Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Extrémy funkcí dvou proměnných
sbírka řešených příkladů

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vedoucí práce
RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

Vypracoval
Tomáš Sekal

duben 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma „sbírka řešených příkladů – extrémy funkcí dvou proměnných“ jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ………………… ……………………

Abstrakt

Tématem této bakalářské práce je vytvoření sbírky řešených příkladů na téma extrémy funkcí dvou proměnných. Zaměřuje se především na lokální extrémy. Příklady jsou řazeny od nejjednodušších ke složitějším. U každého příkladu je uveden postup řešení ilustrovaný 3D grafy jednotlivých funkcí vytvořených pomocí matematického programu Maple. V samotném úvodu je poskytnuta „první pomoc“ v podobě návodu na řešení tohoto druhu příkladů. Na závěr jsou zařazeny „netradiční“ příklady z oblasti matematiky a fyziky.

Abstract

The topic of this bachelor work is to create a collection of exercises on the extremes of functions of two variables. It focuses mainly on local extremes. Exercises are ordered from easiest to more difficult. For each example there is solution procedure presented and illustrated with 3D graphs of functions, created using the mathematical program Maple. In the very beginning is provided "first aid" in the form of instructions for solving this kind of examples. At the end are included in "nontraditional" examples from mathematics and physics.

Obsah

I. Úvod

Vážení čtenáři,
do rukou se Vám dostala bakalářská práce na téma „Extrémy funkcí dvou proměnných - sbírka řešených příkladů“, která jak název napovídá obsahuje řešené příklady z kategorie vyšetřování průběhu funkce dvou proměnných, konkrétně hledání jejích lokálních a globálních extrémů. Tato práce je určena zejména studentům vysokých škol, kteří se zabývají studiem matematiky, ale i ostatním zájemcům o matematiku. Především by tato práce měla sloužit jako cvičebnice - nikoli učebnice - pro ty, kteří již prošli teoretickým výcvikem diferenciálního počtu a maticové algebry.

V úvodu této práce naleznete zjednodušený postup, jakýsi manuál, na řešení příkladů v této práci obsažených. Po jeho prostudování budete tedy schopni řešit příklady naprosto samostatně. Nicméně u každého příkladu je uveden postup řešení, ilustrovaný obrázky z programu Maple. Program Maple je využíván na mnoha vysokých školách (nejen) v České republice. Umí nalézt extrémy a limity funkce jedné a více proměnných, symbolicky derivovat, integrovat funkce, řešit lineární a nelineární rovnice, soustavy nerovnic, obyčejné a parciální diferenciální rovnice a jejich soustavy a také zobrazit jejich geometrickou reprezentaci a to jak ve 2D, tak v případě funkcí dvou proměnných ve 3D. Pomocí různých příkazů umí Maple zjednodušit a upravit výrazy a tak si správnost řešení můžeme ověřit.

Na závěr této práce jsem umístil „netradiční“ příklady z oblasti matematiky a fyziky, kterými bych rád demonstroval, že i v praxi a běžném životě se čas od času může nějaký ten extrém hodit.

Příklady, které zde najdete, jsem čerpal jednak z vlastní hlavy (s použitím programu Maple, ve kterém jsem si danou funkci nejdříve nakreslil a pak se rozhodoval, jestli ji použiji) a dále hlavně z literatury [4], [7] a také [2] a [8].

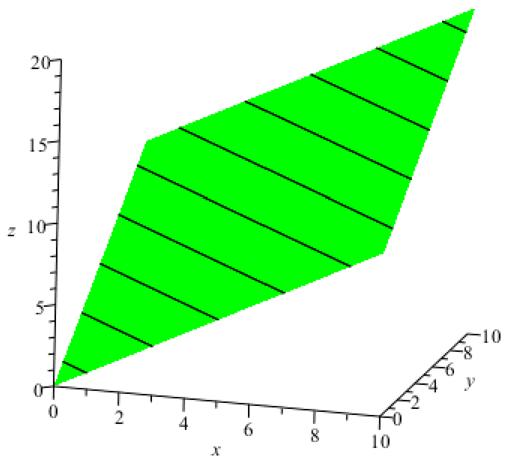
II. Teoretická část - „manuál“

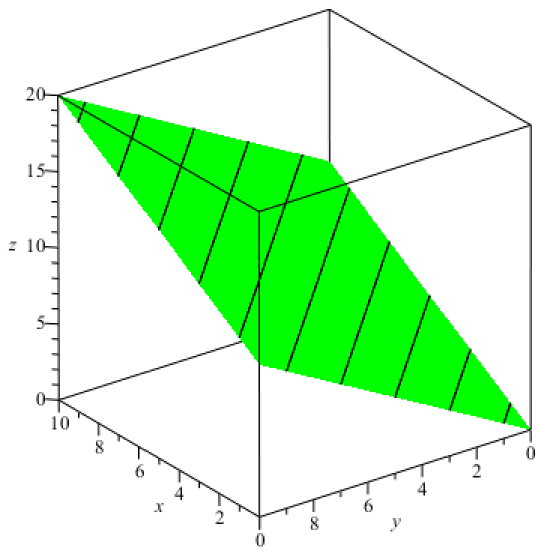
V této kapitole, jak jsem již naznačil v úvodu, se krátce pověnujeme teoretické části problému, tzn. „jak na to.“ Celý postup, který jsem rozdělil do 4 částí, je uveden níže. Tento postup jsem co nejvíce zjednodušil. Jako zdroj informací jsem využil literaturu [1], [2], [4].

Obecný zápis funkce dvou proměnných:

$z = f(x, y)$ $\qquad\qquad\qquad D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$

Grafickou interpretací (grafem) takové funkce je plocha v prostoru (analogie 3D zobrazování) o souřadnicích [x, y, z]. Pro ilustraci viz následující graf funkce $f(x, y) = x + y$, jejíž zobrazením je rovina procházející počátkem souřadného systému.





Označme nyní $X = [x, y]$. Maximální a minimální hodnotu funkce 2 proměnných $f(X)$ pro body X z množiny $V \subseteq \mathbb{R}^2$ nazýváme extrémy funkce v množině V. Nabývá-li funkce svého maxima (minima) v bodě $C \in V$, pak pro všechna $X \in V$ platí $f(X) \leq f(C)$ $\quad (f(X) \geq f(C))$, tj. označíme-li $X = C + \bar{h}$, pak $\Delta f(C) \leq 0$ $(\Delta f(C) \geq 0)$, a to pro všechna $\bar{h}$ taková, aby body $C + \bar{h}$ ležely ve V.

Nechť V je okolí bodu C z definičního oboru D_f o poloměru $\delta > 0$. Říkáme: nechť $C \in D_f$ je takový bod, že existuje kolem něho tak malé okolí, že pro všechna $|\bar{h}| < \delta$ je $\Delta f(C) \leq 0$ $(\Delta f(C) \geq 0)$; potom bod C nazýváme **lokální** maximum (minimum). [4]

Samotné vyšetřování lokálních extrémů probíhá následovně:

1) Nutná podmínka existence extrému

Jako první musíme vyšetřit tzv. „nutnou podmínku existence extrému“. Řekněme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) lokální extrém. **Existují-li** v bodě (x_0, y_0) parciální derivace prvního řádu, pak jsou rovny nule. Musí tedy platit:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Řešením této soustavy rovnic získáme souřadnice x_i a y_j stacionárních bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kde $A_k = [x_i, y_j]$. Jsou to body „podezřelé“ z extrému.

Anebo pokud parciální derivace prvního řádu neexistují, musíme k vyšetření použít postup uvedený na konci kapitoly.

2) Druhé parciální derivace

Nyní potřebujeme zjistit, jestli skutečně v nalezených stacionárních bodech jsou lokální extrémy a jaké. K tomu budeme potřebovat druhé parciální derivace podle x, podle y a smíšenou derivaci (jelikož smíšené derivace v bodech, ve kterých jsou spojité, jsou si rovny, stačí nám jen jedna z nich):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \ldots \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \ldots \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \ldots$$

3) Hessián

Dalším krokem v cestě za nalezením extrémů je Hessián nebo-li determinant Hessovy matice. Při jeho sestavení využijeme druhé parciální derivace z předchozího kroku a poskládáme je do matice takto:

$$\det H_f = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

A nyní pro každý stacionární bod vypočítáme determinant tak, že dosadíme souřadnice bodu do každé proměnné v Hessiánu. Podle hodnoty determinantu rozhodneme takto:

- $det\ H_f > 0 \rightarrow$ lokální extrém
- $det\ H_f = 0 \rightarrow$ nemůžeme tímto způsobem rozhodnout
- $det\ H_f < 0 \rightarrow$ sedlový bod

V případě, že $det\ H_f > 0$, potřebujeme ještě zjistit, jestli se jedná o lokální minimum nebo maximum. O tom rozhodneme podle znaménka druhé parciální derivace podle x. Jestliže:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \rightarrow$ jedná se o lokální minimum
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \rightarrow$ pak se jedná o lokální maximum

Pomocí tohoto návodu můžeme zjistit počet a typ extrémů zadané funkce. Ovšem jen v těch případech, ve kterých $det\ H_f \neq 0$. Vraťme se proto ještě k situaci kdy $det\ H_f = 0$ a jak si poradit tam, …

4) … kde Hessián nepomůže

Jediná možnost je využít samotné definice extrému (str. 6 dole). Tzn. že budeme zjišťovat pomocí velmi malých přírůstků $|\bar{h}|$ znaménko Δf ve vyšetřovaném bodě (označme jej např. $C = [x_0, y_0]$). Hledáme tedy následující

$$(\Delta f)_C = f(x_0 + h_1\,,\ y_0 + h_2) - f(x_0, y_0).$$

Bude-li toto znaménko stejné pro přírůstky ve směru osy x i y, jedná se o extrém. Pokud budou všechny přírůstky kladné (záporné), hovoříme o lokálním minimu (maximu) funkce f v bodě C.

Nyní jste tedy vybaveni aparátem, se kterým se můžete vrhnout na to hlavní − příklady. V další kapitole nejdete všechny možné funkce, od těch nejjednodušších až po ty složitější (nebo jen zdlouhavější).

III. Praktická část - sbírka příkladů

Příklady jsou řazeny podle obtížnosti (pokud tedy hledáte výzvu, tak zalistujte na konec této bakalářské práce). Na konci se rovněž nacházejí „netradiční“ příklady (jak jsem již zmínil v úvodu), na které budete potřebovat trochu více než jen postup z minulé kapitoly.

1. příklad

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$, $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 ; x \in \langle 0 ; 2\pi \rangle \ \wedge \ y \in \langle 0 ; 2\pi \rangle\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(y)$$

Položíme obě rovnice rovny nule

$$\cos(x) = 0 \qquad \cos(y) = 0$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} \qquad y_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{2} \qquad y_2 = \frac{3\pi}{2}$$

Dostáváme čtyři stacionární body $A_1 = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $A_2 = \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $A_3 = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $A_4 = \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin(y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

3) Hessián

$$det\, H_f = \begin{vmatrix} -\sin(x) & 0 \\ 0 & -\sin(y) \end{vmatrix}$$

$$det\, H_f(A_1) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$det\ H_f(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$det\ H_f(A_3) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$det\ H_f(A_4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

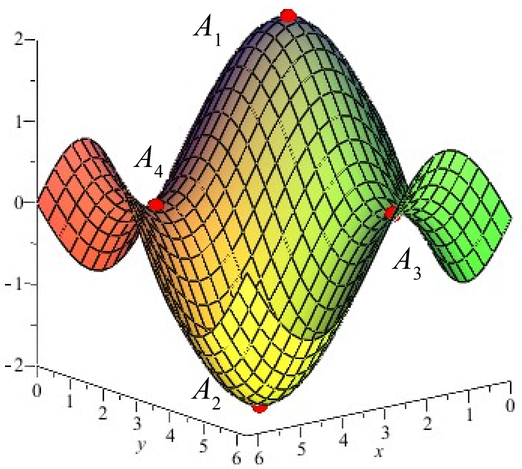
4) Závěr

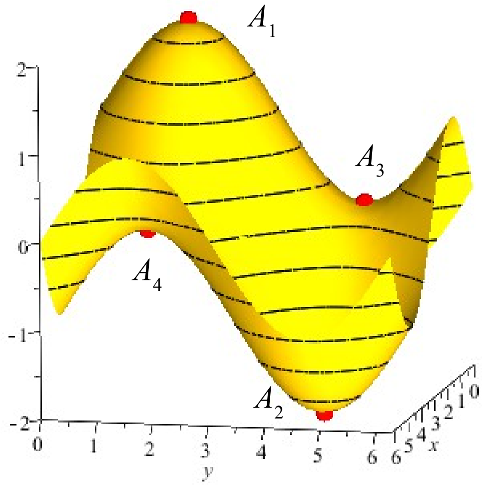
$A_1 = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: ostré lokální maximum,

$A_2 = \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$: ostré lokální minimum,

$A_3 = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$: sedlový bod,

$A_4 = \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: sedlový bod.





2. příklad

Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$, $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$2x = 0 \quad \wedge \quad 2y = 0$$

$$\underbrace{x = 0 \quad \wedge \quad y = 0}$$

$$A_1 = [0; 0]$$

Získali jsme tedy jeden stacionární bod A_1, který budeme dále vyšetřovat.

2) Druhá derivace

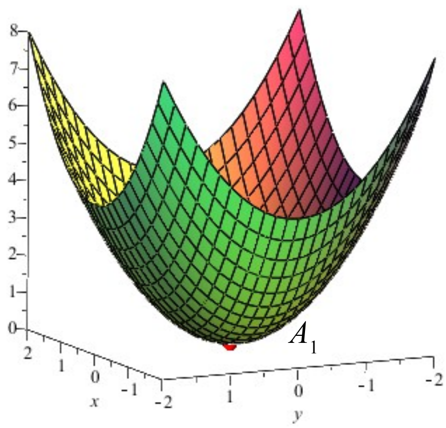
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

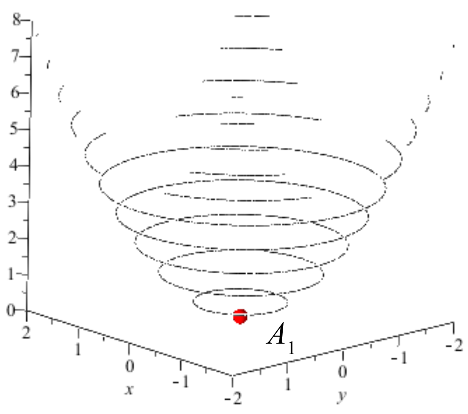
3) Hessián

$$det\, H_f(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

4) Závěr

$A_1 = [0; 0]$: ostré lokální minimum.





3. příklad

Nalezněte lokální extrémy u funkce $f(x, y) = x y - x + y$, $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

Jediný stacionární bod je $A_1 = [-1; 1]$.

2) Druhá derivace

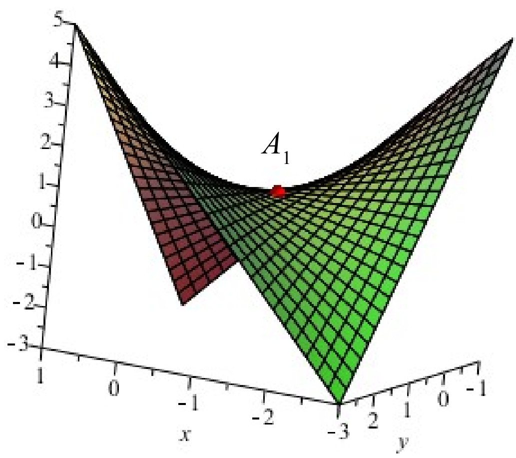
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

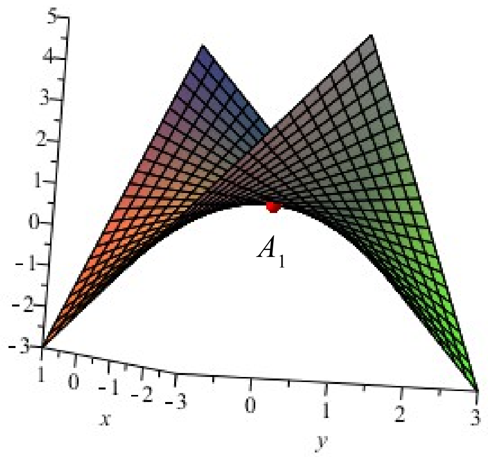
3) Hessián

$$det\, H_f(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

4) Závěr

$A_1 = [-1; 1]$: sedlový bod.





4. příklad

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x \cdot (3 - x^2) - y^2$, $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - 3x^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

Dostáváme jednoduchou soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{array}{rcl} 3 - 3x^2 = 0 & \rightarrow & x = \pm 1 \\ -2y = 0 & \rightarrow & y = -2 \end{array}$$

Tedy body podezřelé z extrému (stacionární body) jsou $A_1 = [1; 0]$ a $A_2 = [-1; 0]$.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

3) Hessián

$$det\, H_f = \begin{vmatrix} -6x & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

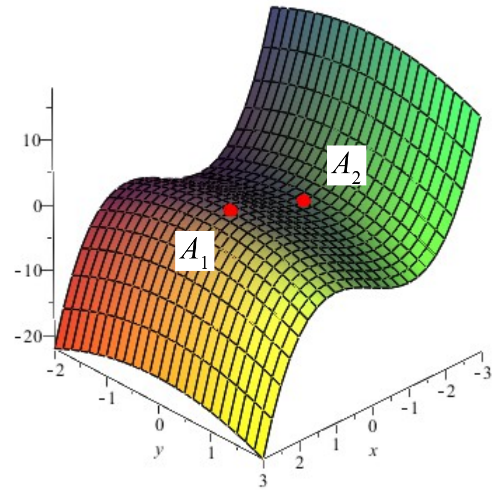
$$det\, H_f(A_1) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 12$$

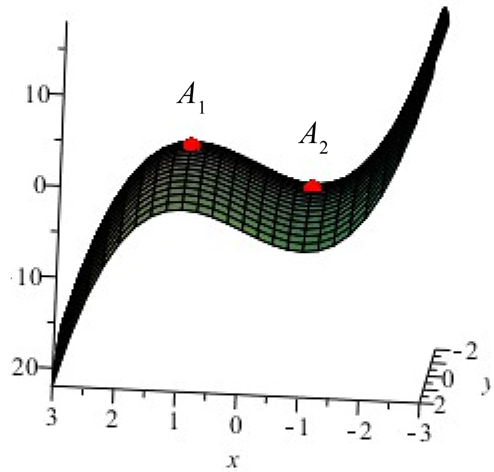
$$det\, H_f(A_2) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

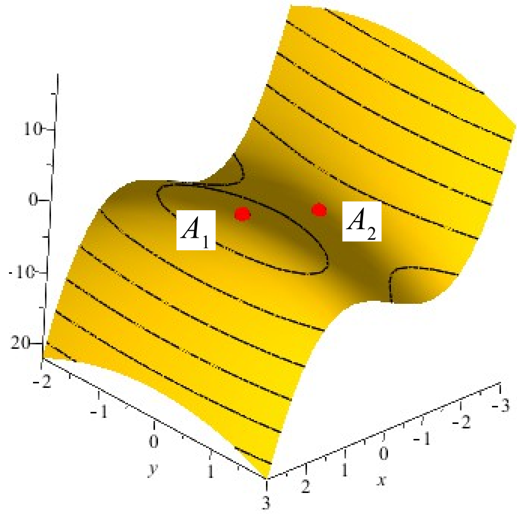
4) Závěr

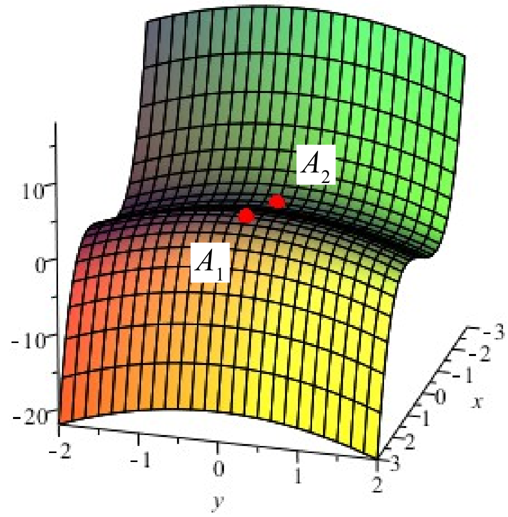
$A_1 = [1; 0]$: ostré lokální maximum,

$A_2 = [-1; 0]$: sedlový bod.


