

# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY  
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

## ADJUNGOVANÉ SOUSTAVY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

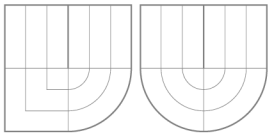
AUTHOR

KAREL KMENTA

BRNO 2007



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ



FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY  
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

# ADJUNGOVANÉ SOUSTAVY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

THESIS TITLE

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

KAREL KMENTA

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

Doc.Ing. JIŘÍ KUNOVSKÝ, CSc.

BRNO 2007

## Abstrakt

Tento projekt se zabývá řešením diferenciálních rovnic. Cílem je nalézt vhodný algoritmus transformující diferenciální rovnice vyšších řádů s časově proměnnými koeficienty na ekvivalentní soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu, následně pak ověřit jeho funkčnost pro rovnice obsahující umocněné goniometrické funkce a nakonec tento algoritmus naimplementovat. Důvodem pro tuto transformaci je požadavek, řešit tyto diferenciální rovnice programem TKSL (Taylor Kunovský simulation language).

## Klíčová slova

Diferenciální rovnice, Taylorova řada, nestacionární systémy, adjungované koeficienty, časově proměnné koeficienty, operátorový počet, binomická věta, invertor, sumační invertor, invertující sumační integrátor, dělička, násobička, TKSL.

## Abstract

This project deals with solving of differential equations. The aim is find the correct algorithm transforming differential equations of higher order with time variable coefficients to equivalent systems of differential equations of first order. Subsequently verify its functionality for equations containing the involution goniometrical functions and finally implement this algorithm. The reason for this transformation is requirement to solve these differential equations by programme TKSL (Taylor Kunovský simulation language).

## Keywords

Differential equations, Taylor series, nonstationary systems, adjoint coefficients, time variable coefficients, operator calculus, binomial theorem, inverter, summing inverter, invert summing integrator, multiplier, divider, TKSL.

## Citace

Karel Kmenta: Adjungované soustavy diferenciálních rovnic, diplomová práce, Brno, FIT VUT v Brně, 2007

# Adjungované soustavy diferenciálních rovnic

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením pana Doc. Ing. Jiřího Kunovského, CSc.

Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

.....  
Karel Kmenta  
22. května 2007

## Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu své diplomové práce, Doc. Ing. Jiřímu Kunovskému, CSc., za pomoc při jejím řešení a za velmi přátelskou atmosféru nastolenou během tvorby této práce.

© Karel Kmenta, 2007.

*Tato práce vznikla jako školní dílo na Vysokém učení technickém v Brně, Fakultě informačních technologií. Práce je chráněna autorským zákonem a její užití bez udělení oprávnění autorem je nezákonné, s výjimkou zákonem definovaných případů.*

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2 Základní informace</b>	<b>4</b>
2.1 Shrnutí požadavků	4
2.2 Současný stav	4
<b>3 Úvod do problematiky</b>	<b>5</b>
3.1 Obecná diferenciální rovnice n-tého řádu	6
3.2 Taylorova řada	7
3.3 Nestacionární systémy	8
3.4 Adjungované koeficienty	8
3.5 Základní prvky lineárních systémů	8
3.5.1 Invertor	8
3.5.2 Sumační invertor	9
3.5.3 Invertující sumační integrátor	9
3.5.4 Dělička	9
3.5.5 Násobička	10
<b>4 Metody řešení diferenciálních rovnic</b>	<b>11</b>
4.1 Analytické řešení	11
4.2 Numerické řešení	12
4.3 Chyby metod	13
4.4 Jednokrokové metody	14
4.5 Metoda Eulerova	14
4.6 Metody Runge-Kutta	14
4.7 Metoda Taylorovy řady	15
4.8 Vícekrokové metody	17
4.9 Metody řešení diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty	17
4.9.1 Metoda snižování řádu derivace	17
4.9.2 Metoda postupné integrace	19
4.10 Metody řešení diferenciálních rovnic s časově proměnnými koeficienty	20
4.10.1 Převod na adjungované koeficienty pomocí schématu	20
4.10.2 Převod na adjungované koeficienty pomocí binomické věty	24
4.11 Aplikace Fourierovy řady	29

<b>5 Simulační jazyk TKSL</b>	<b>35</b>
5.1 Obecné informace o TKSL	35
5.2 Zápis diferenciálních rovnic pro TKSL	35
5.3 Systém TKSL/C	37
<b>6 Implementace</b>	<b>38</b>
6.1 Nalezení správné metodiky převodu	38
6.2 Algoritmus převodu	38
6.3 Prostředí implementace	40
6.4 Kompilace	40
6.5 Výsledný program	40
<b>7 Ukázkové příklady</b>	<b>45</b>
7.1 Příklad 1	45
7.2 Příklad 2	45
7.3 Příklad 3	45
7.4 Příklad 4	46
7.5 Příklad 5	46
<b>8 Závěr</b>	<b>50</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Tato práce čtenáře na úvod informuje o příčinách vzniku požadavku pro převod diferenciálních rovnic vyšších řádů s časově proměnnými koeficienty na ekvivalentní soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu. Dále je shrnut současný stav vykonaných prací. Následující kapitola uvádí čtenáře do problematiky, kde se dozví základní informace o diferenciálních rovnicích. Konkrétněji, jednotlivé podkapitoly hovoří o tom, jaký tvar má *obecná diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu* a jak ji lze převést na *tvar operátorový*, dále je uvedeno několik slov o *Taylorově řadě*, *nestacionárních systémech*, *adjungovaných koeficientech* a v neposlední řadě uvádí operace a schématické značky základních prvků lineárních systémů (invertor, sumační invertor, invertující sumační integrátor, dělička a násobička konstant či časově závislých funkcí), jež jsou v další kapitole využity pro výpočet diferenciálních rovnic. Kapitola *Metody řešení diferenciálních rovnic* obsahuje několik různých metod řešících diferenciální rovnice, z nichž byly následně vybrány metody (4.10.1) a (4.10.2) pro navržení výsledného algoritmu. V podkapitole *Aplikace Fourierovy řady* je ověřena korektnost výpočtu (pro metodu využívající schéma) diferenciálních rovnic obsahujících goniometrickou funkci s mocninou vyšší než 2. Kapitola *Simulační jazyk TKSL* podává základní informace o tom, co vlastně je program TKSL, jak zapsat diferenciální rovnici, aby byla pomocí něj řešitelná a nakonec je zmíněno pár slov k vyvíjenému TKSL/C. V následná kapitole se hovoří o postupu, jež vedl k nalezení vhodné metodiky převodu, dále odhaluje samotný algoritmus, uvádí základní informace týkající se prostředí, v němž byl výsledný algoritmus naprogramován, a na závěr je výsledný program předveden. Pro ukázkou je následně uvedeno několik příkladů s výstupy řešených diferenciálních rovnic. V závěrečné kapitole jsou shrnuty úkony, jež vedly k dosažení daného cíle, zhodnocení získaných výsledků, návrh dalšího možného vývoje projektu a přínos práce pro řešitele.

Tato diplomová práce navazuje na semestrální projekt, jehož součástí bylo seznámení se s metodami řešení diferenciálních rovnic a nalezení vhodné metodiky převodu diferenciálních rovnic vyšších řádů s časově proměnnými koeficienty na ekvivalentní soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu, čehož bylo využito pro následnou implementaci této metodiky.

## Kapitola 2

# Základní informace

### 2.1 Shrnutí požadavků

Diferenciální rovnice s konstantními koeficienty lze řešit pomocí programu TKSL (Taylor Kunovský simulation language). Aby bylo možné tímto programem řešit i diferenciální rovnice s časově proměnnými koeficienty, bylo nutné vypracovat metodiku převodu diferenciálních rovnic vyšších řádů s časově proměnnými koeficienty na ekvivalentní soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu a tuto transformaci naimplementovat. Cílem práce tak bylo získat program, jež po zadání diferenciální rovnice vyšších řádů s časově proměnnými koeficienty vygeneruje odpovídající výstupní soubor pro následné zpracování programem TKSL.

### 2.2 Současný stav

Jsou provedeny experimentální výpočty diferenciálních rovnic vyšších řádů s časově proměnnými koeficienty dvěma různými metodami (viz. kapitola 4.10.1 a 4.10.2), pomocí nichž je navržena metodika převodu těchto diferenciálních rovnic na ekvivalentní soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu. Pro tento převod je vytvořen program, jehož výstup lze použít pro vyhodnocení dané diferenciální rovnice programem TKSL.



## Kapitola 3

# Úvod do problematiky

Diferenciální rovnici rozumíme každou rovnici, v níž se neznámá funkce vyskytuje v derivaci. Jeli neznámá funkce funkcí jedné proměnné, jde o obyčejnou diferenciální rovnici. Jinak hovoříme o parciální diferenciální rovnici. Řád nejvyšší derivace pak udává řádtéto diferenciální rovnice.

Řešením diferenciální rovnice rozumíme funkci, která dané rovnici vyhovuje. Řešení obsahující konstanty se nazývá obecné řešení, volbou konstanty dostaneme z obecného řešení partikulární řešení. V některých speciálních případech existují řešení, která nedostaneme volbou konstanty z řešení obecného (taková řešení se nazývají singulární). Graf řešení diferenciální rovnice se nazývá integrální křivka.

Obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu nazýváme rovnici ve tvaru  $F(x, y, y') = 0$ , resp. v explicitním vyjádření:

$$y' = f(x, y), \quad f : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}, \quad \Omega \in \mathfrak{R}^2 \quad (3.1)$$

Úloha najít řešení  $y(x)$  této diferenciální rovnice, která je definovaná na nějakém  $I$ ,  $x_0 \in I$  a které splňuje tzv. počáteční podmínku  $y(x_0) = y_0$  se nazývá Cauchyova (počáteční) úloha.

Je-li funkce  $f$  spojitá na otevřené množině  $\Omega$ , pak pro každé  $(x_0, y_0) \in \Omega$  má úloha  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  alespoň jedno řešení (existenční podmínka).

O funkci  $f$  řekneme, že splňuje v bodě  $(x_0, y_0)$  Lipschitzovu podmínku, existuje-li konstanta  $L$  a okolí  $U(x_0, y_0) \in \Omega$  tak, že pro každé dva body  $(x, y_1), (x, y_2) \in U(x_0, y_0)$  je

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Diferenciální rovnice  $y' = f(x, y)$  má pro každý bod  $(x_0, y_0) \in \Omega$  jediné řešení procházející bodem  $(x_0, y_0)$  (jednoznačnost řešení), pokud jsou splněny následující podmínky:

1. funkce  $f$  je spojitá na  $\Omega$
2. funkce  $f$  je ohraničená na  $\Omega$

3. splňuje Lipschitzovu podmínku na  $\Omega$

Pozn.: Obecně můžeme (3.1) pokládat za soustavu  $n$  diferenciálních rovnic prvního řádu, kde  $y$ ,  $y_0$  jsou vektory o  $n$  složkách. (Samozřejmě se též příslušným způsobem změní rozměry prostorů definičního oboru a oboru hodnot dané funkce.)

### 3.1 Obecná diferenciální rovnice n-tého řádu

Diferenciální rovnicí rozumíme každou rovnici, ve které se vyskytují derivace hledané funkce. Její tvar zapíšeme následovně:

$$a_n \frac{d^{(n)}y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^{(m)}z}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{(m-1)}z}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 z$$

kde:

- $y$  je hledané řešení
- $z$  je vstupní (nebo také vynucující) funkce
- $n$  je řád diferenciální rovnice
- $m$  je řád vstupní funkce
- $a$ ,  $b$  jsou nelineární koeficienty

Analogicky tedy můžeme psát:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_m z^{(m)} + b_{m-1} z^{(m-1)} + \dots + b_0 z \quad (3.2)$$

Používáme-li pro systémy diferenciálních rovnic zápis rovnice (3.2), pak při nulových počátečních podmínkách

$$y^{(n-1)}(0) = \dots = y^{(1)}(0) = y(0) = 0$$

můžeme zavést

$$p \equiv \frac{d}{dt}$$

$$py \equiv \frac{dy}{dt}, \quad p^2 y \equiv \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \dots$$

$$pz \equiv \frac{dz}{dt}, \quad p^2 z \equiv \frac{d^2 z}{dt^2}, \quad \dots$$

Nyní lze diferenciální rovnici (3.2) zapsat operátorovým zápisem

$$a_n p^{(n)}y + a_{n-1} p^{(n-1)}y + \dots + a_0 y = b_m p^{(m)}z + b_{m-1} p^{(m-1)}z + \dots + b_0 z$$

s nulovými počátečními podmínkami

$$p^{(n-1)}y(0) = \dots = py(0) = y(0) = 0$$

## 3.2 Taylorova řada

Předpokládejme, že máme funkci  $f(x)$ , která má v bodě  $x = a$  derivace až do  $n$ -tého řádu. Hledejme nyní polynom  $p(x)$  stupně  $n$  ve tvaru

$$p(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots + c_n(x - a)^n \quad (3.3)$$

se středem v bodě  $a$  takový, aby byly splněny následující podmínky:

$$f(a) = p(a), f'(a) = p'(a), f''(a) = p''(a), \dots$$

Za použití rovnice (3.3) dostáváme:

$$\begin{aligned} f(a) &= p(a) &= [c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots]_{x=a} &= c_0 \\ f'(a) &= p'(a) &= [c_1 + 2 \cdot c_2(x - a) + 3 \cdot c_3(x - a)^2 + \dots]_{x=a} &= c_1 \\ f''(a) &= p''(a) &= [2 \cdot c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3(x - a) + \dots]_{x=a} &= 2 \cdot c_2 \\ &\vdots && \end{aligned}$$

Po vyjádření koeficientů  $c_0, c_1, c_2 \dots$

$$\begin{aligned} c_0 &= f(a) \\ c_1 &= f'(a) \\ c_2 &= \frac{f''(a)}{2!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Obečně tedy platí:

$$c_k = \frac{f^k(a)}{k!} \quad (3.4)$$

Z to plyne známý zápis Taylorovy řady:

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n \quad (3.5)$$

### 3.3 Nestacionární systémy

Nestacionární systémy jsou popsány diferenciálními rovnicemi s časově proměnnými koeficienty. Pokud rovnice neobsahuje derivaci vstupní veličiny lze použít metodu *snižování řádu derivace*. Pokud je však systém popsán rovnicí s derivací vstupní veličiny nelze tuto metodu využít. Důvodem je závislost pořadí operací násobení a integrace či derivace. Obecně platí:

$$f(t) \frac{dy(t)}{dt} \neq \frac{d}{dt} (f(t)y(t))$$

V takových případech se používají speciální metody, které lze považovat za zobecněné metody *postupné integrace* a *snižování řádu derivace*. My se budeme dále zabývat modifikovanou metodou Taylorovy řady, při které se využívá převodu diferenciální rovnice na rovnici s adjungovanými koeficienty.

