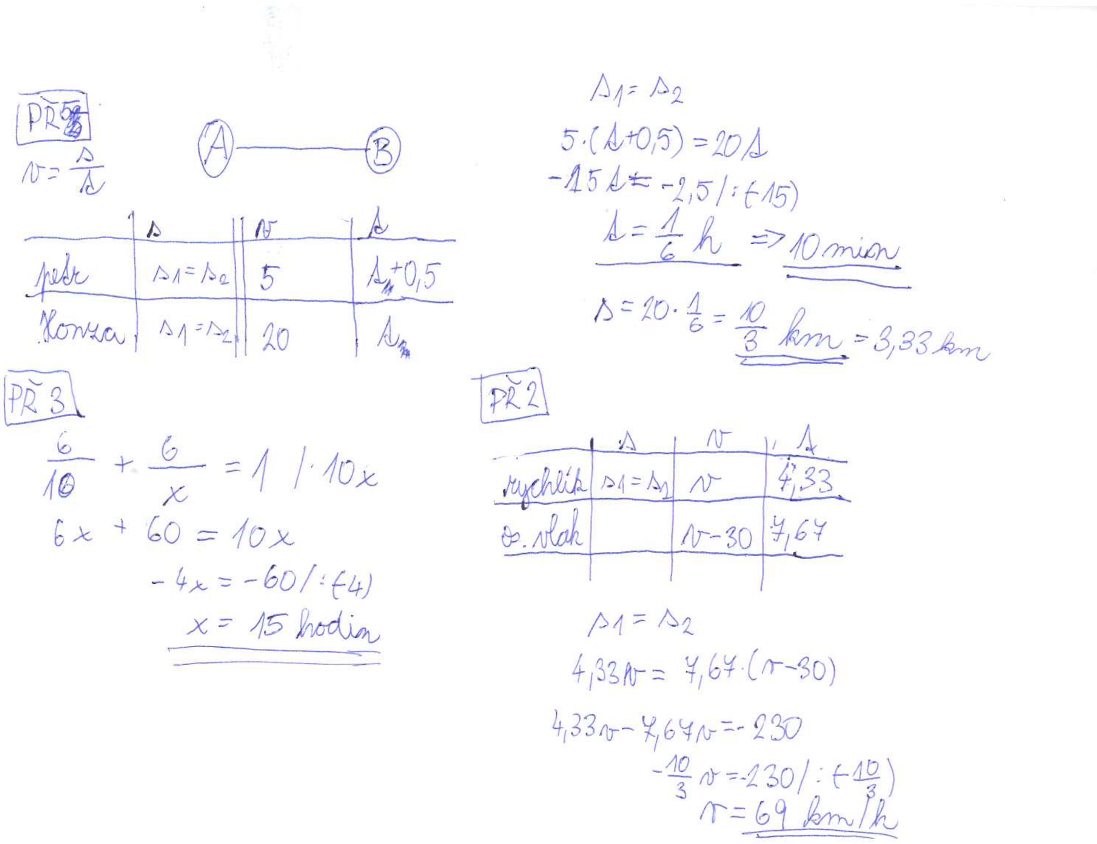
Analýza příkladu 1: Žák řešil první úlohu nejprve špatně. První rovnici sestavil správně, ale zbývající dvoukorunové a pětikorunové mince označil jen x, y a pak tedy získal rovnici $x + y = 68$. Poté se ale opravil a napsal správně $\frac{4}{5}x + \frac{1}{2}y$. O slovní úlohy o pohybu se žák vůbec nepokusil.

Absolutní a relativní četnosti výskytu jednotlivých kroků řešení slovních úloh jsou uvedeny v tabulce 10.

Slovní úlohy				
Úspěšnost řešení žáků				
	Krok 1	**Krok 2**	**Krok 3**	**Krok 4**
Příklad 1	52	51	-	51
Příklad 2	44	42	-	42
Příklad 3	51	51	-	51
Příklad 4	50	50	-	50
Příklad 5	39	38	-	38
Úspěšnost řešení žáků v %				
	Krok 1	**Krok 2**	**Krok 3**	**Krok 4**
Příklad 1	68,4	67,1	-	67,1
Příklad 2	60,3	55,3	-	55,3
Příklad 3	67,1	67,1	-	67,1
Příklad 4	65,8	65,8	-	65,8
Příklad 5	51,3	50,0	-	50,0

Tabulka 10: **Řešení slovních úloh žáky gymnázií (absolutní a relativní četnosti)**

Žáci průmyslových škol



PŘ 5

$v = \frac{s}{t}$

A —— B

	s	v	t
petr	$s_1 = s_2$	5	$t + 0,5$
Honza	$s_1 = s_2$	20	t

$s_1 = s_2$

$5 \cdot (t + 0,5) = 20t$

$-15t = -2,5 \;/ : (-15)$

$t = \frac{1}{6}\,h \Rightarrow 10\,min$

$s = 20 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{3}\,km = 3,33\,km$

PŘ 3

$\frac{6}{10} + \frac{6}{x} = 1 \;/ \cdot 10x$

$6x + 60 = 10x$

$-4x = -60 \;/ : (-4)$

$x = 15$ hodin

PŘ 2

	s	v	t
rychlík	$s_1 = s_2$	v	4,33
o. vlak		$v - 30$	7,67

$s_1 = s_2$

$4,33v = 7,67 \cdot (v - 30)$

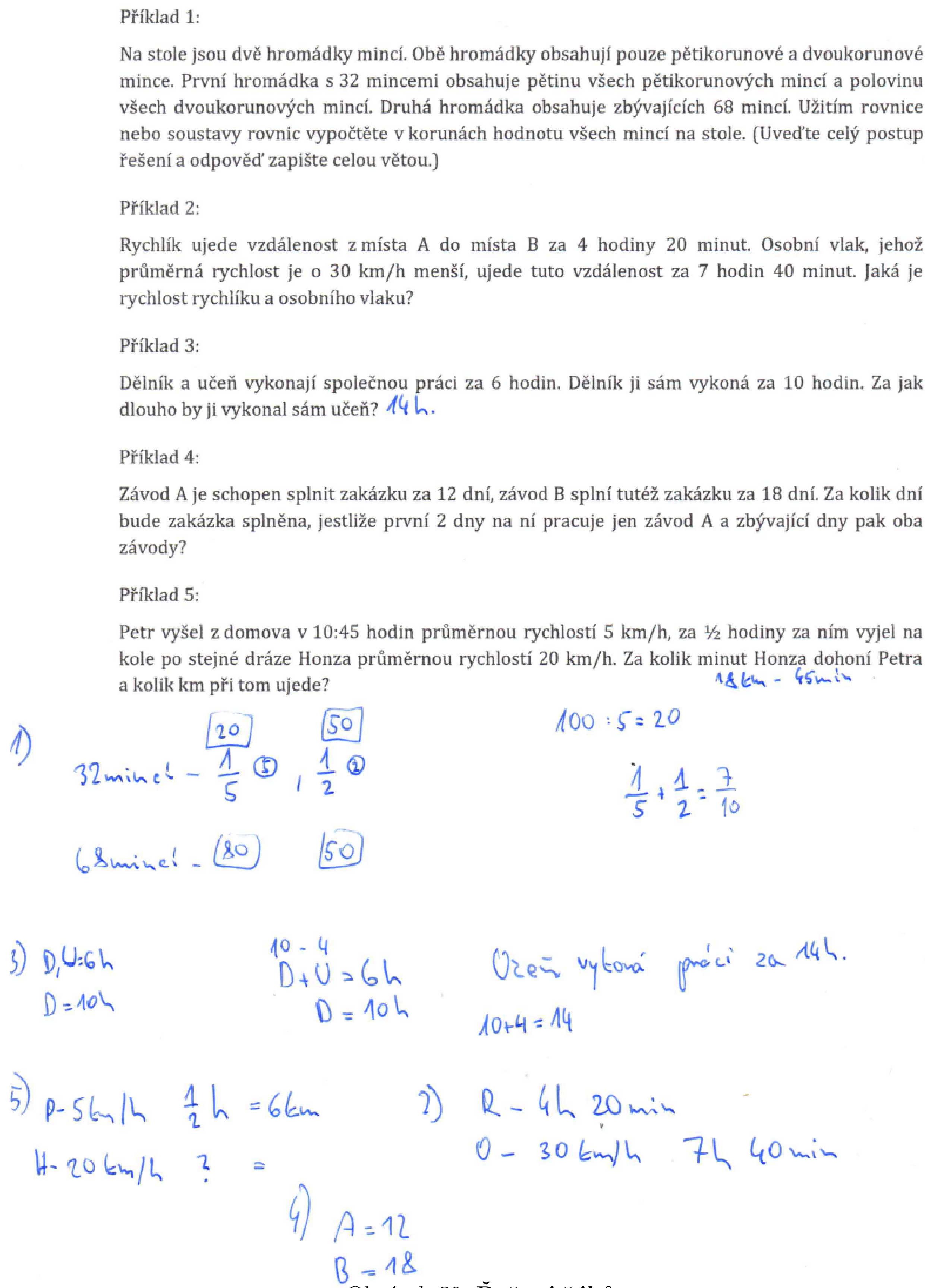
$4,33v - 7,67v = -230$

$-\frac{10}{3} v = -230 \;/ : \left(-\frac{10}{3}\right)$

$v = 69\,km/h$

Obrázek 58: **Řešení žáků**

Komentář k řešení: Žák správně vyřešil příklad 3 na společnou práci. O podobný příklad 4 se ani nepokusil. Úlohy o pohybu vyřešil správně.



Příklad 1:

Na stole jsou dvě hromádky mincí. Obě hromádky obsahují pouze pětikorunové a dvoukorunové mince. První hromádka s 32 mincemi obsahuje pětinu všech pětikorunových mincí a polovinu všech dvoukorunových mincí. Druhá hromádka obsahuje zbývajících 68 mincí. Užitím rovnice nebo soustavy rovnic vypočtěte v korunách hodnotu všech mincí na stole. (Uveďte celý postup řešení a odpověď zapište celou větou.)

Příklad 2:

Rychlík ujede vzdálenost z místa A do místa B za 4 hodiny 20 minut. Osobní vlak, jehož průměrná rychlost je o 30 km/h menší, ujede tuto vzdálenost za 7 hodin 40 minut. Jaká je rychlost rychlíku a osobního vlaku?

Příklad 3:

Dělník a učeň vykonají společnou práci za 6 hodin. Dělník ji sám vykoná za 10 hodin. Za jak dlouho by ji vykonal sám učeň? 14 h.

Příklad 4:

Závod A je schopen splnit zakázku za 12 dní, závod B splní tutéž zakázku za 18 dní. Za kolik dní bude zakázka splněna, jestliže první 2 dny na ní pracuje jen závod A a zbývající dny pak oba závody?

Příklad 5:

Petr vyšel z domova v 10:45 hodin průměrnou rychlostí 5 km/h, za ½ hodiny za ním vyjel na kole po stejné dráze Honza průměrnou rychlostí 20 km/h. Za kolik minut Honza dohoní Petra a kolik km při tom ujede? 18 km - 45 min

1) 32 mincí - $\boxed{20}$ $\frac{1}{5}$ 5 , $\boxed{50}$ $\frac{1}{2}$ 2

68 mincí - 80 $\boxed{50}$

100 : 5 = 20

$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$

3) D, U: 6 h

D = 10 h

10 - 4

D + U = 6 h

D = 10 h

Učeň vykoná práci za 14 h.

10 + 4 = 14

5) P - 5 km/h $\frac{1}{2}$ h = 6 km

H - 20 km/h ? =

2) R - 4 h 20 min

O - 30 km/h 7 h 40 min

4) A = 12

B = 18

Obrázek 59: **Řešení žáků**

Komentář k řešení: Žák si nevybavil, jak se řeší úlohy o společné práci. Chybně odvodil, že druhý dělník bude sám pracovat 14 hodin. O úlohy o pohybu se žák ani nepokusil.

Absolutní a relativní četnosti výskytu jednotlivých kroků řešení slovních úloh jsou uvedeny v tabulkách 11 a 12.

Úspěšnost řešení žáků				
	Krok 1	**Krok 2**	**Krok 3**	**Krok 4**
Příklad 1	39	36	2	38
Příklad 2	24	22	—	22
Příklad 3	37	29	3	32
Příklad 4	35	33	2	35
Příklad 5	21	19	-	19

Tabulka 11: **Řešení slovních úloh žáky průmyslových škol (absolutní četnosti**)

Úspěšnost řešení žáků (v %)				
	Krok 1	**Krok 2**	**Krok 3**	**Krok 4**
Příklad 1	37,1	34,3	1,9	36,2
Příklad 2	22,9	21,0	—	21,0
Příklad 3	35,2	27,6	2,9	30,5
Příklad 4	33,3	31,4	1,9	33,3
Příklad 5	20,0	18,1	-	18,1

Tabulka 12: **Řešení slovních úloh žáky průmyslových škol (relativní četnosti**)

6.3.3 Vyhodnocení dat

Získaná data (viz kapitoly 6.3.1 a 6.3.2) byla následně vyhodnocena s ohledem na položené výzkumné otázky.

a) **Příklady na soustavy lineárních rovnic:**

   Souhrnné zhodnocení:

   Nejčastější chyby:

   - Žáci jednotlivé rovnice vynásobili, ale nezvolili pro vynásobení vhodné číslo, takže po sečtení dospěli k jedné rovnici o dvou neznámých.
   - Žáci soustavy rovnic vyřešili jen pro jednu neznámou. Nedopočetli řešení pro druhou neznámou.
   - Žáci neuměli udělat závěr, zda soustava má nekonečně mnoho řešení nebo nemá řešení.
   - Žáci udělali často chybu ve znaménku nebo nevynásobili číslem celou rovnici.

V rámci souhrnného zhodnocení lze dojít k závěru, že žáci středních průmyslových škol většinou využívali metodu sčítací, výjimečně metodu dosazovací, metodu srovnávací nepoužil a ani nezkusil použít nikdo. Žáci gymnázií využívali stejně metodu sčítací i dosazovací, srovnávací metodu také nepoužil nikdo.

Z tabulky 9 je patrné, že úspěšnost řešení žáků středních průmyslových škol se pohybuje kolem 30 – 40 %. Nejnižší úspěšnost je u příkladu, kdy žáci měli řešit soustavu 3 rovnic o třech neznámých (příklad 6). Úspěšnost žáků gymnázií je o něco vyšší, kolem 60 %. Nejnižší úspěšnost je také u příkladu 6, ale správně jej vyřešilo více žáků. Žáci gymnázií více používali metodu dosazovací než žáci středních průmyslových škol.

Test byl doplněn diskusí s žáky (celou třídou) následující hodinu. Ve třídě jsem položila otázku, proč žáci využívali nejčastěji sčítací metodu a odpovědi žáků jsem si zapisovala. Nejčastěji odůvodňovali volbu metody zkušenostmi ze ZŠ, metodu si nejvíce pamatovali, neboť ji na ZŠ nejvíce procvičovali.

b) **Příklady na slovní úlohy - zhodnocení:**

Nejčastější chyby:

- Pro žáky bylo obtížné sestavit rovnici nebo soustavu rovnic.
- Žáci nevyřešili soustavu rovnic správně, udělali chyby v průběhu řešení (nevynásobili vhodným číslem celou rovnici nebo měli problémy při počítání se zlomky).
- Žáci neuměli správně interpretovat svůj výsledek, resp. uvedli špatnou odpověď na otázku.

Pro žáky bylo obtížné správně sestavit rovnici. Někteří zkusili slovní úlohu řešit pokusem. Většina se ale snažila sestavit rovnici nebo soustavu rovnic. Úspěšnost žáků středních průmyslových škol byla zhruba kolem 27 %. Úspěšnost žáků gymnázií byla vyšší, kolem 60 %. U slovních úloh na společnou práci a o pohybu používali žáci naučené postupy.

7 Strategie při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti

7.1 Empirická sonda - množiny bodů dané vlastnosti na VŠ

Abychom ukázali možnost využití výpočetní techniky i při řešení geometrických úloh, provedla jsem šetření zaměřené na úlohy na aplikace řešení soustav polynomiálních rovnic při určování množin bodů dané vlastnosti.

Tyto úlohy obsahují 2 fáze - sestavit rovnice, vyřešit soustavu rovnic. (Při řešení nám pomůže příkaz Locus, protože eliminace ručně je někdy obtížná.)

Uvedené úlohy činí potíže studentům na fakultách připravujících učitele matematiky.

Úlohy jsem zadala studentům VŠ - budoucím učitelům matematiky a analyzovala jsem jejich řešení.

Domnívám se, že učitelé matematiky by měli znát i další křivky, nejen kružnici, elipsu, parabolu a hyperbolu.

Provedení sondy navazovalo na výuku předmětu KMT/OA/3, ve kterém studenti získali základní informace o moderních metodách řešení soustav polynomiálních rovnic a o možnostech jejich aplikace při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti. Po absolvování kurzu jsem požádala studenty, aby se dostavili na další setkání, během kterého si procvičí aplikační úlohy s uvedeným zaměřením. Setkání se zúčastnili 3 studenti.

Cíl: Zjistit, zda jsou studenti učitelství matematiky na pedagogické fakultě schopni řešit obtížnější úlohy na množiny bodů dané vlastnosti užitím ručního výpočtu a pomocí GeoGebry.

Metoda sběru dat: Písemné zpracování předložených úloh studenty.

Doba vypracování: 3 vyučovací hodiny (2,25 hodin čistého času).

Možnost použití pomůcek: Papír, tužka, kalkulátor, program GeoGebra.

Analýza dat, závěrečné zhodnocení.

Průběh: Třem studentům 3. ročníku Fakulty pedagogické Západočeské univerzity v Plzni jsem zadala následující příklady.

Příklad 1: Je dána úsečka AB a přímka p. Určete množinu průsečíků výšek H trojúhelníku ABC, jestliže se bod C pohybuje po dané přímce p.

Příklad 2: Je dána úsečka AB a bod C, který leží na kružnici k se středem v bodě A a poloměrem AB. Určete množinu průsečíků výšek H trojúhelníku ABC.

Příklad 3: Určete množinu všech středů P rovnostranného trojúhelníka KLM, který je vepsaný do dané elipsy, když se bod M pohybuje po elipse.

Studentům jsem zadala následující úkoly:

Vyřešte následující příklady:

a) zkuste odhadnout, o jakou množinu bodů se jedná,
b) zjistěte rovnici množiny bodů pomocí tužky a papíru,
c) použijte software GeoGebra, který pomůže k získání obrázku a rovnice množiny bodů,
d) pokud vám to nepůjde ručně, zkuste využít software GeoGebra a poté zkuste přijít na rovnice množin bodů výpočtem.

Zhodnocení vypracovaných úloh:

Obdobně jako při analýze řešení úloh žáky střední školy jsem stanovila základní kroky, které budu při vyhodnocování jednotlivých řešení sledovat.

Ruční výpočet:

Krok 1 . . . poznat množinu bodů

Krok 2 . . . umět sestavit potřebné rovnice

Krok 3 . . . ze soustavy rovnic eliminovat potřebné proměnné - získat rovnici množiny bodů

GeoGebra:

Krok 4 . . . poznat množinu bodů

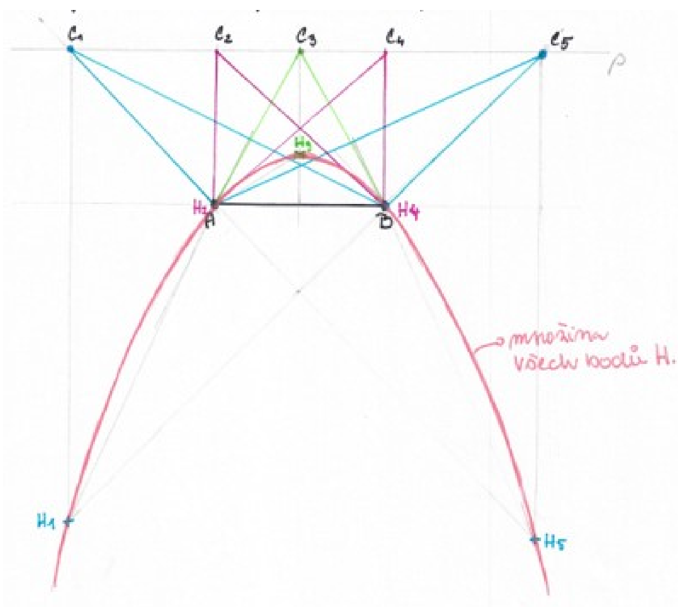
Krok 5 . . . získat rovnici množiny bodů

Nyní provedeme analýzu řešení jednotlivými studenty z hlediska provedených kroků a z hlediska chyb, kterých se student dopustil.

Student 1

Příklad 1:

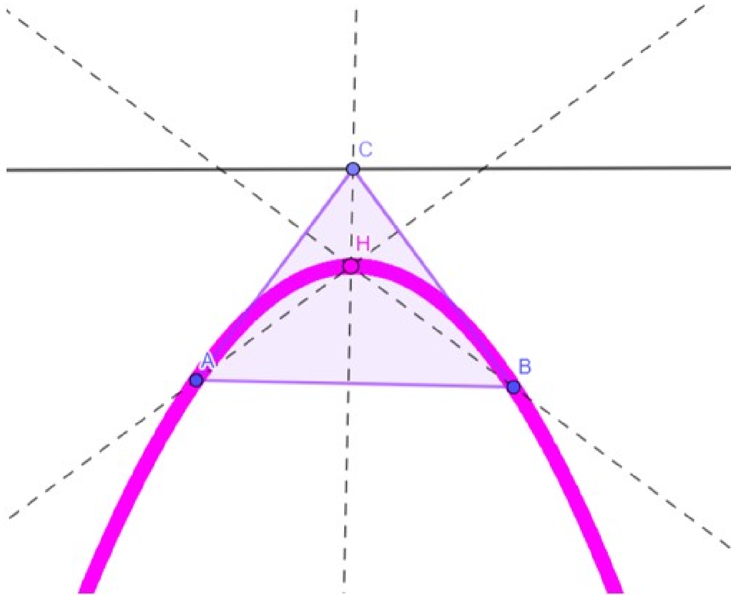
a) Krok 1 . . . Student odhadl, že se jedná o parabolu. Nepřišel na to, že by množinou bodů mohla být hyperbola.



Obrázek 60: **Student 1 - příklad 1 a)**

b) O ruční výpočet se student nepokusil. Napsal pouze vrcholovou rovnici paraboly $(y-n)^2 = \pm 2p(x-m)$.

c) Pomocí GeoGebry získal student také parabolu. Krok 2 a 3 student neprovedl správně. Krok 4 student provedl částečně, poznal jen parabolu. Krok 5 správně neprovedl.



Obrázek 61: **Student 1 - příklad 1 c)**

Příklad 2 a 3: Obdobně řešil student i příklady 2 a 3 (viz obr. 62 a 63).

Příklad 2:

a) Krok 1 student provedl jen částečně. Správně odhadl množinu bodů, ale neuměl ji pojmenovat.

b) O ruční výpočet se student nepokusil, napsal jen rovnici Descartova listu, ani ne strofoidy. Krok 2 a 3 tedy neprovedl.

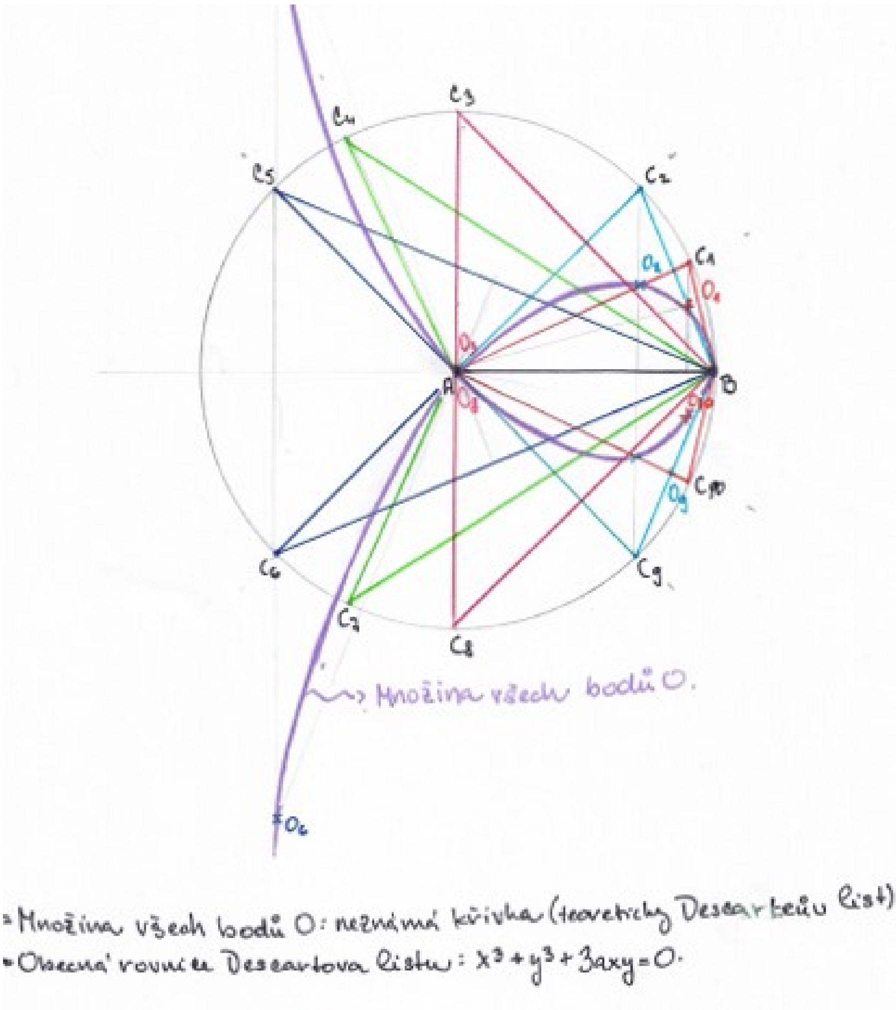
c) V GeoGebře student množinu bodů správně znázornil, čímž provedl správně krok 4. Krok 5 správně neprovedl.

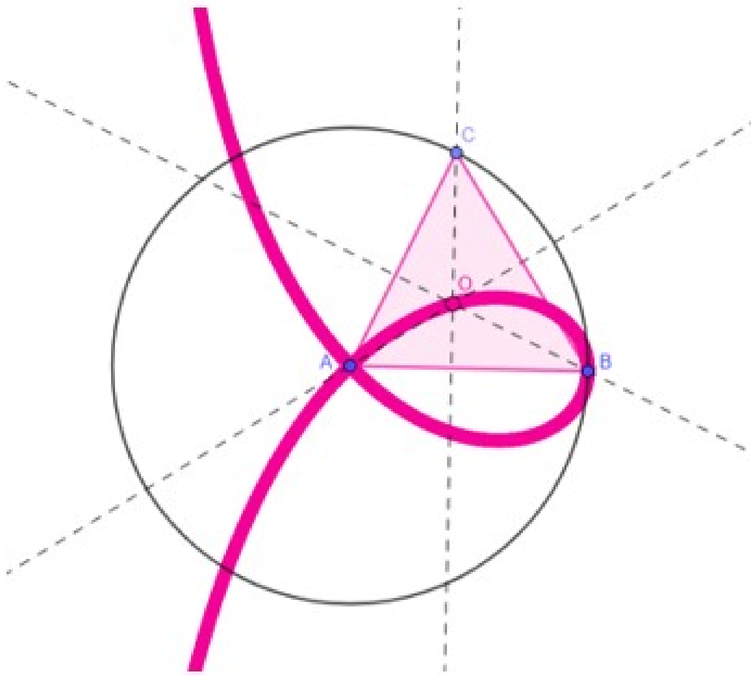
Příklad 3:

a) Student správně nakreslil situaci a odhadl, že se bude jednat o elipsu. Krok 1 provedl správně.

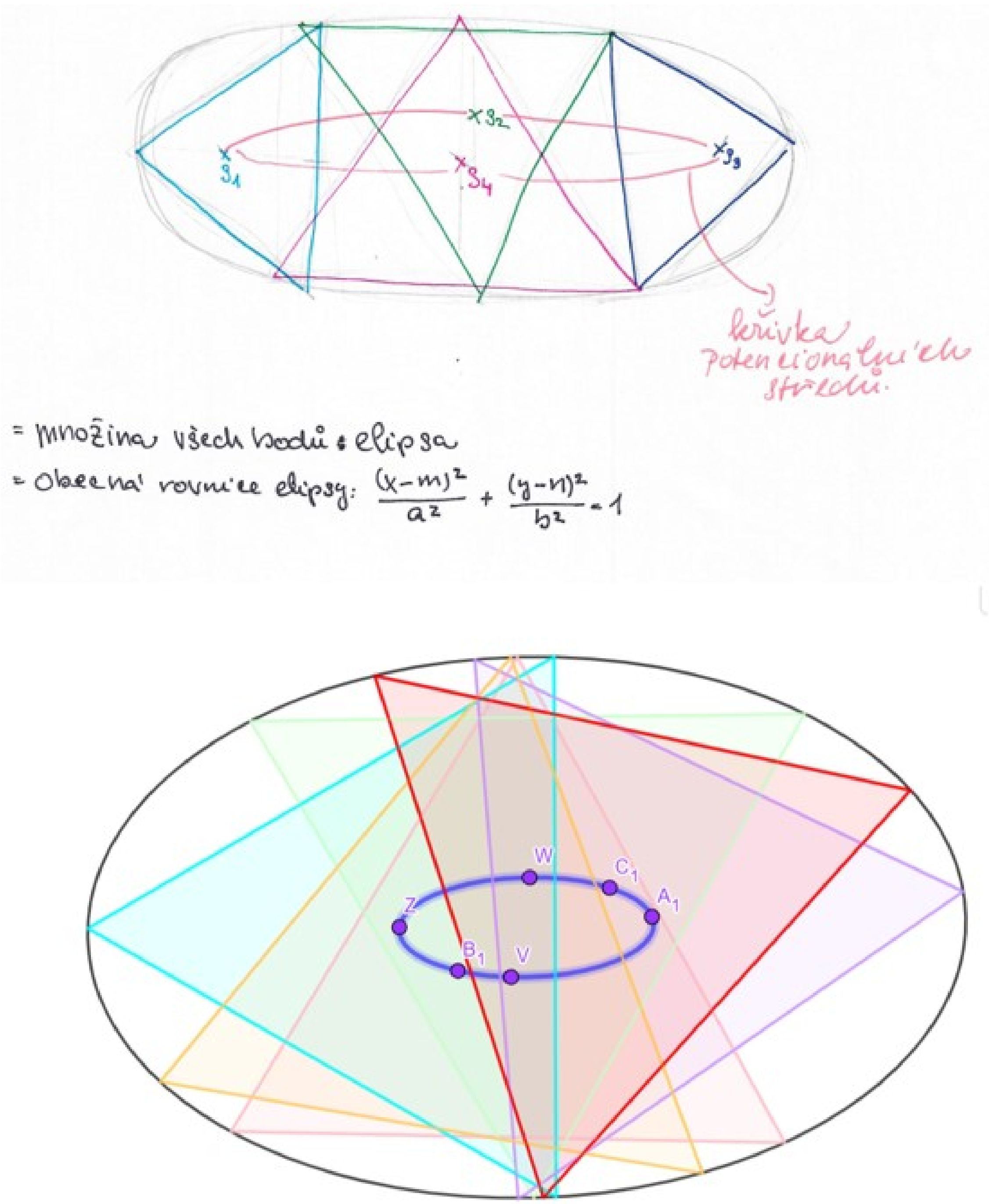
b) O ruční výpočet se student nepokusil, napsal jen středovou rovnici elipsy. O kroky 2 a 3 se student tedy nepokusil

c) Pomocí GeoGebry student znázornil elipsu, o rovnici se také nepokusil.Student množinu bodů poznal (krok 4), ale krok 5 nezvládl.





Obrázek 62: **Student 1 - příklad 2**



Obrázek 63: **Student 1 - příklad 3**

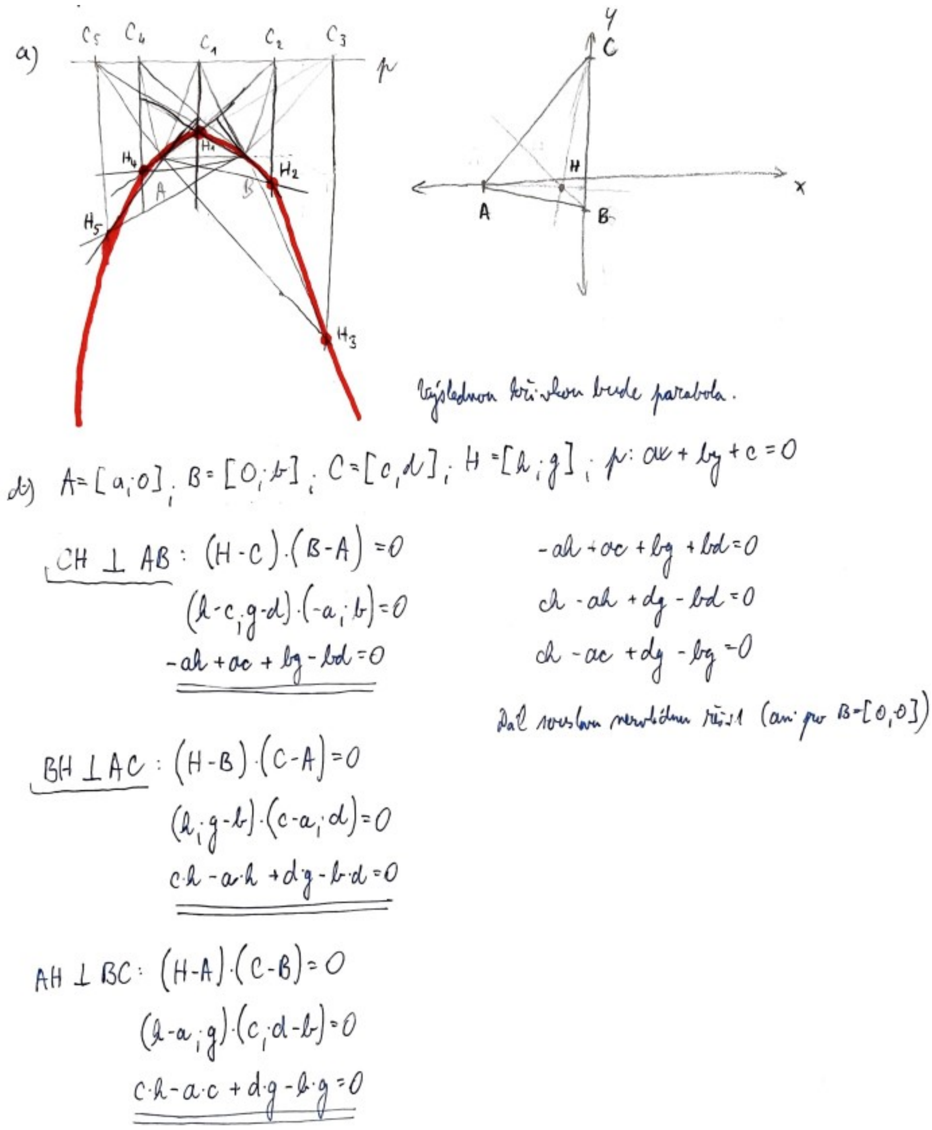
Student 2

Příklad 1:

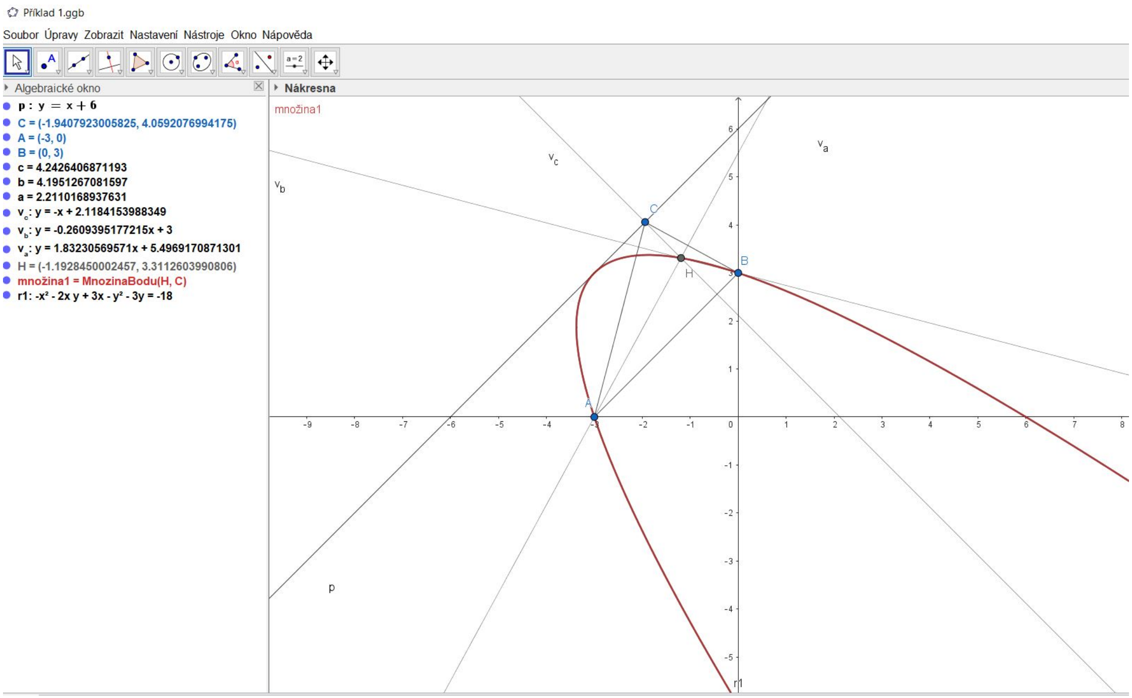
a) Student situaci správně nakreslil. Získal ale jen parabolu, už ne hyperbolu. Krok 1 tedy částečně provedl.

b) Krok 2 student zvládl. Pokusil se sestavit příslušné rovnice. Nezkusil už ale eliminovat souřadnice pohyblivých bodů. Krok 3 tedy nebyl správně proveden.

c) Pokusil se o eliminaci v GeoGebře. Nedostal rovnici množiny bodů, ale prázdný ideál. Krok 4 a 5 student částečně provedl.



Obrázek 64: **Student 2 - příklad 1**



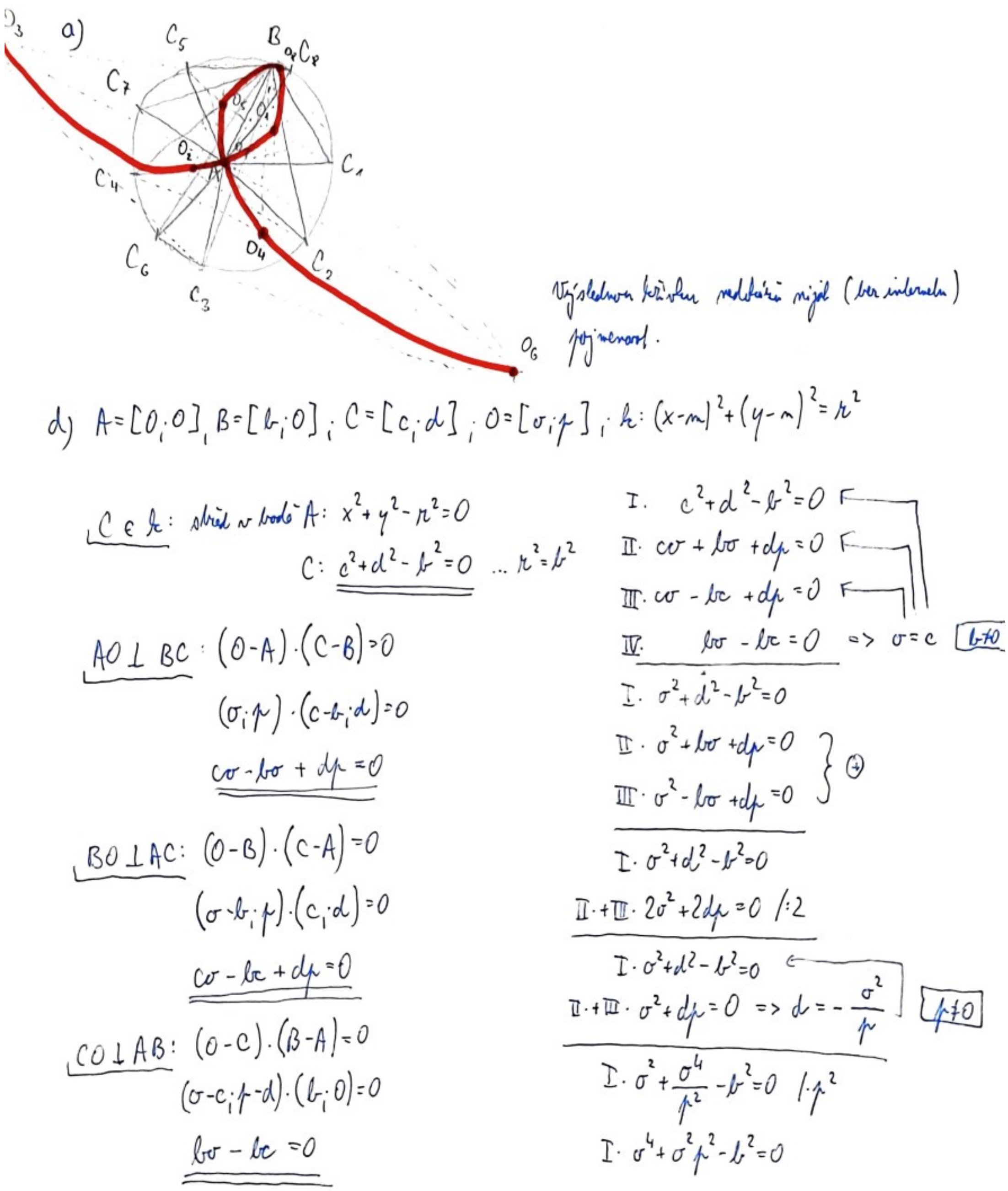
Obrázek 65: **Student 2 - příklad 1 - GeoGebra**

Příklad 2:

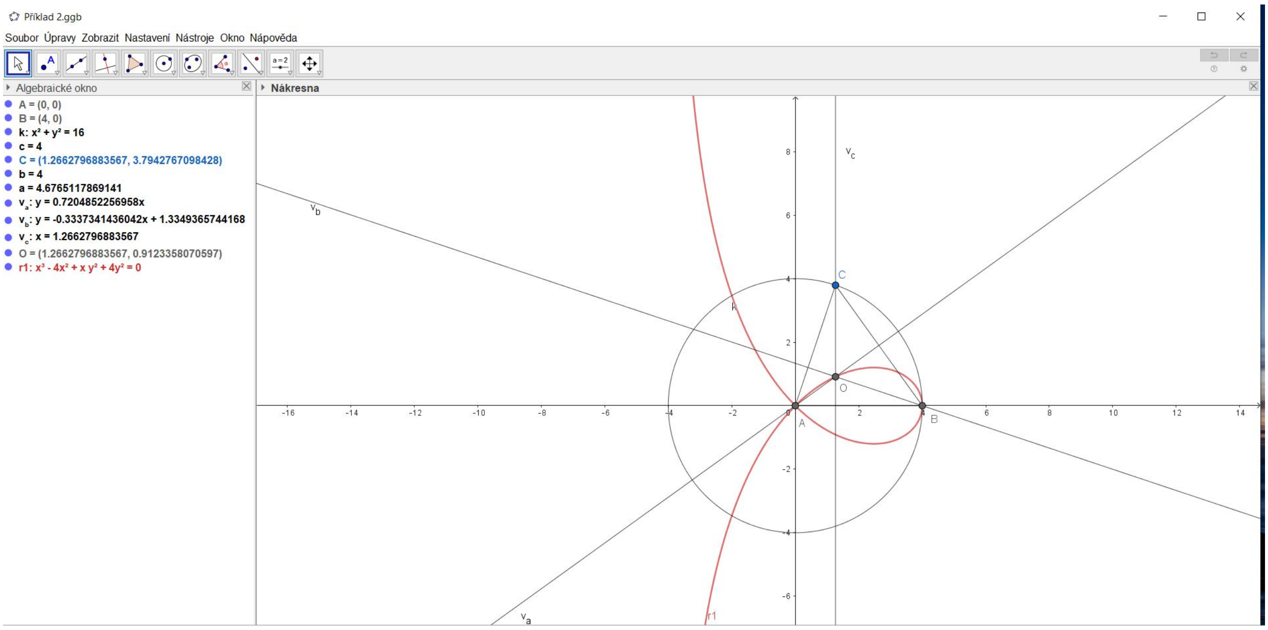
a) Student situaci správně nakreslil. Získal množinu bodů, kterou ale neuměl pojmenovat. Krok 1 student provedl správně.

b) Student se pokusil získat potřebné rovnice. Zkusil eliminovat proměnné o, p, ale nezískal správnou rovnici množiny bodů. Krok 2 student provedl správně, krok 3 pouze částečně.

c) V GeoGebře získal strofoidu. Rovnici množiny bodů ale pomocí GeoGebry nezískal. Krok 4 student zvládl, ale krok 5 už ne.



