UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Josef Lengsfeld

Analýza soutěže Matematický klokan, kategorie Kadet, z let 2016-2020

Olomouc 2025 vedoucí práce: doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a uvedl jsem v ní veškerou literaturu a ostatní informační zdroje, které jsem použil.

V Olomouci dne 22. 4. 2025

…………………….

vlastnoruční podpis

Poděkování

Děkuji svému vedoucímu panu doc. Mgr. Karlu Pastorovi Ph.D. za odborné vedení mé diplomové práce, poskytnutí rad, postřehů a materiálů potřebných pro vyhotovení práce. Dále bych chtěl poděkovat ZŠ Andělská Hora a ZŠ Bruntál Okružní za pomoc s testováním mnou vytvořených úloh.

Josef Lengsfeld

Obsah

Úvod

Tato diplomová práce je věnována analýze Matematického klokana z let 2016-2020 v úrovni Kadet, což odpovídá 8. a 9. ročníku základní školy a tercii s kvartou na osmiletých gymnáziích. V práci se budu věnovat jak statistické analýze výsledků, tak analýze vybraných úloh z každého ročníku, kde nabízím řešení úloh za 3 body, 4 body a 5 bodů. Celkově se bude jednat o 30 úloh k řešení, tedy 10 od každé bodové kategorie, kde se budu snažím nabízet několik možných způsobů řešení, na které by žáci mohli přijít.

Mimo analýzy soutěže se v práci také budu věnovat výzkumnému šetření, kde se pokusím otestovat žáky 8. a 9. ročníku na mnou vytvořené úlohy, které jsou vytvořeny na základě analýzy Matematického klokana. Výzkumné šetření pak podrobím analýze stejně, jako soutěž, tedy statistickému vyhodnocení získaných dat, ale současně také nabídnout možná řešení k úlohám.

V teoretické části se mimo představení soutěže Matematický klokan také budu věnovat vysvětlení statistických metod, které v práci využívám, a to pro lehčí pochopení interpretovaných dat. Veškeré statistické výpočty a vykreslování grafů pak budu provádět v aplikaci MS Excel, kde se po přidání možnosti analýzy dat dá vybrat test, který chceme provést, a data, na které má být test použit.

Téma jsem si záměrně vybral na statistiku, jelikož se jedná o disciplínu pro mnohé složitou a těžko uchopitelnou. Domnívám se však, že jejím použitím a správným a cíleným nastavením postupů z ní je možné získat přesné a relevantní údaje, které při správné aplikaci mohou být vysoce užitečné jak v pedagogické profesi, tak i mimo ni.

Teoretická část

1. Matematický klokan

Matematický klokan je mezinárodně koordinovaná soutěž, původem z Austrálie, kde vznikla v osmdesátých letech 20. století, do které je zapojeno přes 100 zemí, včetně České republiky, která měla svůj první ročník v roce 1995. (Dostupné z: https://www.aksf.org/countries.xhtml)

Soutěžící jsou zde rozdělení do 6 kategorií podle toho, v jakém ročníku právě žák je. Jmenovitě jde o kategorie CVRČEK, který je pro žáky 2.-3. třídy ZŠ, KLOKÁNEK, 4.-5. třída ZŠ, BENJAMÍN, 6.-7. třída ZŠ a 1.-2. ročník osmiletých gymnázií, KADET, 8.-9. třída ZŠ a 3.-4. ročník osmiletých gymnázií, JUNIOR, 1.-2. ročník SŠ a 5.-6. ročník osmiletých gymnázií, a STUDENT, 3.-4. ročník SŠ a 7.-8. ročník osmiletých gymnázií. Pravidla nabízejí, že se soutěžící může zúčastnit kategorie, která odpovídá jeho ročníku, anebo kategorie určené pro starší soutěžící. Soutěž probíhá ve všech krajích v jeden den, většinou v pátek ve třetím březnovém týdnu, a to jak na republikové, tak na krajské, okresní, školní a třídní úrovni. (Dostupné z: https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/02/OR_2023.pdf)

Účast v matematickém klokanu je u nás zadarmo, na rozdíl např. od Velké Británie, kde je potřeba zaplatit 4 libry za vstup.

1.1 Pravidla

Celkově máme 3 různá pravidla podle toho, v jaké kategorii se právě soutěží.

1.1.1 Pravidla pro kategorii Cvrček

Pro ty nejmenší je soutěž vytvořená ze sady 18 úloh, které jsou rozděleny na tři kategorie, a to:

1.-6. úloha za 3 body,

7.-12. úloha za 4 body,

13.-18. úloha za 5 bodů,

kde mají žáci čas 60 minut. Každá úloha obsahuje výběr z odpovědí A-E, kde je právě jedna odpověď správná, kterou zde žáci kroužkují přímo do zadání, jako jediná kategorie v celé soutěži. Za každou správnou odpověď dostanou body odpovídající úloze, pokud neodpoví vůbec, tak nedostanou ale ani neztratí bod, pokud odpoví špatně, tak se strhává 1 bod, a to u odpovědí s jakoukoliv obtížností.

Na začátku má každý žák 18 bodů, maximálním počtem je tedy 90 bodů a minimálním je 0 bodů, žádný žák se tedy nemůže dostat do záporných bodů ani při špatném zodpovězení všech otázek. Pravděpodobnost, že by se někomu povedlo zodpovědět všechno špatně, je zde 1,8 %. (Dostupné z: https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/02/pravidla_Cvrcek.pdf)

1.1.2 Pravidla pro kategorie Klokánek, Benjamín a Kadet

Pro tuto kategorii je vytvořeno 24 úloh, které jsou opět rovnoměrně rozděleny do tří kategorií:

1.-8. úloha za 3 body,

9.-16. úloha za 4 body,

17.-24. úloha za 5 bodů,

zde mají soutěžící k dispozici 60 minut pro řešení + 15 minut pro organizační záležitosti. Stejně jako u cvrčka je na výběr z odpovědí A-E, kde je právě jedna odpověď správně. V této kategorii už řešitelé správné odpovědi nepíší rovnou do zadání, ale zaznamenávají je do „karty odpovědí" křížkem do příslušného pole, zakřížkovaná odpověď může být nejvýše jedna. I v tomto případě, stejně jako u cvrčků, za správnou odpověď bude soutěžící odměněn odpovídajícím počtem bodů, za žádnou odpověď se nepřičte ani neodečte žádný bod a za špatnou odpověď se strhává 1 bod. Při řešení je soutěžícím zakázáno používat kalkulačku, tabulky ani jiná literatura.

V těchto kategoriích se začíná na 24 bodech, maximální dosažitelný počet bodů je pak 120 a minimální je 0. Pravděpodobnost na to, že bude každá odpověď špatná, je zde 0,47 %. (Dostupné z: https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/02/pravidla_Klokanek-Benjamin-Kadet.pdf)

1.1.3 Pravidla pro kategorie Junior a Student

Počet úloh v těchto kategoriích je stejný, jako u Klokana, Benjamína a Kadeta, a to 24, opět rozděleny to tří kategorií:

1.-8. úloha za 3 body,

9.-16. úloha za 4 body,

17.-24. úloha za 5 bodů,

rozdílem je to, že na řešení je zde 75 minut + 15 minut na organizační záležitosti. Pravidla jsou zde stejná, jako v předcházející kategorii. (Dostupné z: https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/02/pravidla_Junior-Student.pdf)

2. Metody statistického zpracování dat

V této kapitole budou představeny statistické nástroje, které budou dále v práci použity pro zpracování výsledků, ať už se bude jednat o data z Matematického klokana z let 2016-2020 v úrovni Kadet, tak o data z mnou připravených úloh otestovaných na ZŠ.

2.1 Tabulka četnosti

Jedním ze základních utřídění dat je tzv. **čárkovací metoda**. V té budeme pracovat s pěti různými daty, pro snazší orientaci použiji ilustrační příklad:

Příklad 1. Maminku od Kateřiny zajímalo, jak staré kamarády Katka má, každého se tedy zeptala a skončila s těmito 15 čísly: 22, 20, 24, 23, 21, 22, 24, 22, 20, 25, 22, 24, 20, 21, 22.

Věk	Počet lidí	Četnost n_i	Relativní četnost f_i	Kumulativní četnost
20	///	3	0,2	3
21	//	2	0,133	5
22	/////	5	0,333	10
23	/	1	0,067	11
24	///	3	0,2	14
25	/	1	0,067	15
		15	1	

Tabulka 1: Čárkovací metoda

Zde můžeme vidět, že prvním údajem je *VĚK*, to jsou hodnoty, které byly při měření dosaženy. Hodnoty zde uvádíme seřazené podle velikosti od nejmenší po největší. Druhý sloupec, *POČET LIDÍ*, slouží k zapsání pozitivního počtu v naměřených datech za pomocí čárek. Třetí sloupec, *ČETNOST,* je číselnou reprezentací čárkovacího počtu, značíme n_i. Čtvrtý sloupec, *RELATIVNÍ ČETNOST*, je podílem četnosti n_i a celkového počtu, značíme f_i. Vztah vypadá tedy následovně:

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

Součet všech relativních četností **musí** vždy být 1, popřípadě 100 %, pokud hodnoty uvádíme v procentech, toho docílíme tím, že vtah f_i vynásobíme 100. Poslední sloupec, *KUMULATIVNÍ ČETNOST*, slouží k vyjádření četnosti na určitém řádku tabulky a četnosti na řádcích předešlých. Když se tedy podíváme na třetí řádek s hodnotami, můžeme vidět v kumulativní hodnotě číslo 10, znamená to tedy, že 10 osob je ve věku 22 a níž. (Chráska 2016)

Tato metoda je dobrá a přehledná jenom za předpokladu, že nemáme mnoho řádků, pak by byla tabulka zbytečně zdlouhavá. Pro takové případy je mnohem lepší tzv. **intervalová metoda**. U té je doporučeno, aby byl počet řádků větší než 6, ale menší než 24. Je mnoho způsobů, jak volit intervaly, jedním z nejlepších je za pomocí empirického vzorce:

$$h \approx 0{,}08 \cdot R$$

nebo

$$\frac{R}{24} < h < \frac{R}{6}$$

kde h je hloubka intervalu a R je variační šíře, což je rozdíl mezi největší a nejmenší naměřenou hodnotou. Na co je potřeba dát pozor je to, že číslo h nemusí vyjít jako celé číslo, proto jej musíme vhodně zaokrouhlit. Poté u intervalů je potřeba se ujistit, že v nejvyšší a nejmenší hodnotě se skutečně někdo vyskytuje, mohlo by totiž poté dojít ke zkreslení výsledků. V neposlední řadě je dobré se ujistit, že intervaly máme skutečně stejně velké. Tabulka zde má pouze čtyři různé sloupce, pro lepší ilustraci použijeme opět příklad:

Příklad 2. Basketbalový tým si na začátku každé sezóny měří své hráče, letos naměřili tyto hodnoty: 152, 151, 179, 145, 179, 160, 175, 154, 170, 153, 154, 180, 171, 166, 148, 148, 149, 161, 146, 169, 161, 153, 148, 145, 140, 144, 145, 174, 180, 159, 163, 151, 180, 153, 152.