A_1
A_2
10
0
-10
-20
-2 -1 0 1 3
y
-3 -2 -1 0 1 2
x


A_1
A_2
10
0
-10
20
3 2 1 0 -1 -2 -3
x
-2 0 2
y


A_1
A_2
10
0
-10
20
-2 -1 0 1 3
y
-3 -2 -1 0 1 2
x


A_1
A_2
10
0
-10
-20
-2 -1 0 1 2
y
-3 -2 -1 0 1 2 3
x

5. příklad

Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$, $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

Dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme y a ze druhé x

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ x &= y^2 \end{aligned}$$

Nyní dosadíme ze druhé rovnice do první

$$\begin{aligned} y &= y^4 \\ y^4 - y &= 0 \\ y \cdot (y^3 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Tedy dostáváme dva kořeny $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Dosazením těchto do jedné z rovnic soustavy získáme x-ové souřadnice $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ stacionárních bodů $A_1 = [0; 0]$, $A_2 = [1; 1]$.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$$

3) Hessián

$$det\, H_f = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$$

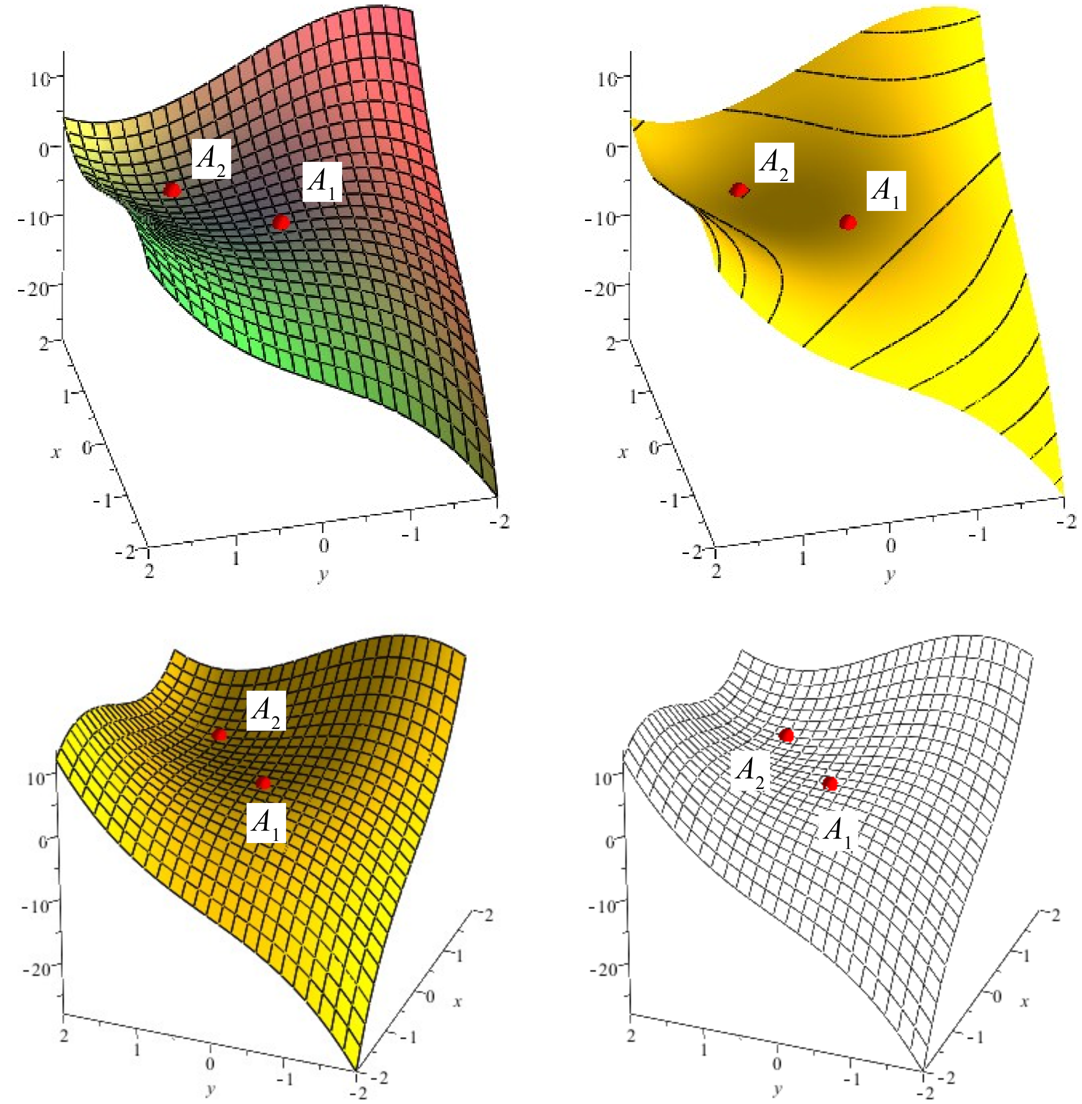
$$det\, H_f(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

$$det\, H_f(A_2) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27$$

4) Závěr

$A_1 = [0; 0]$: sedlový bod,

$A_2 = [1; 1]$: ostré lokální minimum.



6. příklad

Vyšetřete lokální extrémy následující funkce $f(x, y) = y + \frac{1}{y} - 2 \cdot \ln^2(x)$,

$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 ;\, (x > 0) \;\wedge\; (y \neq 0)\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln(x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}$$

Položíme obě rovnice rovny nule

$$-4 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln(x) = 0$$

$$1 - \frac{1}{y^2} = 0$$

Po úpravě první rovnice získáme souřadnici x stacionárního bodu

$$\ln(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 1.$$

Podobně ze druhé rovnice po lehké úpravě na tvar

$$y^2 = 1.$$

dostaneme souřadnici y stacionárního bodu

$$y_{1,2} = \pm 1.$$

Jelikož každá z rovnic nahoře obsahuje pouze jednu proměnnou, tzn. získané souřadnice jsou na navzájem nezávislé, musíme vyšetřit všechny body, které mohou vzniknout kombinací získaných souřadnic. Tímto získáme dva stacionární body $A_1 = [1; 1]$ a $A_2 = [1; -1]$.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x^2} \cdot \left(\ln(x) - 1\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

3) Hessián

$$\det H_f = \begin{vmatrix} \frac{4}{x^2} \cdot \left(\ln(x) - 1\right) & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{vmatrix}$$

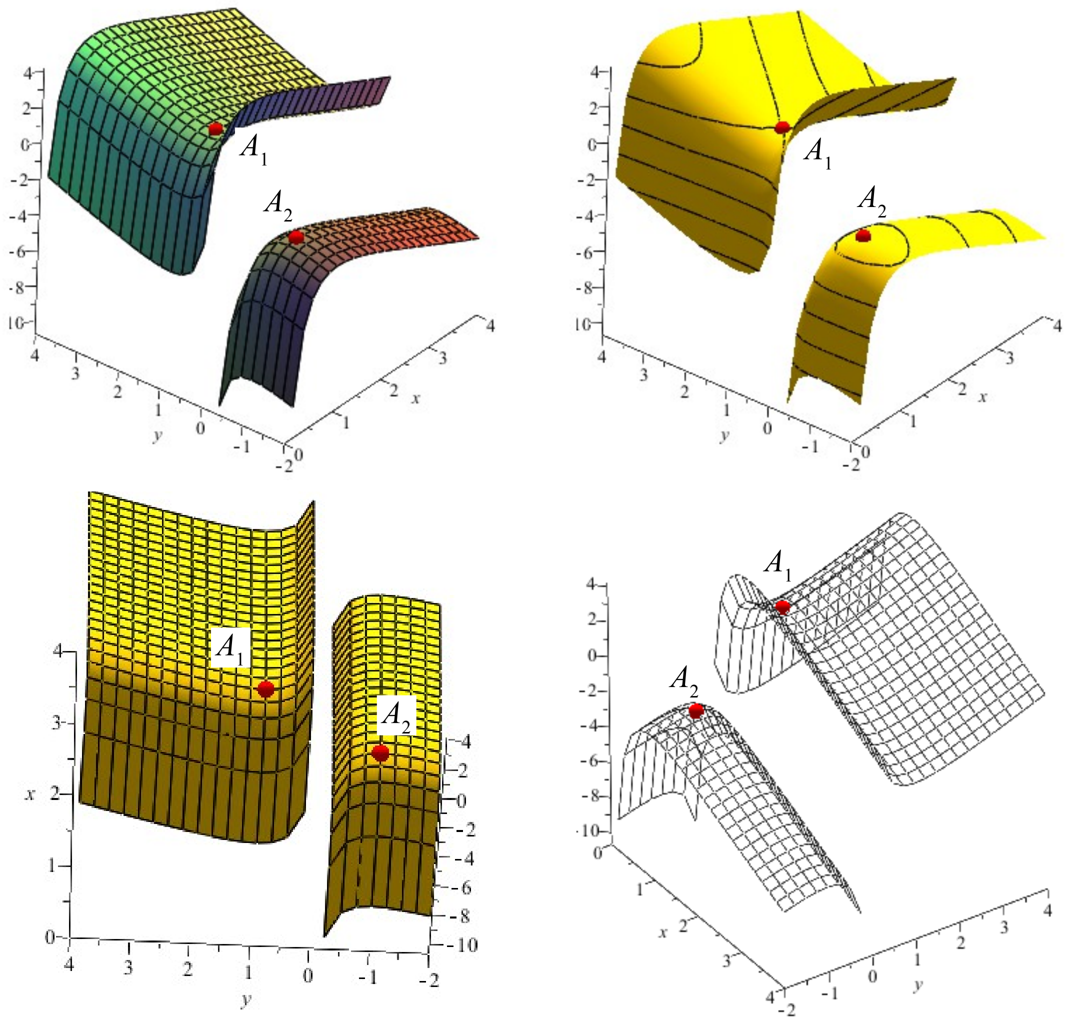
$$det\, H_f(A_1) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$det\, H_f(A_2) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8$$

4) Závěr

$A_1 = [1;\ 1]$: sedlový bod,

$A_2 = [1;\ -1]$: ostré lokální maximum.



7. příklad

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \ln(x\,y) + x - y$, $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ (x > 0 \ \wedge\ y > 0) \ \cup\ (x < 0 \ \wedge\ y < 0)\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x\,y} + 1 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x\,y} - 1$$

Obě rovnice položíme rovny nule a vytvoříme soustavu

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{x\,y} + 1 = 0 \quad /\cdot(-x\,y) \\ &\frac{1}{x\,y} - 1 = 0 \quad /\cdot x\,y \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x\,y = -1 \ \rightarrow\ \emptyset \\ &x\,y = \ \ 1 \ \rightarrow\ x = 1, y = 1 \end{aligned}$$

Jelikož první rovnice nesplňuje podmínky definičního oboru, získáváme pouze jediný stacionární bod $A_1 = [1;\,1]$ z rovnice druhé.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{y}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2\,y} \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{x\,y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{x^2\,y} \quad \neq \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -\frac{1}{x\,y^2}$$

3) Hessián

$$det\,H_f = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{x^2\,y} & -\dfrac{1}{x^2\,y} \\ -\dfrac{1}{x\,y^2} & -\dfrac{1}{x\,y^2} \end{vmatrix}$$

$$det\,H_f(A_1) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Vidíme, že Hessián vyšel roven nule, což znamená, že nemůžeme tímto způsobem rozhodnout. Budeme muset využít sílu …

4) … definice extrému

$$\Delta f = f(x_0 + h_1 \, , \, y_0 + h_2) - f(x_0 , y_0)$$

Konkrétně pro náš bod $A_1 = [1; 1]$ bude

$$(\Delta f)_{A_1} = f(1 + h_1 \, , \, 1 + h_2) - f(1 \, , 1) =$$

$$\left[\ln\left((1 + h_1) \cdot (1 + h_2)\right) + 1 + 1\right] - \left[\ln(1) + 1 + 1\right] =$$

$$\ln\left(1 + h_1 + h_2 + h_1 h_2\right) - 2.$$

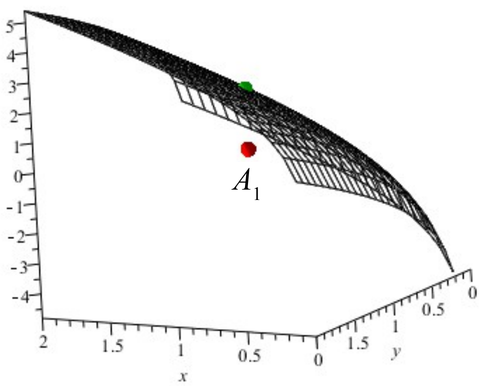
Teď musíme tento výraz prošetřit

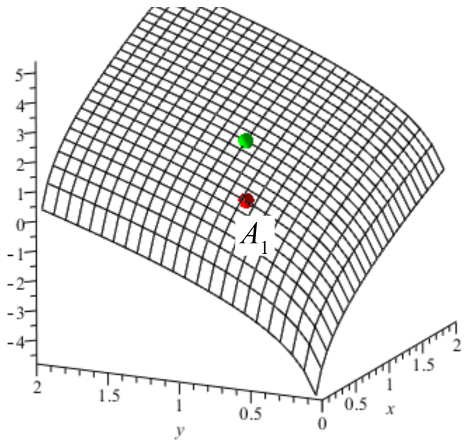
$(h_1 = 0) \wedge (h_2 = 0) \;\rightarrow\; (\Delta f)_{A_1} = -2$

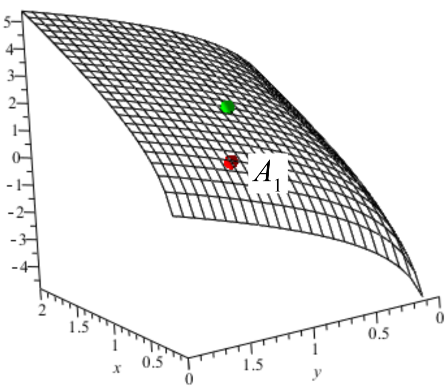
a už z tohoto výsledku je vidět, že při nulových přírůstcích h_1, h_2 je přírůstek funkce f roven – 2. To znamená, že náš stacionární bod A_1 (červený bod na obrázcích níže) vůbec neleží na ploše funkce f, ale je o 2 jednotky níž (ve směru osy z). Z toho jasně plyne, že bod A_1 ani nemůže být extrémem.

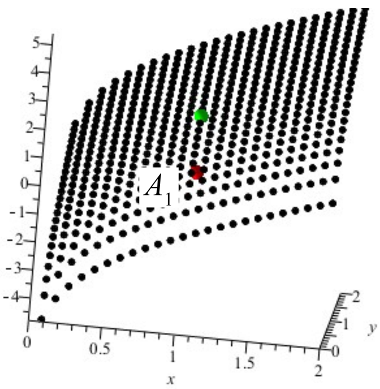
5) Závěr

Funkce nemá žádný extrém.









