

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Přírodovědecká fakulta

Katedra optiky



POISSONOVA SKVRNA

Bakalářská práce

Autor: Vojtěch Řehoř

Studijní program: B1701 - Fyzika

Studijní Obor: Digitální a přístrojová optika

Forma: Prezenční

Vedoucí práce: Mgr. Radek Čelechovský, Ph.D.

Olomouc 2017

Prohlášení:

Čestně prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením pana Mgr. Radka Čelechovského, Ph.D. a za užití uvedené literatury a zdrojů.

V Olomouci, červenec 2017

.....
podpis

Poděkování:

Děkuji vedoucímu bakalářské práce, panu Mgr. Radku Čelechovskému, Ph.D., za ochotu, trpělivost, cenné rady a v neposlední řadě za poskytnutý čas při konzultacích.

Anotace:

Poissonovou skvrnou nebo také Aragoovým bodem bývá nazýván světlý bod, který se při osvětlení kruhového terčiku (kuličky) objevuje zdánlivě nelogicky uprostřed oblasti jeho geometrického stínu. Tento experiment byl jedním z prvních důkazů vlnové povahy světla a stál při zrodu vlnové teorie světla.

Cílem bakalářské práce je daný experiment popsat, pomocí popisu Fresnelovy difrakce světla výsledky pokusu nasimulovat výpočtem v prostředí Matlab, experiment realizovat a naměřené výsledky porovnat s teoretickými.

Abstract:

Poisson or Arago spot is often referred to as a light spot that appears seemingly illogically in the middle of the geometrical shadow of a circular target (a ball). This was one of the first experiments proving the wave character of light, and stood at the onset of the Wave theory.

The goal of this bachelor thesis is to describe the experiment using the Fresnel diffraction, simulate the experiment results by a calculation in Matlab, carry out the experiment and compare the results with the theoretical results.

Obsah

Teoretická část.....	6
1. Úvod	6
2. Difrakce	7
2.1 Huygensův princip	8
2.2 Huygensův-Fresnelův princip.....	9
2.4 Rozdělení difrakce.....	11
2.4.1 Fraunhoferova difrakce.....	11
2.4.2 Fresnelova difrakce.....	13
Praktická část.....	14
3. Fresnelova difrakce na kruhovém otvoru	14
3.1 Analytický výpočet	15
3.1.1 Relativní intenzita v bodech osy rotační symetrie	15
3.1.1 Relativní intenzita mimo body osy rotační symetrie	16
3.2 Výpočet za užití rychlé Fourierovy transformace.....	20
4. Fresnelova difrakce na kruhovém terčiku	29
4.1 Analytický výpočet	29
4.1.1 Relativní intenzita v bodech osy rotační symetrie	29
4.1.2 Relativní intenzita mimo body osy rotační symetrie	30
4.2 Výpočet za užití rychlé Fourierovy transformace	30
5. Experiment	35
6. Závěr.....	39
Zdroje	40

Teoretická část

1. Úvod

Na počátku 19. století byla stále akceptována pouze Newtonova korpuskulární teorie světla, i přes to, že již r. 1807 Thomas Young publikoval svůj dvouštěrbinový experiment, který korpuskulární teorie nedokázala vysvětlit [1]. Thomas Young však zdaleka nebyl první, kdo se pokoušel prosadit vlnovou teorií. Jeho předchůdci jako F. M. Grimaldi [2], či J. M. Marci [3] však nedokázali zcela správně popsat difrakci, či interferenci světla [1]. Ani Huygensův princip neobstojí v případě ohybu světla. Proto Francouzská akademie r. 1818 vyhlásila cenu o vysvětlení vlastnosti světla [4]. Na to reagoval Augustin-Jean Fresnel se svou vlnovou teorií. Tato teorie doplnila Huygensův princip o možnost vzájemné interference sekundárních vln a také matematicky popisovala jejich amplitudu i fázi [1]. Této teorii však nebyl nakloněn zastánce korpuskulární teorie, člen komise francouzské akademie věd, Siméon Denis Poisson. Odvodil tedy z této teorie zdánlivě absurdní jev, a to světlý bod uprostřed geometrického stínu osvětlené kruhové nepropustné překážky [4]. Fresnel ani Poisson se však tento experiment nepokusili provést. První, kdo jej zdárně realizoval, byl Dominique-François-Jean Arago, který tímto potvrdil platnost Fresnelovy teorie světla [4]. Vlnový charakter světla byl tedy oficiálně potvrzen a všeobecně uznáván poprvé od dob Christiaana Huygense.

Předmětem této bakalářské práce je popis Fresnelovy difrakce na kruhové nepropustné překážce – terčíku, což dává za vznik Poissonově skvrně. Této problematice se budeme nejdříve věnovat z pohledu metody analytického výpočtu při použití Lommelových funkcí, následně za pomoci rychlé Fourierovy transformace. Obě tyto metody budou simulovány v prostředí Matlab a následně porovnány s realizací experimentu v laboratoři.

2. Difrakce

V následujících podkapitolách si stručně popíšeme východiska difrakce světla. Nejdříve se zaměříme na obecný popis vzniku, projevu a některých využití tohoto jevu. Nastíníme si Huygensův princip, následně jeho úpravu – Huygensův-Fresnelův princip a Fresnelovu zonální konstrukci. Poslední podkapitola se bude zabývat rozdělením difrakčních jevů, tedy Fraunhoferovou a Fresnelovou difrakcí.

Difrakce, neboli česky ohyb světla, je úkaz, který vzniká důsledkem vlnového charakteru světla.

Způsobí nám z pohledu paprskové optiky nezvyklý jev, a sice že světlo se dostává i do geometrického stínu objektu. Z pohledu vlnové optiky se jedná o lokální omezení fáze, nebo amplitudy na vlnoploše [5]. V tomto místě pak vznikají sekundární bodové zdroje záření, které spolu mohou interferovat. Jak již bylo uvedeno, je to jeden z hlavních jevů, který stál při zrodu vlnové teorie světla.

V optice zobrazování ve většině případů mluvíme o difrakci jako o negativním vlivu, jelikož nám způsobuje vlnové aberace, které vedou k degradaci obrazu. Avšak lze tento jev přínosně využít například u spektrometrie. Spektrometr za pomoci ohybu světla na difrakční mřížce (a následných clonách) oddělí jednotlivé vlnové délky zdroje, např. vysokotlaké výbojky. Vhodnou filtrací následně docílíme monochromatického zdroje, díky kterému můžeme měřit odraznost, propustnost či absorpci pro danou vlnovou délku na měřeném předmětu. Monochromaticnost záření přímo souvisí s jeho časovou koherencí. Za pomoci koherentního záření, tedy stavu, kdy dané záření o stejné frekvenci má nulový fázový rozdíl, můžeme poměrně snadno realizovat difrakční jevy, jako je např. Youngův pokus na dvojštěrbině, Poissonova skvrna atd. Dále tohoto záření můžeme využít při holografii, interferometrii a dalších optických měřících metodách.

Pokud tedy použijeme bodový zdroj, který vyzařuje koherentní záření a necháme jej dopadat např. na dvojštěrbinu, dostaneme na stínítku za touto dvojštěrbinou difrakční obrazec. V tomto případě - Youngova pokusu uvidíme střídání světlých a tmavých proužků (difrakčních maxim a minim). Toto střídání je způsobeno interferencí buď konstruktivní (maximum), nebo destruktivní (minimum) mezi vlnou z jedné a druhé štěrbinou.

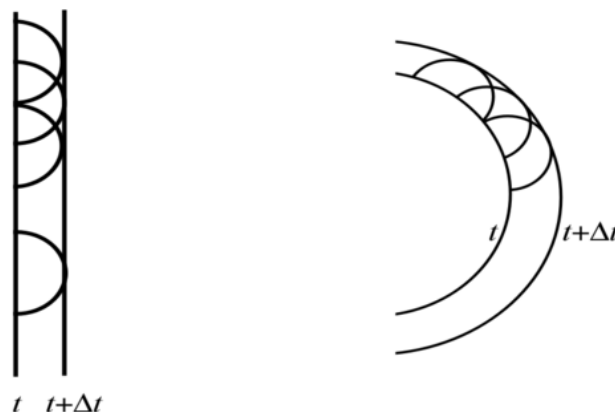
V případě zobrazování pomocí objektivů už však nemluvíme o pozitivním přínosu, jelikož ohyb světla nám omezuje rozlišovací schopnost daného objektivu. Tedy způsobuje nám fyzikální omezení nazývané difrakční limita. K této limitě se snažíme přiblížit při konstrukci mikroskopových objektivů, dalekohledů či dalších zobrazovacích soustav. Vlivem ohybu světla na objímkách čoček se předmětový bod nezobrazí jako bod, ale jako malý plošný element. Velikost projevu difrakce (plošného elementu) u zobrazovacích soustav úzce souvisí s průměrem této soustavy. Platí zde nepřímá úměra, tedy čím větší má objektiv průměr, tím menší projev difrakce vzniká.

2.1 Huygensův princip

Christiaan Huygens byl první, kdo do té doby dokázal kvantitativně popsat světlo na základě jeho vlnové povahy, a to v několika případech, ať už jako šíření volným prostorem, odrazem, lomem či dvojlomem [1].

Tento princip má dvě tvrzení, definujeme si je podle pana Komrsky [1]:

- „Každý bod homogenního a izotropního prostředí, do něhož dospěje vlnění, tj. každý bod čela vlny je zdrojem sekundární kulové vlny.“
- „Vlnoplocha v okamžiku $t + \Delta t$ je obálkou sekundárních kulových vln, které vyšly z bodů vlnoplochy v předcházejícím okamžiku t .“



Obrázek 1: Huygensův princip (vlevo rovinná vlna, vpravo sférická). Převzato z [9].

Představa prvního bodu Huygensovy teorie je přijatelná. Nelze to však již tvrdit o druhém bodu, jelikož si odporuje s realitou pozorovanou v případě difrakce či interference [1]. Proto přichází Fresnel s následující úpravou.

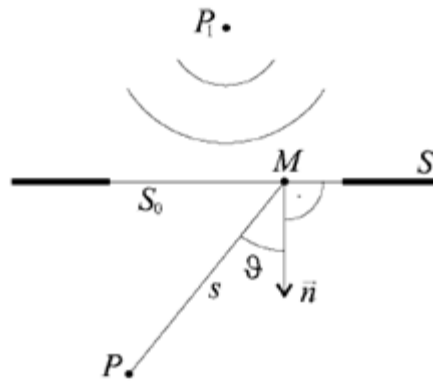
2.2 Huygensův-Fresnelův princip

Augustin Jean Fresnel vycházel z Huygensova principu, kde doplnil druhý bod tím, že sekundární vlny spolu mohou interferovat. Dále matematicky správně popsal amplitudu i fázi těchto sekundárních vln [1].

Nyní si popíšeme matematický zápis Huygensova-Fresnelova principu (Komska, 1999):

$$\Psi(s, \vartheta) = -\frac{i}{\lambda} K(\vartheta) \Psi_0(M) \frac{\exp(iks)}{s} = \frac{k}{2\pi} K(\vartheta) \Psi_0(M) \frac{\exp\left[i\left(ks - \frac{\pi}{2}\right)\right]}{s}, \quad (1)$$

kde $\Psi(s, \vartheta)$ je komplexní amplituda v bodě P (viz obr. 2), P_l je primární rozruch, s je vzdálenost od místa M , ze kterého vychází sekundární vlna, jejíž hodnota vlnové funkce je $\Psi_0(M)$ a uvažujeme její šíření do prostorové oblasti ϑ , λ je vlnová délka, k je vlnové číslo, $\frac{k}{2\pi} \exp(-i \frac{\pi}{2})$ značí skutečnost, že amplitudy sekundárních vln jsou v nepřímé úměře vzhledem k vlnové délce a také fakt, že se mohou o čtvrt periody fázově předbíhat, nebo opožďovat oproti primární vlně, $K(\vartheta)$ je faktor sklonu, který v této práci pro konkrétní výpočty bude mít vždy hodnotu 1 [1].



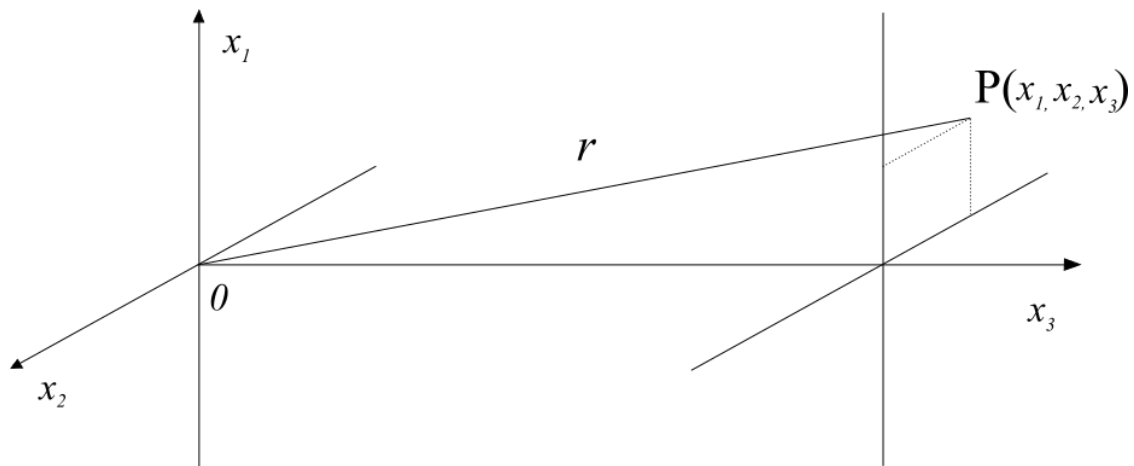
Obrázek 2: Huygensův-Fresnelův princip ve tvaru nejčastěji užívaném při výpočtech [1].