Výška	Četnost	Střed intervalu x_i	Kumulativní četnost n_i
140-142	1	141	1
143-145	4	144	5
146-148	4	147	9
149-151	3	150	12
152-154	7	153	19
155-157	0	156	19
158-160	2	159	21
161-163	3	162	24
164-166	1	165	25
167-169	1	168	26
170-172	2	171	28
173-175	2	174	30
176-178	0	177	30
179-180	5	179,5	35
	35		

Tabulka 2: Tabulka četností s intervalem

Největší hodnotou je 180, nejmenší pak 140. Variační šíře tady bude tedy 40

$$R = 180 - 140$$

Hloubka intervalu zde vyjde 3,2

$$h \approx 0{,}08 \cdot R$$

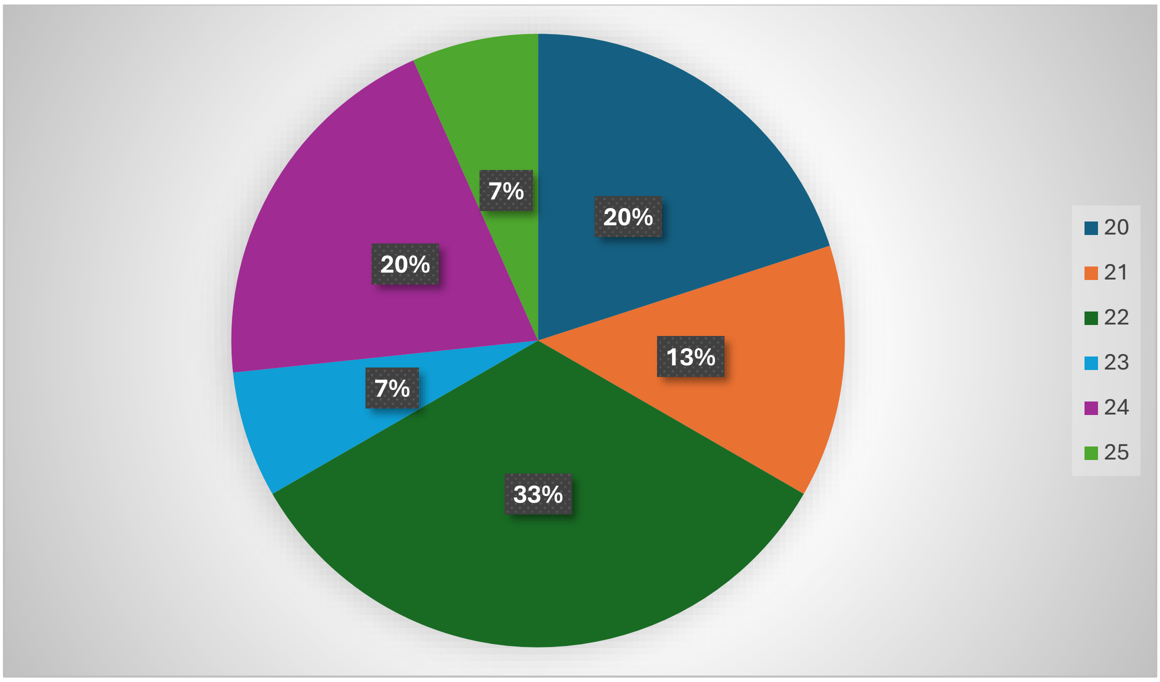
To zaokrouhlíme na 3, což vyhovuje i našemu druhému vzorci

$$\frac{36}{24} = 1{,}5 < 3 < \frac{40}{12} = 3{,}33$$

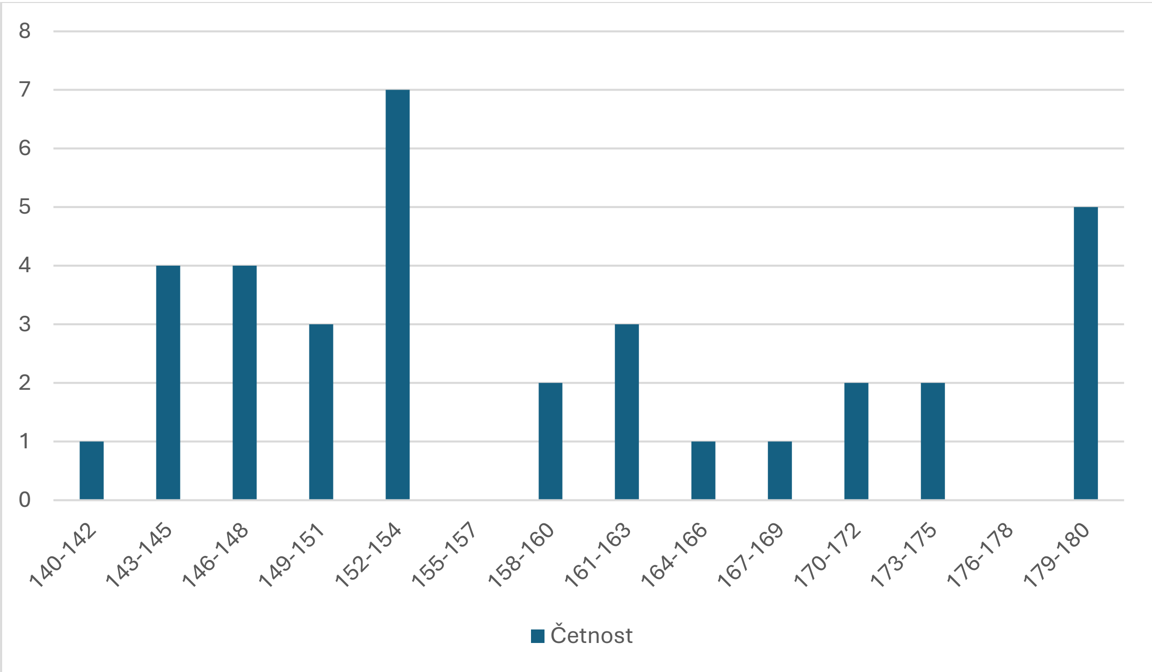
První sloupec tabulky jsou tedy intervaly výšek, kde v intervalu se nachází právě tři čísla, např. první interval, 140–142, obsahuje výšky 140, 141 a 142, tedy tři hodnoty. Druhý sloupec jsou četnosti, které již známe z předešlé metody. Třetí sloupec je střed intervalu, což je střední hodnota mezi nejvyšší a nejnižší hodnoty v intervalu. Jelikož v intervalové metodě nelze určit přesně hodnoty, tak předpokládáme, že hodnoty uvnitř intervalu jsou rozložené rovnoměrně se středem v polovině intervalu. Poslední sloupec je kumulativní četnost, kterou opět známe z předchozí metody. (Chráska 2016)

2.1.1 Grafické zobrazení četnostních tabulek

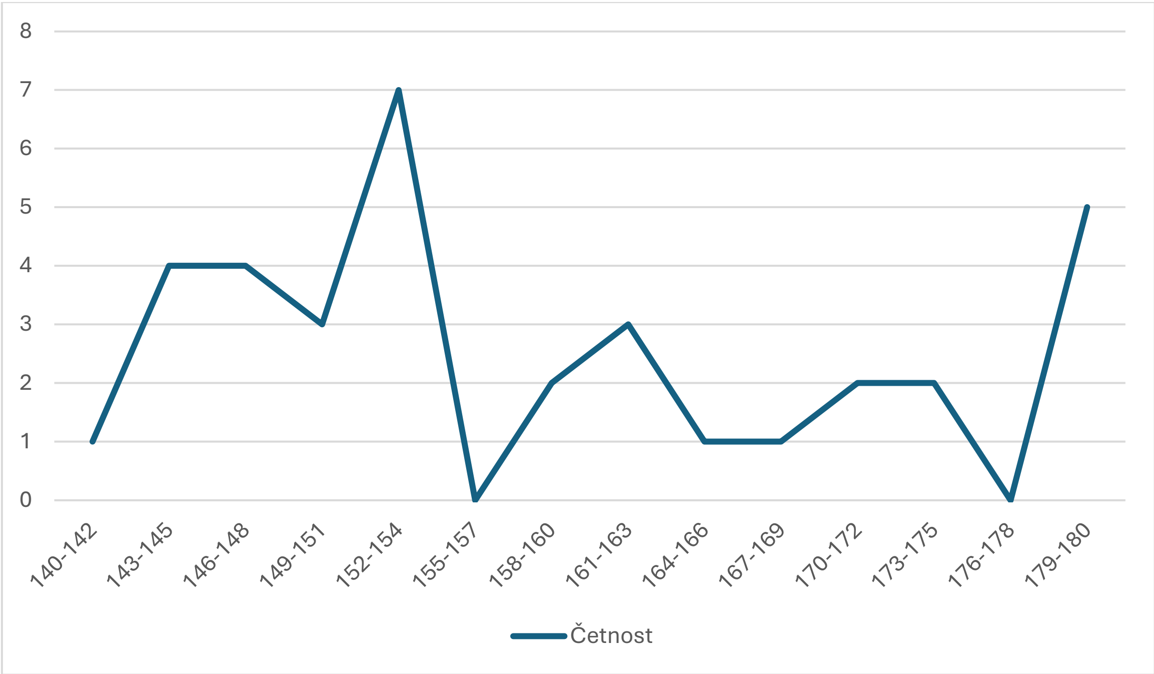
Grafické zobrazení slouží jako jakási vizuální reprezentantce dat, které jsou v četnostních tabulkách. K těmto účelům se používají např. **výsečové grafy, histogramy četnosti, polygony četnosti** apod. (Chráska 2016)



Obrázek 1: Výsečový graf příkladu 1



Obrázek 2: Histogram příkladu 2



Obrázek 3: Polygon četnosti příkladu 2

2.2 Charakteristiky polohy

Pokud zpracováváme nějakou sadu dat, tak zpravidla chceme všechna naměřená data výstižně a stručně uvést. V našem případě budeme užívat **aritmetický průměr, modus a medián**. (Chráska 2016)

2.2.1 Aritmetický průměr

S aritmetickým průměr se setkal snad každý, zpravidla se to děti naučí ve škole, když se snaží vypočítat si svou známku z nějakého předmětu. Principem aritmetického průměru je sečíst všechny naměřené hodnoty dohromady a toto číslo poté vydělit počtem naměřených hodnot, základní vzorec vypadá tedy takto:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

kde n je celkový počet hodnot, x_i, kde i = 1, 2, 3, …, n, jsou jednotlivé naměřené hodnoty. Součet ale můžeme zapsat i za pomocí sumy, vzorec se poté změní takto:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Pro demonstraci můžeme použít ilustrační příklad číslo 1.

$$\bar{x} = \frac{20 + 20 + 20 + 21 + 21 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 23 + 24 + 24 + 24 + 25}{15}$$

$$\bar{x} = \frac{332}{15} = 22{,}133 \cong 22{,}13$$

Tady by byl průměrný věk 22,13 let, při zaokrouhlení na celé číslo potom 22 let. (Chráska 2016)

2.2.2 Modus

Někdy chceme určit alespoň přibližnou charakteristickou polohu z daného souboru dat, k tomu nám může postačit modus, který nám říká, jaká hodnota se v celém našem celku vyskytuje nejčastěji, tj. má největší četnost. (Chráska 2016)

Pokud hodnoty z tabulky jsou jasné, tj. nejsou v žádném intervalu, tak je modus jednoduchý a rychle k nalezení. (Chráska 2016)

Podíváme se opět na příklad číslo 1. Stačit nám k tomu budou první dva sloupce, resp. tři z tabulky, tedy:

Věk	Počet lidí	Četnost n_i
20	///	3
21	//	2
22	/////	5
23	/	1
24	///	3
25	/	1

Tabulka 3: První tři sloupce příkladu 1

Tady tedy vidíme, že nejčastější hodnota je 22, modus je tedy $\hat{x} = 22$.