### 3.4 Adjungované koeficienty

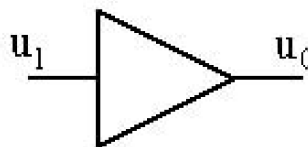
Při řešení diferenciálních rovnic, ve kterých se na pravé straně vyskytuje derivace vstupní veličiny nelze použít metod *snižování řádu derivace* či *postupnou integraci*. Autoři modifikované Taylorovy metody vytvořili postup, kdy jsou časově proměnné koeficienty v diferenciální rovnici nahrazeny jinými, které budeme nazývat adjungovanými. Tyto koeficienty jsou vypočteny tak, aby bylo možno použít některou z metod *snižování řádu derivace* či *postupné integrace*.

### 3.5 Základní prvky lineárních systémů

#### 3.5.1 Invertor

Invertor mění znaménko vstupního signálu. Schématická značka je na obrázku (3.1) a funkci lze zapsat ve tvaru:

$$u_0 = -u_1$$

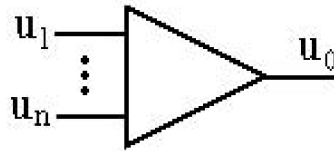


Obrázek 3.1: Schématická značka invertoru

### 3.5.2 Sumační invertor

Sumační invertor provádí inverzní součet vstupních signálů. Na obrázku (3.2) je jeho schématická značka. Funkci sumačního invertoru lze zapsat ve tvaru:

$$u_0 = -(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$$



Obrázek 3.2: Schematická značka sumačního invertoru

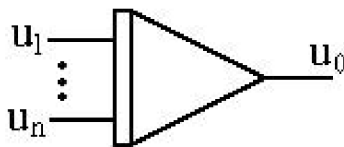
### 3.5.3 Invertující sumační integrátor

Invertující sumační integrátor realizuje inverzi integrace součtu vstupních signálů. Schématická značka je uvedena na obrázku (3.3). Jeho funkci lze zapsat ve tvaru:

$$u_0 = - \int (u_1 + u_2 + \dots + u_n) dt$$

anebo také:

$$u_0 = -\frac{1}{p} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$$

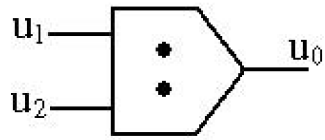


Obrázek 3.3: Schematická značka invertujícího sumačního integrátoru

### 3.5.4 Dělička

Dělička provede podíl hodnot vstupních signálů. Na obrázku (3.4) je uvedena schématická značka. Funkci děličky lze zapsat ve tvaru:

$$u_0 = \frac{u_1}{u_2}$$



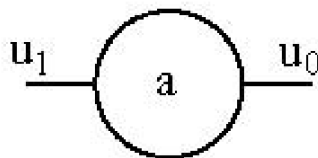
Obrázek 3.4: Schematická značka děličky

### 3.5.5 Násobička

Násobička provede vynásobení vstupního signálu zadanou konstantou nebo funkcí. V literatuře se pro násobení časově závislou funkcí používá značka pro násobení konstantou se zdvojenou kružnicí. Schematická značka pro násobičku konstant je uvedena na obrázku (3.5) a schematická značka pro násobičku časově závislých funkcí na obrázku (3.6). Funkci násobiček lze zapsat ve tvaru:

- pro násobení konstantou:

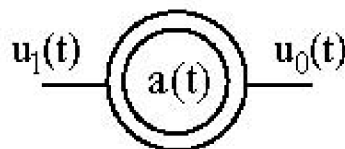
$$u_0 = a \cdot u_1$$



Obrázek 3.5: Schematická značka násobičky konstant

- pro násobení časově závislou funkcí:

$$u_0(t) = a(t) \cdot u_1(t)$$



Obrázek 3.6: Schematická značka násobičky časově závislých funkcí

## Kapitola 4

# Metody řešení diferenciálních rovnic

### 4.1 Analytické řešení

Řešení je funkce času. Konkrétní hodnotu v určitém čase získáme dosazením tohoto času do výsledné funkce. Lze určit hodnotu v libovolném bodě, v němž je funkce definována. Analytické metody jsou obvykle složité a časově náročné, ale velmi přesné. Teorie obyčejných diferenciálních rovnic tedy vybírá určité modely jistých skupin diferenciálních rovnic, pro které je nalezeno obecné schéma řešení.

Podstatnou část této teorie tvoří lineární rovnice, jejichž základní charakteristickou vlastností je platnost principu superpozice. Druhou skupinu tvoří rovnice nelineární. Zde je obecná teorie mnohem chudší a jsou studovány pouze speciální typy diferenciálních rovnic popisujících určité fyzikální nebo technické problémy. U těchto nelineárních rovnic lze pomocí speciálních úprav získat řešení v uzavřeném tvaru (tj. vyjádření pomocí elementárních funkcí, resp. jejich integrálů).

Metody řešení diferenciálních rovnic lze rozdělit do několika skupin:

- u lineárních rovnic s konstantními koeficienty určujeme bázové funkce a násadu pro partikulární řešení nehomogenní rovnice volíme pomocí těchto bázových funkcí (metoda variace konstant), nebo ve tvaru pravé strany diferenciální rovnice (metoda neurčitých koeficientů); ovšem každé řešení hledáme ve tvaru, který již předem známe
- některé lineární rovnice s nekonstantními koeficienty transformujeme vhodnou substitucí na lineární rovnice s konstantními koeficienty
- některé nelineární rovnice vhodnou substitucí transformujeme na rovnice lineární
- některé nelineární rovnice formálně upravíme (příp. transformujeme vhodnou substitucí) a řešíme přímou integrací

Je zřejmé, že tyto metody nejsou postačující pro řešení všech úloh z technické nebo fyzikální praxe. Navíc problémy z praxe jsou často popsány soustavami diferenciálních rovnic, jejichž řešení je ještě složitější.

Proto s nástupem výpočetní techniky došlo k velkému rozšíření použití numerických metod řešení (soustav) diferenciálních rovnic. Rozsah úloh, které lze numerickými metodami řešit je mnohem větší (v porovnání s možnostmi analytických metod). Problémem je však rychlost a přesnost, dále pak nutnost provedení celého výpočtu znovu v případě změny parametrů (u analytického výpočtu stačí dosadit jiné konstanty).

## 4.2 Numerické řešení

Řešením je posloupnost hodnot v určitých předem zvolených časových bodech. Hodnoty funkce mezi zvolenými body lze určit buď interpolací z okolních vypočtených bodů nebo opětovnou aplikací metody s menším rozestupem (krokem) časových bodů. Numerické metody jsou obvykle jednodušší a rychlejší než analytické. Při špatné volbě kroku však může dojít k velké chybě výpočtu.

Numerické řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic má smysl hledat pouze tehdy, jestliže řešení existuje a je jednoznačné (viz. 3).

Soustavu  $m$  obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1, \dots, y_m) \\ y_2'(t) &= f_2(t, y_1, \dots, y_m) \\ &\vdots \\ y_m'(t) &= f_m(t, y_1, \dots, y_m) \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} y_1(t_0) &= y_{1,0} \\ y_2(t_0) &= y_{2,0} \\ &\vdots \\ y_m(t_0) &= y_{m,0} \end{aligned}$$

můžeme pro větší přehlednost zapsat též pomocí vektorů ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= f(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Základem, z něhož vychází většina numerických metod pro řešení počátečních úloh na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , je diskretizace proměnné. Množinu bodů  $t_i$ ,  $i \in \langle 0, k \rangle$  z intervalu  $\langle a, b \rangle$ , kde

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$$



nazýváme síť, její prvky pak uzly sítě.

Výraz  $t_{i+1} - t_i = h$  nazýváme krokem sítě v uzlu  $x_i$  (resp. integračním krokem). Je-li navíc  $h_i = h = konst.$ , mluvíme o pravidelné síti.

Numerickým řešením soustavy (4.1) rozumíme posloupnost  $y_i$  hodnot  $y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_k)$ , které odpovídají příslušným hodnotám uzlů sítě.

Hodnoty  $y(t_i)$  numerického řešení budeme značit  $y_i$ , hodnoty exaktního řešení (získané dosazením do analytického řešení rovnice) pak označíme jako  $Y_i = Y(t_i)$ .

Má-li být numerická metoda řešení použitelná, je nutné, aby posloupnost  $y_i$  konvergovala pro  $h \rightarrow 0$  k exaktnímu řešení  $Y(t)$ . Konvergencí zde rozumíme existenci limity posloupnosti  $y_i$  pro  $h \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$ , kde ovšem  $hi = t$  zůstává pevné. Koverguje-li přibližné řešení získané určitou metodou pro všechny počáteční úlohy (4.1), řekneme, že metoda je konvergentní.

Rozlišujeme dva základní typy metod numerického řešení soustavy diferenciálních rovnic (4.1):

1. metody, které hodnoty funkce  $f(t, y)$  počítají jen v bodech  $(t_i, y_i)$ , kde  $y_i$  je hodnota numerického řešení v bodě  $t = t_i$ . Jedná se o tzv. vícekrokové metody.
2. metody, které zjišťují hodnoty funkce  $f(t, y)$  i mezi jednotlivými uzly sítě  $(t_i, y_i)$ . Jsou zastoupeny jednokrokovými metodami (metody typu Runge-Kutty)

Oba zmíněné typy metod používají k řešení pouze první derivace  $y$  (existují samozřejmě i metody využívající k výpočtu i derivací vyšších řádů). Hodnotu první derivace jednoduše získáme dosazením bodu  $(t_i, y_i)$  do (4.1). Vyšší derivace je však obecně obtížné získat, neboť předpokládáme, že funkce  $f(t, y)$  není vyjádřena analyticky.

### 4.3 Chyby metod

Při použití obou typů metod výpočtů numerického řešení soustavy diferenciálních rovnic (str. 13) je získaná sloupnost hodnot  $y_i$  výsledkem postupné extrapolace z výchozího bodu, přičemž již samotné výchozí body jsou zatíženy tzv. lokální chybou  $E$ . Tato chyba se skládá ze dvou částí:

1. zanedbávací chyba (chyba metody) je způsobená zanedbáním členů Taylorovy řady počínaje  $n + 1$  členem.
2. zaokrouhlovací chyba vzniká z důvodu omezené velikosti slova, ve kterém je uložena hodnota čísla, v počítači

Chyba jednoho kroku (lokální chyba) ovšem rovněž ovlivní výsledky kroků následujících. V této souvislosti mluvíme o stabilitě metody. Metoda se nazývá absolutně stabilní, pokud pro daný integrační krok  $h$  a danou diferenciální rovnici chyba vzniklá při výpočtu  $y_n$ , se nevětší v následujících hodnotách řešení  $y_k, k > n$ .

Skutečnost, že se v každém kroku výpočtu dopouštíme lokální chyby, vede ke vzniku chyby kumulované, její velikost pak je  $\varepsilon_n = Y_n - y_n$ .

## 4.4 Jednokrokové metody

Jednokrokové metody získaly svůj název podle toho, že pro výpočet hodnoty  $y_{n+1}$  stačí znát pouze hodnotu  $y_n$ . Toto je výhodné v případech, když potřebujeme často měnit integrační krok.

Základem pro tyto metody je Taylorův rozvoj (viz 3.2)

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n + \dots \quad (4.2)$$

## 4.5 Metoda Eulerova

Tato metoda je nejjednodušší: pro určení následující hodnoty  $y_{n+1}$  bere v úvahu pouze první dva členy Taylorovy řady, tedy

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n \quad (4.3)$$

Geometrická interpretace této metody není obtížná: protože  $h_i = x_{i+1} - x_i$ , je vztah (4.3) rovnicí přímky se směrnici  $f(x_i, y_i)$  jdoucí bodem  $(x_i, y_i)$ , tj. na intervalu  $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$  se vždy pohybujeme po tečně k přesnému řešení úlohy  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_i) = y_i$  v bodě  $(x_i, y_i)$ .

Při zkracování kroku lze zpřesňovat řešení, ovšem od jisté hranice začne převládat vliv zaokrouhlovací chyby a celková chyba výpočtu při dalším zmenšování kroku poroste.

## 4.6 Metody Runge-Kutta

Další jednokrokové metody, které používají pouze první derivace řešení  $y$  - výpočet  $f(t, y)$  však provádějí i mezi jednotlivými uzly  $(t_i, y_i)$  - jsou zastoupeny metodami typu Runge-Kutta. Základem těchto metod je vyjádření rozdílů mezi hodnotami řešení  $y$  v bodech  $t_{n+1}$  a  $t_n$  ve tvaru

$$y_{n+1} - y_n = \sum_{i=1}^p w_i K_i$$

kde  $w_i$  jsou konstanty a

$$K_i = hf(t_n + a_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j), \quad i = 1, \dots, p$$

kde  $h = t_{n+1} - t_n$  a  $a_i, b_{ij}$  jsou konstanty, přičemž  $a_1 = 0$ .