Pokud tedy budeme uvažovat případ difrakce na stínítku, kdy plocha S nám vytyčuje propustnou oblast S_0 na stínítku (viz obr. 2), potom v bodě P dostaneme vlnovou funkci $\psi(P)$ součtem všech sekundárních vln z oblasti S_0 [1].

$$\psi(P) = -\frac{ik}{2\pi} \iint_{S_0} \psi_0(M) \frac{\exp(iks)}{s} \cos \vartheta \, dS_0. \quad (2)$$

Integrál (2) nám tedy matematicky popisuje Huygensův-Fresnelův princip. Bohužel integrál v tomto tvaru nelze analyticky spočítat (pokud se nejedná o nerušené šíření rovinné vlny), jelikož při řešení zjistíme, že příslušný integrál neexistuje, nebo integraci nelze provést. Z těchto důvodů je třeba $\cos \vartheta$ položit roven jedné a užít Fresnelovu aproximaci tohoto ingredientu [1]. Jedná se o aproximaci kulové vlny vlnou parabolickou (v bodech blízkých ose x_3 (viz obr. 3)), jejíž tvar je následující:

$$\frac{\exp(ikr)}{r} \approx \frac{\exp(ikx_3)}{x_3} \exp\left[\frac{ik}{2x_3}(x_1^2 + x_2^2)\right]. \quad (3)$$



Obrázek 3: Fresnelova aproximace kulové vlny. Překresleno z [1].

2.4 Rozdělení difrakce

Difrakci rozdělujeme na dvě skupiny: Fraunhoferova a Fresnelova. Obecně lze chápat Fraunhoferovu difrakci jako speciální případ Fresnelovy difrakce. Rozdělení určuje vzdálenost mezi zdrojem záření a difraktovaným předmětem, velikost (průměr apertury, terčiku, atd.) a vlnová délka. Tyto tři proměnné Fresnel zakomponoval do tzv. Fresnelova čísla N_F , které nám poměrně jednoduše určí, zda se jedná o Fraunhoferovu, či Fresnelovu difrakci.

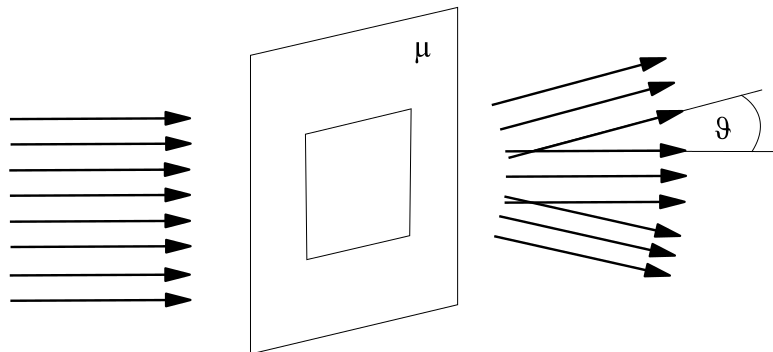
$$N_F = \frac{a^2}{\lambda z}$$

Kde a je poloměr apertury, z vzdálenost mezi rovinou difrakčního obrazce a aperturou a λ je vlnová délka. Pokud je tedy $N_F \geq 1$ jedná se nejspíše o Fresnelův difrakční jev, jestliže $N_F \ll 1$ jde o Fraunhoferovu difrakci [1].

2.4.1 Fraunhoferova difrakce

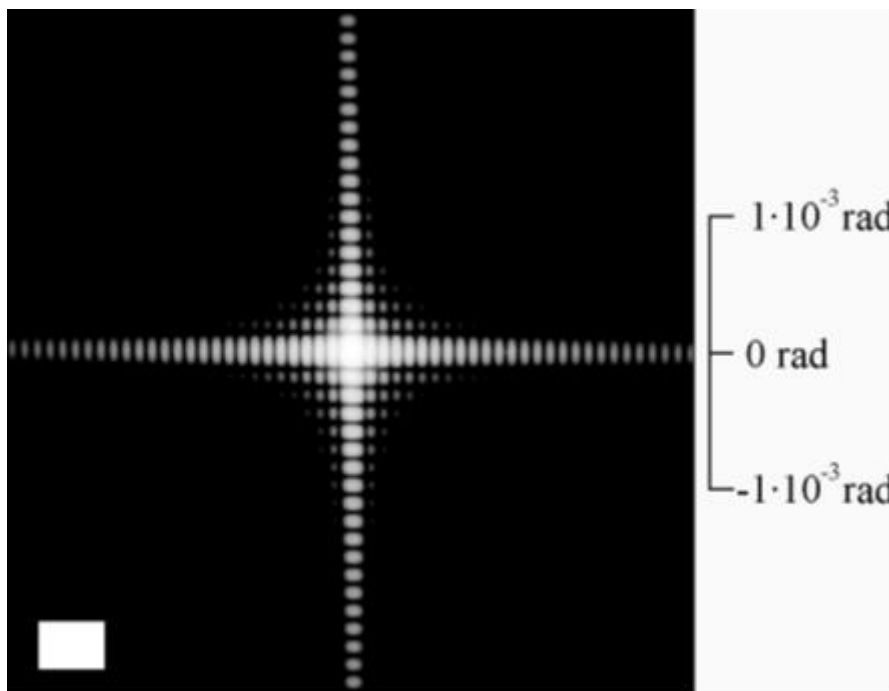
V případě tohoto uspořádání máme zdroj záření limitně až v nekonečnu, to má za následek, že nám na difraktovaný předmět dopadají rovinné vlny. Rovina pozorování (stínítko) se nám taktéž posouvá až do nekonečna. S tímto typem difrakce se můžeme setkat např. v astronomii, u fotografických objektivů (v rovině irisové clony, jelikož ta bývá většinou v místech objektivu, kde je předmět zobrazován rovnoběžnými svazky [5]), při laboratorních experimentech s kolimátory, atd.

Při Fraunhoferově difrakci vyšetřujeme směrové rozložení intenzity, tzn. jakým směrem se šíří intenzita difraktovaného záření za aperturou μ (viz obr. 5). Jedná se tedy o směrovou funkci ϑ [1].



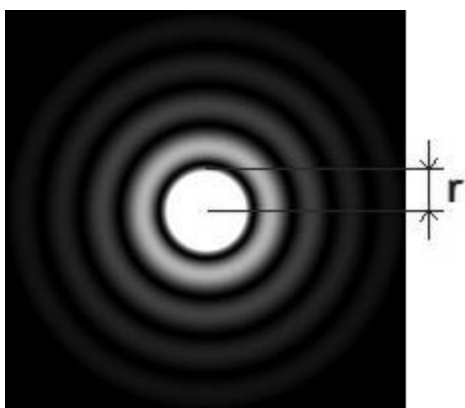
Obrázek 5: Fraunhoferova difrakce. Překresleno z [1].

Typický difrakční obrazec Fraunhoferovy difrakce na obdélníkové apertuře (viz obr. 6) se podobá spíše zobrazení zdroje, než apertuře.

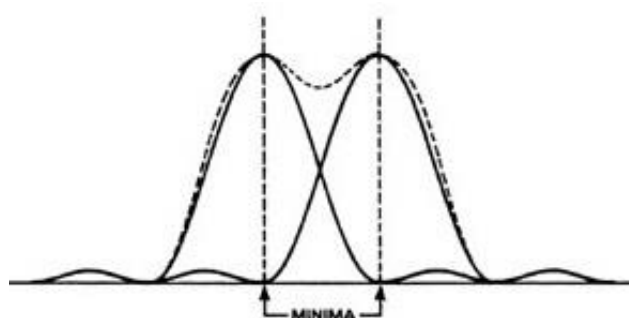


Obrázek 6: Fraunhoferova difrakce na obdélníkovém otvoru $7,5 \times 5,4$ mm, $\lambda = 630$ nm [1].

Velikost Fraunhoferovy difrakce nám dává fyzikální omezení tzv. difrakční limitu u zobrazovacích soustav. Je to stav, kdy již nemůžeme (změnou parametrů soustavy) dosáhnout menší difrakce, a tedy většího rozlišení pro soustavu s konečným průměrem. Pokud budeme např. objektivem zobrazovat bod z nekonečna, dostaneme malý plošný element, tedy obrazec, který odpovídá Airyho disku (viz obr. 7). Samozřejmě tuto skutečnost nám ovlivní nejen difrakce, ale i optické aberace, avšak nyní uvažujeme fyzikálně dokonalou zobrazovací soustavu. Airyho disk je východiskem pro určování rozlišovací schopnosti zobrazovacích soustav. Právě v případě zobrazování dvou bodů určujeme, jaká je jejich minimální možná vzájemná vzdálenost, aby byly ještě rozlišeny. Jedná se o Rayleighovo rozlišovací kritérium, které nám říká, že dva body jsou rozlišeny (v rovině pozorování), pokud maximální hodnota intenzity prvního bodu padne na první minimum hodnoty intenzity druhého bodu [5] (viz obr. (8)). Případně toto kritérium lze vztáhnout na poloměr r Airyho disku (viz obr. 7) - vzdálenost středů difrakčních obrazců je rovna jejich poloměru [5]. Rozlišovací mez fyzikálně dokonalé soustavy nám tedy ovlivňují dva faktory – průměr clony a vlnová délka.



Obrázek 7: Airyho disk.
Převzato a upraveno z [10].

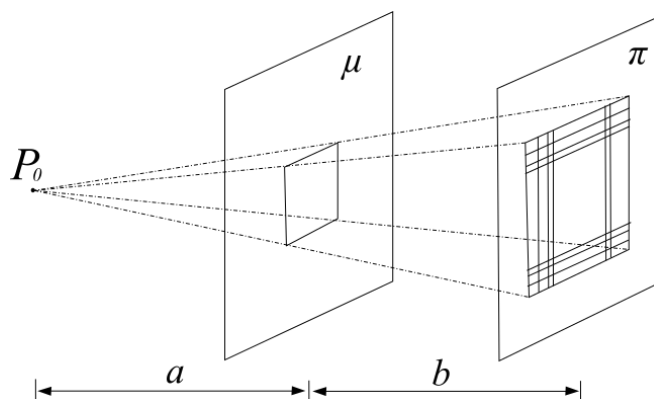


Obrázek 8: Rayleighovo kritérium [11].

2.4.2 Fresnelova difrakce

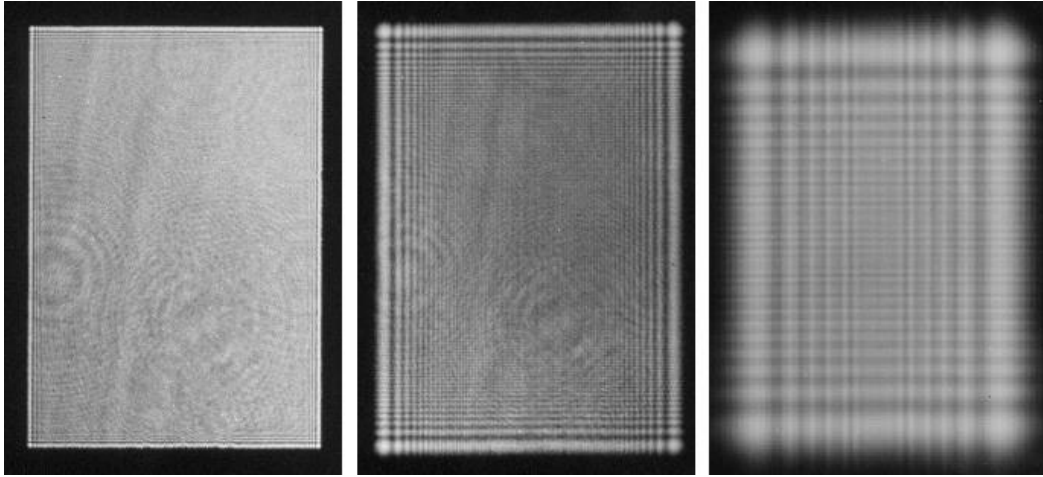
Pro dosažení Fresnelovy difrakce musíme uvažovat menší vzdálenost mezi bodovým zdrojem záření, difraktovaným předmětem a stínítkem, než při Fraunhoferově konfiguraci. To má za následek, že již nelze počítat difrakční obrazec za pomoci aproximace světla rovinou vlnou, ale aproximací parabolickou vlnou. Pro dané výpočty Fresnelovy difrakce v dalších kapitolách budeme využívat Fresnelovu aproximaci kulové vlny vlnou parabolickou. Nezbytné bude i užití Lommelových funkcí v případě analytického výpočtu.

Jako další rozdíl oproti Fraunhoferově difrakci můžeme brát skutečnost, že Fresnelova difrakce nám vzniká i bez použití čoček, tedy i při stínové projekci. Pokud z bodového zdroje P_0 vychází koherentní záření na blízkou aperturu μ , tak na stínítku π za touto aperturou můžeme pozorovat onu Fresnelovu difrakci, (viz obr. 9). Samozřejmě za podmínky, že zdroj P_0 i stínítko budou v konečné vzdálenosti od apertury.



Obrázek 9: Fresnelova difrakce. Překresleno z [1].

Typický difrakční obrazec při Fresnelově difrakci na obdélníkové apertuře se podstatně více podobá difraktovanému předmětu, než v případě Fraunhoferovy difrakce a vypadá tedy následovně:



Obrázek 10: Fresnelova difrakce na stejném obdélníkovém otvoru, jako u obr. 6, kde rozměry jsou 7,5x5,4mm, $\lambda=630\text{nm}$. Použity jsou různé kombinace vzdáleností a , b (viz obr. 9) Převzato z [1].

Praktická část

3. Fresnelova difrakce na kruhovém otvoru

V této kapitole se nejprve podíváme na metodu analytického výpočtu, jak pro výslednou osovou relativní intenzitu, tak i pro mimoosovou. Uvedeme si několik výsledků simulací z prostředí Matlab, poté přejdeme na další metodu výpočtu Fresnelovy difrakce, a to rychlou Fourierovu transformaci. Závěrem této kapitoly bude vzájemné porovnání metod těchto simulací s reálnými výsledky naměřenými v laboratoři.