Pokud pracujeme s intervalem, pak je modem střední hodnota intervalu, pro demonstraci použijeme ilustrační příklad číslo 2:

Výška	Četnost	Střed intervalu x_i
140-142	1	141
143-145	4	144
146-148	4	147
149-151	3	150
152-154	7	153
155-157	0	156
158-160	2	159
161-163	3	162
164-166	1	165
167-169	1	168
170-172	2	171
173-175	2	174
176-178	0	177
179-180	5	179,5

Tabulka 4: První tři sloupce příkladu 2

Zde si můžeme všimnout, že nejčastější hodnoty jsou na intervalu 152-154 s četností 7. Neznáme přesné hodnoty, proto použijeme střední interval x_i jako naši hodnotu, modus tedy bude $\hat{x} = 153$. Pokud bychom neuvažovali intervaly, ale vzali bychom sadu všech 35 naměřených výšek, tak by modem bylo 145.

2.2.3 Medián

Medián je prostřední hodnotou z řady, která je seřazená od nejmenšího po největší. Tato hodnota rozděluje data na dvě stejné části. (Chráska 2016)

Pokud jsou hodnoty z tabulky jasné, jako v příkladu 1, tak musíme hodnoty seřadit a zjistit prostřední hodnotu:

22, 20, 24, 23, 21, 22, 24, 22, 20, 25, 22, 24, 20, 21, 22 seřadíme na 20, 20, 20, 21, 21, 22, 22, 22, 22, 22, 23, 24, 24, 24, 25. Máme celkem 15 hodnot, tudíž prostřední hodnota je na pozici 8, což je 22, medián je tedy $\tilde{x} = 22$.

Pokud by se jednalo o intervalovou metodu, tak je možno medián určit za pomocí tohoto vzorce:

$$\tilde{x} = L + h \cdot \frac{\frac{n}{2} - n_k}{n_m}$$

kde *L* je dolní hranice tzv. kritického intervalu, *h* je hloubka intervalů, *n* je celkový počet hodnot, n_k je kumulativní četnost před dolní hranicí a n_m je četnost kritického intervalu. Kritický interval je takový interval, ve kterém se nachází medián. (Chráska 2016)

Pro demonstraci použijeme ilustrační příklad 2.

Výška	Četnost	Střed intervalu x_i	Kumulativní četnost n_i
140-142	1	141	1
143-145	4	144	5
146-148	4	147	9
149-151	3	150	12
152-154	7	153	19
155-157	0	156	19
158-160	2	159	21
161-163	3	162	24
164-166	1	165	25
167-169	1	168	26
170-172	2	171	28
173-175	2	174	30
176-178	0	177	30
179-180	5	179,5	35

Tabulka 5: Intervalová metoda

Celkově zde máme 35 hodnot, medián by tedy měl být na pozici 18, což se nachází na intervalu 152-154. Dolní hranice intervalu je tedy 152, kumulativní hodnota před dolní hranicí je 12, hloubka intervalu je 3 a četnost kritického intervalu je 7. Když dosadíme, tak dostaneme následující:

$$\tilde{x} = 152 + 3 \cdot \frac{\frac{35}{2} - 12}{7} = 154{,}357 \cong 154{,}4$$

2.3 Charakteristika rozptylu

Charakteristiky polohy nám pomůžou k základnímu porozumění naměřených dat, nic nám ale neříkají o tom, jak jsou jednotlivé hodnoty nakupeny či rozptýleny ke střední hodnotě. Mezi takovéto metody se řadí **rozptyl či směrodatná odchylka**. (Chráska 2016)

2.3.1 Rozptyl

K tomu, abychom byly schopni vypočítat směrodatnou odchylku, budeme potřebovat aritmetický průměr, který jsme si představili v předešlé charakteristice. Rozptyl je aritmetický průměr čtverců odchylek od aritmetického průměru. Znamená to tedy to, že pro každou naměřenou hodnotu zjistíme, o kolik se liší od aritmetického průměru měřených dat, tento rozdíl pak umocníme na druhou. Vzorec tedy vypadá následovně:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

(Chráska 2016)

Pro příklad 1 by tedy směrodatná odchylka vypadala následovně:

$$\sigma^2 = \frac{2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2}{15}$$

$$\sigma^2 = \frac{12 + 2 + 1 + 12 + 9}{15} = \frac{36}{15} = 2{,}4$$

2.3.2 Směrodatná odchylka

Směrodatná odchylka přímo navazuje na rozptyl, jelikož její výpočet je druhou odmocninou rozptylu, vzorec je tedy takovýto:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

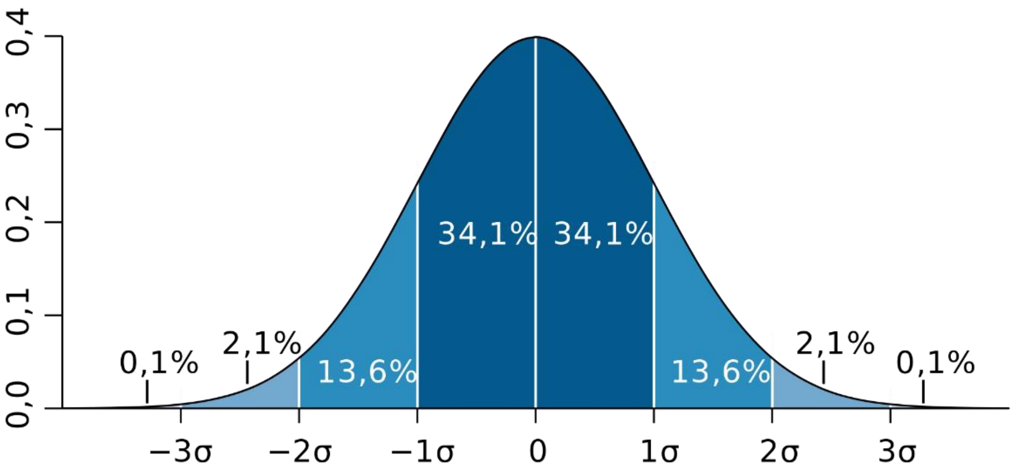
Směrodatná odchylka pro ilustrační příklad 1 by tedy byla následující:

$$\sigma = \sqrt{2{,}4} \cong 1{,}55$$

(Chráska 2016)

2.4 Normální rozdělení

Při výzkumu si můžeme častokrát všimnout, že naše naměřená data mají největší zastoupení okolo průměrné hodnoty, poté jejich početnost klesá na obě strany a extrémy na obou koncích mají minimální zastoupení. K této empirické zákonitosti lze vykreslit graf pomocí křivky se zvonovitým tvarem, této křivce pak říkáme **Gaussova křivka**. (Chráska 2016)



Obrázek 4: Gaussova křivka

(https://cs.wikipedia.org/wiki/Norm%C3%A1ln%C3%AD_rozd%C4%9Blen%C3%AD)

Jak si můžeme všimnout, tak Gaussova křivka je souměrná podle svého středu, který prochází svým vrcholem, kterým je aritmetický průměr naměřených dat. Za povšimnutí také stoji procentuální zastoupení v jednotlivých intervalech, kde platí:

- v intervalu od -σ do + σ, což je okolí aritmetického průměru, by se měly nacházet přibližně $\frac{2}{3}$ všech naměřených hodnot, procentuálně tedy 68,27 %.
- v intervalu -2σ až 2σ by se už mělo nacházet přibližně $\frac{19}{20}$ naměřených hodnot, procentuálně 95,4 %.
- v intervalu -3σ až 3σ by se pak mělo nacházet až 99,73 % procent (Chráska 2016)

Z naměřených dat jsme také schopni vypočítat pravděpodobnost, s jakou by se mohla vyskytnout určitá hodnota x, užíváme k tomu tzv. **hustotu pravděpodobnosti** $f(x)$, pro kterou platí následující vztah:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

kde $\bar{x}$ je aritmetický průměr naměřených hodnot, σ je směrodatná odchylka, π je Ludolfovo číslo (3,14159…), e je základ přirozeného logaritmu (2,71282…) a x je hodnota, pro kterou určujeme pravděpodobnost. (Chráska 2016)

Kromě pravděpodobnosti určité hodnoty x jsme také schopni vypočítat pravděpodobnost, s jakou dosáhneme hodnoty x anebo hodnot menších. K tomu se používá tzv. **distribuční funkce normálního rozdělení** $F(x)$, kterou lze vyjádřit následovně:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx$$

Tyto výpočty jsou ale zdlouhavé a pracné, proto se na místo výpočtů používají statistické tabulky, pro které je důležité znát tzv. **normovanou normální veličinu** u, kterou lze dostat pomocí vztahu:

$$u = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

kde $\bar{x}$ je aritmetiky průměr, x je hodnota, pro kterou určujeme pravděpodobnost, a σ je směrodatná odchylka. (Chráska 2016)

Pro normovanou normální veličinu poté najdeme v tabulkách její **distribuční funkci** $\phi(u)$. Tabulky jsou dostupné např. na stránkách https://math.fce.vutbr.cz/~halfarova/tabulky.pdf.

2.5 Fisherův-Snedecorův F-test

U mnoha statistických analýz je potřeba vědět, jestli je přibližně stejně velký rozdíl mezi rozptylem dat u dvou skupin. K takovému účelu slouží Fisherův-Snedecorův F-test, u kterého se významnosti rozptylu posuzují pomocí testového kritéria F, kterého dosáhneme následovně:

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{\sum(x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{\sum(x_{2i} - \bar{x}_2)^2} \cdot \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1}$$

kde $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ je větší ze dvojice rozptylů a $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ je menší ze dvou rozptylů, x_{1i} a x_{2i} jsou jednotlivé hodnoty ve svých skupinách, $\bar{x}_1$ a $\bar{x}_2$ jsou aritmetické průměry skupin, n_1a n_2 jsou četnosti ve svých skupinách. (Chráska 2016)

Demonstraci F-testu provedeme na příkladu 5.