Metoda se nazývá  $p$ -hodnotová (používá  $p$  hodnot funkce  $f(t, y)$ ). Konstanty  $w_i, a_i, b_i$  jsou vypočteny tak, aby získaná řešení souhlasila s Taylorovou řadou v bodě  $(t_n, y_n)$  až do  $p$ -té mocniny kroku  $h$  včetně. Metodu pak nazýváme metodou Runge-Kutta řádu  $P$ . Metod je celá řada modifikací, liší se však především v koeficientech, v principu jsou ovšem stejné.

Všechny metody Runge-Kutta mají ohraničený obor absolutní stability, definovaný nerovností

$$\left| 1 + \tilde{h} + \frac{\tilde{h}^2}{2!} + \dots + \frac{\tilde{h}^p}{p!} \right| < 1$$

kde  $\tilde{h} = h\lambda$ ,  $\lambda$  je komplexní číslo.

Nejčastěji se používá metody čtvrtého řádu: má dobrou stabilitu i přesnost.

## 4.7 Metoda Taylorovy řady

Ačkoliv by se zdálo, že možnosti využití Taylorovy řady pro řešení diferenciálních rovnic jsou již zcela vyčerpány (všechny výše uvedené metody z této metody vycházejí), nachází v současnosti opět tato metoda své uplatnění (rychlý vývoj výpočetní techniky).

Při využití této metody se předpokládá, že pro výpočet řešení se bere v úvahu větší počet členů rozvoje (4.2), řádově alespoň desítky členů.

Tato metoda umožňuje výpočet mnohem přesnější hodnoty řešení (bráno vzhledem k délce integračního kroku  $h$ ) než běžně používané metody (Eulerova či některá varianta metody Runge-Kutta). Problematikou využití metody Taylorovy řady se zabývá tato práce.

### Princip metody

Taylorova řada je definována jako nekonečná mocninná řada

$$f(x) = f(z) + f'(z) \frac{(x-z)}{1!} + f''(z) \frac{(x-z)^2}{2!} + \dots \quad (4.4)$$

Pokud položíme počáteční podmínku  $z = 0$  a položíme  $h = x_1 - z_1$ , pak rovnice přejde do tvaru:

$$f(x_1) = f(0) + h \cdot f'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \dots \quad (4.5)$$

Nyní položme  $z_2 = x_1$  za předpokladu  $h = x_2 - z_2 = x_1 - z_1$ .

$$f(x_2) = f(x_1) + h \cdot f'(x_1) + \frac{h^2}{2!} f''(x_1) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_1) + \dots \quad (4.6)$$

Hodnoty funkce  $f(x)$  v bodech  $x_1, x_2$ , lze vypočítat postupně za využití Taylorovy řady. Výsledek jednoho kroku je nutný pro výpočet dalších dílčích výsledků. Parametr  $h$  je integrační krok. Integrační krok nemusí být konstantní. Pro jednotlivé kroky výpočtu se může měnit. Na velikosti integračního kroku je závislá rychlost výpočtu a také jeho přesnost. Čím je integrační krok větší, tím se také zvyšuje rychlost výpočtu. Naopak může klesat přesnost výpočtu. Před začátkem výpočtu musíme určit, s jakou přesností výsledek požadujeme. Při výpočtu pak sečítáme dílčí výsledky a pokud je rozdíl dvou po sobě jdoucích výsledků menší než požadovaná přesnost, výpočet ukončíme.

K dílčím výpočtům potřebujeme znát vyšší derivace funkce. Výpočet vyšších derivací je časově náročný a prakticky zbytečný. Vyšší derivace lze totiž odvodit z předchozích výpočtů. Toto ukážeme na následující soustavě diferenciálních rovnic.

$$y' = A \cdot y + B \cdot z \quad z' = C \cdot y + D \cdot z \quad (4.7)$$

Počáteční podmínky  $y(0) = y_0, z(0) = z_0$ .

Řešení klasickým způsobem :

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'(0) + \frac{h^2}{2!} \cdot y''(0) + \frac{h^3}{3!} \cdot y'''(0) + \dots \quad (4.8)$$

$$z_1 = z_0 + h \cdot z'(0) + \frac{h^2}{2!} \cdot z''(0) + \frac{h^3}{3!} \cdot z'''(0) + \dots \quad (4.9)$$

Vylepšeným způsobem lze výpočet soustavy zjednodušit následovně:

$$y_1 = y_0 + DY10 + DY20 + DY30 + \dots \quad (4.10)$$

$$z_1 = z_0 + DZ10 + DZ20 + DZ30 + \dots \quad (4.11)$$

Výpočet jednotlivých členů :

$$DY10 = h \cdot y'(0) = h(A \cdot y + B \cdot z)$$

$$DY20 = \frac{h}{2}(A \cdot DY10 + B \cdot DZ10)$$

$$DY30 = \frac{h}{3}(A \cdot DY20 + B \cdot DZ20)$$

⋮

$$DZ10 = h \cdot z'(0) = h(C \cdot y + D \cdot z)$$

$$DZ20 = \frac{h}{2}(C \cdot DY10 + D \cdot DZ10)$$

$$DZ30 = \frac{h}{3}(C \cdot DY20 + D \cdot DZ20)$$

⋮

### Výhody a nevýhody použití Taylorovy řady

Nespornou výhodou této metody je její rychlost a s tím spojená výpočetní nenáročnost.

Velkou výhodou je také možnost paralelního zpracování dílčích výpočtů, které se uplatňuje při výpočtech soustav diferenciálních rovnic. Pokud ovšem zvolíme špatnou velikost integračního kroku, může se metoda stát nestabilní. Je to způsobeno tím, že při chybném určení jednoho kroku, se tato chyba přenáší i do dalších výpočtů a celková chyba tím může narůstat.

## 4.8 Vícekrokové metody

Vícekrokové metody využívají při výpočtu hodnoty  $y_{i+1}$   $k$  hodnot vypočtených v předchozích krocích (mluvíme pak o  $k$ -krokových metodách). Je možné je definovat takto:

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^r a_i y_{n-i} + h \sum_{i=-1}^r b_i y'_{n-i}$$

kde  $a_i, b_i$  jsou konstanty.

Při využití vícekrokových metod je problematický postup v prvních krocích výpočtu, kdy ještě nemáme k dispozici dostatečný počet předcházejících hodnot. Pro zahájení výpočtu tedy používáme některou z jednokrokových metod, nejčastěji Runge-Kutta.

Velkým problémem těchto metod je rovněž obtížnost dynamické změny velikosti kroku během výpočtu (pro zdvojnásobení délky kroku si metoda musí pamatovat dvojnásobný počet minulých řešení, při půlení délky integračního kroku je nutné většinu vícekrokových metod znovu odstartovat). Příkladným typem vícekrokových metod mohou být metody založené na principu prediktor–korektor nebo prediktor–modifikátor–korektor.

Metodami pro numerické řešení (soustav) diferenciálních rovnic se zabývá celá řada publikací, kde lze získat též podrobný popis množství nejrůznějších speciálních numerických metod; ty jsou pak určeny k jistému okruhu rovnic (podobně jako tomu je v případě analytického řešení). Speciálně upravená metoda může totiž poskytnout pro danou skupinu problémů rychlejší nebo přesnější řešení, pro jiné úlohy však již nemusí být optimální.

## 4.9 Metody řešení diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

### 4.9.1 Metoda snižování řádu derivace

Touto metodou můžeme řešit diferenciální rovnice, které neobsahují derivaci vynucující funkce. Mějme rovnici čtvrtého řádu:

$$y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_0 z$$

Převědeme ji na *operátorový tvar*, který již známe z předcházející kapitoly:

$$p^4 y + a_3 p^3 y + a_2 p^2 y + a_1 p y + a_0 y = b_0 z$$

Nejprve osamostatníme  $p^4 y$  na levé straně rovnice:

$$p^4 y = -(a_3 p^3 y + a_2 p^2 y + a_1 p y + a_0 y - b_0 z)$$

Následně si vyjádříme  $p^3 y, p^2 y, p y$  a  $y$ :

$$p^3 y = \frac{1}{p} p^4 y \quad (4.12)$$

$$p^2 y = \frac{1}{p} p^3 y \quad (4.13)$$

$$p y = \frac{1}{p} p^2 y \quad (4.14)$$

$$y = \frac{1}{p} p y \quad (4.15)$$

Aby bylo možné využít invertujícího sumačního integrátoru, je třeba provést drobné úpravy:

- pro rovnici (4.12)

$$-p^3 y = -\frac{1}{p} p^4 y$$

- pro rovnici (4.13)

$$p^2 y = -\frac{1}{p} (-p^3 y)$$

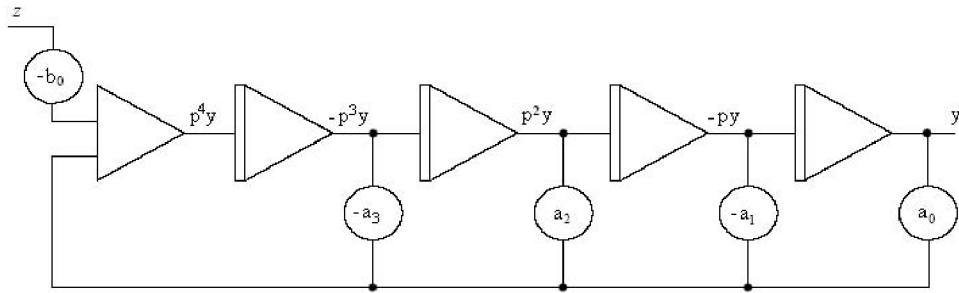
- pro rovnici (4.14)

$$-p y = -\frac{1}{p} p^2 y$$

- pro rovnici (4.15)

$$y = -\frac{1}{p} (-p y)$$

Výsledné schéma nám ukazuje obrázek (4.1).



Obrázek 4.1: Výsledné schéma pro rovnici 4. řádu - metoda snižování řádu derivace

#### 4.9.2 Metoda postupné integrace

Metodou postupné integrace lze řešit i diferenciální rovnice obsahující derivaci vynucující funkce. Mějme rovnici čtvrtého řádu:

$$y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_4 z^{(4)} + b_3 z^{(3)} + b_2 z^{(2)} + b_1 z^{(1)} + b_0 z \quad (4.16)$$

Převědeme ji na *operátorový tvar*:

$$p^4 y + a_3 p^3 y + a_2 p^2 y + a_1 p y + a_0 y = b_4 p^4 z + b_3 p^3 z + b_2 p^2 z + b_1 p z + b_0 z$$

Nejprve si na levé straně rovnice osamostatníme  $p^4 y$ . Následně rovnici postupně integrujeme (násobíme výrazem  $1/p$ ):

$$\begin{aligned} p^4 y &= b_4 p^4 z + p^3 (b_3 z - a_3 y) + p^2 (b_2 z - a_2 y) + p (b_1 z - a_1 y) + (b_0 z - a_0) \quad \Big/ \cdot \frac{1}{p} \\ p^3 y &= b_4 p^3 z + p^2 (b_3 z - a_3 y) + p (b_2 z - a_2 y) + (b_1 z - a_1 y) + A_1 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{p} \\ p^2 y &= b_4 p^2 z + p (b_3 z - a_3 y) + (b_2 z - a_2 y) + A_2 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{p} \\ p y &= b_4 p z + (b_3 z - a_3 y) + A_3 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{p} \\ y &= b_4 z + A_4 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{p} \end{aligned}$$

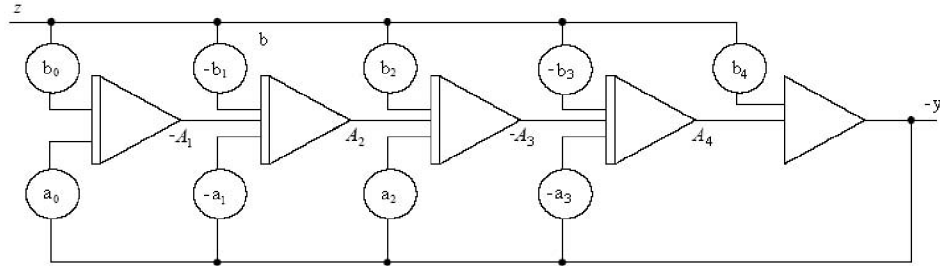
Kde:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{p} (b_0 z - a_0) \\ A_2 &= \frac{1}{p} (b_1 z - a_1 y + A_1) \end{aligned}$$

$$A_3 = \frac{1}{p}(b_2z - a_2y + A_2)$$

$$A_4 = \frac{1}{p}(b_3z - a_3y + A_3)$$

Výsledné schéma řešící rovnici (4.16) je na obrázku (4.2).



Obrázek 4.2: Výsledné schéma pro rovnici 4. řádu - metoda postupné integrace

## 4.10 Metody řešení diferenciálních rovnic s časově proměnnými koeficienty

Aby jsme mohli řešit v TKSL i rovnice s časově proměnnými koeficienty, je zapotřebí tyto koeficienty nejprve převést do adjungovaného tvaru. Adjungované koeficienty mají tu vlastnost, že když jsou opět adjungovány, dostaneme koeficienty původní rovnice. Máme tak zajištěnou zpětnou vazbu o správnosti našeho výpočtu.

### 4.10.1 Převod na adjungované koeficienty pomocí schématu

Aby jsme získali námi požadované adjungované koeficienty, je nutné dosadit časově proměnné koeficienty do schématu – které je dáno řádem a pravou stranou řešené diferenciální rovnice – a symbolicky toto schéma vyjádřit. Dostaneme diferenciální rovnici stejného řádu, jako byla původní, avšak s odlišnými časově proměnnými koeficienty. Nyní tak můžeme k řešení využít metody *snižování řádu* či *postupné integrace*. Výsledek, který nám vyjde, je zároveň výsledkem původní rovnice.