3.1 Analytický výpočet

3.1.1 Relativní intenzita v bodech osy rotační symetrie

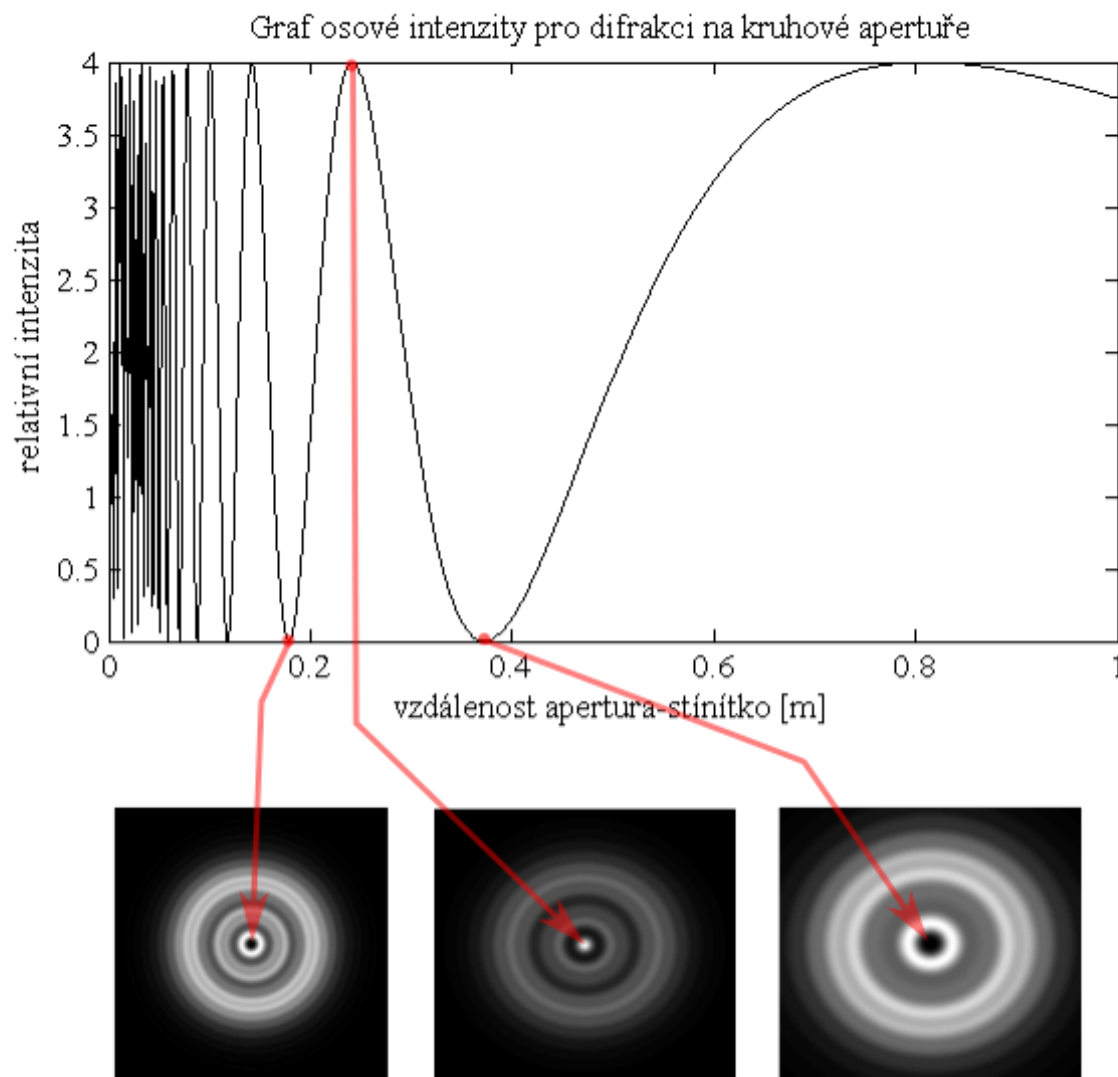
Výpočet relativní osové intenzity pro Fresnelovu difrakci uvažujeme pro ideální případ jednoho osového bodu v rovině difrakčního obrazce.

Relativní intenzitou rozumíme poměr mezi intenzitou, která by vznikla v rovině difrakčního obrazce (osového bodu) při volném šíření svazku, k intenzitě, která by zde vznikla právě při omezení svazku kruhovou aperturou. Nyní si uvedeme výpočet této relativní osové intenzity I [1]:

$$I = 4 \sin^2 \left[\frac{k}{4} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) a^2 \right], \quad (4)$$

kde k je vlnové číslo, tedy $2\pi/\lambda$ a parametr a je poloměr apertury.

Pokud jako vstupní argumenty zadáme např. $\lambda=632,8\text{nm}$, $z_1=0,32\text{m}$, $a=0,66\text{mm}$. Dostáváme graf (viz obr. 11), na kterém vidíme změnu relativní osové intenzity v závislosti na vzdálenosti mezi aperturou a rovinou pozorování. Tato relativní osová intenzita nám vypovídá o počtu prošlých Fresnelových zón do daného bodu na ose rotační symetrie. V místech, kde můžeme pozorovat pokles relativní intenzity na minimální hodnotu, se sčítají právě příspěvky ze sudého počtu Fresnelových zón, tedy opačných fází. Oproti tomu, maximum relativní intenzity nám značí místo, kde se sčítají příspěvky z lichého počtu Fresnelových zón, tedy stejných fází. Tyto maxima nabývají hodnoty 4, tzn., že intenzita v rovině pozorování je 4x větší, než kdybychom svazek vůbec neomezovali aperturou.



Obrázek 11: Graf relativní osové intenzity při difrakci na kruhové apertuře.

Tuto skutečnost si později ověříme na výstupech z prostředí Matlab a taktéž na reálném měření při experimentu, kde budeme simulovat výpočet pro tři zvolené (body z grafu) vzdálenosti apertury od stínítka, kdy funkce dosahuje lokálního extrému.

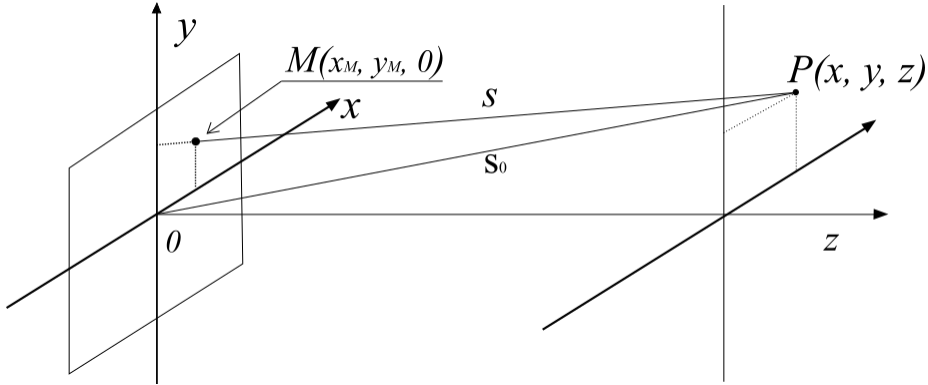
3.1.1 Relativní intenzita mimo body osy rotační symetrie

Difrakci na kruhové apertuře, budeme vykreslovat v rovině stínítka jako intenzitní rozložení. Pro výpočet Fresnelovy difrakce budeme vycházet z Huygensova-Fresnelova principu. Vycházejme tedy z integrálu pro tento princip, který nám umožňuje výpočet komplexní amplitudy v bodě P (viz obr. 11) (Komrska, 1999):

$$\psi(P) = -\frac{ik}{2\pi} \iint_{S_0} \psi_0(M) \frac{\exp(iks)}{s} \cos \vartheta \, dS_0, \quad (5)$$

kde faktor sklonu $K(\vartheta) = 1$, tím pádem z integrálu (5) dostáváme [1]:

$$\psi(P) = -\frac{ik}{2\pi} \iint_{S_0} \psi_0(x_M y_M) \frac{\exp(iks)}{s} dx_M dy_M. \quad (6)$$



Obrázek 11: Souřadnicový systém pro Fresnelův difrakční integrál. Překresleno z [1].

Pokud tedy nyní užijeme Fresnelovy aproximace kulové vlny [1]:

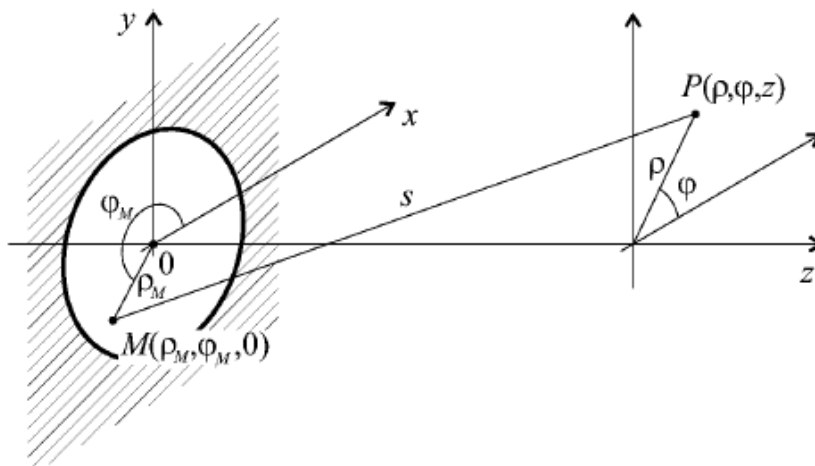
$$\frac{\exp(iks)}{s} \approx \frac{\exp(ikz)}{z} \exp\left[\frac{ik}{2z}((x-x_M)^2 + (y-y_M)^2)\right]. \quad (7)$$

a současně klademe $\psi_0(x_M y_M) = 0$ v místech, kde je stínítko nepropustné, dostáváme výsledný difrakční integrál pro Fresnelovy ohybové jevy [1]:

$$\psi(x, y, z) = -\frac{ik \exp(ikz)}{2\pi z} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x_M y_M) \exp\left[\frac{ik}{2z}[(x-x_M)^2 + (y-y_M)^2]\right] dx_M dy_M \quad (8)$$

Vztah $\psi(x, y, z)$ nám tedy vyjadřuje vlnovou funkci v bodech P (x, y, z) , kde se nachází rovina pozorování $z = \text{konst.} > 0$, prostřednictvím vlnové funkce ψ_0 v bodech $M(x_M, y_M, 0)$ roviny $z = 0$. Je-li vlna dopadající na stínítko rovinná, nebo kulová, lze integrál analyticky vypočítat.

V této práci se budeme soustředit na dopadající parabolickou vlnu, pro kterou uijeme její Fresnelovu aproximaci. V případě difrakce na kruhové apertuře, kdy tento jev má kruhovou symetrii a tvoří jej apertura o konstantní propustnosti (viz obr. 12), můžeme vyjádřit integrál (4) ve válcových souřadnicích za pomoci Lommelových funkcí [1].



Obrázek 12: Souřadný systém pro odvození integrálu ve válcových souřadnicích [1].

$$\begin{aligned} x_M &= \rho_M \cos \varphi_M, & x &= \rho \cos \varphi, \\ y_M &= \rho_M \sin \varphi_M, & y &= \rho \sin \varphi. \end{aligned}$$

Detailní výpočet pro difrakčního integrálu ve válcových souřadnicích lze nalézt např. v [1], my se v rámci této práce zaměříme pouze na diskuzi řešení. Relativní komplexní amplitudu v rovině pozorování lze zapsat za užití Lommelových funkcí U_1 a U_2 v následujícím tvaru [1]:

$$\frac{\psi}{\psi_r} = -\exp \left[\frac{i}{2} \left(u + \frac{v^2}{u} \right) \right] [U_2(u, v) + iU_1(u, v)], \quad (9)$$

$$\text{kde } u = k \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) a^2,$$

$$v = \frac{ka\rho}{z},$$

přičemž a je poloměr apertury, z_1 vzdálenost mezi zdrojem záření a aperturou, z je vzdálenost mezi aperturou a rovinou pozorování a ρ nám udává vzdálenost bodu P od osy (ve válcových souřadnicích).

Vztah (9) lze zapsat také za použití zobecněných Lommelových funkcí V_0 a V_1 pro relativní mimoosovou komplexní amplitudu v rovině pozorování (stínítka, či CMOS snímače)[1]:

$$\frac{\psi}{\psi_r} = \exp\left[\frac{i}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right] \left\{ \exp\left[-\frac{i}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right] [-V_0(u, v) + iV_1(u, v)] \right\} \quad (10)$$

U_2 , U_1 , V_0 , V_1 jsou právě Lommelovy funkce, které si zapíšeme následovně (Komrska, 1999):

$$U_1 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{u}{v}\right)^{1+2m} J_{1+2m}(v),$$

$$U_2 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{u}{v}\right)^{2+2m} J_{2+2m}(v),$$

$$V_0 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{v}{u}\right)^{2m} J_{2m}(v),$$

$$V_1 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{v}{u}\right)^{1+2m} J_{1+2m}(v),$$

kde $J_n(v)$ značí Besselovu funkci prvního druhu n -tého řádu. Řešení tedy vede na sčítání nekonečné řady Besselových funkcí. Tento problém jsme řešili užitím aproximace pro několik desítek prvních řad z důvodu přizpůsobení numeriky pro Matlab, abychom se nedostali k hodnotám řádově 10^{27} .

Pro srovnání výsledků v rámci bakalářské práce jsme se rozhodli využít i jiný přístup numerického řešení Fresnelova difrakčního integrálu, a sice rychlou Fourierovu transformaci, kterou si popíšeme v následující kapitole.

3.2 Výpočet za užití rychlé Fourierovy transformace

Fourierova transformace vychází ze skutečnosti, že libovolný vstupní signál může být rozložen na superpozici několika harmonických funkcí času o různých prostorových frekvencích a komplexních amplitudách. Například tedy libovolnou vstupní postupnou vlnu můžeme uvažovat jako sumaci nekonečně mnoha rovinných vln. Pokud dále známe, jakým způsobem ovlivňuje lineární optický systém, či prostředí tyto rovinné vlny (pomocí přenosové funkce, která je odezvou na prostorové harmonické funkce), lze poté na principu superpozice zjistit, jak bude působit na jakoukoliv vlnu [6].

Nyní si zavedeme soustavu, kde na vstupu máme komplexní amplitudu monochromatické optické vlny o vlnové délce λ , a komplexní amplitudě $U(x, y, z)$ vstupující do soustavy v rovině $z=0$ a vystupující při $z=d$.