8. příklad

Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = \ln(x\,y) + x + \frac{y}{2}$, $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;$ $[(x>0) \wedge (y>0) \ \cup \ (x<0) \wedge (y<0)]\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x\,y} \cdot y + 1 = \frac{1}{x} + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x\,y} \cdot x + \frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{2}$$

Dostáváme soustavu

$$\frac{1}{x} + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad y = -2$$

Budeme tedy vyšetřovat jeden jediný stacionární bod $A_1 = [-1; -2]$.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

3) Hessián

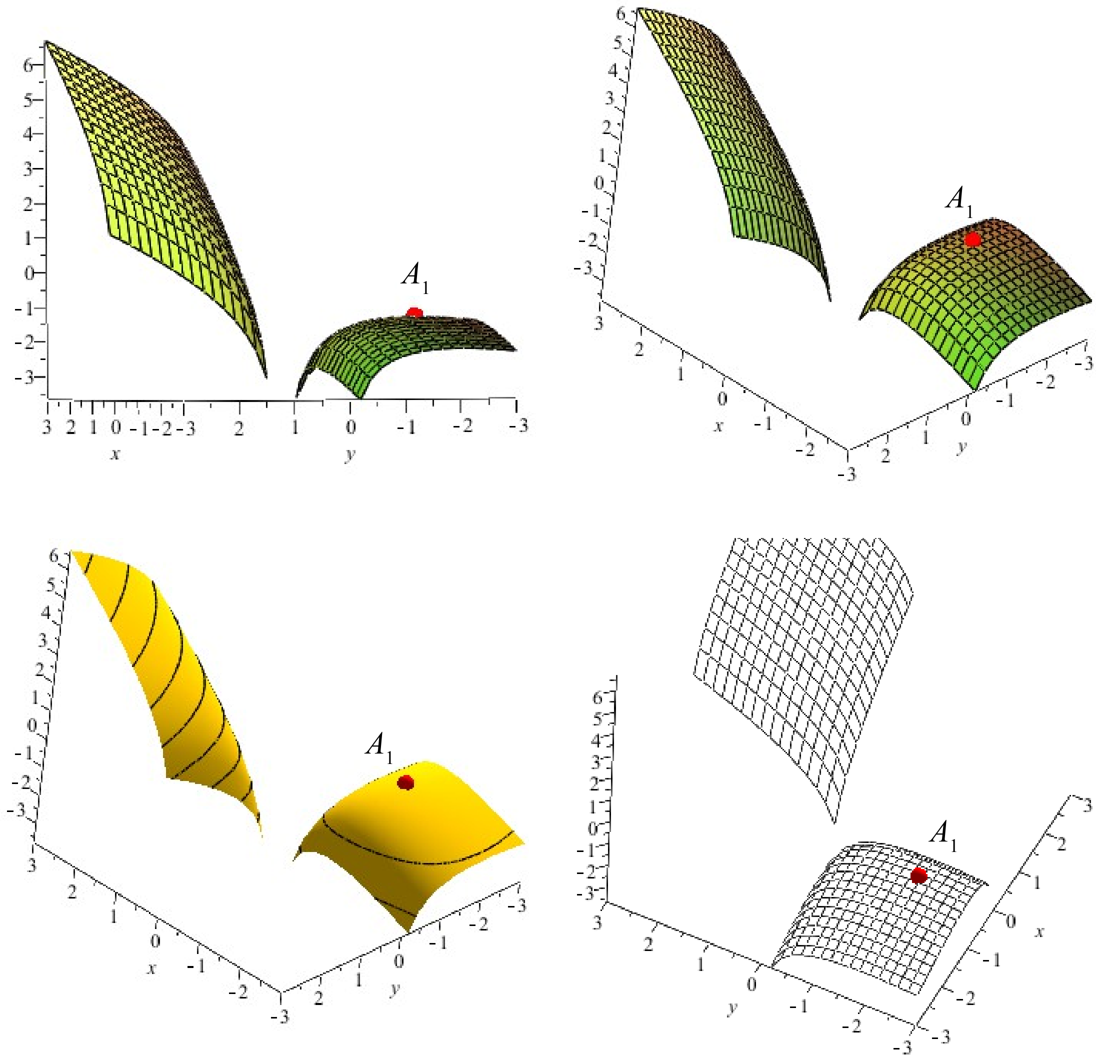
$$det\, H_f = \begin{vmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{vmatrix}$$

$$det\, H_f(A_1) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$

4) Závěr

$A_1 = [-1; -2]$: ostré lokální maximum

Všimněme si ještě podobnosti s příkladem č. 7, na rozdíl od něho tento má extrém, i když se od sebe liší jen minimálně.


A_1
x
y
A_1
x
y
A_1
x
y
A_1
y
x

9. příklad

Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = (x^2+4x) \cdot y + y^2$,

$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x+4) \cdot y \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 4x + 2y$$

Dostáváme soustavu dvou rovnic (jako vždy) o dvou neznámých

$$\begin{aligned} (2x+4) \cdot y &= 0 \\ x^2 + 4x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice je zřejmé, že $y = 0$. Toto je jedno ze dvou řešení první rovnice, ke druhému se ještě vrátíme. Teď ale dosadíme toto řešení do druhé rovnice

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x \cdot (x + 4) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = -4$$

Či-li z tohoto řešení vzejdou dva stacionární body $A_1 = [0; 0]$ a $A_2 = [-4; 0]$. A nyní zpět k první rovnici. Druhé řešení bude vypadat takto

$$2x + 4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_3 = -2\,.$$

Řešení opět dosadíme do druhé rovnice

$$(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 2y = 0$$

$$2y = 4 \qquad \rightarrow \qquad y = 2\,.$$

Dostáváme třetí a poslední stacionární bod $A_3 = [-2; 2]$.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 4$$

3) Hessián

$$\det H_f = \begin{vmatrix} 2y & 2x+4 \\ 2x+4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$det\, H_f(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -16$$

$$det\, H_f(A_2) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -16$$

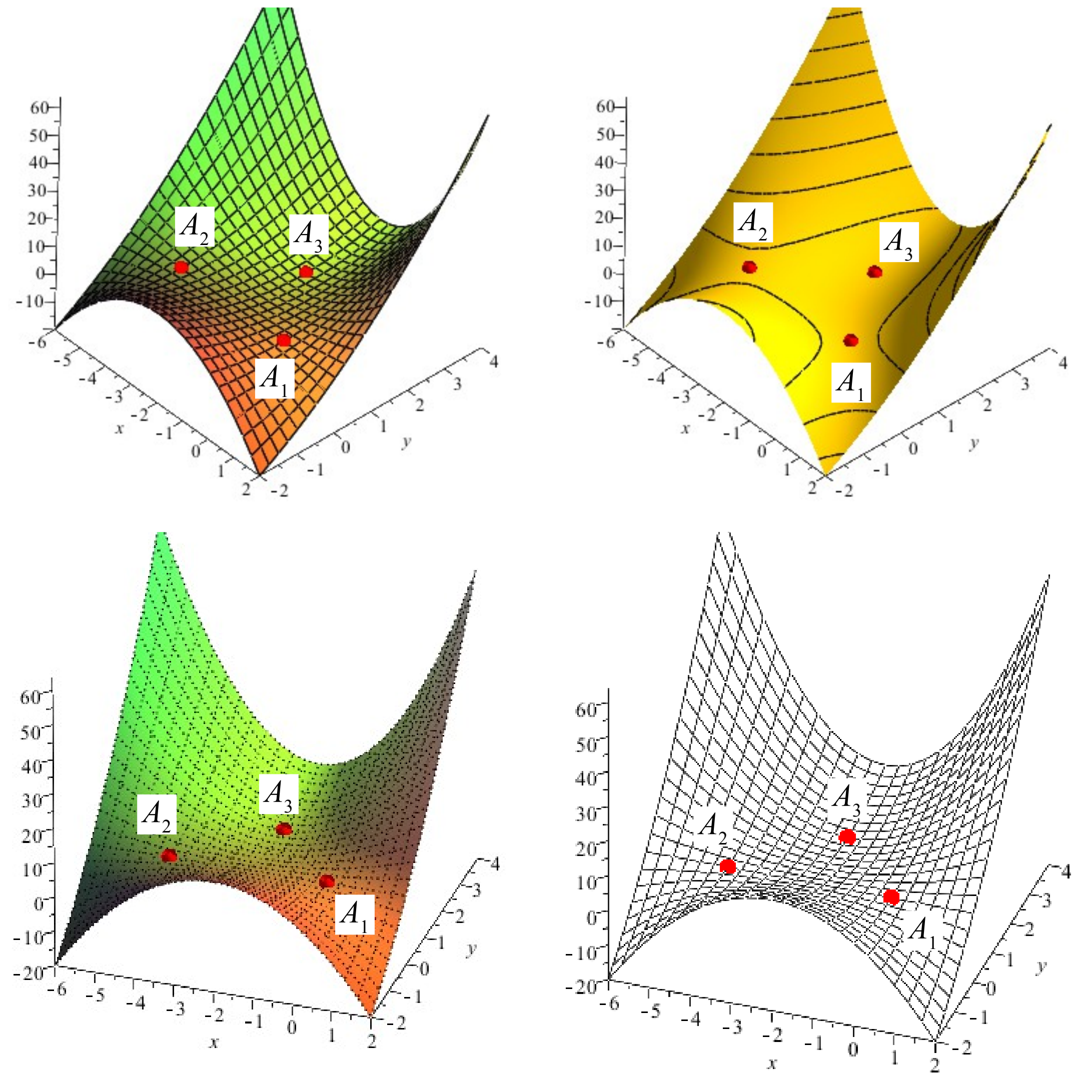
$$det\, H_f(A_3) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

4) Závěr

$A_1 = [0; 0]$: sedlový bod,

$A_2 = [-4; 0]$: sedlový bod,

$A_3 = [-2; 2]$: ostré lokální minimum.



10. příklad

Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$, $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;$ $x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -8 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} = -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot (-1) \cdot \frac{1}{y^2} + 1 = -\frac{x}{y^2} + 1$$

Obě rovnice položíme rovny nule

$$\begin{aligned} -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y} &= 0 \quad / \cdot x^2 y \\ -\frac{x}{y^2} + 1 &= 0 \quad / \cdot y^2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x^2 &= 8y \\ y^2 &= x \end{aligned}$$

Druhou rovnici dosadíme do první

$$y^4 = 8y \quad \rightarrow \quad y = \sqrt[3]{8} \quad \rightarrow \quad y = 2$$

Po dosazení do druhé rovnice dostaneme $x = 4$. Máme tedy jeden stacionární bod $A_1 = [4; 2]$, který musíme vyšetřit.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -8 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{16}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-x) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{y^3} = \frac{2x}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2}.$$

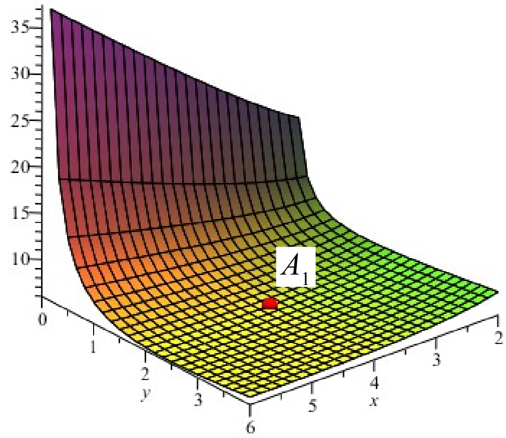
3) Hessián

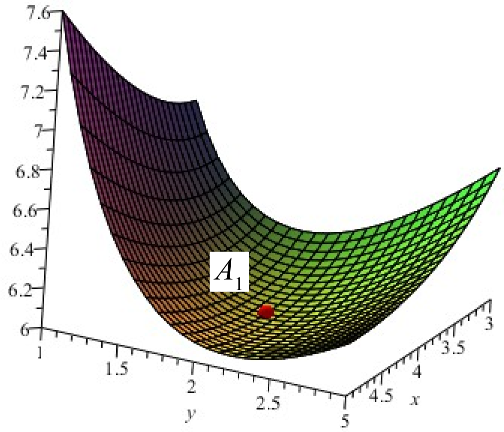
$$det\, H_f = \begin{vmatrix} \frac{16}{x^3} & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{vmatrix}$$

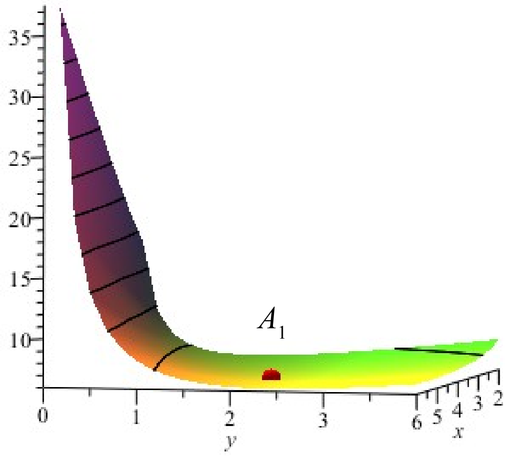
$$det\, H_f(A_1) = \begin{vmatrix} \frac{16}{64} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

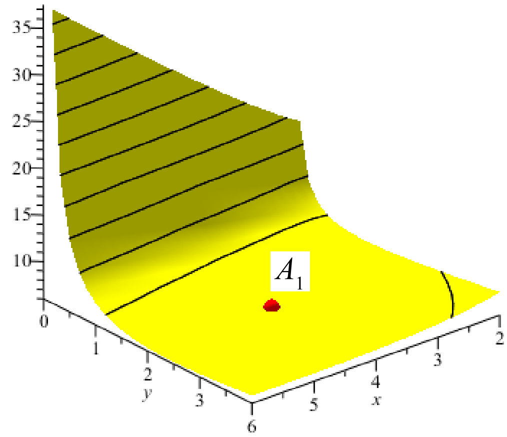
4) Závěr

$A_1 = [4; 2]$: ostré lokální minimum.









11. příklad

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y^2$,

$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6y$$

Dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 4x^3 - 4x &= 0 \\ 3y^2 - 6y &= 0 \end{aligned}$$

První rovnici upravíme

$$4x \cdot (x^2 - 1) = 0$$

$$4x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0$$

a tedy $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Teď se vrhneme na rovnici číslo dva, také ji upravíme

$$3y \cdot (y - 2) = 0$$

a tato rovnice platí pro $y_4 = 0$, $y_5 = 2$. Dostaneme tedy celkem 6 stacionárních bodů $A_1 = [0; 0]$, $A_2 = [0; 2]$, $A_3 = [1; 0]$, $A_4 = [1; 2]$, $A_5 = [-1; 0]$, $A_6 = [-1; 2]$.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4 \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 6 \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

3) Hessián

$$\det H_f = \begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 6y - 6 \end{vmatrix}$$

$$\det H_f(A_1) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 24 \qquad\qquad \det H_f(A_2) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -24$$

$$\det H_f(A_3) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -48 \qquad\qquad \det H_f(A_4) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 48$$

$$\det H_f(A_5) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -48 \qquad\qquad \det H_f(A_6) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 48$$

4) Závěr

$A_1 = [0; 0]$: ostré lokální maximum,

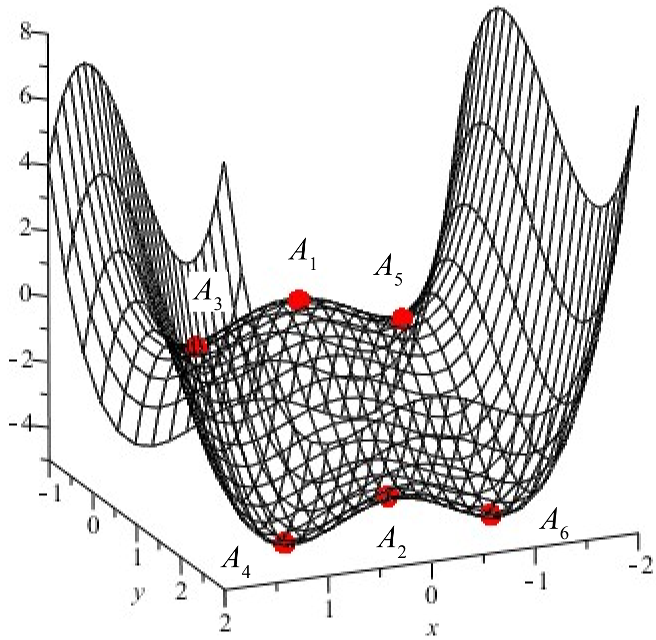
$A_2 = [0; 2]$: sedlový bod,

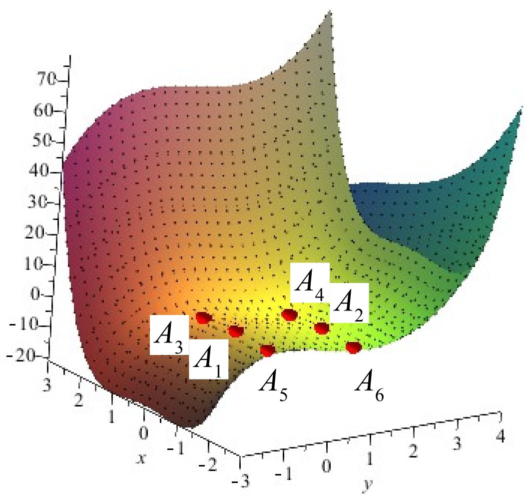
$A_3 = [1; 0]$: sedlový bod,

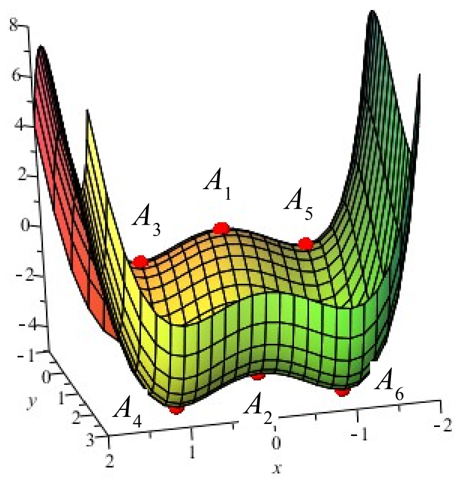
$A_4 = [1; 2]$: ostré lokální minimum,

$A_5 = [-1; 0]$: sedlový bod,

$A_6 = [-1; 2]$: ostré lokální minimum.







12. příklad

Najděte všechny lokální extrémy funkce $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{1}{3}y^3 +$

$+ \frac{1}{2}y^2 - 20y$, $D_f = \{x, y \in \mathbb{R}\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + x - 6 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + y - 20$$

Dostáváme soustavu

$$\begin{array}{lll} x^2 + x - 6 = 0 & \rightarrow & x_1 = -3,\ x_2 = 2 \\ y^2 + y - 20 = 0 & \rightarrow & y_1 = -5,\ y_2 = 4 \end{array}$$

Protože každá z rovnic obsahuje jen jednu proměnnou, nemáme jak zjistit, které *x* patří ke kterému *y*, proto musíme zkombinovat každý z každým. Dostaneme celkem 4 stacionární body $A_1 = [-3; -5]$, $A_2 = [-3; 4]$, $A_3 = [2; -5]$ a $A_4 = [2; 4]$.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x + 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2y + 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

3) Hessián

$$det\, H_f = \begin{vmatrix} 2x+1 & 0 \\ 0 & 2y+1 \end{vmatrix}$$

$$det\, H_f(A_1) = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 45$$

$$det\, H_f(A_2) = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = -45$$

$$det\, H_f(A_3) = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -45$$

$$det\, H_f(A_4) = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 45$$

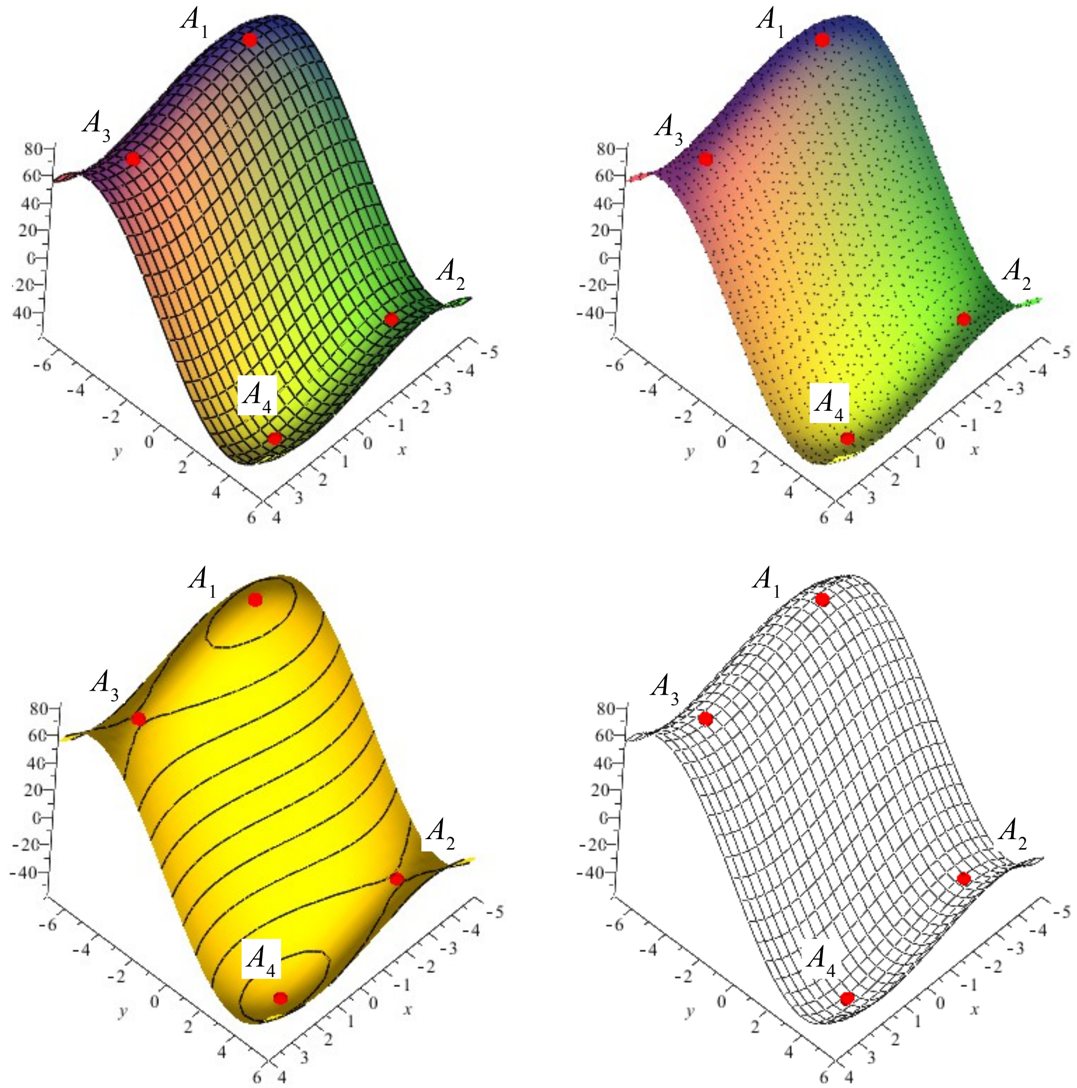
4) Závěr

$A_1 = [-3; -5]$: ostré lokální maximum,

$A_2 = [-3; 4]$: sedlový bod,

$A_3 = [2; -5]$: sedlový bod,

$A_4 = [2; 4]$: ostré lokální minimum.