Mějme rovnici 3. řádu:

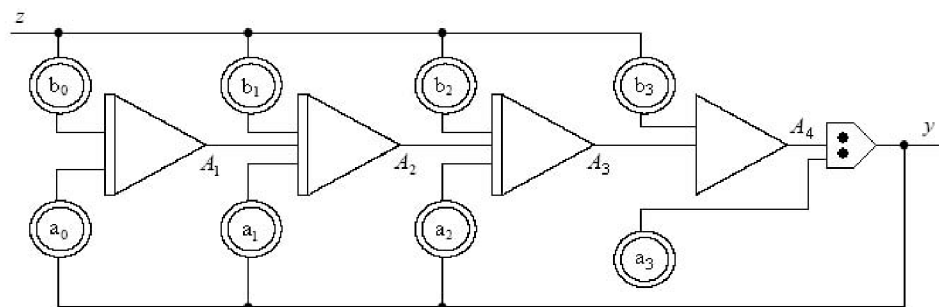
$$e^{-t}y''' + \sin(t)y'' + t^2y' + y = \cos^3(t)z''' + (t+1)z'' + 3tz' + \cos(t)z \quad (4.17)$$

Máme tedy koeficienty:

$$a_3 = e^{-t}, \quad a_2 = \sin(t), \quad a_1 = t^2, \quad a_0 = 1,$$

$$b_3 = \cos^3(t), \quad b_2 = t+1, \quad b_1 = 3t, \quad b_0 = \cos(t)$$





Obrázek 4.3: Obecné schéma pro diferenciální rovnice 3. řádu

Nyní dosadíme koeficienty do schématu odpovídající diferenciální rovnici 3. řádu se stejnými řády derivace na levé i pravé straně (viz. obr. (4.3)).

Ze schématu si vyjádříme:

$$-A_1' = a_0 y + b_0 z \quad (4.18)$$

$$-A_2' = a_1 y + b_1 z + A_1 \quad (4.19)$$

$$-A_3' = a_2 y + b_2 z + A_2 \quad (4.20)$$

$$A_4 = -b_3 z - A_3 \quad (4.21)$$

$$A_4 = a_3 y \quad (4.22)$$

Porovnáním rovnic (4.21) a (4.22) dostaneme:

$$-A_3 = a_3 y + b_3 z \quad (4.23)$$

Dosazením koeficientů do (4.23) získáme:

$$-A_3 = e^{-t} y + \cos^3(t) z$$

Derivujeme a získáváme:

$$-A_3' = -e^{-t} y + e^{-t} y' + (-3 \cos^2(t) \sin(t)) z + \cos^3(t) z' \quad (4.24)$$

Dosazením do (4.20) získáme:

$$-A_3' = \sin(t) y + (t+1) z + A_2 \quad (4.25)$$

Porovnáním rovnic (4.24) a (4.25) získáme:

$$-A_2 = -e^{-t}y' + (e^{-t} + \sin(t))y - \cos^3(t)z' + (3\cos^2(t)\sin(t) + t + 1)z$$

Derivujeme a získáváme:

$$-A_2' = e^{-t}y' - e^{-t}y'' + (-e^{-t} + \cos(t))y + (e^{-t} + \sin(t))y' + 3\cos^2(t)\sin(t)z' - \cos^3(t)z'' + (3\cos^3(t) - 6\sin^2(t)\cos(t) + 1)z + (3\cos^2(t)\sin(t) + t + 1)z' \quad (4.26)$$

Dosazením do (4.19) získáváme:

$$-A_2' = t^2y + 3tz + A_1 \quad (4.27)$$

Porovnáním rovnic (4.26) a (4.27) získáme:

$$-A_1 = e^{-t}y'' - (2e^{-t} + \sin(t))y' + (t^2 + e^{-t} - \cos(t))y + \cos^3(t)z'' - (6\cos^2(t)\sin(t) + t + 1)z' + (6\sin^2(t)\cos(t) - 3\cos^3(t) + 3t - 1)z$$

Derivací získáme:

$$\begin{aligned} -A_1' = & -e^{-t}y'' + e^{-t}y''' - (-2e^{-t} + \cos(t))y' - (2e^{-t} + \sin(t))y'' + \\ & + (2t - e^{-t} + \sin(t))y + (t^2 + e^{-t} - \cos(t))y' - 3\cos^2(t)\sin(t)z'' - \\ & - \cos^3(t)z''' - (6\cos^3(t) - 12\sin^2(t)\cos(t) + 1)z' - (6\cos^2(t)\sin(t) + t + 1)z'' + \\ & + (12\cos^2(t)\sin(t) - 6\sin^3(t) + 9\cos^2(t)\sin(t) + 3)z + \\ & + (6\sin^2(t)\cos(t) - 3\cos^3(t) + 3t - 1)z' \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dosazením do (4.18) získáváme:

$$-A_1' = y + \cos(t)z \quad (4.29)$$

Porovnáním rovnic (4.28) a (4.29) získáme novou diferenciální rovnici s již adjungovanými koeficienty:

$$\begin{aligned} e^{-t}y''' - (3e^{-t} + \sin(t))y'' + (3e^{-t} + t^2 - 2\cos(t))y' + (\sin(t) - e^{-t} + 2t - 1)y = \\ = -\cos^3(t)z''' + (9\cos^2(t)\sin(t) + t + 1)z'' + (9\cos^3(t) - 18\sin^2(t)\cos(t) + \\ + 3t + 2)z' + (6\sin^3(t) - 21\cos^2(t)\sin(t) + \cos(t) - 3)z \end{aligned} \quad (4.30)$$

Nyní provedeme kontrolu a ověříme tak správnost našeho výpočtu. Budeme postupovat naprosto stejným způsobem jako doposud. Dosadíme nově získané adjungované koeficienty

do schématu (viz. obr. (4.3)) a symbolicky toto schéma vyjádříme.

Adjungované koeficienty z nově získané rovnice (4.30) jsou tedy:

$$\begin{aligned} a_3 &= e^{-t}, \quad a_2 = -3e^{-t} - \sin(t), \quad a_1 = 3e^{-t} + t^2 - 2\cos(t), \quad a_0 = \sin(t) - e^{-t} + 2t - 1, \\ b_3 &= -\cos^3(t), \quad b_2 = 9\cos^2(t)\sin(t) + t + 1, \quad b_1 = 9\cos^3(t) - 18\sin^2(t)\cos(t) + 3t + 2, \\ b_0 &= 6\sin^3(t) - 21\cos^2(t)\sin(t) + \cos(t) - 3 \end{aligned}$$

Dosazením koeficientů do (4.23) získáváme:

$$-A_3 = e^{-t}y - \cos^3(t)z$$

Derivujeme a získáváme:

$$-A'_3 = -e^{-t}y + e^{-t}y' + (3\cos^2(t)\sin(t))z - \cos^3(t)z' \quad (4.31)$$

Dosazením do rovnice (4.20) získáváme:

$$-A'_3 = (-3e^{-t} - \sin(t))y + (9\cos^2(t)\sin(t) + t + 1)z + A_2 \quad (4.32)$$

Porovnáním rovnic (4.31) a (4.32) získáme:

$$-A_2 = -e^{-t}y' - (2e^{-t} + \sin(t))y + \cos^3(t)z' + (6\cos^2(t)\sin(t) + t + 1)z$$

Derivací získáme:

$$\begin{aligned} -A'_2 &= e^{-t}y' - e^{-t}y'' - (-2e^{-t} + \cos(t))y - (2e^{-t} + \sin(t))y' - 3\cos^2(t)\sin(t)z' + \\ &+ \cos^3(t)z'' + (6\cos^3(t) - 12\sin^2(t)\cos(t) + 1)z + (6\cos^2(t)\sin(t) + t + 1)z' \end{aligned} \quad (4.33)$$

Dosazením do (4.19) získáváme:

$$-A'_2 = (3e^{-t} + t^2 - 2\cos(t))y + (9\cos^3(t) - 18\sin^2(t)\cos(t) + 3t + 2)z + A_1 \quad (4.34)$$

Porovnáním rovnic (4.33) a (4.34) získáme:

$$\begin{aligned} -A_1 &= e^{-t}y'' + (e^{-t} + \sin(t))y' + (t^2 + e^{-t} - \cos(t))y - \cos^3(t)z'' - (3\cos^2(t)\sin(t) + \\ &+ t + 1)z' + (3\cos^3(t) - 6\sin^2(t)\cos(t) - 3t + 1)z \end{aligned}$$

Derivujeme a získáváme:

$$\begin{aligned}
-A_1' = & -e^{-t}y'' + e^{-t}y''' + (-e^{-t} + \cos(t))y' + (e^{-t} + \sin(t))y'' + (2t - e^{-t} + \sin(t))y + \\
& + (t^2 + e^{-t} - \cos(t))y' + 3\cos^2(t)\sin(t)z'' - \cos^3(t)z''' - (3\cos^3(t) - 6\sin^2(t)\cos(t) + \\
& + 1)z' - (3\cos^2(t)\sin(t) + t + 1)z'' + (-9\cos^2(t)\sin(t) + 6\sin^3(t) - 12\cos^2(t)\sin(t) - \\
& - 3)z + (3\cos^3(t) - 6\sin^2(t)\cos(t) - 3t + 1)z'
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Dosazením do rovnice (4.18) získáváme:

$$-A_1' = (\sin(t) - e^{-t} + 2t - 1)y + (6\sin^3(t) - 21\cos^2(t)\sin(t) + \cos(t) - 3)z \tag{4.36}$$

Porovnáním (4.35) a (4.36) získáme původní diferenciální rovnici (4.17).

#### 4.10.2 Převod na adjungované koeficienty pomocí binomické věty

U této metody se řeší levá a pravá strana zadané diferenciální rovnice odděleně. Nejprve se dle pravidel (4.37) a (4.38) mění znaménka jednotlivých členů rovnice. Poté se členy derivují pomocí pravidla derivace součinu s použitím binomické věty (4.39). Následně se tyto jednotlivé mezivýsledky sečtou (opět pro každou stranu rovnice zvlášť). Nakonec je levá i pravá strana vynásobena mínus jedničkou, čímž získáme výsledné adjungované koeficienty. Pro ověření správnosti výpočtu lze samozřejmě celý postup s nově získanými koeficienty opakovat, čímž docílíme původních koeficientů.

Pravidlo pro levou stranu diferenciální rovnice:

$$L = -1^n A_n p^n y + \dots - A_1 p y + A_0 y \tag{4.37}$$

Pravidlo pro pravou stranu diferenciální rovnice:

$$P = -1^{n+1} B_n p^n z + \dots + B_1 p z - B_0 z \tag{4.38}$$

Binomická věta:

$$(a_m y)^{(m)} = a_m^{(m)} y + \binom{m}{1} a_m^{(m-1)} y^{(1)} + \binom{m}{2} a_m^{(m-2)} y^{(2)} + \dots + \binom{m}{m-1} a_m^{(1)} y^{(m-1)} + a_m y^{(m)} \tag{4.39}$$

Mějme rovnici 3. řádu:

$$\cos^2(t)y''' + 5t^3y'' - 3\cos(2t)y' + ty = e^{3t}z''' - \sin(t)z'' + (t+2)z' + z \tag{4.40}$$

Máme tedy koeficienty:

$$\begin{aligned} a_3 &= \cos^2(t), \quad a_2 = 5t^3, \quad a_1 = -3 \cos(2t), \quad a_0 = t, \\ b_3 &= e^{3t}, \quad b_2 = -\sin(t), \quad b_1 = t + 2, \quad b_0 = 1 \end{aligned}$$

Dle pravidla (4.37) upravíme koeficienty na levé straně:

$$L = -\cos^2(t)p^3y + 5t^3p^2y + 3\cos(2t)py + ty$$

Dle pravidla (4.38) upravíme koeficienty na pravé straně:

$$P = e^{3t}p^3z + \sin(t)p^2z + (t+2)pz - z$$

Nyní si z binomické věty (4.39) vyjádříme vzorce pro třetí, druhý, první a nultý řád derivace.