Příklad 5. Stejný test z matematiky psala 9.A a 9.B, dosažené body jsou následující:

Třída 9.A: 15, 1, 12, 9, 8, 6, 7, 13, 10, 3, 11, 4, 9, 8, 7

Třída 9.B: 14, 2, 3, 15, 14, 6, 7, 8, 9, 5, 4, 12, 13

A		
Žák číslo	Body	$(x_{1i} - \bar{x}_1)^2$
1	15	46,24
2	1	51,84
3	12	14,44
4	9	0,64
5	8	0,04
6	6	4,84
7	7	1,44
8	13	23,04
9	10	3,24
10	3	27,04
11	11	7,84
12	4	17,64
13	9	0,64
14	8	0,04
15	7	1,44
	123	200,4

B		
Žák číslo	Body	$(x_{2i} - \bar{x}_2)^2$
1	14	29,16
2	2	43,56
3	3	31,36
4	15	40,96
5	14	29,16
6	6	6,76
7	7	2,56
8	8	0,36
9	9	0,16
10	5	12,96
11	4	21,16
12	12	11,56
13	13	19,36
	112	249,08

Tabulka 6: Tabulka potřebných hodnot pro F-test k příkladu 5

H_0: Rozptyl výsledků ve třídě A je stejný jako rozptyl výsledků ve třídě B
H_1: Rozptyl výsledků ve třídě A není stejný jako rozptyl výsledků ve třídě B

Průměr pro třídu 9.A $\overline{x_1} = 8{,}2$, průměr 9.B $\overline{x_2} = 8{,}6$. Nyní můžeme dosadit do vzorce – POZOR, suma rozptylu je u třídy B větší, proto dosadíme do čitatele právě rozptyl třídy B:

$$F = \frac{249{,}08}{200{,}4} \cdot \frac{14}{12} \cong 1{,}45$$

K vypočtené hodnotě $F = 1{,}45$ musíme najít její kritickou hodnotu F_{krit}, kterou najdeme ve statistických tabulkách, např. na https://k101.unob.cz/stat1/tabulky.pdf, kde za $v_1 = n_1 - 1$ a $v_2 = n_2 - 1$, pro náš příklad je tedy $F_{krit}(12{,}14) \cong 2{,}53$.

Pokud je vypočtená hodnota F menší, než kritická hodnota F_{krit}, tak nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu a tím pádem můžeme provádět další testy, jako je například studentův t-test, pro který je potřeba, abychom v F-testu nemohli zamítnou nulovou hypotézu.

V našem případě je $F < F_{krit}$, nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu a říkáme, že rozptyl výsledků ve třídě A je stejný jako rozptyl výsledků ve třídě B. Díky tomu, že v F-testu nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu, tak můžeme na těchto datech provést studentův t-test.

2.6 Kolmogorov-Smirnovův test

Kolmogorův-Smirnovův test slouží k tomu, abychom posoudili rozdíl ve složení dvou skupin. Test je založen na srovnávání distribučních funkcí ve dvou výběrech, musí se však jednat o tzv. spojité náhodné veličiny, při použití u diskrétních náhodných veličin klesá jeho účinnost. Distribuční funkce $F(x)$ je pravděpodobnost, že daná veličina dosahuje určité anebo nižší hodnoty. Testové kritérium D je zde založeno na zkoumání absolutní hodnoty největšího rozdílu v distribuční funkci $F_1(x)$ a největšího rozdílu v distribuční funkci $F_2(x)$, vztah je tedy následovný:

$$D_{max} = \max |F_1(x) - F_2(x)|$$

(Chráska 2016)

Test si opět demonstrujeme na příkladu 5.

Body seřazeno		Relativní četnost	Kumulativní četnost	Distribuční funkce	Diference
	x<1	0	0		
1	1≤x<3	0,066667	0,066667	0,028518	0,038149
3	3≤x<4	0,066667	0,133333	0,084656	0,048677
4	4≤x<6	0,066667	0,2	0,133477	0,066523
6	6≤x<7	0,066667	0,266667	0,280457	-0,01379
7					
7	6≤x<8	0,133333	0,4	0,375556	0,024444
8					
8	8≤x<9	0,133333	0,533333	0,478921	0,054412
9					
9	9≤x<10	0,133333	0,666667	0,583731	**0,082935**
10	10≤x<11	0,066667	0,733333	0,682877	0,050456
11	11≤x<12	0,066667	0,8	0,770372	0,029628
12	12≤x<13	0,066667	0,866667	0,842403	0,024264
13	13≤x<15	0,066667	0,933333	0,897725	0,035609
15	15≤x	0,066667	1	0,963857	0,036143

Tabulka 7: Tabulka ke K-S testu pro třídu A příkladu 5

Body seřazeno		Relativní četnost	Kumulativní četnost	Distribuční funkce	Diference
	x<2				
2	2≤x<3	0,076923	0,076923	0,073245	0,003678
3	3≤x<4	0,076923	0,153846	0,108873	0,044974
4	4≤x<5	0,076923	0,230769	0,155518	0,075251
5	5≤x<6	0,076923	0,307692	0,213727	0,093965
6	6≤x<7	0,076923	0,384615	0,282963	**0,101652**
7	7≤x<8	0,076923	0,461538	0,361457	0,100082
8	8≤x<9	0,076923	0,538462	0,446277	0,092184
9	9≤x<12	0,076923	0,615385	0,53364	0,081745
12	12≤x<13	0,076923	0,692308	0,771231	-0,07892
13	13≤x<14	0,076923	0,769231	0,832076	-0,06285
14					
14	14≤x<15	0,153846	0,923077	0,881376	0,041701
15	15≤x	0,076923	1	0,919451	0,080549

Tabulka 8: Tabulka ke K-S testu pro třídu B příkladu 5

Pro to, ať vůbec můžeme sestrojit tabulku, musíme prvně seřadit počet bodů od nejmenšího po největší, to nám reprezentuje první sloupec tabulky, ve druhém sloupci můžeme vidět pro která *x* zbylá data právě platí. Ve třetím sloupci vidíme, kolik lidí dosáhlo právě tohoto počtu bodů. Ve čtvrtém sloupci pak vidíme, kolik lidí dosáhlo na tento daný počet či méně. Pátý sloupec nám říká, kolik lidí by podle distribuční funkce mělo mít daný počet bodů či méně. Poslední sloupec je rozdílem čtvrtého a pátého sloupce, tedy kumulativní četnosti a distribuční funkce.

Nyní hledáme největší diferenci pro obě skupiny, ve třídě A je největší diference $d_1 = 0{,}082935$ a ve třídě B je to pak $d_2 = 0{,}1016524$. Tyto diference porovnáme s kritickou hodnotou na hladině 0,05, kterou můžeme vyčíst z tabulek. Pro skupinu A je $D_{0,05} = 0{,}338$ a pro skupinu B je $D_{0,05} = 0{,}361$. Obě skupiny mají naměřenou diferenci menší než kritickou hodnotu, tudíž oba vzorky mohou pocházet z normálního rozdělení. (Pavlík 2005)

Pokud se podíváme do tabulek pro kritické hodnoty u Kolmogorov-Smirnovova testu, tak si můžeme všimnout, že jsou zde hodnoty jenom pro $n \leq 60$, což později u testování různých ročníků Matematického klokana nebude moc užitečné, jelikož počet testovaných bude v řádech tisíců, proto musíme použít vzorec, který je pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ následující:

$$D_{krit} = \frac{1{,}3581}{\sqrt{n}}$$

Pokud bychom chtěli testovat na hladině významnosti $\alpha = 0{,}01$, pak by vzorec pro kritickou hodnotu vypadal následovně:

$$D_{krit} = \frac{1{,}62762}{\sqrt{n}}$$

(Pavlík 2005)

2.7 Studentův t-test

Jeden z nejznámějších statistických testů pro srovnání dvou souborů dat, studentův t-test. Zjišťujeme pomocí něj, jestli dvě rozdílné skupiny mají stejný aritmetický průměr. Vzorec pro jeho výpočet vypadá následovně:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$$

kde $\bar{x}_1$ je aritmetický průměr skupiny 1, $\bar{x}_2$ je aritmetický průměr skupiny 2, n_1 a n_2 jsou četnosti ve skupinách a σ je směrodatná odchylka, kterou dostaneme z tzv. **nestranného rozptylu**, který vypočteme následovně:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left[\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 \right]$$

kde x_{1i} a x_{2i} jsou jednotlivé naměřené hodnoty v obou skupinách. Z toho vztahu je potom výpočet směrodatné odchylky σ následující:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

(Chráska 2016)

Jelikož studentův t-test patří mezi tzv. parametrické testy, tak musí splňovat jisté vymezené podmínky, kterými jsou:

- základní soubor musí splňovat požadavek normálního rozdělení, zjistíme např. pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu;
- musí být dodržen požadavek homogenity rozptylu v obou srovnávacích skupinách, tj. že rozptyl musí být v obou skupinách přibližně stejný, zjistíme např, pomocí F-testu;
- měření musí být navzájem nezávislá;
- data byla metrická, tedy intervalová nebo poměrová. (Chráska 2016)

Pokud by data nesplňovala podmínky uvedeny výše, tak bychom neměli použít parametrický studentův t-test, ale nějaký z neparametrických testů, jako je např. U-test. (Chráska 2016)

Pro demonstraci použijeme studentův t-test na příklad 5.

Pokusíme se zjistit, jestli průměr třídy A a B je stejný či nikoli.