13. příklad

Vyšetřete lokální extrémy u funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \cdot (x^2 + y^2) = x^3 + x y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y \cdot (x^2 + y^2) = y^3 + x^2 y$$

Dostáváme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} x \cdot (x^2 + y^2) &= 0 \\ y \cdot (x^2 + y^2) &= 0 \end{aligned}$$

Obě rovnice vydělíme členem $x^2 + y^2$ (potom se k němu ještě vrátíme) a zůstane nám dvojice řešení $x = 0$ a $y = 0$. První a vlastně i jediný stacionární bod je $A_1 = [0; 0]$, protože onen člen $x^2 + y^2 = 0$ poskytne to samé řešení.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 3x^2 + y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3y^2 + x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2xy$$

3) Hessián

$$det\, H_f = \begin{vmatrix} 3x^2 + y^2 & 2xy \\ 2xy & 3y^2 + x^2 \end{vmatrix}$$

$$det\, H_f(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Vidíme, že Hessián vyšel nulový, není tedy možné tímto způsobem rozhodnout o chování funkce f v okolí bodu A_1. Budeme tedy muset použít …

4) … definici extrému

$$(\Delta f)_{A_1} = f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$(\Delta f)_{A_1} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$(h_1 = 0) \wedge (h_2 = 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} = 0$$

$$(h_1 = 0) \wedge (h_2 \neq 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} > 0$$

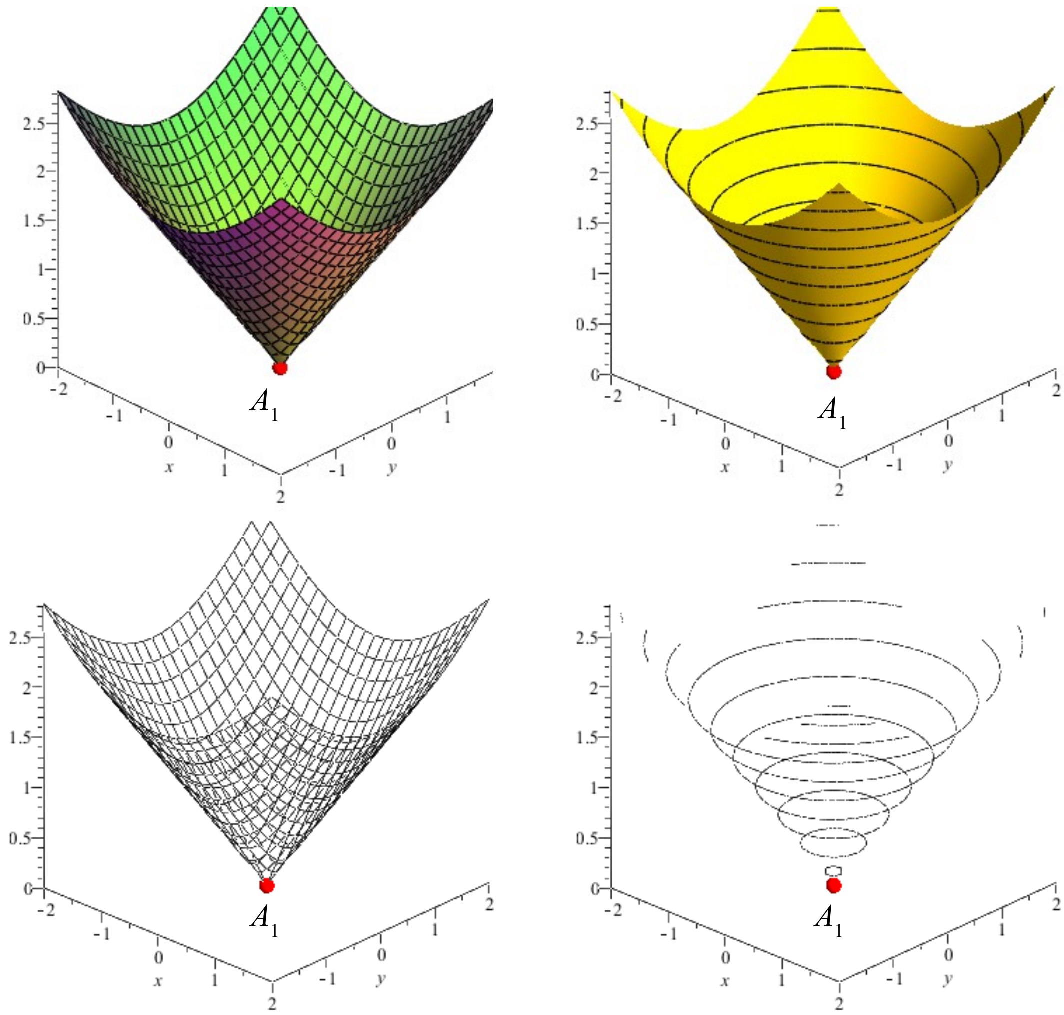
$$(h_1 \neq 0) \wedge (h_2 = 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} > 0$$

$$(h_1 \neq 0) \wedge (h_2 \neq 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} > 0$$

5) Závěr

Vidíme, že pro nenulové přírůstky h_1, h_2 je přírůstek funkce Δf vždy kladný. To znamená, že v bodě A_1 nastává ostré lokální a zároveň i globální minimum (což je patrné i z následujících obrázků).

$A_1 = [0; 0]$: ostré lokální minimum.



14. příklad

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 1 - \sqrt[5]{(x-2)^4} - \sqrt[5]{y^4}$,

$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x-2)^{\frac{4}{5}} \right) = -\frac{4}{5} \cdot (x-2)^{-\frac{1}{5}} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{4}{5} \cdot y^{-\frac{1}{5}} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{y}}$$

Obě rovnice položíme rovny nule

$$-\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}} = 0$$

$$-\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{y}} = 0$$

V obou rovnicích je proměnná ve jmenovateli. To znamená, že pokud bude jmenovatel roven nule, rovnice nebude mít v oboru reálných čísel řešení. V první rovnici by tuto situaci způsobila proměnná $x = 2$, ve druhé $y = 0$. Tím dostaneme bod $A_1 = [2; 0]$, ve kterém není parciální derivace prvního řádu definovaná. Ale to neznamená, že tam nebude žádný extrém.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{5} \cdot (x-2)^{-\frac{6}{5}} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{(x-2)^6}}$$

Vidíme, že druhá derivace opět ve jmenovateli obsahuje proměnnou, tzn. že nebude možné náš bod A_1 do ní dosadit. Podobně na tom budou i zbývající parciální derivace druhého řádu. Tím pádem nebude možné sestavit Hessián a my budeme muset najít jiný způsob jak náš bod A_1 vyšetřit. Tam kde derivace selhala, nám pomůže …

3) … definice extrému

$$\Delta f = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)$$

Teď už jenom dosadíme souřadnice bodu A_1.

$$(\Delta f)_{A_1} = f(2+h_1, 0+h_2) - f(2,0) =$$
$$1 - \sqrt[5]{(2+h_1-2)^4} - \sqrt[5]{h_2^4} - 1 - \sqrt[5]{(2-2)^4} - \sqrt[5]{0^4} =$$
$$-\sqrt[5]{h_1^4} - \sqrt[5]{h_2^4} = -\left(\sqrt[5]{h_1^4} + \sqrt[5]{h_2^4}\right)$$

Tento výraz nyní prošetříme „ze všech stran“, či-li za přírůstky h_1, h_2 budeme dosazovat kladné (h_1, $h_2 > 0$) a záporné (h_1, $h_2 < 0$) hodnoty a budeme sledovat jak se bude funkce f chovat. Jelikož jsou ale obě proměnné h_1, h_2 ve čtvrté mocnině, bude výraz

$$\sqrt[5]{h_1^4} + \sqrt[5]{h_2^4}$$

vždy kladný, takže stačí použít h_1, $h_2 \neq 0$.

a) $(h_1 = 0) \wedge (h_2 = 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} = 0$

b) $(h_1 = 0) \wedge (h_2 \neq 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} < 0$

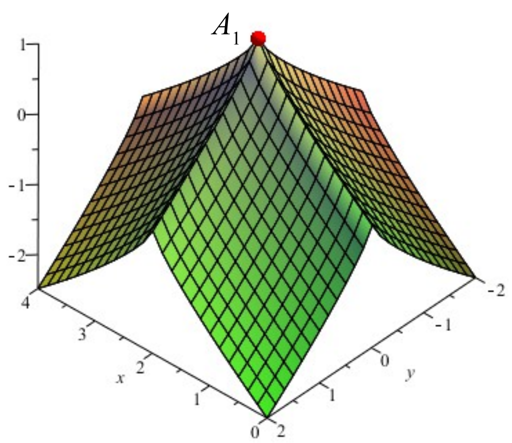
c) $(h_1 \neq 0) \wedge (h_2 = 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} < 0$

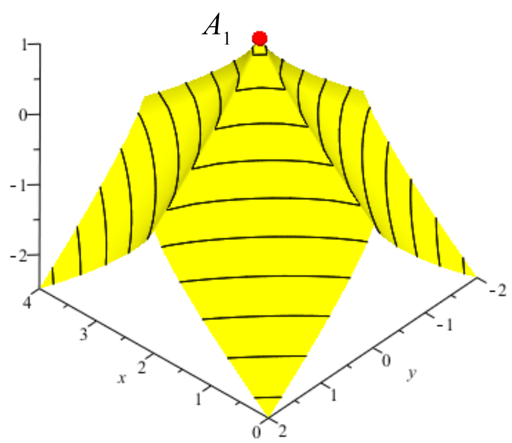
d) $(h_1 \neq 0) \wedge (h_2 \neq 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} < 0$

Vidíme, že ve všech případech – samozřejmě kromě toho, kdy jsou oba přírůstky nulové – má funkce klesající tendenci. To znamená, že bod, který jsme vyšetřovali (A_1), je lokálním maximem funkce f a od něho ve všech směrech funkční hodnoty klesají.

4) Závěr

$A_1 = [2; 0]$: ostré lokální maximum.





15. příklad

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}} \cdot (x + y^2)$, $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} (x + y^2) + e^{\frac{x}{2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y e^{\frac{x}{2}}$$

Obě rovnice položíme rovny nule

$$\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} (x + y^2) + e^{\frac{x}{2}} = 0$$

$$2y e^{\frac{x}{2}} = 0$$

První rovnici vynásobíme dvěma a zároveň na levé straně vytkneme člen $e^{\frac{x}{2}}$, druhou rovnici dvěma podělíme a dostaneme

$$e^{\frac{x}{2}} (y^2 + x + 2) = 0$$

$$e^{\frac{x}{2}} y = 0$$

Nyní obě rovnice vydělíme členem $e^{\frac{x}{2}}$ a získáme

$$y^2 + x + 2 = 0$$

$$y = 0$$

Druhou rovnici dosadíme do první a vyjde nám $x = -2$. Máme tedy jeden stacionární bod $A_1 = [-2; 0]$.

Rýpalové by mohli namítnout, že jsme se nahoře zbavili členu $e^{\frac{x}{2}}$, který by mohl poskytnout další řešení. Vraťme se tedy k němu. V obou rovnicích je tento člen v součinu, či-li obě rovnice po vydělení jeho násobitelem dají stejný výraz

$$e^{\frac{x}{2}} = 0$$

Po zlogaritmování

$$\frac{x}{2} \ln(e) = \ln(0)$$

Jelikož ale $\ln(0)$ neexistuje, celá rovnice nemá řešení! A tedy o žádný stacionární bod jsme se nepřipravili, pokračujme tedy dále.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\cdot(x+y^2)+e^{\frac{x}{2}}\right)+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}\cdot(x+y^2)+e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x+y^2}{4}+1\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = y\,e^{\frac{x}{2}}$$

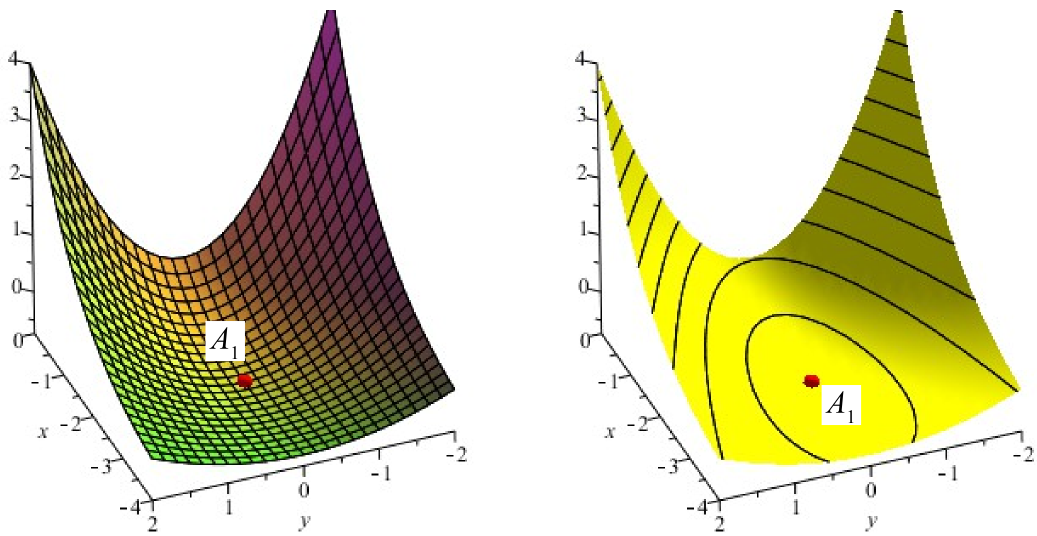
3) Hessián

$$det\,H_f = \begin{vmatrix} e^{\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x+y^2}{4}+1\right) & y\,e^{\frac{x}{2}} \\ y\,e^{\frac{x}{2}} & 2e^{\frac{x}{2}} \end{vmatrix}$$

$$det\,H_f(A_1) = \begin{vmatrix} e^{-1}\cdot\left(-\frac{2}{4}+1\right) & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{vmatrix} = \frac{1}{2e}\cdot\frac{2}{e} = \frac{1}{e^2} > 0$$

4) Závěr

$A_1 = [-2; 0]$: ostré lokální minimum.