Jako základní parametr soustavy je za potřebí uvést impulsní odezvu, která je v prostorové oblasti brána jako odezva na jednotkový puls realizovaný za pomoci bodového zdroje jako předmětu ($z=0$), v tom případě hovoříme v optických systémech přímo o bodové rozptylové funkci nazývané PSF (Point Spread Function). PSF nám tedy udává nejmenší rozlišitelný detail danou soustavou. Prostorové rozložení komplexní amplitudy ve výstupní rovině získáme za pomoci konvoluce rozložení vstupní komplexní amplitudy a impulsní odezvy. Konvoluční teorém, nám způsobí při přechodu z prostorové do spektrální (frekvenční) domény značné usnadnění v podobě záměny složitější konvoluce na jednoduché násobení [7].

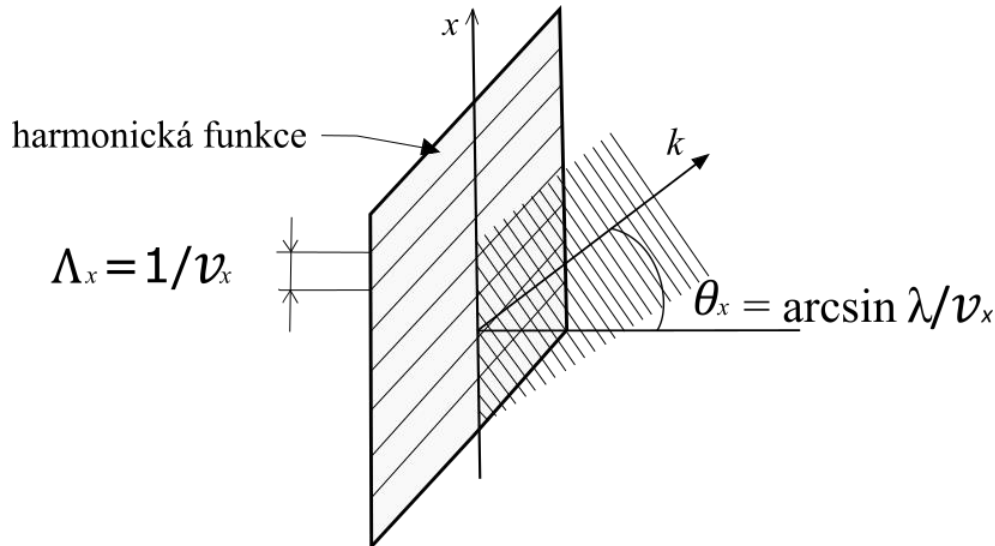
Pro konkrétní výpočet v prostředí Matlab metodou rychlé Fourierovy transformace si nejdříve nadefinujeme vstupní signál, tedy záření dopadající na aperturu, či terčik. Jak se dozvíme později, u experimentu jsme užili, jako bodový zdroj, vyvážání laserového záření z optického vlákna, a proto můžeme toto vstupní záření aproximovat Gaussovským svazkem. Komplexní amplituda tohoto svazku je následující [8]:

$$U_{r,z} = A \frac{w_0}{w} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \exp\left(i \frac{-kr^2}{2R}\right) \exp\left(i \arctg \frac{z}{q_0}\right) \exp(i\omega t - ikz).$$

w_0 = pološířka pasu svazku
 q_0 = Rayleighova vzdálenost
 w = pološířka svazku ve vzdálenosti z od pasu svazku
 R = poloměr křivosti vlnoplochy
 ω = kruhová frekvence
 k = vlnové číslo

Jako vstupní funkci jsme tedy užili tuto komplexní amplitudu násobenou amplitudovou propustností (rektangulárním pulsem, který jsme vytvořili zaokrouhlením Gaussovské křivky) podle užítí apertury či nepropustného terčíku. Následně jsme provedli rychlou Fourierovu transformaci (podle Matlabem zavedeného fft2 algoritmu) této funkce, čímž jsme přešli z časové domény do frekvenční.

Také je třeba uvažovat vztahy mezi prostorovými frekvencemi a úhly $\theta_{x,y}$ směrového vektoru, které nám potvrzují skutečnost, že závisí pouze na vlnové délce a periodě daných směřů harmonické funkce [6].



Obrázek 13: Závislost směrového úhlu vlnového vektoru na prostorových frekvencích. Překresleno z [6].

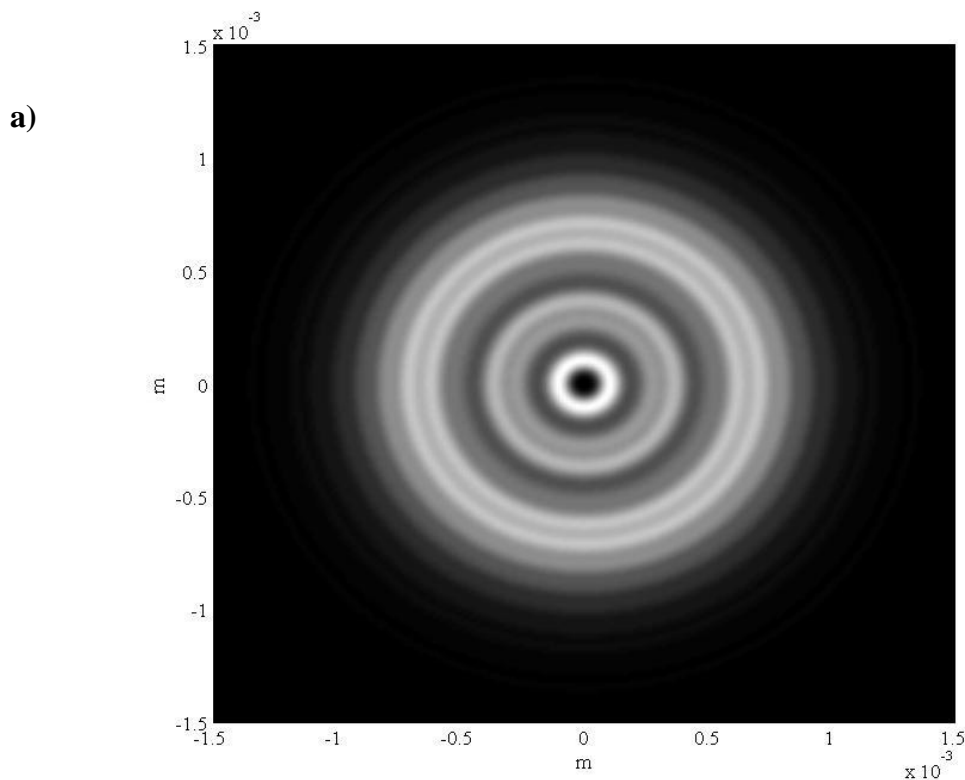
Pro další postup si uvedeme přenosovou funkci volného šíření $H(v_x, v_y)$. Ve Fresnelově aproximaci využíváme toho, že vstupní funkce obsahuje podstatně menší prostorové frekvence než je mezní frekvence $1/\lambda$. To má za následek malé úhly $\theta_{x,y} = \lambda v_{x,y}$ odpovídající šíření paraxiálních paprsků [6]. Díky přechodu do frekvenční oblasti

užijeme násobení vstupního signálu touto funkcí a jsme schopni dopočítat výstupní, tedy námi požadovanou výslednou funkci. Přenosová funkce volného šíření podle [4]:

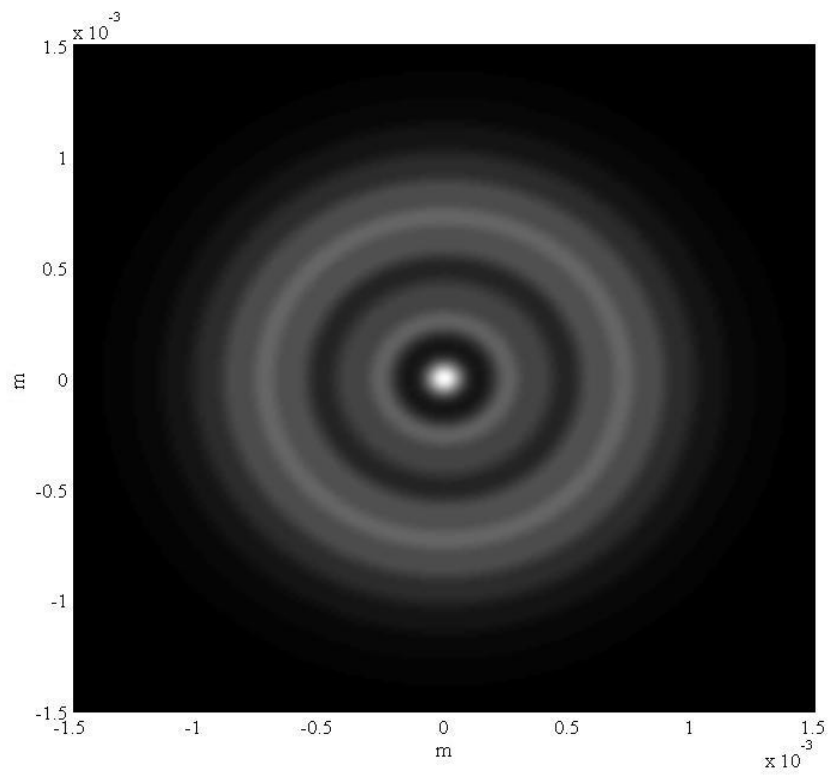
$$H(v_x, v_y) = \exp(-ikz) \exp(i\pi\lambda z(v_x^2 + v_y^2))$$

Pokud tedy provedeme tuto operaci a následně spočítáme inverzní rychlou Fourierovu transformaci (ifft2), dostaneme požadovaný vztah komplexní amplitudy ve výstupní rovině. Pro porovnání výsledku s měřeným experimentem na CMOS kameře stačí pouze kvadrát absolutní hodnoty této komplexní amplitudy, jelikož pozorujeme velikost intenzity záření.

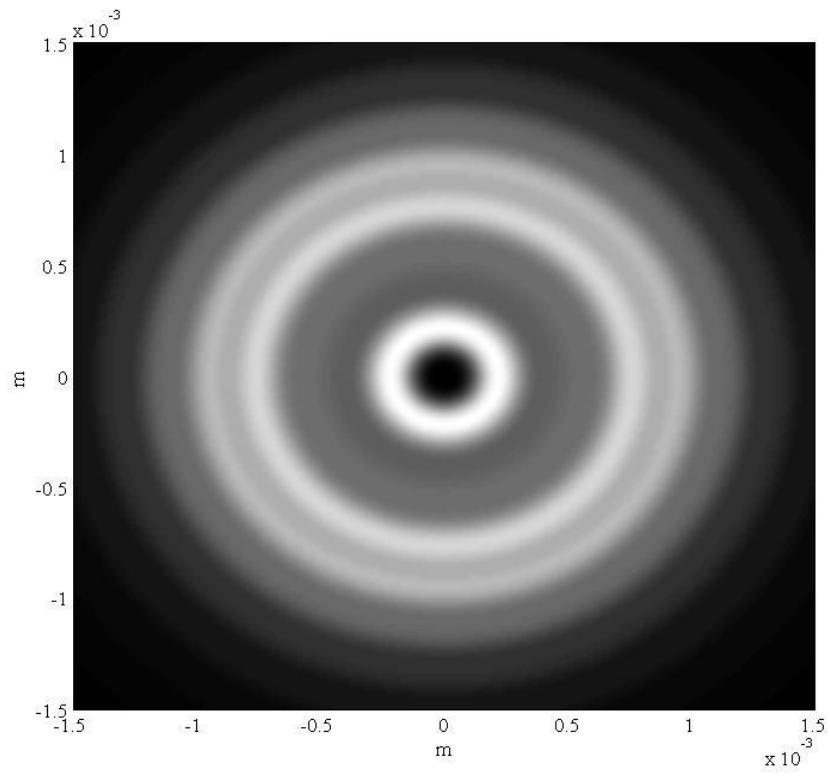
Nyní si porovnáme výsledky simulací s reálným experimentem pro stejný případ, jako je u grafu osové relativní intenzity (viz obr. 11). Nejdříve si uvedeme výsledky analytických výpočtů, poté výpočtů za užití rychlé Fourierovy transformace.



b)



c)