Obrázek 66: **Student 2 - příklad 2**



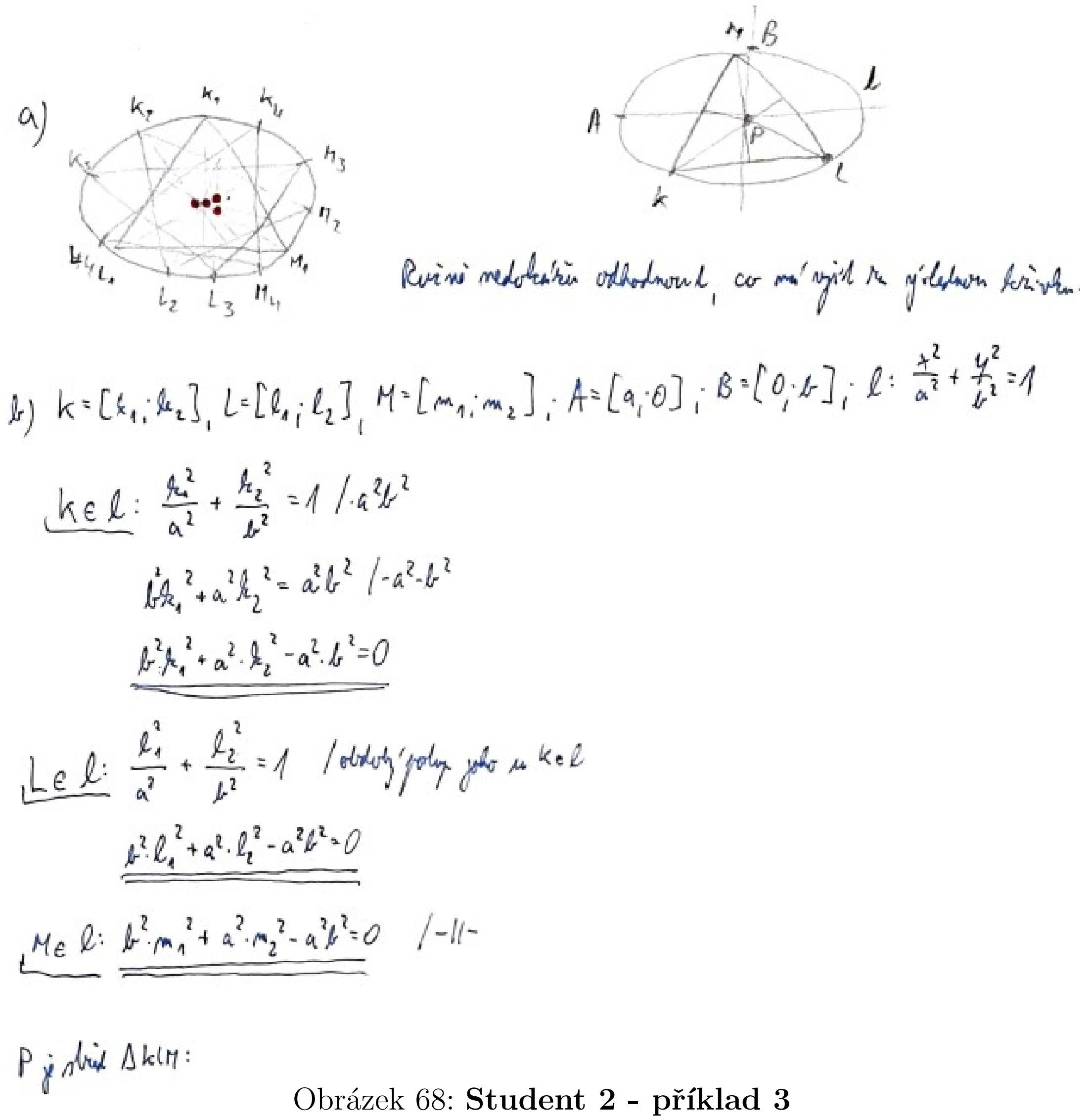
Obrázek 67: **Student 2 - příklad 2 - GeoGebra**

Příklad 3:

a) Student situaci nakreslil. Ručně ale neodhadl, o jakou množinu bodů se jedná. Krok 1 student tedy nezvládl, ale krok 2 částečně splnil.

b) Zkusil získat potřebné rovnice. O eliminaci se ale pokusil. Krok 3 tedy nebyl správně proveden.

c) V GeoGebře tento příklad student nezkoušel. O kroky 4 a 5 se student tedy nepokusil.


a)

Rovnici nedokážu odhadnout, co má vyjít za výslednou křivku.

b) $K=[k_1;k_2]$, $L=[l_1;l_2]$, $M=[m_1;m_2]$; $A=[a;0]$; $B=[0;b]$; $l: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$K\in l$: $\frac{k_1^2}{a^2}+\frac{k_2^2}{b^2}=1 \quad / \cdot a^2b^2$

$b^2k_1^2+a^2k_2^2=a^2b^2 \quad /-a^2\cdot b^2$

$b^2\cdot k_1^2+a^2\cdot k_2^2-a^2\cdot b^2=0$

$L\in l$: $\frac{l_1^2}{a^2}+\frac{l_2^2}{b^2}=1$ / obdobný postup jako u $K\in l$

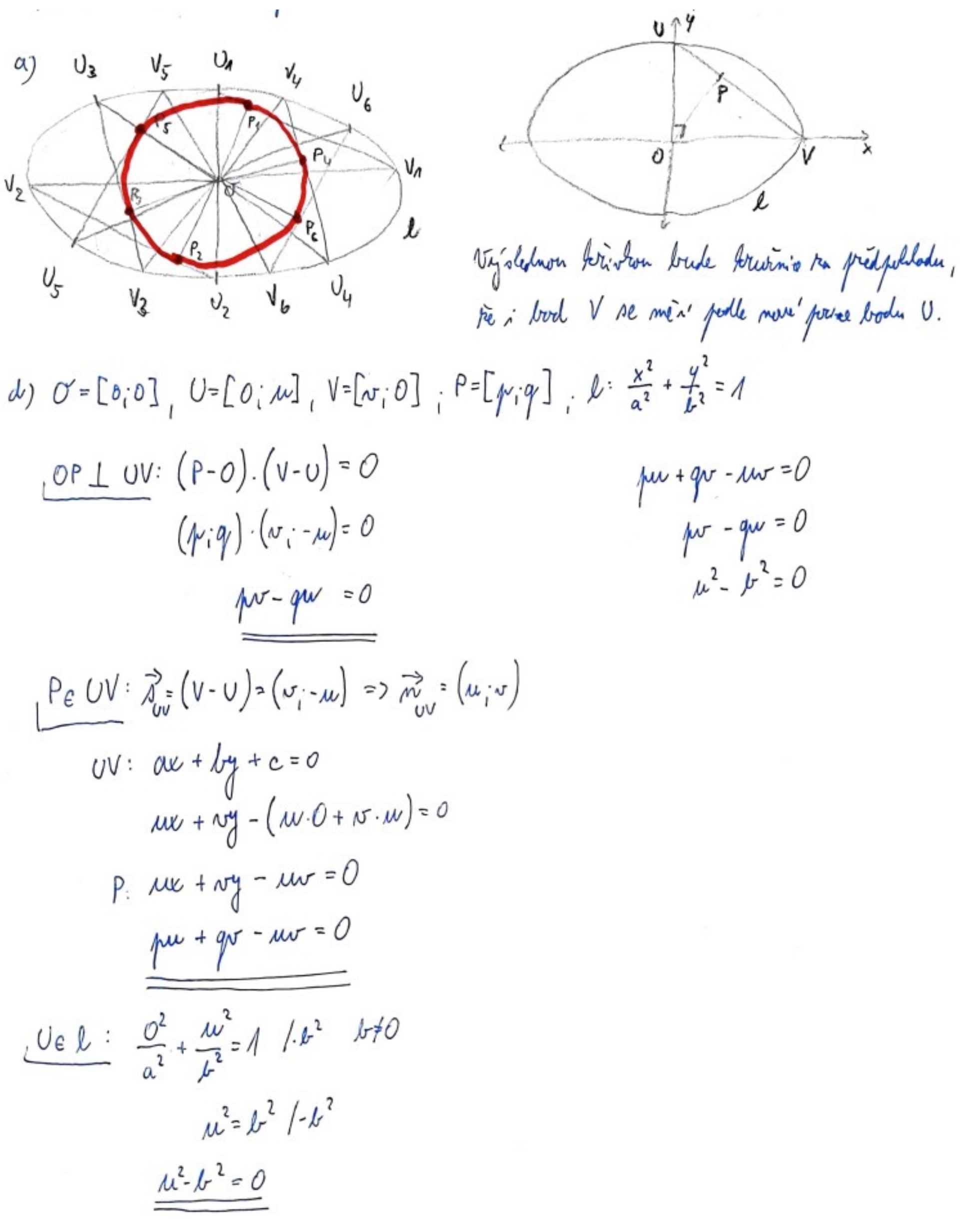
$b^2\cdot l_1^2+a^2\cdot l_2^2-a^2b^2=0$

$M\in l$: $b^2\cdot m_1^2+a^2\cdot m_2^2-a^2b^2=0$ /-"-

P je střed ΔKLM:

Obrázek 68: **Student 2 - příklad 3**

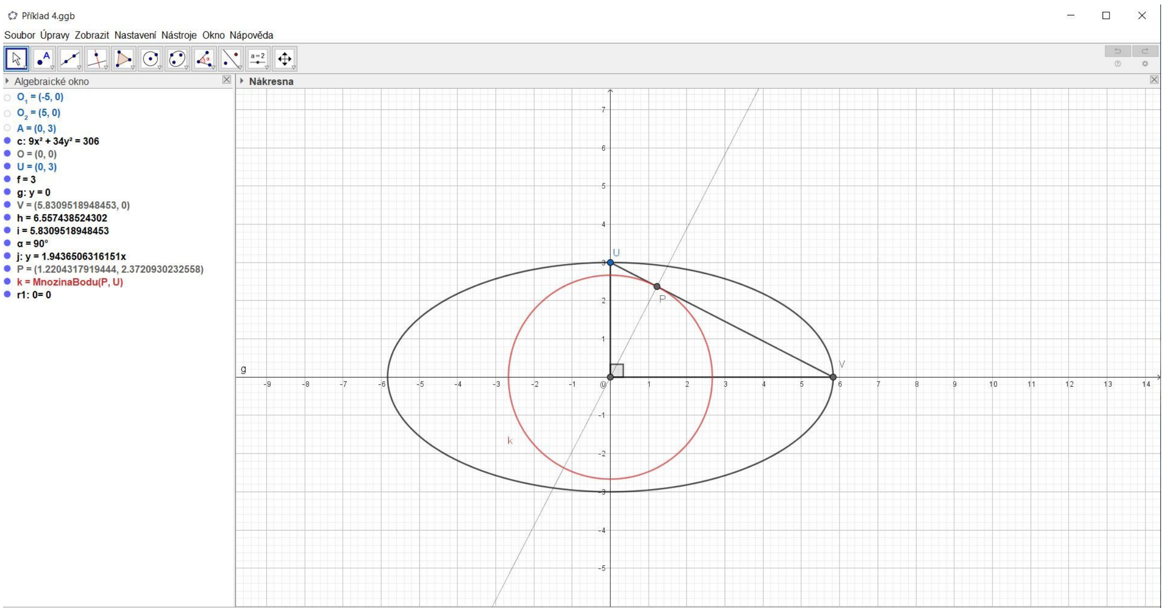
Jelikož mi student 2 přišel sdělit, že se o problém zajímá, zkusila jsem mu zadat ještě příklad 4.2 a dívala jsem se, jak postupuje.



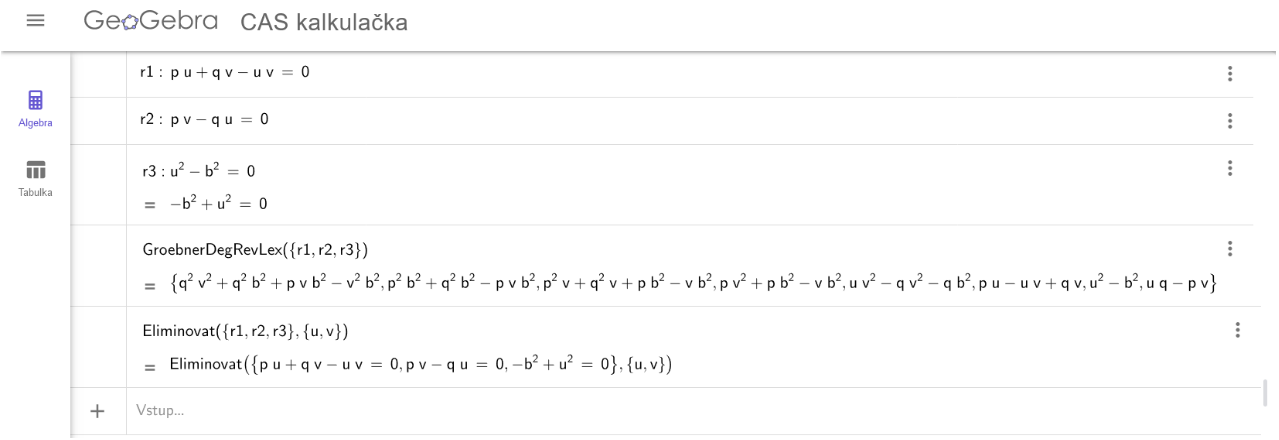
Obrázek 69: **Student 2 - příklad 4**

Student situaci správně nakreslil. Odhadl, jakou množinu bodů by měl získat. Pokusil se napsat rovnice, které potřebuje k získání rovnice množiny bodů. O eliminaci už se ale nepokusil. Kroky 1 a 2 student zvládl, ale krok 3 už ne.

V GeoGebře získal student správnou křivku - kružnici. Do GeoGebry pak zadal potřebné rovnice, po eliminaci nezískal rovnici množiny bodů, ale prázdný ideál. Krok 4 byl proveden správně, ale krok 5 už ne.



Obrázek 70: **Student 2 - příklad 4 - GeoGebra**



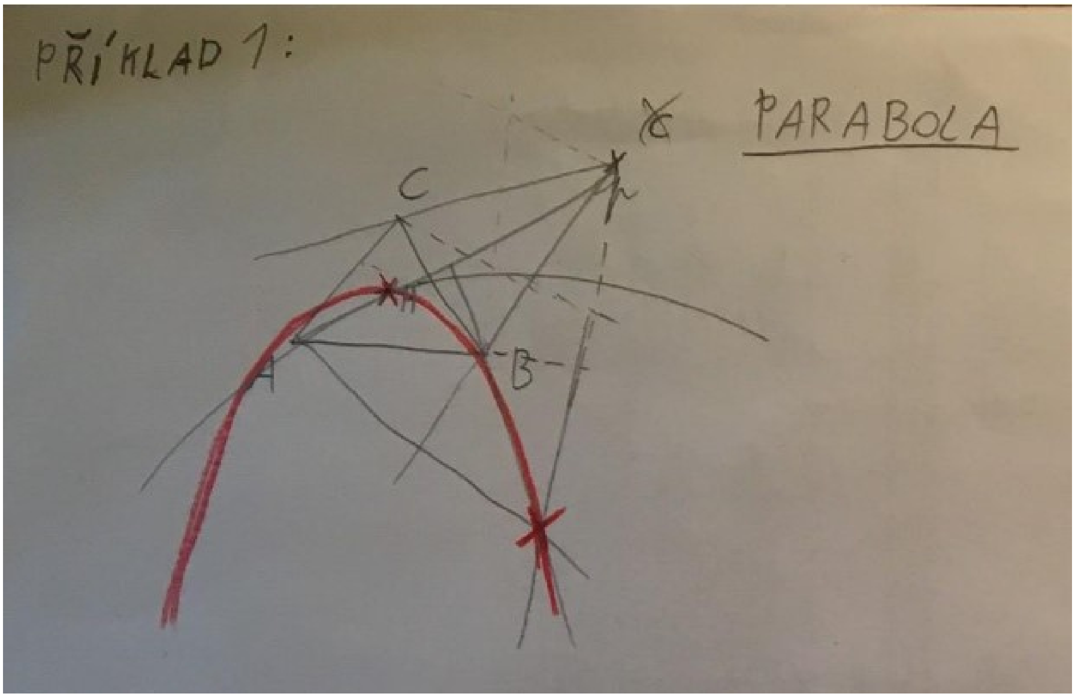
Obrázek 71: **Student 2 - příklad 4 - GeoGebra**

Student 2 měl při řešení problém s eliminací v GeoGebře. Pokládal si otázku, zda sestavil rovnice špatně, když nezískal eliminací v GeoGebře nic. Nevěděl také, jestli si může zvolit libovolně souřadnice bodů. Při řešení 3. příkladu měl problém i s obrázkem v GeoGebře. Závěrem řekl, že je celkem snadné načrtnout situaci v GeoGebře, ale těžké je sestavit rovnice.

Student 3

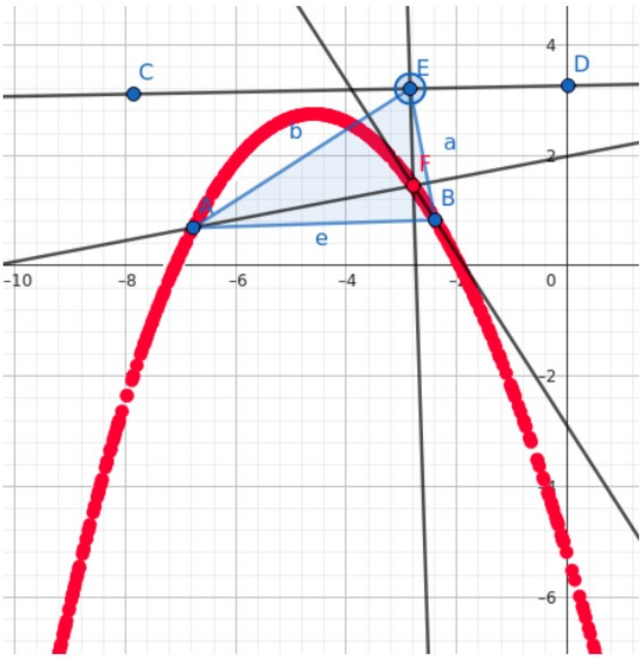
Příklad 1:

Student si nakreslil situaci a odhadl, že množinou bodů, kterou má získat, by mohla být parabola. Částečně tedy zvládl krok 1.



Obrázek 72: **Student 3 - příklad 1**

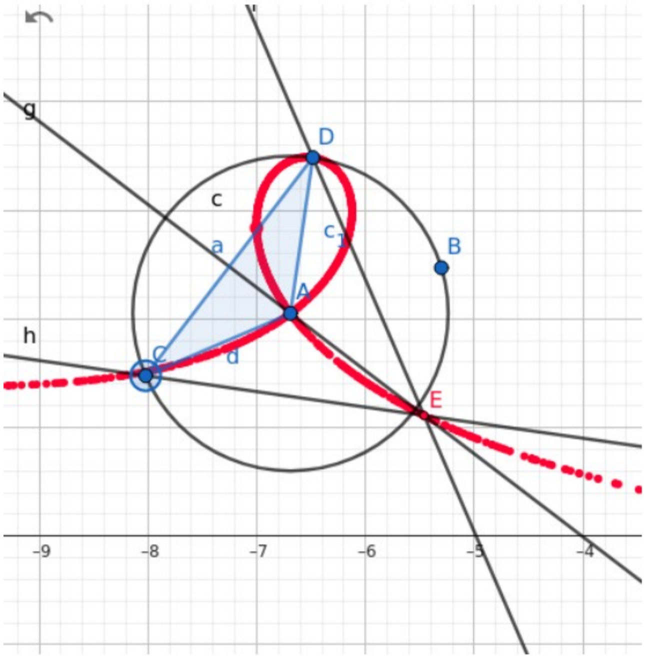
Parabolu získal tento student i pomocí GeoGebry. V kroku 4 byl student částečně úspěšný, o zbylé kroky se nepokusil.



Obrázek 73: **Student 3 - příklad 1 - GeoGebra**

Příklad 2:

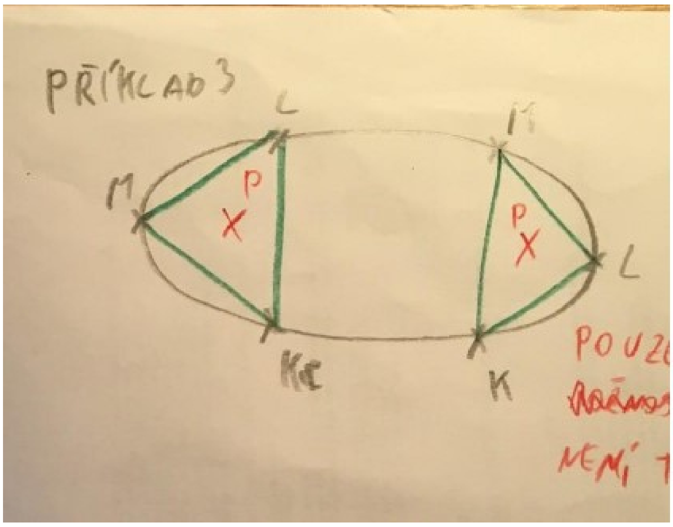
Tento příklad student ručně neřešil. Pomocí GeoGebry získal správnou množinu bodů - strofoidu. Správně byl tedy proveden pouze krok 4. Ve zbylých krocích student nebyl úspěšný.



Obrázek 74: **Student 3 - příklad 2**

Příklad 3:

Student si zkusil situaci nakreslit. Udělal závěr, že množinou bodů budou jen 2 body. Použitím GeoGebry student příklad neřešil. Správně tedy nebyl proveden ani jeden krok. Student řekl, že množinu bodů tvoří pouze 2 body.



Obrázek 75: **Student 3 - příklad 3**

Úspěšnost studentů jsem shrnula do následující tabulky 13:

ANO . . . znamená splněno

NE . . . znamená nesplněno

ČÁSTEČNĚ . . . znamená částečně splněno

		Student 1	**Student 2**	**Student 3**
Příklad 1	Krok 1	ČÁSTEČNĚ (poznána jen parabola)	ČÁSTEČNĚ (poznána jen parabola)	ČÁSTEČNĚ (poznána jen parabola)
	Krok 2	NE	ANO	NE
	Krok 3	NE	NE	NE
	Krok 4	ČÁSTEČNĚ (poznána jen parabola)	ČÁSTEČNĚ (poznána jen parabola)	ČÁSTEČNĚ (poznána jen parabola)
	Krok 5	NE	ČÁSTEČNĚ	NE
Příklad 2	Krok 1	ANO - označení, ale špatně - Descartův list	ANO	NE
	Krok 2	NE	ANO	NE
	Krok 3	NE	ČÁSTEČNĚ	NE
	Krok 4	ANO	ANO	NE
	Krok 5	NE	NE	ANO
Příklad 3	Krok 1	ANO	NE	NE
	Krok 2	NE	ČÁSTEČNĚ	NE
	Krok 3	NE	NE	NE
	Krok 4	ANO	NE	NE
	Krok 5	NE	NE	NE

Tabulka 13: **Úspěšnost řešení studentů FPE ZČU v Plzni**

Závěrem lze konstatovat, že řešení těchto úloh je obtížné. Role počítače je při řešení těchto úloh jasná, ukáže nám hledanou množinu bodů. Je tam ale problém, jak napsat rovnici hledané množiny bodů dané vlastnosti. Software ukáže studentům množinu bodů, ale neví, jak ji sestavit, nemají dostatek znalostí.

Výsledky studentů FPE jsem porovnala se závěry empirické sondy provedené na 3 studentech Pedagogické fakulty JU v Českých Budějovicích, kterým jsem zadala pouze jeden příklad podobný příkladu 2, který řešili studenti FPE v Plzni.

Příklad 7.1 *Je dána přímka OA a přímka s, která je kolmá k přímce OA v bodě A. Mějme kružnici k se středem v bodě A, která protíná přímku s v bodě M. Určete množinu průsečíků P přímky OM a kružnice k.*

1. Ruční výpočet

Student 1: O ruční eliminaci proměnné v se ani nepokusil.

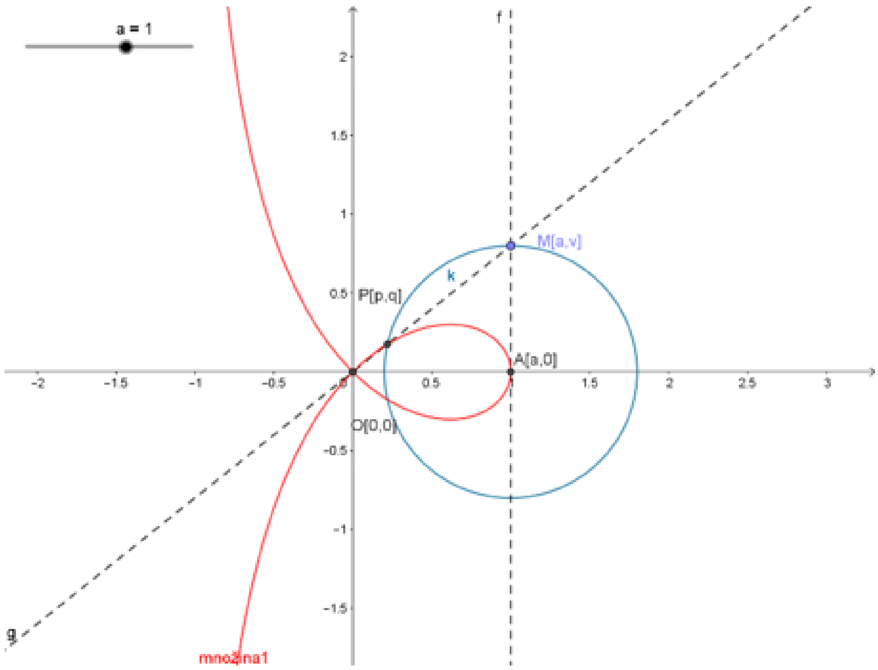
Student 2: Správně eliminoval proměnnou v. Po eliminaci proměnné v dostal rovnici: $x^2(a+x) - y^2(a-x) = 0$.

Z výsledné rovnice zjistil, že hledaná množina bodů tvoří strofoidu.

Student 3: O ruční eliminaci se nepokusil.

2. Využití programu GeoGebra

Studenti si vytvořili množinu bodů pomocí tlačítka „Množina bodů“ (locus) v programu GeoGebra.



Obrázek 76: **Student 1 (JU) - Strofoida**

V dalším kroku hledali rovnici množiny bodů. Všichni 3 studenti si zvolili soustavu souřadnic co nejjednodušeji: bod $O[0,0]$, $P[p,q]$, $M[a,v]$, $A[a,0]$.

Student 1: Nejprve jsem si určil rovnici kružnice k

$$k: \ (x-a)^2 + y^2 = v^2.$$

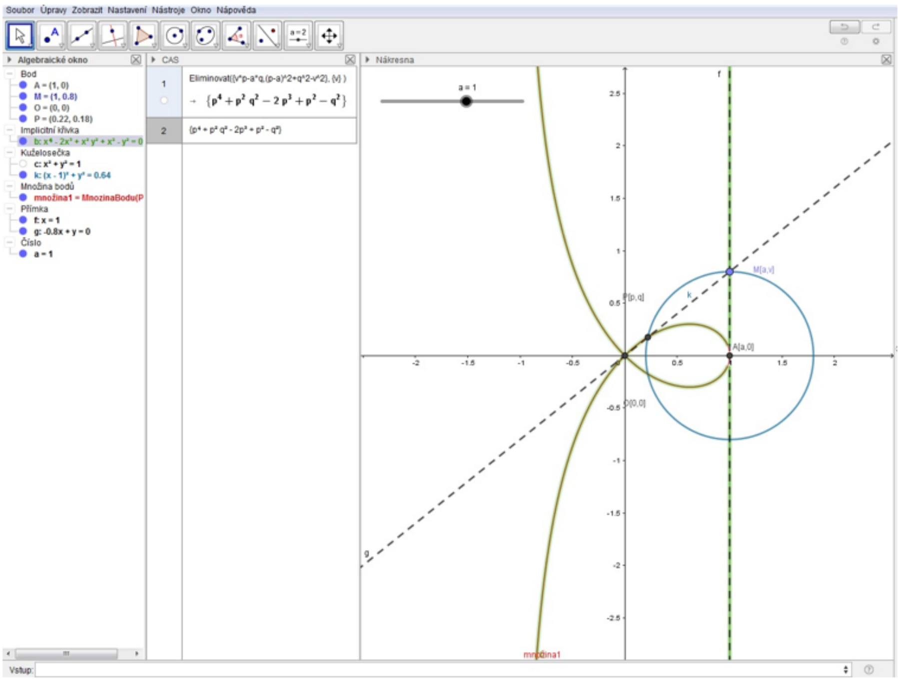
Poté jsem si určil normálový vektor $\vec{n} = (v, -a)$, který budu potřebovat k určení rovnice přímky p. Určím si rovnici přímky

$$p: \ vx - ay = 0.$$

Následně si zvolím rovnice tak, aby bod P náležel přímce p a kružnici k.

$$P \in p \Leftrightarrow vp - ap = 0; (p-a)^2 + q^2 - v^2 = 0.$$

Budu eliminovat v v programu GeoGebra.



Obrázek 77: Student 1 (JU) - Strofoida

Po eliminaci v v programu GeoGebra nám vyšla rovnice množiny bodů

$$b: \; p^4 + p^2q^2 - 2p^3 + p^2 - q^2 = 0.$$

Pro zobrazení v programu GeoGebra jsme tuto rovnici jen přepsali do tvaru

$$b: \; x^4 + x^2y^2 - 2x^3 + x^2 - y^2 = 0.$$

Studenti 2 a 3 si také určili správně potřebné rovnice.

Student 2:

$$k: \; (x-a)^2 + y^2 - v^2 = 0$$

$$P \in k: \; (p-a)^2 + q^2 - v^2 = 0$$

Body AMP jsou kolineární, to znamená, že můžeme položit tento determinant roven nule, tedy

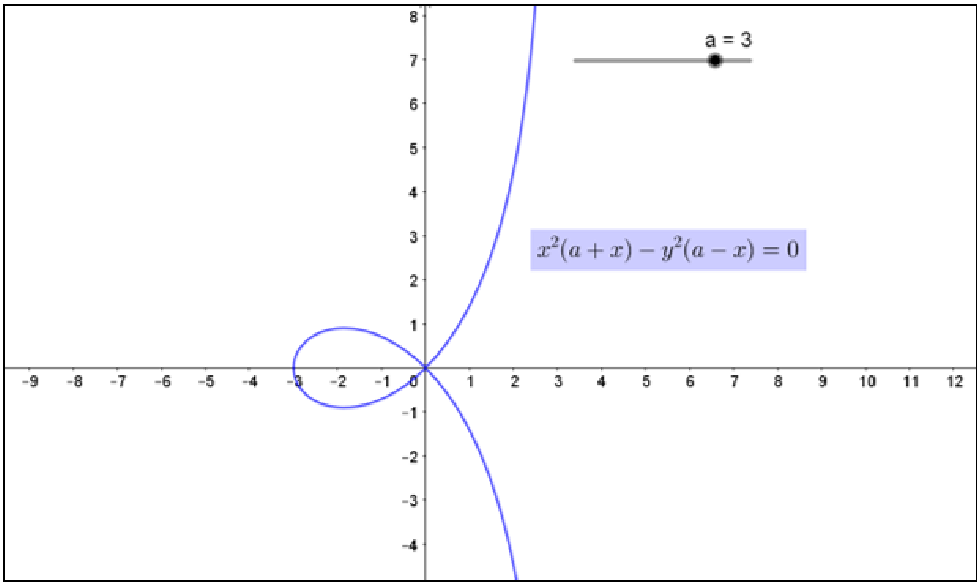
$\begin{vmatrix} a & v & 1 \\ p & q & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, a dostaneme $aq - pv = 0$.

Po eliminaci v v CAS dostaneme: $p^3 - ap^2 + aq^2 + pq^2 = 0$.

Závěr: Student 1 získal rovnici 4. stupně. Nejedná se o rovnici jen strofoidy, ale i přímky. Nevšiml si toho, myslel si, že je to rovnice strofoidy. Chybí parametr a, řešeno pro $a = 1$.

3. Ověření

Všichni 3 studenti ověřili správnost řešení v programu GeoGebra tím, že do příkazového řádku napsali výslednou rovnici.



Obrázek 78: Strofoida

Obdobně jako u předchozích tří příkladů, které jsem zadala studentům Fakulty pedagogické ZČU v Plzni, provedeme zhodnocení jednotlivých kroků řešení této úlohy, kterou provedli studenti Fakulty pedagogické JU v Českých Budějovicích (viz tabulka 14):

Ruční výpočet:

Krok 1 . . . poznat křivku

Krok 2 . . . umět sestavit potřebné rovnice

Krok 3 . . . ze soustavy rovnic eliminovat potřebné proměnné - získat rovnici křivky

GeoGebra:

Krok 4 . . . poznat křivku

Krok 5 . . . získat rovnici křivky.

ANO . . . znamená splněno

NE . . . znamená nesplněno

ČÁSTEČNĚ . . . znamená částečně splněno

Studenti učitelství matematiky v Českých Budějovicích byli úspěšnější při práci s programem GeoGebra jak při získání obrázku množiny v GeoGebře, tak při získání potřebné rovnice křivky. Studenti učitelství matematiky v Plzni zvládli lépe eliminovat potřebné proměnné ručně.

		Student 1	Student 2	Student 3
Příklad 6.4	Krok 1	NE	ANO	NE
	Krok 2	NE	ČÁSTEČNĚ	NE
	Krok 3	NE	ČÁSTEČNĚ	NE
	Krok 4	ANO	ANO	ANO
	Krok 5	ČÁSTEČNĚ	ANO	ANO

Tabulka 14: **Úspěšnost řešení studentů PF JU v Českých Budějovicích**

Studenti učitelství matematiky v Českých Budějovicích se tématu věnovali více, proto si s úlohou lépe poradili. I na základě uvedeného výsledku doporučuji, aby se této problematice věnovalo více pozornosti. Pro úvod do daného problému by mohl být využit materiál, který jsem navrhla v rámci své práce (viz příloha).

7.2 Podrobnější rozbor řešitelských strategií studentů

S cílem více do hloubky porozumět tomu, jak studenti přemýšlí při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti, a za účelem nalezení případných korelací mezi úspěšností řešení a využitou řešitelskou strategií, jsem trojici studentů FPE ZČU v Plzni nechala vyplnit souběžně s příklady i krátký dotazník inspirovaný členěním strategií dle Posamentiera a Krulika (Posamentier, Krulik, [65]). Studenti byli tázáni u každé strategie, jak užitečná jim přijde při řešení úloh na množiny bodů, jak si v ní věří a jak podle nich pomůže k jejímu lepšímu zvládnutí matematický software. Studenti měli k dispozici publikaci (Posamentier, Krulik, [65]), kde je velké množství příkladů na dané řešitelské strategie, a u každé strategie dostali jeden vytipovaný konkrétní příklad, který pokládám za zvláště relevantní a vhodný pro pochopení využití dané strategie směrem k množinám bodů dané vlastnosti.

Studenti vyplnili tabulku pomocí škály 0 - 5 (0 znamená nepoužití strategie, 5 - nejvíce). Snažila jsem se najít odpověď na otázku: Jaké řešitelské strategie používal student, který je úspěšnější při řešení těchto úloh? Pomůže preference k určitým strategiím při řešení těchto úloh?

Strategie		Které strategie pokládáte za důležité, abyste mohli problém řešit?	Jak si na jednotlivé strategie věříte? (Jak jste v nich dobří?)	S kterými strategiemi pomáhá software?
1.	Řešit odzadu	3	3	3
2.	Najít nějaké pravidlo	3	3	2
3.	Podívat se na problém z jiného pohledu	1	3	0
4.	Řešit podobný problém	3	3	1
5.	Uvážit extrémní případy	3	3	4
6.	Nakreslit si situaci	5	3	5
7.	Inteligentní hádání a testování (aproximace)	4	4	5
8.	Uvážit všechny možnosti	4	3	4
9.	Zorganizovat si data	3	3	3
10.	Logické zdůvodnění	4	3	3

Tabulka 15: **Student 1 - řešitelské strategie**

Strategie		Které strategie pokládáte za důležité, abyste mohli problém řešit?	Jak si na jednotlivé strategie věříte? (Jak jste v nich dobří?)	S kterými strategiemi pomáhá software?
1.	Řešit odzadu	1	3	0
2.	Najít nějaké pravidlo	3	3	1
3.	Podívat se na problém z jiného pohledu	3	4	0
4.	Řešit podobný problém	5	5	2
5.	Uvážit extrémní případy	5	5	5
6.	Nakreslit si situaci	5	1	5
7.	Inteligentní hádání a testování (aproximace)	4	3	5
8.	Uvážit všechny možnosti	5	4	5
9.	Zorganizovat si data	5	5	5
10.	Logické zdůvodnění	5	4	3

Tabulka 16: **Student 2 - řešitelské strategie**

Strategie		Které strategie pokládáte za důležité, abyste mohli problém řešit?	Jak si na jednotlivé strategie věříte? (Jak jste v nich dobří?)	S kterými strategiemi pomáhá software?
1.	Řešit odzadu	3	2	3
2.	Najít nějaké pravidlo	3	3	3
3.	Podívat se na problém z jiného pohledu	3	3	0
4.	Řešit podobný problém	3	3	1
5.	Uvážit extrémní případy	3	3	4
6.	Nakreslit si situaci	5	4	5
7.	Inteligentní hádání a testování (aproximace)	4	3	5
8.	Uvážit všechny možnosti	3	2	4
9.	Zorganizovat si data	3	3	3
10.	Logické zdůvodnění	4	3	3

Tabulka 17: **Student 3 - řešitelské strategie**

Vytvoříme hypotézu o vztahu mezi preferovanými strategiemi a úspěšností.

Hypotéza: Úspěšnější při řešení je student, který používal tyto strategie: Řešení analogického problému, nakreslit si situaci, uvážit extrémní případy, uvážit všechny možnosti, logické zdůvodnění. U těchto strategií zároveň studenti uvádějí vyšší vnímaný přínos matematického softwaru než u ostatních.

Student 1 preferoval strategii „nakreslit si situaci“, méně pak „inteligentní hádání a testování (aproximace)“, „uvážit všechny možnosti“, „logické zdůvodnění“ (viz tabulka 15). Při řešení nebyl student příliš úspěšný, vyřešil úlohy jen částečně - nakreslil řešení ručně i v GeoGebře.

Student 2 byl při řešení nejúspěšnější a problematika řešení úloh na množiny bodů, i podle získané zpětné vazby, jej zaujala. Při vyplňování tabulky (viz tabulka 16) označil několik strategií jako velmi důležitých pro řešení „řešit podobný problém“, „uvážit extrémní případy“, „nakreslit si situaci“, „uvážit všechny možnosti“, „zorganizovat si data“, „logické zdůvodnění“. Z volby strategií je patrné, že situaci důkladně analyzoval a zkoumal ji využitím různých strategií. Pozitivně vnímá rovněž podporu řešení matematickým softwarem. Zajímavé je, že uvedený student si nejméně věří při využití vlastního nákresu situace. Výrazně oceňuje podporu softwarem při znázornění. Bez hlubší analýzy nelze vyslovit konkrétní závěr, ale možná právě tento student patří do skupiny studentů, kterým může matematický software výrazně pomoci při pochopení samotné podstaty úlohy.

Student 3 dokázal sám nakreslit jednotlivé situace, ale v dalším řešení nebyl úspěšný. Tomu odpovídá i jeho sebereflexe při vyplňování tabulky (viz tabulka 17). Nejvyšší hodnocení najdeme u strategie „nakreslit si situaci“, u ostatních strategií je uveden průměrný počet bodů.

Všichni studenti se shodují v nízké podpoře řešení s využitím softwaru u strategie „podívat se na problém z jiného pohledu“. To naznačuje určité limity současného softwaru a potřebu aktivního přístupu řešitele úlohy.

Zdá se tedy, že data odpovídají hypotéze, ale byl by potřeba podrobnější výzkum, v jehož rámci by ideálně výzkumník pracoval se studenty přímo během řešení úloh a průběžně zaznamenával jejich myšlenkové pochody a reakce na vhodné podněty směrem k daným řešitelským strategiím.

8 Participační akční výzkum k problematice využití počítačové algebry

V kapitole 6 a 7 byl proveden kvalitativní výzkum zaměřený na úspěšnost studentů středních a vysokých škol při řešení úloh a jejich řešitelské strategie.

V kapitole 8 uvedeme další podněty, které vedly ke zpracování základního učebního textu k problematice řešení soustav polynomiálních rovnic s využitím Gröbnerových bází. Jedná se o názory vysokoškolských pedagogů, studentů učitelství, matematiky i středoškolských žáků s hlubším zájmem o matematiku.

Cílem této kapitoly je připravit návrh učebního materiálu. Vstupem pro přípravu učebního textu byl detailní materiál sestavený na základě studia odborné literatury (Cox, D., Little, J., O´Shea, D. [16]) uvedený v příloze 1. Pro praktické využití byl však tento materiál příliš abstraktní a rozsáhlý, a proto bylo třeba jej pomocí participačního akčního výzkumu upravit do využitelné podoby. Výsledný materiál je uveden v příloze 2.

8.1 Akční výzkum

Některé výsledky předložené dizertační práce jsou rovněž založeny na akčním výzkumu, proto si nejprve vymezíme pojem „akční výzkum“.

Definice pojmu „akční výzkum“ pochází od Johna Elliota (1981): „Akční výzkum je učiteli prováděná systematická reflexe profesních situací s cílem jejich dalšího rozvinutí“ (Janík [41]). (Průcha, Walterová, Mareš [67]) vymezují akční výzkum jako druh pedagogického výzkumu, jehož cílem je ovlivňovat a zlepšovat určitou část vzdělávací praxe. Akční výzkum tedy zahrnuje intervenční strategii, navrhuje určitá doporučení a pokouší se je realizovat, průběžně sleduje efekty změn a vyvozuje z nich další postup.

Počátky akčního výzkumu jsou často spojovány s prací amerického sociálního psychologa německého původu Kurta Lewina „Action Research and Minority Problems“ z roku 1946, který použil tento termín jako první. U nás je v pedagogické praxi pojem akční výzkum používán až od konce dvacátého století, přestože již byl znám i dříve. Mezi autory prvních publikací u nás, kteří se věnovali problematice akčního výzkumu, jsou například Nezvalová [56] a Janík [40]. D. Nezvalová např. píše, že akční výzkum lze chápat jako zásah do praxe, který přináší vylepšení.

Vymezení akčního výzkumu

Akční výzkum je aplikovaný výzkum, který je prospěšný pro zkvalitňování pedagogické činnosti na základě získaných poznatků. Hlavní myšlenkou akčního výzkumu je systematické zlepšování pedagogicko-vzdělávací praxe učitelů.

Fáze akčního výzkumu:

- jedná se o akci (konkrétní neuspokojivý stav), kterou učitel nejprve zkoumá, aby jí porozuměl,
- učitel jedná tak, aby vedl ke zlepšení dané akce (konkrétního stavu).

Metody akčního výzkumu (Maňák, Švec [52]):

- Metody hledání a tvorba východisek (brainstorming, skupinový rozhovor, apod.).
- Metody získávání a shromažďování dat (pozorování, audio či videozáznamy, testy, dopisy, apod.).
- Metody analýzy dat (vytváření kategorií dat, metafor, analýza).
- Metody vytváření a ověřování strategií jednání (brainstorming, testování alternativ, apod.).
- Způsoby prezentace výsledků (zpráva z výzkumu, studie, apod.)

Ivano Laudonia et al. [**?**] se ve své studii zaměřili na literaturu o akčním výzkumu v přírodovědném vzdělávání a našli téměř 150 článků a kapitol v časopisech a knihách z poslední doby, které byly zaměřeny na akční výzkum v této oblasti, ale převažovala témata jako ekologie, chemie a biologie. Matematice a fyzice byla věnována pouze malá část článků.