Vzorec pro 3. řád derivace:

$$(a_3y)^{(3)} = a_3^{(3)}y + \binom{3}{1}a_3^{(3-1)}y^{(3-2)} + \binom{3}{2}a_3^{(3-2)}y^{(3-1)} + a_3y^{(3)}$$

Tedy:

$$(a_3y)^{(3)} = a_3^{(3)}y + 3a_3^{(2)}y^{(1)} + 3a_3^{(1)}y^{(2)} + a_3y^{(3)} \quad (4.41)$$

Vzorec pro 2. řád derivace:

$$(a_2y)^{(2)} = a_2^{(2)}y + \binom{2}{1}a_2^{(2-1)}y^{(2-1)} + a_2y^{(2)}$$

Tedy:

$$(a_2y)^{(2)} = a_2^{(2)}y + 2a_2^{(1)}y^{(1)} + a_2y^{(2)} \quad (4.42)$$

Vzorec pro 1. řád derivace:

$$(a_1y)^{(1)} = a_1^{(1)}y + a_1y^{(1)} \quad (4.43)$$

Vzorec pro 0. řád derivace:

$$(a_0y)^{(0)} = a_0y \quad (4.44)$$

Nyní tyto vzorce využijeme. Nejprve pro levou stranu rovnice:

- Dle vzorce pro 3. řád (4.41):

$$(-\cos^2(t)y)^{(3)} = -8\sin(t)\cos(t)y + 6(\cos^2(t) - \sin^2(t))y' + 6\sin(t)\cos(t)y'' - \cos^2(t)y'''$$

- Dle vzorce pro 2. řád (4.42):

$$(5t^3y)^{(2)} = 30ty + 30t^2y' + 5t^3y''$$

- Dle vzorce pro 1. řád (4.43):

$$(3\cos(2t)y)^{(1)} = -6\sin(2t)y + 3\cos(2t)y'$$

- Dle vzorce pro 0. řád (4.44):

$$(ty)^{(0)} = ty$$

Jednotlivé členy sečteme a vynásobíme mínus jedničkou.

$$L = (-\cos^2(t)y)^{(3)} + (5t^3y)^{(2)} + (3\cos(2t)y)^{(1)} + (ty)^{(0)} \quad / \cdot (-1)$$

Tedy:

$$L = -8\sin(t)\cos(t)y + 6(\cos^2(t) - \sin^2(t))y' + 6\sin(t)\cos(t)y'' - \cos^2(t)y''' + 30ty + 30t^2y' + 5t^3y'' - 6\sin(2t)y + 3\cos(2t)y' + ty \quad / \cdot (-1)$$

Po sečtení má levá strana následující tvar:

$$L = \cos^2(t)y''' - (6\sin(t)\cos(t) + 5t^3)y'' - (6\cos^2(t) - 6\sin^2(t) + 30t^2 + 3\cos(2t))y' + (8\sin(t)\cos(t) + 6\sin(2t) - 31t)y \quad (4.45)$$

Vzorce získané z binomické věty nyní použijeme pro pravou stranu rovnice:

- Dle vzorce pro 3. řád (4.41):

$$(e^{3t}z)^{(3)} = 27e^{3t}z + 27e^{3t}z' + 9e^{3t}z'' + e^{3t}z'''$$

- Dle vzorce pro 2. řád (4.42):

$$(\sin(t)z)^{(2)} = -\sin(t)z + 2\cos(t)z' + \sin(t)z''$$

- Dle vzorce pro 1. řád (4.43):

$$((t+2)z)^{(1)} = z + (t+2)z'$$

- Dle vzorce pro 0. řád (4.44):

$$(-z)^{(0)} = -z$$

Jednotlivé členy sečteme a vynásobíme mínus jedničkou.

$$P = (e^{3t}z)^{(3)} + (\sin(t)z)^{(2)} + ((t+2)z)^{(1)} + (-z)^{(0)} \quad / \cdot (-1)$$

Tedy:

$$P = 27e^{3t}z + 27e^{3t}z' + 9e^{3t}z'' + e^{3t}z''' - \sin(t)z + 2\cos(t)z' + \sin(t)z'' + z + (t+2)z' - z \quad / \cdot (-1)$$

Po sečtení má pravá strana následující tvar:

$$P = -e^{3t}z''' - (9e^{3t} + \sin(t))z'' - (27e^{3t} + 2\cos(2t) + t + 2)z' - (27e^{3t} - \sin(t))z \quad (4.46)$$

Z levé (4.45) a pravé (4.46) strany lze sestavit diferenciální rovnici s adjungovanými koeficienty:

$$\begin{aligned} \cos^2(t)y''' - (6\sin(t)\cos(t) + 5t^3)y'' - (6\cos^2(t) - 6\sin^2(t) + 30t^2 + 3\cos(2t))y' + \\ + (8\sin(t)\cos(t) + 6\sin(2t) - 31t)y = -e^{3t}z''' - (9e^{3t} + \sin(t))z'' - \\ - (27e^{3t} + 2\cos(2t) + t + 2)z' - (27e^{3t} - \sin(t))z \end{aligned}$$

Pro ověření správnosti výpočtu provedeme kontrolu. Opět rovnici rozdělíme na levou a pravou stranu a řešíme každou část jednotlivě.

Vypíšeme si nové koeficienty:

$$\begin{aligned} a_3 = \cos^2(t), \quad a_2 = -6\sin(t)\cos(t) - 5t^3, \quad a_1 = -6\cos^2(t) + 6\sin^2(t) - 30t^2 - 3\cos(2t), \\ a_0 = 8\sin(t)\cos(t) + 6\sin(2t) - 31t, \quad b_3 = -e^{3t}, \quad b_2 = -9e^{3t} - \sin(t), \\ b_1 = -27e^{3t} - 2\cos(2t) - t - 2, \quad b_0 = \sin(t) - 27e^{3t} \end{aligned}$$

Dle pravidla (4.37) upravíme koeficienty na levé straně:

$$L = -\cos^2(t)p^3y + (-6\sin(t)\cos(t) - 5t^3)p^2y + (6\cos^2(t) - 6\sin^2(t) + 30t^2 + 3\cos(2t))py + (8\sin(t)\cos(t) + 6\sin(2t) - 31t)y$$

Dle pravidla (4.38) upravíme koeficienty na pravé straně:

$$P = -e^{3t}p^3z + (9e^{3t} + \sin(t))p^2z + (-27e^{3t} - 2\cos(2t) - t - 2)pz + (27e^{3t} - \sin(t))z$$

Nyní provedeme úpravy za pomoci vzorců získaných z binomické věty pro levou stranu:

- Dle vzorce pro 3. řád (4.41):

$$(-\cos^2(t)y)^{(3)} = -8\sin(t)\cos(t)y + 6(\cos^2(t) - \sin^2(t))y' + 6\sin(t)\cos(t)y'' - \cos^2(t)y'''$$

- Dle vzorce pro 2. řád (4.42):

$$((-6\sin(t)\cos(t) - 5t^3)y)^{(2)} = (24\sin(t)\cos(t) - 30t)y + (12\sin^2(t) - 12\cos^2(t) - 30t^2)y' - (6\sin(t)\cos(t) + 5t^3)y''$$

- Dle vzorce pro 1. řád (4.43):

$$((6\cos^2(t) - 6\sin^2(t) + 30t^2 + 3\cos(2t))y)^{(1)} = (-24\sin(t)\cos(t) + 60t - 6\sin(2t))y + (6\cos^2(t) - 6\sin^2(t) + 30t^2 + 3\cos(2t))y'$$

- Dle vzorce pro 0. řád (4.44):

$$((6\sin^2(t) - 6\cos^2(t) - 30t^2 - 3\cos(2t)))^{(0)} = (6\sin^2(t) - 6\cos^2(t) - 30t^2 - 3\cos(2t))y$$

Jednotlivé členy sečteme a vynásobíme mínus jedničkou.

$$L = (-\cos^2(t)y)^{(3)} + ((-6\sin(t)\cos(t) - 5t^3)y)^{(2)} + ((6\cos^2(t) - 6\sin^2(t) + 30t^2 + 3\cos(2t))y)^{(1)} + ((6\sin^2(t) - 6\cos^2(t) - 30t^2 - 3\cos(2t)))^{(0)} \quad / \cdot (-1)$$

Tedy:

$$L = -8\sin(t)\cos(t)y + 6(\cos^2(t) - \sin^2(t))y' + 6\sin(t)\cos(t)y'' - \cos^2(t)y''' + (24\sin(t)\cos(t) - 30t)y + (12\sin^2(t) - 12\cos^2(t) - 30t^2)y' - (6\sin(t)\cos(t) + 5t^3)y'' + (-24\sin(t)\cos(t) + 60t - 6\sin(2t))y + (6\cos^2(t) - 6\sin^2(t) + 30t^2 + 3\cos(2t))y' + (6\sin^2(t) - 6\cos^2(t) - 30t^2 - 3\cos(2t))y \quad / \cdot (-1)$$

Po sečtení má levá strana tvar původní diferenciální rovnice (4.40).

Ještě dokončíme kontrolu pro pravou stranu:

- Dle vzorce pro 3. řád (4.41):

$$(-e^{3t}z)^{(3)} = -27e^{3t}z - 27e^{3t}z' - 9e^{3t}z'' - e^{3t}z'''$$

- Dle vzorce pro 2. řád (4.42):

$$((9e^{3t} + \sin(t))z)^{(2)} = (81e^{3t} - \sin(t))z + (54e^{3t} + 2\cos(t))z' + (9e^{3t} + \sin(t))z''$$

- Dle vzorce pro 1. řád (4.43):

$$((-27e^{3t} - 2\cos(2t) - t - 2)z)^{(1)} = (-81e^{3t} + 2\sin(t) - 1)z + (-27e^{3t} - 2\cos(2t) - t - 2)z'$$



- Dle vzorce pro 0. řád (4.44):

$$((27e^{3t} - \sin(t))z)^{(0)} = (27e^{3t} - \sin(t))z$$

Jednotlivé členy sečteme a vynásobíme mínus jedničkou.

$$P = (-e^{3t}z)^{(3)} + ((9e^{3t} + \sin(t))z)^{(2)} + ((-27e^{3t} - 2\cos(2t) - t - 2)z)^{(1)} + \\ + ((27e^{3t} - \sin(t))z)^{(0)} \quad / \cdot (-1)$$

Tedy:

$$P = -27e^{3t}z - 27e^{3t}z' - 9e^{3t}z'' - e^{3t}z''' + (81e^{3t} - \sin(t))z + (54e^{3t} + 2\cos(t))z' + \\ + (9e^{3t} + \sin(t))z'' + (-81e^{3t} + 2\sin(t) - 1)z + (-27e^{3t} - 2\cos(2t) - t - 2)z' + \\ + (27e^{3t} - \sin(t))z \quad / \cdot (-1)$$

Po sečtení má pravá strana tvar původní diferenciální rovnice (4.40).

## 4.11 Aplikace Fourierovy řady

Vzhledem k tomu, že již známe způsob, jak řešit diferenciální rovnici vyššího řádu s časové proměnnými koeficienty, můžeme se ptát, zda se bude výpočet chovat korektně i pro goniometrické funkce s mocninou 2 a výše. V případě, že by výpočet selhal, lze umocněnou goniometrickou funkci nahradit substitucí dle matematických vzorečků, z nichž je několik uvedeno v (4.47).

$$\begin{aligned} \sin^2 t &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2 * t)) \\ \cos^2 t &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2 * t)) \\ \sin^3 t &= \frac{1}{4}(3 * \sin(t) - \sin(3 * t)) \\ \cos^3 t &= \frac{1}{4}(3 * \cos(t) + \cos(3 * t)) \\ \sin^4 t &= \frac{1}{8}(3 * \cos(4 * t) - 4 * \cos(2 * t) + 3) \\ \cos^4 t &= \frac{1}{8}(3 * \cos(4 * t) + 4 * \cos(2 * t) + 3) \\ \sin^5 t &= \frac{1}{16}(10 * \sin(t) - 5 * \sin(3 * t) + \sin(5 * t)) \\ \cos^5 t &= \frac{1}{16}(10 * \cos(t) + 5 * \cos(3 * t) + \cos(5 * t)) \end{aligned} \tag{4.47}$$

Následné příklady ukazují, jak se chová metoda využívající schéma, popříp. binomickou větu, v případě, že diferenciální rovnice obsahuje umocněné goniometrické funkce.

Zadání diferenciální rovnice:

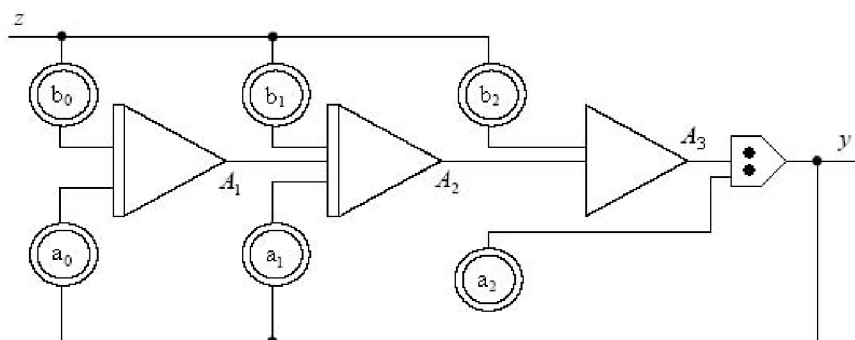
$$\sin^2(t)y'' + 2ty' + \cos(t)y = e^{2t}z'' + 3t^2z' + (t - 1)z \tag{4.48}$$

Máme tedy koeficienty:

$$a_2 = \sin^2(t), \quad a_1 = 2t, \quad a_0 = \cos(t), \\ b_2 = e^{2t}, \quad b_1 = 3t^2, \quad b_0 = t - 1$$

Řešíme metodou využívající schéma:

Koeficienty tedy dosadíme do schématu odpovídající diferenciální rovnici 2. řádu se stejnými řády derivace na levé i pravé straně (viz. obr. (4.4)).



Obrázek 4.4: Obecné schéma pro diferenciální rovnice 2. řádu

Ze schématu si vyjádříme:

$$-A_1' = a_0 y + b_0 z \quad (4.49)$$

$$-A_2' = a_1 y + b_1 z + A_1 \quad (4.50)$$

$$A_3 = -b_2 z - A_2 \quad (4.51)$$

$$A_3 = a_2 y \quad (4.52)$$

Porovnáním rovnic (4.51) a (4.52) dostaneme:

$$-A_2 = a_2 y + b_2 z \quad (4.53)$$

Dosazením koeficientů do (4.53) získáme:

$$-A_2 = \sin^2(t)y + e^{2t}z$$

Derivujeme a získáváme:

$$-A'_2 = (2 \sin(t) \cos(t))y + \sin^2(t)y' + 2e^{2t}z + e^{2t}z' \quad (4.54)$$

Dosazením do (4.50) získáme:

$$-A'_2 = 2ty + 3t^2z + A_1 \quad (4.55)$$

Porovnáním rovnic (4.54) a (4.55) získáme:

$$-A_1 = -\sin^2(t)y' + (2t - 2 \sin(t) \cos(t))y - e^{2t}z' - (2e^{2t} - 3t^2)z$$

Derivujeme a získáváme:

$$\begin{aligned} -A'_1 = & (-2 \sin(t) \cos(t))y' - \sin^2(t)y'' + (2 - 2 \cos^2(t) + 2 \sin^2(t))y + (2t - \\ & - 2 \sin(t) \cos(t))y' - 2e^{2t}z' - e^{2t}z'' - (4e^{2t} - 6t)z - (2e^{2t} - 3t^2)z' \end{aligned} \quad (4.56)$$

Dosazením do (4.49) získáváme:

$$-A'_1 = \cos(t)y + (t - 1)z \quad (4.57)$$

Porovnáním rovnic (4.56) a (4.57) získáme novou diferenciální rovnici s již adjungovanými koeficienty:

$$\begin{aligned} \sin^2(t)y'' + (4 \sin(t) \cos(t) - 2t)y' + (2 \cos^2(t) - 2 \sin^2(t) + \cos(t) - 2)y = \\ = -e^{2t}z'' + (3t^2 - 4e^{2t})z' - (4e^{2t} - 5t - 1)z \end{aligned}$$

Nyní provedeme kontrolu a ověříme tak správnost našeho výpočtu. Budeme postupovat naprosto stejným způsobem jako doposud. Dosadíme nově získané adjungované koeficienty do schématu (viz. obr. (4.4)) a symbolicky toto schéma vyjádříme.