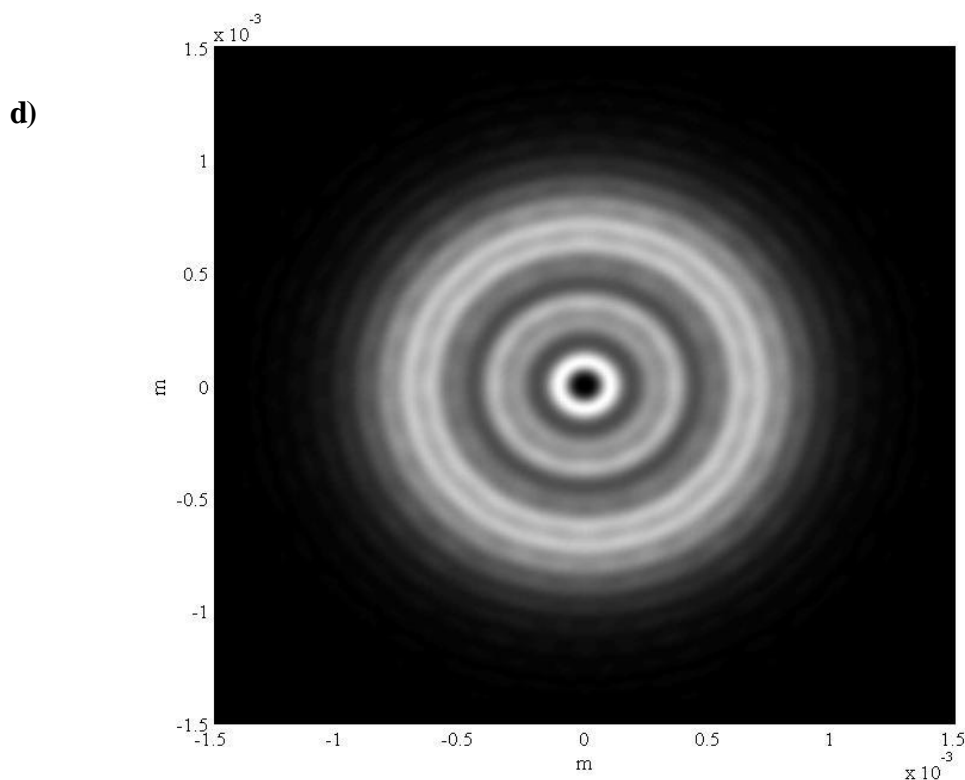


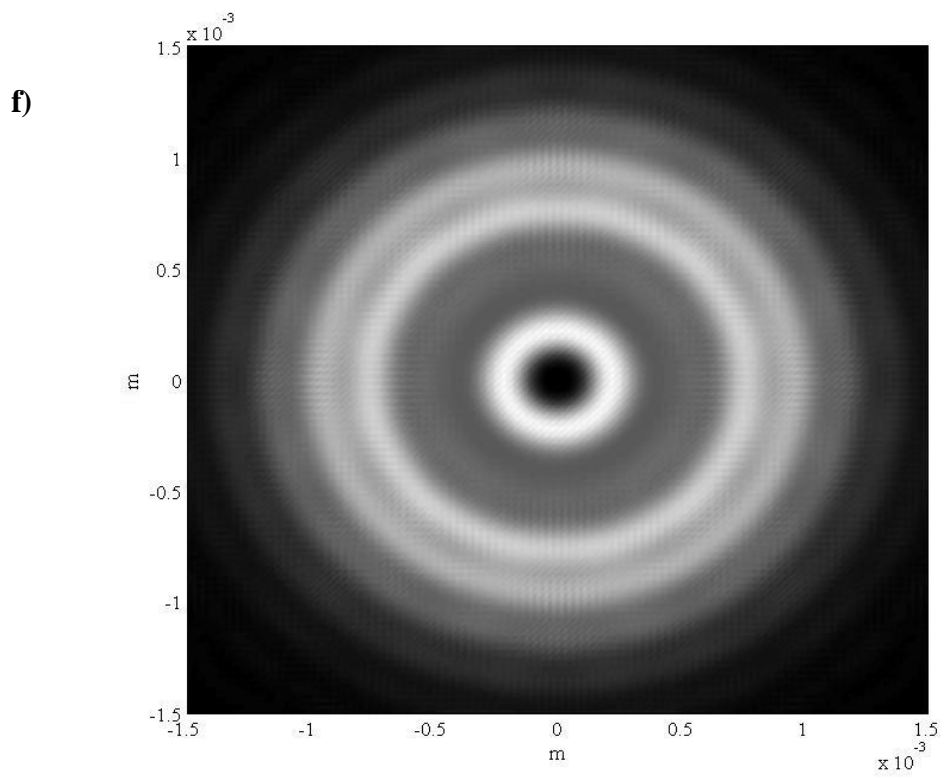
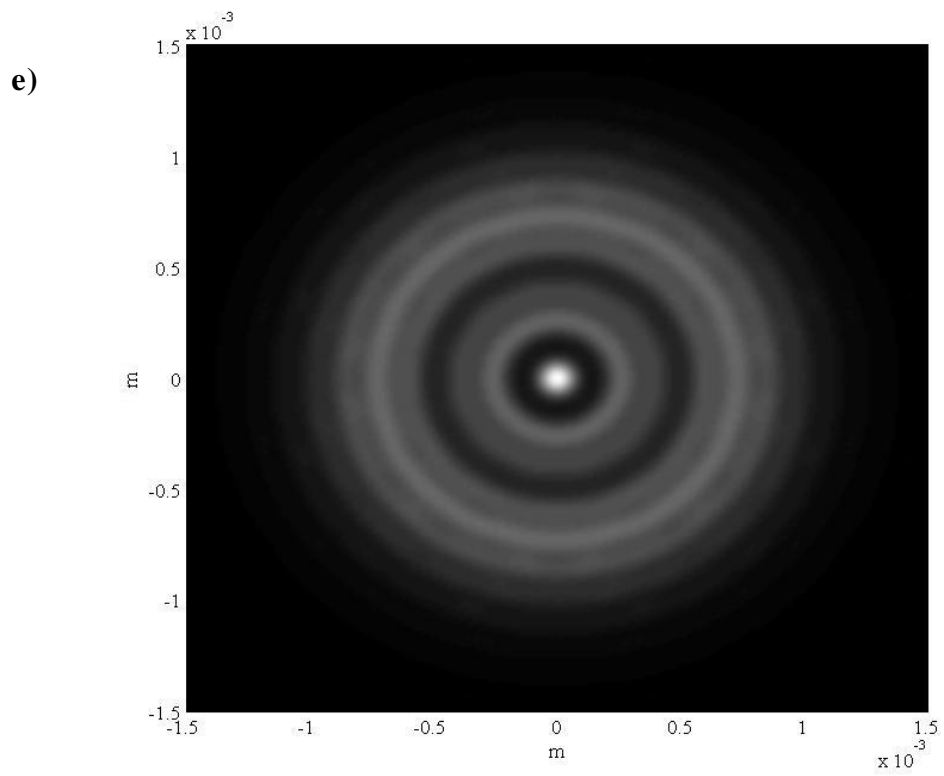
Obrázky a), b) i c) jsou analytické výpočty Fresnelovy difrakce na kruhové apertuře, jedná se o rozložení intenzity ve výstupní rovině za pomoci výše předepsaného postupu v prostředí Matlab. Vstupní parametry jsou: $\lambda = 632,8\text{nm}$, $z_1 = 320\text{mm}$, $a = 0,66\text{mm}$ a vzdálenost z se mění podle místa maxima či minima osové intenzity, jak je zaznačeno v grafu na obr. 11, tedy pro obrázek a) $z = 179\text{mm}$, b) $z = 242\text{mm}$, c) $z = 375\text{mm}$.

Pro přizpůsobení výpočtu prostředí Matlab byl pro vnitřní část difrakčního obrazce užít vztah (9), zatímco pro vnější část vztah (8). Dále jsme z důvodu numeriky simulovali nekonečnou řadu součtem prvních šedesáti členů pro zajištění korektních výsledků, jak si později ověříme při porovnávání těchto výpočtů s reálným experimentem.

Jak je patrné z porovnání grafu relativní osové intenzity a výsledků simulací, nastává nám vzájemná shoda, tedy v případě obrázku a) vidíme střed obrazce jako minimum intenzity, zatímco u obrázku b) nastává očekávané maximum osové intenzity.

Dále bude následovat porovnání výsledků výpočtu za užití rychlé Fourierovy transformace.

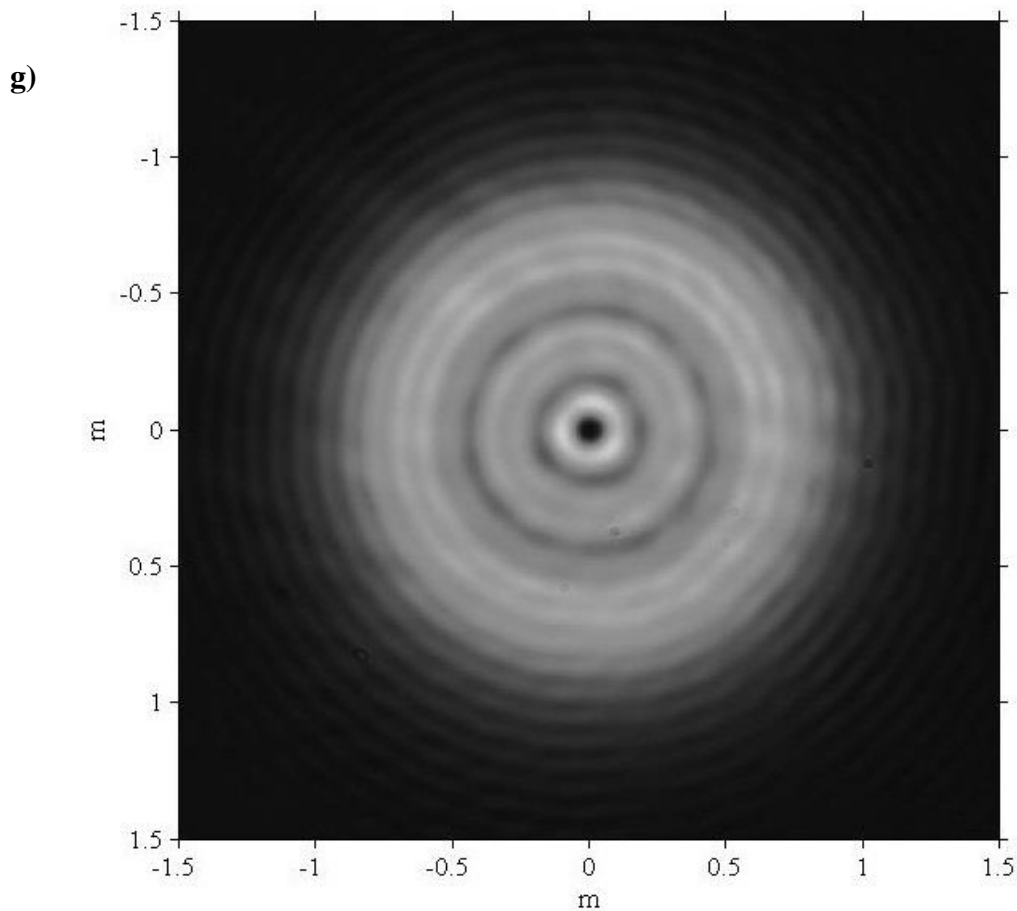




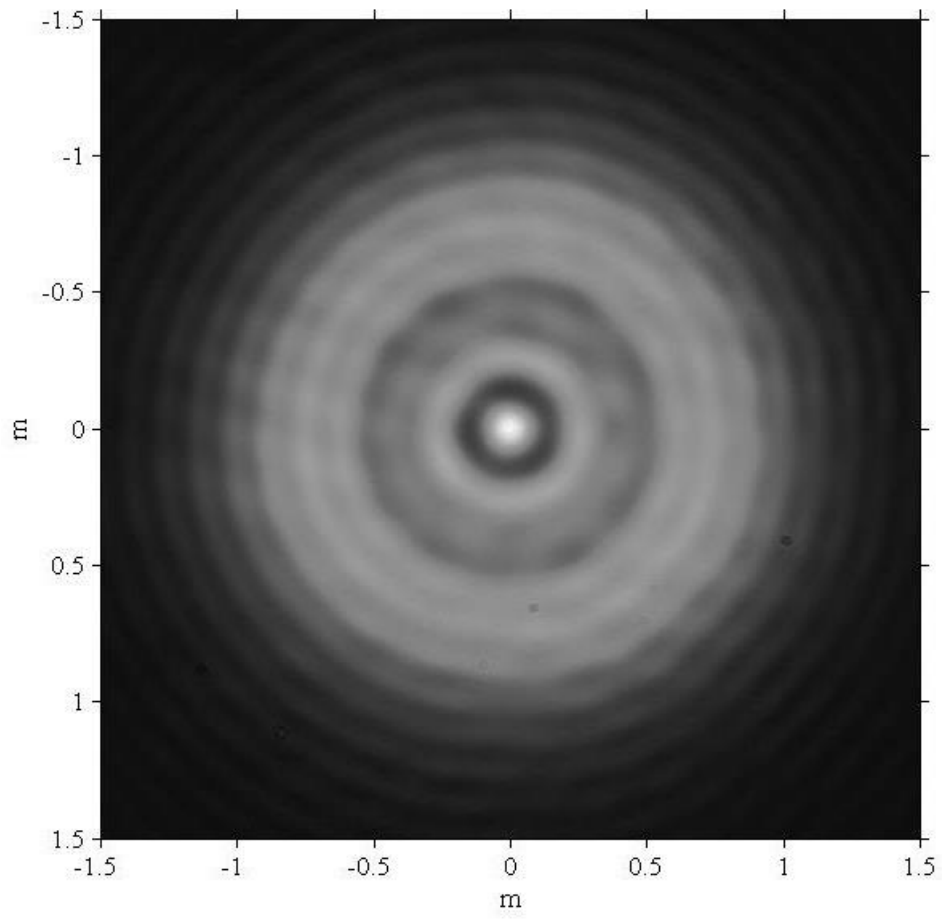
Obrázky **d)**, **e)**, **f)** jsou výstupy z výpočtu mimoosové intenzity Fresnelovy difrakce na kruhové apertuře v prostředí Matlab za pomoci rychlé Fourierovy transformace. Vstupními parametry jsou: $\lambda = 632,8\text{nm}$, $z_1 = 320\text{mm}$, $a = 0,66\text{mm}$. Vzdálenost z se mění podle místa maxima či minima osové intenzity, jak je zaznačeno v grafu na obr. 11, tedy pro obrázek d) $z = 179\text{mm}$, e) $z = 242\text{mm}$, f) $z = 375\text{mm}$.

Můžeme si povšimnout jen minimálního rozdílu oproti analytickému výpočtu, který je dán pouze vzorkováním.