Akční výzkum se na základě výzkumných aktivit spolu se zapojením učitelů používá při vývoji kurikula, při rozvoji učebních osnov či vytváření nových učebních materiálů. Přispívá tím ke zlepšení výukové praxe ve školách. V přírodovědném vzdělávání, podobně jako i v jiných vzdělávacích oblastech, se používá akční výzkum k lepšímu porozumění a rozvíjení vyučovacích metod a přispívá tak k profesnímu růstu učitelů.

Catherine Cassell a Phil Johnson [14] ve své studii definují pět různých akčních přístupů: *experimentální akční výzkum* (definovat problém, zasáhnout do praxe, studium jevů prostřednictvím změn a tak to stále opakovat, až dojde ke zlepšení), *induktivní akční výzkum* (stanovit problém, zásah do situace, zhodnocení), *participační akční výzkum* (spolupráce, aktivní zapojení členů, zasahují výše postavení, ostatní dávají zpětnou vazbu), *participační akční výzkumná praxe* (všichni členové týmu se zúčastní všech fází výzkumu a názory mají stejnou váhu) a *dekonstrukční akční výzkum* (funguje stejně jako ostatní, je ovlivněn relativismem, klade důraz na používání stejného jazyka).

Kohout, Masopust, Mollerová, Feřt et al. [45] vytvořili na základě studie „Participatory Action Research in chemical education“ (Ingo Eilks a Bernd Ralle) návrh, aby proces vedoucí ke zlepšení kurikula či vytvoření nových učebních materiálů metodou participačního (spolupráce aktérů) akčního výzkumu zahrnoval tyto tři důležité cykly:

- Cyklus 1: Je uskutečněn v rámci menšího týmu. Nejprve je definován problém v závislosti na aktuálním stavu a jsou vytvořeny předběžné návrhy. Ty jsou poté testovány v malých skupinách a na základě toho je závěrem zhodnoceno, zda tyto návrhy vedou ke zlepšení v praxi a příp. jsou provedeny úpravy.

- Cyklus 2: Je uskutečněn v početnější skupině učitelů a je důležité začlenění učitelů, kteří se nepodíleli na prvním cyklu. Ti aplikují navržené modifikace v praxi a dávají zpětnou vazbu k výsledkům z prvního cyklu.

- Cyklus 3: Jedná se o rozšíření mimo komunitu, podílející se na akčním výzkumu. V tomto cyklu se ukazuje, zda byly vytvořené návrhy aplikovatelné tak, aby je mohli využívat i další učitelé ve své praxi bez specifického zaškolování.

V každém cyklu probíhá další vývoj, dochází k testování, zhodnocení a reflexi. Výše uvedený model akčního výzkumu byl realizován v mnoha studiích - v chemii, fyzice a v neposlední řadě v matematice. V dostupné literatuře bychom nalezli mnoho dalších rozdělení, porovnávání a hodnocení, ale protože akční výzkum nelze jednoznačně vytýčit, neboť problematika je velice široká, nemůžeme s jistotou říci, že by některý z těchto přístupů výrazně převažoval.

Vzhledem k tomu, že se učitelé v praxi neustále setkávají s problematickými situacemi při výuce či výchově mládeže, musí tyto problémy neustále analyzovat a řešit je. Úspěšným vyřešením každého problému za pomoci akčního výzkumu dochází učitelé k dalšímu rozvoji poznání a profesnímu rozvíjení. Vyskytují se i názory, že se nejedná o vědecký výzkum, neboť situace, které učitelé řeší, jsou příliš konkrétní a nelze je používat obecně, ale v těchto případech obecné řešení není podstatou. Užitečnost akčního výzkumu spočívá ve zlepšování pedagogického přístupu učitele na základě porozumění určitým problematickým stavům s cílem neustále je zlepšovat.

Akční výzkum může mít v pedagogickém prostředí mnoho podob. Ať už se jedná o individuální činnost učitele, či kolektivní činnost učitelů v rámci školy, či vývoj kurikula, učebních osnov a vytváření nových učebních materiálů v rámci širšího působení, lze konstatovat, že tento výzkum je neustále rozvíjen a stále více využíván. Přesto, že s sebou nese i různá rizika, při jeho správné realizaci pomáhá pozitivně ovlivňovat situaci, přispívá při řešení konkrétních problémů, je efektivní při zavádění změn, přispívá k osobnímu i profesnímu rozvoji zúčastněných stran.

Kroky akčního výzkumu (vedoucí ke tvorbě učebního textu pro nadané žáky SŠ a budoucí učitele VŠ):

1. krok - cyklus 1 (realizace 2016) - příprava vstupního materiálu na základě studia literatury,
2. krok - cyklus 1 (realizace 2017) - zjištění názorů vysokoškolských učitelů na tuto problematiku a na základě toho úprava textu,
3. krok - cyklus 2 (realizace 2018) - prvotní použití textu na matematickém kempu, pozorování práce žáků, úpravy textu,
4. krok - cyklus 2 (realizace 2018/2019) - geometrický seminář na PF JU, úpravy textu na základě diskusí se studenty,
5. krok - cyklus 2 (realizace 2019/2020) - studenti předmětu KMT/OA/3, řešení soustav polynomiálních rovnic, otázky, diskuse se studenty, úprava textu,
6. krok - cyklus 2 (realizace 2020/2021) - použití na matematickém kempu, řešení úloh žáky, otázky, úprava textu,
7. krok - cyklus 2 (dokončení 2022/2023) - v rámci předmětu KMT/OA/3, úlohy na množiny bodů dané vlastnosti, řešení úohy studenty, diskuse se studenty, úpravy textu,
8. krok - cyklus 3 (realizace 2022/2023) - vytvoření materiálu pro budoucí učitele.

Podrobnosti k jednotlivým krokům jsou uvedeny v dalších podkapitolách.

8.2 Empirická sonda - soustavy polynomiálních rovnic na VŠ

Ve skupině studentů předmětu KMT/OA/3 (Obecná algebra) na Fakultě pedagogické ZČU v Plzni, kteří jsou zároveň i učitelé ZŠ, byl realizován výzkum, jehož cílem bylo zjistit, jak tito studenti řeší soustavy polynomiálních rovnic různými metodami a jaké jsou jejich postoje k tématu Gröbnerovy báze. V rámci předmětu KMT/OA/3 se vyučuje metoda rezultantů a metoda Gröbnerových bází a dalším tématem je vyšetřování množin bodů dané vlastnosti. Jelikož výuka v akademickém roce 2019/20 probíhala distančně, zaslala jsem za pomoci garanta předmětu doc. Hory studentům k prostudování text o metodě rezultantů a metodě Gröbnerových bází spolu s řešenými příklady. Studenti měli text pochopit a poté jim byly zaslány příklady k řešení a otázky vztahující se k zaslanému textu. Získala jsem tak zpětnou vazbu k navrženému učebnímu textu.

Studenti řešili následující úlohy:

Příklad 8.1 *Vyřešte soustavu polynomiálních rovnic pomocí elementárních matematických úprav („lidský způsob") a pomocí metody Gröbnerovy báze:*

a)

$$\begin{array}{rcr} x^2 - y^2 & = & 8, \\ x^2 + xy + y^2 & = & 13, \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcr} x^2 - xy + y^2 & = & 21, \\ y^2 - 2xy + 15 & = & 0. \end{array}$$

Zkuste vyřešit i v nějakém matematickém programu.

Příklad 8.2 *Výpočtem a pomocí nějakého matematického programu:*

a) Určete množinu bodů P, ve kterých se protínají na sebe kolmé tečny t_1 a t_2 kružnice.

b) Určete množinu bodů P, ve kterých se protínají na sebe kolmé tečny t_1 a t_2 elipsy.

c) Určete množinu středů P všech kružnic, které se dotýkají přímky p a procházejí bodem A.

Po prostudování učebního textu a řešení úloh odpovídali studenti písemně na tyto otázky:

Otázky:

1. Připadal Vám text srozumitelný a využitelný při samostudiu? Do jaké míry text obsahoval materiál potřebný pro vyřešení zadaných příkladů? Museli jste při jejich řešení čerpat i z jiných zdrojů? Pokud ano, ze kterých?

2. Poskytuje vám text náměty pro budoucí práci se žáky (v tom smyslu, že byste některé poznatky z něj mohli využít ve své přípravě na výuku ve škole)? Pokud ano, které části by byly podle Vás nejlépe využitelné?

3. Do jaké míry si myslíte (obecně, bez vazby na uvedený text), že by téma Gröbnerovy báze bylo aplikovatelné v praxi ve výuce na SŠ? Např. pro nadané žáky, kteří řeší MO?

4. Slyšeli jste někdy předtím o metodě rezultantů nebo o metodě Gröbnerových bází? Řešili jste již v nějakém předmětu na VŠ složitější soustavy rovnic? Myslíte si, že toto téma má své místo v přípravě budoucích učitelů matematiky pro ZŠ či SŠ?

Příklady a dotazník zpracovalo v akademickém roce 2019/20 pět studentů předmětu KMT/OA/3 (předmět mělo zapsáno 6 studentů, jedna studentka přerušila studium) a šest studentů v akademickém roce 2020/21, tedy celkem 11 studentů. Studenty vyučoval doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc. Když se probíralo téma Gröbnerovy báze, tak jsem se zapojila a studentům se snažila téma vysvětlit.

Zpracování příkladů:

Řešení pomocí tužky a papíru: Zúčastnění studenti použili při řešení příkladu 8.1 sčítací metodu, dosazovací metodu a substituci. Deset studentů vyřešilo příklad pomocí matematických úprav správně. Jeden student udělal chybu při řešení, když rovnici $2x+xy-21=0$ řešil jako kvadratickou rovnici (dosazení do vzorce pro kvadratickou rovnici). 5 studentů vyřešilo příklad 8.1 ručně pomocí metody Gröbnerových bází, určili S-polynomy, našli Gröbnerovu bázi a správně vyřešili soustavu ekvivalentní s původní soustavou rovnic. 4 studenti vyřešili příklad 8.2 pomocí tužky a papíru správně a popsali dobře nalezené množiny bodů dané vlastnosti. Jedna studentka odhadla správně hledané množiny bodů dané vlastnosti, popsala, jak hledané křivky najít, co je to za křivky, ale nebyla je schopna popsat rovnicemi. Jedna studentka vyřešila jen příklad 8.1 a) správně, b) nevěděla.

Řešení pomocí počítače: Studenti použili na řešení příkladu různý matematický software - Wolfram Alpha, GeoGebru a Mathematicu. Ověřili si, zda správně vyřešili zadaný příklad. Při hledání množiny bodů dané vlastnosti využili především GeoGebru. Pomocí Cabri hledala množiny bodů jedna studentka. Vyřešila jen úlohu a), ale nenašla správnou množinu bodů dané vlastnosti - našla Thaletovu kružnici, která ovšem není správným řešením. Pomocí GeoGebry našlo 6 studentů správné množiny bodů dané vlastnosti. V úloze c) řešili i speciální případy - bod leží na přímce, bod neleží na přímce. Prokázali tedy i matematické myšlení. Někteří studenti si v GeoGebře jen nakreslili zadání nebo ještě zkusili jeden možný případ, který vyhovuje - nenašli množinu bodů dané vlastnosti. Pak také nerozebírali všechny možné případy. Jedna studentka nepoužila při řešení žádný matematický software.

Zpracování otázek:

Otázka 1: *Připadal Vám text srozumitelný a využitelný při samostudiu? Do jaké míry text obsahoval materiál potřebný pro vyřešení zadaných příkladů? Museli jste při jejich řešení čerpat i z jiných zdrojů? Pokud ano, ze kterých?*

Student 1: Text byl srozumitelný a využitelný při studiu.

Student 2: Text srozumitelný byl, ale některé věci jsem si dohledával na internetu.

Student 3: Text k samostatnému vyřešení příkladů nestačil. Text by měl být podrobnější i za cenu toho, že bude delší. Ukázkový příklad by měl být rozepsán krok po kroku. Snažila jsem se najít i materiály na internetu, ale téměř nic tam nebylo.

Student 4: Materiál mi nepřišel dostačující, pokud studenti nemají nějaké vstupní znalosti, které jsem neměla. Některé úpravy rovnic a označení mi nepřišly jasné. Hledala jsem na internetu a našla např. text od R. Haška - Algebra 5. Zde se řeší v Mathematice soustavy rovnic pomocí Gröbnerových bází.

Student 5: Materiál je užitečný pro samostudium. Určitě je využitelný pro řešení daných příkladů. Pro aplikaci metody Gröbnerových bází jsem ještě využila bakalářskou práci (Elementární úvod do teorie Gröbnerových bází - M. Bláhová).

Student 6: Oba texty mi přišly srozumitelné. Soubor s příklady z GeoGebry mi však přišel pro VŠ. Text soustav polynomiálních rovnic by byl srozumitelný pro nadané studenty gymnázií. Zmatečné mi pouze přišly „počítačové zkratky“ v postupech řešení (length, whole, apod.) - ty nemusí všichni znát. Ke studiu jsem nevyužíval jiné zdroje, maximálně poznámky z přednášek.

Student 7: Ano. Při řešení jsem čerpal ze zdrojů Masarykovy univerzity, konkrétně Přírodovědecká fakulta, Ústav matematiky a statistiky, Gröbnerovy báze-Diplomová práce (Drahoslava Rybová) a také z článku Buchbergerův algoritmus a soustavy polynomiálnch rovnic pro řešitele úloh MO (Hora Jaroslav, Königsmarková Soňa, 2018).

Student 8: Text byl srozumitelný a především pro úlohy z části 1 a z části 2-1. Text věnující se množinám bodů dané vlastnosti a využitelnosti Gröbnerových bází byl také poměrně srozumitelný. Pokusila jsem se i příklady ze zadání vypočítat. Více bych však zdůraznila, co vlastně chceme nalézt a čím toho dosáhneme. Popravdě jsem měla zpočátku problém s tím, co mám se soustavou vlastně „dělat“ (vypočítat nějaké neznámé? něco eliminovat?). V závěru bych také více zdůraznila, čeho jsme dosáhli. Navíc mi tyto příklady příliš neulehčily řešení příkladů z části 2-2. Věděla jsem, že si mám co nejvíce věcí umístit do soustavy souřadnic a analyticky zjistit rovnice kružnice apod. Se soustavou však nastal problém – nevěděla jsem, co s ní mám dělat. Pokusila jsem se proto hledat informace na internetu. Žádný srozumitelný zdroj jsem však nenalezla – pouze příklady na výpočet Gröbnerových bází, nikoliv na množiny bodů. Přesto si nejsem jista svým řešením. Pro samostudium bych do souboru přidala více příkladů.

Student 9: Text mi srozumitelný přišel, ale hledala jsem i v jiných textech.

Student 10: Čerpala jsem ze studijních materiálů, přednášek doc. Hory a informací na internetu.

Student 11: Pokud bych předem nevěděla nic o Gröbnerových bázích, tak bych textu asi úplně nerozuměla. Je zajímavé ukázat zápis algoritmu, ale chtělo by to přidat i nějaké vysvětlivky. Samotnému zápisu jsem nerozuměla a použití názvu proměnných v dalším textu s vysvětlením postupu výpočtu mě mátlo. Lépe bych pochopila postup výpočtu, kdyby bylo ukázáno řešení ještě dalšího příkladu pohromadě na jednom místě bez přerušování dlouhým textem. K řešení příkladů jsem čerpala i z dalších zdrojů (např. učebnice Analytická geometrie).

Otázka 2: *Poskytuje vám text náměty pro budoucí práci se žáky (v tom smyslu, že byste některé poznatky z něj mohli využít ve své přípravě na výuku ve škole)? Pokud ano, které části by byly podle Vás nejlépe využitelné?*

Student 1: Využila bych při řazení členů v polynomech uspořádání - čisté lexikografické.

Student 2: Učím na druhém stupni ZŠ, látku bych rozhodně nevyužil na ZŠ. Mám obavy, že i pro středoškoláky by to bylo náročné.

Student 3: Vyučuji na 2. stupni ZŠ, text bych nezařadila do výuky svých žáků.

Student 4: Učím na 2. stupni základní školy, kde se žáci s rovnicemi teprve seznamují a i ekvivalentní úpravy rovnic jim dělají potíže. Pro mě není téma využitelné v praxi.

Student 5: Myslím si, že na základní škole tyto poznatky nevyužiji. Nicméně můžeme společně se žáky vyzkoušet použití některého z matematických programů (například při řešení soustav rovnic pro kontrolu vypočteného výsledku).

Student 6: Líbily se mi úlohy na MBDV (Gröbnerovy báze bych probíral spíše v rámci seminářů a příprav pro olympiády). Super bylo zapojení GeoGebry.

Student 7: Učím na základní škole, kde není možnost využití.

Student 8: Tento text je spíše pro studenty středních škol (jsem studentkou oboru pro ZŠ).

Student 9: Vzhledem k tomu, že mám aprobaci na ZŠ, tak si nemyslím, že bych tento text ještě někdy využila.

Student 10: Studuji učitelství pro ZŠ, osobně mám od školské matematiky dlouhý odstup, proto si musím spoustu poznatků aktualizovat. V návaznosti na uvedené mne zaujaly množiny bodů dané vlastnosti, protože si je potřebuji osvěžit. Gröbnerovy báze pro ZŠ nevyužiji.

Student 11: Nenapadá mě, jak bych mohla text využít pro práci se žáky.

Otázka 3: *Do jaké míry si myslíte (obecně, bez vazby na uvedený text), že by téma Gröbnerovy báze bylo aplikovatelné v praxi ve výuce na SŠ? Např. pro nadané žáky, kteří řeší MO?*

Student 1: Téma je aplikovatelné na SŠ a v podstatě jen pro nadanější žáky.

Student 2: Aplikovat by se toto téma dalo, ale muselo by být více prostoru pro práci s Gröbnerovou bází.

Student 3: Řešitelé MO a zájemci o matematiku by toto téma mohli zvládnout. Nezařadila bych ho do běžné výuky, ale v rámci matematického kroužku bych tomuto tématu dala prostor.

Student 4: Téma bych zařadila do matematického semináře, spíše jako zajímavost. Ukázala bych i jak fungují kalkulátory a online matematické programy.

Student 5: Pokud by zbyl ve školním roce čas, mohli bychom žáky SŠ seznámit s touto metodou, případně využít metodu v matematickém semináři pro zájemce o matematiku.

Student 6: Úlohy bych využil pro nadané žáky, přípravy na olympiádu a v rámci seminářů. V běžné hodině bych látku neprobíral.

Student 7: Nadaní žáci odchází v 5. ročníku na gymnázia a tam vidím možnost využití.

Student 8: Text bych zvolila spíše pro studenty s hlubším zájmem o matematiku (i sám text je označen logem Podporou talentů). Nevím, zda by ostatní spíše od matematiky neodradil pro svoji složitost. Naopak pro studenty, kteří se více o matematiku zajímají, by mohl být text inspirativním. Osobně si tedy myslím, že Gröbnerovy báze asi nebyly příliš aplikovatelné v běžné matematice na SŠ. Zařadila bych je spíše do matematických seminářů a jiných volitelných předmětů. Zde bych mohla při přípravě využít celý materiál soustav polynomiálních rovnic. Jen bych text více vizuálně oddělila (například kapitola 2.4 odrážky b) až f).

Student 9: Myslím si, že na klasické SŠ tato metoda aplikovatelná není, protože by pro žáky byla příliš složitá. Toto téma bych si uměla představit např. na gymnáziu, kde je více nadaných žáků, popř. nějaká speciální matematická třída.

Student 10: Ano, seznámení se s Gröbnerovými bázemi může být pro některé žáky SŠ přínosné. Rozhodně je dobré alespoň vědět k čemu jsou využívány a že existují.

Student 11: Myslím, že je to postup, který se žáci SŠ mohou naučit. I když mi přijde delší než jiný způsob výpočtu soustavy, lze použít na různé typy rovnic a umožní žákům rovnice zjednodušit. Trochu mi přijde, že znalost jiných postupů a přemýšlení nad tím, jak soustavu vyřešit, je nahrazena hrubou silou opakovaného počítání. Pro žáky, kteří ještě nemají tolik znalostí, to může být výhodný postup, ale pro nadané žáky mi přijde zbytečný. Mělo by se u nich rozvíjet myšlení než mechanické počítání.

Otázka 4: *Slyšeli jste někdy předtím o metodě rezultantů nebo o metodě Gröbnerových bází? Řešili jste již v nějakém předmětu na VŠ složitější soustavy rovnic? Myslíte si, že toto téma má své místo v přípravě budoucích učitelů matematiky pro ZŠ či SŠ?*

Student 1: O metodě Gröbnerových bází jsem slyšela. Složitější soustavy rovnic jsem na VŠ už řešila. Téma má své místo v přípravě budoucích učitelů matematiky pro ZŠ i SŠ.

Student 2: O tématu jsem před tímto dotazníkem neslyšel. Žádné složité soustavy rovnic na VŠ jsem neřešil. Téma využití určitě má, jako každá zajímavá metoda řešení.

Student 3: Slyšela jsem o těchto metodách úplně poprvé. Složitější soustavy rovnic jsem již na VŠ řešila v navazujícím matematickém studiu. Toto téma bych zařadila do programu Učitelství matematiky pro SŠ.

Student 4: O tématu jsem dříve neslyšela. Téma bych zařadila pouze pro budoucí učitele SŠ.

Student 5: Myslím, že jsem o metodě Gröbnerových bází již slyšela. Ano, na VŠ jsme řešili složitější soustavy rovnic. Studenti oboru Učitelství matematiky by měli mít ponětí o této metodě, zejména studenti Učitelství pro SŠ by se mohli s touto metodou blíže seznámit.

Student 6: O těchto metodách jsem dříve neslyšel. Nicméně v přípravě učitelů na Fakultě pedagogické ZČU v Plzni má tato metoda své místo.

Student 7: O metodě rezultantu nebo Gröbnerových bází jsem se dozvěděla z přednášek doc. RNDr. Jaroslava Hory, CSc.

Student 8: Před výukou předmětu Obecná algebra jsem o metodě rezultantu neslyšela. Ani o Gröbnerových bázích. Myslím, že své místo má v přípravě budoucích učitelů SŠ. Pro učitele ZŠ bych toto téma asi nezařazovala, případně bych se jen o těchto metodách zmínila a ukázala bych několik příkladů, na kterých bych vysvětlila teorii. Neboť učitelé by měli mít určitou nadstavbu. Na druhou stranu je i toto téma určitou nadstavbou pro učitele SŠ. Naopak řešení těchto složitějších soustav rovnic pomocí lidských způsobů mi přijde zajímavé a pokud bych učila na střední škole, zkusila bych při některé hodině nějakou soustavu studentům zadat (například do dvojic).

Student 9: Tato metoda nám byla představena na přednáškách doc. RNDr. Jaroslava Hory, CSc., před tím jsem o ní nikdy neslyšela.

Student 10: Jsem studentka, která má od absolvování poslední VŠ dlouhý odstup a vím, že pokud člověk nepoužívá v praxi získané poznatky, tak velmi rychle jejich znalost vyprchá. Proto se domnívám, že je důležité mít povědomí o existenci a v případě potřeby si pak může člověk poznatky aktualizovat, vyhledat,. . . , případně použít. Při současném studiu jsem byla s Gröbnerovými bázemi seznámena. Na přednášce se zdály jednodušší, když jsem byla jen pozorovatel. Při vlastním počítání je pak potřebné být na pozoru, aby člověk při rutině něco neopomněl (znaménka, mocniny, . . .). Je to pro mne zajímavá zkušenost i s ohledem na doprovodnou motivaci, ovšem domnívám se, že přímo toto téma nevyužiji. V přípravě výuky učitelů SŠ může mít toto téma/učivo uplatnění, aby uměli případně prezentovat učivo svým budoucím žákům. Pro učitele ZŠ téma považuji pouze za zajímavost.

Student 11: O Gröbnerových bázích jsem slyšela až v předmětu Obecná algebra na VŠ. Asi jsme řešili složitější soustavy rovnic. Téma mi přijde spíše jako zajímavost.

Závěrečné zhodnocení z odpovědí studentů: Téma Gröbnerovy báze považovali studenti za zajímavé. Zařadili by ho pro nadané studenty středních škol a pro studenty vysokých škol, spíše jen pro budoucí učitele SŠ.

8.3 Názory vysokoškolských pedagogů

Využila jsem možností, které mi dávala spolupráce na výuce budoucích učitelů na Fakultě pedagogické ZČU v Plzni. Vedla jsem cvičení KMT/OA/3 spolu s garantem předmětu doc. RNDr. Jaroslavem Horou, CSc., což mi umožnilo realizovat participační akční výzkum.

Akční výzkum jsem volila proto, abych po zhodnocení výsledků výzkumu vytvořila učební materiál na téma *Řešení soustav polynomiálních rovnic*. Uskutečnění akčního výzkumu a jeho výsledky tedy byly vodítkem pro vytvoření učebního textu. Vzhledem k tomu, že jsem měla k dispozici pouze malou skupinu osob - učitelů z praxe, nepřicházel v úvahu kvantitativní výzkum.

Cyklus 1: Východiska akčního výzkumu - vedla jsem neformální diskuse s prof. Pechem (Pedagogická fakulta JU, České Budějovice), doc. Horou (Fakulta pedagogická ZČU, Plzeň) a doc. Polákem (Fakulta aplikovaných věd ZČU, Plzeň). Cílem diskuze bylo zjistit, co se učí o řešení soustav polynomiálních rovnic na jednotlivých vysokých školách připravujících učitele a zda respondenti považují tvorbu zmíněného učebního materiálu za potřebnou.

V rámci diskuse jsem položila uvedeným třem akademickým pracovníkům stejnou otázku:

Otázka: Myslíte si, že řešení soustav polynomiálních rovnic (např. pomocí Gröbnerových bází) má smysl pro přípravu budoucích učitelů? Proč?

Neptala jsem se pouze odborníků, kteří se tímto tématem zabývají, ale ptala jsem se i pedagogů, kteří se věnují jiným oblastem matematiky, jako např. numerickým metodám a geometrii.

- *Odpověď 1:* Soustavy polynomiálních rovnic jsou součástí výuky na SŠ (společné body kuželoseček), občas se objevují jako náročnější úlohy MO - takové úlohy studenti řeší „nějakou fintou“, učitel by o existenci postupu, který „funguje vždy“ měl vědět (ukazuje tím svou odbornost), řešení metodou Gröbnerových bází je v přípravě učitelů zvládnutelné (analogie s GEM, zkušenost s polynomy z hodin algebry), moc mě nenapadá jiný algoritmus, který by byl budoucím učitelům prezentovatelný a zároveň ukazoval podstatu toho, co se děje „v černé bedýnce“ (počítači).

- *Odpověď 2:* Do přípravy budoucích učitelů by bylo vhodné zařadit nějaké téma, které by odráželo současný rozvoj matematiky a přitom bylo dostupné jak studentům učitelství, tak i případně jejich budoucím talentovaným studentům. Najít takové téma je dost obtížné, protože moderní matematika se velice vzdálila od školské matematiky. Jestliže však žádné takové téma nenalezneme, pak studenti učitelství s matematikou získají dojem, že se stále učí poznatky sice klasické, ale několik století staré a to pro ně asi nebude motivující. Objev Gröbnerových bází je příkladem, že najít takové téma je možné. Buchbergerův objev Gröbnerových bází lze datovat cca do r. 1965, tj. do poslední třetiny dvacátého století. Nějaký čas byl ještě potřebný k tomu, aby se metoda rozšířila a mohla být propojena s nastupující výpočetní technikou (např. program Derive a kalkulátory třídy TI-92, posléze s programy jako Mathematica či Maple či specializovanými programy Singular, CoCoA). Řešení soustav polynomiálních rovnic před objevem Gröbnerových bází před r. 1965 využívalo speciálních determinantů (tzv. rezultantů), které zavedl J. J. Sylvester. Jde o poněkud těžkopádnou teorii. Teorie Gröbnerových bází je elegantnější a dostupnější. Pro nalezení Gröbnerovy báze postačuje si členy v polynomu o více neurčitých správně seřadit (ale např. lexikografické uspořádání je zcela jednoduché). Pak již v podstatě postačí elementární algebra, neboť při realizaci tzv. Buchbergerova algoritmu se postupně snažíme „zlikvidovat ošklivé členy v zadaných polynomech“ a k tomuto cíli se využívá jen elementární algebra: rádi bychom od daného polynomu odečetli vhodný násobek jiného polynomu. To by měl zvládnout každý středoškolák. Jsou to tedy algebraické úpravy, které nás dostanou od původní soustavy „složitých“ polynomiálních rovnic k ekvivalentní, ale pro řešení obvykle mnohem výhodnější soustavě rovnic. Moderní matematika (tzv. teorie ideálů) podala důkaz jednoznačnosti tzv. monické a redukované Gröbnerovy báze. Dnes si můžeme Gröbnerovu bázi ideálu spočítat nejen ručně, ale i zkontrolovat její výpočet některým z programů počítačové algebry. Gröbnerovy báze jsou užitečné nejen při řešení soustav algebraických rovnic, ale i při dalších aplikacích (strojové dokazování matematických vět atd.)

- *Odpověď 3:* Smysl řešení soustav polynomiálních soustav např. pomocí Gröbnerových bází vidím v následujících dvou oblastech:

  a) Jedná se o oblast, kde se významně uplatní počítače, ovšem zároveň je zde uplatněn rigorózní algebraický přístup k matematice, nikoliv aproximativní numerické přístupy, s nimiž je u většiny budoucích učitelů využití počítačové techniky ve výuce matematiky spojeno. Myslím si, že je pro budoucí učitele matematiky užitečné vidět, že výpočetní techniku lze užít i tímto způsobem.

  b) Ačkoliv se soustavy polynomiálních rovnic řeší na střední škole jen poměrně okrajově (především v souvislosti s kuželosečkami) a drtivě dominuje zaměření na soustavy rovnic lineárních, měli by učitelé chápat, že svět kolem nás zdaleka není jen lineární a nelinearita může přinášet celou řadu velmi zajímavých a zároveň užitečných (byť těžko matematicky popsatelných) fenoménů. Pro studenty v kombinaci s fyzikou může být v tomto směru zajímavá např. zmínka o tzv. solitonech či některých projevech nelineární optiky.

Ze získaných odpovědí akademických pracovníků vyplývá, že v přípravě budoucích učitelů matematiky by mělo být téma zařazeno, a proto má smysl se přípravou učebního materiálu k řešení soustav polynomiálních rovnic zabývat a na textu pracovat. Důležité je ale najít vhodný formát a mít k dispozici přiměřené studijní materiály, protože jde o problematiku, která je pro průměrné studenty učitelství matematiky dosti obtížná.

8.4 Poznatky z matematického kempu pro talentované žáky SŠ

Matematický kemp je určen pro žáky SŠ, kteří řeší matematické olympiády. Organizátorem matematického kempu je Středisko služeb školám ve spolupráci s odborem školství Krajského úřadu Plzeňského kraje a koná se 5 dní na Gymnáziu v Plzni, které sídlí na Mikulášském náměstí.

Žáci SŠ absolvují přednášky o zajímavých tématech z matematiky. S doc. RNDr. Jaroslavem Horou, CSc. (akademickým pracovníkem z Fakulty pedagogické ZČU v Plzni) jsme žákům přednášeli o řešení soustav polynomiálních rovnic. Žáci se také seznámili s kalkulátory TI-92 a TI-93 plus, které umí nalézt Gröbnerovy báze.

Prvotní text jsme vytvořili společně s doc. Horou pro Matematický kemp v roce 2018 pro skupinu nadaných středoškolských žáků. Kempu se zúčastnilo 15 žáků. Tito žáci s textem prvně pracovali a já jsem prováděla jen pozorování. Nedávala jsem jim žádné dotazníky. Žákům jsem vysvětlila látku, vypočetli jsme vzorové příklady a oni pak počítali sami a s kalkulačkou.

Ve školním roce 2020/21 jsem se zúčastnila Matematického kempu podruhé. Kempu se zúčastnilo jen 5 žáků. Danou problematiku jsem žákům nejprve vysvětlila a poté jsem počítala vzorový příklad. Žáci řešení jen sledovali a snažili se zodpovídat otázky, které jsem jim dávala v průběhu řešení. Po vysvětlení problematiky a po vzorovém vyřešení příkladu jsem žákům zadala k vyřešení jeden příklad, aby ho zkusili vyřešit metodou Gröbnerových bází nebo alespoň matematickými úpravami. Poté jsem žákům položila 2 otázky k novému učivu.

Příklad 8.3 *Vyřešte v oboru komplexních čísel soustavu rovnic:*

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 8, \\ x^2 + xy + y^2 &= 13. \end{aligned}$$

Pro **řešení** zadané soustavy rovnic je možné použít následující metody:

1. **Řešení nápadem:**

$$\begin{array}{rcr} x^2 - y^2 & = & 8 \\ x^2 + xy + y^2 & = & 13 \\ \hline 13x^2 - 13y^2 & = & 104 \\ -8x^2 - 8xy - 8y^2 & = & -104 \\ \hline \text{rovnice sečteme:} & & \\ 5x^2 - 8xy - 21y^2 & = & 0 \\ \hline \text{po vydělení 5 dostáváme:} & & \\ x^2 - \frac{8}{5}xy - \frac{21}{5}y^2 & = & 0 \\ 5x^2 - 8xy - 21y^2 & = & 0 \\ \hline \text{po rozkladu polynomu dostáváme:} & & \\ (x - 3y) \cdot (x + \frac{7}{5}y) & = & 0 \end{array}$$

a) $x - 3y = 0$

$x = 3y$

$9y^2 - y^2 = 8$

$8y^2 = 8$

$y^2 = 1$

$y = \pm 1$

b) $x + \frac{7}{5}y = 0$
$x = -\frac{7}{5}y$
$\frac{49}{25}y^2 - y^2 = 8$
$\frac{24}{25}y^2 = 8$
$y^2 = \frac{25}{3}$
$y = \pm\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Řešení: $[3,1], [-3,-1], [\frac{7}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}], [-\frac{7}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}]$.

3 Řešení pomocí metody Gröbnerovy báze:

Použijeme lexikografické uspořádání $<_{\mathbf{L}}$.

Máme $G = \{g_1, g_2\}$, kde $g_1 = x^2 - y^2 - 8$ a $g_2 = x^2 + xy + y^2 - 13$.

Množina $B = \{[1,2]\}$.

Vypočteme:

$LT(g_1) = x^2$

$LT(g_2) = x^2$

$LCM(LT(g_1), LT(g_2)) = x^2$

$\text{Spoly}\,(g_1, g_2) = \frac{x^2}{x^2}(x^2 - y^2 - 8) - \frac{x^2}{x^2}(x^2 + xy + y^2 - 13) = -xy - 2y^2 + 5$

Tento polynom je v normálním tvaru, položíme $g_3 = -xy - 2y^2 + 5$.

Nyní máme: $B = \{[1,3], [2,3]\}$.

Vypočteme:

$LT(g_1) = x^2$

$LT(g_3) = -xy$

$LCM(LT(g_1), LT(g_3)) = x^2y$

$\text{Spoly}\,(g_1, g_3) = \frac{x^2y}{x^2}(x^2 - y^2 - 8) + \frac{x^2y}{xy}(-xy - 2y^2 + 5) = -2x^2y + 5x - y^3 - 8y$, označíme jej p_1. Tento polynom není v normálním tvaru, provedeme redukci $p_1 \to_G p_1 - 2y \cdot g_3 = 5x + 3y^3 - 18y$, označíme jej g_4.

Přidáme do množiny G, tedy $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$.

Množina $B = \{[2,3], [1,4], [2,4], [3,4]\}$.

Vypočteme: $\text{Spoly}\,(g_2, g_3) = \frac{x^2y}{x^2}(x^2 + xy + y^2 - 13) - \frac{x^2y}{x^2}(-xy - 2y^2 + 5) =$
$= -xy^2 + 5x + y^3 - 13y = p_1$.

Provedeme redukci $p_1 \to_G p_1 - 2y \cdot g_3 = 5x + 3y^3 - 18y = p_1 \to_G p_2 - g_4 = 0$.

Máme $h = \text{normalf}(\text{Spoly}\,(g_2, g_3)) = 0$, množinu G nebudeme rozšiřovat.

Množina $B = \{[1,4], [2,4], [3,4]\}$.

Vypočteme: $\text{Spoly}\,(g_1, g_4) = \frac{5x^2}{x^2}(x^2 - y^2 - 8) - \frac{5x^2}{5x}(5x + 3y^3 - 18y) =$
$= -3xy^3 + 18xy - 5y^2 - 40 = p_1$, není v normálním tvaru, provedeme redukci

$p_1 \to_G p_1 - 3y^2 g_3 = 18xy + 6y^4 - 20y^2 - 40 = p_2$, provedeme další redukci $p_2 \to_G p_2 + 18g_3 = 6y^4 - 56y^2 + 50$ (je v normálním tvaru), označíme jej g_5 a vložíme do množiny G; $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$.

Podobně bychom vypočetli Spoly (g_2, g_4) a Spoly (g_3, g_4).

Dostali bychom opět $h = \text{normalf(Spoly}\,(g_i, g_j)) = 0$, další polynomy bychom do množiny G nepřidávali.

Z rovnice $6y^4 - 56y^2 + 50$ bychom dopočetli stejně jako v předchozím případě y. Z rovnice g_4 pak dopočteme x a dostaneme řešení stejně jako v předchozím případě $[3, 1]$, $[-3, -1]$, $[\frac{7\sqrt{3}}{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3}]$, $[-\frac{7\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3}]$.

Zhodnocení:

Jak si žáci poradili s příkladem?

a) Řešení pomocí Gröbnerových bází

   1 žák začal soustavu řešit pomocí matematických úprav. K řešení pomocí Gröbnerových bází se nedostal. 4 žáci řešili příklad pomocí Gröbnerových bází. První S-polynom vypočetli správně. Redukce tohoto polynomu nebyla potřeba. Počítali tedy další dva S-polynomy. 3 žáci je vypočetli správně, 1 udělal numerickou chybu při úpravě. Problém jim dělala redukce těchto polynomů. Správně vyřešil soustavu rovnic jen jeden žák. Čas musel být omezen, protože žáci měli během dne více různých přednášek. Při delším čase by možná výsledky byly lepší.

b) Řešení pomocí matematických úprav

   3 žáci zkoušeli vyřešit příklad i pomocí matematických úprav, 2 žákům už na toto řešení nezbyl čas. Ani jeden ze 3 žáků nedospěl ke správnému řešení. Jako důvod neúspěchu vidím především časové omezení.

Závěrem žáci zodpověděli písemně dvě otázky:

1. Připadal Vám výklad o Gröbnerových bázích srozumitelný a využitelný?
2. Do jaké míry si myslíte, že by téma Gröbnerovy báze bylo aplikovatelné v praxi ve výuce na SŠ? Např. pro žáky, kteří řeší MO nebo navštěvují matematický kroužek nebo seminář?

Všech 5 žáků považovalo výklad o Gröbnerových bázích za srozumitelný a využitelný. Téma Gröbnerovy báze by žáci zařadili do matematického semináře pro řešitele MO. Do běžné výuky by ho nezařadili. Výpočet jim přišel zdlouhavý, jednomu žákovi i obtížný. Ale při řešení určitých soustav se většina z nich domnívá, že by řešení pomocí Gröbnerových bází mohlo být jedinou rozumnou cestou, když nemohou najít žádné triky.

8.5 Poznatky z Geometrického semináře na PF JU

Na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích se s Gröbnerovými bázemi seznamují budoucí učitelé v rámci seminářů, např. KMA/GSA - Geometrický seminář v angličtině. Pro absolvování tohoto předmětu museli studenti zpracovat semestrální práci. Tématem práce bylo vyšetřit množinu všech bodů dané vlastnosti. Tento seminář jsem také navštěvovala a seznámila jsem se s pracemi studentů za poslední dva roky. To mi také pomohlo při tvorbě textu o množinách všech bodů dané vlastnosti.

V akademickém roce 2018/19 mělo předmět zapsáno 10 studentů, v akademickém roce 2019/20 pouze 3 studenti. Studenti využili pro znázornění křivky program GeoGebra a v ní funkci Locus - množina bodů. Dále se snažili vypočítat ručně rovnici křivky. Určili jednotlivé rovnice a získali složitou soustavu polynomiálních rovnic. Tuto soustavu však už ručně všichni studenti nevyřešili. Jen 3 studenti ze 13 soustavu vyřešili ručně. Převážně pomocí GeoGebry (příkaz Eliminate) určili rovnici množiny bodů, 4 studenti využili program CoCoA. Poté všichni ověřili pomocí GeoGebry správnost řešení. Někteří se seznámili i s novými křivkami jako asteroida, strofoida, kardioida a dalšími. Podrobně je v kapitole 7.1 provedena analýza řešitelských strategií u úlohy na strofoidu.

U některých prací mě zaujalo, že na začátku studenti správně odhadli, jaká křivka vznikne. Zajímavé bylo i to, že studenti uváděli historii a zajímavosti o vzniklé křivce. Ze semestrálních prací bylo patrné, že studenty téma zaujalo a náležitě se mu věnovali.

8.6 Uplatnění výsledků akčního výzkumu do návrhu materiálů

Další fáze akčního výzkumu (*cyklus 2*) je popsána v kapitolách 8.2, 8.4 a 8.5, kde jsme se zaměřili v přípravě budoucích učitelů na výuku tématu Gröbnerovy báze a množiny bodů dané vlastnosti. Ale probíhala již při činnostech studentů popsaných v kapitole 7.1.

Poslední fáze akčního výzkumu *cyklus 3* spočívala v upravení textu podle námětů a připomínek skupiny studentů. Upravený text je v příloze této práce.

Jelikož v letním semestru 2019/20 i 2020/21 probíhala výuka na VŠ distančně kvůli koronaviru, některým studentům jsem téma musela vysvětlit online a zaslala jim materiály. Poté jsem jim dala zpracovat příklady a otázky. Všichni studenti současně už vyučují na ZŠ, proto také měli hodně svých dalších povinností. Se studenty jsem se poté setkala a vysvětlila jim nejasnosti. Získala jsem od nich také podněty k upravení textu, který jsem jim zasílala v rámci samostudia. Text jsem na základě jejich připomínek upravila a rozšířila.

Studentům, kteří řešili úlohy na množiny bodů, jsem téma vysvětlila a dostali také příslušný materiál.

Domnívám se, že materiály k tomuto tématu jsou vhodné. Jak i studenti upozorňovali, na internetu není mnoho podkladů. Na Fakultě pedagogické ZČU v Plzni se téma probírá při výuce budoucích učitelů ZŠ, kde není využitelné. Vhodnější by bylo zařadit téma do programu Učitelství pro SŠ, které se vyučuje na Fakultě aplikovaných věd ve spolupráci s Fakultou pedagogickou.

Návrh učebního materiálu pro řešitele MO a studenty VŠ je uveden v příloze 2.

9 Závěr a doporučení

Cílem práce bylo ukázat, jak může být téma zařazené do výuky matematiky na ZŠ a SŠ rozšířeno a zpracováno pomocí matematického software. Pro tento účel jsem zvolila téma řešení soustav rovnic a využití soustav rovnic při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti, které nabízelo i rozšíření metod řešení a uvedení matematické teorie, o kterou se toto řešení opírá. K dosažení cíle byly položeny 3 výzkumné otázky.

1. otázka - Jaké jsou strategie pro řešení soustav rovnic u žáků SŠ a studentů VŠ?

K nalezení odpovědi na tuto otázku bylo provedeno šetření mezi žáky gymnázií a středních průmyslových škol s využitím didaktického testu a řízeného rozhovoru (kap. 6.3). Žáci středních průmyslových škol většinou využívali metodu sčítací, výjimečně metodu dosazovací. Metodu srovnávací nepoužil nikdo. Žáci gymnázií využívali přibližně stejně metodu sčítací a dosazovací. Metodu srovnávací také nepoužil nikdo. Při řešení slovních úloh bylo pro žáky obtížné správně sestavit rovnici. Někteří zkusili řešit slovní úlohu pokusem. Většina se ale snažila sestavit buď rovnici nebo soustavu rovnic. U slovních úloh na společnou práci a o pohybu používali žáci naučené postupy. Většina žáků tedy volila k řešení soustav rovnic metodu sčítací. Volbu zdůvodňovali tím, že si ji nejvíce pamatovali ze ZŠ, neboť ji tam nejvíce procvičovali.

Žáci často jednotlivé rovnice vynásobili, ale nezvolili pro vynásobení vhodné číslo, takže po sečtení dospěli k jedné rovnici o dvou neznámých. Dělali také chybu ve znaménku nebo nevynásobili číslem celou rovnici. Soustavy rovnic vyřešili jen pro jednu neznámou, ale nedopočetli řešení pro druhou neznámou. Neuměli udělat závěr, zda soustava má nekonečně mnoho řešení nebo nemá řešení.