Adjungované koeficienty z nově získané rovnice (4.58) jsou tedy:

$$\begin{aligned} a_2 = \sin^2(t), \quad a_1 = 4 \sin(t) \cos(t) - 2t, \quad a_0 = 2 \cos^2(t) - 2 \sin^2(t) + \cos(t) - 2, \\ b_2 = -e^{2t}, \quad b_1 = 3t^2 - 4e^{2t}, \quad b_0 = -4e^{2t} + 5t + 1 \end{aligned}$$

Dosazením koeficientů do (4.53) získáme:

$$-A_2 = \sin^2(t)y - e^{2t}z$$

Derivujeme a získáváme:

$$-A_2' = (2 \sin(t) \cos(t))y + \sin^2(t)y' - 2e^{2t}z - e^{2t}z' \quad (4.58)$$

Dosazením do (4.50) získáme:

$$-A_2' = (4 \sin(t) \cos(t) - 2t)y + (3t^2 - 4e^{2t})z + A_1 \quad (4.59)$$

Porovnáním rovnic (4.58) a (4.59) získáme:

$$-A_1 = -\sin^2(t)y' + (-2t + 2 \sin(t) \cos(t))y + e^{2t}z' + (-2e^{2t} + 3t^2)z$$

Derivujeme a získáváme:

$$-A_1' = (-2 \sin(t) \cos(t))y' - \sin^2(t)y'' + (2 \cos^2(t) - 2 \sin^2(t) - 2)y + (-2t + 2 \sin(t) \cos(t))y' + 2e^{2t}z' + e^{2t}z'' + (-4e^{2t} + 6t)z + (-2e^{2t} + 3t^2)z' \quad (4.60)$$

Dosazením do (4.49) získáváme:

$$-A_1' = (2 \cos^2(t) - 2 \sin^2(t) + \cos(t) - 2)y - (4e^{2t} - 5t - 1)z \quad (4.61)$$

Porovnáním rovnic (4.60) a (4.61) získáme původní diferenciální rovnici (4.48), čímž jsme ověřili funkčnost této metody i pro diferenciální rovnice, v nichž se nacházejí goniometrické funkce s mocninou 2 a výše. Jako důkaz nám slouží provedená zkouška.

Nyní ověříme, zda výpočet funguje i pokud goniometrické funkce nahradíme adekvátní substitucí. Zadání diferenciální rovnice bude jako v předchozím příkladě (4.48), jen  $\sin^2(t)$  nahradíme  $\frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$ :

Zadání diferenciální rovnice tedy vypadá následovně:

$$\frac{1}{2}(1 - \cos(2t))y'' + 2ty' + \cos(t)y = e^{2t}z'' + 3t^2z' + (t - 1)z \quad (4.62)$$

Máme tedy koeficienty:

$$a_2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)), \quad a_1 = 2t, \quad a_0 = \cos(t), \\ b_2 = e^{2t}, \quad b_1 = 3t^2, \quad b_0 = t - 1$$

Řešíme metodou využívající schéma:

Koeficienty tedy dosadíme do schématu odpovídající diferenciální rovnici 2. řádu se stejnými řády derivace na levé i pravé straně (viz. obr. (4.4)).

Ze schématu si vyjádříme:

$$-A'_1 = a_0y + b_0z \quad (4.63)$$

$$-A'_2 = a_1y + b_1z + A_1 \quad (4.64)$$

$$A_3 = -b_2z - A_2 \quad (4.65)$$

$$A_3 = a_2y \quad (4.66)$$

Porovnáním rovnic (4.65) a (4.66) dostaneme:

$$-A_2 = a_2y + b_2z \quad (4.67)$$

Dosazením koeficientů do (4.67) získáme:

$$-A_2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))y + e^{2t}z$$

Derivujeme a získáváme:

$$-A'_2 = \sin(2t)y + \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))y' + 2e^{2t}z + e^{2t}z' \quad (4.68)$$

Dosazením do (4.64) získáme:

$$-A'_2 = 2ty + 3t^2z + A_1 \quad (4.69)$$

Porovnáním rovnic (4.68) a (4.69) získáme:

$$-A_1 = -\frac{1}{2}(1 - \cos(2t))y' + (2t - \sin(2t))y - e^{2t}z' + (-2e^{2t} + 3t^2)z$$

Derivujeme a získáváme:

$$-A'_1 = -\sin(2t)y' - \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))y'' + (2 - 2\cos(2t))y + (2t - \sin(2t))y' - 2e^{2t}z' - e^{2t}z'' - (4e^{2t} - 6t)z - (2e^{2t} - 3t^2)z' \quad (4.70)$$

Dosazením do (4.63) získáváme:

$$-A'_1 = \cos(t)y + (t - 1)z \quad (4.71)$$

Porovnáním rovnic (4.70) a (4.71) získáme novou diferenciální rovnici s již adjungovanými koeficienty:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))y'' + (2\sin(2t) - 2t)y' + (\cos(t) + 2\cos(2t) - 2)y &= \\ = -e^{2t}z'' + (3t^2 - 4e^{2t})z' - (4e^{2t} - 5t - 1)z \end{aligned}$$

Nyní provedeme kontrolu a ověříme tak správnost našeho výpočtu. Budeme postupovat naprosto stejným způsobem jako doposud. Dosadíme nově získané adjungované koeficienty do schématu (viz. obr. (4.4)) a symbolicky toto schéma vyjádříme.

Adjungované koeficienty z nově získané rovnice (4.72) jsou tedy:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)), \quad a_1 = 2 \sin(2t) - 2t, \quad a_0 = \cos(t) + 2 \cos(2t) - 2, \\ b_2 &= -e^{2t}, \quad b_1 = 3t^2 - 4e^{2t}, \quad b_0 = -4e^{2t} + 5t + 1 \end{aligned}$$

Dosazením koeficientů do (4.67) získáme:

$$-A_2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))y - e^{2t}z$$

Derivujeme a získáváme:

$$-A_2' = \sin(2t)y + \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))y' - 2e^{2t}z - e^{2t}z' \quad (4.72)$$

Dosazením do (4.64) získáme:

$$-A_2' = (2 \sin(2t) - 2t)y + (3t^2 - 4e^{2t})z + A_1 \quad (4.73)$$

Porovnáním rovnic (4.72) a (4.73) získáme:

$$-A_1 = -\frac{1}{2}(1 - \cos(2t))y' + (\sin(2t) - 2t)y + e^{2t}z' + (-2e^{2t} + 3t^2)z$$

Derivujeme a získáváme:

$$\begin{aligned} -A_1' &= -\sin(2t)y' - \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))y'' + (2 \cos(2t) - 2)y + (\sin(2t) - 2t)y' + \\ &+ 2e^{2t}z' + e^{2t}z'' + (-4e^{2t} + 6t)z + (-2e^{2t} + 3t^2)z' \end{aligned} \quad (4.74)$$

Dosazením do (4.63) získáváme:

$$-A_1' = (\cos(t) + 2 \cos(2t) - 2)y - (4e^{2t} - 5t - 1)z \quad (4.75)$$

Porovnáním rovnic (4.74) a (4.75) získáme původní diferenciální rovnici (4.62), čímž jsme ověřili funkčnost této metody i pro diferenciální rovnice, v nichž se nacházejí substituce goniometrických funkcí s mocninou 2 a výše. Jako důkaz nám slouží provedená zkouška.

## Kapitola 5

# Simulační jazyk TKSL

### 5.1 Obecné informace o TKSL

Simulační jazyk TKSL byl vytvořen k testování vlastností technických počátečních úloh a testování algoritmu metody Taylorovy řady. TKSL nabízí mnoho praktických rysů a také představuje zcela nový přístup k řešení spojitých systémů:

- při analýze po částech spojitých systémů je požadovaná pouze definice přesnosti řešení
- implicitně vestavěná integrační metoda s 64 řádem (s integračním krokem  $h$  definovaným automaticky) počítá zřetelně lépe než dosud používané jiné integrační algoritmy
- řád implicitně vestavěné metody může být interaktivně zvýšen

Systém TKSL je simulační jazyk pro výpočty soustav diferenciálních rovnic. Veškeré výpočty jsou založeny na diferenciálních rovnicích a jsou řešeny za pomoci Taylorova rozvoje. Systém umožňuje numerické řešení. Vstupem je soustava diferenciálních rovnic. Program je určen pro prostředí MSDOS a je nenáročný na hardware.

### 5.2 Zápis diferenciálních rovnic pro TKSL

Předpokládejme, že máme řešit rovnici:

$$y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = b_3z''' + b_2z'' + b_1z' + b_0z$$

Řešením této rovnice metodou postupné integrace vznikla soustava rovnic pro systém TKSL:

$$A_1 = \frac{1}{p}(b_0z - a_0y) \quad (5.1)$$

$$A_2 = \frac{1}{p}(b_1z - a_1y + A_1) \quad (5.2)$$

$$A_3 = \frac{1}{p}(b_2z - a_2y + A_2) \quad (5.3)$$

$$y = b_3z + A_3 \quad (5.4)$$

Aby bylo možné danou rovnicí vyřešit, je nutné vzniklou soustavu rovnic zapsat do souboru dle syntaxe TKSL:

```
var
  y,z,A_1,A_2,A_3;           { deklarace proměnných }
const
  b0=2, b1=1, b2=1, b3=2,   { definice konstant }
  a0=1, a1=1, a2=2,
  tmax = 10, DT=0.1, EPS = 1e-20;
system
  A_1' = b0*z - a0*y      &0;   { zápis jednotlivých rovnic }
  A_2' = b1*z - a1*y + A_1 &0;
  A_3' = b2*z - a2*y + A_2 &0;
  y = b3*z + A_3;
  z = 1;                   { vynucující funkce - odezva na jednotkový skok }
sysend.
```

Jak je vidět na příkladu je soubor sestaven z několika sekcí:

1. *Definice konstant*

```
const a1=1, a2=2, ... ;
```

Sekce je uvozena klíčovým slovem `const` a za ním následuje výčet definic ve tvaru `id:=číslo`. Jednotlivé definice jsou od sebe odděleny čárkami, za poslední je středník.

2. *Deklarace proměnných*

```
var id, id, ... ;
```

Sekce je uvozena klíčovým slovem `var` a za ním následuje výčet identifikátorů proměnných oddělených čárkou. Za posledním identifikátorem musí být středník.

3. *Tělo programu*

```
system
```

```
  :
```

```
sysend;
```

Tělo programu je umístěno v bloku mezi klíčovými slovy `system` a `sysend`. Lze zde používat přiřazovací příkazy a několik klíčových slov.

Za povšimnutí stojí zápis počátečních podmínek za diferenciální rovnicí ve tvaru `&výraz`. Ve výrazu lze využít čísel, proměnných, konstant a hodnot funkcí.

4. *Konec programu – poslední příkaz*

Pro překladač je indikace konce souboru (tedy konce překladu) stejná jako v programovacím jazyce Pascal, tedy tečkou za posledním příkazem.

Pokud je tedy posledním příkazem např. `sysend.`, pak za ním následuje tečka.

Překladač je typu case-insensitive, to znamená, že nerozlišuje malá a velká písmena.



### 5.3 Systém TKSL/C

Systém TKSL je předchůdcem systému TKSL/C. Je psán v programovacím jazyce Pascal a jeho vývoj byl již ukončen. Oproti tomu systém TKSL/C je psán v programovacím jazyce C. Důvodem je především přenositelnost mezi operačními systémy. Systém TKSL/C je však stále ve fázi vývoje.

## Kapitola 6

# Implementace

### 6.1 Nalezení správné metodiky převodu

Z kapitoly *Metody řešení diferenciálních rovnic* jsme se dozvěděli, jak lze řešit diferenciální rovnice vyšších řádů s časově proměnnými koeficienty. Pro nalezení vhodné metodiky převodu diferenciálních rovnic vyšších řádů s časově proměnnými koeficienty na ekvivalentní soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu byly využity poznatky z obou metod převodu na adjungované koeficienty.

Pro samotnou implementaci metodiky převodu se jevila jako výhodnější metoda využívající pro převod na adjungované koeficienty schéma. A to zejména pro svou průhlednost přes sestavené schéma ze základních prvků lineárních systémů. Prováděné experimentální výpočty pro různá zadání diferenciálních rovnic však odhalila, že tato metoda dosahuje správných výsledků pouze v případech, kdy byl v zadání diferenciálních rovnic řád derivace levé i pravé strany roven. Proto, aby byla zachována čitelnost dosažená pomocí schématu, bylo zapotřebí najít způsob řešení, jak dosáhnout spolehlivosti výpočtu i u zadání diferenciálních rovnic s různými řády derivace. K tomuto cíli pomohli experimentální výpočty prováděné pomocí binomické věty. U této metody bylo dosaženo vždy správného výsledku, což bylo prokázáno provedenými zkouškami. Odlišný řád derivace v zadáních diferenciálních rovnic zde při řešení nemohl dělat problém, protože, jak již bylo řečeno v kapitole (4.2.2), levá a pravá strana zadané rovnice se řeší odděleně.