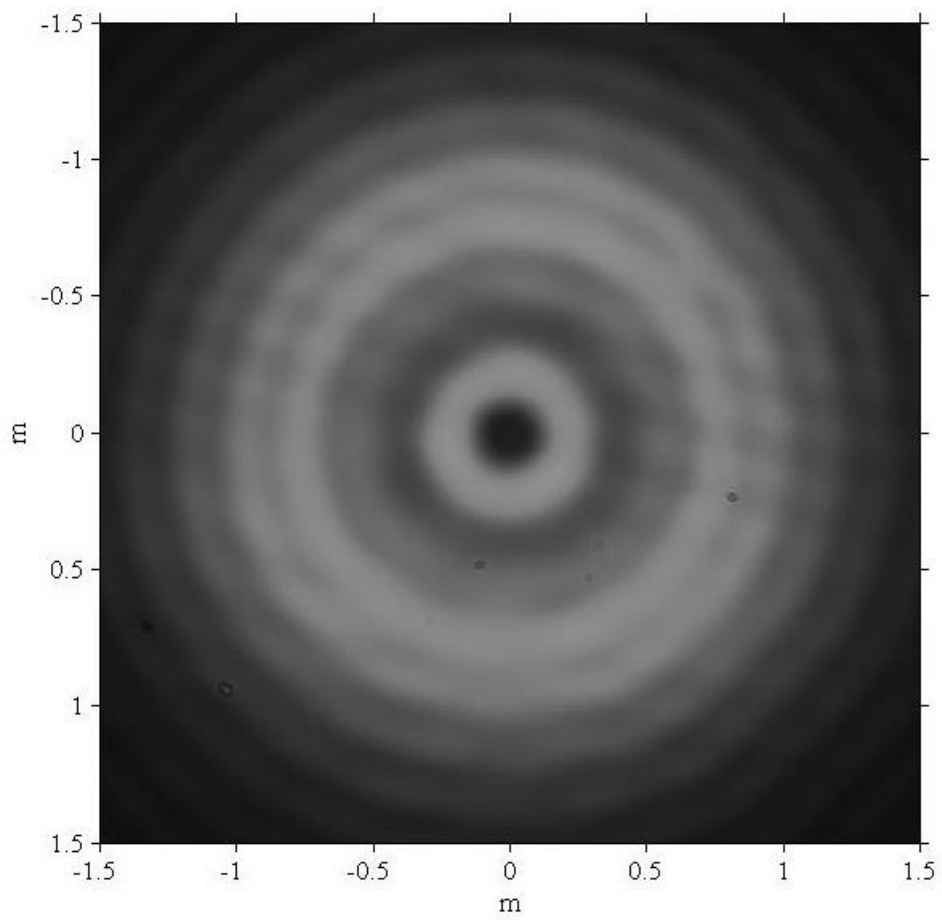
Nyní porovnáme simulace z prostředí Matlab s reálně naměřenými daty na CMOS kameře, za stejných parametrů:



h)



i)



Obrázky **g)**, **h)**, **i)** jsou data snímaná CMOS kamerou při reálném experimentu pro následující parametry: $\lambda = 632,8\text{nm}$, $z_1 = 320\text{mm}$, $a = 0,66\text{mm}$. Stejně jako u předchozích dvou metod se vzdálenost z pohybovala v místech lokálních extrémů funkce osově intenzity z obrázku 11. Tedy parametr z byl pro obrázek **g)** $z = 179\text{mm}$, **h)** $z = 242\text{mm}$, **i)** $z = 375\text{mm}$.

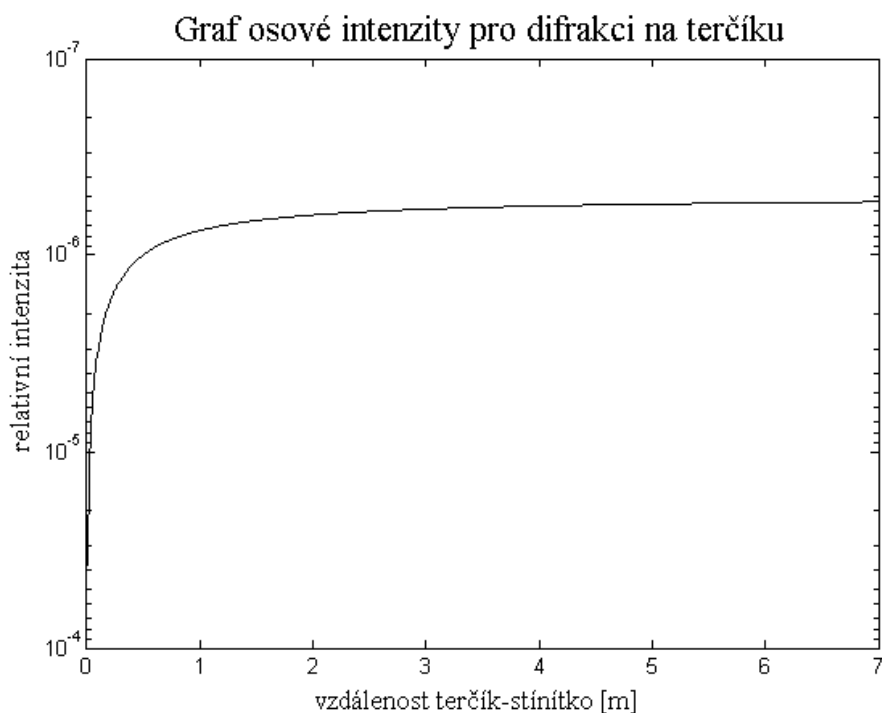
Nyní můžeme z porovnání analytického výpočtu, výpočtu za pomoci rychlé Fourierovy transformace a reálných dat z experimentu shledat teorii shodnou s výpočty i reálným měřením.

4. Fresnelova difrakce na kruhovém terčiku

4.1 Analytický výpočet

4.1.1 Relativní intenzita v bodech osy rotační symetrie

Výpočty pro případ nepropustného terčiku se principiálně příliš nelišily od výpočtu Fresnelovy difrakce na apertuře. Hlavní rozdíl byl samozřejmě v osové intenzitě difrakčního obrazce, kde jsme mohli pozorovat právě onu Poissonovu skvrnu. Ta má za následek téměř konstantní hodnotu relativní osové intenzity bez závislosti na vzdálenosti terčiku od stínítka (CMOS kamery). Jak můžeme vidět v následujícím grafu:



Obrázek 14: Graf relativní osové intenzity pro difrakci na kruhovém nepropustném terčiku.

Další rozdíl oproti Fresnelově difrakci na apertuře je nezávislost velikosti Poissonovy skvrny na změně vzdálenosti mezi zdrojem a nepropustným kruhovým terčikem. Vliv na velikost Poissonovy skvrny má totiž pouze velikost terčiku a vlnová délka použitého záření [1].

4.1.2 Relativní intenzita mimo body rotační symetrie

Difrakci na kruhovém nepropustném terčiku budeme vykreslovat taktéž v rovině stínítka jako intenzitní rozložení. Proto si zavedeme potřebné rozdílné vztahy pro výpočet vlnových funkcí na stejném principu jako u difrakce na apertuře.

Pro výpočet relativní komplexní amplitudy v rovině stínítka pomocí Lommelových funkcí U_2, U_1 platí [1]:

$$\frac{\psi}{\psi_r} = \left\{ 1 + \exp \left[\frac{i}{2} \left(u + \frac{v^2}{u} \right) \right] [U_2(u, v) + iU_1(u, v)] \right\}, \quad (11)$$

$$\text{kde } u = k \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) a^2,$$

$$v = \frac{ka\rho}{z},$$

Pro výpočet relativní komplexní amplitudy v rovině stínítka pomocí Lommelových funkcí V_0, V_1 platí [1]:

$$\frac{\psi}{\psi_r} = \exp \left[\frac{i}{2} \left(u + \frac{v^2}{u} \right) \right] [V_0(u, v) - iV_1(u, v)] \quad (12)$$

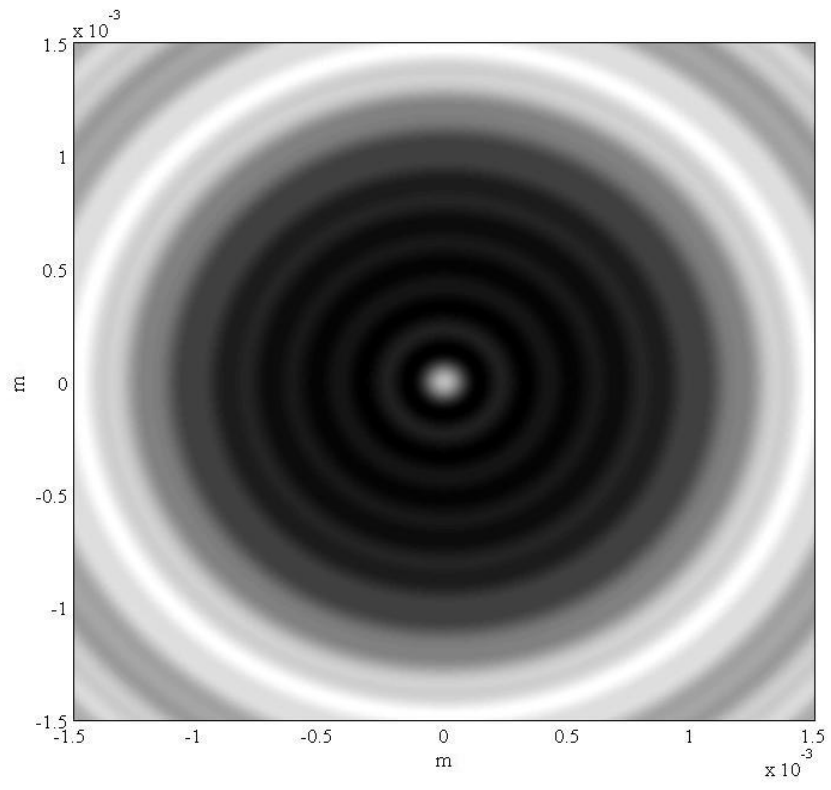
Také zde při sčítání Lommelových funkcí jsme užili aproximaci pro několik desítek prvních řad z důvodu přizpůsobení numeriky pro Matlab, abychom se nedostali k hodnotám řádově 10^{27} .

4.2 Výpočet za užití rychlé Fourierovy transformace

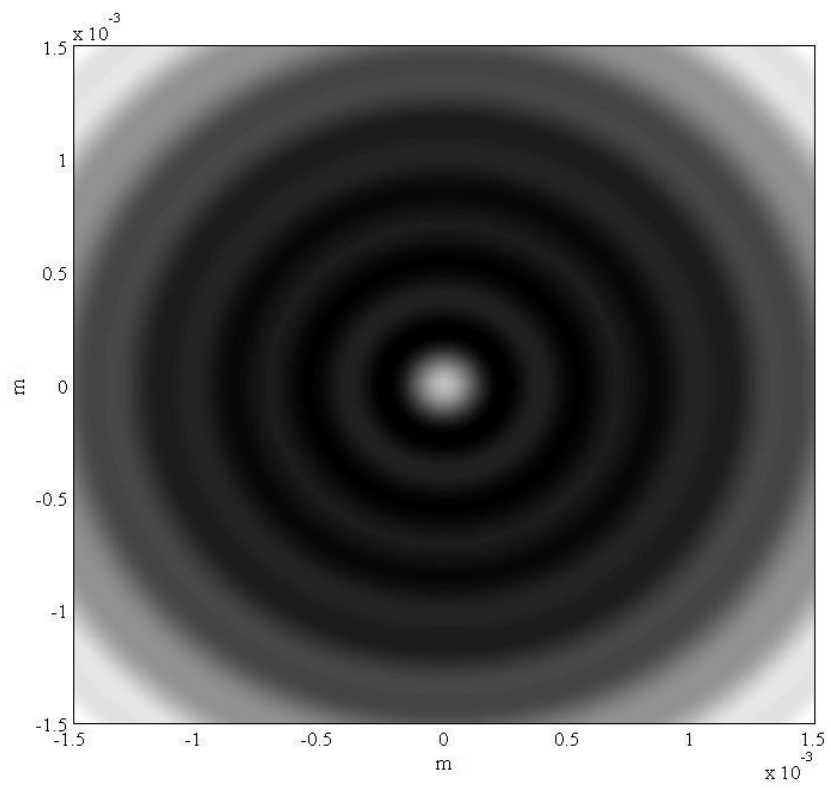
Při užití rychlé Fourierově transformaci pro Fresnelovu difrakci na nepropustném terčiku jsme užili stejného postupu, jako v případě apertury, ale s rozdílem, že rektangulární puls dosahoval opačných hodnot, než u apertury. Tedy vstupní funkce propustnosti dosahovala ve středu (oblasti nepropustného terčiku) nulových hodnot, zatímco periferie měla hodnotu 1.

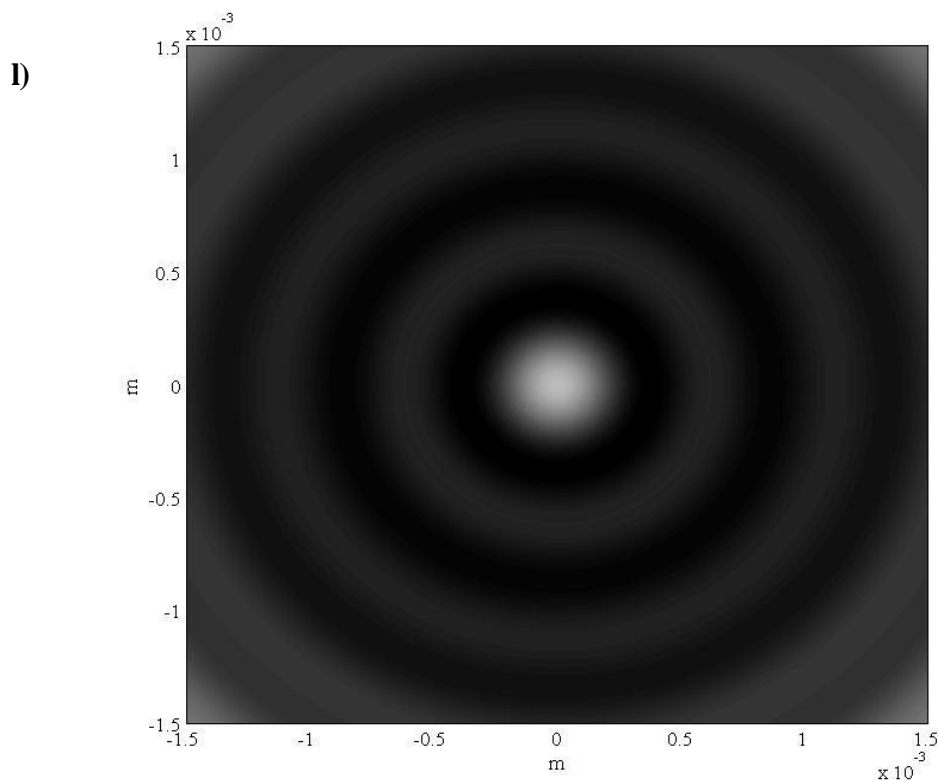
Nyní se podíváme na výstupy z programování difrakce na nepropustném kruhovém terčiku v prostředí Matlab, kde si nejdříve uvedeme analytický výpočet:

j)



k)



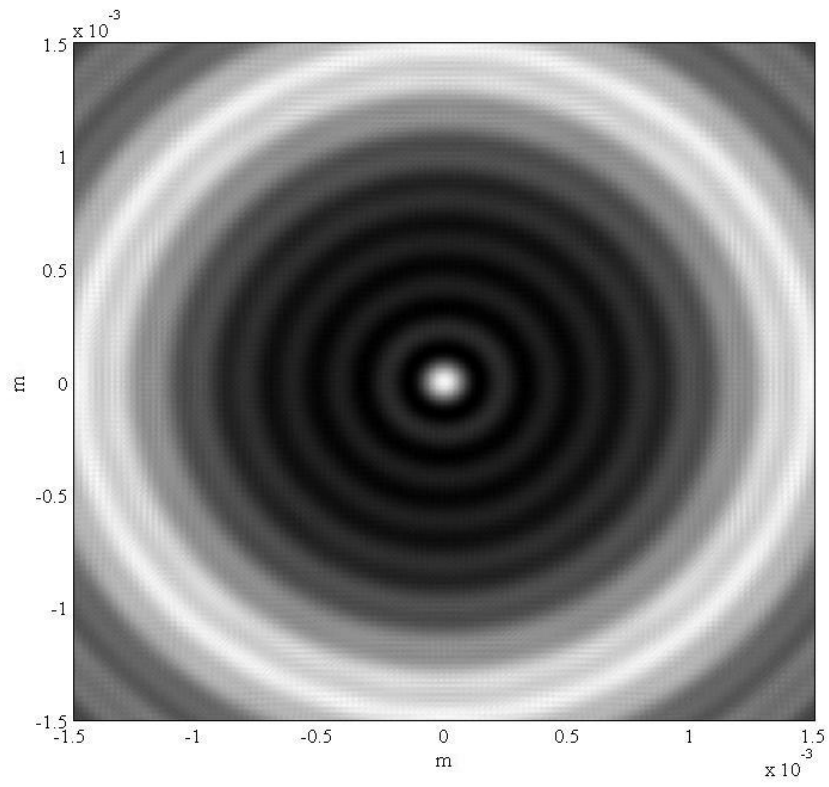


Trojice předešlých analytických výpočtů pro difrakci na kruhovém nepropustném terčiku j), k), l) je počítána pro následující vstupní parametry: $a = 0,5\text{ mm}$, $z_1 = 333\text{ mm}$, $\lambda = 632.8\text{ nm}$, kde v případě j) $z = 300\text{ mm}$, k) $z = 500\text{ mm}$, l) $z = 800\text{ mm}$.