Je logické, že žák může úspěšně řešit soustavy 2 lineárních rovnic o 2 neznámých teprve tehdy, když zvládá řešení lineární rovnice s 1 neznámou. Když žák bude chybovat, je nutné se v učivu vrátit k lineárním rovnicím. Další častou příčinou chyb je nepochopení samotné podstaty soustavy rovnic o více neznámých. Žák např. vypočte hodnotu pouze jedné neznámé nebo se při provedení zkoušky spokojí s dosazením jen do jedné z rovnic. Proto doporučuji před vlastním řešením soustav rovnic zařadit úlohy následujícího typu:

Zjistěte, zda uspořádaná dvojice je řešením soustavy rovnic:

a) dát uspořádanou dvojici, která bude řešením dané soustavy rovnic,

b) dát uspořádanou dvojici, která nebude řešením soustavy rovnic,

c) dát uspořádanou dvojici, která bude řešením jen jedné z rovnic.

Viz např. následující příklad:

Příklad 9.1 *Řešením následující soustavy rovnic*

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ x + 2y &= 7 \end{aligned}$$

je uspořádaná dvojice:

a) $[-1, 4]$, b) $[2, -2]$, c) $[1, 3]$, d) $[3, -4]$.

Nadané žáky navrhuji seznámit s metodami založenými na principu eliminace a s využitím matematických programů (viz např. ukázky v kap. 4 a v přílohách 1 a 2). Zařazení uvedených metod do seminářů pro středoškoláky s hlubším zájmem o matematiku však vyžaduje, aby s těmito metodami byli seznámeni jejich učitelé.

Ověření na skupině účastníků kempu pro řešitele matematických olympiád ukázalo, že problematika žáky zaujala a úlohy zvládali řešit.

Budoucí učitelé matematiky by se určitě měli seznámit s moderními metodami řešení soustav rovnic - metodou Gröbnerových bází, popřípadě metodou rezultantů.

Zkušenosti z výuky na Fakultě pedagogické ZČU a Pedagogické fakultě JU ukazují, že po osvojení elementárních poznatků o Gröbnerových bázích jsou studenti schopni řešit i náročnější úlohy. Potřebují však získat zkušenosti s řešením takového typu úloh (viz kap. 8).

2. otázka - Jaké jsou strategie pro řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti u budoucích učitelů?

K nalezení odpovědi na danou otázku bylo provedeno šetření mezi studenty Fakulty pedagogické ZČU v Plzni a Pedagogické fakulty JU v Českých Budějovicích. Byl opakovaně využit didaktický test, dotazníkové šetření a řízený rozhovor. Výsledky testů i rozhovory se studenty ukázaly, že řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti je obtížné i pro budoucí učitele. Při řešení většina studentů vycházela z grafického znázornění (nakreslení obrázku). Jen někteří z nich dokázali při řešení bez použití softwaru získat soustavu rovnic a následně eliminovat proměnné a určit typ křivky. Při využití GeoGebry dokázali znázornit situaci a získat určitou křivku, ale nedokázali získat rovnici. Ze studijních plánů i výpovědí studentů vyplývá, že problematice řešení úloh na množiny bodů je v přípravě budoucích učitelů věnováno málo pozornosti. Nízká časová dotace neumožňuje zařadit do výuky více typů úloh a umožnit studentům získat zkušenosti s interpretací výsledku poskytnutého matematickým softwarem. Sami studenti uváděli jako nejdůležitější strategii „nakreslit si situaci“, „logické zdůvodnění“, „Inteligentní hádání a testování“ a „uvážit všechny možnosti“. Nejvíce věřili sami sobě u strategií („podívat se na problém z jiného pohledu“, „řešit podobný problém“, „uvážit extrémní případy“, „inteligentní hádání a testování (aproximace)“, „uvážit všechny možnosti“, „zorganizovat si data“, „logické zdůvodnění“). Význam softwaru pro řešení tohoto typu úloh uváděli především u strategií („uvážit extrémní případy“, „nakreslit si situaci“, „inteligentní hádání a testování (aproximace)“, „uvážit všechny možnosti“).

3. otázka - Jaké jsou možnosti využití systémů počítačové algebry při řešení soustav polynomiálních rovnic žáky SŠ a studenty VŠ?

Užívání digitálních technologií ve výuce matematiky má bezpochyby motivační charakter. Na příkladu Gröbnerových bází a jejich využití při řešení soustav polynomiálních rovnic a úloh na množiny bodů jsme ukázali, že potenciál využití výpočetní techniky ve výuce matematiky na ZŠ, SŠ i VŠ je širší. Využití systémů počítačové algebry nabízí nové strategie při řešení úloh a seznámení s novými pojmy, umožňuje více se přiblížit k jádru matematického poznání. Obdobně jako při užívání jiných technologií v běžném životě se někteří žáci dostanou na úroveň uživatele, jiní alespoň nahlédnou do principu fungování těchto technologií.

Získané závěry mají obecnou platnost jen do jisté míry. Při rozboru strategií řešení soustav rovnic u žáků SŠ jsem se snažila získat větší výzkumný vzorek, ale jednalo se pouze o žáky z gymnázia a střední průmyslové školy. Nebyly zkoumány výsledky dalších typů středních škol, což jistě ovlivnilo i výskyt a typy chyb, které byly též analyzovány. Při zjišťování metod vhodných pro řešení soustav pro nadané žáky byl poměrně malý vzorek výzkumného souboru a výsledky mohly být ovlivněny i časovou dotací pro danou činnost (viz kap. 8). Při zjišťování toho, s jakými metodami řešení by se měli seznámit budoucí učitelé matematiky, jsem byla limitována nejen rozsahem souboru, ale především omezením kontaktní výuky. Vzhledem k tomu si část respondentů musela látku nastudovat sama. Materiál vytvořený participačním akčním výzkumem nebyl detailně ověřován z hlediska jeho efektivity.

Uvedené limity výzkumu zároveň ukazují, kam by mohl být nasměrován budoucí výzkum dané problematiky. Přesto se domnívám, že práce ukázala, že má velký smysl využití výpočetní techniky ve výuce matematiky, ale musí být nasazována ve správnou chvíli, nemá omezovat tvořivost žáka, ale naopak ji rozvíjet. Otevírá to nové možnosti i pro didaktiku matematiky, dává jí to nové úkoly.

Na příkladu řešení soustav polynomiálních rovnic dává práce odpověď na otázku, jak může využití výpočetní techniky ve vyučování přispět k rozvoji matematického myšlení žáka. Žákům s hlubším zájmem o matematiku umožnilo poznání základní teorie Gröbnerových bází rozšířit rejstřík metod, které mohou volit k řešení soustav polynomiálních rovnic. Jak jsme ukázali na řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti, i dalším žákům nabízí software využívající teorii Gröbnerových bází poznat jiné křivky, než přímky a kuželosečky, se kterými se běžně setkávají. To může přispět ke zvýšení jejich zájmu o vyučování a především k hlubšímu pochopení problematiky úloh na množiny bodů dané vlastnosti.

Vzhledem k tomu, že již několik let vyučuji na SŠ, bylo mi umožněno při zpracování práce využít i některé vlastní zkušenosti. Přesto, že matematika patřila a stále patří mezi základní oblasti vzdělanosti, čím dál častěji slyšíme i názory, že matematika není důležitá. Chceme-li změnit tento negativní postoj k matematice, je nutné změnit i způsob její výuky a přizpůsobit výuku moderní době 21. století. Pro výuku matematiky na všech stupních škol je důležité, aby byla pro žáky zajímavá a zároveň užitečná. Digitální technologie nám mohou k dosažení tohoto cíle významně pomoci.

Literatura

[1] Arikawe, A. S.: *Uses of microcomputer software programs in mathematics curriculum within southeastern colleges and universities.* University of South Carolina, 1989

[2] Artigue, M.: *Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work.* International Journal of Computers for Mathematical Learnint 7, Article number 245, Paříž 2002

[3] Attorps, I., Björk, K., Radic, M.: *The use of Mathematics Software in University Mathematics Teaching.* Department of Electronics, Mathematics and Natural Sciences, Universtiy of Gävle, Sweden 2011.

[4] Aydm, E. : *The use of computers in mathematics education: A paradigm shift from „computer assisted instruction“ towards „student programing“.* The Turkish Online Journal of Educational Technology - TOJET. 2005.

[5] Baltaci, S. : *The Impact of Teaching Geometric Locus Problems in a Computer-Assisted Environment on the Metacognitive Awareness of Preservice Teachers.* Acta Didactica Napocesia, Volume 11, Number 2, 2018.

[6] Bečvář, J., Bečvářová, M., Vymazalová, H.: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie.* Edice Dějiny matematiky, 23. svazek, Prometheus, Praha 2003.

[7] Barto, L., Stanovský, D.: *Počítačová algebra.* Matfyzpress, Praha 2007.

[8] Bastl, B: *Aplikace geometrie 2. Pomocný učební text.* ZČU, Plzeň 2007.

[9] Binterová, H. a kol.: *Klíčové kompetence a mezipředmětové vztahy.* JČU, České Budějovice 2016.

[10] Bobok, J. a kol.: *Matematika pro 8. ročník ZŠ. I. díl.* SPN, Praha 1983.

[11] Boček, L. a kol.: *Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice.* Prometheus, Praha 1994.

[12] Brousseau: *Úvod do teorie didaktických situací v matematice.* Výběr textů Novotná, J., z francouzského originálu přeložili Novotná, J., Bureš, J., Růžičková, L., PF UK Praha, 2012.

[13] Buteau, Ch., Jarvis, D. H., Lavicza, Z.: *Do mathematicians integrate computer algebra systems in university teaching? Comparing a literature review to an international survey study.* Computers & Education, svazek 58, část 1, leden 2012.

[14] Cassell, C. a Johnson, P.: *Action research: Explaining the diversity*. Human Relations, 59(6), 783-814, 2006.

[15] Cizlerová, M. a kol.: *Matematika pro SŠ - 2. díl*, podtitul *Výrazy, rovnice a nerovnice*. Didaktis, Brno 2013.

[16] Cox, D., Little, J., O´Shea, D.: *Ideals, Varieties, and Algorithms - An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra.* Springer, New York 1997.

[17] Coufalová, J. a kol.: *Matematika pro 9. ročník základní školy*. Fortuna, Praha 2018.

[18] Von zur Gathen, G., Bernard, J.: *Modern Computer Algebra*. Cambridge University Press, Cambridge 1999.

[19] El Aydi, M., Bendaoud, R., Sbaa, M., Berkatou, M., Benhmida, M.: *Solving a Geometrical Locus Problem Using GeoGebra Software and Then Analytical Geometry*. Open Access Library Journal, 2020, Volume 7.

[20] Emul, N., Gulkilik, H., Kaplan, H. A. : *Pre-Service Mathematics Teachers' Experience with a Dynamic Geometry Environment Whilst Reasoning in Relation to Locus Problems: A Detailed Look at Strategies.* Interdisciplinary Journal of Practice, Theory, and Applied Research, Volume 39, 2022.

[21] Gannon, G., Shultz, H.: *Solving Simultaneous Equations: Getting More from Geometry*. Mathematics Teacher 100, str. 189 - 191, 2006. Gannon, Gerald, and Harris Shultz. “” Mathematics Teacher 100 (October 2006): 189-91

[22] Geddes, K. O., Czapor, S. R., Lahahn, G.: *Algorithms for Computer Algebra*. Kluwer 1992.

[23] Gergelitsová, Š.: *Počítač ve výuce nejen geometrie - průvodce GeoGebrou.* Generation Europe, Praha 2011.

[24] Grulich, B.: *K základům problematiky plynulého pžechodu žáků z 5. do 6. ročníku.* Článek v časopisu Pedagogika, Praha 1962, (časopis archivován Národní knihovnou ČR - https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/).

[25] Häggström, J.: *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: What is made possible learn?*. Doctoral theses from University Gothenburg (http://hdl.handle.net/2077/17286), Gothenburg 2008.

[26] Hall, R. D. G.: *An Analysis of Errors Made in the Solution of Simple Linear Ewuations.* Philosophy of Mathematics Education Journal 15, http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome15/hall_errors.pdf.

[27] Hašek, R., Zahradník, J.: *Study of historical geometrie problems by means of CAS and DGS.* Internacional Journal for Technology in Mathematics Education. University of South Bohemika in Ceske Budejovice, České Budějovice 2015.

[28] Heid, M. K., Blume, G. W., Hollebrands, K., Piez, C.: *Computer Algebra Systems in Mathematics Instruction: Implications from Research.* The Mathematics Teacher, National Council of Teachers of Mathematics 2002.

[29] Hejný, M.: *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Praha 2016.

[30] Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* 2. aktual. vyd. Portál, Praha 2009.

[31] Hejný, M., Šalom, P.: *Matematika D, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* H-mat, Praha 2017.

[32] Hejný, M., Šalom, P.: *Matematika E, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* H-mat, Praha 2017.

[33] Hitt, F.: *Construction of mathematical knowledge using graphic calculators (CAS) in the mathematics classroom.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, svazek 42, 2011.

[34] Hora, J.: *O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole. II. díl.* Pedagogické centrum, Plzeň 1998.

[35] Hošpesová, A. a kol.: *Matematická gramotnost a vyučování matematice.* JČU, České Budějovice 2011.

[36] Hošpesová, A., Stehlíková N., Tichá M. (Ed.): *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice.* JČU, České Budějovice 2007.

[37] Hruša, K., Vyšín, J.: *Vybrané kapitoly z metodiky vyučování matematice na základní devítileté škole.* SPN, Praha 1964.

[38] Chevallard, Y.: *On Didactic Transposition Theory: Some introductory notes*, Aix-Marseille University, Marseille 2015.

[39] Intaros, P., Inprasitha, M., Srisawadi, N.: *Students' problem solving strategies in problem solving - mathematics classroom*, Procedia - Social and Behavioral Sciences 116, str. 4119 - 4123, 2014.

[40] Janík, T.: *Akční výzkum jako cesta ke zkvalitňování pedagogické praxe.* In J. Maňák, V. Švec, et al., Cesty pedagogického výzkumu (s. 51–68). Brno: Paido. ISBN 80-7315-078-6.

[41] Janík, T.: *Akční výzkum pro učitele - příručka pro teorii a praxi.* PedF MU, Brno, 2003.

[42] Jarník, J., Šisler, M.: *Jak řešit rovnice a jejich soustavy.* Polytechnická knižnice II. sv. 3. SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha 1969.

[43] Karakus, F., Aydin B.: *The Effects of Computer algebra System on Undergraduate Students Spatial Visualization Skills in a Calculus Course.* Malaysian Online Journal of Educational Technology (Malajský online žurnál vzdělávací technologie), 2017.

[44] Knecht, P.: *Didaktická transformace aneb od didaktického zjednodušení k didaktické rekonstrukci.* Článek v Orbis scholae, roč. 2, č. 1, s. 67-81. Karolinum, Praha 2007.

[45] Kohout, J., Masopust, P., Mollerová, M., Feřt, L., et al.: *Kritická místa kurikula fyziky na 2. stupni základní školy I.* Fakulta pedagogická ZČU v Plzni, Plzeň 2019.

[46] Kutzler, B.: *Solving Systems of Equations with the TI-92 (Experimental Learning/Visualization/Scaffolding Method).* Bk teachware, Austria, 1998.

[47] Lagasse, A.: *An analysis of Differences in Approaches to Systems of Linear Equations Problems Given Multiple Choice Answers.* Honor Theses and Capstones, 2012.

[48] Laudonia, I. et al.: *Action research in science education - An analytical review of the literature.* Education Action Ressearch, page 480-495, Volume 26, 2017.

[49] Lavicza, Z.: *The examination of Computer Algebra Systems (CAS) integration into university - level mathematics teaching.* University of Cambridge, United Kingdom 2006.

[50] Leinbach, C., Pountney, D. C., Etchells, T.: *Appropriate use of a CAS in the teaching and learning of mathematics.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, svazek 33, 2002.

[51] Maňák, J., Janík, T., Švec, V.: *Kurikulum v současné škole.* Nakladatelství Paido, Brno, 2008.

[52] Maňák, J., Švec, V.: *Cesty pedagogického výzkumu.* Nakladatelství Paido, Brno, 2004.

[53] Mareš, J.: *Pedagogická psychologie.* Portál, Praha 2013.

[54] Molnár, J. a kol.: *Matematika 9 - učebnice s komentářem pro učitele.* Prodos, Olomouc 2001.

[55] Müllerová, J. a kol.: *Matematika pro 7. ročník ZŠ. II. díl.* SPN, Praha 1982.

[56] Nezvalová, D.: *Akčním výzkumem k zlepšení kvality školy.* PF UP, Olomouc, 2002.

[57] Noss, R., Cha, S.: *Investigating Students' understandings of Locus with Dynamic Geometry.* Institute of Education, University of London, Winter, J. (Ed.) Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematcs 21 (3), November 2001.

[58] Pech, P.: *Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii.* JČU, České Budějovice 2005.

[59] Pech, P.: *Selected topics in geometry with classical vs computer proving.* World Scientific Publishing, New Jersey, London, Singapore 2007.

[60] Peschek, W., Schneider, E.: *CAS in general mathematics education.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), vol. 34/5, Klagenfurt 2002.

[61] Pierce, R., Stacey, K.: *Monitoring effective use of computer algebra systems.* University of Melbourne, Article leden 2002.

[62] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky.* 10. vydání. Prometheus, Praha 2015.

[63] Polák, J.: *Didaktika matematiky - Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. I. část: Konkrétní didaktika matematiky.* Fraus, Plzeň 2014. *II. část: Obecná didaktika matematiky.* Fraus, Plzeň 2016. *III. část: Historie matematiky pro učitele.* Fraus, Plzeň 2016.

[64] Polák, J.: *Řešení soustav polynomických rovnic*, Matematika - fyzika - informatika 2, článek v časopise pro výuku na základních a středních školách, Ročník XXXI (2022), číslo 2, Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků, Praha, 2022. https://mfi.upol.cz/files/31/3102/mfi_3102_all.pdf

[65] Posamentier, S. A., J., Krulik, S.: *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions; A Resource for the Mathematics Teacher*, Corwin Press, Inc., 1998.

[66] Proulx, J., Beisiegel, Miranda, H., Simmt, E.: *Rethinking the Teaching of Systems of Equations*, Mathematics Teacher, str. 526 - 533. 2009.

[67] Průcha, J., Walterová, E., Mareš, J.: *Pedagogický slovník*, 7. vydání, nakl. Portál, 2013.

[68] Půlpán, Z., Čihák, M., Trejbal, J.: *Matematika pro základní školy - algebra.* SPN - pedagogické nakladatelství, Praha 2010.

[69] Rendl, V., Vondrová, N: *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Praha 2013.

[70] Rendl, V., Vondrová, N: *Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků TIMSS 2007.* Článek v časopisu Pedagogická orientace, 2014, roč. 24, č. 1,s. 22-57. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Katedra psychologie, Praha 2014.

[71] Rich, K. M., Yadov, A., Larimore, R. A.: *Teacher implementation profiles for integrating computational thinking into elementary mathematics and science instruction.* Education and Information Technologies, The Official Journal of the IFIP Technical Committee on Education, svazek 25, číslo 4, červenec 2020.

[72] Rosecká, Z. a kol.: *Algebra, učebnice pro 9. ročník.* Nová škola, s. r. o., Brno 2000.

[73] Segal, R., Stupel, M. and Ozman, V.: *Dynamic investigation of loci with surprising outcomes and their mathematical explanations.* International Journal of Matematical Education in Science and Technology, 443 - 462, 2016.

[74] Sfard, A., Linchevski, L.: *The Gains and the Pitfalls of Reification – The Case of Algebra.* Educational Studies in Mathematics 26, str. 191-228, 1994.

[75] Schneider, E.: *Teacher experiences with the use of a CAS in a mathematics classroom.* The International journal of computer algebra in mathematics education, svazek 7, č. 2, 2000.

[76] Schwarz, Š.: *Základy náuky o riešení rovnic.* Vydavateľstvo SAV, Bratislava 1968.

[77] Slavík, J., Janík, T.: *Kvalita výuky: obsahově zaměřený přístup ke studiu procesů vyučování a učení.* Pedagogika, roč. 62, č. 3, s. 262-286, 2012.

[78] Svätokrižny, P. a kol.: *Aritmetika a algebra pre pedagogické fakulty. II. diel.* SPN, Bratislava 1978.

[79] Sy Nam, P., Nguyen, N.-G., Tuong, H. A., Haas, B., Lavicza, Z., Kreis, Y.: *Problem-Based Learning about Error Detection and Correction in Locus Problems with the Aid of GeoGebra Software.* International Journal for Technology in Mathematic Education, Volume 30, Number 3, 2023.

[80] Šarounová a kol.: *Matematika 9, I. díl.* Prometheus, Praha 1999.

[81] Švaříček, R., Šeďová, K. a kol.: *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách.* Portál, Praha 2007.

[82] Švrček, J.: *Soustavy rovnic a metody jejich řešení.* Univerzita Palackého, Olomouc 2016.

[83] Tokpah, Ch. L.: *The Effects of Computer Algebra Systems on Students' Achievement in Mathematics.* Kent State University 2008.

[84] Trejbal, J.: *Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl.* SPN - pedagogické nakladatelství, Praha 1997.

[85] Vošický, Z. a kol.: *Matematika v kostce pro střední školy.* Fragment, Havlíčkův Brod 2007.

[86] Vondrová, N. a kol.: *Kritická místa matematiky základní školy v řešení žáků.* Karolinum, Praha 2016.

[87] Vondrová, N.a kol.: *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií.* Karolinum, Praha 2019.

[88] Wang, D.: *Automated Deduction in Geometry.* International Workschop on Automated Deduction in Geometry, Toulouse, France, September 1996, Selected Papers. Springer, Berlin 1997

[89] Wang, D.: *Elimination practice - Software Tools and Applications.* Imperial College Press, Londýn 2014.

[90] Xiaoling, X.:*The Application of Computer Network Technology in Mathematics Teaching.* International Conference on Applictions and Techniques in Cyber Intelligence, Čína, Fuyang srpen 2020.

[91] Wiel, J.: *Rozpracovaná řešení úloh z vyšší algebry.* Academia, Praha 1987.

[92] Yang, X:*Tablet computer truly help students to master mathematical knowledge?.* International Conference on Deep Learning Technologies, Virtual, Online, China July 2020.

[93] Zbiek, R. M.: *Influences on mathematics teachers' transitional journeys in teaching with CAS.* The International journal of computer algebra in mathematics education, svazek 9, č. 2. 2002.

[94] Zhang, J.: *How to use computer technology to break through the difficulties in higher mathematics teaching.* IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Shenyang 2020.

Příloha 1

Metody řešení soustav polynomiálních rovnic a jejich využití při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti

S obecnými metodami řešení soustav lineárních rovnic, ale i soustav nelineárních polynomiálních rovnic a s jejich geometrickými, popř. dalšími aplikacemi se studenti systematicky seznamují až ve vysokoškolském studiu. Z klasických metod řešení soustav nelineárních polynomiálních rovnic je to tzv. metoda rezultantů, z moderních metod zejména tzv. metoda Gröbnerových bází. Její formulace a užití ovšem vyžadují poměrně náročné pojmy abstraktní algebry a algebraické geometrie. Budoucím učitelům by ale bylo vhodné ji vysvětlit. Se speciálními případy soustav polynomiálních rovnic i vyšších stupňů se žáci SŠ mohou setkat v úlohách naší, příp. zahraniční, matematické olympiády.

1. Vybrané pojmy z abstraktní algebry

V této části vycházím především z publikace Cox, Little, O'Shea [16].

Definice 1: Okruhem (přesněji **asociativním okruhem**) nazýváme neprázdnou množinu O, pro jejíž prvky jsou nějakým způsobem dány operace sčítání a násobení, tj. je dáno pravidlo, které každé uspořádané dvojici prvků $a, b \in O$ přiřazuje prvek $a + b \in O$ (jejich součet) a prvek $a \cdot b \in O$ (jejich součin). Přitom operace sčítání a násobení mají tyto základní vlastnosti:

1. Sčítání je komutativní a asociativní, tj. pro každé tři prvky $a, b, c \in O$ platí

   $$a + b = b + a,$$

   $$(a + b) + c = a + (b + c).$$

   Existuje nulový prvek (nula) $0 \in O$ tak, že $a + 0 = a$ pro všechna $a \in O$.

   Existuje ke každému prvku $a \in O$ opačný prvek $(-a) \in O$ tak, že $a + (-a) = 0$. Prvek $a - b = a + (-b)$ se nazývá rozdíl prvků $a, b \in O$.

2. Násobení je asociativní a distributivní vzhledem ke sčítání, tj. pro každé tři prvky $a, b, c \in O$ platí

   $$(ab)c = a(bc),$$

   $$(a + b)c = ac + bc, \quad a(b + c) = ab + ac.$$

Definice 2: Okruh O se nazývá **komutativní okruh**, jestliže pro každé $a, b \in O$ platí

$$ab = ba.$$

Jestliže v komutativním okruhu O existuje jednotkový prvek (jednotka), tj. takový prvek $1 \in O$, že $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ pro každý prvek $a \in O$, pak se říká, že O je **komutativní okruh s jednotkovým prvkem (jednotkou)**.

Definice 3: Komutativní okruh O s jednotkou, pro jehož každé dva prvky a, b platí implikace

$$a \neq 0 \land b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0,$$

se nazývá **obor integrity**. Komutativní okruh O s jednotkou, v němž navíc ke každému prvku $a \neq 0$ existuje převrácený (inverzní) prvek $b = a^{-1}$ takový, že platí $a \cdot b = 1$, se nazývá **těleso** a značí se zpravidla T (namísto O).

Dalším pro nás velmi důležitým pojmem bude pojem **ideálu**.

Definice 4: Nechť O je komutativní okruh. Množina $I \subset O$ se nazývá **ideál v okruhu** O, jestliže pro ni platí

1. $0 \in I$, pro každé $a \in I$ je také $-a \in I$,
2. pro každé $a, b \in I$ je $a + b \in I$,
3. pro každé $a \in I$ a $r \in O$ je $ra \ \in I$.

Poznámka. Ideál I v okruhu O je tedy taková jeho podmnožina, která je uzavřená vzhledem k operaci sčítání i odčítání a operaci násobení libovolným prvkem z okruhu O.

Definice 5: Je-li $M \subset O$ libovolná podmnožina komutativního okruhu O, pak **ideálem generovaným podmnožinou** M nazýváme ideál okruhu O, který je průnikem všech ideálů obsahujících podmnožinu M. Tento ideál označujeme symbolem $\langle M \rangle$. Ideál I generovaný konečnou podmnožinou $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset O$ nazývanou **báze ideálu** I se zapisuje

$$I = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

a říká se mu **konečně generovaný ideál** v okruhu O.

Definice 6: Polynomem (mnohočlenem) v proměnné x nad komutativním okruhem (speciálně oborem integrity) O se rozumí výraz tvaru

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \text{ čili } f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$ a prvky $a_0, a_1, \ldots, a_n \in O$ se nazývají **koeficienty** polynomu f. Symbol x je **proměnná** polynomu f. Výrazy $a_k x^k (k = 0, 1, \ldots, n)$ se nazývají **členy polynomu** f. Koeficient a_n je nazýván **vedoucí koeficient**, člen $a_n x^n$ **vedoucí člen**, a_0 **absolutní člen** f. Pro $a_n \neq 0$ je číslo n nazýváno stupeň (angl. degree) polynomu f a značí se n ($\deg f = n$). Polynom, jehož všechny koeficienty jsou nulové, je tzv. **nulový polynom** 0; jeho stupeň se zpravidla nedefinuje, popř. z důvodů snazšího vyjadřování se klade $\deg 0 = -1$.

Množina všech polynomů proměnné x nad komutativním okruhem O (tj. s koeficienty v O) se značí $O[x]$; speciálně, je-li komutativní okruh O těleso T, pak se značí $T[x]$.

Definice 7: Polynomem (mnohočlenem) v n proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ nad komutativním okruhem (speciálně oborem integrity) O se rozumí výraz tvaru

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} \dots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x^{k_1} x^{k_2} \dots x^{k_n},$$

kde $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}_0$ a prvky $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \in O$ se nazývají **koeficienty** polynomu f. Symboly $x_1, x_2, \dots x_n$ jsou **proměnné** polynomu f.Výrazy $a_{k_1 k_2 \dots k_n} x^{k_1} x^{k_2} \dots x^{k_n}$ se nazývají **členy** polynomu f **k_i-tého stupně v proměnné** x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) a **celkového stupně ($k_1 + k_2 + \dots + k_n$)-tého**. V uvedeném zápise polynomu f se předpokládá, že obsahuje pro každou uspořádanou n-tici $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ exponentů nejvýše jeden nenulový člen s těmito exponenty u proměnných $x_1, x_2, \dots x_n$ a říkáme, že polynom f je tak napsán v **normálním tvaru**. Polynom f je **celkového stupně m-tého**, právě když ve svém normálním tvaru obsahuje člen celkového stupně m-tého s koeficientem různým od nuly a neobsahuje člen celkového stupně vyššího; značí se $\deg f = m$. Polynom, jehož všechny koeficienty jsou rovny nule, se nazývá **nulový polynom** 0 a nemá žádný celkový stupeň ani žádný stupeň v jednotlivých proměnných.

Množina všech polynomů $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nad komutativním okruhem O (tj. s koeficienty z O) se značí $O[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Definice 8: Monomem (či termem) v proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ se nazývá výraz (jednočlen) tvaru

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \text{ kde } k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0.$$

Součet mocnitelů $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ se nazývá **stupeň monomu (termu)**. Množinu všech možných monomů označíme M_m.

Zápis monomu lze formálně zjednodušit užitím tzv. multiindexů $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

Stupeň monomu se pak označuje $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

Příklad: $x_1^5 \cdot x_2^2 \cdot x_3$, $x_1^2 \cdot x_2$, $x_1^0 \cdot x_2^0 \cdot x_3^0 = 1$ jsou monomy.

Polynom f proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ s koeficienty z tělesa T, tj. $f \in T[x_1, x_2, \dots, x_n]$, je lineární kombinací (s koeficienty z tělesa T) konečného počtu monomů. Lze jej proto také zjednodušeně zapsat v symbolické formě:

$$f = \sum_k a_k x^k, \text{ kde } a_k \in T,$$

přičemž se sčítá přes konečný počet uspořádaných n-tic (multiindexů) $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$. Stupeň polynomu f je $\deg f = \max\{|k|; a_k \neq 0\}$.

Protože polynom f v proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ představuje lineární kombinaci monomů (termů), pro naše další úvahy bude zásadně důležité, jak v něm budou monomy uspořádány. Za tím účelem se definuje na množině monomů (termů) relace přípustného (monomického) uspořádání.

Definice 9: Monomickým (přípustným) uspořádáním na množině všech monomů M_m se rozumí libovolná relace uspořádání $\leqq$ na M_m těchto vlastností:

1. Relace $\leqq$ je úplné (čili lineární) uspořádání na množině M_m, tj. pro každé $t, s \in M_m$ platí právě jeden ze vztahů $t < s$, $t = s$, $s < t$.
2. Pro každé $t \in M_m$ je $x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0 = 1 \leqq t$.
3. Relace $\leqq$ je dobré uspořádání na množině M_m, tj. každá neprázdná podmnožina množiny M_m má nejmenší prvek.
4. Platí implikace $s \leqq t \Rightarrow rs \leqq rt$ pro každé $r \in M_m$.

Pro polynomy $f \in T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ s takto definovanou relací monomického (přípustného) uspořádání na množině všech monomů M_m se pak zavádějí důležité pojmy a definice.

Definice 10: Nechť $f = \sum\limits_c a_c x^c$ je nenulový polynom v $T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ a $\leqq$ je monomické (přípustné) uspořádání na množině všech monomů M_m.

Pak definujeme:

Multistupeň (angl. multidegree) **monomů** polynomu f označovaný multideg (f) je maximum množiny jejich multiexponentů: multideg $(f) = \max\{c \in \mathbb{N}_0^n; a_c \neq 0\}$ vzhledem k uspořádání $\leqq$.

Vedoucí monom (angl. leading monomial) polynomu f označovaný LM (f) je největší monom v polynomu f vzhledem k uspořádání $\leqq$.

Vedoucí koeficient (angl. leading coefficient) polynomu f označovaný LC (f) je koeficient u jeho vedoucího monomu.

Vedoucí člen (angl. leading term) označovaný LT (f) je LT $(f) =$ LC $(f) \cdot$ LM (f).

Příklad 1: *Určete vedoucí člen, vedoucí monom a vedoucí koeficient polynomu:*

$g = 3x^2y^2 - 2x_2y + 3xz + 2y + 1.$

Řešení:

$LT(g) = 3x^2y^2$, $LM(g) = x^2y^2$ a $LC(g) = 3$.

Vedoucím monomem polynomu g je x^2y^2, vedoucím členem je $3x^2y^2$ a vedoucím koeficientem je 3.

Existuje mnoho různých monomických (přípustných) uspořádání na množině všech monomů (termů) M_m, z nichž nejčastěji používané je tzv. lexikografické uspořádání.

Definice 11: Lexikografické uspořádání na množině všech monomů M_m, označované $<_{\mathrm{Lex}}$, je definováno takto:

Klademe $x_1^{c_1}x_2^{c_2}\dots x_n^{c_n} <_{\text{Lex}} x_1^{d_1}x_2^{d_2}\dots x_n^{d_n}$, právě tehdy, když existuje $m \in M$ takové, že je $c_m < d_m$ a zároveň pro všechna $k \in N$, $k < m$ je $c_k = d_k$. O pořadí tedy rozhoduje exponent u x_1, v případě rovnosti pak exponent u x_2 atd.

Dalším zásadně důležitým pojmem pro nás budou speciálně polynomické ideály, které definujeme takto:

Definice 12: Nechť je dáno těleso T. **Polynomický ideál v oboru polynomů** $T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ je množina $I \subset T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ těchto vlastností:

1. $0 \in I$,
2. pro každé $f, g \in I$ je $f \pm g \in I$,
3. pro všechna $f \in I$ a $h \in T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ je $hf \in I$.

Poznámka. Ideál $I \subset T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ je tedy taková množina polynomů z $T[x_1, x_2, \dots, x_n]$, která je uzavřená vzhledem k operacím sčítání i odčítání a vzhledem k operaci násobení libovolným polynomem z $T[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Pro tento ideál se zavádí pojem báze ideálu takto:

Definice 13: Nechť I je ideál v oboru polynomů $T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ nad tělesem T, který je generovaný konečnou množinou polynomů $\{f_1, f_2, \dots, f_s\} \subset T[x_1, x_2, \dots, x_n]$, tj. **konečně generovaný ideál** I. Pak množina polynomů $\{f_1, f_2, \dots, f_s\}$ se nazývá **báze ideálu** I v oboru polynomů $T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ a ideál I s touto bází se zapisuje:

$$I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle.$$

Definice 14: Ideál $I \subset T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ se nazývá **monomický ideál**, je-li generovaný monomy, tj. jestliže existuje podmnožina $A \subset \mathbb{N}_0^n$ taková, že ideál I obsahuje všechny polynomy ve tvaru konečného součtu $\sum\limits_{k \in A} h_k x^k$, kde $h_k \in T[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Potom píšeme $I = \langle x^k; k \in A \subset \mathbb{N}_0^n \rangle$.

Příklad 2: *V $T[x, y]$ je např. monomickým ideálem $I = \langle x^4y^2, x^3y^4, x^2y^5 \rangle$ a např. ideál $I = \langle xy^2 - y^3, x^2y^3 + xy^4 \rangle$ není monomický.*

Matematickou indukcí (vzhledem k proměnné n) lze dokázat následující větu, která vyjadřuje, že každý monomický ideál je konečně generovatelný (má konečnou bázi).

Věta 1: (Dicksonovo lemma). Každý monomický ideál $I \subset T[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $I = \langle x^k; k \in A \subset \mathbb{N}_0^n \rangle$ lze vyjádřit ve tvaru

$$I = \langle x^{k(1)}, x^{k(2)}, \dots, x^{k(s)} \rangle, \quad \text{kde} \quad k(1), k(2), \dots, k(s) \in A.$$

Monomický ideál I má tedy vždy konečnou bázi.

2. Hilbertova věta o bázi a pojem Gröbnerovy báze

Zásadním problémem pro polynomiální ideály v oboru polynomů $T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je volba báze ideálu $I \subset T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, která by byla vhodná z hlediska algoritmu dělení polynomů v $T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ i pro další s tím spojené účely. Řešení tohoto problému vychází z toho, že pro dané uspořádání monomů každému polynomu $f \in T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jednoznačně přísluší jeho vedoucí člen $\mathrm{LT}\,(f)$. A tedy pro každý nenulový polynomiální ideál $I \subset T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ můžeme jednoznačně stanovit příslušnou **množinu vedoucích členů polynomů z** I.

Definice 15: Nechť $I \subset T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je nenulový polynomiální ideál (tj. polynomiální ideál obsahující alespoň jeden polynom různý od 0). Pro něj se definují tyto pojmy a označení:

1. Množina vedoucích členů polynomů z ideálu $I \subset T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, označovaná $\mathrm{LT}\,(I)$, je množina $\mathrm{LT}\,(I) = \{ax^k; \exists f \in I \ : \mathrm{LT}\,(f) = ax^k\}$.
2. Polynomiální ideál generovaný prvky (polynomy) z $\mathrm{LT}\,(I)$ se značí $\langle \mathrm{LT}\,(I) \rangle$.

Polynomiální ideál $\mathrm{LT}\,(I)$ má důležité vlastnosti vyjádřené v následující větě.

Věta 2: Nechť $I \subset T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je nenulový polynomiální ideál. Pak pro příslušný polynomiální ideál $\langle \mathrm{LT}\,(I) \rangle$ platí:

1. $\langle \mathrm{LT}\,(I) \rangle$ je monomický ideál.
2. Existují polynomy $g_1, g_2, \ldots, g_t$ takové, že

$$\langle \mathrm{LT}\,(I) \rangle = \langle \mathrm{LT}\,(g_1), \mathrm{LT}\,(g_2), \ldots, \mathrm{LT}\,(g_t) \rangle.$$

Užitím této věty spolu s algoritmem dělení polynomů v $T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ se dokazuje velmi významná Hilbertova věta o existenci konečné generující množiny (báze) pro každý polynomiální ideál.

Věta 3: (Hilbertova věta o bázi). Každý polynomiální ideál $I \subset T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ má konečnou generující množinu (bázi) čili $I = \langle g_1, g_2, \ldots, g_t \rangle$ pro nějaké polynomy $g_1, g_2, \ldots, g_t \in I$.

Speciální vlastností báze $\{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ ideálu I užité při důkazu Hilbertovy věty o bázi je, že $\langle \mathrm{LT}\,(I) \rangle = \langle \mathrm{LT}\,(g_1), \mathrm{LT}\,(g_2), \ldots, \mathrm{LT}\,(g_t) \rangle$. Vzhledem k velkému významu a využití této báze byl pro ni zaveden speciální název Gröbnerova báze.

Definice 16: Konečná báze $\{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ ideálu $I \subset T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ se nazývá **Gröbnerova báze** ideálu I, právě když pro ni platí

$$\langle \mathrm{LT}\,(g_1), \mathrm{LT}\,(g_2), \ldots, \mathrm{LT}\,(g_t) \rangle = \langle \mathrm{LT}\,(I) \rangle.$$

Jako důsledek věty 3 se dokazuje následující věta.

Věta 4: Každý polynomiální ideál $I \subset T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ má Gröbnerovu bázi, jež je jeho bází ve smyslu Hilbertovy věty o bázi.

Na základě algoritmu dělení polynomů v $T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ a definice Gröbnerovy báze se provádí důkaz věty, která slouží k odvození jednoduchého kritéria pro zjištění, zda daná báze polynomiálního ideálu I je jeho Gröbnerovou bází.

Věta 5: Nechť $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$ je Gröbnerova báze ideálu $I \subset T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ a $f \in T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ je daný polynom. Pak existuje právě jeden polynom $r \in T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ těchto vlastností:

1. Žádný člen polynomu r není dělitelný žádným z vedoucích členů $\mathrm{LT}(g_1), \mathrm{LT}(g_2), \dots, \mathrm{LT}(g_t)$ polynomů Gröbnerovy báze G.

2. Existuje polynom $g \in I$ takový, že $f = g + r$.

Poznámka. Věta 5 ukazuje, že pokud v algoritmu dělení polynomů dělíme polynom f polynomy Gröbnerovy báze ideálu I, tak zbytek r po tomto dělení je určen jednoznačně (nezávisle na pořadí, v němž se dělí polynomy z Gröbnerovy báze).

Důsledkem věty 5 je následující věta, která je často užívaným **kritériem pro Gröbnerovu bázi polynomiálního ideálu**.

Věta 6: Nechť $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$ je Gröbnerova báze ideálu $I \subset T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ a f je daný polynom v $T[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Pak platí, že $f \in I$, právě když zbytek r po dělení polynomu f polynomy Gröbnerovy báze G je nulový ($r = 0$).

Poznámka. Tato vlastnost je ekvivalentní s podmínkami v uvedené definici Gröbnerovy báze, takže se někdy v literatuře bere jako její ekvivalentní definice.

Na základě věty 7 dostáváme jednoduchý algoritmus pro zjišťování, zda polynom f náleží danému ideálu $I \subset T[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Za předpokladu, že je známa Gröbnerova báze G ideálu I, je třeba pouze vypočítat zbytek r po dělení polynomu f prvky (polynomy) Gröbnerovy báze G při jejich zvoleném uspořádání.

Přitom ovšem zásadním výchozím problémem je, jak určit Gröbnerovu bázi G ideálu $I \subset T[x_1, x_2, \dots, x_n]$. K tomu byla objevena řada algoritmů, z nichž některé základní budeme nyní formulovat.

3. Buchbergerův algoritmus pro určení Gröbnerovy báze a jeho modifikace

K formulaci algoritmů pro nalezení Gröbnerovy báze G polynomického ideálu $I \subset T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ je nejprve nutné definovat některé další pojmy a jejich označení.

Definice 17: Nechť $f, g \in T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ jsou nenulové polynomy. **Nejmenší společný násobek** (angl. least common multiple) **vedoucích členů polynomů**

f, g označme symbolem $\mathrm{LCM}\,(\mathrm{LT}\,(f), \mathrm{LT}\,(g))$. Pak **S-polynomem** (z angl. syzygy = spřažení) **polynomů** označovaným $S(f, g)$ se nazývá výraz (polynom)

$$\mathrm{Spoly}(f, g) = \mathrm{LCM}\,(\mathrm{LT}\,(f), \mathrm{LT}\,(g)) \cdot \left[\frac{f}{LT(f)} - \frac{g}{LT(g)}\right].$$

Pomocí pojmu S-polynomu lze formulovat a dokázat následující kritérium pro Gröbnerovy báze polynomiálních ideálů, z něhož vyplývá základní Buchbergerův algoritmus pro určení Gröbnerovy báze polynomického ideálu.

Věta 7: (Buchbergerovo kritérium Gröbnerovy báze). Nechť I je nenulový polynomiální ideál $I \subset T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Pak jeho báze $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ je Gröbnerova báze ideálu I, právě když pro všechny dvojice indexů $i, j (i \neq j)$ dělení S-polynomů $S(g_i, g_j)$ prvky (polynomy) báze G (v jistém uspořádání) má vždy nulový zbytek $(r = 0)$.

Věta 8: (Buchbergerův algoritmus určení Gröbnerovy báze). Nechť $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_s\rangle$ je nenulový polynomiální ideál $I \subset T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Pak jeho Gröbnerovu bázi $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ lze sestrojit konečným počtem kroků podle algoritmu:

1. Vypočteme S-polynomy pro každou dvojici polynomů z množiny $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$ a určíme pro každý z nich zbytky po dělení polynomy $f_1, f_2, \ldots, f_s$.

2. Jestliže jsou všechny zbytky r po těchto děleních rovny nule $(r = 0)$, pak jsme získali Gröbnerovu bázi G daného ideálu F $(G = F)$. Pokud je některý z těchto zbytků r nenulový, přidáme jej do původní množiny F a pro tuto rozšířenou množinu F' opakujeme stejný postup algoritmických kroků 1., 2. Opakování tohoto postupu provádíme tak dlouho, až všechny zbytky r budou nulové. Pak $G = F'$.

Buchbergerův algoritmus pro určení Gröbnerovy báze se dá zefektivnit použitím ekvivalentního alternativního kritéria Gröbnerovy báze, které je snadněji implementovatelné. Při jeho formulaci a důkazu se vychází ze zavedení následujícího pomocného pojmu.