16. příklad

Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = y \cdot \ln(x^2 + y)$, $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y > 0\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{x^2 + y} \cdot 2x = \frac{2xy}{x^2 + y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y}$$

Dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\frac{2xy}{x^2 + y} = 0$$
$$\ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y} = 0$$

Z první rovnice dostaneme

$$2xy = 0.$$

Tato rovnost nastává ve dvou případech, když buď $x = 0$ nebo $y = 0$. Vezmeme postupně oba případy a dosadíme je do druhé rovnice, abychom získali jejich protějšky.

x = 0:

$$\ln y + \frac{y}{y} = 0$$
$$\ln y = -1$$
$$y = \mathrm{e}^{-1}$$

y = 0:

$$\ln x^2 = 0$$
$$\ln x^2 = \ln 1$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

Získali jsme tedy celkem 3 stacionární body $A_1 = [0; \mathrm{e}^{-1}]$, $A_2 = [1; 0]$, $A_3 = [-1; 0]$.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y \cdot (x^2 + y) - 2xy \cdot 2x}{(x^2 + y)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2 y}{(x^2 + y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2 + y} + \frac{x^2}{(x^2 + y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2x^3}{(x^2 + y)^2}$$

3) Hessián

$$det\,H_f = \begin{vmatrix} \dfrac{2\,y^2 - 2\,x^2\,y}{(x^2+y)^2} & \dfrac{2\,x^3}{(x^2+y)^2} \\ \dfrac{2\,x^3}{(x^2+y)^2} & \dfrac{1}{x^2+y} + \dfrac{x^2}{(x^2+y)^2} \end{vmatrix}$$

$$det\,H_f(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \mathrm{e} \end{vmatrix} = 2\,\mathrm{e}$$

$$det\,H_f(A_2) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

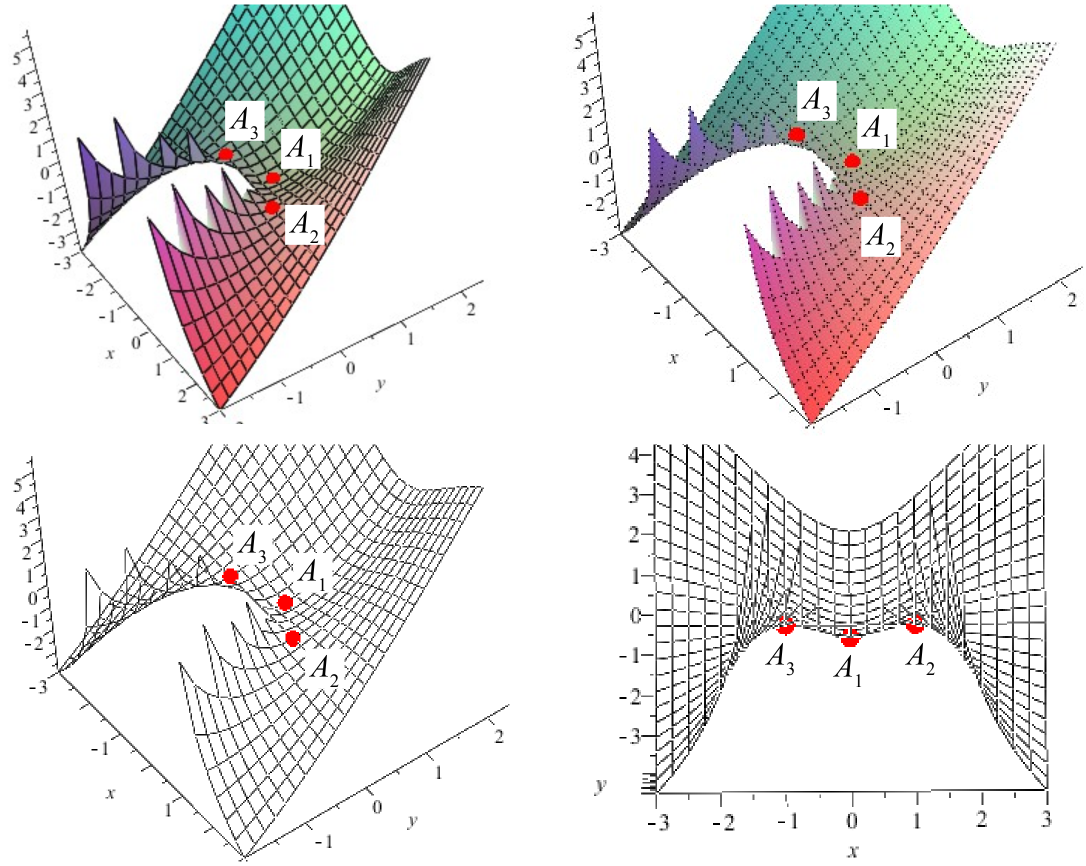
$$det\,H_f(A_3) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

4) Závěr

$A_1 = [0;\, \mathrm{e}^{-1}]$: ostré lokální minimum,

$A_2 = [1;\, 0]$: sedlový bod,

$A_3 = [-1;\, 0]$: sedlový bod.



17. příklad

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 e^{x-y} + 2y e^{x-y}$, $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y} \cdot (x^2 + 2y) + e^{x-y} \cdot 2x = e^{x-y} \cdot (2x + 2y + x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - e^{x-y} \cdot (x^2 + 2y) + e^{x-y} \cdot 2 = e^{x-y} \cdot (2 - 2y - x^2)$$

Dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} e^{x-y} \cdot (2x + 2y + x^2) &= 0 \\ e^{x-y} \cdot (2 - 2y - x^2) &= 0 \end{aligned}$$

Způsobů jak tuto soustavu vyřešit je několik. My to vezmeme tím nejkratším. Obě rovnice vydělíme členem e^{x-y} (potom se k němu vrátíme). Dostaneme podstatně lépe vyhlížející soustavu

$$\begin{aligned} 2x + 2y + x^2 &= 0 \\ 2 - 2y - x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Nyní uděláme to nejjednodušší co se nabízí, obě rovnice sečteme a dostaneme

$$2x + 2 = 0,$$

tedy $x = -1$.

Tuto hodnotu dosadíme do jedné rovnice ze soustavy výše a dostaneme $y = \frac{1}{2}$.

Máme jeden jediný stacionární bod $A_1 = \left[-1 ; \frac{1}{2}\right]$. Ještě se ale vrátíme k nedořešené části $e^{x-y} = 0$. Tato rovnice ale řešení nemá, protože po zlogaritmování dostaneme

$$\ln e^{x-y} = \ln 0$$

Vidíme, že pravá strana rovnice je neřešitelná (logaritmus nuly neexistuje).

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x-y} \cdot (2x + 2y + x^2) + e^{x-y} \cdot (2x + 2) = e^{x-y} \cdot (4x + 2y + x^2 + 2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = - e^{x-y} \cdot (2 - 2y - x^2) + e^{x-y} \cdot (-2) \quad = e^{x-y} \cdot (2y + x^2 - 4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \mathrm{e}^{x-y}\cdot\left(2-2y-x^2\right)+\mathrm{e}^{x-y}\cdot\left(-2x\right)=\mathrm{e}^{x-y}\cdot\left(2-2x-2y-x^2\right)$$

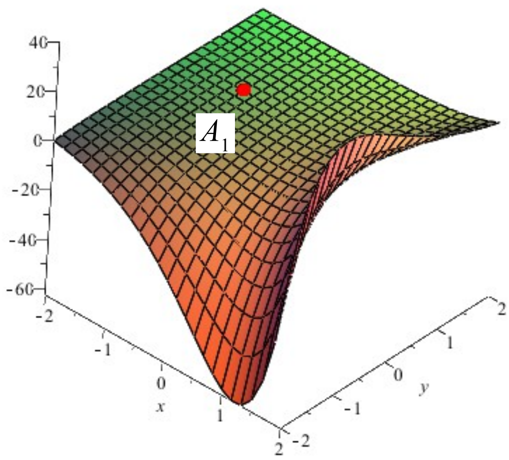
3) Hessián

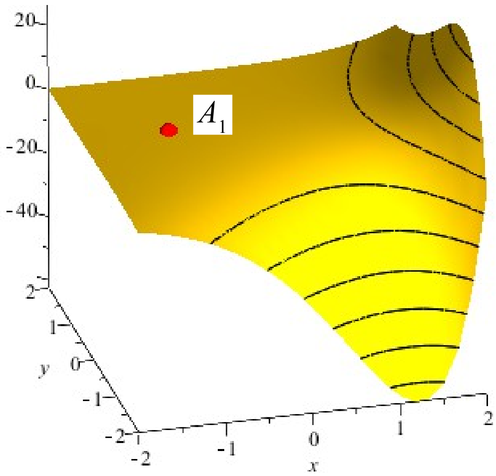
$$det\,H_f = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{x-y}\cdot\left(4x+2y+x^2+2\right) & \mathrm{e}^{x-y}\cdot\left(2-2x-2y-x^2\right) \\ \mathrm{e}^{x-y}\cdot\left(2-2x-2y-x^2\right) & \mathrm{e}^{x-y}\cdot\left(2y+x^2-4\right) \end{vmatrix}$$

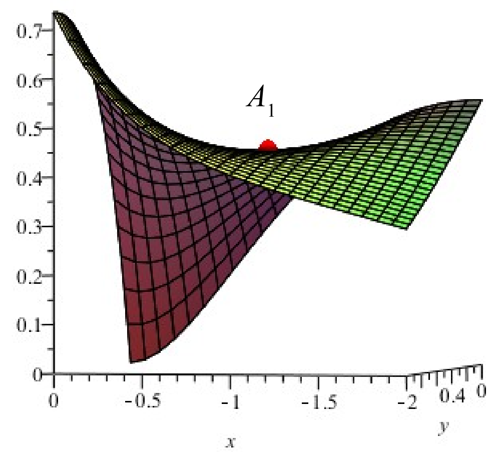
$$det\,H_f\left(A_1\right) = \begin{vmatrix} 0 & 2\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \\ 2\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} & -2\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = -4\,\mathrm{e}^{-3} = -\frac{4}{\mathrm{e}^3}$$

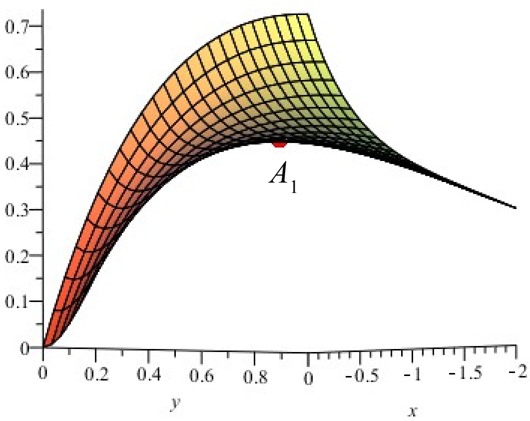
4) Závěr

$A_1 = \left[-1\,;\,\frac{1}{2}\right]$: sedlový bod.









18. příklad

Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = (2x^2 - 3y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$,

$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x e^{-x^2-y^2} + (2x^2 + 3y^2) \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2-y^2} \cdot (4x - 4x^3 - 6xy^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y e^{-x^2-y^2} + (2x^2 + 3y^2) \cdot (-2y) \cdot e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2-y^2} \cdot (6y - 4x^2 y - 6y^3)$$

Dostaneme soustavu dvou rovnic

$$e^{-x^2-y^2} \cdot (4x - 4x^3 - 6xy^2) = 0$$

$$e^{-x^2-y^2} \cdot (6y - 4x^2 y - 6y^3) = 0$$

Obě rovnice vydělíme členem $e^{-x^2-y^2}$ (později se k němu vrátíme) a získáme soustavu

$$4x - 4x^3 - 6xy^2 = 0 \qquad (1)$$

$$6y - 4x^2 y - 6y^3 = 0 \qquad (2)$$

Nyní z první rovnice vytkneme *x*, ze druhé *y* a obě rovnice vydělíme dvěma

$$x \cdot (2 - 2x^2 - 3y^2) = 0$$

$$y \cdot (3 - 2x^2 - 3y^2) = 0$$

Z obou rovnic získáváme $x = 0$ a $y = 0$ a obě rovnice těmito členy před závorkou vydělíme, dostáváme

$$2 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \qquad (3)$$

$$3 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \qquad (4)$$

Teď ze (4) vytkneme x

$$x = \sqrt{\frac{3 - 3y^2}{2}}$$

a dosadíme do (3)

$$2 - 2 \cdot \frac{3 - 3y^2}{2} - 3y^2 = 0$$

Po úpravě

$$2 - 3 + 3y^2 - 3y^2 = 0$$

Dostáváme vztah $-1 = 0$, což samozřejmě není pravda, tedy tato rovnice nemá řešení.

Zkusíme tedy vzít řešení $x = 0$ a dosadit do (2).

$$6y^3 = 6y \ \rightarrow y = \pm 1$$

No vida a máme první dva stacionární body $A_1 = [0;\ 1]$, $A_2 = [0;\ -1]$. Teď vezmeme řešení $y = 0$ a dosadíme do (1).

$$4x^3 = 4x \ \rightarrow x = \pm 1$$

Další dva stacionární body jsou na světě – $A_3 = [1;\ 0]$, $A_4 = [-1;\ 0]$. A posledním podezřelým bodem bude $A_5 = [0;\ 0]$, protože vyhovuje oběma rovnicím (1), (2).

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cdot\left(4x - 4x^3 - 6xy^2\right) + \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cdot\left(4 - 12x^2 - 6y^2\right) =$$
$$= \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cdot\left(-20x^2 + 8x^4 + 12x^2y^2 + 4 - 6y^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2y\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cdot\left(6y - 4x^2y - 6y^3\right) + \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cdot\left(6 - 4x^2 - 18y^2\right) =$$
$$= \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cdot\left(-30y^2 + 12y^4 + 8x^2y^2 + 6 - 4x^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cdot\left(6y - 4x^2y - 6y^3\right) + \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cdot\left(-8xy\right) =$$
$$= \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cdot\left(-20xy + 8x^3y + 12xy^3\right)$$

3) Hessián

$$det\,H_f(A_1) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathrm{e}}\cdot(-30 + 12 + 6) \end{vmatrix} = \frac{24}{\mathrm{e}^2}$$

$$det\,H_f(A_2) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathrm{e}}\cdot(-30 + 12 + 6) \end{vmatrix} = \frac{24}{\mathrm{e}^2}$$

$$det\,H_f(A_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\mathrm{e}}\cdot(-20 + 4 + 8) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathrm{e}}\cdot(6 - 4) \end{vmatrix} = -\frac{16}{\mathrm{e}^2}$$

$$det\, H_f(A_4) = \begin{vmatrix} \frac{1}{e}\cdot(-20+4+8) & 0 \\ 0 & \frac{1}{e}\cdot(6-4) \end{vmatrix} = -\frac{16}{e^2}$$

$$det\, H_f(A_5) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24$$

4) Závěr

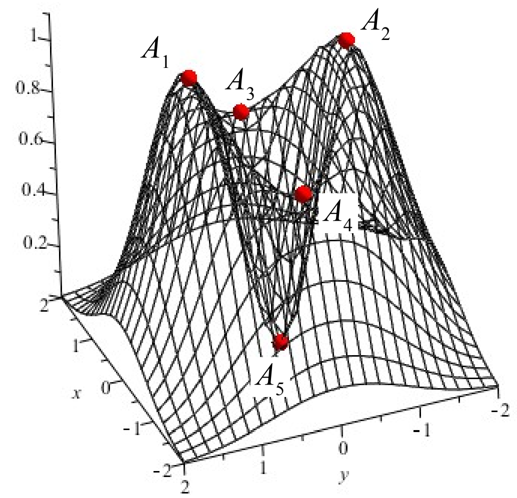
$A_1 = [0; 1]$: ostré lokální maximum,

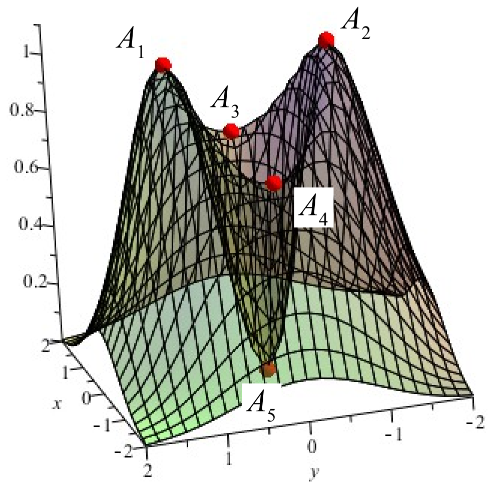
$A_2 = [0; -1]$: ostré lokální maximum,

$A_3 = [1; 0]$: sedlový bod,

$A_4 = [-1; 0]$: sedlový bod,

$A_5 = [0; 0]$: ostré lokální minimum.





19. příklad

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x \cdot y \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot (\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2x) = y \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (1-x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot (\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + y \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2y) = x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (1-y^2)$$

Dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, která na první pohled nevypadá úplně jednoduše

$$\begin{aligned} y \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (1-x^2) &= 0 \\ x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (1-y^2) &= 0 \end{aligned}$$

Ale jelikož výraz

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

nemůže být roven nule, můžeme obě rovnice tímto výrazem vydělit. Tím se nám řešení značně zjednoduší

$$\begin{aligned} y \cdot (1-x^2) &= 0 \\ x \cdot (1-y^2) &= 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme tyto řešení

$$y_1 = 0 \,,\, x_{2,3} = \pm 1$$

No a když postupně každé z těchto řešení dosadíme do druhé rovnice dostaneme

$$x_1 = 0 \,,\, y_{2,3} = \pm 1$$

A tedy máme celkem 5 stacionárních bodů k prošetření. Jsou to tyto: A_1 = [0; 0], A_2 = [1; 1], A_3 = [1; –1], A_4 = [–1; 1], A_5 = [–1; –1].

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2x\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (1-x^2) + \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-2x)\right) = x\,y\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (x^2-3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2y\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (1-y^2) + \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-2y)\right) = x\,y\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (y^2-3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = (1-y^2)\cdot\left[e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2x\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right] = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(1-y^2)\cdot(1-x^2)$$

3) Hessián

$$det\,H_f = \begin{vmatrix} x\,y\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(x^2-3) & e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(1-y^2)\cdot(1-x^2) \\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(1-y^2)\cdot(1-x^2) & x\,y\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(y^2-3) \end{vmatrix},$$

$$det\,H_f(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\,,$$

$$det\,H_f(A_2) = \begin{vmatrix} -2\,e^{-1} & 0 \\ 0 & -2\,e^{-1} \end{vmatrix} = 4\,e^{-2},\quad det\,H_f(A_3) = \begin{vmatrix} 2\,e^{-1} & 0 \\ 0 & 2\,e^{-1} \end{vmatrix} = 4\,e^{-2},$$

$$det\,H_f(A_4) = \begin{vmatrix} 2\,e^{-1} & 0 \\ 0 & 2\,e^{-1} \end{vmatrix} = 4\,e^{-2},\qquad det\,H_f(A_5) = \begin{vmatrix} -2\,e^{-1} & 0 \\ 0 & -2\,e^{-1} \end{vmatrix} = 4\,e^{-2}.$$