Na základě těchto poznatků bylo zapotřebí porovnávat správné výsledky vyprodukované metodou pomocí binomické věty se špatnými výsledky dosaženými metodou pomocí schématu, což nakonec vedlo ke kýženému cíli. Úprava, zajišťující spolehlivost při řešení diferenciálních rovnic s různými řády derivace metodou využívající schéma, spočívá v nahrazení obyčejné děličky děličkou **invertující**.

### 6.2 Algoritmus převodu

Výsledný algoritmus pro převod diferenciálních rovnic vyšších řádů s časově proměnnými koeficienty na ekvivalentní soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu je, jak napovídá předchozí podkapitola, složen ze dvou částí. V závislosti na vztahu řádů derivace levé a pravé strany zadané diferenciální rovnice je pak použita vždy jen odpovídající část tohoto algoritmu. Pro případ, kdy jsou si řády derivace obou stran rovny, je využita část algoritmu (6.1).

V případě, že jsou řády derivace levé a pravé strany odlišné (přičemž musí platit, že řád derivace levé strany je vždy větší než řád derivace pravé strany), využívá se druhá část algoritmu (6.2). Jednotlivé části algoritmu jsou popsány poloformálně.

$n =$  řád derivace

$$\begin{aligned}
 &y = c_n/a_n \\
 &c_n = -b_n * z - c_{n-1} \\
 &\mathbf{for } i = n - 1 \mathbf{ downto } 1 \mathbf{ do} \\
 &\quad c'_i = -b_i * z - a_i * y - c_{i-1} \\
 &\mathbf{endfor} \\
 &c'_0 = -b_0 * z - a_0 * y
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

$n =$  řád derivace levé strany rovnice

$m =$  řád derivace pravé strany rovnice

$$\begin{aligned}
 &y = c_{n-1}/a_n \\
 &\mathbf{for } i = n - 1 \mathbf{ downto } 1 \mathbf{ do} \\
 &\quad \mathbf{if } (i \leq m) \mathbf{ then} \\
 &\quad\quad c'_i = -b_i * z - a_i * y - c_{i-1} \\
 &\quad \mathbf{else} \\
 &\quad\quad c'_i = -a_i * y - c_{i-1} \\
 &\quad \mathbf{endif} \\
 &\mathbf{endfor} \\
 &c'_0 = -b_0 * z - a_0 * y
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

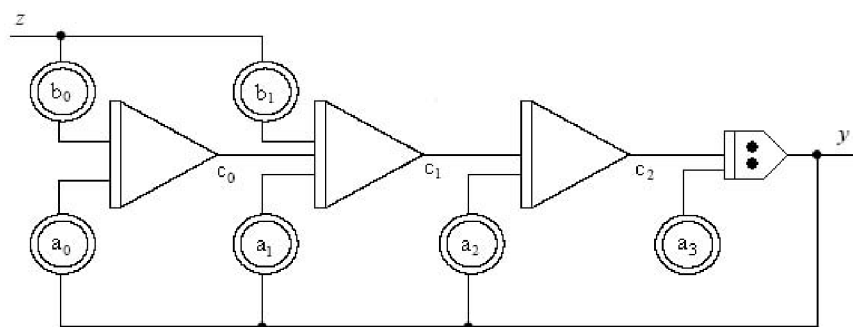
Ukažme si nyní na dvou odlišných příkladech, jak se bude daný algoritmus chovat. Nejprve mějme diferenciální rovnici, u níž jsou si řády derivace obou stran rovny (viz. rovnice (4.17), kde schéma řešící tuto rovnici je uvedeno na obr. (4.3)). Pro rovnost řádů derivace je použita část algoritmu (6.1), jehož rozpis, pro tuto rovnici s řádem derivace rovnou 3, vypadá následovně:

$$\begin{aligned}
 &y = c_3/a_3 \\
 &c_3 = -b_3 * z - c_2 \\
 &c'_2 = -b_2 * z - a_2 * y - c_1 \\
 &c'_1 = -b_1 * z - a_1 * y - c_0 \\
 &c'_0 = -b_0 * z - a_0 * y
 \end{aligned}$$

Nyní mějme rovnici (6.3) (schéma řešící tuto rovnici je uvedeno na obr. (6.1)), jejíž řád derivace levé strany je roven 3 a řád derivace pravé strany je 1.

$$\cos^4(t)y''' + 5 * t^2y'' - 3e^{-t}y' + y = (t - 3)z' + 2z \tag{6.3}$$

Pro odlišnost řádů derivace je použita část algoritmu (6.2), jehož rozpis je uveden níže:



Obrázek 6.1: Schéma řešící diferenciální rovnici (6.3)

$$\begin{aligned}
 y &= -c_2/a_3 \\
 c'_2 &= -a_2 * y - c_1 \\
 c'_1 &= -b_1 * z - a_1 * y - c_0 \\
 c'_0 &= -b_0 * z - a_0 * y
 \end{aligned}$$

### 6.3 Prostředí implementace

Pro výslednou implementaci byl využit multiplatformní framework *Qt*, jež umožňuje zkompileovatelnost zdrojových kódů bez úpravy pod operačními systémy Windows, Linux i Macintosh. Ke kompilaci bylo použito MinGW.

### 6.4 Kompilace

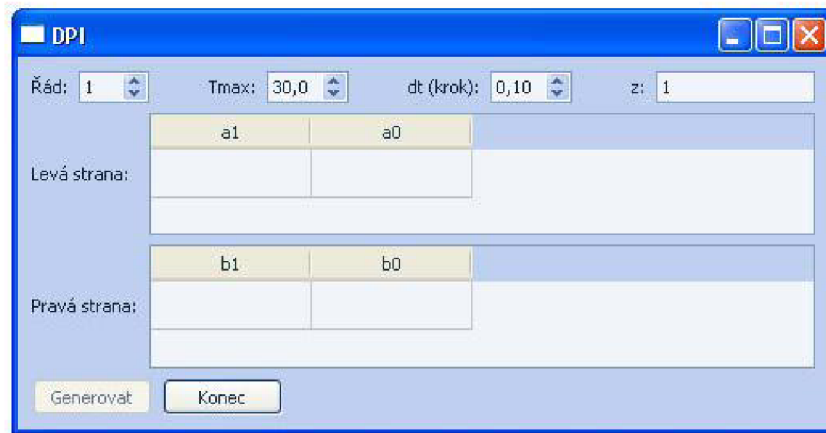
Kompilace zdrojových souborů má 2 kroky:

- nejprve spustíme soubor *qmake.exe*, jenž vytvoří *debug* a *release* makefile pro kompilátor a současně přetransformuje formuláře z *ui* souborů do *h* souborů
- následně spustíme soubor *mingw32-make.exe*, kdy dochází ke kompilaci vlastních zdrojových kódů pro *debug* i *release* verzi (*debug* i *release* verzi lze kompilovat i odděleně: *mingw32-make.exe debug*, popříp. *mingw32-make.exe release*)

### 6.5 Výsledný program

Aby bylo možné vyhodnotit jakoukoliv diferenciální rovnici programem TKSL, je zapotřebí řešenou rovnici přepsat, dle přesně dané syntaxe jazyka TKSL, do souboru s koncovkou *inp*. Výsledný program tedy, po zadání diferenciální rovnice vyššího řádu s časově

proměnnými koeficienty, vygeneruje námi požadovaný výstupní *inp* soubor. Výsledný program má po spuštění podobu uvedenou na obr. (6.2).



Obrázek 6.2: Výsledný program po spuštění

Jednotlivé položky programu mají následující význam:

- pole **Řád** nastavuje řád zadané diferenciální rovnice (v případě, že jsou řády derivace levé a pravé strany rovnice odlišné, zadává se ten vyšší řád derivace, tedy řád levé strany, viz. podkapitola *Algoritmus převodu*)
- pole **Tmax** zadává čas, po který se bude daná diferenciální rovnice vyhodnocovat (implicitně nastaveno na 30)
- pole **dt (krok)** určuje přesnost prováděného výpočtu (implicitně nastaveno na 0.1  $\Rightarrow$  velmi přesné)
- pole **z** obsahuje vstupní funkci (implicitně nastaveno na 1)
- buňky tabulky **Levá strana** obsahují jednotlivé členy levé strany diferenciální rovnice (členy jsou zadávány dle syntaxe TKSL)
- buňky tabulky **Pravá strana** obsahují jednotlivé členy pravé strany diferenciální rovnice (členy jsou zadávány dle syntaxe TKSL)
- tlačítko **Generovat** vyvolá dotazovací formulář pro uložení souboru, s již přednastavenou koncovkou *inp*, do něhož se přetransformuje daná diferenciální rovnice pro následné vyhodnocení programem TKSL (viz. obr. (6.3))
- tlačítko **Konec** ukončí program

Pro diferenciální rovnici (6.4) bude zápis do programu pro jednotlivé členy rovnice a požadované parametry (viz. níže) mít podobu, jež nám ukazuje obr. (6.5).



Obrázek 6.3: Dotazovací formulář pro uložení souboru

$$4y^{(V)} + y^{(IV)} + 3 * ty^{(III)} + \sin(t)y^{(II)} + 5y^{(I)} + \sin(t)y = \sin(t)z^{(III)} + 3z^{(II)} + (t + 1)z^{(I)} + 2z \quad (6.4)$$

Koeficienty zadané diferenciální rovnice jsou tedy:

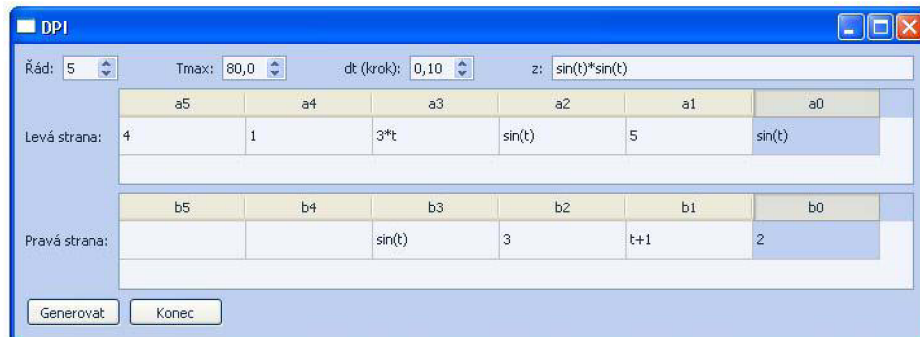
$$a_5 = 4, a_4 = 1, a_3 = 3 * t, a_2 = \sin(t), a_1 = 5, a_0 = \sin(t), \\ b_3 = \sin(t), b_2 = 3, b_1 = t + 1, b_0 = 2$$

Parametry pro rovnici (6.4):

$$Tmax = 80 \\ dt = 0.1 \\ z = \sin^2(t)$$

Výslednou podobu vygenerovaného souboru znázorňuje obrázek (6.5).

Program TKSL tento vygenerovaný soubor dále vyhodnotí (viz. obr. (6.6)).



Obrázek 6.4: Zápís diferenciální rovnice (6.4) do programu

```

var y, z, c0, c1, c2, c3, c4, a0, a1, a2, a3, a4, a5, b0, b1, b2, b3;
const tmax = 80, dt = 0.1;

system

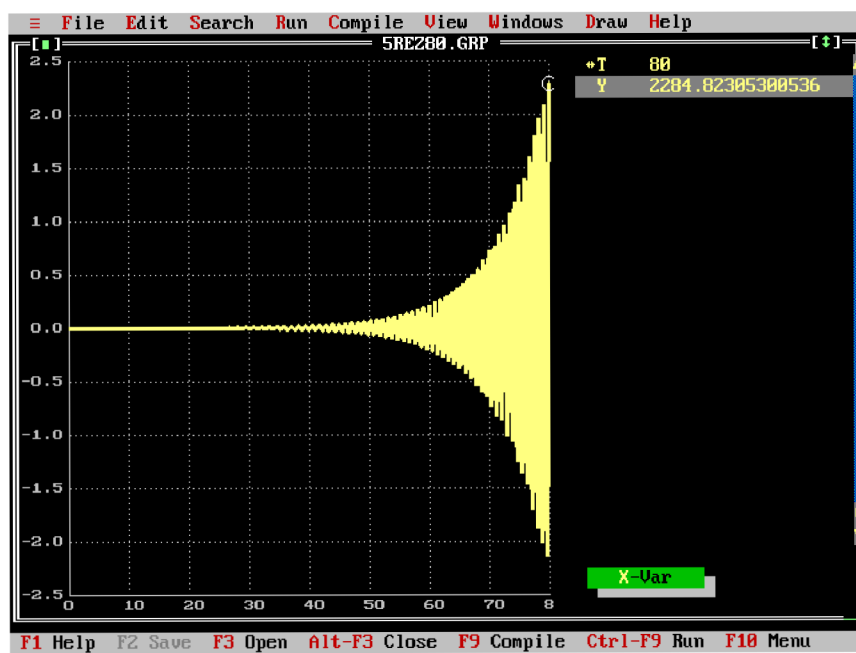
a0 = sin<t>;a1 = 5;a2 = sin<t>;a3 = 3*t;a4 = 1;a5 = 4;
b0 = 2;b1 = t+1;b2 = 3;b3 = sin<t>;

y = - c4 / a5;
c4' = - a4*y - c3 &0;
c3' = - b3*z - a3*y - c2 &0;
c2' = - b2*z - a2*y - c1 &0;
c1' = - b1*z - a1*y - c0 &0;
c0' = - b0*z - a0*y &0;

z = sin<t>*sin<t>;
sysend.