Definice 18: Nechť je dána množina polynomů $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\} \subset T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a je zvoleno pevné monomiální uspořádání. Řekneme, že **polynom** $f \in T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ **se redukuje modulo** G na polynom g a píšeme $f \underset{G}{\rightarrow} g$, jestliže existují polynomy $h_1, h_2, \ldots, h_t \subset T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ takové, že platí

$$f = h_1 g_1 + h_2 g_2 + \ldots + h_t g_t + g$$

a je-li $h_i g_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, t)$, pak platí

$$\mathrm{multideg}\,(f) \geqq \mathrm{multideg}\,(h_i g_i).$$

Příklad 3: *Vypočtěte normální tvar polynomu:*

$$p : y^2 + yz + z^2 - 2y - 2z - 4, \quad y < z, \text{ vzhledem ke } q : y - 2z + 6.$$

Řešení:

$p \mapsto p-(\frac{y^2}{y})\cdot q = y^2+yz+z^2-2y-2z-4-y^2+2yz-6y = 3yz+z^2-8y-2z-4 = p_1$

$p_1 - (\frac{3yz}{y}) \cdot q = 3yz + z^2 - 8y - 2z - 4 - 3yz + 6z^2 - 18z = -8y + 7z^2 - 20z - 4 = p_2$

$p_2 - (\frac{-8y}{y}) \cdot q = -8y + 7z^2 - 20z - 4 + 8y - 16z + 48 = 7z^2 - 36z + 44 = p_3$

Polynom p_3 je v normálním tvaru vzhledem ke q, další redukce už nejsou možné.

Z Buchbergerova kritéria (věta 7) vyplývá jako důsledek následující věta.

Věta 9: (Nutná a postačující podmínka pro Gröbnerovu bázi).
Báze $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ polynomiálního ideálu $I \subset T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je jeho Gröbnerovou bází, právě když pro všechna $i, j (i \neq j)$ platí

$$S(g_i, g_j) \underset{G}{\rightarrow} 0.$$

Přitom postačující podmínkou pro redukci S-polynomu na nulu vyjadřuje následující věta, jež představuje kritérium Gröbnerovy báze alternativní k Buchbergerovu kritériu.

Věta 10: (Alternativní kritérium Gröbnerovy báze). Nechť množina polynomů $G \subset T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je konečná a existují takové polynomy $g_i, g_j \in G$, pro něž platí

$$\mathrm{LCM}\,(\mathrm{LM}\,(g_i), \mathrm{LM}\,(g_j)) = \mathrm{LM}\,(g_i) \cdot \mathrm{LM}\,(g_j).$$

Pak je $S(g_i, g_j) \underset{G}{\rightarrow} 0$, tj. množina G je Gröbnerovou bází příslušného polynomiálního ideálu $I \subset T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Kritérium 1: Je-li $[i, j] \in B$ taková dvojice indexů, že pro vedoucí členy polynomů $f_i, f_j \in G$ platí

$$LCM(LT(f_i), LT(f_j)) = LT(f_i) \cdot LT(f_j),$$

pak je normální tvar polynomu normalf(Spoly(f_i, f_j), $\{f_i, f_j\}$) $= 0$.

Gröbnerovy báze polynomiálních ideálů jsou implementovány prakticky ve všech profesionálních systémech pro počítačovou algebru (Mathematica, Maple atd.) Tyto jejich implementace jsou zpravidla založeny nejen na základním Buchbergerově algoritmu, resp. jeho různých modifikacích a vylepšeních, ale též na četných rychlejších variantách získaných v posledních letech intenzivním výzkumem.

Pro účely výuky Buchbergerova algoritmu na VŠ pedagogického zaměření zřejmě bude postačovat, když se studenti seznámí se základními významnými možnostmi jeho vylepšení.

Gröbnerova báze G daného polynomiálního ideálu $I \subset T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ vypočtená podle tohoto algoritmu je často větší, než je nutné. Nepotřebné generátory lze z ní eliminovat na základě následující věty.

Věta 11: Nechť G je Gröbnerova báze polynomiálního ideálu I a nechť $p \in G$ je takový polynom, že $\mathrm{LT}\,(p) \in \langle \mathrm{LT}(G \backslash \{p\}) \rangle$. Pak množina $G \backslash \{p\}$ je také Gröbnerova báze ideálu I.

To umožňuje definovat tzv. minimální Gröbnerovu bázi polynomiálního ideálu I.

Definice 19: Minimální Gröbnerova báze polynomiálního ideálu I je taková jeho Gröbnerova báze G, že pro všechny polynomy $p \in G$ platí:

$$\mathrm{LC}\,(p) = 1 \quad a \quad \mathrm{LT}\,(p) \notin \langle \mathrm{LT}(G \backslash \{p\}) \rangle.$$

Ani minimální Gröbnerova báze polynomiálního ideálu I nemusí být jediná. Avšak naštěstí lze vybrat minimální Gröbnerovu bázi, která je v jistém smyslu lepší než ostatní. Nazývá se redukovaná Gröbnerova báze a je charakterizována takto:

Definice 20: Redukovaná Gröbnerova báze polynomiálního ideálu I je při daném monomickém uspořádání jeho Gröbnerova báze G taková, že pro každý polynom $p \in G$ platí:

1. $\mathrm{LC}\,(p) = 1$, tj. polynom p je normovaný,
2. žádný monom polynomu p nenáleží ideálu $\mathrm{LT}(G \backslash \{p\}) \rangle$.

Důležité je, že redukovaná Gröbnerova báze je nejen v jistém smyslu minimální, ale je jednoznačně určená daným uspořádáním na monomech, neboť platí následující věta.

Věta 12: Důsledkem této věty je algoritmus pro zjištění, zda množiny polynomů $\{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$ a $\{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ generují stejný ideál I: Pro dané uspořádání monomů se najdou redukované Gröbnerovy báze ideály $\langle f_1, f_2, \ldots, f_s \rangle$ a $\langle g_1, g_2, \ldots, g_t \rangle$ a tyto ideály jsou si rovny právě když jejich redukované Gröbnerovy báze jsou stejné.

Definice 21: Nechť T je dané těleso a n dané přirozené číslo. **Afinním prostorem dimenze n nad tělesem T** se nazývá množina (kartézský součin n stejných uspořádaných množin s prvky z tělesa T):

$$T^n = \{(t_1, t_2, \ldots, t_n); \quad t_1, t_2, \ldots, t_n \in T\}.$$

Pro nás je důležitá souvislost mezi polynomy $f \in T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a afinním prostorem T^n. Každý takový polynom f lze chápat jako zobrazení $f : T^n \to T$ definované tak, že pro dané $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in T^n$ se v polynomu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dosadí za proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ příslušné hodnoty $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Protože koeficienty polynomu f jsou též z tělesa T, je $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in T$.

Definice 22: Nechť T je dané těleso a $f_1, f_2, \dots, f_s$ jsou polynomy z $T[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Pak množina bodů $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in T^n$ označovaná $V(f_1, f_2, \dots, f_n)$, pro kterou platí

$$V(f_1, f_2, \dots, f_n) = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in T^n; f_k(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0,\ k\ = 1, 2, \dots, s\}$$

se nazývá **afinní varieta** (nebo **algebraická množina**) určená polynomy $f_1, f_2, \dots, f_s$.

Podle této definice afinní varieta $V(f_1, f_2, \dots, f_s)$ je tedy množina všech společných nulových bodů (kořenů) polynomů $f_1, f_2, \dots, f_s$.

4. Teorie eliminace a metoda Gröbnerových bází

Metoda Gröbnerových bází úzce souvisí s teorií eliminace pro soustavy polynomiálních rovnic. Pokud získáme redukovanou Gröbnerovu bázi, často jedna z příslušných rovnic obsahuje pouze jednu neznámou, další rovnice o jednu neznámou více, atd. Na základě teorie eliminace můžeme provádět postupné eliminace pro libovolnou soustavu polynomiálních rovnic s libovolným počtem neznámých.

Definice 23: Nechť $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq T[x_1, \dots, x_n]$. Pro $k = 1, \dots, n$ definujeme $I_k := I \cap T[x_{k+1}, \dots, x_n]$. Tuto množinu nazveme k-tým eliminačním ideálem.

Intuitivně se zdá, že I_k obsahuje všechny prvky Gröbnerovy báze, které obsahují jen proměnné $x_{k+1}, \dots, x_n$. Eliminace proměnných tedy znamená najít nenulové polynomy, které definují eliminační ideál I_k.

Věta 13:(Věta o eliminaci) Nechť $I \subseteq T[x_1, \dots, x_n]$ je ideál, $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ jeho Gröbnerova báze vzhledem k $<_{Lex}$. Proměnné jsou uspořádány $x_1 >_{Lex} x_2 >_{Lex} \dots$. Potom pro každé $k = 0, \dots, n$ je $G_k = G \cap T[x_{k+1}, \dots, x_n]$ Gröbnerovou bází ideálu I_k.

Dále platí významná následující věta:

Věta 14: Nechť je dána soustava polynomiálních rovnic

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

a buď $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ Gröbnerova báze ideálu $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$ v tělese $T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ při jistém přípustném uspořádání termů. Pak soustava

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_s(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

je ekvivalentní s původní soustavou rovnic.

Pro formulaci další důležité věty budeme definovat:

Definice 24: Těleso $T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ se nazývá **algebraicky uzavřené těleso**, jestliže každý polynom z $T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ stupně alespoň 1 v něm má kořen.

Algebraicky uzavřené těleso je např. těleso komplexních čísel. Těleso reálných čísel ale není algebraicky uzavřeným tělesem.

Věta 15: (Věta o řešitelnosti soustavy polynomiálních rovnic)
Soustava rovnic

$$f_1 = 0, \ldots, f_s = 0,$$

kde $f_1, \ldots, f_s \in T[x_1, \ldots, x_n]$ a T je algebraicky uzavřené těleso, nemá řešení právě tehdy, když redukovaná Gröbnerova báze ideálu $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ je $\{1\}$.

Metoda Gröbnerových bází je založena na Buchbergerově algoritmu a větě o eliminaci.

Ukážeme řešení příkladů užitím Buchbergerova algoritmu.

Příklad 4: (*MO 2021/22, 71. ročník, domácí kolo, kategorie A*):

V oboru komplexních čísel vyřešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} xy + 1 &= z^2, \\ yz + 2 &= x^2, \\ zx + 3 &= y^2. \end{aligned}$$

Řešení:
Označme polynomy

$$\begin{aligned} f_1 &= xy - z^2 + 1, \\ f_2 &= -x^2 + yz + 2, \\ f_3 &= xz - y^2 + 3. \end{aligned}$$

Označme množinu $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ a množinu dvojic indexů těchto polynomů $B = \{[1,2], [1,3], [2,3]\}$.

V polynomu $f_1 = xy - z^2 + 1$ je vedoucí monom xy a vedoucí koeficient 1. V polynomu $f_2 = -x^2 + yz + 2$ je vedoucí monom x^2 a vedoucí koeficient -1, v polynomu $f_3 = xz - y^2 + 3$ je vedoucí monom xz a vedoucí koeficient 1.

Pro polynomy f_1, f_2 vezmeme $LCM(LT(f_1), LT(f_2) = -x^2y$, pro polynomy f_1, f_3 vezmeme $LCM(LT(f_1, LT(f_3) = xyz$ a pro polynomy f_2, f_3 vezmeme $LCM(LT(f_2), LT(f_3) = -x^2z$.

Vypočteme S-polynomy pro jednotlivé dvojice našich polynomů:

$$\text{Spoly}(f_1, f_2) = -x^2y\left[\frac{xy-z^2+1}{xy} - \frac{-x^2+yz+2}{-x^2}\right] = -x(xy - z^2 + 1) - y(-x^2 + yz + 2) =$$
$$= xz^2 - x - y^2z - 2y$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spoly}(f_1,f_3) &= xyz\left[\tfrac{xy-z^2+1}{xy}-\tfrac{xz-y^2+3}{xz}\right]=z\ (xy-z^2+1)-y(xz-y^2+3)= \\
&= y^3-3y-z^3+z \\
\mathrm{Spoly}(f_2,f_3) &= -x^2z\left[\tfrac{-x^2+yz+2}{-x^2}-\tfrac{xz-y^2+3}{xz}\right]=z\ (-x^2+yz+2)+x(xz-y^2+3)= \\
&= -xy^2+3x+yz^2+2z
\end{aligned}$$

Polynom $\mathrm{Spoly}(f_1,f_2)$ označme p. Provedeme redukci našeho polynomu p modulo F:

$$p\to_F p-\tfrac{xz^2}{xz}\cdot f_3=p-z\ \cdot f_3=xz^2-x-y^2z-2y-xz^2+y^2z-3z=-x-2y-3z$$

Tento polynom označíme f_4. Do množiny B přidáme dvojice $[1,4]$, $[2,4]$ a $[3,4]$.

Polynom $\mathrm{Spoly}(f_1,f_3)=y^3-3y-z^3+z$ zredukovat nelze. Označíme jej f_5 a do množiny přidáme dvojice $[1,5]$, $[2,5]$, $[3,5]$ a $[4,5]$.

Dále označíme polynom $\mathrm{Spoly}(f_2,f_3)$ jako p_2 a provedeme redukci polynomu p_2 modulo f_1:

$$p_2\to_F p_2-\tfrac{-xy^2}{xy}f_1=p_2+y\cdot f_1=-xy^2+3x+yz^2+2z+xy^2-yz^2+y=3x+y+2z$$

Provedeme další redukci tohoto polynomu modulo f_4: $3x+y+2z-\frac{3x}{-x}\cdot f_4=3x+y+2z-3x-6y-9z=-5y-7z$

Označme tento polynom f_6. Do množiny B přidáme dvojice $[1,6]$, $[2,6]$, $[3,6]$, $[4,6]$ a $[5,6]$.

Podle Kritéria 1 můžeme vyškrtnout dvojice $[2,5]$, $[3,5]$, $[4,5]$ a také $[2,6]$, $[3,6]$, $[4,6]$. Pro tyto dvojice nemusíme počítat S-polynomy. Vypočteme jen

$\mathrm{Spoly}(f_1,f_4), \mathrm{Spoly}(f_2,f_4), \mathrm{Spoly}(f_3,f_4), \mathrm{Spoly}(f_1,f_5), \mathrm{Spoly}(f_1,f_6)$ a $\mathrm{Spoly}(f_5,f_6)$.

Nejprve tedy vypočteme:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spoly}(f_1,f_4) &= -xy\left(\tfrac{xy-z^2+1}{xy}-\tfrac{-x-2y-3z}{-x}\right)=-xy+z^2-1+xy+2y^2+3yz= \\
&= 2y^2+3yz+z^2-1
\end{aligned}$$

Provedeme redukci polynomu $\mathrm{Spoly}(f_1,f_4)$ modulo f_6:

$$2y^2+3yz+z^2-1+\tfrac{2}{5}y(-5y-7z)=3yz+z^2-1-\tfrac{14}{5}yz=\tfrac{1}{5}yz+z^2-1$$

Další redukce modulo f_6 je:

$$\tfrac{1}{5}yz+z^2-1+\tfrac{1}{25}z(-5y-7z)=\tfrac{18}{25}z^2-1$$

Tento polynom označíme f_7 a přidáme do množiny F.

Dále vypočteme:

$$\mathrm{Spoly}(f_2, f_4) = -x^2\left(\frac{-x^2+yz+2}{-x^2} - \frac{-x-2y-3z}{-x}\right) = -x^2+yz+2+x^2+2xy+3xz =$$
$$= 2xy+3xz+yz+2$$

Provedeme redukci polynomu $\mathrm{Spoly}(f_2, f_4)$ modulo f_1:

$$2xy+3xz+yz+2-2(xy-z^2+1) = 3xz+yz+2z^2$$

Dále postupně provedeme několik redukcí vždy předem zredukovaného polynomu.

Redukce modulo f_3:

$$3xz+yz+2z^2-3(xz-y^2+3) = 3y^2+yz+2z^2-9$$

Redukce modulo f_6:

$$3y^2+yz+2z^2-9+\tfrac{3}{5}y(-5y-7z) = -\tfrac{16}{5}yz+2z^2-9$$

Redukce modulo f_6:

$$-\tfrac{16}{5}yz+2z^2-9-\tfrac{16}{25}z(-5y-7z) = \tfrac{162}{25}z^2-9$$

Redukce modulo f_7:

$$\tfrac{162}{25}z^2-9-9(\tfrac{18}{25}z^2-1) = 0.$$

Vypočteme S-polynom $\mathrm{Spoly}(f_3, f_4)$:

$$\mathrm{Spoly}(f_3, f_4) = -xz\left(\frac{xz-y^2+3}{xz} - \frac{-x-2y-3z}{-x}\right) = -xz+y^2-3+xz+2yz+3z^2 =$$
$$= y^2+2yz+3z^2-3$$

Nyní provedeme redukci polynomu $\mathrm{Spoly}(f_3, f_4)$ modulo f_6:

$$y^2+2yz+3z^2-3+\tfrac{1}{5}y(-5y-7z) = \tfrac{3}{5}yz+3z^2-3$$

A teď uděláme několik redukcí předem zredukovaného polynomu.

Redukce modulo f_6:

$$\tfrac{3}{5}yz+3z^2-3+\tfrac{3}{25}z(-5y-7z) = \tfrac{54}{25}z^2-3$$

Redukce modulo f_7:

$$\tfrac{54}{25}z^2-3-3(\tfrac{18}{25}z^2-1) = 0$$

Dále vypočteme:

$$\mathrm{Spoly}(f_1, f_5) = xy^3\left(\frac{xy-z^2+1}{xy} - \frac{y^3-3y-z^3+z}{y^3}\right) =$$
$$= xy^3-y^2z^2+y^2-xy^3+3xy+xz^3-xz = 3xy+xz^3-xz-y^2z^2+y^2$$

A vypočteme redukci polynomu $\mathrm{Spoly}(f_1, f_5)$ modulo f_1:

$$3xy+xz^3-xz-y^2z^2+y^2-3(xy-z^2+1) = xz^3-xz-y^2z^2+y^2+3z^2-3$$

Jeho postupné další redukce mají následující tvary:

Redukce modulo f_3:

$xz^3 - xz - y^2z^2 + y^2 + 3z^2 - 3 - z^2(xz - y^2 + 3) = -xz + y^2 - 3$

Redukce modulo f_3:

$-xz + y^2 - 3 + (xz - y^2 + 3) = 0$

Dále vypočteme:

$\mathrm{Spoly}(f_1, f_6) = -5xy\left(\frac{xy-z^2+1}{xy} - \frac{-5y-7z}{-5y}\right) = -5xy + 5z^2 - 5 + 5xy + 7xz =$
$= 7xz + 5z^2 - 5$

Provedeme redukci tohoto polynomu modulo f_4:

$$7xz + 5z^2 - 5 + 7z(-x - 2y - 3z) = -14yz - 16z^2 - 5$$

Dále pak provedeme redukci získaného polynomu modulo f_6:

$-14yz - 16z^2 - 5 - \frac{14}{5}z(-5y - 7z) = -16z^2 - 5 + \frac{98}{5}z^2 = \frac{18}{5}z^2 - 5$

Tento polynom zredukujeme modulo f_7:

$\frac{18}{5}z^2 - 5 - 5\left(\frac{18}{25}z^2 - 1\right) = 0$

Dále vypočteme:

$\mathrm{Spoly}(f_5, f_6) = -5y^3\left(\frac{y^3-3y-z^3+z}{y^3} - \frac{-5y-7z}{-5y}\right) = -5y^3+15y+5z^3-5z+5y^3+7y^2z =$
$= 7y^2z + 15y + 5z^3 - 5z$

Tento polynom zredukujeme modulo f_6:

$7y^2z + 15y + 5z^3 - 5z + \frac{7}{5}yz(-5y - 7z) = -\frac{49}{5}yz^2 + 15y + 5z^3 - 5z$

Výsledný polynom lze ještě zredukovat modulo f_6:

$15y + 5z^3 - 5z - \frac{49}{5}yz^2 + 3(-5y - 7z) = -\frac{49}{5}yz^2 + 5z^3 - 26z$

Další redukci tohoto polynomu provedeme použitím stejného polynomu f_6:

$-\frac{49}{5}yz^2 + 5z^3 - 26z - \frac{49}{25}z^2(-5y - 7z) = 5z^3 - 26z + \frac{343}{25}z^3 = \frac{468}{25}z^3 - 26z$

Poslední redukce předchozího polynomu modulo f_7 je:

$\frac{468}{25}z^3 - 26z - \frac{26}{5}z\left(\frac{18}{5}z^2 - 5\right) = 0$

Musíme vypočítat ještě S-polynom polynomů f_3 a f_7.

$\mathrm{Spoly}(f_3, f_7) = \frac{18}{25}xz^2\left(\frac{xz-y^2+3}{xz} - \frac{\frac{18}{25}z^2-1}{\frac{18}{25}z^2}\right) = \frac{18}{25}xz^2 - \frac{18}{25}y^2z + \frac{54}{25}z - \frac{18}{25}xz^2 + x =$
$= x - \frac{18}{25}y^2z + \frac{54}{25}z$

Nejprve tento polynom zredukujeme modulo f_4:

$x - \frac{18}{25}y^2z + \frac{54}{25}z + (-x - 2y - 3z) = -\frac{18}{25}y^2z - 2y + \frac{54}{25}z - 3z = -\frac{18}{25}y^2z - 2y - \frac{21}{25}z$

Další redukce budou použity na vždy nově získaný polynom.

Redukce modulo f_6:

$$f_6\colon -\tfrac{18}{25}y^2z - 2y - \tfrac{21}{25}z - \tfrac{18}{125}yz(-5y-7z) = -2y - \tfrac{21}{25}z + \tfrac{126}{125}yz^2$$

Další redukce modulo f_7:

$$-2y - \tfrac{21}{25}z + \tfrac{126}{125}yz^2 - \tfrac{2}{5}(-5y-7z) = \tfrac{126}{125}yz^2 + \tfrac{49}{25}z$$

Další redukce modulo f_7:

$$\tfrac{126}{125}yz^2 + \tfrac{49}{25}z - \tfrac{7}{5}y\left(\tfrac{18}{25}z^2 - 1\right) = \tfrac{7}{5}y + \tfrac{49}{25}z$$

Další redukce modulo f_6:

$$\tfrac{7}{5}y + \tfrac{49}{25}z + \tfrac{7}{25}y(-5y-7z) = 0$$

Označme získanou množinu polynomů G:

$$G = \{xy - z^2 + 1, -x^2 + yz + 2, xz - y^2 + 3, -x - 2y - 3z,$$
$$y^3 - 3y - z^3 + z, -5y - 7z, \tfrac{18}{25}z^2 - 1\}$$

Získaná Gröbnerova báze G je často větší, než je nutné.

Projdeme nyní část „redukčního algoritmu“ a zjistíme, které polynomy vyškrtnout.

Jelikož $LT(f_4)|LT(f_1)$, neboli $-x|xy$, vyškrtneme tedy polynom f_1. Jelikož $LT(f_4)|LT(f_2)$, vyškrtneme i polynom f_2, a jelikož $LT(f_4)|LT(f_3)$, vyškrtneme také polynom f_3. (Zde znak | představuje dělitelnost.)

Získali jsme redukovanou bázi:

$$G = \{-x - 2y - 3z, y^3 - 3y - z^3 + z, -5y - 7z, \tfrac{18}{25}z^2 - 1\}$$

Z rovnice $\frac{18}{25}z^2 - 1 = 0$ získáme $z = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}$. Z rovnice $-5y - 7z$ dopočteme $y = \mp\frac{7}{3\sqrt{2}}$. Z rovnice $-x-2y-3z$ získáme $x = \mp\frac{1}{3\sqrt{2}}$. Dostáváme 2 řešení soustavy:

$$\left[-\tfrac{1}{3\sqrt{2}}, -\tfrac{7}{3\sqrt{2}}, \tfrac{5}{3\sqrt{2}}\right] \text{ a } \left[\tfrac{1}{3\sqrt{2}}, \tfrac{7}{3\sqrt{2}}, -\tfrac{5}{3\sqrt{2}}\right]$$

Ukážeme ještě **druhý způsob získání Gröbnerovy báze**.

Využijeme Větu 8. Vypočteme opět Spoly(f_1, f_2), Spoly(f_1, f_3), Spoly(f_2, f_3) a použijeme pseudodělení polynomů.

Vezmeme získaný polynom Spoly(f_1, f_2) a dělíme ho polynomy množiny F:

$$\begin{array}{l}
(xz^2 - x - y^2z - 2y) \qquad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ z \end{cases} \\
\underline{-(xz^2 - y^2z + 3z)} \\
\quad -x - 2y - 3z
\end{array}$$

Dále nelze dělit, polynom $xz^2 - x - y^2z - 2y$ můžeme vyjádřit jako

$$z(xz - y^2 + 3) + (-x - 2y - 3z).$$

Získali jsme zbytek $-x - 2y - 3z$, který přidáme do množiny F.

Vezmeme další polynom $\mathrm{Spoly}(f_1, f_3)$ a dělíme polynomy množiny F:

$$(y^3 - 3y - z^3 + z) \quad : \left\{\begin{array}{l} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xy - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ \hline y^3 - 3y - z^3 + z \end{array}$$

Zbytek $y^3 - 3y - z^3 + z$ přidáme do množiny F.

Vezmeme $\mathrm{Spoly}(f_2, f_3)$ a provedeme další pseudodělení:

$$(-xy^2 + 3x + yz^2 + 2z) \quad : \left\{\begin{array}{l} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} -y \\ \\ \\ -3 \\ \\ \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c} -(-xy^2 + yz^2 - y) \\ \hline 3x + y + 2z \\ -(3x + 6y + 9z) \\ \hline -5y - 7z \end{array}$$

Polynom $-xy^2 + 3x + yz^2 + 2z$ lze vyjádřit jako

$$-y(xy - z^2 + 1) - 3(-x - 2y - 3z) - 5y - 7z.$$

Do množiny F přidáme další zbytek $-5y - 7z$.

Do původní množiny F jsme přidali polynomy:

$f_4 = -x - 2y - 3z$, $f_5 = y^3 - 3y - z^3 + z$ a $f_6 = -5y - 7z$

Všechny S-polynomy máme vypočtené v předchozím způsobu.

$$
(2y^2 + 3yz + z^2 - 1) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \\ -5y - 7z \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ \\ \\ \\ -\frac{2}{5}y - \frac{1}{25}z \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}
-(2y^2 + \frac{14}{5}yz) \\
\hline
\frac{1}{5}yz + z^2 - 1 \\
-\left(\frac{1}{5}yz + \frac{7}{25}z^2\right) \\
\hline
\frac{18}{25}z^2 - 1
\end{array}
$$

Tento zbytek $f_7 = \frac{18}{25}z^2 - 1$ přidáme do množiny F.

$$
(2xy + 3xz + yz + 2) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \\ -5y - 7z \\ \frac{18}{25}z^2 - 1 \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ \\ 3 \\ \\ \\ -\frac{3}{5}y + \frac{16}{25}z \\ 9 \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}
-(2xy - 2z^2 + 2 \\
\hline
3xz + yz + 2z^2 \\
-(3xz - 3y^2 + 9) \\
\hline
3y^2 + yz + 2z^2 - 9 \\
-(3y^2 + \frac{21}{5}yz) \\
\hline
-\frac{16}{5}yz + 2z^2 - 9 \\
-\left(-\frac{16}{5}yz - \frac{112}{25}z^2\right) \\
\hline
\frac{162}{25}z^2 - 9 \\
-\left(\frac{162}{25}z^2 - 9\right) \\
\hline
0
\end{array}
$$

$$
(y^2 + 2yz + 3z^2 - 3) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \\ -5y - 7z \\ \frac{18}{25}z^2 - 1 \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ \\ \\ \\ -\frac{1}{5}y - \frac{3}{25}z \\ 3 \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}
-(y^2 + \frac{7}{5}yz) \\ \hline
\frac{3}{5}yz + 3z^2 - 3 \\
-\left(\frac{3}{5}yz + \frac{21}{25}z^2\right) \\ \hline
\frac{54}{25}z^2 - 3 \\
-\left(\frac{54}{25}z^2 - 3\right) \\ \hline
0
\end{array}
$$

$$
(3xy + xz^3 - xz - y^2z^2 + y^2) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \\ -5y - 7z \\ \frac{18}{25}z^2 - 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 \\ \\ z^2 - 1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}
-(3xy - 3z^2 + 3) \\ \hline
xz^3 - xz - y^2z^2 + y^2 + 3z^2 - 3 \\
-(xz^3 - y^2z^2 + 3z^2) \\ \hline
-xz + y^2 - 3 \\
-(-xz + y^2 - 3) \\ \hline
0
\end{array}
$$

$$
(7xz + 5z^2 - 5) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \\ -5y - 7z \\ \frac{18}{25}z^2 - 1 \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ 7 \\ \\ \\ -\frac{7}{5}y + \frac{49}{25}z \\ 26 \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}
-(7xz - 7y^2 + 21) \\ \hline
7y^2 + 5z^2 - 26 \\
-(7y^2 + \frac{49}{5}yz) \\ \hline
-\frac{49}{5}yz + 5z^2 - 26 \\
-(-\frac{49}{5}yz - \frac{343}{25}z^2) \\ \hline
\frac{468}{25}z^2 - 26 \\
-(\frac{468}{25}z^2 - 26) \\ \hline
0
\end{array}
$$

$$
(7y^2z + 15y + 5z^3 - 5z) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \\ -5y - 7z \\ \frac{18}{25}z^2 - 1 \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ \\ \\ \\ -\frac{7}{5}yz + \frac{49}{25}z^2 - 3 \\ 26z \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}
-(7y^2z + \frac{49}{5}yz^2) \\ \hline
-\frac{49}{5}yz^2 + 15y + 5z^3 - 5z \\
-(\frac{49}{5}yz^2 - \frac{343}{25}z^3) \\ \hline
15y + \frac{468}{25}z^3 - 5z \\
-(15y + 21z) \\ \hline
\frac{468}{25}z^3 - 26z \\
-(\frac{468}{25}z^3 - 26z) \\ \hline
0
\end{array}
$$

Spoly(f_3, f_7) máme také vypočtený v předchozí části.

$$
(x-\frac{18}{25}y^2z+\frac{54}{25}z) \quad : \begin{cases} xy-z^2+1 \\ -x^2+yz+2 \\ xz-y^2+3 \\ -x-2y-3z \\ y^3-3y-z^3+z \\ -5y-7z \\ \frac{18}{25}z^2-1 \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ \\ -1 \\ \\ \frac{18}{125}yz+\frac{2}{5}-\frac{126}{625}z^2 \\ -\frac{49}{25}z \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}
-(x+2y+3z) \\ \hline
-\frac{18}{25}y^2z-2y-\frac{21}{25}z \\
-(-\frac{18}{25}y^2z-\frac{126}{125}yz^2) \\ \hline
-2y+\frac{126}{125}yz^2-\frac{21}{25}z \\
-(-2y-\frac{14}{5}z) \\ \hline
\frac{126}{125}yz^2+\frac{49}{25}z \\
-(\frac{126}{125}yz^2+\frac{882}{625}z^3) \\ \hline
-\frac{882}{625}z^3+\frac{49}{25}z) \\
-(-\frac{882}{625}z^3+\frac{49}{25}z) \\ \hline
0
\end{array}
$$

Získali jsme tedy Gröbnerovu bázi:

$G = \{xy-z^2+1,\ -x^2+yz+2,\ xz-y^2+3,\ y^3-3y-z^3+z,\ -5y-7z,\ \frac{18}{25}z^2-1\}$.

Redukovanou bázi a řešení soustavy rovnic bychom získali obdobně jako v předchozím způsobu.

Příklad 5: *V oboru reálných čísel řešme soustavu rovnic druhého stupně:*

$$
\begin{aligned}
9x^2+16y^2-72x-32y+15 &= 0, \\
4x^2-y^2-32x+2y+31 &= 0.
\end{aligned}
$$

Řešení:

Označme polynomy:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 9x^2-72x+16y^2-32y+15, \\
f_2 &= 4x^2-32x-y^2+2y+31.
\end{aligned}
$$

Máme tedy množinu $F = \{f_1, f_2\}$.

Určíme $\mathrm{LT}(f_1) = 9x^2$, $\mathrm{LT}(f_2) = 4x^2$ a $\mathrm{LCM}(\mathrm{LT}(f_1), \mathrm{LT}(f_2)) = 36x^2$.

Vypočteme S-polynom f_1 a f_2:

Spoly $(f_1, f_2) = \frac{36x^2}{9x^2} \cdot (9x^2 - 72x + 16y^2 - 32y + 15) -$
$- \frac{36x^2}{4x^2} \cdot (4x^2 - 32x - y^2 + 2y + 31) =$
$= 36x^2 - 288x + 64y^2 - 128y + 60 - 36x^2 + 288x + 9y^2 - 18y - 279 =$
$= 73y^2 - 146y - 219.$

Po dělení prvky množiny F dostaneme 0 a zbytek $73y^2 - 146y - 219$.

Tento polynom upravíme a získáme $y^2 - 2y - 3$, označíme f_3 a přidáme do množiny F.

Vypočteme $\mathrm{LT}(f_1) = 9x^2$, $\mathrm{LT}(f_3) = y^2$.

Jelikož je $\mathrm{LCM}(\mathrm{LT}(f_1), \mathrm{LT}(f_3)) = \mathrm{LT}(f_1) \cdot \mathrm{LT}(f_3)$, podle Kritéria 1 platí, že po dělení $Spoly(f_1, f_3)$ polynomy f_1, f_3 dostaneme zbytek 0. To samé platí pro $Spoly(f_2, f_3)$.

Získali jsme tedy Gröbnerovu bázi:

$$F = \left\{9x^2 - 72x + 16y^2 - 32y + 15,\ 4x^2 - 32x - y^2 + 2y + 31,\ y^2 - 2y - 3\right\}.$$

Polynom f_1 lze vyjádřit jako $f_1 = \frac{9}{4} f_2 + \frac{73}{4} f_3$, odstraníme jej tedy z množiny F.

Redukovaná Gröbnerova báze je $G = \left\{x^2 - 8x - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{31}{2},\ y^2 - 2y - 3\right\}$.

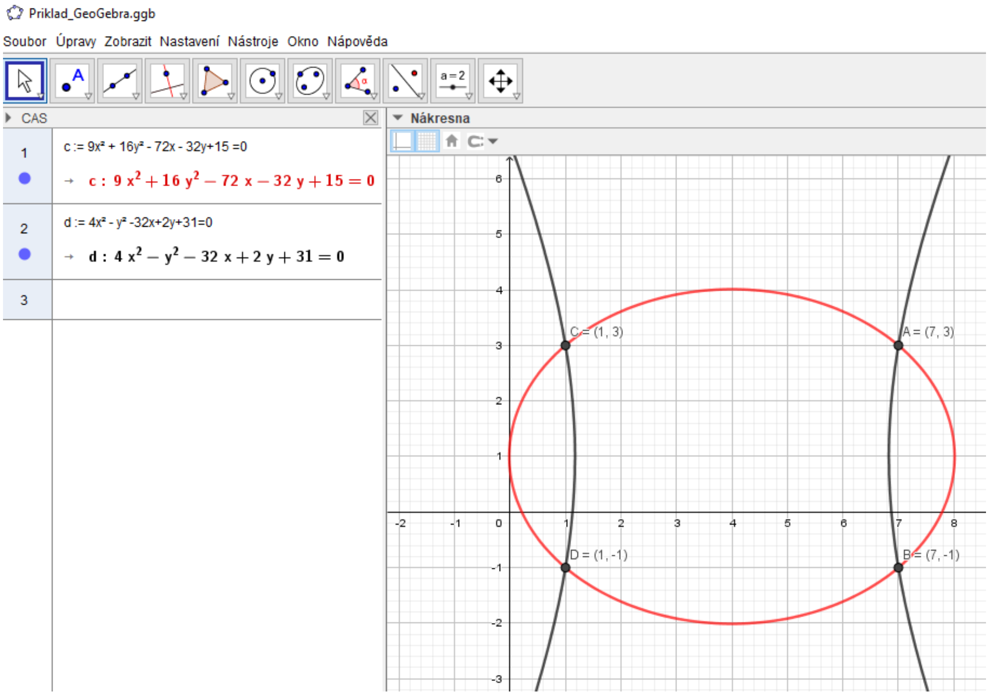
Poslední polynom obsahuje jen proměnnou y, položíme jej roven nule a snadno vypočteme $y_1 = -1$, $y_2 = 3$. Z další rovnice bychom dopočetli x a ověřili bychom, že všechna řešení splňují původní soustavu rovnic.

Řešení dané soustavy je: $[1, -1], [1, 3], [7, 3], [7, -1]$.

Poznámka. Lze vyřešit elementárně doplněním na čtverce.

Ukázka vyřešení příkladu 5 pomocí počítačových programů GeoGebra a Maple

a) v GeoGebře



Obrázek 79: **Grafické řešení příkladu 5 v GeoGebře**

b) v Maple:

$f := 9\cdot x^2 + 16\cdot y^2 - 72\cdot x - 32\cdot y + 15;$	$9x^2 + 16y^2 - 72x - 32y + 15$
$g := 4\cdot x^2 - y^2 - 32\cdot x + 2\cdot y + 31;$	$4x^2 - y^2 - 32x + 2y + 31$
$GB := Groebner[Basis]([f, g], plex(x, y));$	$[y^2 - 3 - 2y, x^2 + 7 - 8x]$
$r := solve(GB[1], \{y\});$	$\{y = 3\}, \{y = -1\}$
$s := solve(GB[2], \{x\});$	$\{x = 7\}, \{x = 1\}$
$solve(\{f, g\}, \{x, y\});$	$\{x = 1, y = -1\}, \{x = 1, y = 3\}, \{x = 7, y = -1\}, \{x = 7, y = 3\}$

Obrázek 80: Řešení soustavy rovnic 5 v Maple

Příklad 6: *Řešte soustavu rovnic v* $\mathbb{R}$ (C)*:*

$$\begin{array}{rcl} x + 3y & = & 4y^3 \\ y + 3x & = & 4x^3 \end{array}$$

Řešení:

$$\begin{array}{rcl} g_1 & = & x - 4y^3 + 3y \\ g_2 & = & -4x^3 + 3x + y \end{array}$$

Vypočteme S-polynom g_1 a g_2:

Spoly $(g_1, g_2) = -4x^2(x - 4y^3 + 3y) - (-4x^3 + 3x + y) = 16x^2y^3 - 12x^2y - 3x - y$

$$(16x^2y^3 - 12x^2y - 3x - y) : \left\{ \begin{array}{l} x - 4y^2 + 3y \\ \\ -4x^3 + 3x + y \end{array} \right. = 16xy^3 - 12xy + 64y^6 - 96y^4 + 36y^2 - 3$$

$$\begin{array}{l}
-(16x^2y^3 - 64xy^6 + 48xy^4) \\ \hline
-12x^2y + 64xy^6 - 48xy^4 - 3x - y \\
-(-12x^2y + 48xy^4 - 36xy^2 \\ \hline
64xy^6 - 96xy^4 + 36xy^2 - 3x - y \\
-(64xy^6 - 256y^9 + 192y^7) \\ \hline
-96xy^4 + 36xy^2 - 3x + 256y^9 - 192y^7 - y \\
-(-96xy^4 + 384y^7 - 288y^5) \\ \hline
36xy^2 - 3x + 256y^9 - 576y^7 + 288y^5 - y \\
-(36xy^2 - 144y^5 + 108y^3) \\ \hline
-3x + 256y^9 - 576y^7 + 432y^5 - 108y^3 - y \\
-(-3x + 12y^3 - 9y) \\ \hline
\underbrace{256y^9 - 576y^7 + 432y^5 - 120y^3 + 8y}_{\text{zbytek}}
\end{array}$$

Tento zbytek vložíme do Gröbnerovy báze.

$G = \{x - 4y^3 + 3y,\ -4x^3 + 3x + y,\ 256y^9 - 576y^7 + 432y^5 - 120y^3 + 8y\}$

Zjistíme, zda se jedná o redukovanou Gröbnerovu bázi. Koeficienty u vedoucích členů by měly být 1. Druhý polynom vydělíme -4 a třetí 256.

Budeme zjišťovat, zda některý z monomů polynomu g_1 náleží ideálu $\langle \mathrm{LT}(G - \{g_1\}) \rangle$. Pokud ano, pak by nepatřil do redukované Gröbnerovy báze. Máme $g_1 = x - 4y^3 + 3y$, $\langle \mathrm{LT}(G - \{g_1\}) \rangle = \langle x^3, y^9 \rangle$. Polynom g_1 necháme v redukované Gröbnerově bázi. Pro polynom $g_2 = x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y$ je $\langle \mathrm{LT}(G - \{g_2\}) \rangle = \langle x, y^9 \rangle$.

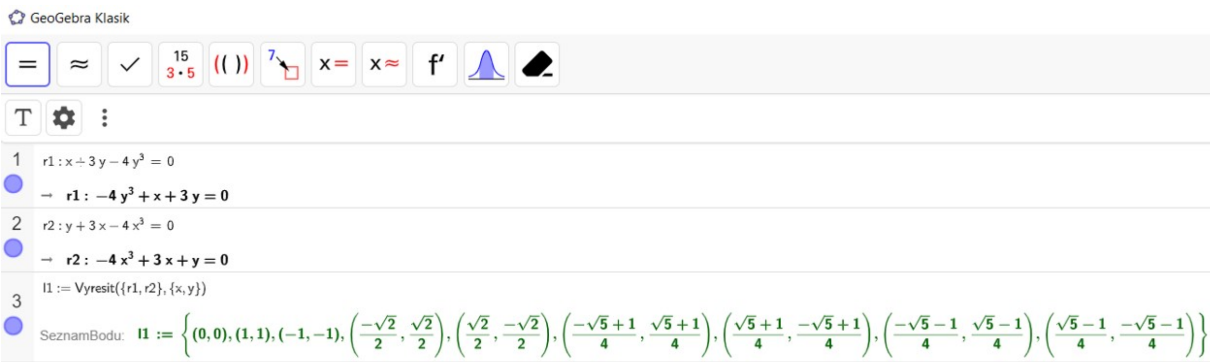
V g_2 existují monomy, které jsou dělitelné x. Odebereme jej z redukované Gröbnerovy báze. Pro třetí polynom je $\langle \mathrm{LT}(G - \{g_3\}) \rangle = \langle x \rangle$. V polynomu g_3 neexistují monomy, které jsou dělitelné x. Necháme jej v redukované Gröbnerově bázi. Tento polynom je pouze v proměnné y.

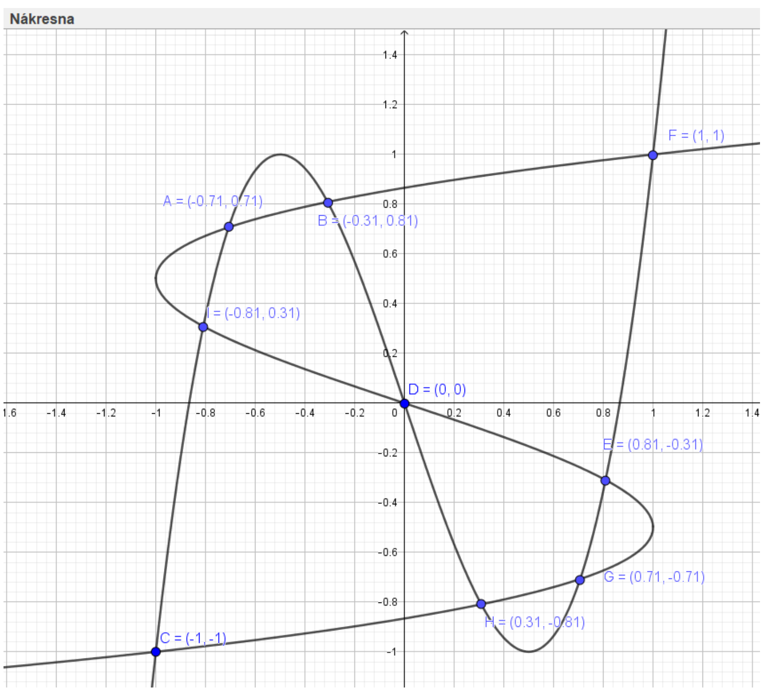
Zjistíme řešení tohoto polynomu v proměnné y, poté dopočteme x a dostaneme 9 řešení:

$[0,0]$, $[1,1]$, $[-1,-1]$, $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ a $[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$, $[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}; \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}]$, $[\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}; \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}]$, $[-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}; -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}]$. $[-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}; -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}]$.