4) Závěr

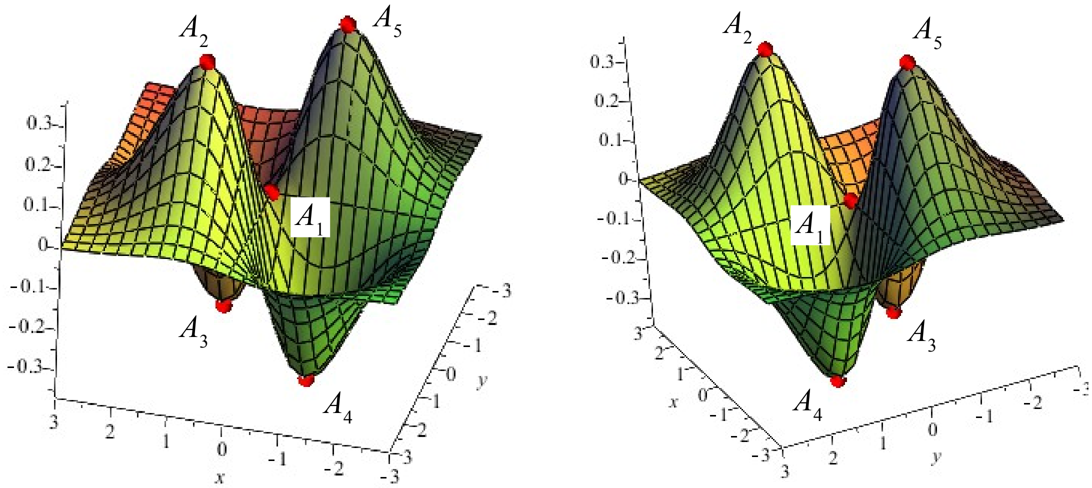
$A_1 = [0; 0]$: sedlový bod,

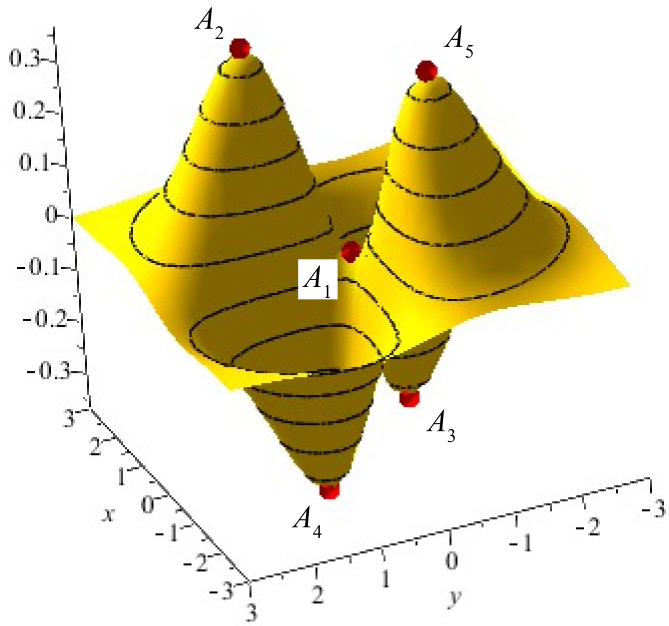
$A_2 = [1; 1]$: ostré lokální maximum,

$A_3 = [1; -1]$: ostré lokální minimum,

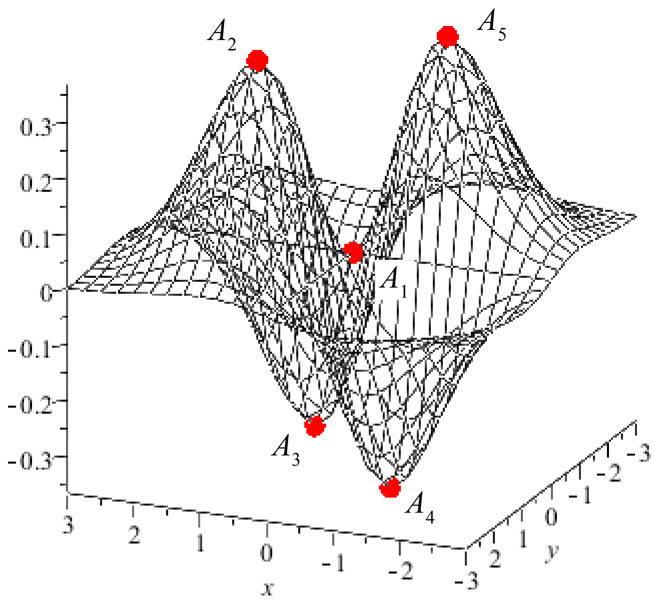
$A_4 = [-1; 1]$: ostré lokální minimum,

$A_5 = [-1; -1]$: ostré lokální maximum.





A_2
A_5
A_1
A_3
A_4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
x
y



A_2
A_5
A_1
A_3
A_4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
x
y

20. příklad

Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 \cdot y^2$, $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cdot 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cdot 2y$$

Dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} y^2 \cdot 2x &= 0 \\ 2y \cdot x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Všimněme si, že obě rovnice mají řešení, když buď $y = 0$, pak může x být jakékoliv nebo $x = 0$ a y jakékoliv, tedy dostáváme stacionární přímky $A_1 = [x, 0]$, $A_2 = [0, y]$. Z těchto dvou vyjmeme zvlášť jejich průsečík $A_3 = [0; 0]$.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$$

3) Hessián

$$det\, H_f = \begin{vmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{vmatrix}$$

$$det\, H_f(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$det\, H_f(A_2) = \begin{vmatrix} 2y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$det\, H_f(A_3) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Vidíme, že Hessián v A_1, A_2 vyšel nulový, tzn. že nemůžeme rozhodnout o extrémnosti touto cestou a přímky A_1, A_2 budeme muset vyšetřit pomocí …

4) … definice extrémů

Čili budeme zkoumat znaménko Δf pro velmi malé přírůstky $|\bar{h}|$. Je-li toto znaménko stále stejné, jedná se o extrém.

Obecně tedy použijeme předpis

$$\Delta f = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_{0,} y_0)$$

kde h_1, h_2 jsou právě ony malé přírůstky $|\,\bar{h}\,|$.

Pro A_1 bude tedy platit

$$\begin{aligned}(\Delta f)_{A_1} &= f(x + h_1, h_2) - f(x, 0) = (x + h_1)^2 \cdot h_2^2 - x^2 \cdot 0^2 = \\ &= (x^2 + 2h_1 x + h_1^2) \cdot h_2^2 = h_2^2 x^2 + 2h_1 h_2^2 x + h_1^2 h_2^2\end{aligned}$$

Pro malá $|\,\bar{h}\,|$ rozhoduje o velikosti Δf nejnižší mocnina $h_i h_k$ (když např. $h = 0{,}01$, pak $h^2 = 0{,}0001$, $h^3 = 0{,}000001$, atd.), proto znaménko Δf bude určovat výraz (Prágerová [4], str. 523)

$$(\Delta f)_{A_1} \equiv h_2^2 x^2 \quad \begin{array}{l} \dashrightarrow \quad (x \neq 0) \wedge (h_2 \neq 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} > 0 \\ \dashrightarrow \quad (x \neq 0) \wedge (h_2 = 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} = 0 \end{array}$$

Tudíž A_1 (celá osa x) je neostré lokální minimum. Ke stejnému závěru dospějeme i u A_2 (celá osa y), jelikož

$$\begin{aligned}(\Delta f)_{A_2} &= f(h_1, y + h_2) - f(0, y) = h_1^2 \cdot (y + h_2)^2 - 0^2 \cdot y^2 = \\ &= h_1^2 \cdot (y^2 + 2h_2 y + h_2^2) = h_1^2 y^2 + 2h_1^2 h_2 y + h_1^2 h_2^2\end{aligned}$$

Velikost Δf bude opět určovat nejmenší mocnina $h_i h_k$, tedy v tomto případě člen

$$(\Delta f)_{A_2} \equiv h_1^2 y^2 \quad \begin{array}{l} \dashrightarrow \quad (y \neq 0) \wedge (h_1 \neq 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_2} > 0 \\ \dashrightarrow \quad (y \neq 0) \wedge (h_1 = 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_2} = 0 \end{array}$$

Znovu vidíme, že $(\Delta f)_{A_2} \geq 0$, z čehož plyne, že A_2 je neostré lokální minimum.

Teď ještě zbývá vyšetřit bod $A_3 = [0; 0]$. Tušíme, protože se jedná o průsečík dvou neostrých minim, že bod A_3 bude rovněž neostré minimum. Pojďme to zjistit.

$$(\Delta f)_{A_3} = f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) = h_1^2 h_2^2$$

$$(\Delta f)_{A_3} = h_1^2 h_2^2 \quad \begin{array}{ll} \dashrightarrow \quad (h_1 = 0) \wedge (h_2 = 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_3} = 0 & \\ \dashrightarrow \quad (h_1 \neq 0) \wedge (h_2 = 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_3} = 0 & \text{(směr osy } x\text{)} \\ \dashrightarrow \quad (h_1 = 0) \wedge (h_2 \neq 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_3} = 0 & \text{(směr osy } y\text{)} \\ \dashrightarrow \quad (h_1 \neq 0) \wedge (h_2 \neq 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_3} > 0 & \text{(obecný směr)} \end{array}$$

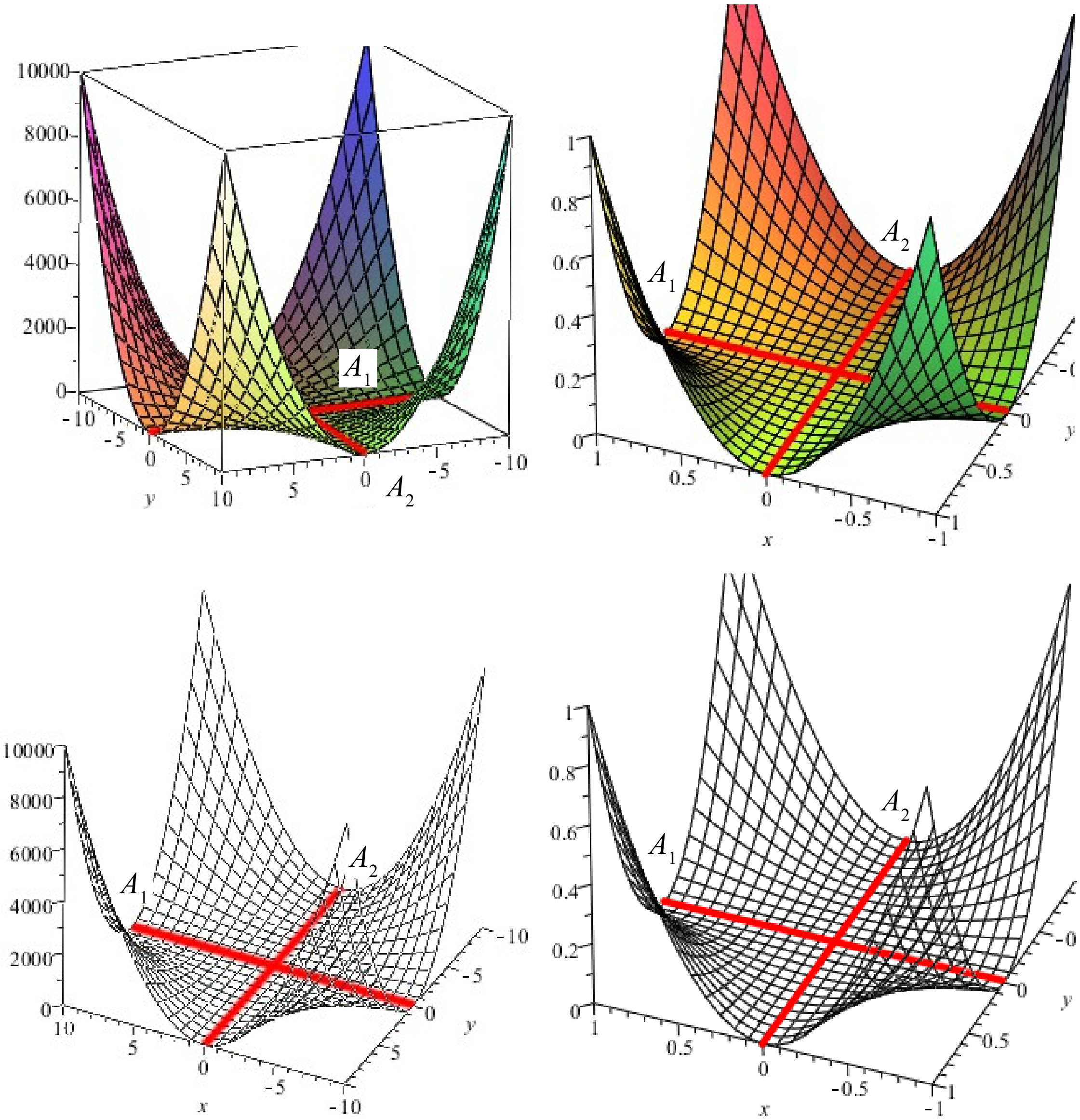
Jak je vidět, ve směrech os x a y (tedy našich A_1 a A_2) jsou přírůstky nulové, ale v obecném směru funkční hodnota narůstá. To znamená, že v bodě A_3 se nachází neostré lokální minimum.

5) Závěr

A_1 = [x; 0]: neostré lokální minimum,

A_2 = [0; y]: neostré lokální minimum,

A_3 = [0; 0]:neostré lokální minimum.



21. příklad

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 \cdot y^2$, $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y$$

Dostaneme soustavu rovnic

$$3x^2 \cdot y^2 = 0$$
$$2x^3 \cdot y = 0$$

Obě rovnice mají řešení, když buď $y = 0$, pak může x být jakékoliv nebo $x = 0$ a y jakékoliv, tedy dostáváme stacionární přímky $A_1 = [x, 0]$, $A_2 = [0, y]$.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2 y$$

3) Hessián

$$det\, H_f = \begin{vmatrix} 6xy^2 & 6x^2 y \\ 6x^2 y & 2x^3 \end{vmatrix}$$

$$det\, H_f(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$det\, H_f(A_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Hessián v A_1, A_2 vyšel nulový, tzn., že nelze tímto způsobem rozhodnout o extrémnosti a budeme muset k vyšetřování použít …

4) … definici extrémů

Čili budeme zkoumat znaménko Δf pro velmi malá $|\bar{h}|$. Je-li toto znaménko stále stejné, jedná se o extrém.

$$\Delta f = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)$$

$\underline{A_1:}$

$$\begin{aligned}(\Delta f)_{A_1} &= f(x+h_1, h_2) - f(x, 0) = (x+h_1)^3 \cdot h_2^2 - x^3 \cdot 0^2 = \\ &= (x^3 + 3x^2 h_1 + 3x h_1^2 + h_1^3) \cdot h_2^2 = x^3 h_2^2 + 3x^2 h_1 h_2^2 + 3x h_1^2 h_2^2 + h_1^3 h_2^2\end{aligned}$$

Stejně jako u předchozího příkladu i tady bude o velikosti Δf rozhodovat nejnižší mocnina $h_i h_k$. To je v tomto případě člen $x^3 h_2^2$. Můžeme si představit, jakoby v něm člen h_1 měl nultou mocninu (h_1^0).

$$(\Delta f)_{A_1} \equiv x^3 h_2^2$$

$$\begin{aligned}(x>0)\wedge(h_2 \neq 0) &\rightarrow (\Delta f)_{A_1} > 0\\ (x>0)\wedge(h_2 = 0) &\rightarrow (\Delta f)_{A_1} = 0\\ (x<0)\wedge(h_2 \neq 0) &\rightarrow (\Delta f)_{A_1} < 0\\ (x<0)\wedge(h_2 = 0) &\rightarrow (\Delta f)_{A_1} = 0\end{aligned}$$

Tudíž kladná poloosa x ($x > 0$) je neostré lokální minimum, záporná poloosa x ($x < 0$) je neostré lokální maximum. Jelikož v okolí počátku [0; 0] se mění znaménko Δf, proto v tomto bodě extrém nenastává.

$\underline{A_2:}$

$$\begin{aligned}(\Delta f)_{A_2} &= f(h_1, y+h_2) - f(0, y) = h_1^3 \cdot (y+h_2)^2 - 0^3 \cdot y^2 = \\ &= h_1^3 y^2 + 2h_1^3 h_2 y + h_1^3 h_2^2\end{aligned}$$

$$(\Delta f)_{A_2} \equiv h_1^3 y^2$$

$$\begin{aligned}(y \neq 0)\wedge(h_1 > 0) &\rightarrow (\Delta f)_{A_2} > 0\\ (y \neq 0)\wedge(h_1 < 0) &\rightarrow (\Delta f)_{A_2} < 0\end{aligned}$$

Tedy v libovolně malém okolí osy y (A_2) mění Δf znaménko, a proto v A_2 extrém nenastává.

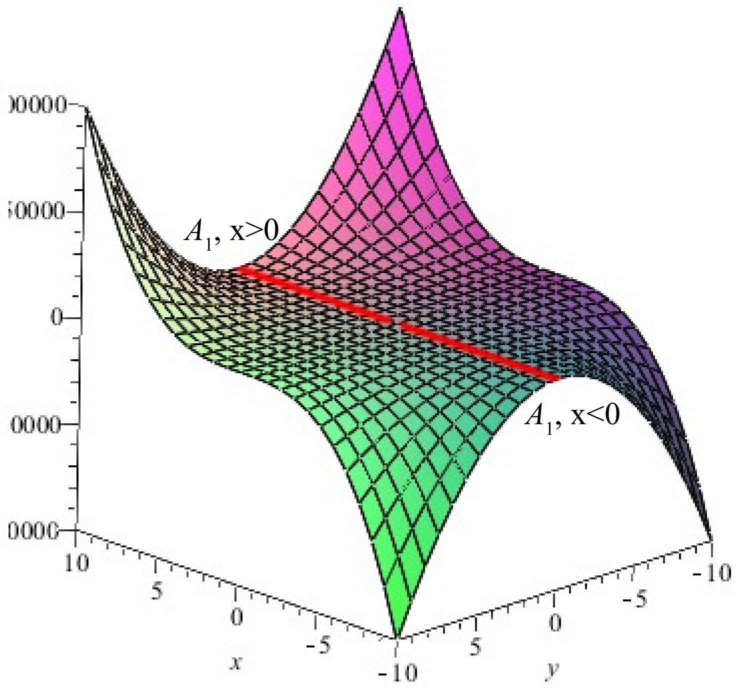
5) Závěr

$A_1 = [x; 0]$: pro x > 0 je neostré lokální minimum,

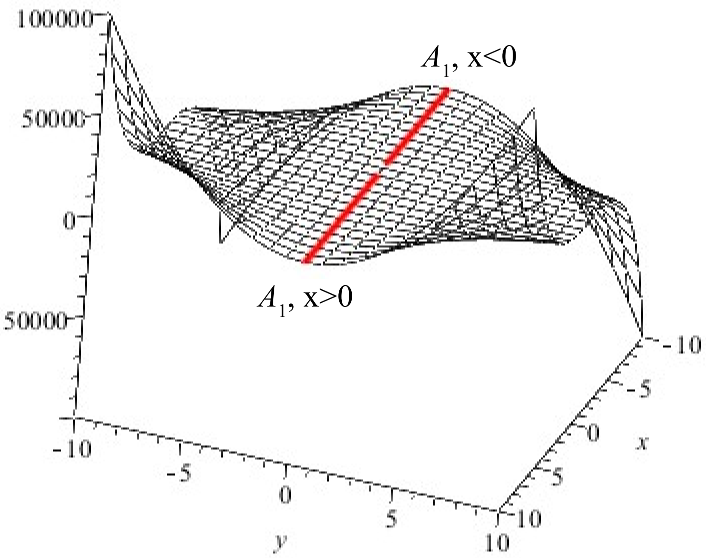
pro x < 0 je neostré lokální maximum,

v bodě [0, 0] extrém nenastává,

$A_2 = [0; y]$: není extrém.