A		
Žák číslo	Body	$(x_{1i} - \bar{x}_1)^2$
1	15	46,24
2	1	51,84
3	12	14,44
4	9	0,64
5	8	0,04
6	6	4,84
7	7	1,44
8	13	23,04
9	10	3,24
10	3	27,04
11	11	7,84
12	4	17,64
13	9	0,64
14	8	0,04
15	7	1,44
	123	200,4

B		
Žák číslo	Body	$(x_{2i} - \bar{x}_2)^2$
1	14	29,16
2	2	43,56
3	3	31,36
4	15	40,96
5	14	29,16
6	6	6,76
7	7	2,56
8	8	0,36
9	9	0,16
10	5	12,96
11	4	21,16
12	12	11,56
13	13	19,36
	112	249,08

Tabulka 9: Tabulka pro studentův t-test k příkladu 5

H_0: Průměrný počet bodů získaných žáky A a B je stejný
H_1: Průměrný počet bodů získaných žáky A a B není stejný

Průměr pro třídu 9.A $\overline{x_1} = 8{,}2$, průměr 9.B $\overline{x_2} = 8{,}6$. Můžeme tedy vypočítat nestranný odhad rozptylu:

$$\sigma^2 = \frac{1}{15 + 13 - 2}[200{,}4 + 249{,}08] \cong 17{,}29$$

$$\sigma \cong 4{,}16$$

Hodnota studentova t-testu tedy bude:

$$t = \frac{8{,}2 - 8{,}6}{4{,}16}\sqrt{\frac{15 \cdot 13}{15 + 13}} \cong -0{,}25$$

Vypočítanou hodnotu t nyní srovnáme s kritickou hodnotou pro studentův t-test, které jsou ve statistických tabulkách, např. na https://cit.vfu.cz/statpotr/POTR/Teorie/tabulky.htm#ttest, kde stupeň volnosti vypočteme jako $f = n_1 + n_2 - 2$ a hladinu významnosti zvolíme 0,05. $t_{krit} \cong 2{,}06$.

Pokud je vypočtená hodnota t menší než kritická hodnota t_{krit}, tak nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu. V našem příkladu platí, že $t < t_{krit}$, tudíž nulovou hypotézu nemůžeme zamítnout a říkáme, že průměrný počet bodů získaných žáky ze třídy A a B je stejný.

2.8 Bartlettův test homogenity rozptylu

Bartlettův test homogenity rozptylu slouží k posouzení rovnosti rozptylů v různých populacích. V některých testech, jako například u ANOVA testu, používáme takové data, u kterých předpokládáme, že mají statisticky stejný rozptyl. Nulová hypotéza je tedy vždy stejná, a to:

$$H_0: Rozptyly\ skupin\ jsou\ stejné.$$

Alternativní hypotéza je tedy potom následující:

$$H_1: Rozptyly\ skupin\ nejsou\ stejné.$$

Hodnotu Bartlettova testu dostaneme pomocí následujícího vzorce:

$$B = \frac{(N-k)\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)s_i^2}{N-k}\right) - \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\ln(s_i^2)}{1 + \frac{1}{3(k-1)}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i-1}\right) - \frac{1}{N-k}\right]}$$

kde N odpovídá součtu všech velikostí vzorků, k je počet skupin, n_i je počet pozorování ve skupině i a s_i^2 je rozptyl skupiny i. Vypočtenou hodnotu B potom porovnáváme s kritickou hodnotou B_{krit}, která je stejná jako u testu chí-kvadrát se stupněm volnosti $k-1$. Nulovou hypotézu zamítáme tehdy, pokud je výsledná hodnota B větší než kritická hodnota B_{krit} (Arsham 2011)

Příklad 6. Soutěže se zúčastnily tři školy, kde za školu A dosáhli žáci těchto bodů: 1 2 4 5 7 8 9, za školu B dosáhli žáci těchto bodů: 0 1 1 3 4 4 6 9 9 a za školu C žáci dosáhli těchto bodů: 2 2 3 3 3 5 6 7 7 10.

Skupina	Získané body	Počet žáků	Celkový počet bodů	Aritmetický průměr
A	1 2 4 5 7 8 9	7	36	5,14
B	0 1 1 3 4 4 6 9 9	9	37	4,11
C	2 2 3 3 3 5 6 7 7 10	10	48	4,8
		26	121	

Tabulka 10: Tabulka k příkladu 6

V tomto příkladu je $N = 26$, $k = 3$, $n_1 = 7$, $n_2 = 9$, $n_3 = 10$, $s_1^2 = 9{,}14$, $s_2^2 = 11{,}11$ a $s_3^2 = 7{,}07$. Hodnota našeho testu je tedy následující:

$$B = \frac{(26-3)\cdot \ln\left(\frac{6\cdot 9{,}14 + 8\cdot 11{,}11 + 9\cdot 7{,}07}{26-3}\right) - [6\cdot \ln(9{,}14) + 8\cdot \ln(11{,}11) + 9\cdot \ln(7{,}07)]}{1 + \frac{1}{3\cdot 2}\cdot (\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{26-3})}$$

$$B = \frac{23\cdot \ln\left(\frac{207{,}35}{23}\right) - [6\cdot \ln(9{,}14) + 8\cdot \ln(11{,}11) + 9\cdot \ln(7{,}07)]}{1 + \frac{1}{6}\cdot \frac{276+207+184-72}{1656}}$$

$$B = \frac{50{,}58 - 50{,}14}{\frac{10531}{9936}}$$

$$B = \frac{0{,}44\cdot 9936}{10531}$$

$$B \doteq 0{,}42$$

Kritická hodnota se stupněm volnosti 2 je podle Chrásky $B_{krit} = 5{,}99$. A jelikož $B < B_{krit}$, tak nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu a říkáme, že rozptyly skupin jsou stejné. (Chráska 2016)

2.9 ANOVA

Analýza rozptylu, anglicky **an**alysis **o**f **va**riace, je metoda matematické statistiky, která nám umožňuje ověřit to, jestli na hodnotu náhodné veličiny pro určitého jedince má statisticky významný vliv hodnota nějakého znaku, který se dá u jedince pozorovat. Výhodou oproti t-testu je to, že zde může být více než dvě skupiny. Vzorec vypadá potom následovně:

$$F = \frac{R_m}{R_u}$$

kde R_m je **rozptyl mezi skupinami** a R_u je **rozptyl uvnitř skupin**. (Chráska 2016)

Pro demonstraci si vypočteme test ANOVA na příkladu 6.

Skupina	Získané body	Počet žáků	Celkový počet bodů	Aritmetický průměr
A	1 2 4 5 7 8 9	7	36	5,14
B	0 1 1 3 4 4 6 9 9	9	37	4,11
C	2 2 3 3 3 5 6 7 7 10	10	48	4,8
		26	121	

Tabulka 11: Tabulka k příkladu 6

H_0: Střední hodnoty bodů žáků ze všech tří škol se statisticky neliší.

H_1: Střední hodnoty bodů žáků alespoň jedné ze tří škol se statisticky liší.

Budeme potřebovat **součet čtverců uvnitř skupiny** $S_u = a + b + c$, kde $a = \sum(x_{1a} - \bar{x}_a)^2$, $b = \sum(x_{1b} - \bar{x}_b)^2$ a $c = \sum(x_{1c} - \bar{x}_c)^2$. Dále budeme potřebovat **celkový součet čtverců** $S_c = \sum(x_i - \bar{x})^2$, kde x_i jsou postupně všechny dosažené body všemi skupinami a $\bar{x}$ je celkový aritmetický průměr. Z těchto dvou hodnot jsme následně schopni vypočítat **součet čtverců mezi skupinami** $S_m = S_c - S_u$

$$S_u \cong 207{,}35$$

$$S_c \cong 211{,}88$$

$$S_m = 4{,}53$$

Nyní už jsme schopni získat $R_m = \frac{S_m}{d_m}$, kde d_m je počet skupin mínus jedna, a $R_u = \frac{S_u}{d_u}$, kde d_u je počet žáků mínus počet skupin. (Chráska 2016)

$$R_m = \frac{4{,}53}{2} \cong 2{,}27$$

$$R_u = \frac{207{,}35}{26 - 3} \cong 9{,}02$$

Teď už jenom dosadíme do vzorce $F = \frac{R_m}{R_u} \cong 0{,}25$. Potřebujeme ještě zjistit kritickou $F(d_m, d_u)$ hodnotu, kterou zjistíme ze stejných tabulek jako u F-testu. Najdeme tedy, že $F_{0,05}(2{,}23) = 3{,}42$.

Protože kritická hodnota je vyšší než vypočítaná hodnota, tak nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu a říkáme, že střední hodnoty bodů žáků ze všech tří škol se statisticky neliší.

Praktická část

3. Statistické zpracování zveřejněných údajů

Tato část bude věnována Matematickému klokanu, konkrétně úrovni Kadet z let 2016-2020. Pro každý ročník zde bude provedena popisná statistika, graf četnosti získaných bodů a Kolmogorov-Sminovův test, pomocí kterého vyhodnotíme, zdali jde u získaných bodů o normální rozdělení.

3.1 Matematický klokan, sborník 2016

Tohoto ročníku se zúčastnilo celkově 62 953 řešitelů, dosažené body byly následující:

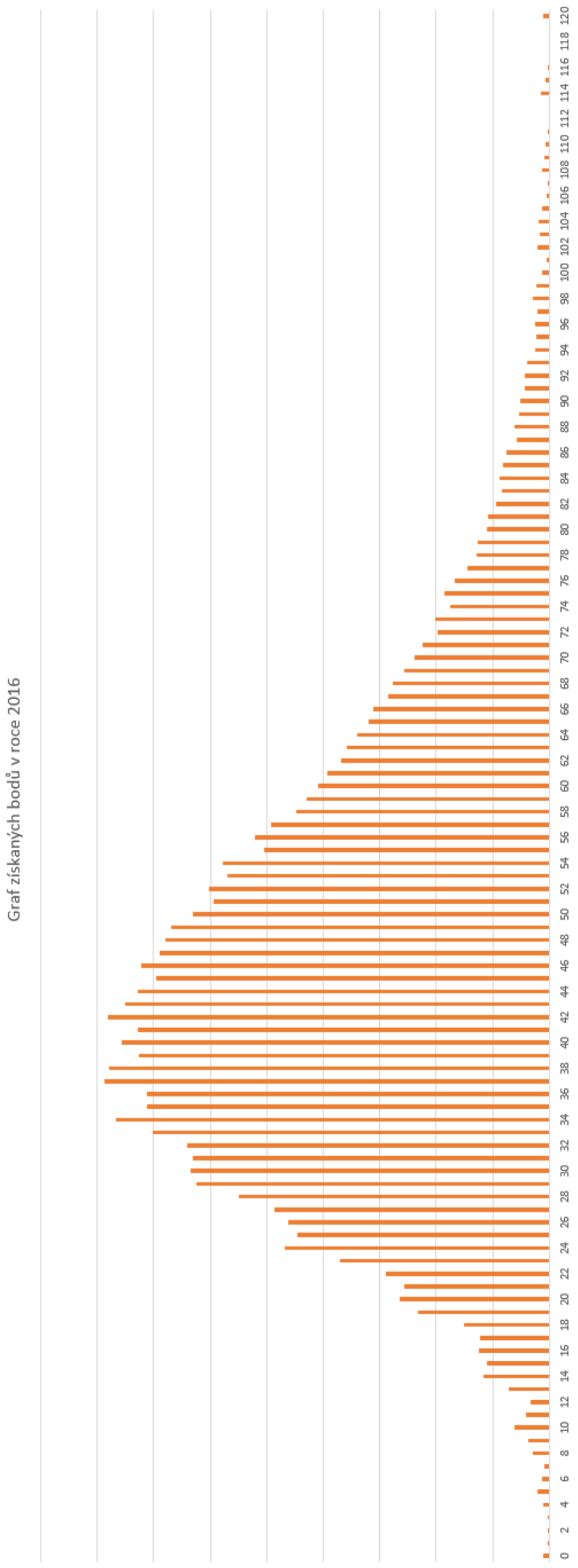
120	22	**96**	49	**72**	397	**48**	1359	**24**	935
119	X	**95**	44	**71**	447	**47**	1380	**23**	742
118	X	**94**	48	**70**	477	**46**	1446	**22**	577
117	0	**93**	78	**69**	513	**45**	1391	**21**	514
116	5	**92**	86	**68**	553	**44**	1457	**20**	529
115	12	**91**	85	**67**	569	**43**	1502	**19**	466
114	28	**90**	104	**66**	623	**42**	1564	**18**	301
113	0	**89**	107	**65**	641	**41**	1458	**17**	247
112	0	**88**	122	**64**	680	**40**	1512	**16**	249
111	6	**87**	117	**63**	716	**39**	1451	**15**	220
110	15	**86**	151	**62**	737	**38**	1559	**14**	231
109	17	**85**	163	**61**	784	**37**	1574	**13**	144
108	24	**84**	175	**60**	818	**36**	1423	**12**	68
107	2	**83**	166	**59**	857	**35**	1425	**11**	81
106	10	**82**	189	**58**	896	**34**	1535	**10**	124
105	27	**81**	216	**57**	986	**33**	1403	**9**	76
104	37	**80**	222	**56**	1042	**32**	1283	**8**	59
103	32	**79**	254	**55**	1008	**31**	1262	**7**	17
102	42	**78**	257	**54**	1157	**30**	1268	**6**	26
101	10	**77**	290	**53**	1138	**29**	1248	**5**	40
100	27	**76**	333	**52**	1205	**28**	1098	**4**	20
99	44	**75**	370	**51**	1190	**27**	971	**3**	4
98	57	**74**	350	**50**	1260	**26**	923	**2**	5
97	42	**73**	404	**49**	1339	**25**	892	**1**	2
								0	20