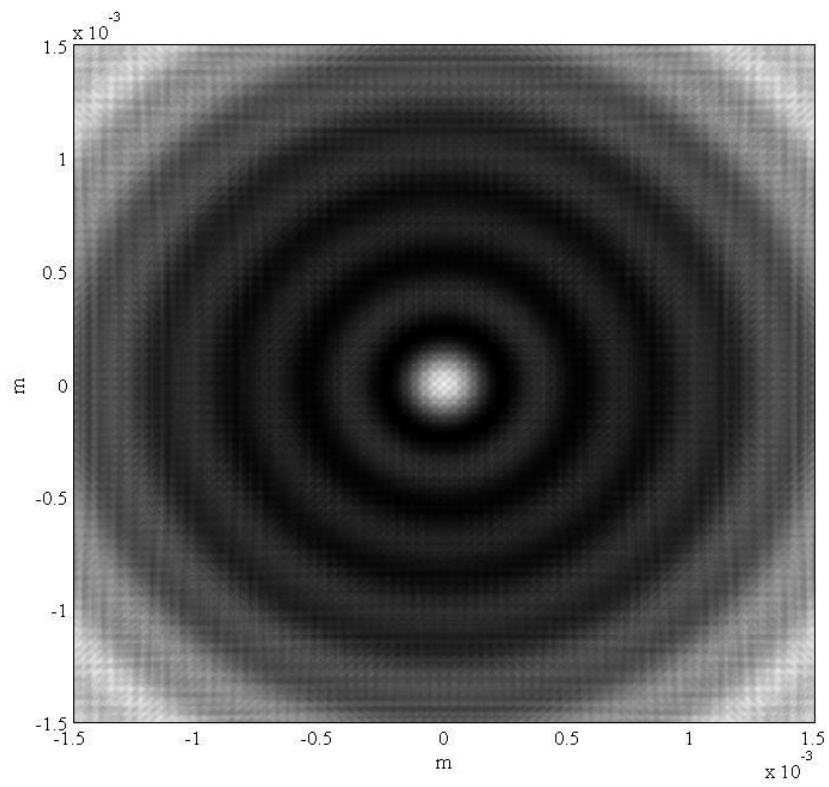
Nyní tedy můžeme pozorovat zmiňovanou závislost velikosti vzniklé Poissonovy skvrny na změně hodnoty vzdálenosti mezi stínítkem (CMOS čipem) a difraktovaným kruhovým terčikem z . Jak je patrné s výstupů, jedná se o přímou úměru, což se shoduje s teorií. Velikost Poissonovy skvrny taktéž ovlivní průměr kruhového terčíku a to nepřímou úměrou. Vzdálenost z_1 je jediný parametr, jehož změna neovlivní velikost Poissonovy skvrny, je však nutné držet se v oblasti parabolických vln, aby byla splněna podmínka Fresnelovy difrakce.

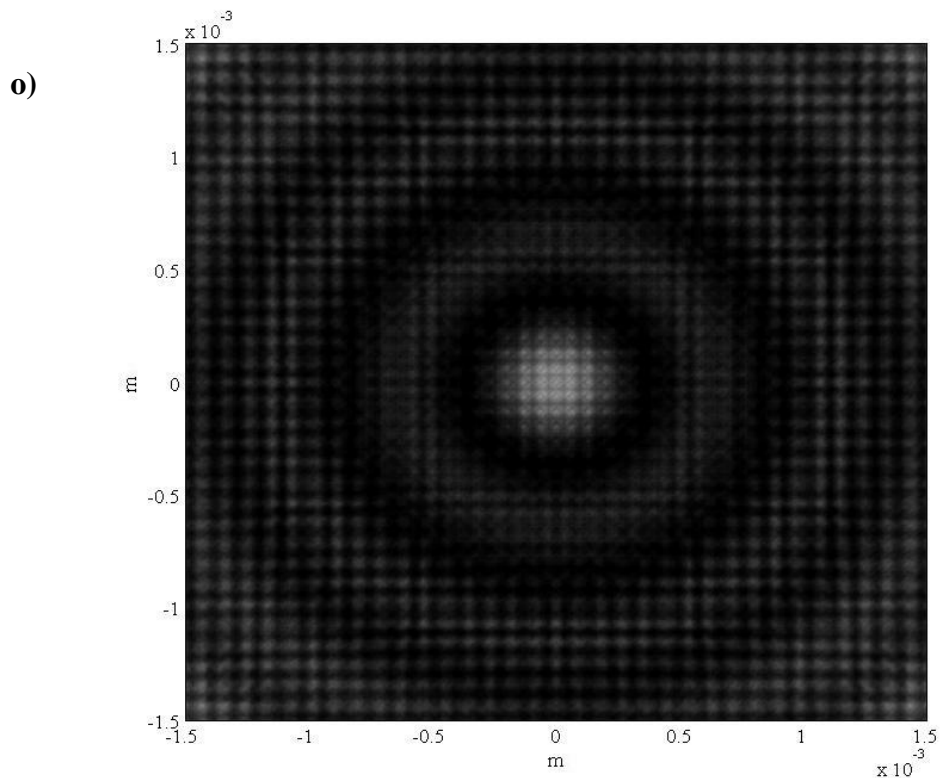
Následně si uvedeme výstupy z programování výpočtu za užití rychlé Fourierovy transformace při použití stejných parametrů sestavy jako u výše uvedeného analytického výpočtu.

m)



n)





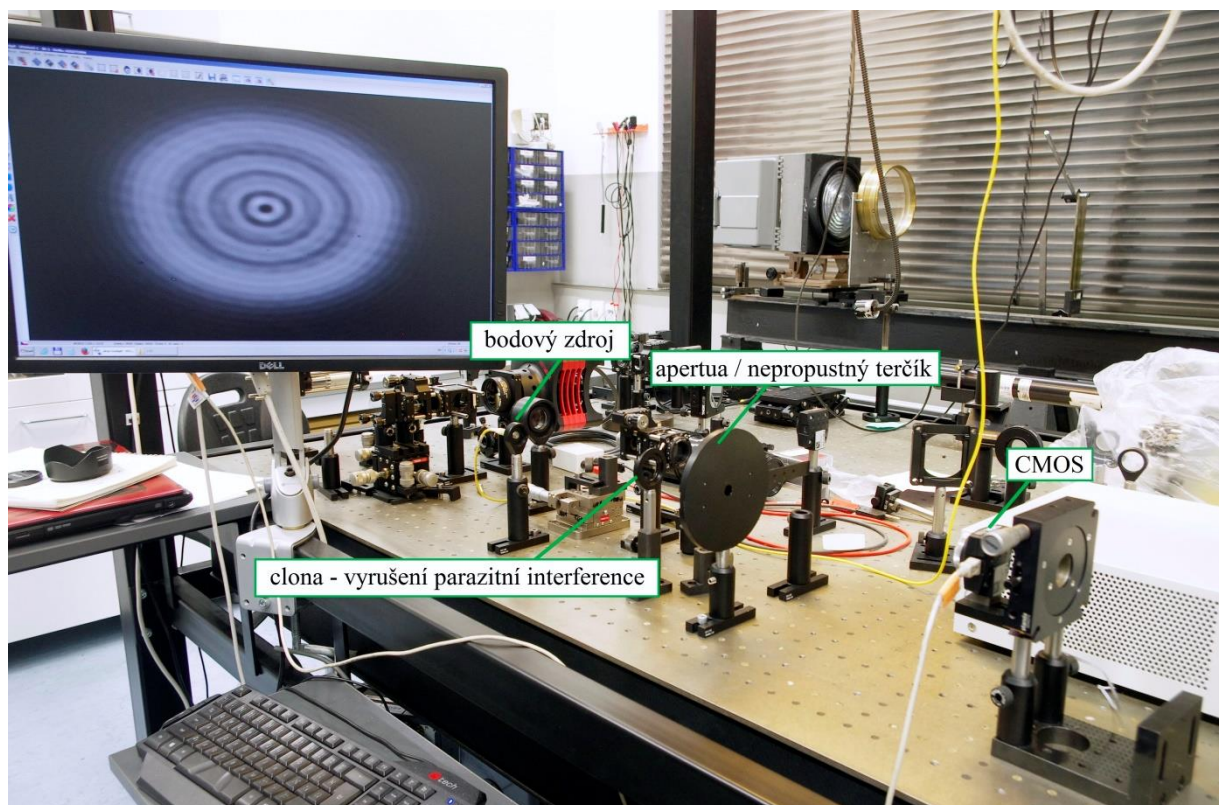
Obrázky **m)**, **n)**, **o)** jsou tedy výstupy z výpočtu pomocí metody standardní rychlé Fourierovy transformace. Jako vstupní parametry uvažujeme: $a = 0,5\text{ mm}$, $z_1 = 333\text{ mm}$, $\lambda = 632,8\text{ nm}$, kde parametr z je pro **m)** $z = 300\text{ mm}$, **n)** $z = 500\text{ mm}$, **o)** $z = 800\text{ mm}$.

Při srovnání s analytickým výpočtem vidíme, že opět nastala shoda. Rozdíl však můžeme vidět ve vzorkování.

Nyní si uvedeme způsob realizace experimentu a poté data naměřená při experimentu pro difrakci na kruhovém nepropustném terčičku.

5. Experiment

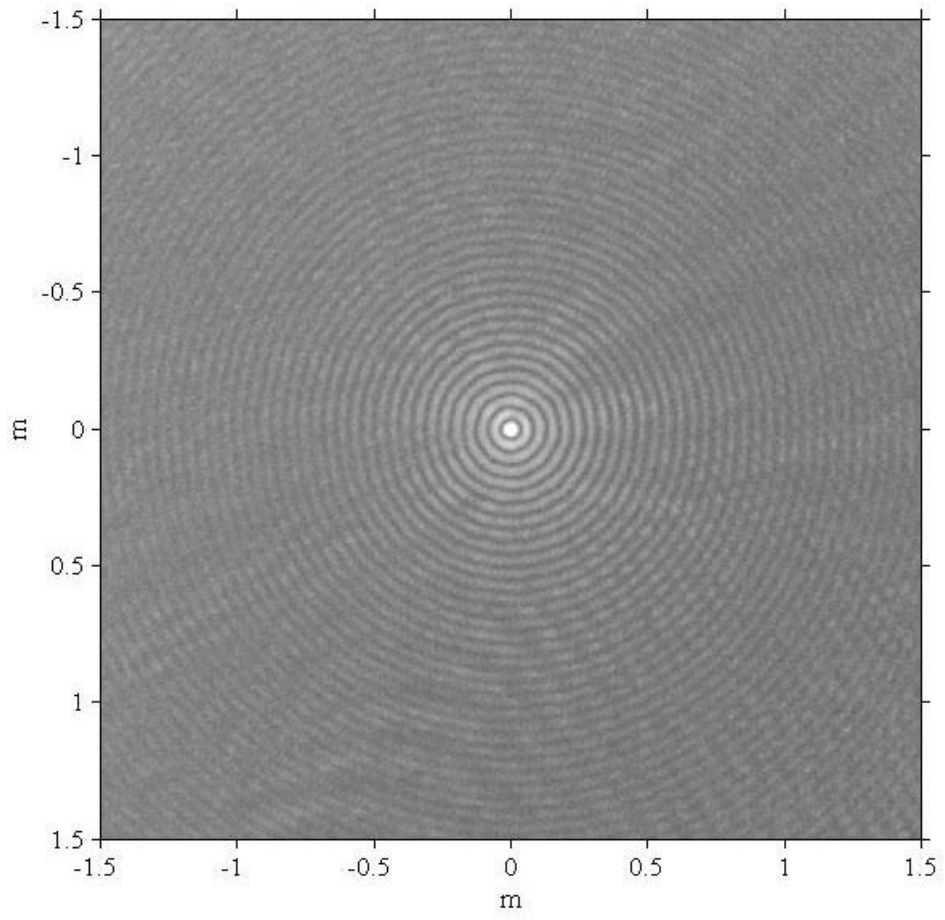
Pro Fresnelovu difrakci na kruhové apertuře či terčiku jsme potřebovali bodový zdroj koherentního záření, ten jsme realizovali za pomoci optického jednovidového vlákna o průměru jádra $4,1 \mu\text{m}$. Z tohoto vlákna jsme vyvázali záření He-Ne laseru $\lambda=632,8\text{nm}$. Následovala clona pro vymezení oblasti dopadajícího záření na difraktovaný předmět (z důvodu vyrušení parazitní interference na planoparalelní desce). Vzdálenost mezi difraktovaným předmětem (aperturou či terčikem) jsme zvolili $z_1=0,32\text{m}$, kdy jsme se pohybovali v oblasti potřebných parabolických vln. Jako apertury byly užity dírkové clony a kruhový nepropustný terčik tvořila kovová matná kulička připevněná na planoparalelní skleněné desce. Vzdálenost mezi difraktovaným předmětem a CMOS kamerou (z) jsme měnili v rozmezí desítek centimetrů až po jeden metr. Jako CMOS kamera byla užita UI-164x s rozlišením 1280×1024 pixelů o velikosti jednoho pixelu $3,6 \mu\text{m}$.