A_1, x>0
A_1, x<0
x
y



A_1, x<0
A_1, x>0
x
y

22. příklad

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(x^2 + y^2)$,

$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\}$.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin(x^2 + y^2) + \sqrt{x^2 + y^2} \cdot 2x \cdot \cos(x^2 + y^2) =$$

$$= x \cdot \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(x^2 + y^2)$$

Parciální derivaci podle proměnné y můžeme díky symetrii v proměnných získat z předchozího vztahu pouhou záměnou symbolů x a y.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y \cdot \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(x^2 + y^2)$$

Obě rovnice položíme rovny nule a dostaneme soustavu rovnic

$$x \cdot \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(x^2 + y^2) = 0$$

$$y \cdot \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(x^2 + y^2) = 0$$

V obou rovnicích upravíme levou stranu na společný jmenovatel

$$\frac{x \cdot \sin(x^2 + y^2) + 2x \cdot (x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$\frac{y \cdot \sin(x^2 + y^2) + 2y \cdot (x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Nyní obě rovnice jmenovatelem bez meškání vynásobíme a rovnou v čitateli vytkneme z první rovnice x, ze druhé y a získáme

$$x \cdot \left(\sin(x^2 + y^2) + 2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2)\right) = 0$$

$$y \cdot \left(\sin(x^2 + y^2) + 2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2)\right) = 0$$

Teď je zřejmé, že když obě rovnice vydělíme členem $\sin\left(x^2 + y^2\right) + \ldots$, zůstane nám $x = 0$ a $y = 0$. A tedy jeden stacionární bod je $A_1 = [0; 0]$.

Nyní opačný případ, kdy obě rovnice vydělíme členem před závorkou a zůstanou nám dvě identické rovnice

$$\sin\left(x^2 + y^2\right) + 2 \cdot \left(x^2 + y^2\right) \cdot \cos\left(x^2 + y^2\right) = 0$$

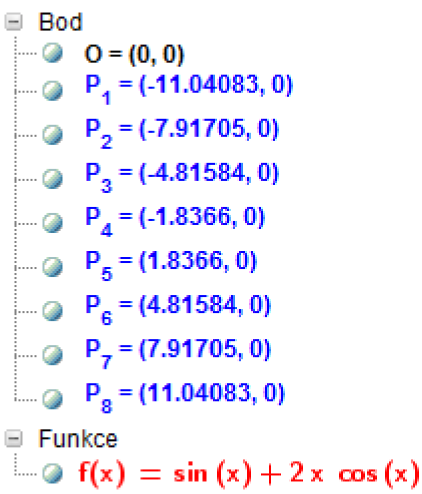
Jedná se o transcendentní rovnici, kterou nemůžeme vyjádřit nebo upravit pomocí elementárních funkcí. Pomůžeme si tedy jinak, a to pomocí substituce. V našem případě budeme substituovat člen $x^2 + y^2$ proměnnou w.

$$\sin(w) + 2w \cdot \cos(w) = 0 \tag{1}$$

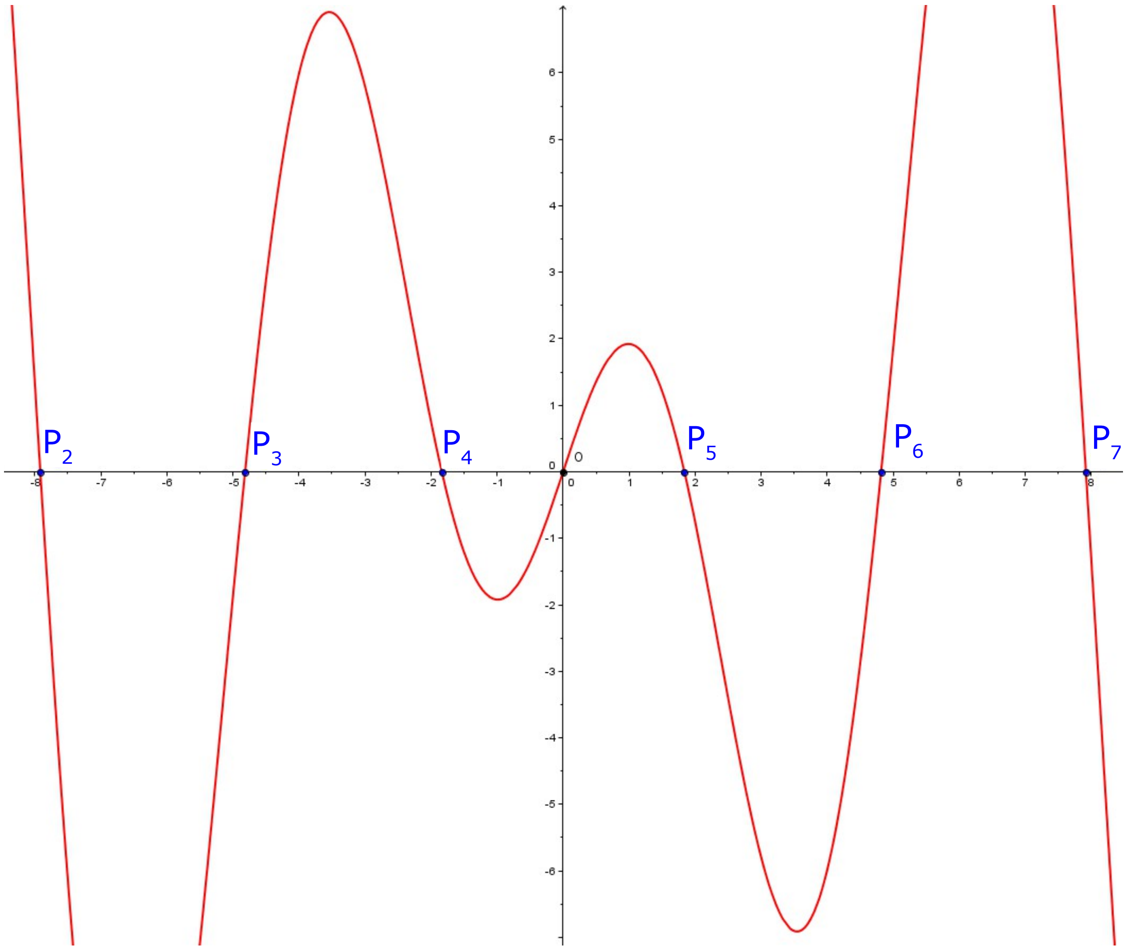
Ani tuto rovnici však analyticky vyřešit nedokážeme, nicméně alespoň jsme ze dvou proměnných (x , y) udělali jednu (w). Teď z této rovnice na okamžik uděláme funkci

$$g(w) = \sin(w) + 2w \cdot \cos(w) \tag{2}$$

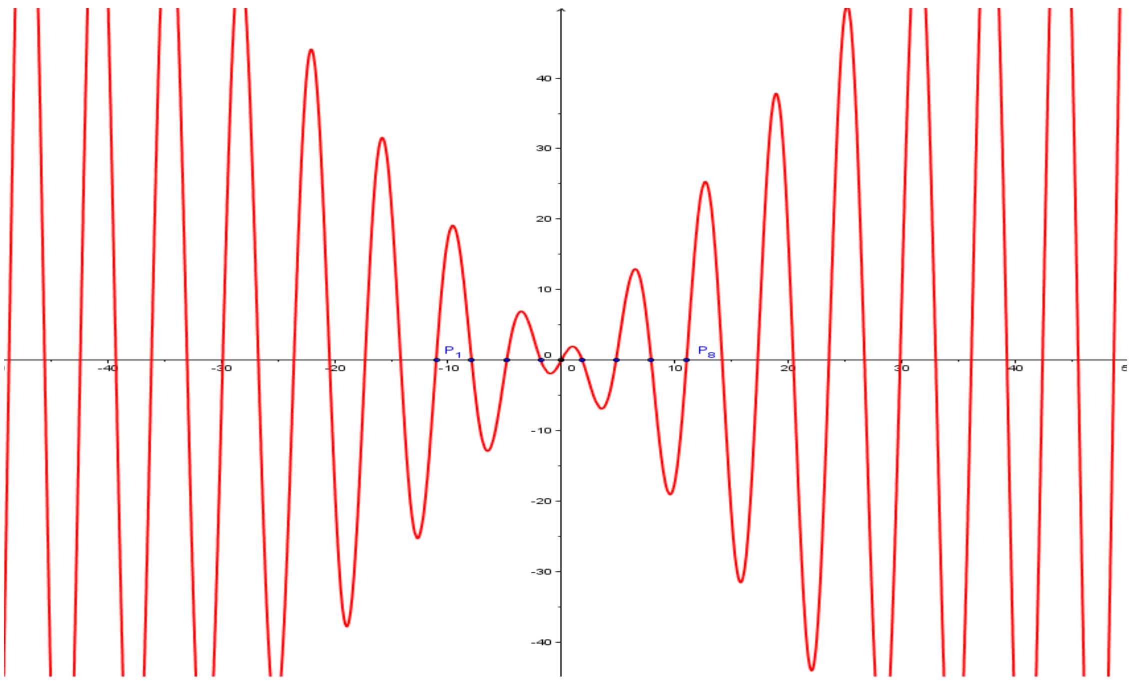
a využijeme např. program GeoGebra, Maple, Graph nebo kterýkoliv jiný volně dostupný grafický software a „nakreslíme“ si funkci $g(w)$ – viz další stranu.



Poznámka : V seznamu výše vyznačená funkce $f(x)$ je naše $g(w)$. Program GeoGebra pracuje pouze s proměnnými x , y.



Na obrázku výše vyznačené body $P_2 – P_7$ jsou právě body vyhovující naší rovnici (1). Na dalším obrázku je vidět, že těchto bodů bude nekonečně mnoho.



Je tedy jasné, že vyšetřit všechny tyto body by bylo nemožné. Ono to ani nebude zapotřebí. Pro začátek využijeme body P_5, P_6 a uvidíme.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos\left(x^2 + y^2\right) \cdot 2x \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \sin\left(x^2 + y^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot y^2 \cdot$$
$$\cdot \left(-2\right) \cdot x^{-3} + 2 \cdot \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot y^2 \cdot \left(-2\right) \cdot x^{-3} \cdot \cos\left(x^2 + y^2\right) +\right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot \left(-\sin\left(x^2 + y^2\right)\right)\right) =$$
$$= \frac{2x \cdot \left(\cos\left(x^2 + y^2\right) - \sin\left(x^2 + y^2\right)\right)}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} - \frac{y^2}{x^3} \cdot \frac{\sin\left(x^2 + y^2\right) + 2\cos\left(x^2 + y^2\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^3}}$$

Parciální derivaci druhého řádu podle proměnné y získáme opět pouhou záměnou proměnných x a y, podobně jako tomu bylo u derivací prvního řádu (viz str. 53).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2y \cdot \left(\cos\left(x^2 + y^2\right) - \sin\left(x^2 + y^2\right)\right)}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}} - \frac{x^2}{y^3} \cdot \frac{\sin\left(x^2 + y^2\right) + 2\cos\left(x^2 + y^2\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^3}}$$

Smíšené derivace ani nemá cenu dopočítávat, vidíme totiž, že v bodě A_1 nejsou parciání derivace druhého řádu definovány, tudíž nepůjde sestavit Hessián. Budeme tedy muset použít jiný nástroj, a to …

3) … definici exrému

$$\Delta f = f\left(x_0 + h_1\,,\; y_0 + h_2\right) - f\left(x_0, y_0\right)$$

Pro náš konkrétní případ (tedy bod A_1) to bude vypadat takto

$$\begin{aligned}(\Delta f)_{A_1} &= f\left(x_0 + h_1\,,\; y_0 + h_2\right) - f\left(x_0, y_0\right) = \\ &= f\left(0 + h_1\,,\; 0 + h_2\right) - f\left(0, 0\right) = \\ &= \sqrt{(0 + h_1)^2 + (0 + h_2)^2} \cdot \sin\left((0 + h_1)^2 + (0 + h_2)^2\right) - \sqrt{0} \cdot \sin(0) = \\ &= \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \sin\left(h_1^2 + h_2^2\right).\end{aligned}$$

Vidíme, že výraz $h_1^2 + h_2^2$ bude vždy kladný, nehledě na to, jestli za přírůstky h_1, h_2 dosadíme kladné nebo záporné hodnoty. Stačí nám tedy prošetřit případy, kdy $h_1 \neq 0$ a $h_2 \neq 0$. Mohlo by se zdát, že hodnota funkce sinus ve výraze bude záviset na velikosti jejího argumentu (to je sice pravda), ale uvědomme si, že zde proměnné h_1, h_2 zastupují nekonečně malé přírůstky.

Pro bod A_1 tedy vyšetřujeme:

a) $(h_1 = 0) \wedge (h_2 = 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} = 0$

b) $(h_1 \neq 0) \wedge (h_2 = 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} > 0$

c) $(h_1 = 0) \wedge (h_2 \neq 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} > 0$

d) $(h_1 \neq 0) \wedge (h_2 \neq 0) \rightarrow (\Delta f)_{A_1} > 0$

Pro všechny přírůstky nenulové funkční hodnota roste ve všech směrech, a tedy v bodě A_1 nastává ostré lokální minimum.

Nyní zpět k našim bodům P_5, P_6. Jelikož jsou to kořeny funkce $g(w)$, která vznikla substitucí, musíme se teď k této substituci vrátit (nás totiž nezajímá proměnná w, ale naše původní proměnné x , y).

$$w = x^2 + y^2$$

Proveďme tedy zpětnou substituci pro oba body P_5, P_6 (pro souřadnice bodů viz str. 54).

$P_5 : g(1{,}8366) = 0 \rightarrow K_5 : x^2 + y^2 = 1{,}8366$
$P_6 : g(4{,}81584) = 0 \rightarrow K_6 : x^2 + y^2 = 4{,}81584$

Vidíme, že stacionární body K_5, K_6 jsou vlastně stacionární kružnice o poloměrech $r_5 = \sqrt{1{,}8366} \approx 1{,}3552$, $r_6 = \sqrt{4{,}81584} \approx 2{,}1945$.

Začněme vyšetřovat postupně body K_5 a K_6 tak, jako jsme to provedli s bodem A_1. Je jasné, že těžko budeme vyšetřovat obecně celou kružnici, a proto zvolíme na kružnici bod a ten pak vyšetříme.

$K_5 : y = \sqrt{1{,}8366 - x^2} \rightarrow x = \pm 1{,}3552 \; ; \; y = 0 \rightarrow A_5 = [1{,}3552; 0]$
$K_6 : y = \sqrt{4{,}81584 - x^2} \rightarrow x = \pm 2{,}1945 \; ; \; y = 0 \rightarrow A_6 = [2{,}1945; 0]$

Zvolili jsme si hodnotu x takovou, že y dá nulovou hodnotu. Také je vidět, že hodnoty x vyšly dvě (kladná a záporná), ale protože nám stačí jen jeden bod, využijeme tu kladnou pro snazší výpočet. Máme dva stacionární body $A_5 = [1{,}3552; 0]$, $A_6 = [2{,}1945; 0]$.

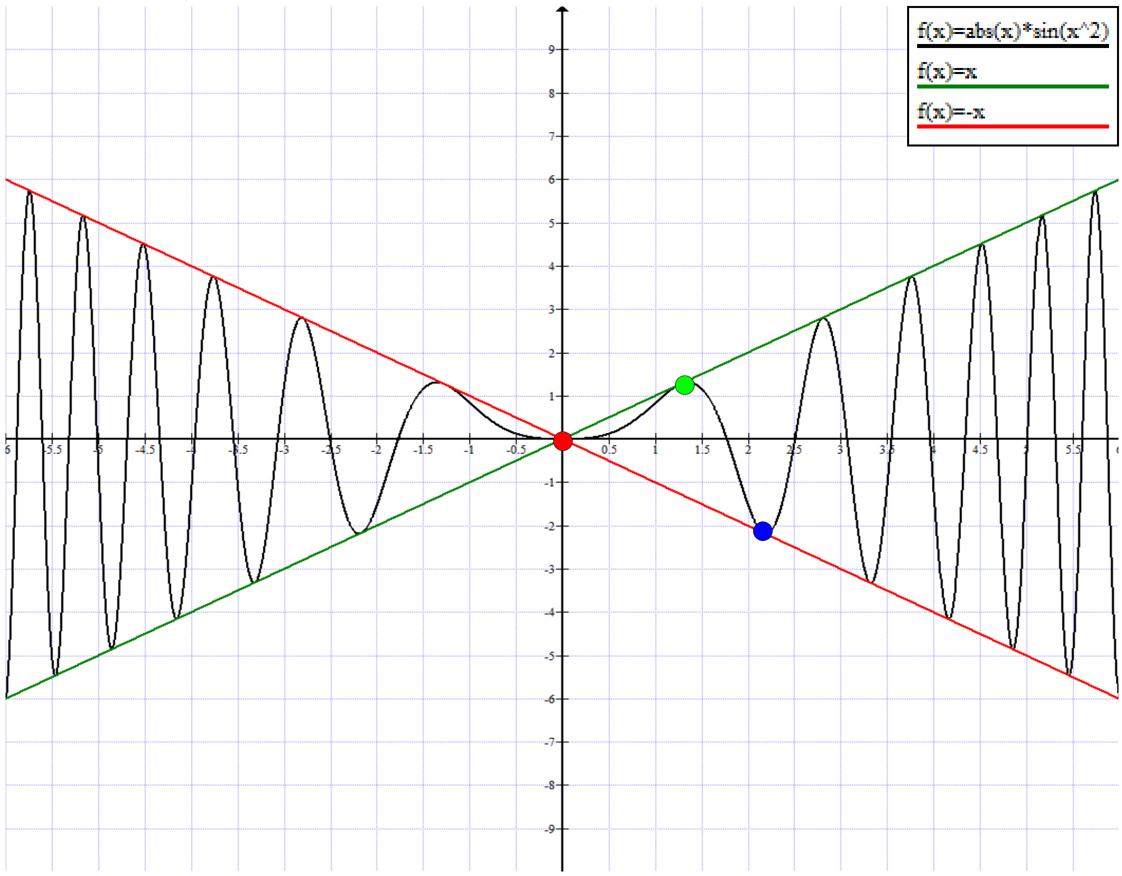
Pomůžeme si opět graficky a to tak, že uděláme řez rovinou $y = 0$. Připomeňme, jak vypadá rovnice naší funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(x^2 + y^2)$$

Rovnici $y = 0$ teď do ní dosadíme a dostaneme funkci

$$f(x,0) = \sqrt{x^2 + 0} \cdot \sin(x^2 + 0)$$
$$f(x) = |x| \cdot \sin(x^2)$$

Tuto funkci opět snadno „nakreslíme“ pomocí matematického software (tentokrát použijeme volně dostupný program Graph).