Ukázka vyřešení příkladu 6 pomocí počítačových programů GeoGebra a Maple

a) v GeoGebře





Obrázek 81: **Grafické řešení příkladu 6 v GeoGebře**

b) v Maple:

> $f := x + 3\,y - 4\,y^3;$

$$x + 3\,y - 4\,y^3$$

$g := y + 3\,x - 4\,x^3;$

$$y + 3\,x - 4\,x^3$$

$GB := Groebner[Basis]([f, g], plex(x, y));$

$$[y - 15\,y^3 + 54\,y^5 - 72\,y^7 + 32\,y^9, x + 3\,y - 4\,y^3]$$

$r := solve(GB[1], \{y\});$

$$\{y=0\}, \{y=1\}, \{y=-1\}, \left\{y=\frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}, \left\{y=-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}, \left\{y=\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\right\}, \left\{y=-\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\right\}, \left\{y=\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\right\}, \left\{y=-\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\right\}$$

Obrázek 82: **Řešení příkladu 6 v Maple**

Příklad 7: *V oboru komplexních čísel vyřešíme soustavu rovnic:*(Hora [34])

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ x + 2y - z &= -4, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 12. \end{aligned}$$

Řešení:

Označme polynomy:

$$\begin{aligned} g_1 &= x + y + z - 2 &= 0, \\ g_2 &= x + 2y - z + 4 &= 0, \\ g_3 &= x^2 + y^2 + z^2 - 12 &= 0. \end{aligned}$$

g_1, g_2, g_3 jsou polynomy o třech neznámých x, y, z. Máme množinu $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ a množinu dvojic indexů těchto polynomů $B = \{[1,2],[1,3],[2,3]\}$.

Dále tedy vypočteme:

$$\mathrm{Spoly}(g_1, g_2) = g_1 - g_2 = x + y + z \ - 2 - x - 2y + z \ - 4 = -y + 2z - 6.$$

Tento polynom označíme g_4 a přidáme do množiny G, tedy $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$. Množinu B doplníme o dvojice $[1, 4], [2, 4]$ a $[3, 4]$.

Z množiny B vezmeme dvojici $[1, 3]$ a vypočteme

$$\mathrm{Spoly}(g_1, g_3) = x \cdot g_1 - g_3 = xy + xz - 2x - y^2 - z^2 + 12 = p.$$

Provedeme redukci polynomu p modulo G:

$p \to_G p + x \cdot g_4 = 3xz - 8x - y^2 - z^2 + 12$, budeme pokračovat:

$3xz - 8x - y^2 - z^2 + 12 - 3xz - 3yz - 3z^2 + 6z =$

$= -8x - y^2 - 3yz - 4z^2 + 6z + 12 + 8x + 8y + 8z - 16 =$

$= -y^2 - 3yz + 8y - 4z^2 + 14z - 4 + y^2 - 2yz + 6y =$

$= -5yz + 14y - 4z^2 + 14z - 4 + 5yz - 10z^2 + 30z =$

$= 14y - 14z^2 + 44z - 4 - 14y + 28z - 84 =$

$= -14z^2 + 72z - 88.$

Tento polynom označíme g_5. Do množiny B přidáme dvojice $[1, 5], [2, 5], [3, 5], [4, 5]$.

Vypočteme $\mathrm{Spoly}(g_2, g_3) = x \cdot g_2 - g_3 = 2xy - xz + 4x - y^2 - z^2 + 12 = p_2$. Provedeme opět redukci tohoto polynomu p_2.

$p_2 - 2y \cdot g_1 = 2xy - xz + 4x - y^2 - z^2 + 12 - 2xy - 2y^2 - 2yz + 4y =$

$= -xz + 4x - 3y^2 - 2yz + 4y - z^2 + 12 + xz + yz + z^2 - 2z =$

$= 4x - 3y^2 - yz + 4y - 2z + 12 - 4x - 4y - 4z + 8 =$

$= -3y^2 - yz - 6z + 20 + 3y^2 - 6yz + 18y =$

$= 18y - 14z^2 + 36z + 20 - 18y + 36z - 108 =$

$= -14z^2 + 72z - 88 + 14z^2 - 72z + 88 =$

$= 0.$

Do množiny G nepřidáváme žádný polynom.

Podle kritéria 1 můžeme vyškrtnout dvojice $[1, 4], [2, 4], [3, 4]$ i $[1, 5], [2, 5], [3, 5], [4, 5]$.

Získali jsme

$G = \{x + y + z \ - 2, x \ + 2y - z \ + 4, x^2 + y^2 + z^2 - 12, -y + 2z - 14z^2 + 72z \ - 88\}$.

Získaná Gröbnerova báze G je často větší, než je nutné.

Projdeme nyní část „redukčního algoritmu“ a zjistíme, které polynomy vyškrtnout $\mathrm{LT}(g_2)/\mathrm{LT}(g_1)$, vyškrtneme tedy polynom g_1 a $\mathrm{LT}(g_2)/\mathrm{LT}(g_3)$, vyškrtneme polynom g_3. $G = \{x + 2y - z \ + 4, y - 2z + 6, z^2 - \frac{36}{7}z + \frac{44}{7}\}$. Získali jsme redukovanou a monickou bázi.

Z rovnice $z^2 - \frac{36}{7}z + \frac{44}{7} = 0$ získáme kořeny $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{22}{7}$.

Z dalších rovnic vypočteme y a x.

Řešení: $[2, -2, 2], [-\frac{10}{7}, \frac{2}{7}, \frac{22}{7}]$.

Redukce polynomů bývá zdlouhavá a snadno se udělá chyba. Využijme Větu 9 (Buchbergerův algoritmus určení Gröbnerovy báze). Vypočteme opět $\text{Spoly}(g_1, g_2)$, $\text{Spoly}(g_1, g_3)$, $\text{Spoly}(g_2, g_3)$. Pokud máme $g_4 = \text{Spoly}(g_1, g_2) = -y + 2z - 6$. Po dělení prvky množiny G dostaneme nulu a zbytek $-y + 2z - 6$. $\text{Spoly}(g_1, g_2) = = xy + xz - 2x - y^2 - z^2 + 12$ a budeme dělit polynomy g_1, g_2, g_3, g_4.

$$(xy + xz - 2x - y^2 - z^2 + 12) : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z - 2 \\ x + 2y - z \;+ 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 12 \\ -y + 2z - 5 \\ -14z^2 + 72z - 88 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} y + z - 2 \\ \\ \\ \\ 2y + 6z - 16 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
-(xy + y^2 + yz - 2y) \\ \hline
xz - 2x - 2y^2 - yz + 2y - z^2 + 12 \\
-(xz + yz + z^2 - 2z) \\ \hline
-2x - 2y^2 - 2yz + 2y - 2z^2 + 2z + 12 \\
-(-2x - 2y - 2z + 4) \\ \hline
-2y^2 - 2yz + 4y - 2z^2 + 4z + 8 \\
-(-2y^2 + 4yz - 12y) \\ \hline
-6yz + 16y - 2z^2 + 4z + 8 \\
-(-6yz + 12z^2 - 36z \\ \hline
16y - 14z^2 + 40z + 8 \\
-(16y - 32z + 96) \\ \hline
-14z^2 + 72z - 88
\end{array}$$

Tento zbytek $-14z^2 + 72z - 88$ označíme g_5.

Vypočteme Spoly$(g_2, g_3) = 2xy - xz + 4x - y^2 - z^2 + 12$ a dělíme prvky množiny G:

$$
(2xy - xz + 4x - y^2 - z^2 + 12) : \begin{cases} x + y + z \ -2 \\ x + 2y - z \ +4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 12 \\ -y + 2z - 6 \\ -14z^2 + 72z - 88 \end{cases} = \begin{cases} 2y - z \ +4 \\ \\ \\ 3y + 7z - 18 \\ 1 \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{l}
-(2xy + 2y^2 + 2yz - 4y) \\ \hline
-xz + 4x - 3y^2 - 2yz + 4y - z^2 + 12 \\
-(-xz - yz - z^2 + 2z) \\ \hline
4x - 3y^2 - yz + 4y - 2z + 12 \\
-(4x + 4y + 4z - 8) \\ \hline
-3y^2 - yz - 6z + 20 \\
-(-3y^2 + 6yz - 18y) \\ \hline
-7yz + 18y - 6z + 20 \\
-(-7yz + 14z^2 - 42z) \\ \hline
18y - 14z^2 + 36z + 20 \\
-(18y - 36z + 108) \\ \hline
-14z^2 + 72z - 88 \\
-(-14z^2 + 72z - 88) \\ \hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Množinu G již nerozšiřujeme, další dvojice můžeme z B podle kritéria vyškrtnout.

Dostali bychom stejnou Gröbnerovu bázi jako v předchozím způsobu a získali řešení soustavy rovnic.

Příklad 8: *Řešte soustavu rovnic* (Švrček [82]):

$$
\begin{aligned}
x^2 + 1 &= 2y, \\
y^2 + 1 &= 2x.
\end{aligned}
$$

1. způsob řešení:

Z první rovnice si vyjádříme $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ a dosadíme do druhé.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}(x^4+2x^2+1)+1 &= 2x\\
x^4+2x^2+5 &= 8x\\
x^4+2x^2-8x+5 &= 0
\end{aligned}$$

Odhadneme první kořen $x_1 = 1$.

Rovnici upravíme na součinový tvar: $(x-1)(x^3+x^2+3x-5) = 0$.

Odhadneme druhý kořen $x_2 = 1$.

Rovnici upravíme: $(x-1)(x-1)(x^2+2x+5) = 0$.

Z kvadratické rovnice $x^2+2x+5 = 0$ dopočteme poslední dva kořeny:

$x_{3,4} = \frac{-2\pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$, $x_3 = -1+2i$, $x_4 = -1-2i$.

Dopočteme y a dostáváme řešení: $P = \{[1,1]\}$ v $\mathbb{R}$.

V oboru komplexních čísel pak máme řešení $[1,1]$, $[-1-2i, -1+2i]$ a $[-1+2i, -1-2i]$.

2. způsob řešení:

Rovnice od sebe odečteme:

$x^2 - y^2 = 2(y-x)$.

Upravíme na následující tvar:

$(x-y)(x+y+2) = 0$.

a)
$$\begin{aligned}
x &= y\\
x^2-2x+1 &= 0\\
(x-1)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Řešení: $[1,1]$

b)
$$\begin{aligned}
y &= -x-2\\
(-x-2)^2+1 &= 2x\\
x^2+4x+5-2x &= 0\\
x^2+2x+5 &= 0
\end{aligned}$$

Dostaneme řešení: $\{[1,1], [-1-2i, -1+2i], [-1+2i, -1-2i]\}$.

3. způsob řešení:

$$\begin{aligned}
x^2+1 &= 2y\\
y^2+1 &= 2x\\
\hline
x^2+y^2-2x-2y+2 &= 0\\
(x-1)^2+(y-1)^2 &= 0\,(\text{metoda čtverců})\\
P &= [1,1], \quad P' \supseteq P\,(\text{nutná zkouška})
\end{aligned}$$

4. způsob řešení (metoda nerovností a odhadů):

$$\begin{aligned} 2x &= y^2+1 \\ \tfrac{y^2+1}{2} &= x \end{aligned}$$

Mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí:

$$\tfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad \forall a,b \geqq 0$$

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &\geqq 4ab \\ a^2-2ab+b^2 &\geqq 0 \\ (a-b)^2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+1 &= 2y \\ y^2+1 &= 2x \\ \hline \tfrac{y^2+1}{2} &\geqq \sqrt{y^2\cdot 1} \\ y^2+1 &\geqq 2\sqrt{y^2} = 2|y| = 2y = x^2+1 \\ y^2+1 &\geqq x^2+1 \geqq 2\sqrt{x^2} = 2x \\ 2x \geqq 2y &\geqq 2x \\ 2x = 2y = 2x &\Rightarrow \underline{y=x} \end{aligned}$$

Obdobně jako v předchozím způsobu.

5. způsob řešení (pomocí Gröbnerových bází):

Použijeme lexikografické uspořádání $\angle_L$, kde $x < y$.

Máme 2 polynomy: $g_1 = x^2 - 2y + 1$, $g_2 = -2x + y^2 + 1$.

Vypočteme S-polynom:

$\mathrm{Spoly}(g_1, g_2) = 2g_1 + xg_2 = 2x^2 - 4y + 2 - 2x^2 + xy^2 + x = xy^2 + x - 4y + 2 = p_1$

$p_1 \to_{g_2} xy^2 + x - 4y + 2 - xy^2 + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{2}y^2 = x + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{2}y^2 - 4y + 2 = p_2$

$p_2 \to_{g_2} p_2 + \frac{1}{2}g_2 = \frac{1}{2}y^4 + y^2 - 4y + \frac{5}{2}$

$g_3 = y^4 + 2y^2 - 8y + 5$

$B = \{[1,2],[1,3],[2,3]\} \longrightarrow G = \{g_1, g_2, g_3\}$ – Gröbnerova báze ideálu

Redukovaná Gröbnerova báze je $G = \{g_2, g_3\}$.

Pokud polynom g_2 vydělíme -2, pak získáme monickou bázi.

$$\begin{aligned} -2x + y^2 + 1 &= 0 \\ y^4 + 2y^2 - 8y + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Tato soustava je ekvivalentní s původní soustavou rovnic.

Druhý polynom je jen v jedné proměnné. Má dvojnásobný kořen $y_{1,2} = 1$.

$$\begin{aligned}(y-1)^2\cdot(y^2-y-5) &= 0\\ (y^2-2y+1)\cdot(y^2+2y+5) &= 0\\ y_{3,4} &= \tfrac{-2\pm 4i}{2} = \underline{-1\pm 2i}\end{aligned}$$

Z vyjádření, že $x = \frac{y^2+1}{2}$ dopočteme neznámou x.

Dostaneme řešení: $P = \{[1,1], [-1+2i, -1-2i], [-1-2i, -1+2i]\}$.

5. Převod parametrického vyjádření afinní variety na implicitní

Další využití Gröbnerových bází je při převodu parametrického vyjádření afinní variety na implicitní. (Pech, [58])

Pro převod parametrického vyjádření afinních variet na implicitní tvar lze využít metodu Gröbnerových bází. Polynomiální parametrizaci lze vyjádřit ve tvaru:

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(t_1,\ldots,t_m),\\ x_2 &= f_2(t_1,\ldots,t_m),\\ &\ \vdots\\ x_n &= f_n(t_1,\ldots,t_m),\end{aligned}$$

kde $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jsou polynomy z $T[t_1,\ldots,t_m]$. Geometricky představuje soustava zobrazení $F : T^m \to T^n$ definované vztahem

$$F(t_1,\ldots,t_m) = (f_1(t_1,\ldots,t_m),\ldots,f_n(t_1,\ldots,t_m)).$$

Potom $F(T^m) \subset T^n$ je podmnožina T^n parametrizovaná pomocí výše uvedené soustavy rovnic. Problémem převodu jejího parametrického vyjádření na implicitní je nalezení nejmenší variety obsahující $F(T^m)$.

Příklad 9: *Racionální parametrizaci koule lze vyjádřit ve tvaru:*

$$x = \frac{4ur^2}{u^2+v^2+4r^2}, \quad y = \frac{4vr^2}{u^2+v^2+4r^2}, \quad z = \frac{r(u^2+v^2-4r^2)}{u^2+v^2+4r^2}.$$

Najděte její implicitní vyjádření.

Řešení:

Redukovaná Gröbnerova báze obsahuje 5 prvků. Pouze prvek $x^2+y^2+z^2-r^2$ neobsahuje parametry u, v. Rovnice $x^2+y^2+z^2-r^2 = 0$ je implicitním vyjádřením koule.

Příklad 10: *Parametrické vyjádření Bernoulliho lemniskáty je ve tvaru:*

$$x = \frac{a\cdot\cos t}{1+\sin^2 t}, \quad y = \frac{a\cdot\cos t\sin t}{1+\sin^2 t}.$$

Najděte její implicitní vyjádření.

Řešení:

Zavedeme substituci $c_1 = \cos t$, $c_2 = \sin t$. Přidáme identitu $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, tedy $c_1^2 + c_2^2 = 1$.

Dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x(1 + c_2^2) - a \ \cdot c_1 \quad &= \ 0, \\ y(1 + c_2^2) - a \ \cdot c_1 \cdot c_2 \ &= \ 0, \\ c_1^2 + c_2^2 \qquad\quad &= \ 1. \end{aligned}$$

Redukovaná Gröbnerova báze má 5 prvků. Bez proměnných c_1, c_2 je pouze $x^4 + 2x^2y^2 - a^2x^2 + y^4 + a^2y^2 = 0$.

Po úpravě rovnice $x^4 + 2x^2y^2 - a^2x^2 + y^4 + a^2y^2 = 0$ dostaneme $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$, což je implicitní vyjádření Bernoulliho lemniskáty.

6. Automatické dokazování v geometrii

Vycházela jsem z publikací [58], [59], [8]. Metoda Gröbnerových bází se užívá také při dokazováí v geometrii.

Základním principem automatického dokazování geometrických tvrzení je využití vyjádření geometrických tvrzení ve tvaru polynomiálních rovnic.

Následující věta říká, jak lze určit, že dané tvrzení plyne z předpokladů.

Věta 16: Nechť jsou dány předpoklady $h_1 = 0, \ldots, h_i = 0$ a $s_1 \neq 0, \ldots, s_j \neq 0$ a chtějme ukázat, že tvrzení g vyplývá z platnosti uvedených předpokladů, přičemž $h_1, \ldots, h_i$, $s_1, \ldots, s_j$, $g \in T[u_1, \ldots, u_k, x_1, \ldots, x_l]$. Nechť dále

$$f = ((h_1 = 0 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ h_i = 0 \ \wedge \ s_1 \neq 0 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ s_j \neq 0) \Rightarrow g = 0).$$

Potom výraz f je pravdivý nad algebraicky uzavřeným tělesem obsahujícím T právě tehdy, když soustava rovnic

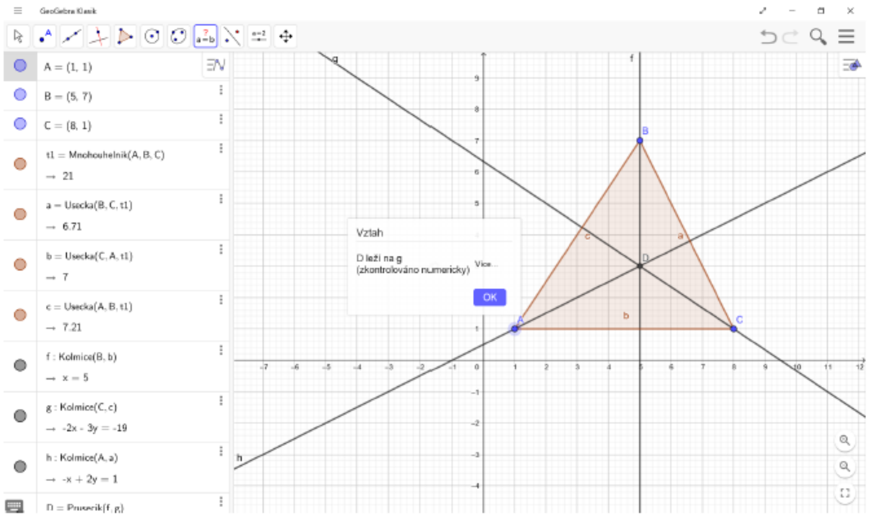
$$h_1 = 0, \ldots, h_i = 0, s_1z_1 - 1 = 0, \ldots, s_jz_j - 1 = 0, gz - 1 = 0,$$

kde $z_1, \ldots, z_j$ jsou nově přidané proměnné, nemá řešení nad tímto algebraicky uzavřeným tělesem.

Poznámka. Předpoklady $s_1 \neq 0, \ldots, s_j \neq 0$ často vyjadřují omezení daného geometrického útvaru a vylučují různé generované případy daného projektu. K ověření, že výše uvedená soustava má řešení, lze využít Gröbnerovy báze. Stačí ukázat, že redukovaná Gröbnerova báze pro ideál generovaný polynomy určující výše uvedenou soustavu je $\{1\}$.

Dokážeme **dvě zajímavá tvrzení**, která by se mohla uvést **při výuce geometrie**.

Příklad 11: *Dokažte, že všechny tři výšky trojúhelníku ABC se protínají v jednom bodě.*



Obrázek 83: **Výšky v trojúhelníku**

Řešení:

Zvolíme $A = [0, 0]$, $B = [u_1, 0]$, $C = [u_2, u_3]$. Dále označíme paty výšek $P_1 = [x_1, 0]$, $P_2 = [x_2, x_3]$ a $P_3 = [x_4, x_5]$.

Platí:

$CP_1 \perp AB: \; h_1 = u_1(x_1 - u_2) = 0,$

$AP_2 \perp BC: \; h_2 = x_2(u_2 - u_1) + x_3u_3 = 0,$

$BP_3 \perp AC: \; h_3 = u_2(x_4 - u_1) + u_3x_5 = 0,$

body BP_2C jsou kolineární: $h_4 = x_3(u_2 - u_1) - u_3(x_2 - u_1) = 0,$

body AP_3C jsou kolineární: $h_5 = x_5u_2 - u_3x_4 = 0.$

Na úsečce CP_1 zvolíme bod P tak, aby BPP_3 byly kolineární:

BPP_3 jsou kolineární: $h_6 = x_6(x_4 - u_1) - x_5(x_1 - u_1) = 0.$

Zbývá dokázat, že APP_2 jsou kolineární: $g = x_6x_2 - x_3x_1 = 0.$

Pro ideál $I = \langle h_1, \dots, h_6, 1 - yg\rangle$ je redukovaná Gröbnerova báze $\{1\}$ a tvrzení g vyplývá z předpokladů $h_1, \dots, h_6$.

Příklad 12: *Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A. Dokažte, že středy všech stran trojúhelníku a pata výšky z bodu A na stranu BC leží na jedné kružnici.*

Řešení:

Zvolíme $A = [0, 0]$, $B = [u_1, 0]$, $C = [0, u_2]$. Středy stran trojúhelníku označíme: S_1, S_2 a S_3.

Platí:

$h_1 = 2x_1 - u_1 = 0$, $h_2 = 2x_2 - u_2 = 0$, $h_3 = 2x_3 - u_1 = 0$, $h_4 = 2x_4 - u_2 = 0$.

Dále označíme patu výšky $P = [x_5, x_6]$. Platí, že

$AP \perp PC:\ h_5 = x_5u_1 - x_6u_2 = 0$,

B, P, C jsou kolineární: $h_6 = x_5u_2 + x_6u_1 - u_1u_2 = 0$.

Body S_1, S_2, S_3 a P leží na kružnici. Tři body, které neleží na jedné přímce, musí ležet na kružnici. Dokážeme, že S_1, S_2, S_3 leží na kružnici a bod P leží na kružnici procházející těmito třemi body.

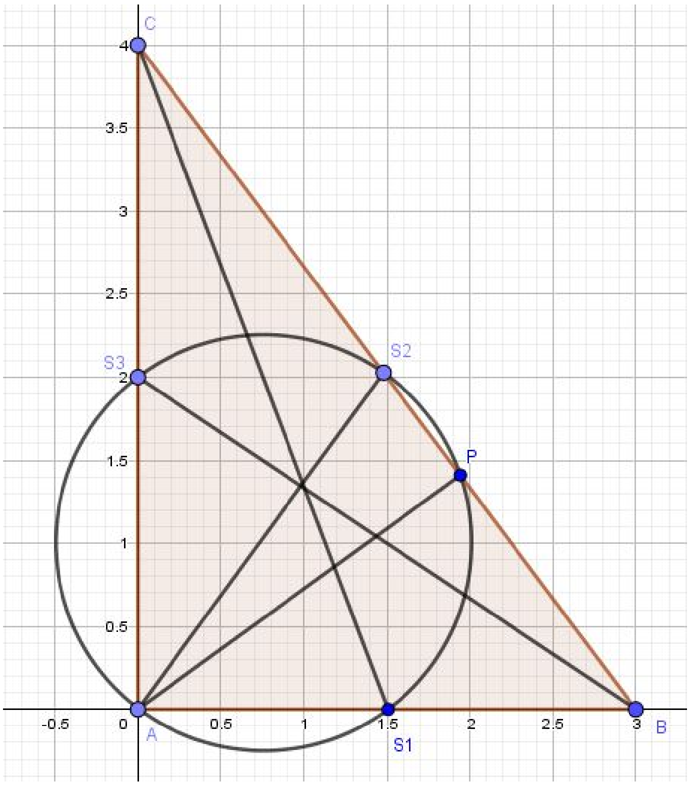
Střed kružnice označíme $O = [x_7, x_8]$.

$S_1O = S_2O:\ h_7 = (x_1 - x_7)^2 + x_8^2 - x_7^2 - (x_8 - x_2)^2 = 0$,

$S_1O = S_3O:\ h_8 = (x_1 - x_7)^2 + x_8^2 - (x_3 - x_7)^2 - (x_4 - x_8)^2 = 0$.

Chceme dokázat, že $PO = S_1O$, tedy $g = (x_5-x_7)^2+(x_6-x_8)^2-(x_1-x_7)^2-x_8^2 = 0$.

Redukovaná Gröbnerova báze pro ideál $I = \langle h_1, \ldots, h_8, 1 - yg\rangle$ je $\{1\}$ a tedy tvrzení g vyplývá z tvrzení $h_1, \ldots, h_8$.



Obrázek 84: **Grafické řešení příkladu 12**

7. Metoda rezultantů

Rezultant polynomů nabyl výrazně na významu v souvislosti s rozšířením různých programů počítačové algebry (Maple, Mathematica), je důležitou složkou mnoha algoritmů užívaých v těchto programech. Budeme definovat pojem rezultant pro dva polynomy f, g jedné proměnné x.

Nechť $f, g \in T[x]$ jsou polynomy takové, že

$$\begin{aligned} f &= a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_p \neq 0, \\ g &= b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad b_q \neq 0. \end{aligned}$$

Pomocí pojmu rezultantu těchto polynomů budeme chtít odvodit podmínku na jejich koeficienty a_i, b_j, $(i = 0, \ldots, p,\ j = 0, \ldots, q)$, která zaručí existenci společného řešení polynomů f, g. Jinak řečeno, chceme vědět, kdy mají $f = 0$, $g = 0$ společný kořen.

Lemma 1: Nechť $f, g \in T[x]$ jsou polynomy v jedné proměnné a $\deg f = p \in N$, $\deg g = q \in N$. Potom f a g mají společného dělitele právě tehdy, když existují polynomy $A, B \in T[x]$ takové, že platí:

1. A, B nejsou oba současně nulovými polynomy,
2. $\deg A \leqq p - 1$, $\deg B \leqq q - 1$,
3. $Af + Bg = 0$.

Nechť $f(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ a $g(x) = b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, kde $a_i, b_j \in T$, jsou dva polynomy nenulových stupňů $(p, q \in N)$. Determinant

$$Res(f,g) = \begin{vmatrix} a_p & a_{p-1} & \ldots & a_0 & & & & \\ \cdot & a_p & a_{p-1} & \ldots & a_0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & a_p & a_{p-1} & \ldots & a_0 \\ b_q & b_{q-1} & \ldots & b_0 & & & & \\ \cdot & b_q & b_{q-1} & \ldots & b_0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & b_q & b_{q-1} & \ldots & b_0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} \text{q řádků} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} \text{p řádků} \end{array}$$

nazýváme **rezultantem** polynomů f, g.

Tento determinant zavedl anglický matematik **James Joseph Sylvester** (1814 – 1897). V prvních q řádcích tohoto determinantu jsou koeficienty a_i, $i = 0, 1, \ldots, p$ (vždy v následujícím řádku „posunuté o jedno místo vpravo“), v dalších p řádcích pak obdobně řazené koeficienty b_i, $i = 0, 1, \ldots, q$ a na zbývající místa v determinantu se píší nuly.

Věta 17: Nechť f a g jsou polynomy v jedné proměnné x. Rezultant $Res(f, g)$ je polynom, který nabývá nulové hodnoty ($Res(f, g) = 0$) právě tehdy, když f a g mají společného dělitele.

Pojem rezultantu je vhodné zobecnit i pro polynomy f, g více proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$. Rezultant polynomů f, g vzhledem k proměnné x_1 označovaný $Res\,(f, g, x_1)$ definujeme zcela analogicky jako $Res\,(f, g, x)$ pro jednu proměnnou x, přičemž polynomy f, g bereme nyní v jedné proměnné x_1 a s koeficienty z tělesa $T[x_2, \dots, x_n]$, tj. jako funkce parametrů $x_2, \dots, x_n$.

Lze pro ně odvodit větu:

Věta 18: Nechť $f, g \in T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ jsou polynomy nenulového stupně v proměnné x_1. Pak platí:

1. $Res\,(f, g, x_1) \in I_1$, kde I_1 je první eliminační ideál $\langle f, g\rangle$.
2. $Res\,(f, g, x_1) = 0$ právě tehdy, když polynomy f, g v proměnné x_1 mají společného dělitele nenulového stupně.

Ukážeme řešení soustavy rovnic příkladu 5 pomocí metody rezultantů:

Řešení:

Máme polynomy:

$$\begin{aligned} f_1 &= 9x^2 + 16y^2 - 72x - 32y + 15, \\ f_2 &= 4x^2 - y^2 - 32x + 2y + 31. \end{aligned}$$

Vytvoříme rezultant vzhledem k proměnné x:

$$\mathrm{Res}(f_1, f_2, x) = \begin{vmatrix} 9 & -72 & 16y^2 - 32y + 15 & 0 \\ 0 & 9 & -72 & 16y^2 - 32y + 15 \\ 4 & -32 & -y^2 + 2y + 31 & 0 \\ 0 & 4 & -32 & -y^2 + 2y + 31 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 9 & -72 & 16y^2 - 32y + 15 \\ -32 & -y^2 + 2y + 31 & 0 \\ 4 & -32 & -y^2 + 2y + 31 \end{vmatrix} +$$

$$+4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -72 & 16y^2 - 32y + 15 & 0 \\ 9 & -72 & 16y^2 - 32 + 15 \\ 4 & -32 & -y^2 + 2y + 31 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \cdot (73y^4 - 292y^3 + 16498y^2 - 32412y - 49275) +$$

$$+4 \cdot (1168y^4 - 4672y^3 - 39785y^2 + 88914y + 122859) =$$

$$= 5329y^4 - 21316y^3 - 10658y^2 + 63948y + 47961$$

Podle věty 18 mají polynomy f_1 a f_2 společného dělitele, pokud $5329y^4 - 21316y^3 - 10658y^2 + 63948y + 47961 = 0$.

Po vydělení číslem 5329:

$$y^4 - 4y^3 - 2y^2 + 12y + 9 = 0.$$

Pomocí Hornerova schématu najdeme kořeny polynomu:

	1	-4	-2	12	9
3	0				
	1	-1	-5	-3	0

	1	-1	-5	-3
3	0			
	1	2	1	0

Získáme kvadratickou rovnici: $y^2 + 2y + 1 = 0$, která má kořeny:

$$y_3 = -1, \quad y_4 = -1.$$

Po dopočtení x dostaneme výsledné řešení: $P = \{[1, 3], [7, 3], [1, -1], [7, -1]\}$.

```
f := 9x^2 + 16y^2 - 72x - 32y + 15;
```

$$9x^2 + 16y^2 - 72x - 32y + 15$$

```
g := 4x^2 - y^2 - 32x + 2y + 31;
```

$$4x^2 - y^2 - 32x + 2y + 31$$

```
with(Algebraic) :
Syl := LinearAlgebra[SylvesterMatrix](f, g, x);
```

$$\begin{bmatrix} 9 & -72 & 15 + 16y^2 - 32y & 0 \\ 0 & 9 & -72 & 15 + 16y^2 - 32y \\ 4 & -32 & 31 - y^2 + 2y & 0 \\ 0 & 4 & -32 & 31 - y^2 + 2y \end{bmatrix}$$

```
Rezultant := Resultant(f, g, x);
```

$$5329y^4 - 21316y^3 - 10658y^2 + 63948y + 47961$$

```
Reseni_y := solve(Rezultant, {y});
```

$$\{y = -1\}, \{y = -1\}, \{y = 3\}, \{y = 3\}$$

```
# Řešeni pro y=-1
f1 := subs({y=-1}, f);
```

$$9x^2 + 63 - 72x$$

```
reseni1 = solve(f1, x);
```

$$reseni1 = (7, 1)$$

```
# Řešení pro y=3
f2 := subs({y = 3}, f);
```

$$9x^2 + 63 - 72x$$

```
reseni2 = solve(f2, x);
```

$$reseni2 = (7, 1)$$

Obrázek 85: **Řešení příkladu 5 pomocí metody rezultantů v Maple**

Vyřešíme ještě následující příklad pomocí metody rezultantů:

Příklad 13: *Vyřešte soustavu rovnic:*

$$\begin{aligned} x^3 + xy^2 - 10 &= 0 \\ x^2y + y^3 - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & y^2 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y^2 & -10 \\ y & 0 & y^3-5 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & y^3-5 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & y^3-5 \end{vmatrix} =$$

$$= y \cdot (-1)^{5+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & y^2 & -10 \\ y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & y^3-5 & 0 \end{vmatrix} + (y^3-5) \cdot (-1)^{5+5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & y^2 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & y^2 \\ y & 0 & y^3-5 & 0 \\ 0 & y & 0 & y^3-5 \end{vmatrix}$$

$$= y \cdot y \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 1 & y^2 & -10 \\ y & y^3-5 & 0 \end{vmatrix} + (y^3-5) \cdot$$

$$\left(1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & y^2 & -10 \\ y & y^3-5 & 0 \\ 0 & 0 & y^3-5 \end{vmatrix} + y^2 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & y^2 \\ y & 0 & y^3-5 \\ 0 & y & 0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= y^2 \cdot (100y) + (y^3-5) \cdot \Big((y^3-5)^2 - y^3 \cdot (y^3-5) + y^2 \cdot \big(y^4 - (y^4 - 5y) \big) \Big) =$$

$$= 100y^3 + (y^3-5) \cdot (y^6 - 10y^3 + 25 - y^6 + 5y^3 + y^2 \cdot 5y) =$$

$$= 100y^3 + (y^3-5) \cdot 25 = 100y^3 + 25y^3 - 125 = 125y^3 - 125$$

$$\begin{aligned} \text{Res}\,(f(x), g(x)) = 0 \Rightarrow 125y^3 - 125 &= 0 \\ 125y^3 &= 125 \\ y^3 &= 1 \\ y &= 1 \text{ v oboru reálných čísel} \end{aligned}$$

Dopočteme x: $y = 1$ dosadíme do 2. rovnice:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 - 5 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Ověříme, že $[2, 1]$ i $[-2, 1]$ jsou řešeními.

Dosadíme $[2, 1]$ do 1. rovnice:

$$\begin{aligned} L &= 8 + 2 - 10 \\ L &= 0 \\ P &= 0 \\ L &= P \end{aligned}$$

$[2, 1]$ je řešení.

Dosadíme $[-2, 1]$ do 1. rovnice:

$$\begin{aligned} L &= -8 - 2 - 10 \\ L &= -20 \\ P &= 0 \\ L &\neq P \end{aligned}$$

$[-2, 1]$ není řešení.

8. Množiny bodů dané vlastnosti

Aplikaci výše popsané teorie je možné ilustrovat na řešení následujících příkladů:

Příklad 14: *Je dána úsečka AB a přímka p. Určete množinu průsečíků výšek H trojúhelníku ABC, jestliže se bod C pohybuje po dané přímce p.*

Příklad 15: *Je dána kružnice k se středem O a poloměrem a. Libovolným bodem $M = [u, v] \in k$ veďte kolmice k průměrům kružnice k v souřadnicových osách x, y a jejich paty označte X, Y. K úsečce XY sestrojte kolmici vedenou bodem $M = [u, v]$ a její patu označte $P = [p, q]$. Určete křivku, která je množinou všech těchto pat P kolmic, pokud se M pohybuje po kružnici k.*

Příklad 16: *Je dána úsečka AB a bod C, který leží na kružnici k se středem v bodě A a poloměrem AB. Určete množinu průsečíků výšek H trojúhelníku ABC, pohybuje-li se bod C po kružnici.*

Příklad 17: *Jsou dány dvě na sebe kolmé přímky k, l, bod O je jejich průsečík. Bod A leží ve vzdálenosti b od přímky k a ve vzdálenosti a od přímky l. Pro libovolný bod M ležící na l sestrojme bod N na k tak, že MN je kolmá na AM. Určete množinu všech bodů paty kolmic P, sestrojené z O na MN, pokud se bod M pohybuje po přímce l.*

Podrobné řešení s využitím softwaru GeoGebra je popsáno v kapitole 4 práce.

Příloha 2

Řešení soustav polynomiálních rovnic a jejich aplikace při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti

Učební a metodický materiál je určen budoucím učitelům matematiky na SŠ a učitelům, kteří pracují s potenciálnímu řešiteli MO. Jeho části mohou být využity i pro samostudium řešitelům MO.

Téma: Řešení soustav polynomiálních rovnic a jejich aplikace při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti.

Cíle: Seznámení žáků s řešením soustav polynomiálních rovnic metodou rezultantů a Gröbnerových bází a seznámení se s programem GeoGebra. Hlavní cíl je řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti a upozornění na možná úskalí při řešení.

Motivace: Pokud zadáme soustavu polynomiálních rovnic do nějakého matematického programu (GeoGebra, Maple a další), získáme řešení. Žáci by mohli znát algoritmus, který matematické programy používají, ne se jen spokojit s výsledkem.

Zpracování: Po zavedení základních pojmů o metodě rezultantů a Gröbnerových bází doporučuji řešit s žáky následující typy příkladů.

Příklad 1: *V oboru komplexních čísel vyřešíme soustavu rovnic:* (Hora [34])

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2, \\ x+2y-z &= -4, \\ x^2+y^2+z^2 &= 12. \end{aligned}$$

Řešení:

V této části vycházíme z publikace (Hora [34]).

Označme polynomy:

$$\begin{aligned} g_1 &= x+y+z-2 &= 0, \\ g_2 &= x+2y-z+4 &= 0, \\ g_3 &= x^2+y^2+z^2-12 &= 0. \end{aligned}$$

g_1, g_2, g_3 jsou polynomy o třech neznámých x, y, z. Máme množinu $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ a množinu dvojic indexů těchto polynomů $B = \{[1,2],[1,3],[2,3]\}$.

Uspořádáme si jednotlivé tzv. monomy, tj. výrazy $x^n y^m$. Využijeme tzv. čisté lexikografické uspořádání:

Definice 1: *(Čisté)* lexikografické uspořádání monomů (pure lexicographic ordering) $<_L$ je definováno takto:
$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} <_L x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$, *právě když existuje* $m \in N$ takové, že $i_m < j_m$ *a zároveň* $i_k < j_k$ pro $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$.

Lexikografické uspořádání je analogické slovníkovému. Obdobně, jako když zjišťujeme, které ze slov bude ve slovníku uvedeno dříve, porovnáme nejprve první písmena; jsou-li stejná, porovnáme druhá písmena. Kdyby i ta byla stejná, porovnáme třetí atd.

Příklad: Pro monomy $x^3y^2z\ u^3$ a $x^3y^2z^2u^2$ platí: $x^3y^2z\ u^3 <_L x^3y^2z^2u^2$. Uspořádané čtveřice exponentů $[3, 2, 1, 3]$ a $[3, 2, 2, 2]$ mají shodné první dvě složky, a tak se rozhodne až podle třetí složky, kdy $1 < 2$.

Každý z členů vyskytujících se v nějakém polynomu f můžeme chápat jako součin reálného čísla a nějakého monomu. Největší z monomů vyskytujících se v polynomu f nazveme *vedoucím monomem polynomu* f a budeme jej značit $\mathrm{LM}(f)$ a číselný koeficient v tomto monomu se vyskytující nazveme *vedoucím koeficientem polynomu* f a budeme jej značit $\mathrm{LC}(f)$.

Vedoucí monom (angl. leading monomial) polynomu f označovaný $\mathrm{LM}\,(f)$ je největší monom v polynomu f vzhledem k uspořádání $\leqq$.

Vedoucí koeficient (angl. leading coefficient) polynomu f označovaný $\mathrm{LC}\,(f)$ je koeficient u jeho vedoucího monomu.

Vedoucí člen (angl. leading term) označovaný $\mathrm{LT}\,(f)$ je $\mathrm{LT}\,(f) = \mathrm{LC}\,(f) \cdot \mathrm{LM}\,(f)$.

V našem případě je vedoucím monomem v polynomu $f_1 = x + y + z - 2$ prvek x a vedoucím koeficientem je 1. V polynomu $f_2 = x + 2y - z - 4$ je vedoucí monom také x a vedoucí koeficient také 1. V polynomu $f_3 = x^2 + y^2 + z^2 - 12$ je vedoucí monom x^2 a vedoucí koeficient také 1.

Snažíme se redukovat termy

Definice 2: *S-polynomem polynomů* p, q nazýváme polynom

$$\mathrm{Spoly}(p, q) = \mathrm{LCM}(\mathrm{LT}(p), \mathrm{LT}(q)) \cdot (\frac{p}{\mathrm{LT}(p)} - \frac{q}{\mathrm{LT}(q)}).$$

Zde LCM značí nejmenší společný násobek, tj. první činitel v součinu na pravé straně je nejmenším společným násobkem vedoucích členů polynomů p, q.

Věta 1: (Buchbergerovo kritérium Gröbnerovy báze). $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ je Gröbnerova báze, právě když pro všechny dvojice indexů $i, j (i \neq j)$ dělení S-polynomů $S(g_i, g_j)$ prvky (polynomy) báze G (v jistém uspořádání) má vždy nulový zbytek ($r = 0$).

Věta 2: (Buchbergerův algoritmus určení Gröbnerovy báze). Gröbnerovu bázi $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ lze sestrojit konečným počtem kroků podle algoritmu:

1. Vypočteme S-polynomy pro každou dvojici polynomů z množiny $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$ a určíme pro každý z nich zbytky po dělení polynomy $f_1, f_2, \ldots, f_s$.

2. Jestliže jsou všechny zbytky r po těchto děleních rovny nule ($r = 0$), pak jsme získali Gröbnerovu bázi G ($G = F$). Pokud je některý z těchto zbytků r nenulový, přidáme jej do původní množiny F a pro tuto rozšířenou množinu F' opakujeme stejný postup algoritmických kroků 1., 2. Opakování tohoto postupu provádíme tak dlouho, až všechny zbytky r budou nulové. Pak $G = F'$.

Věta 3: (Nutná a postačující podmínka pro Gröbnerovu bázi).

Báze $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ je Gröbnerovou bází, právě když pro všechna $i, j (i \neq j)$ platí

$$\text{Spoly}(g_i, g_j) \underset{G}{\rightarrow} 0.$$

Přitom postačující podmínkou pro redukci S-polynomu na nulu vyjadřuje následující věta, jež představuje kritérium Gröbnerovy báze alternativní k Buchbergerovu kritériu.

Věta 4: (Alternativní kritérium Gröbnerovy báze). Nechť množina polynomů G je konečná a existují takové polynomy $g_i, g_j \in G$, pro něž platí

$$\text{LCM}\,(\text{LM}\,(g_i), \text{LM}\,(g_j)) = \text{LM}\,(g_i) \cdot \text{LM}\,(g_j).$$

Pak je $\text{Spoly}(g_i, g_j) \underset{G}{\rightarrow} 0$, tj. množina G je Gröbnerovou bází.

Pokračujeme ve výpočtu:

$$\text{Spoly}(g_1, g_2) = g_1 - g_2 = x + y + z\ - 2 - x - 2y + z\ - 4 = -y + 2z - 6.$$

Tento polynom označíme g_4 a přidáme do množiny G, $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$. Množinu B doplníme o dvojice $[1, 4]$, $[2, 4]$ a $[3, 4]$.

Z množiny B vezmeme dvojici $[1, 3]$ a vypočteme:

$$\text{Spoly}(g_1, g_3) = x \cdot g_1 - g_3 = xy + xz - 2x - y^2 - z^2 + 12 = p.$$

Můžeme tento polynom nějak zredukovat?

Polynom p se redukuje modulo q, jestliže v polynomu p existuje monom m, který je dělitelný vedoucím členem $LT(q)$ polynomu q. Za těchto předpokladů se polynom p redukuje na $\bar{p} = p - \frac{m}{LT(q)} \cdot q$. Píšeme pak $p \rightarrow_q p - \frac{m}{LT(q)} \cdot q = \bar{p}$ nebo stručně $p \rightarrow_q \bar{p}$.

Obecněji, nechť $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ je jistá množina polynomů. Řekneme, že *polynom p se redukuje modulo Q*, jestliže existuje polynom $q_i \in Q$ takový, že $p \rightarrow_{q_i} \bar{p}$.