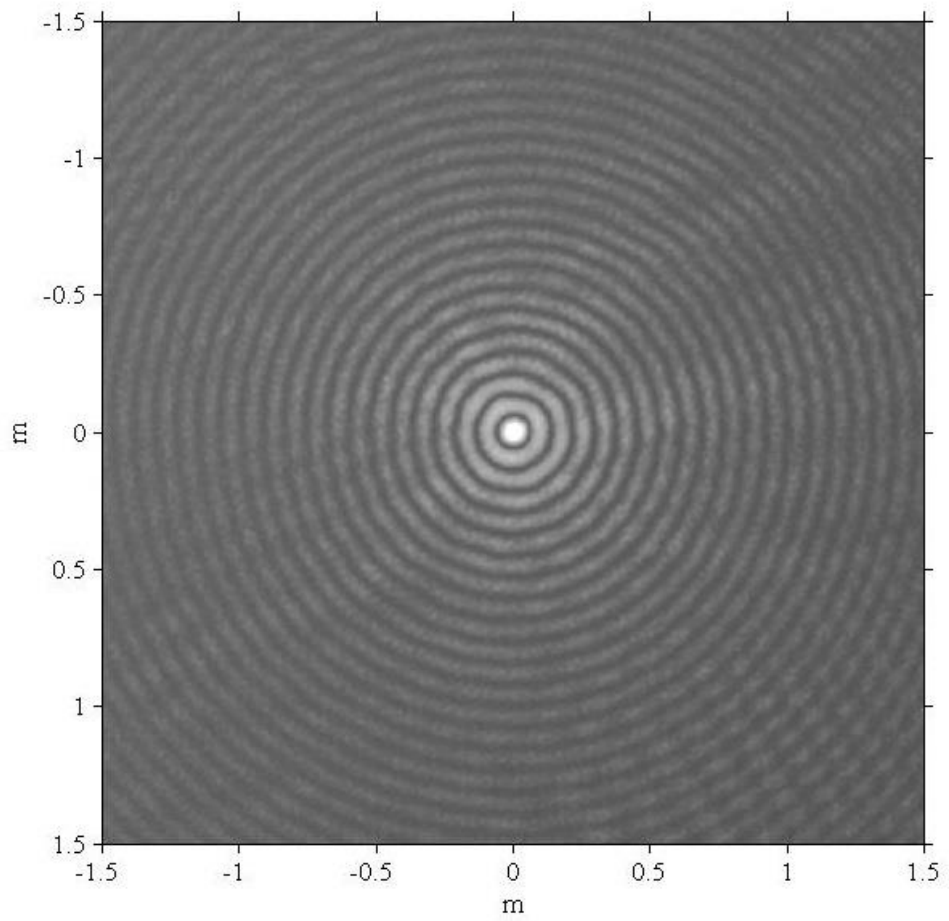
Obrázek 16: Experiment

Nyní si uvedeme výsledky z reálného experimentu Fresnelovy difrakce na nepropustném kruhovém terčiku o poloměru 2mm :

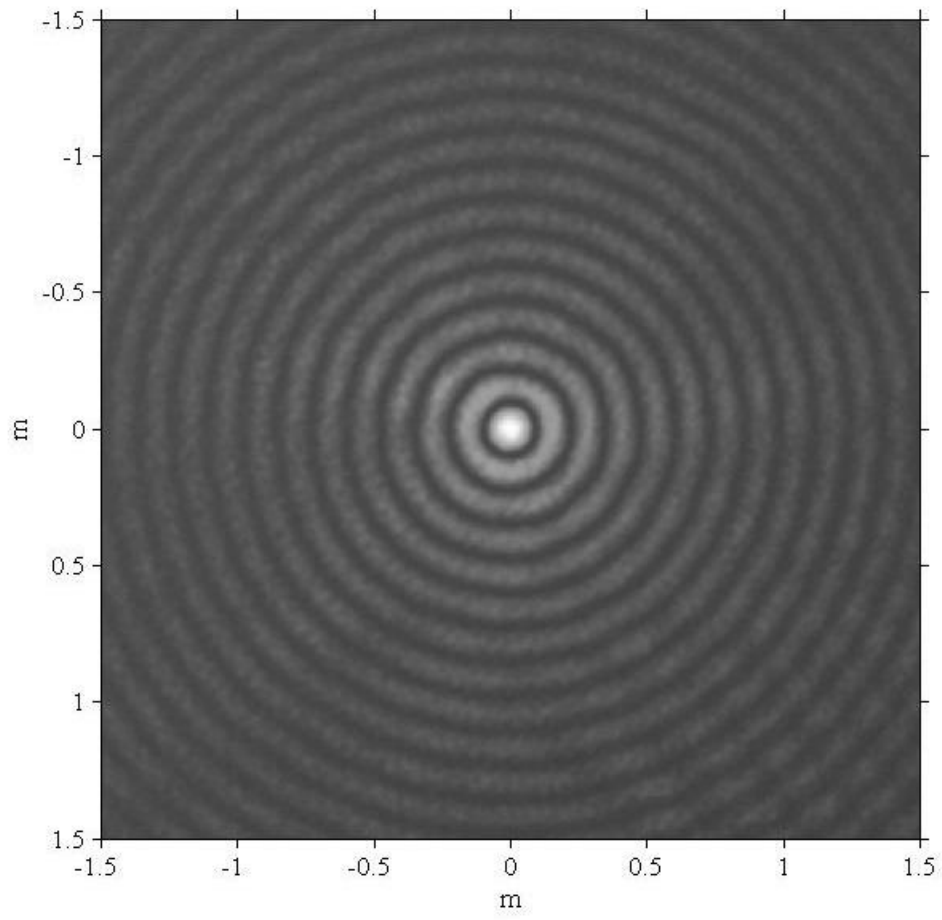
p)



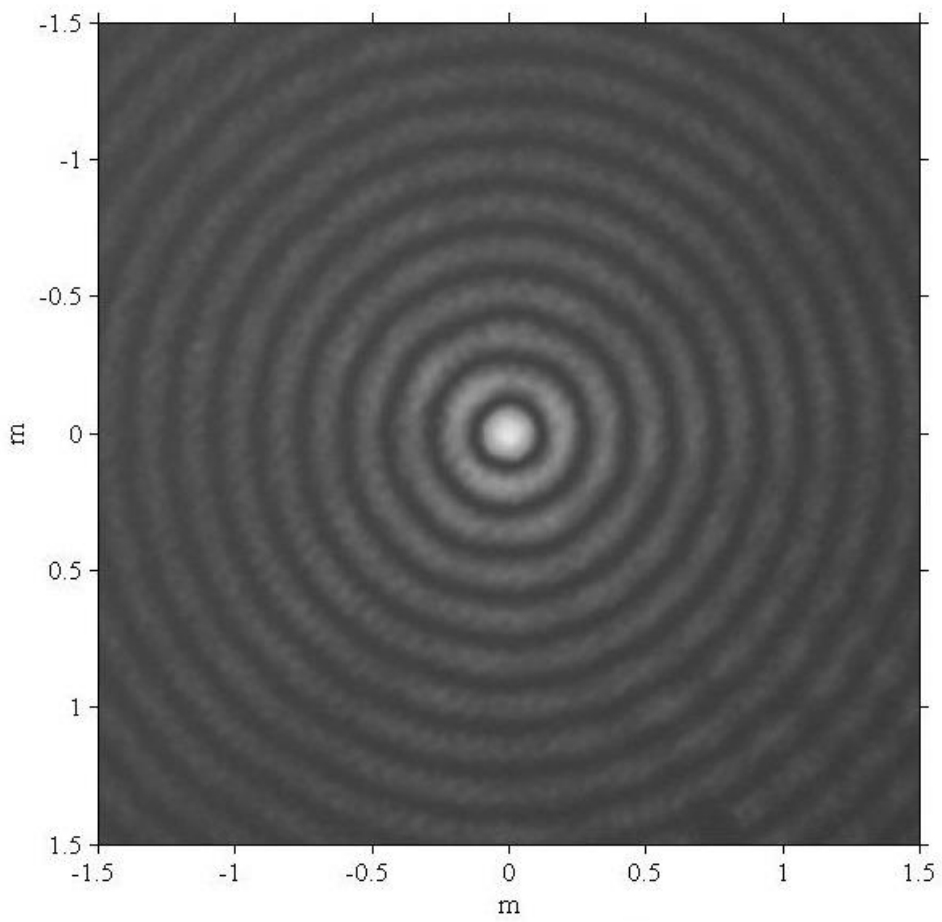
q)



r)

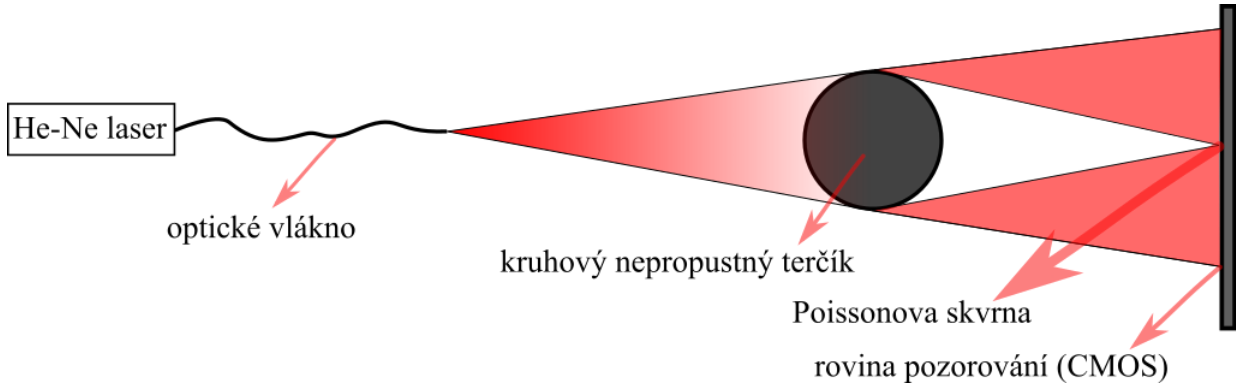


s)



Obrázky **p)**, **q)**, **r)**, **s)** jsou výstupy z CMOS kamery užívané při experimentu pro parametry: $a = 2\text{mm}$, $z_1 = 333\text{mm}$, $\lambda = 632.8\text{nm}$ a parametr z je pro **p)** $z = 300\text{mm}$, **q)** $z = 500\text{mm}$, **r)** $z = 800\text{mm}$, **s)** $z = 1000\text{mm}$.

Schéma realizovaného experimentu bylo následující:



Jak můžeme vidět, dle výsledků nastala shoda s Aragovou teorií o centrální světlé stopě uprostřed geometrického stínu za nepropustnou kruhovou překážkou, tedy Poissonova skvrna. Vliv vzdálenosti z na její velikost jsme ověřili a je znatelně zaznamenána ve výše uvedených výstupech. Jako uvažovanou chybu měření bych uvedl možnost nepřesnosti měření vzdálenosti z mezi terčikem a CMOS kamerou.

6. Závěr

Cílem bakalářské práce byl popis a následně realizace programu pro výpočet Fresnelovy difrakce světla na kruhové apertuře a kruhové nepropustné překážce (terčíku). Analytický výpočet i výpočet za pomoci rychlé Fourierovy transformace jsme zdárně simulovali v programovacím prostředí Matlab, a poté porovnali s naměřenými hodnotami experimentu. Zde jsme sledali shodu s teorií, včetně závislosti velikosti Poissonovy skvrny na vzdálenosti mezi nepropustným kruhovým terčíkem a rovinou pozorování (CMOS kamerou).

Zdroje

- [1] Komrška Jiří.: text k přednáškám difrakce světla (skalární teorie). VUT 1999.
Dostupné z: <http://physics.fme.vutbr.cz/~komrska/Difrakce/>
- [2] Grimaldi F. M.: *Physico-mathesis de lumine, coloribus et iride*. Bononiae 1665.
- [3] Marci J. M.: *Thaumantias. Liber de arcu coelesti deque colorum apparentium natura, ortu et causis*. Pragae 1648.
- [4] Born M., Wolf E.: *Principles of Optics. 7th ed.* Cambridge University Press 1999.
- [5] Ivo Vyšín, Jan Říha.: *Paprsková a vlnová optika*. Univerzita Palackého v Olomouci 2012.
- [6] Saleh, Bahaa E. A. a Malvin Carl Teich.: *Základy fotoniky, svazek 1*. Praha: MATFYZPRESS, 1994.
- [7] Fliegel, K.: *Modelování obrazových snímačů v MATLABu*. Praha: ČVUT FEL. Katedra radioelektroniky, 2004.
Dostupné z: http://dsp.vscht.cz/konference_matlab/matlab04/fliegel.pdf
- [8] Zdeněk Bouchal.: *Svazková optika* (učební pomůcka pro studenty oboru Přístrojová optika)
- [9] Obrázek 1.: Huygensův princip. Dostupné z: https://strongphysics.wikispaces.com/file/view/Huygens_principle.png/75262115/474x320/Huygens_principle.png
- [10] Obrázek 7.: Airyho disk. Dostupné z: <http://www.goldastro.com/images/airy.jpg>
- [11] Obrázek 8.: Rayleighovo kritérium.
Dostupné z: <http://pe2bz.philpem.me.uk/Lights/-%20Laser/Info-999-LaserCourse/C00-M05-LaserInformationSystems/fig1.JPG>