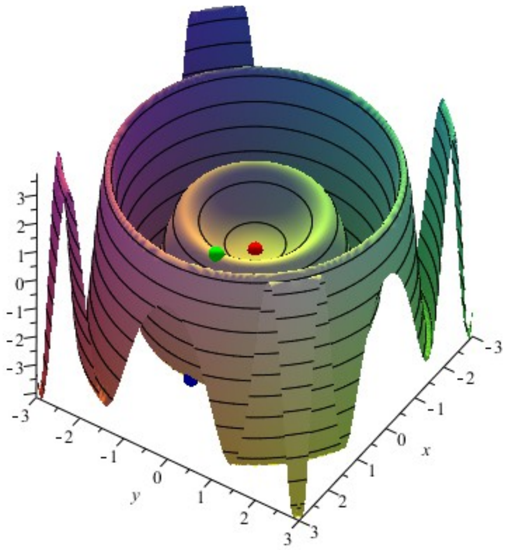


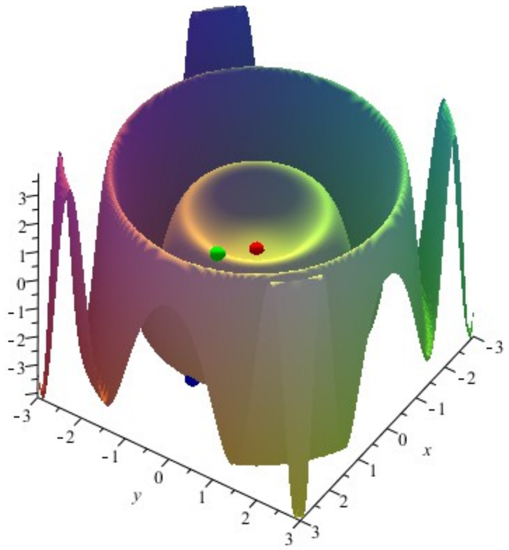
Toto je řez naší funkcí (na obrázku vodorovná osa x, svislá z). Legenda k obrázku:

- bod $A_1 = [0; 0]$ – ostré lokální minimum
- bod $A_5 = [1{,}3552; 0]$ – neostré lokální maximum
- bod $A_6 = [2{,}1945; 0]$ – neostré lokální minimum

Jistě také stojí za povšimnutí, že řez naší funkcí je „chycen“ mezi funkcemi $f(x) = x$ a $f(x) = -x$. Bod A_5 je jeden z „mnoha“ bodů ležících na kružnici K_5, proto je tento extrém neostrý. Tedy pro upřesnění: celá kružnice K_5 je neostré lokální maximum, stejně tak K_6 je neostré lokální minimum. Z obrázku je patrné, že další bude následovat opět maximum, za ním minimum a tak dále. Těchto neostrých lokálních extrémů bude nekonečně mnoho.

Z následujících obrázků snad bude vidět, jak naše funkce $f(x, y)$ vypadá ve skutečnosti.





Poznámka : Barevné značení bodů na těchto obrázcích koresponduje se značením na obrázku řezu ze strany 58.

23. příklad

Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl co největší.

Naše tři čísla si označíme *x*, *y*, *z*. A sestavíme rovnici funkce *f*(*x*, *y*) podle zadání příkladu. Součet tří kladných čísel má dát číslo 24:

$$24 = x + y + z \tag{1}$$

A jejich součin má být co největší

$$x \cdot y \cdot z = \mathrm{MAX} \tag{2}$$

Rovnici (1) upravíme

$$z = 24 - x - y \tag{3}$$

a dosadíme do (2)

$$x \cdot y \cdot (24 - x - y) = \mathrm{MAX}\ . \tag{4}$$

Teď už jen rovnici (4) přepíšeme jako funkci

$$f(x, y) = x \cdot y \cdot (24 - x - y) \tag{5}$$

Podle rovnice (4) má být tato funkce maximální. V tomto případě tedy hledáme globální maximum. Od lokálního se liší tím, že do našeho vyšetřovacího procesu musíme zahrnout i hraniční oblasti definičního oboru. $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}_+^2\}$, hraniční oblasti proto budou $+\infty$ a 0, v nich extrémy nastat mohou (musíme spočítat limity v nekonečnu a funkční hodnoty v nule a porovnat je s funkčními hodnotami v podezřelých bodech). Teď už přijde na řadu standardní postup tak, jak jej známe.

1) Nutná podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 24y - 2xy - y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 24x - 2xy - x^2$$

Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} 24y - 2xy - y^2 &= 0 \\ 24x - 2xy - x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Nejdříve ale můžeme provést úpravu, která nám řešení značně zjednoduší

$$\begin{aligned} y \cdot (24 - 2x - y) &= 0 \\ x \cdot (24 - 2y - x) &= 0 \end{aligned}$$

Nyní obě rovnice vytknutými členy vydělíme. Nemusíme se bát, že bychom přišli o jedno řešení $x = 0$ a $y = 0$. V zadání stojí, že všechna tři čísla *x*, *y*, *z* mají být kladná a jejich součin maximální. Pokud by tedy jedno z těchto čísel bylo nulové i jejich součin bude nulový. A to nechceme. Po úpravě dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 24 - 2x - y &= 0 \\ 24 - x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Druhou rovnici vynásobíme –2 a rovnice sečteme

$3y - 24 = 0 \quad \rightarrow \quad y = 8.$

Toto řešení dosadíme do první rovnice a dostaneme $x = 8$.

Řešení je tedy pouze jedno: $\{x = 8,\ y = 8\} \rightarrow A_1 = [8; 8]$ (stacionární bod).

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 24 - 2x - 2y$$

3) Hessián

$$det\, H_f = \begin{vmatrix} -2y & 24-2x-2y \\ 24-2x-2y & -2x \end{vmatrix}$$

$$det\, H_f(A_1) = \begin{vmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -16 \end{vmatrix} = 192$$

4) Závěr

$A_1 = [8; 8]$: ostré lokální maximum $\rightarrow$ tzn., že čísla $x = 8$ a $y = 8$ jsou hodnoty, ve kterých funkce $f(x, y)$ nabývá největší hodnoty. Tu snadno dopočítáme

$$8 \cdot 8 \cdot (24 - 8 - 8) = 8^3 = 2^9 = 512.$$

Nakonec z rovnice (3) dopočítáme třetí hledané číslo $z = 8$. Či-li naše tři hledaná čísla jsou $x = 8, y = 8, z = 8$.

Protože jsme ale hledali globální maximum a dosud víme, že A_1 je pouze lokální, musíme vypočítat ony limity (jak je zmiňováno na předchozí stránce) v hraničních oblastech, abychom zjistili, jestli je zároveň extrémem globálním.

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} x \cdot y \cdot (24 - x - y) = (+\infty)\cdot(+\infty)\cdot[24 - (+\infty) - (+\infty)] = (+\infty)\cdot(+\infty)\cdot(+\infty)\cdot\left[\frac{24}{+\infty} - 1 - 1\right] = (+\infty)\cdot(-2) = -\infty$$

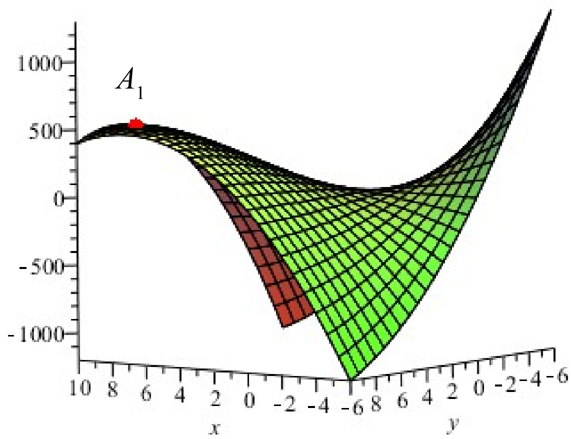
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,+\infty)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,+\infty)} x\cdot y\cdot(24-x-y) = x_0\cdot(+\infty)\cdot\left[24-x_0-(+\infty)\right] =$$
$$=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$$

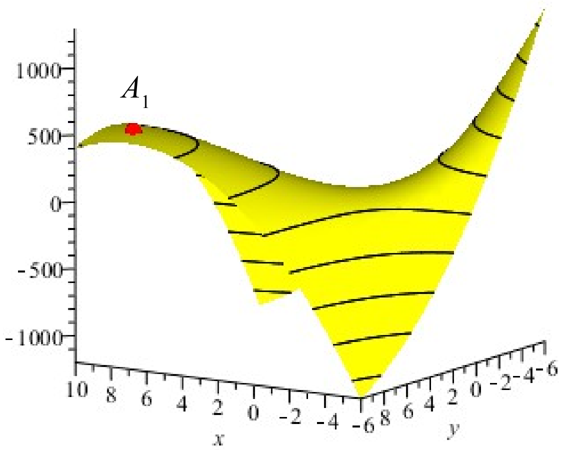
$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(+\infty,y_0)} x\cdot y\cdot(24-x-y) = (+\infty)\cdot y_0\cdot\left[24-(+\infty)-y_0\right] =$$
$$=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$$

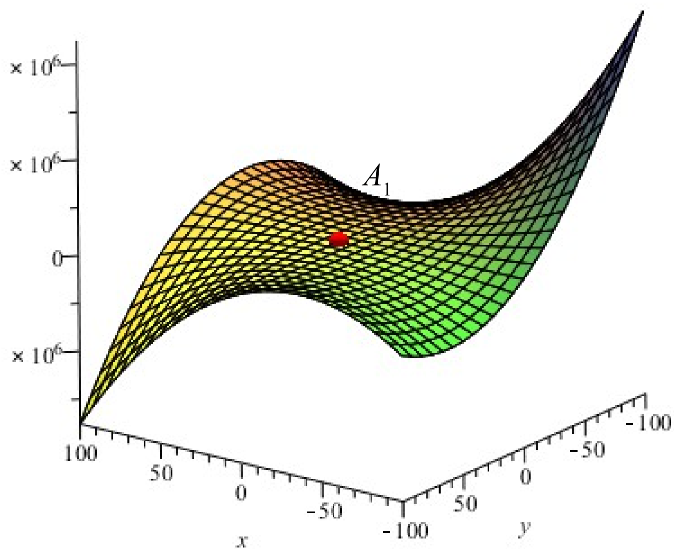
$$f(x,0)=0, \qquad f(0,y)=0, \qquad f(8,8)=512.$$

Největší z těchto funkčních hodnot a limit je 512. Globální maximum na intervalu (0; + ∞) je tedy skutečně v bodě [8; 8].

A_1 = [8; 8] je zároveň lokálním i globálním ostrým maximem funkce f a tedy naše tři hledaná čísla jsou $x = 8, y = 8, z = 8.$

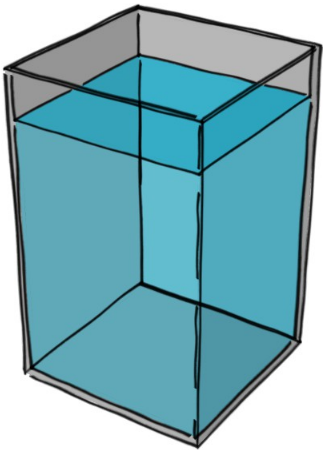






24. příklad

Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže tvaru kvádru o objemu 32 m^3 tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.



Rozměry nádrže si označíme *a*, *b*, *c*.

Objem kvádru je $V = a \cdot b \cdot c$.

Ze zadání příkladu plyne $a \cdot b \cdot c = 32$,

po úpravě dostaneme $c = \dfrac{32}{a\,b}$.

Pro povrch dna a stěn bude platit $S = a\,b + 2\,c \cdot (a + b)$.

Když nyní rovnici $c = \dfrac{32}{a\,b}$ dosadíme do rovnice pro povrch dna a stěn, dostaneme rovnici o dvou proměnných.

$$S\,(a\,,b) = a\,b + \frac{64}{a\,b} \cdot (a+b)$$

Po roznásobení

$$S\,(a\,,b) = a\,b + \frac{64}{a} + \frac{64}{b}$$

A nyní už máme vše připraveno na náš klasický postup. Upozorněme zde ještě na to, že hledáme globální minimum funkce $S\,(a\,,\,b)$, protože chceme co nejmenší povrch. Rozdíl mezi lokálním a globálním extrémem je pouze ten, že při hledání globálního extrému funkce musíme zahrnout i „hranice“ definičního oboru a jejich limity popř. funkční hodnoty porovnat s hodnotami ve stac. bodech. Tzn. že budeme muset vypočítat limitu v krajních bodech definičního oboru.

Ještě bychom měli určit definiční obor funkce. Z rovnice výše je vidno, že $a\,,b$ nesmí být nulové. Dále je zřejmé, že obě proměnné nesmí být záporné, jelikož zastupují délkovou míru (rozměr). Tedy definiční obor bude vypadat takto:

$$D_S = \{a\,,b \in \mathbb{R}^2\,;\, a > 0 \;\wedge\; b > 0\}$$

1) Nutná podmínka

Jako vždy spočítáme nejdříve parciální derivace prvního řádu.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = b - \frac{64}{a^2} \qquad\qquad \frac{\partial S}{\partial b} = a - \frac{64}{b^2}$$

Dostáváme, jako už tradičně, soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} b - \frac{64}{a^2} &= 0 \\ a - \frac{64}{b^2} &= 0 \end{aligned}$$

Obě rovnice ještě upravíme

$$\begin{aligned} a^2 b &= 64 \\ a\, b^2 &= 64 \end{aligned}$$

Nyní například ze druhé rovnice vyjádříme proměnnou a, dosadíme ji do první rovnice a dostaneme

$$\frac{64^2}{b^4} \cdot b = 64 \quad \rightarrow \quad b^3 = 64\,.$$

Z toho vyplývá, že $b = 4$. Nyní ještě z první rovnice dopočítáme proměnnou a. Dostaneme

$$a^2 = \frac{64}{4} \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{32} \quad \rightarrow \quad a = \pm 4\,.$$

Záporný výsledek nás ale nezajímá, protože proměnná a zastupuje délkovou míru či-li $a \in (0\,; +\infty)$. Proto $a = 4$.

Dostáváme tedy stacionární bod $A_1 = [4; 4]$.

2) Druhá derivace

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = \frac{128}{a^3} \qquad\qquad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = \frac{128}{b^3} \qquad\qquad \frac{\partial^2 S}{\partial a\, \partial b} = 1$$

3) Hessián

$$det\, H_f = \begin{vmatrix} \frac{128}{a^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{b^3} \end{vmatrix}$$

$$det\, H_f(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Bod A_1 je tedy lokálním minimem, ale je i globálním? O tom se přesvědčíme vypočtením limit v krajních bodech definičního oboru (0 a + ∞).

$$\lim_{(a,b)\to(a_0,0^+)} S(a,b) = \lim_{(a,b)\to(a_0,0^+)} ab + \frac{64}{a} + \frac{64}{b} = a_0 \cdot 0^+ + \frac{64}{a_0} + \frac{64}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{(a,b)\to(0^+,b_0)} S(a,b) = \lim_{(a,b)\to(0^+,b_0)} ab + \frac{64}{a} + \frac{64}{b} = 0^+ \cdot b_0 + \frac{64}{0^+} + \frac{64}{b_0} = +\infty$$

$$\lim_{(a,b)\to(+\infty,+\infty)} S(a,b) = \lim_{(a,b)\to(+\infty,+\infty)} ab + \frac{64}{a} + \frac{64}{b} = (+\infty)\cdot(+\infty) + \frac{64}{+\infty} + \frac{64}{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{(a,b)\to(a_0,+\infty)} S(a,b) = \lim_{(a,b)\to(a_0,+\infty)} ab + \frac{64}{a} + \frac{64}{b} = a_0\cdot(+\infty) + \frac{64}{a_0} + \frac{64}{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{(a,b)\to(+\infty,b_0)} S(a,b) = \lim_{(a,b)\to(+\infty,b_0)} ab + \frac{64}{a} + \frac{64}{b} = (+\infty)\cdot b_0 + \frac{64}{+\infty} + \frac{64}{b_0} = +\infty$$

$$S(4,4) = 4\cdot 4 + \frac{64}{4} + \frac{64}{4} = 48$$

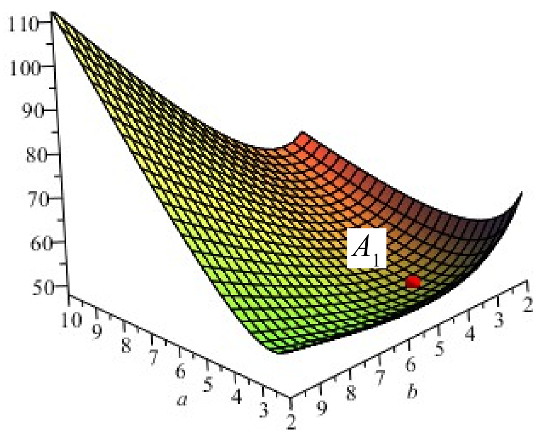
Nejmenší hodnota je 48. Tedy v bodě [4; 4] leží globální minimum funkce *S*. A konec konců je to vidět i z obrázků dole.

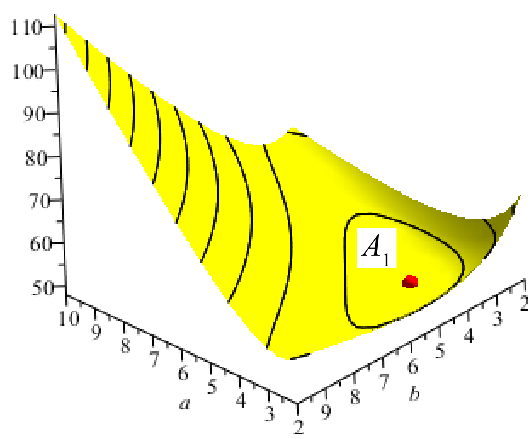
4) Závěr

A_1 = [4; 4]: ostré lokální i globální minimum.

Nyní ještě z rovnice pro objem dopočítáme třetí rozměr $c = 2$.

Dospěli jsme tedy k závěru, že při rozměrech nádrže 4x4x2 m bude její povrch nejmenší. Tedy např. na její výrobu se spotřebuje co nejmenší možné množství materiálu.





Seznam použité literatury

[1] Batíková, B. a kol.: *Matematika pro 4MM101 s aplikačními příklady*, str. 98-106, 2. vydání, Praha: Oeconomica, 2007, ISBN 978-80-245-1173-3

[2] Hamhalter, J., Tišer J.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, str. 107-127, 2. vydání, Praha: ČVUT, 2005

[3] Ochozková, T.: *Využití programu Maple při studiu matematiky* (Bakalářská práce), České Budějovice, 2010

[4] Prágerová, A.: *Cvičení z matematiky II.*, str. 516-547, skripta VŠE, 2. vydání, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983

[5] Vyskočil, P.: *Extrémy funkcí dvou proměnných* (Bakalářská práce), Brno, 2006

[6] nápověda k programu Maple verze 14.01

[7] *http://home.pf.jcu.cz/~lsamkova/ma2desate.pdf* (ze dne 23.2.2012)

[8] *http://www.math.muni.cz/~plch/diplomky/galerie/grafy/graf12.htm* (ze dne 12.1.2013)