```

Obrázek 6.5: Vygenerovaný soubor pro diferenciální rovnici (6.4)



Obrázek 6.6: Vyhodnocený soubor pro diferenciální rovnici (6.4)



# Kapitola 7

## Ukázkové příklady

### 7.1 Příklad 1

Zadání diferenciální rovnice:

$$y^{(V)} + \cos(t)y^{(IV)} + \frac{t}{3}y^{(III)} + \sin^2(t)y^{(II)} + \frac{t}{2}y^{(I)} + \sin\left(\frac{t}{3}\right)y = t^3z^{(III)} + \sin(3 * t)z^{(II)} + (t + 1)z^{(I)} + 9z \quad (7.1)$$

Parametry pro rovnici (7.1):

$$Tmax = 35$$

$$dt = 0.1$$

$$z = \sin(t)$$

### 7.2 Příklad 2

Zadání diferenciální rovnice:

$$7y^{(V)} + \cos(t)y^{(IV)} + ty^{(III)} + \sin^4(t)y^{(II)} + 5y^{(I)} + \sin(fract2)y = 8 * (t + 1)z^{(V)} + \sin(2 * t)z^{(IV)} + \frac{t}{9}z^{(III)} + (t + 4)z^{(II)} + 5 * tz^{(I)} + (1 - t)z \quad (7.2)$$

Parametry pro rovnici (7.1):

$$Tmax = 30$$

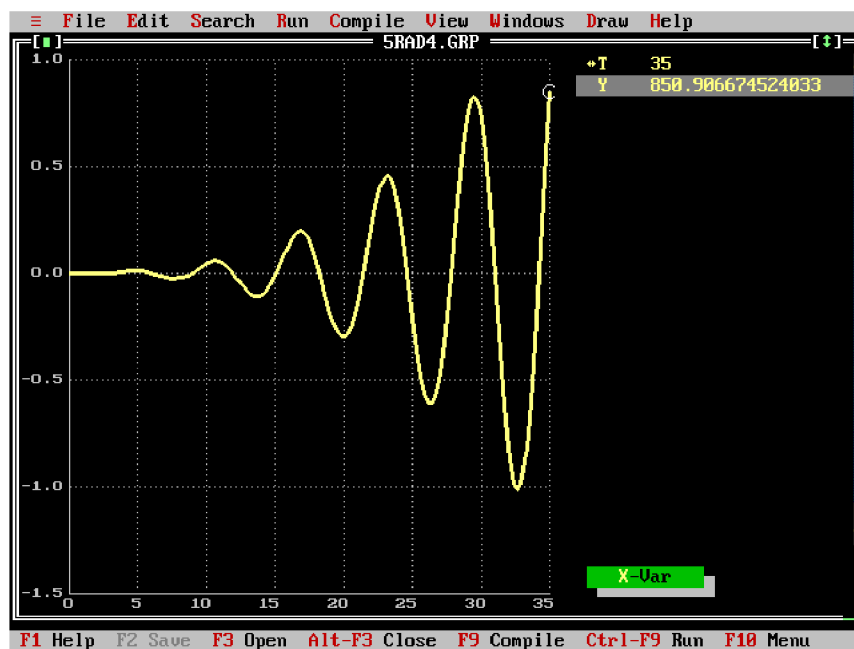
$$dt = 0.1$$

$$z = 1/e^t$$

### 7.3 Příklad 3

Zadání diferenciální rovnice:

$$y^{(V)} + \cos(t)y^{(IV)} + \frac{t}{3}y^{(III)} + \sin^2(t)y^{(II)} + 2 * t^2y^{(I)} + \sin\left(\frac{t}{2}\right)y = t^3z^{(III)} + \sin(3 * t)z^{(II)} + (t + 1)z^{(I)} + 9z \quad (7.3)$$



Obrázek 7.1: Vyhodnocený soubor pro diferenciální rovnici (7.1)

Parametry pro rovnici (7.3):

$$Tmax = 35$$

$$dt = 0.1$$

$$z = \sin(t)$$

## 7.4 Příklad 4

Zadání diferenciální rovnice:

$$7y^{(V)} + \cos(t)y^{(IV)} + ty^{(III)} + \sin^4(t)y^{(II)} + \frac{1}{e^t}(3 * t)y^{(I)} + \sin\left(\frac{t}{2}\right)y = 8 * (t + 1)z^{(V)} + \sin(2 * t)z^{(IV)} + \frac{t}{9}z^{(III)} + (t + 4)z^{(II)} + 5 * tz^{(I)} + (1 - t)z \quad (7.4)$$

Parametry pro rovnici (7.4):

$$Tmax = 30$$

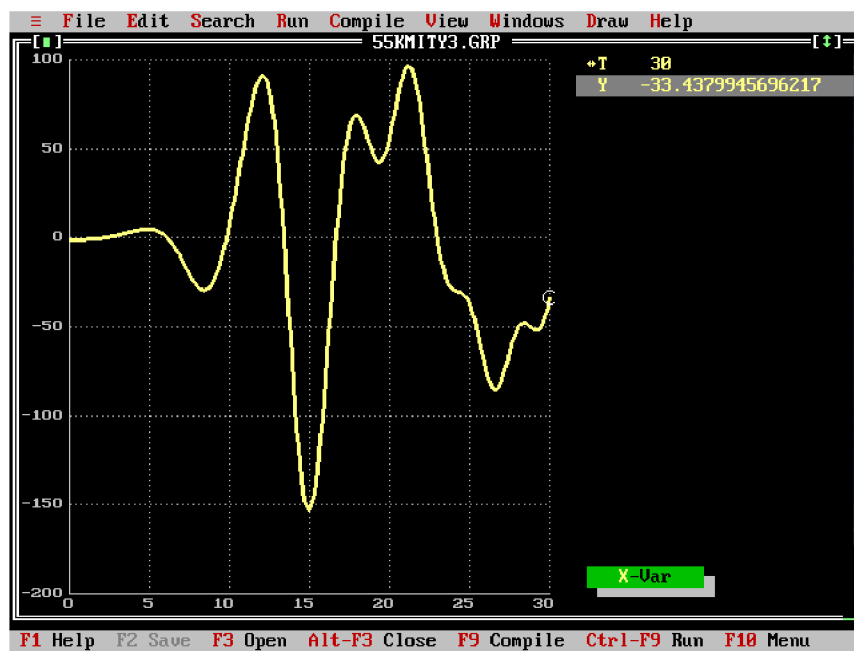
$$dt = 0.1$$

$$z = 1/e^t$$

## 7.5 Příklad 5

Zadání diferenciální rovnice:

$$y^{(V)} + \cos^2(t)y^{(IV)} + ty^{(III)} + \sin(2 * t)y^{(II)} + 2y^{(I)} + \sin\left(\frac{t}{2}\right)y = (t + 7)z^{(V)} + \sin(t^2)z^{(IV)} + \frac{t}{3}z^{(III)} + (t + 9)z^{(II)} + \frac{t^3}{e^t}z^{(I)} + (1 - t)z \quad (7.5)$$



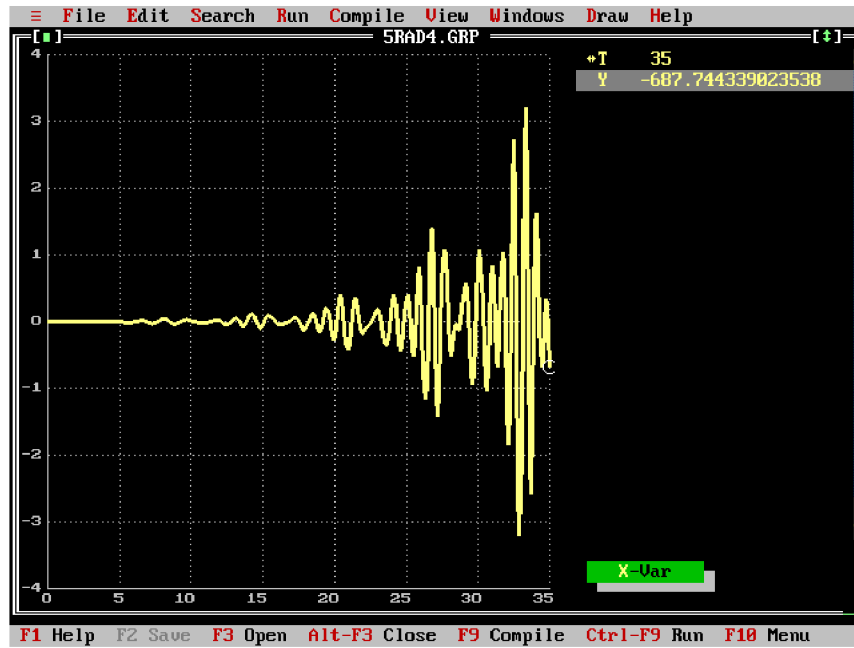
Obrázek 7.2: Vyhodnocený soubor pro diferenciální rovnici (7.2)

Parametry pro rovnici (7.5):

$$T_{max} = 30$$

$$dt = 0.1$$

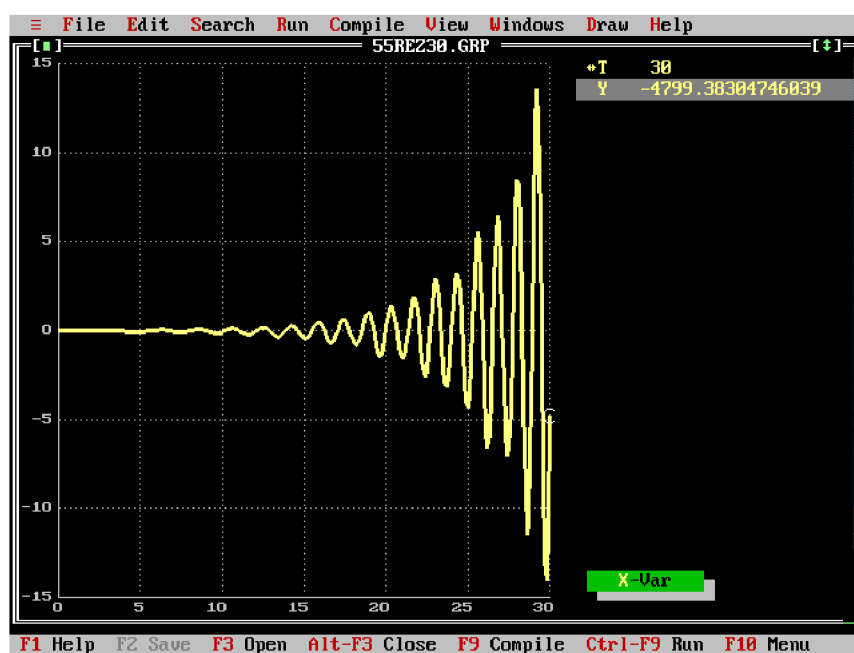
$$z = 1/e^t$$



Obrázek 7.3: Vyhodnocený soubor pro diferenciální rovnici (7.3)



Obrázek 7.4: Vyhodnocený soubor pro diferenciální rovnici (7.4)



Obrázek 7.5: Vyhodnocený soubor pro diferenciální rovnici (7.5)

# Kapitola 8

## Závěr

V první fázi projektu, bylo cílem seznámit se s metodami řešení diferenciálních rovnic. Vzhledem ke složitosti analytického řešení se diferenciální rovnice s časově proměnnými koeficienty v povinných matematických předmětech nevyučují, proto jsem musel danou problematiku nastudovat a osvěžit především derivační počty. Úkolem pak bylo nalézt vhodnou metodiku převodu diferenciálních rovnic vyšších řádů s časově proměnnými koeficienty na ekvivalentní soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu. Při realizaci tohoto požadavku bylo, z důvodu polofunkčnosti vybrané metody pro výsledný algoritmus, zapotřebí řešit stejná zadání diferenciálních rovnic metodami převodu pomocí schématu i binomické věty. Následně porovnávat dosažené výsledky a zkoumat tak odlišnosti jednotlivých metod. Na základě těchto poznatků pak navrhnout výsledný algoritmus převodu.

Ve druhé fázi projektu bylo nutné prověřit, zda se navržený algoritmus chová korektně i pro diferenciální rovnice vyšších řádů s časově proměnnými koeficienty obsahující umocněné goniometrické funkce. Po ověření správnosti výpočtu i u tohoto typu rovnic následovala implementace navrženého algoritmu.

Výsledkem této práce je tedy program, který, po zadání členů diferenciální rovnice vyšších řádů s časově proměnnými koeficienty a příčinných parametrů pro řešení dané rovnice, vygeneruje soubor (s ekvivalentní soustavou diferenciálních rovnic 1. řádu k zadávané diferenciální rovnici), jež je dále zpracovatelný pro program TKSL.

Časová náročnost při generování souborů je prakticky zanedbatelná. Při testování pro různá zadání diferenciálních rovnic nebylo znát, zda se transformuje diferenciální rovnice 2. či 20. řádu. Vyšší řád derivace zadávané rovnice tedy generování souboru nijak nezpomaluje.

Jakmile bude dokončena inovace programu TKSL/C, je možné projekt dále rozšířit o možnost, kdy se nebude jen generovat příčinný soubor, ale současně se tento soubor programem TKSL/C i vyhodnotí.

Pro samotného řešitele bylo přínosem prohloubení znalostí v matematické oblasti (především okruh diferenciálních rovnic) a zejména pak seznámení se s programem TKSL. Ten působí na první pohled velmi skromným dojmem, avšak ve skutečnosti se jedná o velmi silný matematický nástroj.

# Literatura

- [1] Kunovský, J.: *Modern Taylor Series Method [habilitační práce]*, Faculty of Engineering and Computer Science, Technical University of Brno, 1994.
- [2] Bartsch, H.: *Matematické vzorce*, SNTL, Praha, 1971.
- [3] Krupková, V., Studená, V.: *Matematická analýza 2*, Nakladatelství VUT v Brně, 1991.
- [4] Diblík, J., Baštinec, J.: *Matematika III*, ES VUT, Brno, 1991.
- [5] Haluzíková, A.: *Numerické metody*, Ediční středisko VUT, Brno, 1990.
- [6] Haška, J.: *Hybridní systémy*, SNTL, Praha, 1986.