Pokud žádný monom polynomu p není dělitelný vedoucím monomem polynomu q, pak říkáme, že *polynom p je v normálním tvaru vzhledem ke q*. Obdobně říkáme, že *polynom p je v normálním tvaru vzhledem k množině $Q =$ $= \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$*, jestliže žádný monom v polynomu p není dělitelný žádným z vedoucích monomů polynomů q_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Provedeme redukci polynomu p modulo G:

$p \to_G p + x \cdot g_4 = 3xz - 8x - y^2 - z^2 + 12$, budeme pokračovat:

$3xz - 8x - y^2 - z^2 + 12 - 3xz - 3yz - 3z^2 + 6z =$

$= -8x - y^2 - 3yz - 4z^2 + 6z + 12 + 8x + 8y + 8z - 16 =$

$= -y^2 - 3yz + 8y - 4z^2 + 14z - 4 + y^2 - 2yz + 6y =$

$= -5yz + 14y - 4z^2 + 14z - 4 + 5yz - 10z^2 + 30z =$

$= 14y - 14z^2 + 44z - 4 - 14y + 28z - 84 =$

$= -14z^2 + 72z - 88.$

Tento polynom označíme g_5. Do množiny B přidáme dvojice $[1,5], [2,5], [3,5], [4,5]$.

Vypočteme $\mathrm{Spoly}(g_2, g_3) = x \cdot g_2 - g_3 = 2xy - xz + 4x - y^2 - z^2 + 12 = p_2$. Provedeme opět redukci tohoto polynomu p_2.

$p_2 - 2y \cdot g_1 = 2xy - xz + 4x - y^2 - z^2 + 12 - 2xy - 2y^2 - 2yz + 4y =$

$= -xz + 4x - 3y^2 - 2yz + 4y - z^2 + 12 + xz + yz + z^2 - 2z =$

$= 4x - 3y^2 - yz + 4y - 2z + 12 - 4x - 4y - 4z + 8 =$

$= -3y^2 - yz - 6z + 20 + 3y^2 - 6yz + 18y =$

$= 18y - 14z^2 + 36z + 20 - 18y + 36z - 108 =$

$= -14z^2 + 72z - 88 + 14z^2 - 72z + 88 =$

$= 0.$

Do množiny G nepřidáváme žádný polynom.

Následující kritérium nám ušetří čas:

Kritérium 1: Je-li $[i, j] \in B$ taková dvojice indexů, že pro vedoucí členy polynomů $f_i, f_j \in G$ platí

$$\mathrm{LCM}(\mathrm{LT}(f_i), \mathrm{LT}(f_j)) = \mathrm{LT}(f_i) \cdot \mathrm{LT}(f_j),$$

pak je $\mathrm{normalf}(\mathrm{Spoly}(f_i, f_j), \{f_i, f_j\}) = 0$.

Podle kritéria 1 můžeme vyškrtnout dvojice $[1,4], [2,4], [3,4]$ i $[1,5], [2,5], [3,5], [4,5]$.

Získali jsme:

$G = \{x + y + z - 2, x + 2y - z + 4, x^2 + y^2 + z^2 - 12, -y + 2z - 14z^2 + 72z - 88\}$.

Získaná Gröbnerova báze G bývá často větší, než je nutné. Můžeme ji ještě zredukovat. Je možné získat Gröbnerovu bázi redukovanou a monickou, a to provedením těchto kroků:

1. odstranění „přebytečných" prvků

   foreach $g \in G$ do {

   if there exist $p \in G - \{g\}$ such that $\mathrm{LT}(p) \,/\, \mathrm{LT}(g)$

   then $G \leftarrow G - \{g\}$

   }

2. redukovaná, monická Gröbnerova báze

   foreach $g \in G$ do {

   $g \leftarrow \text{normalf}(g, G - \{g\})$

   $g \leftarrow \frac{1}{\text{LC}(g)} \cdot g$

   }

Věta 5: Nechť je dána soustava polynomiálních rovnic

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

a buď $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$ Gröbnerova báze při jistém přípustném uspořádání monomů. Pak soustava

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ g_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

je ekvivalentní s původní soustavou rovnic.

Poslední výpočty:

Projdeme část algoritmu a zjistíme, které polynomy by bylo možné vyškrtnout. $\text{LT}(g_2)/\text{LT}(g_1)$, vyškrtneme tedy polynom g_1 a $\text{LT}(g_2)/\text{LT}(g_3)$, vyškrtneme polynom g_3. $G = \{x+2y-z\ +4, y-2z+6, z^2 - \frac{36}{7}z + \frac{44}{7}\}$. Získaná báze je redukovaná a monická.

Z rovnice $z^2 - \frac{36}{7}z + \frac{44}{7} = 0$ získáme kořeny $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{22}{7}$.

Z dalších rovnic vypočteme y a x.

Řešení: $[2, -2, 2]$, $[-\frac{10}{7}, \frac{2}{7}, \frac{22}{7}]$.

Redukce polynomů bývá zdlouhavá a snadno se udělá chyba. Využijme větu 2 (Buchbergerův algoritmus určení Gröbnerovy báze). Vypočteme opět $\text{Spoly}(g_1, g_2)$, $\text{Spoly}(g_1, g_3)$, $\text{Spoly}(g_2, g_3)$. Pokud máme $g_4 = \text{Spoly}(g_1, g_2) = -y + 2z - 6$. Po dělení prvky množiny G dostaneme nulu a zbytek $-y + 2z - 6$. $\text{Spoly}(g_1, g_2) = xy + xz - 2x - y^2 - z^2 + 12$ a budeme dělit polynomy g_1, g_2, g_3, g_4.

$$(xy + xz - 2x - y^2 - z^2 + 12) : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z - 2 \\ x + 2y - z\ + 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 12 \\ -y + 2z - 5 \\ -14z^2 + 72z - 88 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} y + z - 2 \\ \\ \\ \\ 2y + 6z - 16 \end{array} \right.$$

$$
\begin{array}{l}
-(xy + y^2 + yz - 2y) \\
\hline
xz - 2x - 2y^2 - yz + 2y - z^2 + 12 \\
-(xz + yz + z^2 - 2z) \\
\hline
-2x - 2y^2 - 2yz + 2y - 2z^2 + 2z + 12 \\
-(-2x - 2y - 2z + 4) \\
\hline
-2y^2 - 2yz + 4y - 2z^2 + 4z + 8 \\
-(-2y^2 + 4yz - 12y) \\
\hline
-6yz + 16y - 2z^2 + 4z + 8 \\
-(-6yz + 12z^2 - 36z \\
\hline
16y - 14z^2 + 40z + 8 \\
-(16y - 32z + 96) \\
\hline
-14z^2 + 72z - 88
\end{array}
$$

Tento zbytek $-14z^2 + 72z - 88$ označíme g_5.

Vypočteme $\mathrm{Spoly}(g_2, g_3) = 2xy - xz + 4x - y^2 - z^2 + 12$ a dělíme prvky množiny G:

$$
(2xy - xz + 4x - y^2 - z^2 + 12) : \begin{cases} x + y + z \ - 2 \\ x + 2y - z \ + 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 12 \\ -y + 2z - 6 \\ -14z^2 + 72z - 88 \end{cases} = \begin{cases} 2y - z \ + 4 \\ \\ \\ 3y + 7z - 18 \\ 1 \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{l}
-(2xy + 2y^2 + 2yz - 4y) \\
\hline
-xz + 4x - 3y^2 - 2yz + 4y - z^2 + 12 \\
-(-xz - yz - z^2 + 2z) \\
\hline
4x - 3y^2 - yz + 4y - 2z + 12 \\
-(4x + 4y + 4z - 8) \\
\hline
-3y^2 - yz - 6z + 20 \\
-(-3y^2 + 6yz - 18y) \\
\hline
-7yz + 18y - 6z + 20 \\
-(-7yz + 14z^2 - 42z) \\
\hline
18y - 14z^2 + 36z + 20 \\
-(18y - 36z + 108) \\
\hline
-14z^2 + 72z - 88 \\
-(-14z^2 + 72z - 88) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Příklad 2: (*MO 2021/22, 71. ročník, domácí kolo, kategorie A*):

V oboru komplexních čísel vyřešme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
xy + 1 &= z^2, \\
yz + 2 &= x^2, \\
zx + 3 &= y^2.
\end{aligned}
$$

Řešení:

Označme polynomy

$$
\begin{aligned}
f_1 &= xy - z^2 + 1, \\
f_2 &= -x^2 + yz + 2, \\
f_3 &= xz - y^2 + 3.
\end{aligned}
$$

Označme množinu $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ a množinu dvojic indexů těchto polynomů $B = \{[1,2], [1,3], [2,3]\}$.

V polynomu $f_1 = xy - z^2 + 1$ je vedoucí monom xy a vedoucí koeficient 1. V polynomu $f_2 = -x^2 + yz + 2$ je vedoucí monom x^2 a vedoucí koeficient -1, v polynomu $f_3 = xz - y^2 + 3$ je vedoucí monom xz a vedoucí koeficient 1.

Pro polynomy f_1, f_2 vezmeme $LCM(LT(f_1), LT(f_2)) = -x^2y$, pro polynomy f_1, f_3 vezmeme $LCM(LT(f_1), LT(f_3)) = xyz$ a pro polynomy f_2, f_3 vezmeme $LCM(LT(f_2), LT(f_3)) = -x^2z$.

Vypočteme S-polynomy pro jednotlivé dvojice našich polynomů:

$$\begin{aligned}\text{Spoly}(f_1, f_2) &= -x^2y\left[\tfrac{xy-z^2+1}{xy} - \tfrac{-x^2+yz+2}{-x^2}\right] = -x(xy-z^2+1) - y(-x^2+yz+2) = \\ &= xz^2 - x - y^2z - 2y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Spoly}(f_1, f_3) &= xyz\left[\tfrac{xy-z^2+1}{xy} - \tfrac{xz-y^2+3}{xz}\right] = z\ (xy - z^2 + 1) - y(xz - y^2 + 3) = \\ &= y^3 - 3y - z^3 + z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Spoly}(f_2, f_3) &= -x^2z\left[\tfrac{-x^2+yz+2}{-x^2} - \tfrac{xz-y^2+3}{xz}\right] = z\ (-x^2 + yz + 2) + x(xz - y^2 + 3) = \\ &= -xy^2 + 3x + yz^2 + 2z\end{aligned}$$

Polynom $\text{Spoly}(f_1, f_2)$ označme p. Provedeme redukci našeho polynomu p modulo F:

$$p \to_F p - \tfrac{xz^2}{xz} \cdot f_3 = p - z \cdot f_3 = xz^2 - x - y^2z - 2y - xz^2 + y^2z - 3z = -x - 2y - 3z$$

Tento polynom označíme f_4. Do množiny B přidáme dvojice $[1, 4]$, $[2, 4]$ a $[3, 4]$.

Polynom $\text{Spoly}(f_1, f_3) = y^3 - 3y - z^3 + z$ zredukovat nelze. Označíme jej f_5 a do množiny přidáme dvojice $[1, 5]$, $[2, 5]$, $[3, 5]$ a $[4, 5]$.

Dále označíme polynom $\text{Spoly}(f_2, f_3)$ jako p_2 a provedeme redukci polynomu p_2 modulo f_1:

$$p_2 \to_F p_2 - \tfrac{-xy^2}{xy} f_1 = p_2 + y \cdot f_1 = -xy^2 + 3x + yz^2 + 2z + xy^2 - yz^2 + y = 3x + y + 2z$$

Provedeme další redukci tohoto polynomu modulo f_4:

$$3x + y + 2z - \tfrac{3x}{-x} \cdot f_4 = 3x + y + 2z - 3x - 6y - 9z = -5y - 7z$$

Označme tento polynom f_6. Do množiny B přidáme dvojice $[1, 6]$, $[2, 6]$, $[3, 6]$, $[4, 6]$ a $[5, 6]$.

Podle Kritéria 1 můžeme vyškrtnout dvojice $[2, 5]$, $[3, 5]$, $[4, 5]$ a také $[2, 6]$, $[3, 6]$, $[4, 6]$. Pro tyto dvojice nemusíme počítat S-polynomy. Vypočteme jen

$\text{Spoly}(f_1, f_4)$, $\text{Spoly}(f_2, f_4)$, $\text{Spoly}(f_3, f_4)$, $\text{Spoly}(f_1, f_5)$, $\text{Spoly}(f_1, f_6)$ a $\text{Spoly}(f_5, f_6)$.

Nejprve tedy vypočteme:

$$\begin{aligned}\text{Spoly}(f_1, f_4) &= -xy\left(\tfrac{xy-z^2+1}{xy} - \tfrac{-x-2y-3z}{-x}\right) = -xy + z^2 - 1 + xy + 2y^2 + 3yz = \\ &= 2y^2 + 3yz + z^2 - 1\end{aligned}$$

Provedeme redukci polynomu $\text{Spoly}(f_1, f_4)$ modulo f_6:

$$2y^2 + 3yz + z^2 - 1 + \tfrac{2}{5}y(-5y - 7z) = 3yz + z^2 - 1 - \tfrac{14}{5}yz = \tfrac{1}{5}yz + z^2 - 1$$

Další redukce modulo f_6 je:

$$\tfrac{1}{5}yz + z^2 - 1 + \tfrac{1}{25}z(-5y - 7z) = \tfrac{18}{25}z^2 - 1$$

Tento polynom označíme f_7 a přidáme do množiny F.

Dále vypočteme:

$$\mathrm{Spoly}(f_2, f_4) = -x^2\left(\tfrac{-x^2+yz+2}{-x^2} - \tfrac{-x-2y-3z}{-x}\right) = -x^2 + yz + 2 + x^2 + 2xy + 3xz =$$
$$= 2xy + 3xz + yz + 2$$

Provedeme redukci polynomu $\mathrm{Spoly}(f_2, f_4)$ modulo f_1:

$$2xy + 3xz + yz + 2 - 2(xy - z^2 + 1) = 3xz + yz + 2z^2$$

Dále postupně provedeme několik redukcí vždy předem zredukovaného polynomu.
Redukce modulo f_3:

$$3xz + yz + 2z^2 - 3(xz - y^2 + 3) = 3y^2 + yz + 2z^2 - 9$$

Redukce modulo f_6:

$$3y^2 + yz + 2z^2 - 9 + \tfrac{3}{5}y(-5y - 7z) = -\tfrac{16}{5}yz + 2z^2 - 9$$

Redukce modulo f_6:

$$-\tfrac{16}{5}yz + 2z^2 - 9 - \tfrac{16}{25}z(-5y - 7z) = \tfrac{162}{25}z^2 - 9$$

Redukce modulo f_7:

$$\tfrac{162}{25}z^2 - 9 - 9(\tfrac{18}{25}z^2 - 1) = 0.$$

Vypočteme S-polynom $\mathrm{Spoly}(f_3, f_4)$:

$$\mathrm{Spoly}(f_3, f_4) = -xz\left(\tfrac{xz-y^2+3}{xz} - \tfrac{-x-2y-3z}{-x}\right) = -xz + y^2 - 3 + xz + 2yz + 3z^2 =$$
$$= y^2 + 2yz + 3z^2 - 3$$

Nyní provedeme redukci polynomu $\mathrm{Spoly}(f_3, f_4)$ modulo f_6:

$$y^2 + 2yz + 3z^2 - 3 + \tfrac{1}{5}y(-5y - 7z) = \tfrac{3}{5}yz + 3z^2 - 3$$

A teď uděláme několik redukcí předem zredukovaného polynomu.

Redukce modulo f_6:

$$\tfrac{3}{5}yz + 3z^2 - 3 + \tfrac{3}{25}z(-5y - 7z) = \tfrac{54}{25}z^2 - 3$$

Redukce modulo f_7:

$$\tfrac{54}{25}z^2 - 3 - 3(\tfrac{18}{25}z^2 - 1) = 0$$

Dále vypočteme:

$$\mathrm{Spoly}(f_1, f_5) = xy^3\left(\tfrac{xy-z^2+1}{xy} - \tfrac{y^3-3y-z^3+z}{y^3}\right) =$$
$$= xy^3 - y^2z^2 + y^2 - xy^3 + 3xy + xz^3 - xz = 3xy + xz^3 - xz - y^2z^2 + y^2$$

A vypočteme redukci polynomu $\mathrm{Spoly}(f_1, f_5)$ modulo f_1:

$$3xy + xz^3 - xz - y^2z^2 + y^2 - 3(xy - z^2 + 1) = xz^3 - xz - y^2z^2 + y^2 + 3z^2 - 3$$

Jeho postupné další redukce mají následující tvary:

Redukce modulo f_3:

$$xz^3 - xz - y^2z^2 + y^2 + 3z^2 - 3 - z^2(xz - y^2 + 3) = -xz + y^2 - 3$$

Redukce modulo f_3:

$$-xz + y^2 - 3 + (xz - y^2 + 3) = 0$$

Dále vypočteme:

$$\mathrm{Spoly}(f_1, f_6) = -5xy\left(\tfrac{xy-z^2+1}{xy} - \tfrac{-5y-7z}{-5y}\right) = -5xy + 5z^2 - 5 + 5xy + 7xz =$$
$$= 7xz + 5z^2 - 5$$

Provedeme redukci tohoto polynomu modulo f_4:

$$7xz + 5z^2 - 5 + 7z(-x - 2y - 3z) = -14yz - 16z^2 - 5$$

Dále pak provedeme redukci získaného polynomu modulo f_6:

$$-14yz - 16z^2 - 5 - \tfrac{14}{5}z(-5y - 7z) = -16z^2 - 5 + \tfrac{98}{5}z^2 = \tfrac{18}{5}z^2 - 5$$

Tento polynom zredukujeme modulo f_7:

$$\tfrac{18}{5}z^2 - 5 - 5\left(\tfrac{18}{25}z^2 - 1\right) = 0$$

Dále vypočteme:

$$\mathrm{Spoly}(f_5, f_6) = -5y^3\left(\tfrac{y^3-3y-z^3+z}{y^3} - \tfrac{-5y-7z}{-5y}\right) = -5y^3 + 15y + 5z^3 - 5z + 5y^3 + 7y^2z =$$
$$= 7y^2z + 15y + 5z^3 - 5z$$

Tento polynom zredukujeme modulo f_6:

$$7y^2z + 15y + 5z^3 - 5z + \tfrac{7}{5}yz(-5y - 7z) = -\tfrac{49}{5}yz^2 + 15y + 5z^3 - 5z$$

Výsledný polynom lze ještě zredukovat modulo f_6:

$$15y + 5z^3 - 5z - \tfrac{49}{5}yz^2 + 3(-5y - 7z) = -\tfrac{49}{5}yz^2 + 5z^3 - 26z$$

Další redukci tohoto polynomu provedeme použitím stejného polynomu f_6:

$$-\tfrac{49}{5}yz^2 + 5z^3 - 26z - \tfrac{49}{25}z^2(-5y - 7z) = 5z^3 - 26z + \tfrac{343}{25}z^3 = \tfrac{468}{25}z^3 - 26z$$

Poslední redukce předchozího polynomu modulo f_7 je:

$$\tfrac{468}{25}z^3 - 26z - \tfrac{26}{5}z\left(\tfrac{18}{5}z^2 - 5\right) = 0$$

Musíme vypočítat ještě S-polynom polynomů f_3 a f_7.

$$\mathrm{Spoly}(f_3, f_7) = \tfrac{18}{25}xz^2\left(\tfrac{xz-y^2+3}{xz} - \tfrac{\frac{18}{25}z^2-1}{\frac{18}{25}z^2}\right) = \tfrac{18}{25}xz^2 - \tfrac{18}{25}y^2z + \tfrac{54}{25}z - \tfrac{18}{25}xz^2 + x =$$
$$= x - \tfrac{18}{25}y^2z + \tfrac{54}{25}z$$

Nejprve tento polynom zredukujeme modulo f_4:

$$x - \tfrac{18}{25}y^2z + \tfrac{54}{25}z + (-x - 2y - 3z) = -\tfrac{18}{25}y^2z - 2y + \tfrac{54}{25}z - 3z = -\tfrac{18}{25}y^2z - 2y - \tfrac{21}{25}z$$

Další redukce budou použity na vždy nově získaný polynom.

Redukce modulo f_6:

f_6: $-\frac{18}{25}y^2z - 2y - \frac{21}{25}z - \frac{18}{125}yz(-5y - 7z) = -2y - \frac{21}{25}z + \frac{126}{125}yz^2$

Další redukce modulo f_6:

$-2y - \frac{21}{25}z + \frac{126}{125}yz^2 - \frac{2}{5}(-5y - 7z) = \frac{126}{125}yz^2 + \frac{49}{25}z$

Další redukce modulo f_7:

$\frac{126}{125}yz^2 + \frac{49}{25}z - \frac{7}{5}y\left(\frac{18}{25}z^2 - 1\right) = \frac{7}{5}y + \frac{49}{25}z$

Další redukce modulo f_6:

$\frac{7}{5}y + \frac{49}{25}z + \frac{7}{25}y(-5y - 7z) = 0$

Označme získanou množinu polynomů G:

$G = \{xy - z^2 + 1, -x^2 + yz + 2, xz - y^2 + 3, -x - 2y - 3z,$

$y^3 - 3y - z^3 + z, -5y - 7z, \frac{18}{25}z^2 - 1\}$

Získaná Gröbnerova báze G je často větší, než je nutné.

Projdeme nyní část „redukčního algoritmu“ a zjistíme, které polynomy vyškrtnout.

Jelikož $LT(f_4)|LT(f_1)$, neboli $-x|xy$, vyškrtneme tedy polynom f_1. Jelikož $LT(f_4)|LT(f_2)$, vyškrtneme i polynom f_2, a jelikož $LT(f_4)|LT(f_3)$, vyškrtneme také polynom f_3. (Zde znak | představuje dělitelnost.)

Získali jsme redukovanou bázi:

$G = \{-x - 2y - 3z, y^3 - 3y - z^3 + z, -5y - 7z, \frac{18}{25}z^2 - 1\}$

Z rovnice $\frac{18}{25}z^2 - 1 = 0$ získáme $z = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}$. Z rovnice $-5y - 7z$ dopočteme $y = \mp\frac{7}{3\sqrt{2}}$. Z rovnice $-x-2y-3z$ získáme $x = \mp\frac{1}{3\sqrt{2}}$. Dostáváme 2 řešení soustavy:

$\left[-\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{7}{3\sqrt{2}}, \frac{5}{3\sqrt{2}}\right]$ a $\left[\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{7}{3\sqrt{2}}, -\frac{5}{3\sqrt{2}}\right]$

Ukážeme ještě **druhý způsob získání Gröbnerovy báze**.

Využijeme Větu 2, vypočteme opět Spoly(f_1, f_2), Spoly(f_1, f_3), Spoly(f_2, f_3) a použijeme pseudodělení polynomů.

Vezmeme získaný polynom Spoly(f_1, f_2) a dělíme ho polynomy množiny F:

$$\begin{array}{l} (xz^2 - x - y^2z - 2y) \qquad : \left\{\begin{array}{l} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} \\ \\ z \end{array}\right. \\ \underline{-(xz^2 - y^2z + 3z)} \\ \quad -x - 2y - 3z \end{array}$$

Dále nelze dělit, polynom $xz^2 - x - y^2z - 2y$ můžeme vyjádřit jako:

$$z(xz - y^2 + 3) + (-x - 2y - 3z).$$

Získali jsme zbytek $-x - 2y - 3z$, který přidáme do množiny F.

Vezmeme další polynom Spoly(f_1, f_3) a dělíme polynomy množiny F:

$$(y^3 - 3y - z^3 + z) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xy - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ \\ 0 \end{cases}$$

$$\frac{0}{y^3 - 3y - z^3 + z}$$

Zbytek $y^3 - 3y - z^3 + z$ přidáme do množiny F.

Vezmeme Spoly(f_2, f_3) a provedeme další pseudodělení:

$$(-xy^2 + 3x + yz^2 + 2z) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \end{cases} = \begin{cases} -y \\ \\ \\ -3 \\ \\ \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} -(-xy^2 + yz^2 - y) \\ \hline 3x + y + 2z \\ -(3x + 6y + 9z) \\ \hline -5y - 7z \end{array}$$

Polynom $-xy^2 + 3x + yz^2 + 2z$ lze vyjádřit jako:

$$-y(xy - z^2 + 1) - 3(-x - 2y - 3z) - 5y - 7z.$$

Do množiny F přidáme další zbytek $-5y - 7z$.

Do původní množiny F jsme přidali polynomy:

$f_4 = -x - 2y - 3z$, $f_5 = y^3 - 3y - z^3 + z$ a $f_6 = -5y - 7z$

Všechny S-polynomy máme vypočtené v předchozím způsobu.

$$
(2y^2+3yz+z^2-1) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \\ -5y - 7z \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ \\ \\ \\ -\frac{2}{5}y - \frac{1}{25}z \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}
-(2y^2 + \frac{14}{5}yz) \\ \hline
\frac{1}{5}yz + z^2 - 1 \\
-\left(\frac{1}{5}yz + \frac{7}{25}z^2\right) \\ \hline
\frac{18}{25}z^2 - 1
\end{array}
$$

Tento zbytek $f_7 = \frac{18}{25}z^2 - 1$ přidáme do množiny F.

$$
(2xy+3xz+yz+2) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \\ -5y - 7z \\ \frac{18}{25}z^2 - 1 \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ \\ 3 \\ \\ \\ -\frac{3}{5}y + \frac{16}{25}z \\ 9 \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}
-(2xy - 2z^2 + 2 \\ \hline
3xz + yz + 2z^2 \\
-(3xz - 3y^2 + 9) \\ \hline
3y^2 + yz + 2z^2 - 9 \\
-(3y^2 + \frac{21}{5}yz) \\ \hline
-\frac{16}{5}yz + 2z^2 - 9 \\
-\left(-\frac{16}{5}yz - \frac{112}{25}z^2\right) \\ \hline
\frac{162}{25}z^2 - 9 \\
-\left(\frac{162}{25}z^2 - 9\right) \\ \hline
0
\end{array}
$$

$$
(y^2+2yz+3z^2-3) \quad : \begin{cases} xy-z^2+1 \\ -x^2+yz+2 \\ xz-y^2+3 \\ -x-2y-3z \\ y^3-3y-z^3+z \\ -5y-7z \\ \frac{18}{25}z^2-1 \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ \\ \\ \\ -\frac{1}{5}y-\frac{3}{25}z \\ 3 \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}
-(y^2+\frac{7}{5}yz) \\ \hline
\frac{3}{5}yz+3z^2-3 \\
-\left(\frac{3}{5}yz+\frac{21}{25}z^2\right) \\ \hline
\frac{54}{25}z^2-3 \\
-\left(\frac{54}{25}z^2-3\right) \\ \hline
0
\end{array}
$$

$$
(3xy+xz^3-xz-y^2z^2+y^2) \quad : \begin{cases} xy-z^2+1 \\ -x^2+yz+2 \\ xz-y^2+3 \\ -x-2y-3z \\ y^3-3y-z^3+z \\ -5y-7z \\ \frac{18}{25}z^2-1 \end{cases} = \begin{cases} 3 \\ \\ z^2-1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}
-(3xy-3z^2+3) \\ \hline
xz^3-xz-y^2z^2+y^2+3z^2-3 \\
-(xz^3-y^2z^2+3z^2) \\ \hline
-xz+y^2-3 \\
-(-xz+y^2-3) \\ \hline
0
\end{array}
$$

$$(7xz+5z^2-5) \quad : \begin{cases} xy-z^2+1\\ -x^2+yz+2\\ xz-y^2+3\\ -x-2y-3z\\ y^3-3y-z^3+z\\ -5y-7z\\ \frac{18}{25}z^2-1 \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ 7\\ \\ \\ -\frac{7}{5}y+\frac{49}{25}z\\ 26 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} -(7xz-7y^2+21)\\ \hline 7y^2+5z^2-26\\ -(7y^2+\frac{49}{5}yz)\\ \hline -\frac{49}{5}yz+5z^2-26\\ -(-\frac{49}{5}yz-\frac{343}{25}z^2)\\ \hline \frac{468}{25}z^2-26\\ -(\frac{468}{25}z^2-26)\\ \hline 0 \end{array}$$

$$(7y^2z+15y+5z^3-5z) \quad : \begin{cases} xy-z^2+1\\ -x^2+yz+2\\ xz-y^2+3\\ -x-2y-3z\\ y^3-3y-z^3+z\\ -5y-7z\\ \frac{18}{25}z^2-1 \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ \\ \\ \\ -\frac{7}{5}yz+\frac{49}{25}z^2-3\\ 26z \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} -(7y^2z+\frac{49}{5}yz^2)\\ \hline -\frac{49}{5}yz^2+15y+5z^3-5z\\ -(\frac{49}{5}yz^2-\frac{343}{25}z^3)\\ \hline 15y+\frac{468}{25}z^3-5z\\ -(15y+21z)\\ \hline \frac{468}{25}z^3-26z\\ -(\frac{468}{25}z^3-26z)\\ \hline 0 \end{array}$$

Spoly(f_3, f_7) máme také vypočtený v předchozí části.

$$(x-\frac{18}{25}y^2z+\frac{54}{25}z) \quad : \begin{cases} xy-z^2+1 \\ -x^2+yz+2 \\ xz-y^2+3 \\ -x-2y-3z \\ y^3-3y-z^3+z \\ -5y-7z \\ \frac{18}{25}z^2-1 \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ \\ -1 \\ \\ \frac{18}{125}yz+\frac{2}{5}-\frac{126}{625}z^2 \\ -\frac{49}{25}z \end{cases}$$

$$\begin{array}{c}
-(x+2y+3z) \\ \hline
-\frac{18}{25}y^2z-2y-\frac{21}{25}z \\
-(-\frac{18}{25}y^2z-\frac{126}{125}yz^2) \\ \hline
-2y+\frac{126}{125}yz^2-\frac{21}{25}z \\
-(-2y-\frac{14}{5}z) \\ \hline
\frac{126}{125}yz^2+\frac{49}{25}z \\
-(\frac{126}{125}yz^2+\frac{882}{625}z^3) \\ \hline
-\frac{882}{625}z^3+\frac{49}{25}z) \\
-(-\frac{882}{625}z^3+\frac{49}{25}z) \\ \hline
0
\end{array}$$

Získali jsme tedy Gröbnerovu bázi:

$$G=\{xy-z^2+1,\ -x^2+yz+2,\ xz-y^2+3, y^3-3y-z^3+z,\ -5y-7z,\ \frac{18}{,}25z^2-1\}.$$

Redukovanou bázi a řešení soustavy rovnic bychom získali obdobně jako v předchozím způsobu.

Příklad 3: *Vyřešte soustavu rovnic:* (Švrček [82])

$$\begin{aligned} x^2+1 &= 2y, \\ y^2+1 &= 2x. \end{aligned}$$

1. způsob řešení:

Z první rovnice si vyjádříme $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$ a dosadíme do druhé.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}(x^4+2x^2+1)+1 &= 2x \\ x^4+2x^2+5 &= 8x \\ x^4+2x^2-8x+5 &= 0 \end{aligned}$$

Odhadneme první kořen $x_1=1$.

Rovnici upravíme na součinový tvar: $(x-1)(x^3+x^2+3x-5)=0$.
Odhadneme druhý kořen $x_2=1$.
Rovnici upravíme: $(x-1)(x-1)(x^2+2x+5)=0$.
Z kvadratické rovnice $x^2+2x+5=0$ dopočteme poslední dva kořeny:

$$x_{3,4}=\tfrac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i,\ x_3=-1+2i,\ x_4=-1-2i.$$

Dopočteme y a dostáváme řešení: $P=\{[1,1]\}$ v $\mathbb{R}$.
V oboru komplexních čísel pak máme řešení $[1,1]$, $[-1-2i,-1+2i]$ a $[-1+2i,$ $-1-2i]$.

2. způsob řešení:

Rovnice od sebe odečteme:

$$x^2-y^2=2(y-x).$$

Upravíme na následující tvar:

$$(x-y)(x+y+2)=0.$$

$a)$
$$\begin{aligned} x &= y\\ x^2-2x+1 &= 0\\ (x-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení: $[1,1]$.

$b)$
$$\begin{aligned} y &= -x-2\\ (-x-2)^2+1 &= 2x\\ x^2+4x+5-2x &= 0\\ x^2+2x+5 &= 0 \end{aligned}$$

Dostaneme řešení: $\{[1,1],[-1-2i,-1+2i],[-1+2i,-1-2i]\}$.

3. způsob řešení:

$$\begin{array}{rcl} x^2+1 &=& 2y\\ y^2+1 &=& 2x\\ \hline x^2+y^2-2x-2y+2 &=& 0\\ (x-1)^2+(y-1)^2 &=& 0\,(\text{metoda čtverců})\\ P &=& [1,1]\quad P'\supseteq P\,(\text{nutná zkouška}) \end{array}$$

4. způsob řešení (metoda nerovností a odhadů):

$$\begin{aligned} 2x &= y^2+1\\ \tfrac{y^2+1}{2} &= x \end{aligned}$$

Mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí:

$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad \forall a, b \geqq 0$

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &\geqq 4ab \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geqq 0 \\ (a-b)^2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2y \\ y^2 + 1 &= 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{y^2+1}{2} &\geqq \sqrt{y^2 \cdot 1} \\ y^2 + 1 &\geqq 2\sqrt{y^2} = 2|y| = 2y = x^2 + 1 \\ y^2 + 1 &\geqq x^2 + 1 \geqq 2\sqrt{x^2} = 2x \\ 2x \geqq 2y &\geqq 2x \\ 2x = 2y = 2x &\Rightarrow \underline{y = x} \end{aligned}$$

Obdobně jako v předchozím způsobu.

5. způsob řešení (pomocí Gröbnerových bází):

Použijeme lexikografické uspořádání $\angle_L$, kde $x < y$.

Máme 2 polynomy: $g_1 = x^2 - 2y + 1$, $g_2 = -2x + y^2 + 1$.

Vypočteme S-polynom:

$\text{Spoly}(g_1, g_2) = 2g_1 + xg_2 = 2x^2 - 4y + 2 - 2x^2 + xy^2 + x = xy^2 + x - 4y + 2 = p_1$

$p_1 \to_{g_2} xy^2 + x - 4y + 2 - xy^2 + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{2}y^2 = x + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{2}y^2 - 4y + 2 = p_2$

$p_2 \to_{g_2} p_2 + \frac{1}{2}g_2 = \frac{1}{2}y^4 + y^2 - 4y + \frac{5}{2}$

$g_3 = y^4 + 2y^2 - 8y + 5$

$B = \{[1,2], [1,3], [2,3]\} \longrightarrow G = \{g_1, g_2, g_3\}$ – Gröbnerova báze ideálu

Redukovaná Gröbnerova báze je $G = \{g_2, g_3\}$.

Pokud polynom g_2 vydělíme -2, pak získáme monickou bázi.

$$\begin{aligned} -2x + y^2 + 1 &= 0 \\ y^4 + 2y^2 - 8y + 5 &= 0 \end{aligned}$$

2. polynom je jen v jedné proměnné. Má dvojnásobný kořen $y_{1,2} = 1$.

$$\begin{aligned} (y-1)^2 \cdot (y^2 - y - 5) &= 0 \\ (y^2 - 2y + 1) \cdot (y^2 + 2y + 5) &= 0 \\ y_{3,4} &= \tfrac{-2 \pm 4i}{2} = \underline{-1 \pm 2i} \end{aligned}$$

Z vyjádření, že $x = \frac{y^2+1}{2}$ dopočteme neznámou x.

Dostaneme řešení: $P = \{[1,1]\}, [-1+2i, -1-2i], [-1-2i, -1+2i]\}$.

Metoda rezultantů

Rezultant polynomů nabyl výrazně na významu v souvislosti s rozšířením různých programů počítačové algebry (Maple, Mathematica), je důležitou složkou mnoha algoritmů užívayćh v těchto programech. Budeme definovat pojem rezultant pro dva polynomy f, g jedné proměnné x.

Nechť $f, g \in T[x]$ jsou polynomy takové, že

$$\begin{aligned} f &= a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_p \neq 0, \\ g &= b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad\ \ b_q \neq 0. \end{aligned}$$

Nechť $f(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ a $g(x) = b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, kde $a_i, b_j \in T$, jsou dva polynomy nenulových stupňů ($p, q \in N$). Determinant

$$Res(f,g) = \begin{vmatrix} a_p & a_{p-1} & \ldots & a_0 & & & & \\ \cdot & a_p & a_{p-1} & \ldots & a_0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & a_p & a_{p-1} & \ldots & a_0 \\ b_q & b_{q-1} & \ldots & b_0 & & & & \\ \cdot & b_q & b_{q-1} & \ldots & b_0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & b_q & b_{q-1} & \ldots & b_0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{q řádků} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{p řádků} \end{matrix}$$

nazýváme **rezultantem** polynomů f, g.

Tento determinant zavedl anglický matematik **James Joseph Sylvester** (1814 – 1897). V prvních q řádcích tohoto determinantu jsou koeficienty a_i, $i = 0, 1, \ldots, p$ (vždy v následujícím řádku „posunuté o jedno místo vpravo“), v dalších p řádcích pak obdobně řazené koeficienty b_i, $i = 0, 1, \ldots, q$ a na zbývající místa v determinantu se píší nuly.

Věta 6:

Nechť f a g jsou polynomy v jedné proměnné x. Rezultant $Res(f, g)$ je polynom, který nabývá nulové hodnoty ($Res(f, g) = 0$) právě tehdy, když f a g mají společného dělitele.

Ukážeme řešení soustavy rovnic následujícího příkladu pomocí metody rezultantů:

Příklad 4: *V oboru reálných čísel řešme soustavu rovnic druhého stupně:*

$$\begin{aligned} 9x^2 + 16y^2 - 72x - 32y + 15 &= 0, \\ 4x^2 - y^2 - 32x + 2y + 31 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení:

Máme polynomy:

$$\begin{aligned} f_1 &= 9x^2 + 16y^2 - 72x - 32y + 15, \\ f_2 &= 4x^2 - y^2 - 32x + 2y + 31. \end{aligned}$$

Vytvoříme rezultant vzhledem k proměnné x:

$$\mathrm{Res}(f_1, f_2, x) = \begin{vmatrix} 9 & -72 & 16y^2 - 32y + 15 & 0 \\ 0 & 9 & -72 & 16y^2 - 32y + 15 \\ 4 & -32 & -y^2 + 2y + 31 & 0 \\ 0 & 4 & -32 & -y^2 + 2y + 31 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 9 & -72 & 16y^2 - 32y + 15 \\ -32 & -y^2 + 2y + 31 & 0 \\ 4 & -32 & -y^2 + 2y + 31 \end{vmatrix} +$$

$$+4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -72 & 16y^2 - 32y + 15 & 0 \\ 9 & -72 & 16y^2 - 32 + 15 \\ 4 & -32 & -y^2 + 2y + 31 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \cdot (73y^4 - 292y^3 + 16498y^2 - 32412y - 49275) +$$

$$+4 \cdot (1168y^4 - 4672y^3 - 39785y^2 + 88914y + 122859) =$$

$$= 5329y^4 - 21316y^3 - 10658y^2 + 63948y + 47961$$

Podle věty 18 mají polynomy f_1 a f_2 společného dělitele, pokud $5329y^4 - 21316y^3 - 10658y^2 + 63948y + 47961 = 0$

Po vydělení číslem 5329:

$$y^4 - 4y^3 - 2y^2 + 12y + 9 = 0$$

Pomocí Hornerova schématu najdeme kořeny polynomu:

	1	−4	−2	12	9
3	0				
	1	−1	−5	−3	0

	1	−1	−5	−3
3	0			
	1	2	1	0

Získáme kvadratickou rovnici: $y^2 + 2y + 1 = 0$, která má kořeny:

$$y_3 = -1, \quad y_4 = -1.$$

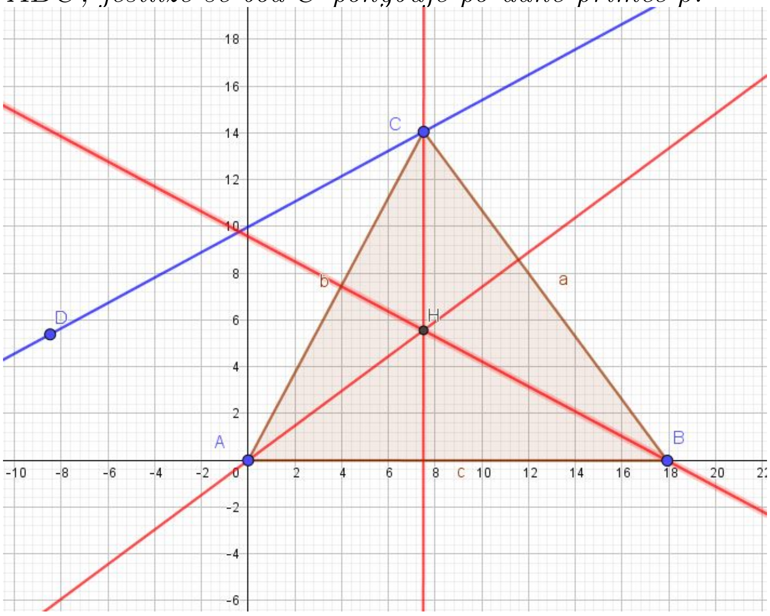
Po dopočtení x dostaneme výsledné řešení: $P = \{[1,3],[7,3],[1,-1],[7,-1]\}$.

Množiny bodů dané vlastnosti

Při řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti je výhodné použít počítač - např. software GeoGebra. Pomůže s eliminací proměnných a ukáže, o jakou množinu se jedná.

Ukážeme řešení úloh na množiny bodů dané vlastnosti

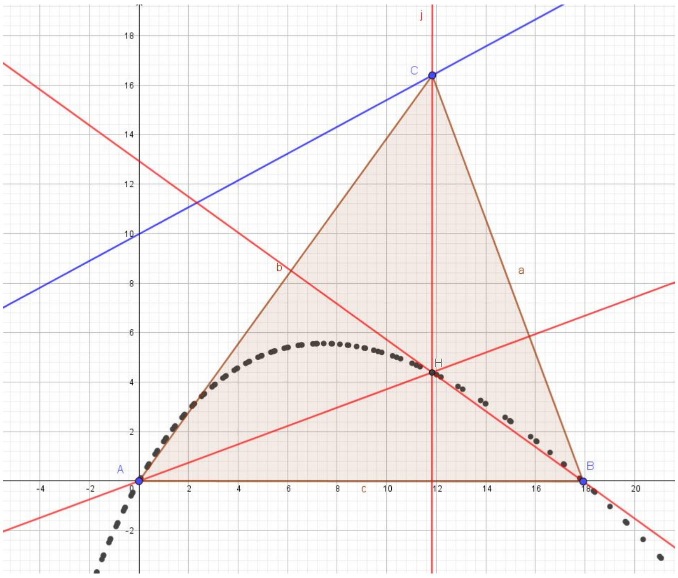
Příklad 5: *Je dána úsečka AB a přímka p. Určete množinu průsečíků výšek H trojúhelníku ABC, jestliže se bod C pohybuje po dané přímce p.*



Obrázek 86: **Zadání příkladu 5**

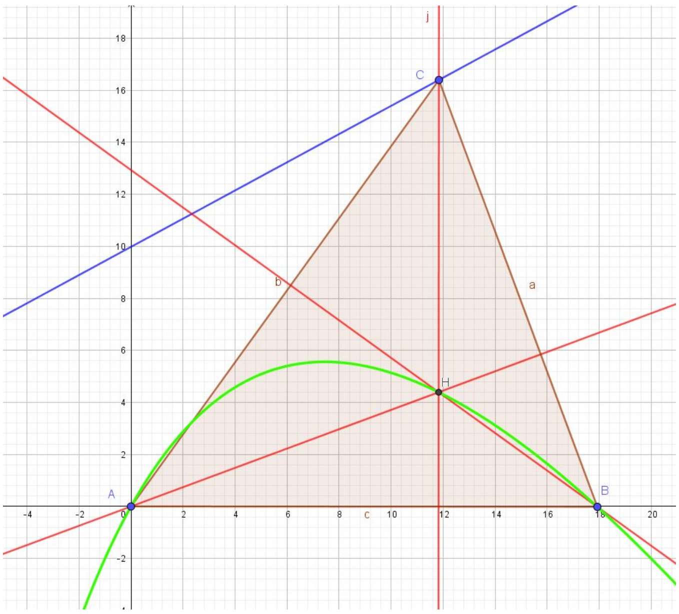
Řešení:

1. Zjistíme množinu bodů pomocí příkazu Stopa v GeoGebře. To nám napoví, o jakou množinu by se mohlo jednat.



Obrázek 87: **Množina bodů - Stopa, příklad 5**

2. Lze použít i příkaz Locus v GeoGebře (také napoví, o jakou množinu bodů se jedná).



Obrázek 88: **Množina bodů - Locus, příklad 5**

Vypadá to, že hledanou množinou je parabola. Nemůžeme to ale říci, mohla by to být hyperbola, ale může to být i úplně jiná množina bodů.