Tabulka 14: Tabulka výsledků (https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/02/sbornik2016.pdf)

V tomto ročníku byl aritmetický průměr řešitelů $\bar{x} \cong 45{,}77$ bodů, modem, tedy nejčastěji dosažených bodů, bylo $\hat{x} = 37$ bodů s četností 1 574, medián je poté $\tilde{x} = 44$ bodů.

Rozptyl je v tomto případě $\sigma^2 \cong 301{,}37$ a směrodatnou odchylkou je poté $\sigma \cong 17{,}36$

Graf četnosti bodů vypadá následovně:



Obrázek 5: Graf četností v roce 2016

Jak můžeme vidět na obrázku 5, graf vypadá jako posunutá Gaussova křivka, takže by mohla odpovídat normálnímu rozdělení. Pro ověření můžeme použít Kolmogorov-Smirnovův test, kde nám vyjde největší rozdíl mezi kumulativní a distribuční hodnotou u 44 bodu, kde kumulativní hodnota je 0,51634 a distribuční hodnota je 0,4594, jejich diference je tedy rovna $d = 0{,}056943$. Kritická hodnota pro $\alpha = 0{,}05$ u 62 953 řešitelů je $D_{0,05}$ = 0,005. Při porovnání těchto dvou hodnot nám vyjde, že diference je větší, něž kritická hodnota, tudíž zamítáme hypotézu o normalitě.

Pokud bychom se podívali na kritickou hodnotu $\alpha = 0{,}01$ u 62 953 řešitelů, tak $D_{0,01} = 0{,}006$. Ani v tomto případě nemůžeme říct, že by šlo o normální rozdělení.

3.2 Matematický klokan, sborník 2017

Tohoto ročníku se zúčastnilo celkově 65 443 řešitelů, dosažené body byly následující:

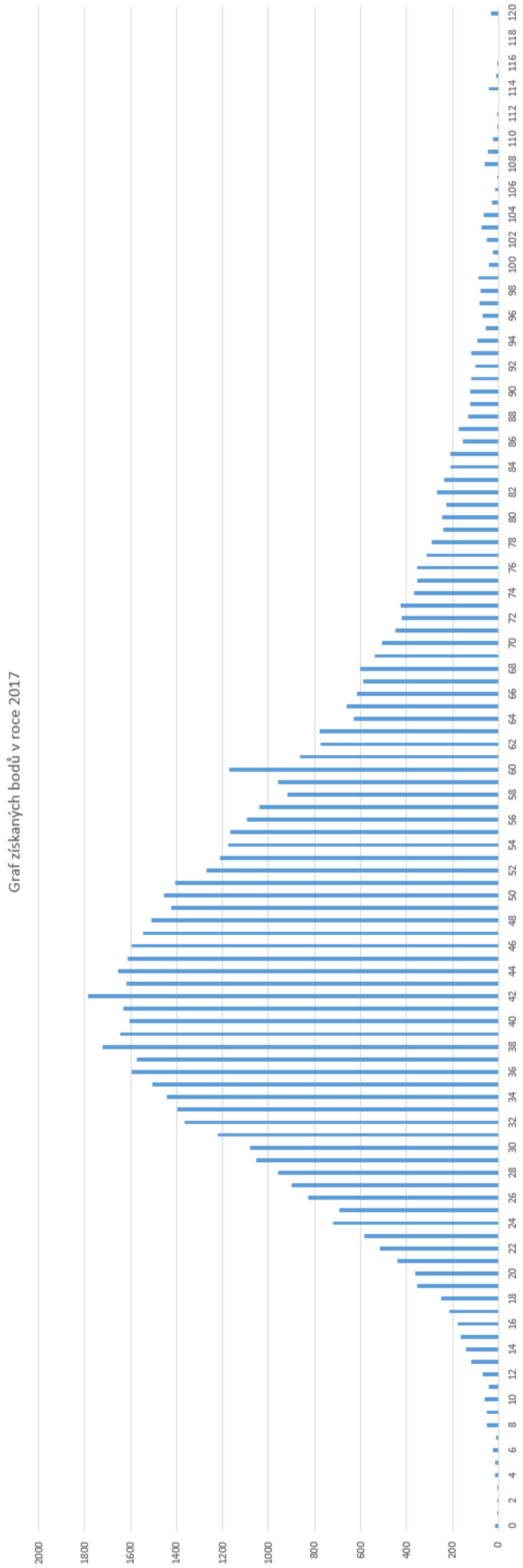
120	33	**96**	71	**72**	420	**48**	1512	**24**	720
119	0	**95**	55	**71**	447	**47**	1545	**23**	586
118	0	**94**	90	**70**	509	**46**	1597	**22**	518
117	0	**93**	117	**69**	539	**45**	1615	**21**	438
116	4	**92**	103	**68**	604	**44**	1654	**20**	362
115	11	**91**	118	**67**	587	**43**	1620	**19**	355
114	42	**90**	122	**66**	615	**42**	1784	**18**	250
113	0	**89**	123	**65**	660	**41**	1630	**17**	212
112	4	**88**	131	**64**	629	**40**	1604	**16**	177
111	5	**87**	173	**63**	777	**39**	1647	**15**	162
110	24	**86**	156	**62**	772	**38**	1721	**14**	140
109	45	**85**	207	**61**	862	**37**	1572	**13**	117
108	61	**84**	207	**60**	1171	**36**	1597	**12**	68
107	2	**83**	236	**59**	958	**35**	1504	**11**	43
106	15	**82**	270	**58**	920	**34**	1444	**10**	62
105	29	**81**	226	**57**	1042	**33**	1398	**9**	51
104	64	**80**	246	**56**	1093	**32**	1365	**8**	50
103	75	**79**	241	**55**	1166	**31**	1219	**7**	12
102	53	**78**	291	**54**	1176	**30**	1081	**6**	22
101	26	**77**	313	**53**	1211	**29**	1052	**5**	17
100	42	**76**	353	**52**	1270	**28**	959	**4**	15
99	87	**75**	353	**51**	1404	**27**	902	**3**	5
98	80	**74**	368	**50**	1454	**26**	829	**2**	6
97	83	**73**	426	**49**	1425	**25**	694	**1**	2
								0	16

Tabulka 15: Tabulka výsledků (https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/02/sbornik2017.pdf)

V tomto ročníku byl aritmetický průměr řešitelů $\bar{x} \cong 45{,}39$ bodů, modem bylo $\hat{x} = 42$ bodů s četností 1 784, medián je poté $\tilde{x} = 45$ bodů.

Rozptyl je v tomto případě $\sigma^2 \cong 306{,}73$ a směrodatnou odchylkou je poté $\sigma \cong 17{,}51$

Graf četnosti bodů vypadá následovně:



Obrázek 6: Graf četností v roce 2017

Graf na obrázku 6 opět velice připomíná Gaussovu křivku. Zde posuzujeme rozdíl mezi kumulativní a distribuční hodnotou u 48 bodů, kde kumulativní hodnota je 0,57991 a distribuční hodnota je 0,514, jejich diference je tedy rovna $d = 0{,}06591$. Kritická hodnota na hladině 0,05 pro 65 443 řešitelů je $D_{0,05}$ = 0,005. Při porovnání těchto dvou hodnot můžeme pozorovat, že diference je větší, něž kritická hodnota, tudíž zamítáme hypotézu o normalitě. Pokud bychom zkusili kritickou hladinu pro $\alpha = 0{,}01$ u 65 443 řešitelů, tak dostaneme $D_{0,01} = 0{,}006$. Tedy ani při hladině významnosti $\alpha = 0{,}01$ nejde o normální rozdělení.