3. Provedeme výpočet. Sestavíme rovnice.

Zavedeme soustavu souřadnic.

Zvolíme $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [u, v]$, $H = [p, q]$.

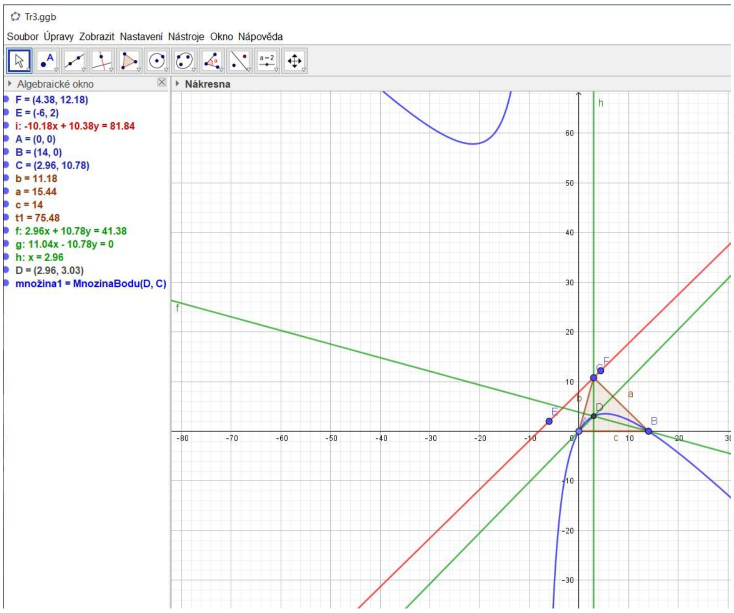
$$
\begin{array}{ll}
HC \perp AB: & p - u = 0 \\
HA \perp BC: & p(u - a) + qv = 0 \\
C \in p: & ku + lv + m = 0 \\
 & v = -\frac{k}{l}u - \frac{m}{l}
\end{array}
$$

Eliminujeme u, v.

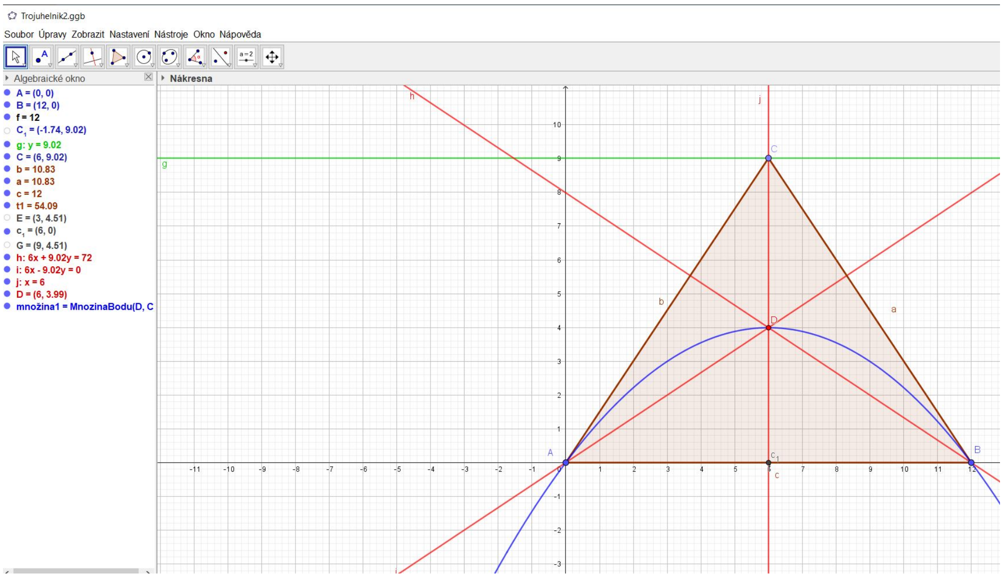
$$
\begin{aligned}
p &= u \\
p(p - a) + qv &= 0 \\
p(p - a) + q\left(-\frac{k}{l}p - \frac{m}{l}\right) &= 0 \\
lp^2 - lpa - kpq - mq &= 0
\end{aligned}
$$

Dostali jsme polynomiální rovnici 2. stupně. Z teorie kuželoseček plyne, že se jedná o **hyperbolu**.

Pokud je přímka rovnoběžná s přímkou $AB \Rightarrow v = -\frac{m}{l}$ dostaneme rovnici $lp^2 - lpa - qm = 0$. Jedná se o **parabolu**.



Obrázek 89: **Hyperbola, příklad 5**



Obrázek 90: **Parabola, příklad 5**

Závěr: Zde se ukazuje, jak je důležitá rovnice množiny bodů. Bez ní nejsme schopni určit, o jakou množinu bodů se jedná.

Při využití GeoGebry není hned jasné, že se jedná o hyperbolu, je dobře vidět jen jedna větev hyperboly.

Ještě je možné řešit speciální polohy přímky, tj. když přímka p bude strana trojúhelníku ABC nebo pokud přímka p bude kolmá na stranu AB.

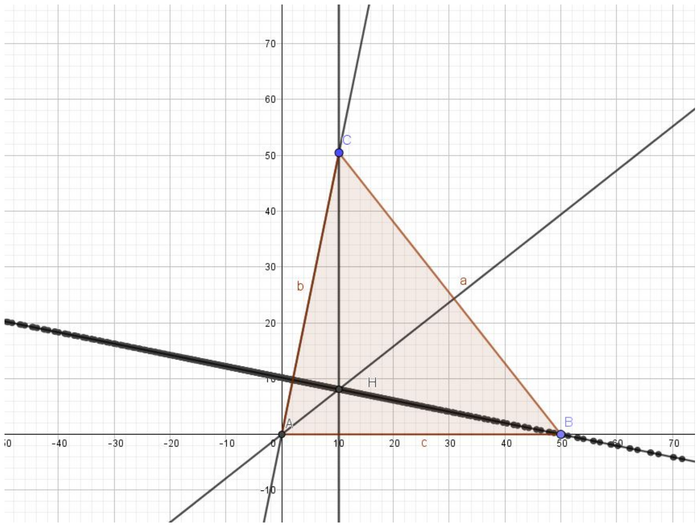
Pokud je přímka p stranou trojúhelníku, je množinou bodů přímka (viz obr. 91 a 92).

Výpočet:

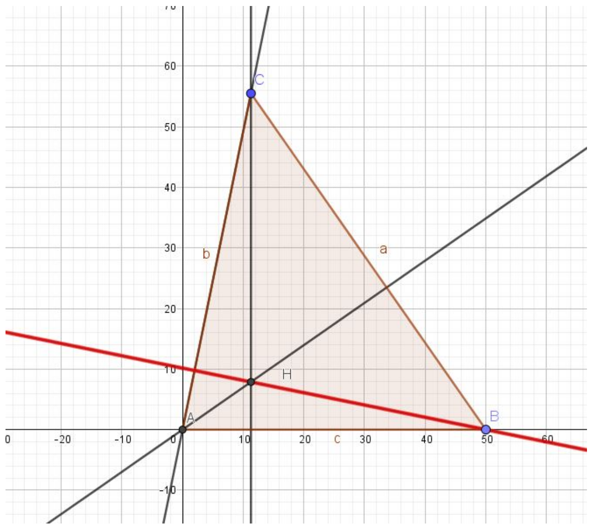
Použijeme

$$
\begin{array}{lrcl}
 & p-u & = & 0 \\
 & p(u-a)+qv & = & 0 \\
C\in p: & ru+sv & = & 0 \\
\hline
 & v & = & -\frac{r}{s}u \\
 & p(p-\frac{r}{s}q-a) & = & 0 \\
 & p=0\,\text{nebo}\,p-\frac{r}{s}q-a & = & 0
\end{array}
$$

to je přímka procházející bodem B kolmá k AC (přímka $p=0$ je tam navíc).



Obrázek 91**: Speciální případ 1 - Stopa, příklad 5**

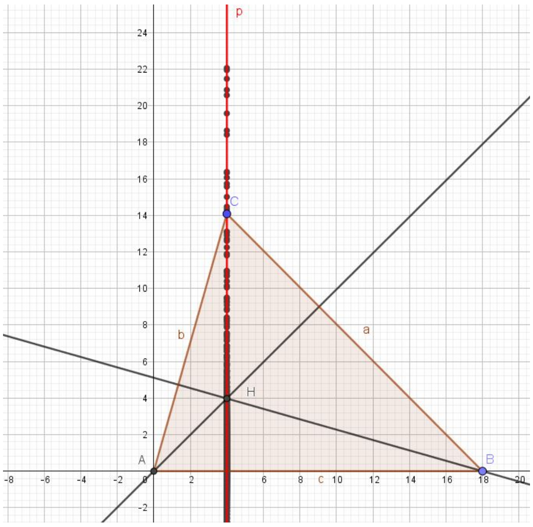


Obrázek 92**: Speciální případ 1 - Locus, příklad 5**

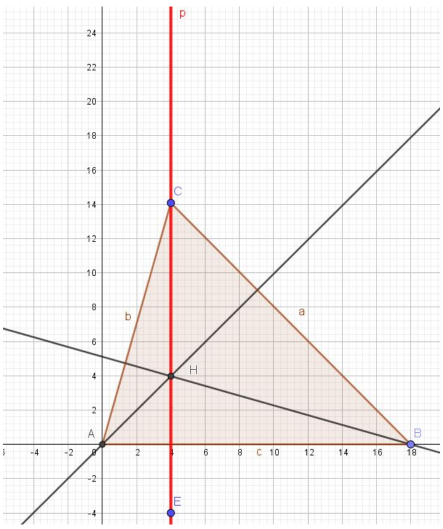
Pokud je přímka p kolmá na stranu AB, pak je množinou bodů přímka (viz obr. 93 a 94).

Výpočet:

$$
\begin{array}{ll}
HB \perp AC: & u(a-p) - qv = 0 \\
HA \perp BC: & p(u-a) + qv = 0 \\
C \in p: & ku = c \\
\hline
u & = \frac{c}{k} \\
p(u-a) + u(a-p) & = 0 \\
p\left(\frac{c}{k} - a\right) + \frac{c}{k}(a-p) & = 0 \\
-pak + ca & = 0\,\text{(přímka)}
\end{array}
$$



Obrázek 93**: Speciální případ 2 - Stopa, příklad 5**

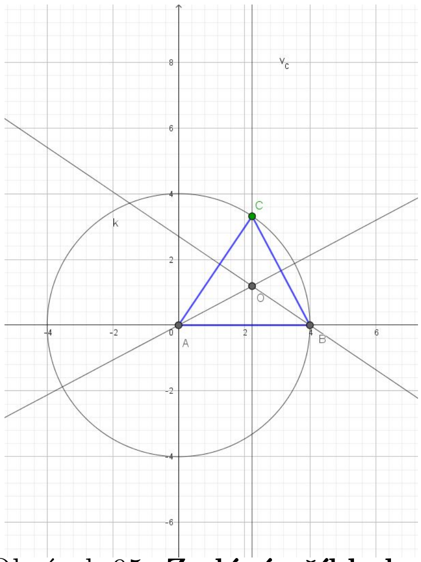


Obrázek 94**: Speciální případ 2 - Locus, příklad 5**

V další části se budeme věnovat úlohám, při jejichž řešení mohou nastat problémy:

- objeví se navíc jiná množina,
- eliminační ideál je roven nule, ale řešení existuje. (Řešením je polynom v proměnných p, q a polynom, který obsahuje jiné parametry u, v. Hledaný polynom je v součinu s jiným polynomem, který obsahuje u, v a součin je roven nule. Eliminace je správně, počítač nám odpoví, že tam takový polynom není. Problémem je, jak druhý polynom odstranit. Musí se přidat nějaká doplňující podmínka. Pokud dáme podmínku, která je různá od nuly, pak nám počítač najde hledaný polynom.)

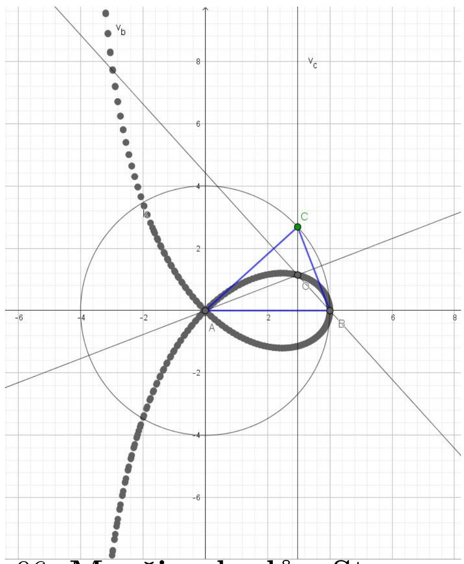
Příklad 6: *Je dána úsečka AB a bod C, který leží na kružnici k se středem v bodě A a poloměrem AB. Určete množinu průsečíků výšek H trojúhelníku ABC, pohybuje-li se bod C po kružnici.*



Obrázek 95**: Zadání příkladu 6**

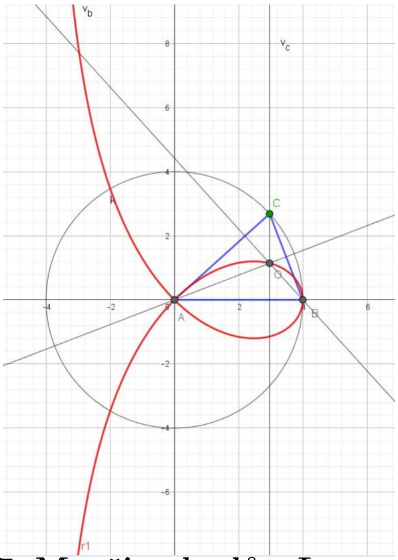
Řešení:

Zjistíme množinu bodů pomocí příkazu Stopa v GeoGebře.



Obrázek 96**: Množina bodů - Stopa, příklad 6**

Použijeme příkaz Locus v GeoGebře (the tracer H, the mover C), ukáže nám množinu bodů a tím nám napoví, jak příklad řešit.



Obrázek 97: **Množina bodů - Locus, příklad 6**

Ruční výpočet:

Trojúhelník umístíme do soustavy souřadnic tak, že $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [u, v]$. Bod $O = [p, q]$. Kružnice k má tedy rovnici $x^2 + y^2 = a^2$. Bod $C \in k$: $u^2 + v^2 - a^2 = 0$.

1. způsob:

Výšky trojúhelníku mají rovnice:

$$\begin{aligned} v_a: \quad (u-a)x + vy &= 0, \\ v_b: \quad ux + vy - ua &= 0. \end{aligned}$$

Bod $O = [p, q]$ leží na výškách:

$$\begin{aligned} O \in v_a: \quad (u-a)p + vq &= 0, \\ O \in v_b: \quad up + vq - ua &= 0. \end{aligned}$$

Získáme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - a^2 &= 0, \\ (u-a)p + vq &= 0, \\ up + vq - ua &= 0. \end{aligned}$$

Bod $C = [u, v]$ je pohyblivý bod, proto ze soustavy eliminujeme proměnné u, v a tím dostaneme rovnici křivky. Eliminace proměnných u, v *vyžaduje hodně matematických úprav.* Pomocí GeoGebry bychom proměnné snadno eliminovali pomocí funkce Eliminovat (u, v).

Ze soustavy eliminujeme ručně proměnné u, v.

$$\begin{aligned} u^2+v^2-a^2 &= 0, \\ up-ap+vq &= 0, \\ up+vq-ua &= 0. \end{aligned}$$

Ze druhé rovnice vyjádříme $u=\frac{ap-vq}{p}$ a dosadíme do 1. a 3. rovnice:

$$\begin{aligned} (\tfrac{ap-vq}{p})^2+v^2-a^2 &= 0, \\ \tfrac{ap-vq}{p}\cdot p+vq-\tfrac{ap-vq}{p}\cdot a &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{a^2p^2-2apv\ q+v^2q^2}{p^2}+v^2-a^2 &= 0, \\ ap-vq+vq-\tfrac{a^2p-v\ qa}{p} &= 0. \end{aligned}$$

$$a^2p^2-2a\ pv\ q+v^2q^2+v^2p^2-a^2p^2 = 0,$$

$$ap^2-v\ qp+v\ qp-a^2p+v\ qa = 0.$$

Z druhé rovnice po úpravě $ap^2-a^2p+v\ qa\ =0$ vyjádříme $v=\frac{a^2p-ap^2}{qa}$ a dosadíme do 1. rovnice:

$$\begin{aligned} a^2p^2-2a\ p(\tfrac{a^2p-ap^2}{qa})q+(\tfrac{a^2p-ap^2}{qa})^2q^2+(\tfrac{a^2p-ap^2}{qa})^2p^2-a^2p^2 &= 0, \\ -2p(a^2p-a\ p^2)+\tfrac{a^4p^2-2a^2pa\ p^2+a^2p^4}{a^2}+\tfrac{a^4p^2-2a^2pa\ p^2+a^2p^4}{q^2a^2}\cdot p^2 &= 0, \\ -2a^2q^2p(a^2p-a\ p^2)+q^2a^4p^2-2a^3p^3q^2+a^2p^4q^2+a^4p^4-2a^3p^5+a^2p^6 &= 0, \\ -2a^4p^2q^2+2a^3p^3q^2+q^2a^4p^2-2a^3p^3q^2+a^2p^4q^2+a^4p^4-2a^3p^5+a^2p^6 &= 0, \\ -a^4p^2q^2+a^2p^4q^2+a^4p^4-2a^3p^5+a^2p^6 &= 0,\ /:a^2p^2 \\ -a^2q^2+p^2q^2+a^2p^2-2ap^3+p^4 &= 0. \end{aligned}$$

Tato rovnice je rovnicí hledané křivky. Rovnici se budeme snažit dále upravit. V tomto okamžiku nám také může pomoci GeoGebra.

$$\begin{aligned} -a^2q^2+p^2q^2+a^2p^2-a\ p^3-a\ p^3+p^4 &= 0, \\ p(p^3+pq^2-a\ p^2)-a(p^3+a\ q^2-ap^2) &= 0. \end{aligned}$$

Přičteme a odečteme člen apq^2 a dostaneme:

$$\begin{aligned} p(p^3+pq^2-ap^2+a\ q^2)-a\ (p^3+pq^2-ap^2+aq^2) &= 0, \\ (p-a)\cdot(p^3+pq^2-ap^2+aq^2) &= 0, \\ (p-a)\cdot[p(p^2+q^2)-a\ (p^2-q^2)] &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^2(p^2+q^2)-ap(p^2+q^2)-ap(p^2-q^2)+a^2(p^2-q^2) &= 0, \\ (p^2+q^2)(p^2-ap)-(p^2-q^2)(ap-a^2) &= 0, \\ (p^2+q^2)\cdot p(p-a)-(p^2-q^2)\cdot a(p-a) &= 0, \\ p(p^2+q^2)-a\ (p^2-q^2) &= 0. \end{aligned}$$

Proměnné p, q nahradíme x, y a dostaneme: $x(x^2 + y^2) \; = \; a\ (x^2 - y^2)$.

2. způsob:

Soustava rovnic pro neznámé p, q s parametry u, v:

$$
\begin{array}{lll}
O \in v_a & \Rightarrow & (u-a)p + vq = 0, \\
O \in v_c & \Rightarrow & p = u, \\
C \in k & \Rightarrow & u^2 + v^2 = a^2 \ldots \text{podmínka pro parametry u, v}
\end{array}
$$

Eliminace parametrů u, v:

Eliminace u:

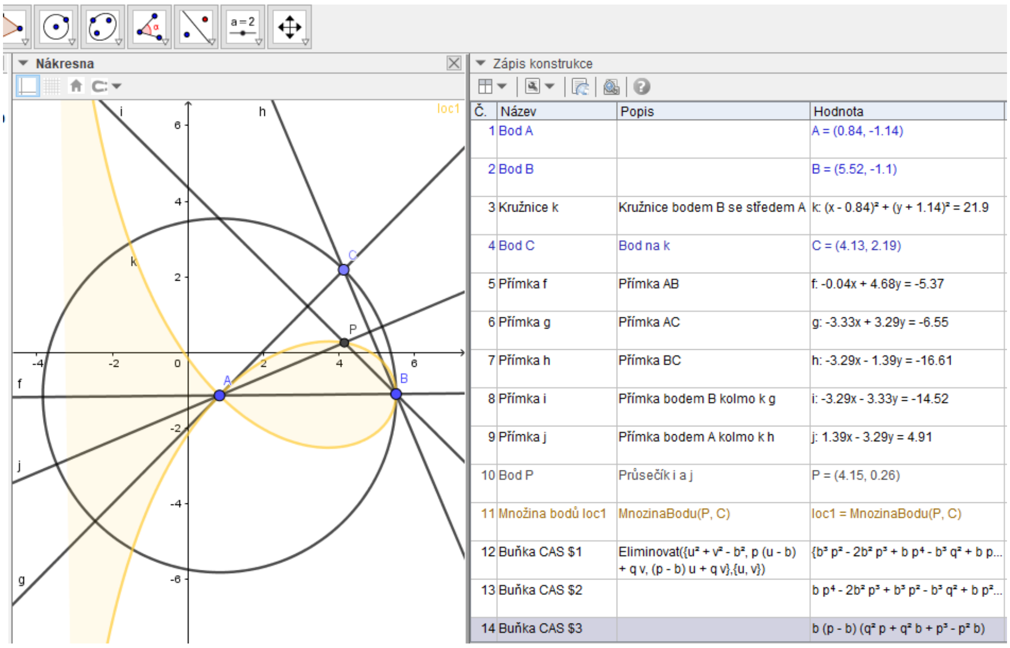
$u = p$ dosadíme do 1. a 3. rovnice.

Eliminace v:

$$
\begin{array}{l}
(p-a)p = -vq \quad |^2 \\
p^2 + v^2 = a^2 \;\Rightarrow\; v^2 = a^2 - p^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(p-a)^2 p^2 = v^2 q^2 \\
(p-a)^2 p^2 = (a^2 - p^2) q^2 \\
(p-a)^2 p^2 + (p^2 - a^2) q^2 = 0 \mid : (p-a) \neq 0 \\
\underline{(p-a)p^2 + (p+a)q^2 = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{p(p^2+q^2) - a\ (p^2 - q^2) = 0}
\end{array}
$$

Tuto rovnici napíšeme do GeoGebry a zjistíme, jak množina bodů vypadá. Jedná se o **strofoidu**.

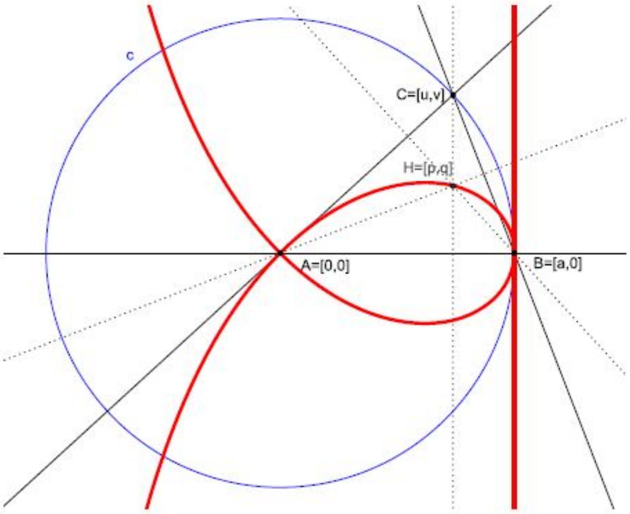


Obrázek 98: Strofoida

Za použití příkazu Eliminovat v GeoGebře

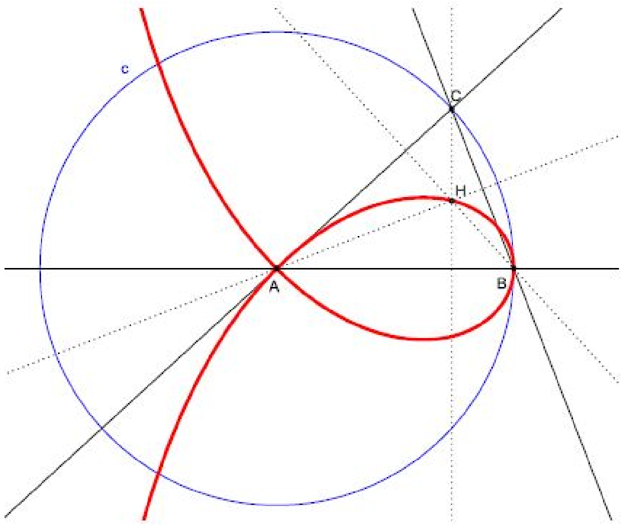
Dostaneme rovnici 4. stupně, dáme faktorizovat a dostaneme lineární a kubickou rovnici.

Lineární rovnice reprezentuje přímku a kubická rovnice je rovnicí strofoidy.



Obrázek 99: **Strofoida a přímka, příklad 6**

Problém nastává, když C dojde do B, tedy když přímka BC není definována, tj. když $u = a$, $v = 0$, potom systém $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, $h_3 = 0$ přechází v rovnici $p - a = 0$, která reprezentuje přímku. Pokud tedy nechceme tuto přímku, musíme přidat podmínku $B \neq C$. Pak eliminujeme u, v, t. Dostaneme rovnici strofoidy $p^3 - ap^2 + aq^2 + pq^2 = 0$.



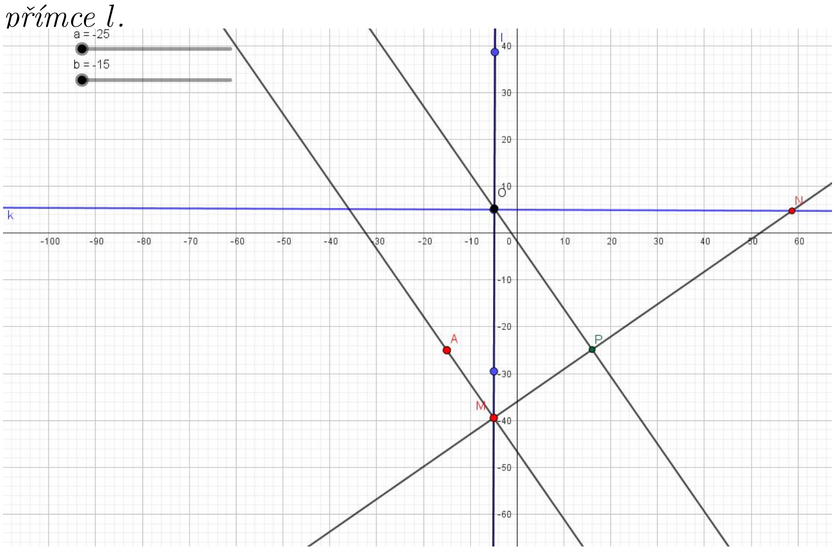
Obrázek 100: **Strofoida, příklad 6**

Závěr: Při eliminaci proměnných můžeme získat polynomiální rovnici, která ale nereprezentuje křivku.

Příkaz Locus - počítač řeší numericky, tedy každému bodu na ose x přiřadí y, pokud se dostane do $B = C$, bodu na ose x by přiřadil nekonečně mnoho bodů - tuto možnost počítač vyloučí, proto se neobjeví přímka.

Poznámka. Křivku strofoidy jako první popsal ve svých dopisech italský matematik a fyzik Evangelista Torricelli kolem roku 1645. Znovu ji objevil anglický matematik Isaac Barrow ve své práci z roku 1670. Název strofoida z latinského „strophos“ („kroucený pás“) pochází až z roku 1848.

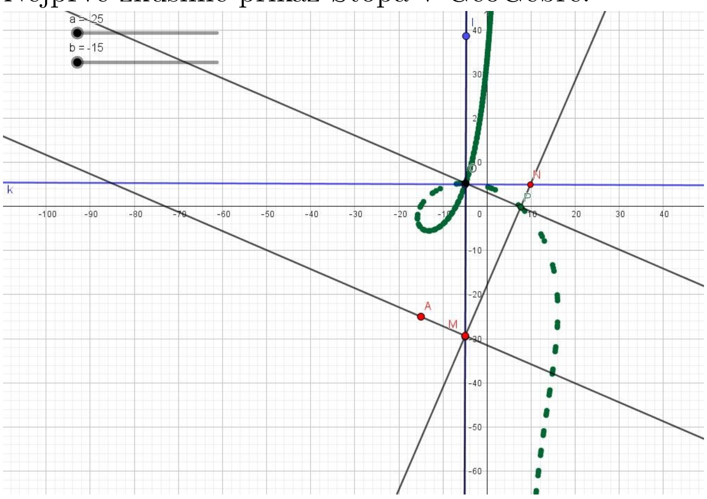
Příklad 7: *Jsou dány dvě na sebe kolmé přímky k, l, bod O je jejich průsečík. Bod A leží ve vzdálenosti b od přímky k a ve vzdálenosti a od přímky l. Pro libovolný bod M ležící na l sestrojme bod N na k tak, že MN je kolmá na AM. Určete množinu všech bodů paty kolmic P, sestrojené z O na MN, pokud se bod M pohybuje po přímce l.*



Obrázek 101**: Zadání příkladu 7**

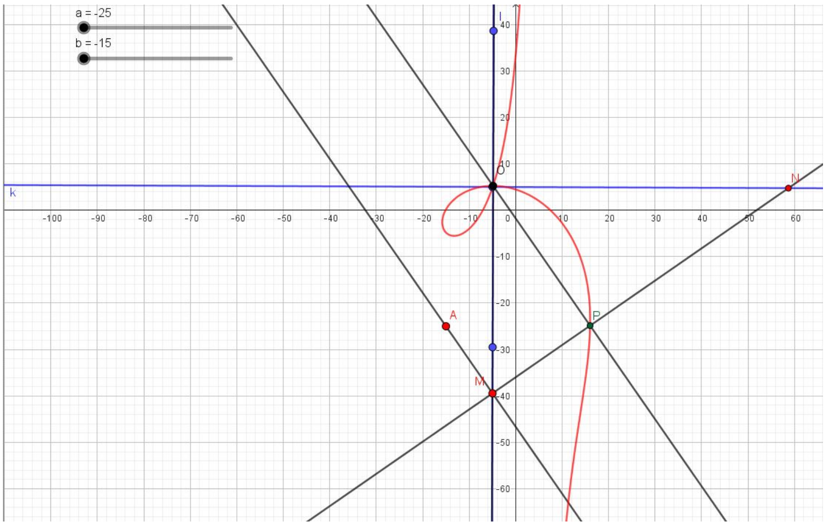
Řešení:

Nejprve zkusíme příkaz Stopa v GeoGebře.



Obrázek 102**: Množina bodů - Stopa, příklad 7**

Poté použijeme příkaz Locus v GeoGebře.



Obrázek 103: **Množina bodů - Locus, příklad 7**

Dále vyřešíme ručně.

Označme body: $A = [a, b]$, $M = [0, v]$, $N = [u, 0]$, $P = [p, q]$, $O = [0, 0]$.

1. způsob výpočtu:

$$\begin{aligned} AM \perp MN \quad & (M - A)(N - M) = 0 \\ & (-a, v - b)(u, -v) = 0 \\ & -au - v^2 + vb = 0 \\ OP \perp MN \quad & (P - O)(N - M) = 0 \\ & (p, q)(u, -v) = 0 \\ & pu - qv = 0 \\ P \in MN \quad & \vec{u}_{MN} = (u, -v), \vec{n}_{MN} = (v, u) \\ & vp + uq - uv = 0 \end{aligned}$$

Dostaneme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} -au - v^2 + vb &= 0 \\ pu - qv &= 0 \\ vp + uq - uv &= 0 \end{aligned}$$

Budeme eliminovat proměnné u, v.

$$\begin{aligned} up &= qv \\ u &= \tfrac{qv}{p} \end{aligned}$$

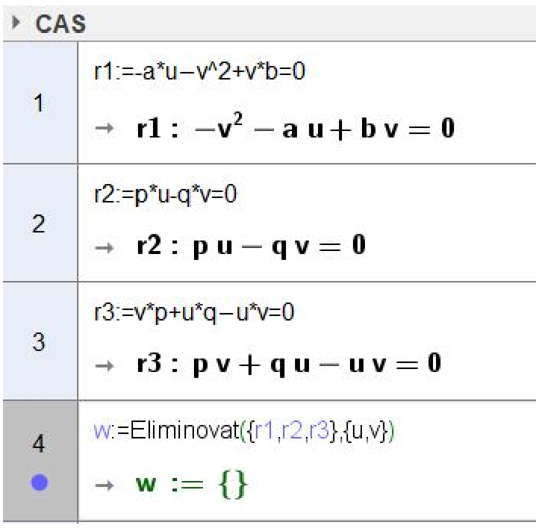
$$
\begin{aligned}
-a\left(\frac{qv}{p}\right) - v^2 + vb &= 0\\
vp + \left(\frac{qv}{p}\right) q + \left(\frac{qv}{p}\right) v &= 0\\
-aqv - v^2p + vbp &= 0\\
vp^2 + q^2v - qv^2 &= 0\\
\hline
v &\neq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-aq - vp + bp &= 0\\
p^2 + q^2 - qv &= 0\\
-qv &= -p^2 - q^2\\
v &= \frac{p^2+q^2}{q}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-aq - \left(\frac{p^2+q^2}{q}\right) p + bp &= 0\\
-aq^2 - p^3 - q^2p + bqp &= 0\\
aq^2 + p^3 + q^2p - bqp &= 0\\
p(p^2+q^2) - q(aq+bp) &= 0
\end{aligned}
$$

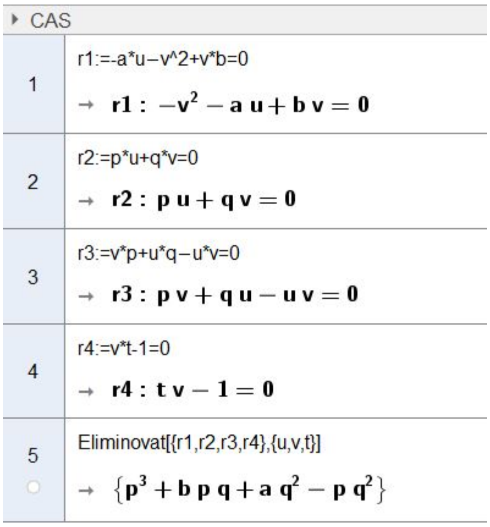
Dostali jsme křivku, která se nazývá **ofiurida**, neboli **zmijí ocas**.

Pokud použijeme eliminaci v GeoGebře, pak dostaneme **nulový eliminační ideál**.



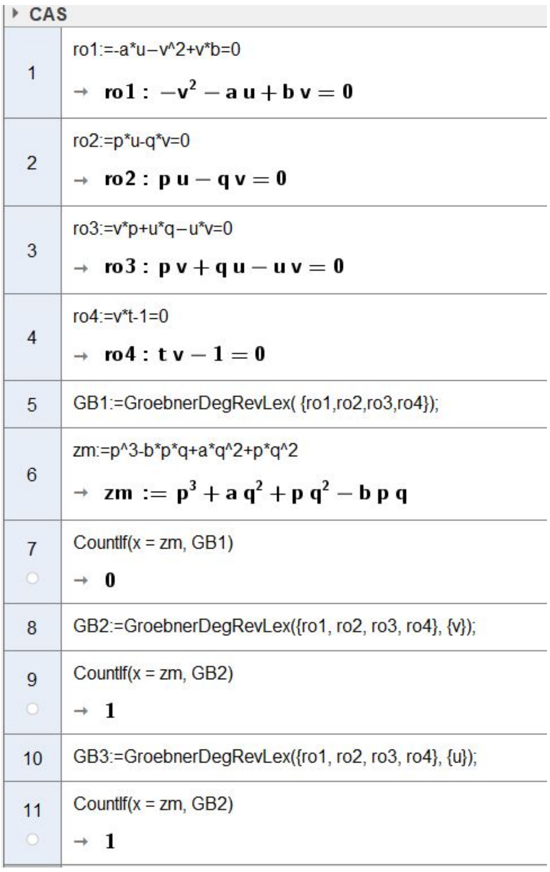
Obrázek 104: **Výpočet v GeoGebře, příklad 7**

Proč jsme dostali nulový eliminační ideál? Zřejmě se jedná o součin dvou výrazů, který se rovná nule. Musíme přidat nějakou další podmínku. Při ručním výpočtu jsme využili podmínku $v \neq 0$. Přidáme tedy $vt - 1 = 0$, kde t je pomocná proměnná. Tato rovnice znamená, že v je různé od nuly.



Obrázek 105: **Výpočet v GeoGebře, příklad 7**

Zjistíme Gröbnerovu bázi.



Obrázek 106: **Výpočet v GeoGebře, příklad 7**

Pomocí GeoGebry zjistíme, že polynomy $v \cdot (p^3 + pq^2 + aq^2 - p^2qb) = 0$ a $u \cdot (p^3 + pq^2 + aq^2 - p^2qb) = 0$ patří do Gröbnerovy báze, ale nepatří tam polynom

$$p^3 + pq^2 + aq^2 - p^2qb \; = \; 0.$$

2. způsob výpočtu:

Využijeme jen $OP \perp MP$ a $PM \perp AM$. Dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 - qv &= 0 \\ -pa + qv - qb - v^2 + vb &= 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $v = \frac{p^2+q^2}{q}$ a dosadíme do druhé rovnice:

$$-pa + q\left(\frac{p^2+q^2}{q}\right) - qb - \left(\frac{p^2+q^2}{q}\right)^2 + \left(\frac{p^2+q^2}{q}\right)b = 0$$

Po úpravě dostaneme:

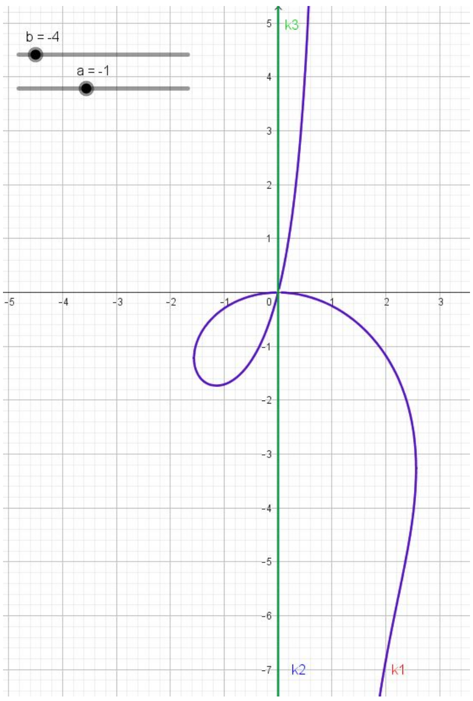
$$p^4 + p^2q^2 + paq^2 - p^2qb = 0$$

Rozložíme na součin:

$$p(p^3 + pq^2 + aq^2 - pqb) = 0$$

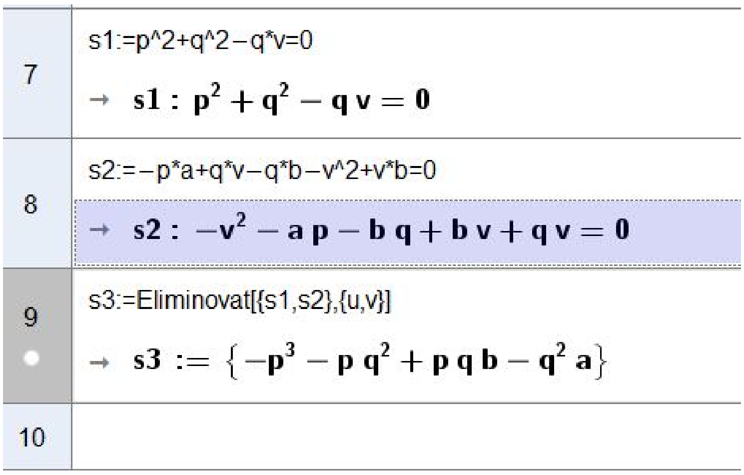
Dostaneme **přímku** $p = 0$ a **rovnici ofiuridy**.

Přidali bychom podmínku $p \neq 0$. (Bod $P \neq O$.)



Obrázek 107: **Ofiurida a přímka, příklad 7**

Pokud eliminujeme v GeoGebře, pak dostaneme jen **ofiuridu**:



Obrázek 108: **Výpočet v GeoGebře, příklad 7**

3. způsob výpočtu:

Využijeme:

$AM \perp MN : -au - v^2 + vb = 0.$

MNP jsou kolineární: $vp + uq - uv = 0$,

$AM \| OP$, tedy $\begin{vmatrix} v-b & a \\ -q & p \end{vmatrix} = 0$ a dostaneme $vp - pb + aq = 0$.

Dostali jsme opět soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} -au - v^2 + vb &= 0 \\ -vp + uq - uv &= 0 \\ vp - pb + aq &= 0 \end{aligned}$$

Vyjádříme z první rovnice $u = \frac{vb-v^2}{a^2}$ a z třetí rovnice $v = \frac{pb-aq}{p}$.

Dosadíme do druhé rovnice:

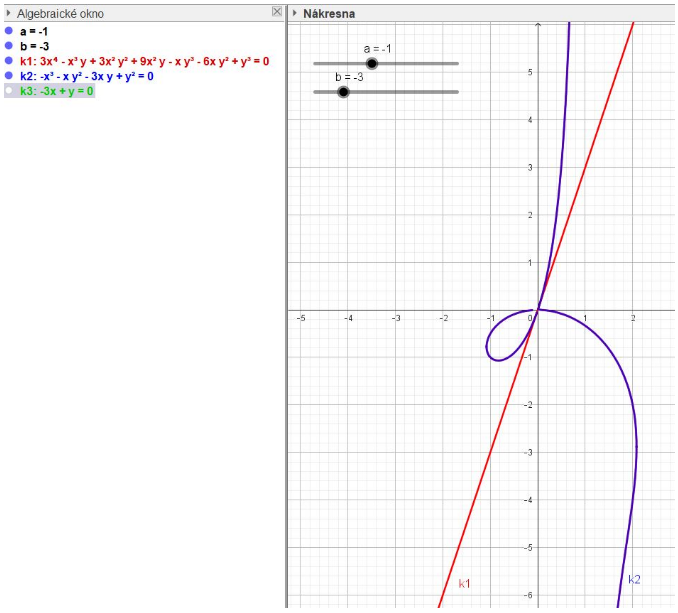
$$\frac{pb-aq}{p}p + \frac{\left(\frac{pb-aq}{p}\right)\cdot b - \left(\frac{pb-aq}{p}\right)^2}{a}q - \frac{\left(\frac{pb-aq}{p}\right)\cdot b - \left(\frac{pb-aq}{p}\right)^2}{a} \cdot \frac{pb-aq}{p} = 0$$

Upravíme a dostaneme:

$$abp^4 - a^3q^3 + 2a^2q^2pb + p^2q^2ab - aqp^2b^2 - pq^3a^2 - a^2p^3q = 0$$

Rozložíme na součin: $-a(bp - qa) \cdot (bqp - q^2p - q^2a - p^3) = 0$

Získáme **rovnici přímky** a **ofiuridy**.



Obrázek 109: **Ofiurida a přímka, příklad 7**

Pokud se M dostane do O, pak by zbyla rovnice $pb - qa = 0$. Přímku nedostaneme, pokud přidáme podmínku $M \neq O$, nebo jako v předchozím způsobu $vt - 1 = 0$.

Při použití příkazu Eliminovat v GeoGebře dostaneme:

11	t1:=−a*u−v^2+v*b=0 → $\mathbf{t1: -v^2 - a\,u + b\,v = 0}$
12	t2:=v*p+u*q−u*v=0 → $\mathbf{t2: p\,v + q\,u - u\,v = 0}$
13	t3:=v*p−p*b+a*q → $\mathbf{t3 := a\,q - b\,p + p\,v}$
14	t4:=Eliminovat[{t1,t2,t3},{u,v}] → $\mathbf{t4 := \{a\,b\,p^4 - a\,b^2\,p^2\,q - a^2\,p^3\,q + 2\,a^2\,b\,p\,q^2 + a\,b\,p^2\,q^2 - a^3\,q^3 - a^2\,p\,q^3\}}$
15	t5:=Rozklad(t4) → $\mathbf{t5 := \{-a\,(b\,p - q\,a)\,(b\,q\,p - q^2\,p - q^2\,a - p^3)\}}$

Obrázek 110: **Výpočet v GeoGebře, příklad 7**