3.3 Matematický klokan, sborník 2018

Tohoto ročníku se zúčastnilo celkově 66 405 řešitelů, dosažené body byly následující:

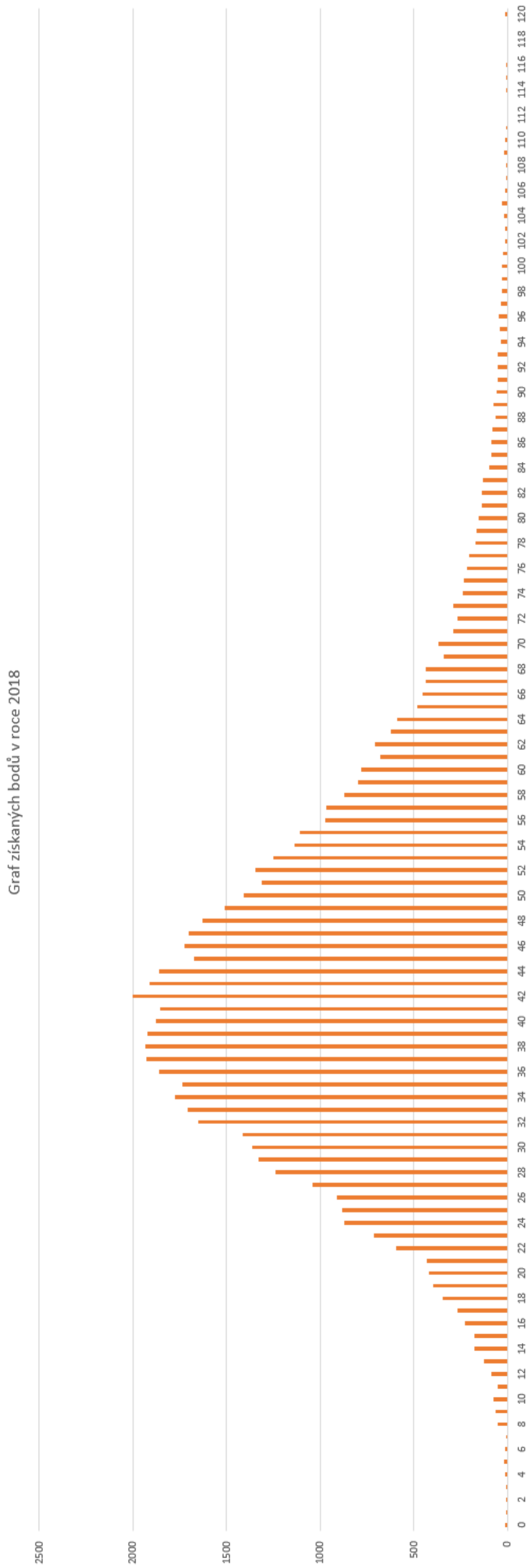
120	13	**96**	46	**72**	269	**48**	1625	**24**	869
119	0	**95**	42	**71**	289	**47**	1701	**23**	714
118	0	**94**	34	**70**	370	**46**	1726	**22**	592
117	0	**93**	53	**69**	343	**45**	1673	**21**	431
116	6	**92**	53	**68**	438	**44**	1860	**20**	417
115	10	**91**	51	**67**	436	**43**	1908	**19**	399
114	10	**90**	58	**66**	455	**42**	2000	**18**	346
113	0	**89**	75	**65**	481	**41**	1851	**17**	266
112	0	**88**	66	**64**	590	**40**	1875	**16**	225
111	5	**87**	83	**63**	620	**39**	1923	**15**	174
110	15	**86**	85	**62**	706	**38**	1933	**14**	178
109	17	**85**	85	**61**	681	**37**	1925	**13**	124
108	5	**84**	97	**60**	779	**36**	1862	**12**	84
107	6	**83**	132	**59**	798	**35**	1737	**11**	51
106	12	**82**	138	**58**	870	**34**	1772	**10**	76
105	30	**81**	139	**57**	968	**33**	1708	**9**	64
104	18	**80**	153	**56**	972	**32**	1651	**8**	50
103	14	**79**	164	**55**	1111	**31**	1416	**7**	8
102	14	**78**	171	**54**	1134	**30**	1362	**6**	12
101	25	**77**	206	**53**	1247	**29**	1329	**5**	19
100	29	**76**	218	**52**	1347	**28**	1241	**4**	15
99	29	**75**	231	**51**	1314	**27**	1038	**3**	2
98	29	**74**	241	**50**	1407	**26**	908	**2**	1
97	36	**73**	287	**49**	1512	**25**	880	**1**	4
								0	12

Tabulka 16: Tabulka výsledků (https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/02/sbornik2018.pdf)

V tomto ročníku byl aritmetický průměr řešitelů $\bar{x} \cong 44{,}03$ bodů, modem bylo $\hat{x} = 42$ bodů s četností 2 000, medián je poté $\tilde{x} = 42$ bodů.

Rozptyl je v tomto případě $\sigma^2 \cong 293{,}79$ a směrodatnou odchylkou je poté $\sigma \cong 15{,}49$

Graf četnosti bodů vypadá následovně:



Obrázek 7: Graf četností v roce 2018

Jako v předešlých dvou případech, tak i tady graf na obrázku velice připomíná Gaussovu křivku. Zde posuzujeme rozdíl mezi kumulativní a distribuční hodnotou u 44 bodů, kde kumulativní hodnota je 0,56189 a distribuční hodnota je 0,49935, jejich diference je tedy rovna $d = 0{,}06254$. Kritická hodnota na hladině 0,05 pro 66 405 řešitelů je $D_{0,05}$ = 0,005. Při porovnání těchto dvou hodnot nám vyjde, že diference je větší, něž kritická hodnota, tudíž zamítáme hypotézu o normalitě. Pokud i zde vyzkoušíme kritickou hodnotu pro $\alpha = 0{,}01$, tak u 66 405 řešitelů je $D_{0,01} = 0{,}006$, což je pořád menší, než diference u 44 bodů.

3.4 Matematický klokan, sborník 2019

Tohoto ročníku se zúčastnilo celkově 66 978 řešitelů, dosažené body byly následující:

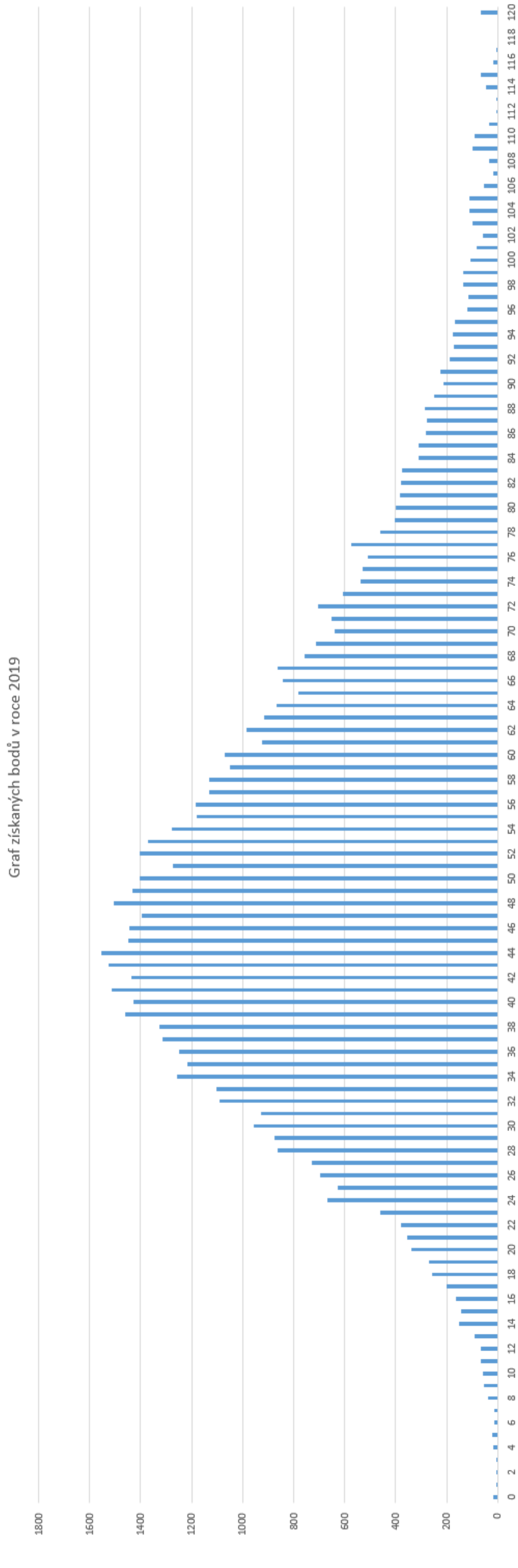
120	68	**96**	119	**72**	703	**48**	1507	**24**	668
119	0	**95**	169	**71**	652	**47**	1395	**23**	460
118	0	**94**	178	**70**	640	**46**	1444	**22**	381
117	2	**93**	172	**69**	712	**45**	1447	**21**	354
116	16	**92**	189	**68**	756	**44**	1554	**20**	338
115	66	**91**	223	**67**	862	**43**	1527	**19**	271
114	47	**90**	214	**66**	841	**42**	1438	**18**	259
113	1	**89**	249	**65**	780	**41**	1514	**17**	199
112	5	**88**	285	**64**	867	**40**	1428	**16**	163
111	32	**87**	278	**63**	915	**39**	1460	**15**	145
110	90	**86**	283	**62**	985	**38**	1327	**14**	150
109	97	**85**	309	**61**	923	**37**	1314	**13**	90
108	34	**84**	309	**60**	1071	**36**	1250	**12**	67
107	18	**83**	376	**59**	1048	**35**	1217	**11**	68
106	55	**82**	378	**58**	1133	**34**	1259	**10**	57
105	113	**81**	383	**57**	1132	**33**	1104	**9**	56
104	111	**80**	401	**56**	1183	**32**	1090	**8**	36
103	97	**79**	405	**55**	1181	**31**	930	**7**	13
102	57	**78**	462	**54**	1277	**30**	957	**6**	14
101	84	**77**	576	**53**	1371	**29**	876	**5**	21
100	107	**76**	508	**52**	1402	**28**	864	**4**	18
99	137	**75**	530	**51**	1274	**27**	730	**3**	4
98	135	**74**	536	**50**	1403	**26**	697	**2**	2
97	114	**73**	607	**49**	1432	**25**	627	**1**	1
								0	19

Tabulka 17: Tabulka výsledků (https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/02/sbornik2019.pdf)

V tomto ročníku byl aritmetický průměr řešitelů $\bar{x} \cong 51{,}36$ bodů, modem bylo $\hat{x} = 44$ bodů s četností 1 554, medián je poté $\tilde{x} = 49$ bodů.

Rozptyl je v tomto případě $\sigma^2 \cong 405{,}66$ a směrodatnou odchylkou je poté $\sigma \cong 20{,}14$

Graf četnosti bodů vypadá následovně:



Obrázek 8: Graf četností v roce 2019

Graf na obrázku opět připomíná Gaussovu křivku. Posoudíme tedy rozdíl mezi kumulativní a distribuční hodnotou, zde to bude u 53 bodů, kde kumulativní hodnota je 0,59261 a distribuční hodnota je 0,53247, jejich diference je tedy rovna $d = 0{,}06014$. Kritická hodnota na hladině 0,05 pro 66 978 řešitelů je $D_{0,05}$ = 0,005. Při porovnání těchto dvou hodnot nám vyjde, že diference je větší, něž kritická hodnota, takže i tady zamítáme hypotézu normality. Pokud bychom vyzkoušeli kritickou hodnotu pro $\alpha = 0{,}01$, tak dostaneme $D_{0,01} = 0{,}006$, tedy ani při této hladině významnosti nejde o normální rozdělení.

3.5 Matematický klokan, sborník 2020

Tohoto ročníku se zúčastnilo celkově 6 678 řešitelů, dosažené body byly následující:

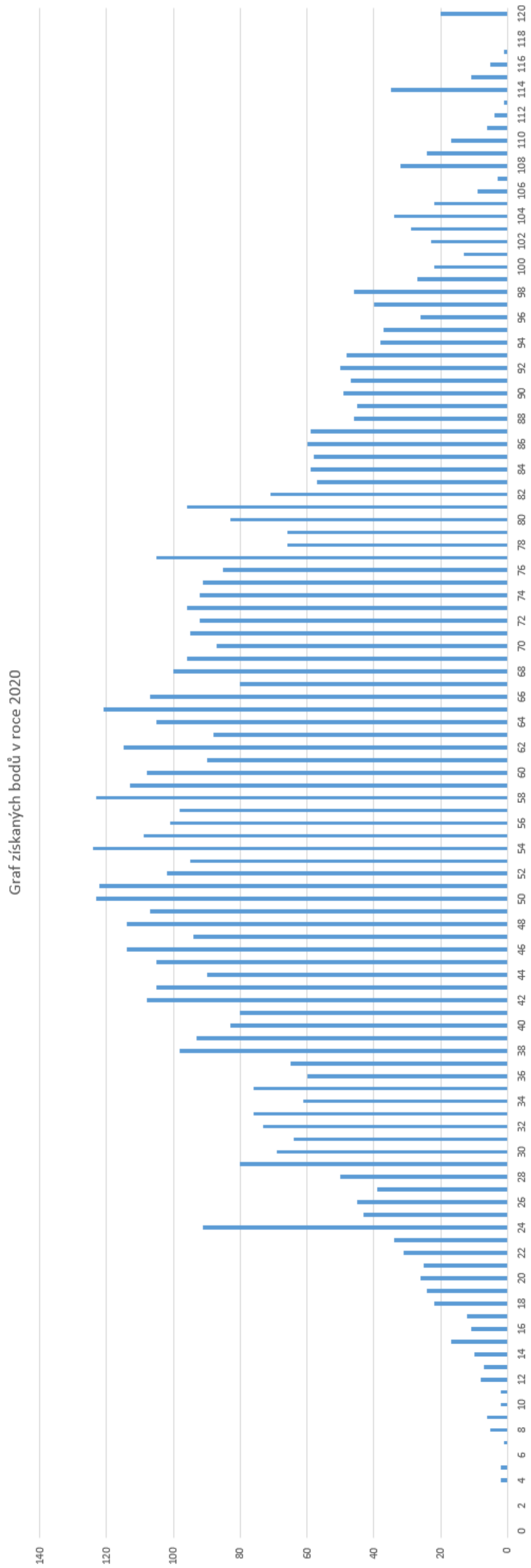
120	20	**96**	26	**72**	92	**48**	114	**24**	91
119	0	**95**	37	**71**	95	**47**	94	**23**	34
118	0	**94**	38	**70**	87	**46**	114	**22**	31
117	1	**93**	48	**69**	96	**45**	105	**21**	25
116	5	**92**	50	**68**	100	**44**	90	**20**	26
115	11	**91**	47	**67**	80	**43**	105	**19**	24
114	35	**90**	49	**66**	107	**42**	108	**18**	22
113	1	**89**	45	**65**	121	**41**	80	**17**	12
112	4	**88**	46	**64**	105	**40**	83	**16**	11
111	6	**87**	59	**63**	88	**39**	93	**15**	17
110	17	**86**	60	**62**	115	**38**	98	**14**	10
109	24	**85**	58	**61**	90	**37**	65	**13**	7
108	32	**84**	59	**60**	108	**36**	60	**12**	8
107	3	**83**	57	**59**	113	**35**	76	**11**	2
106	9	**82**	71	**58**	123	**34**	61	**10**	2
105	22	**81**	96	**57**	98	**33**	76	**9**	6
104	34	**80**	83	**56**	101	**32**	73	**8**	5
103	29	**79**	66	**55**	109	**31**	64	**7**	1
102	23	**78**	66	**54**	124	**30**	69	**6**	0
101	13	**77**	105	**53**	95	**29**	80	**5**	2
100	22	**76**	85	**52**	102	**28**	50	**4**	2
99	27	**75**	91	**51**	122	**27**	39	**3**	0
98	46	**74**	92	**50**	123	**26**	45	**2**	0
97	40	**73**	96	**49**	107	**25**	43	**1**	0
								0	0

Tabulka 18: Tabulka výsledků (https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/02/sbornik2020.pdf)

V tomto ročníku byl aritmetický průměr řešitelů $\bar{x} \cong 59{,}83$ bodů, modem bylo $\hat{x} = 54$ bodů s četností 124, medián je poté $\tilde{x} = 59$ bodů.

Rozptyl je v tomto případě $\sigma^2 \cong 701{,}78$ a směrodatnou odchylkou je poté $\sigma \cong 26{,}49$

Graf četnosti bodů vypadá následovně:



Obrázek 9: Graf četností v roce 2020

U posledního vzorku graf na obrázku už tolik Gaussovu křivku nepřipomíná, už na první pohled jsou patrné odchylky od normálního rozdělní. Posoudíme tedy rozdíl mezi kumulativní a distribuční hodnotou, zde to bude u 81 bodů, kde kumulativní hodnota je 0,8242 a distribuční hodnota je $0{,}78787$, jejich diference je tedy rovna $d = 0{,}03633$. Kritická hodnota na hladině 0,05 pro 6 678 řešitelů je $D_{0,05}$ = 0,016. Při porovnání těchto dvou hodnot nám vyjde, že diference je větší, něž kritická hodnota, tudíž i u těchto dat zamítáme hypotézu o normalitě. Pokud i zde vyzkoušíme kritickou hodnotu pro $\alpha = 0{,}01$, tak dostaneme $D_{0,01} = 0{,}019$. Zde jsme nejblíž tomu, aby diference byla menší než kritická hodnota, ale bohužel ani zde tomu tak není, a proto ani u tohoto ročníku nemůžeme říct, že by šlo o normální rozdělení.

4. Ukázka příkladů a jejich řešení

4.1 Úlohy za 3 body

1) **(2016, 3.)** ***Eva objevila 555 hromádek po 9 kamenech a přeskládala je na hromádky po 5 kamenech. Kolik hromádek dostala?***

(A) 999 *(B) 900* *(C) 555* *(D) 111* *(E) 45*

Řešení 1:

Můžeme zjistit, kolik je kamenů celkově. Jelikož máme 555 hromádek a v každé hromádce 9 kamenů, tak stačí tyto dvě čísla mezi sebou vynásobit, dostaneme tedy:

$$555 \cdot 9 = 4\,995$$

Víme tedy, že musíme rozřadit 4 995 kamenů do 5 hromádek, tudíž musíme celkový počet kamínků vydělit počtem hromádek:

$$4\,995 \div 5 = 999$$

Vyšlo tedy 999, což je v nabídce možnost *(A).*

Řešení 2:

Můžeme si všimnout, že v $555 \cdot 9$ lze rozdělit 555 na součin $5 \cdot 111$, vznikne tedy $5 \cdot 111 \cdot 9$. Zatím nebudeme nic násobit, musíme totiž tento tvar vydělit ještě číslem 5, jelikož potřebujeme rozdělit kameny do 5 hromádek, dostaneme tedy následující zlomek:

$$\frac{5 \cdot 111 \cdot 9}{5}$$

V čitateli i jmenovateli se nachází 5, které se navzájem vydělí, zbude tedy:

$$111 \cdot 9 = 999$$

I v druhém postupu řešení vyšlo 999, což je odpověď *(A).*

Řešení 3:

Tuto úlohu můžeme vyřešit i pomocí trojčlenky, musíme si však dát pozor na to, o který ze dvou typů se jedná. Zde se jedná o nepřímou úměru, jelikož čím více máme hromádek, tím méně v nich bude kamenů. Zápis by mohl vypadat následovně:

9 hromádek ………………. 555 kamenů

5 hromádek ………………..… x kamenů

Při použití pravidla nepřímé úměry vznikne následující zlomek:

$$\frac{9 \cdot 555}{5}$$

Po vydělení číslem 5 dostaneme opět $9 \cdot 111 = 999$, což odpovídá možnosti *(A)*.

2) **(2016, 8.)** ***Tomáš rozřezal dvě lana o délkách 1 m a 2 m na několik stejně dlouhých dílů Které z následujících čísel nemůže udávat celkový počet dílů, které Tomáš rozřezáním získal?***

(A) 6 *(B) 8* *(C) 9* *(D) 12* *(E) 15*

Řešení 1:

Je dobré si uvědomit, jaký je nejmenší možný počet dílů. V tomto případě jsou to 3 díly, které dostaneme při délce jednoho dílku na 1 m. Z lana o délce 1 m dostaneme 1 díl, z lana o délce 2 m dostaneme 2 díly, můžeme si zapsat jako:

$$1 + 2$$

Druhým nejmenším počtem je 6 dílů, které dostaneme rozřezáním na 0,5 m dlouhé dílky, z 1 m dlouhého lana to budou 2 díly, z 2 m lana to budou 4 díly, zapsat to můžeme následovně:

$$2 + 4$$

Tento zápis však můžeme upravit na následující tvar:

$$2(1 + 2)$$

kde si můžeme všimnout, že pouze násobíme závorku číslem 2, vypočteme tedy hodnotu pro čísla 3, 4 a 5:

$$3(1 + 2) = 9$$

$$4(1 + 2) = 12$$

$$5(1 + 2) = 15$$

Z možností 6 (A), 8 (B), 9 (C), 12 (D) a 15 (E) se jako jediné číslo nevyskytuje číslo 8, tedy odpověď na tento úkol je možnost *(B)*.

Řešení 2:

V tomto úkolu se můžeme zaměřit i na nabízené možnosti, pokud si uvědomíme, že nařezané díly musí být dělitelné číslem 3, tak se můžeme zaměřit i na rozklad na prvočísla jednotlivých odpovědí, pokud jsou dělitelné číslem 3, pak se v jejich prvočíselném rozkladu musí vyskytovat v základu alespoň jednou číslo 3. Rozklady jednotlivých odpovědí jsou následující:

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

Jediné číslo, kde se nevyskytuje číslo 3 je číslo 8, tedy možnost *(B)*. Pozor, číslo 8 lze zapsat jako 2^3, tady se číslo 3 sice vyskytuje, ale jako mocnina, ne jako základ mocniny.

3) **(2017, 1.)** ***Který z uvedených časů nastane 17 hodin po 17:00?***

(A) 9:00 *(B) 10:00* *(C) 11:00* *(D) 12:00* *(E) 13:00*

Řešení 1:

Víme, že $17{:}00 + 17{:}00 = 34{:}00$, jelikož ale den má 24 hodin, tak musíme od součtu odečíst 24, tedy:

$$34{:}00 - 24{:}00 = 10{:}00$$

Vyšlo $10{:}00$, což je v nabídne v možnosti *(B)*.

Řešení 2:

Můžeme 17 hodin rozložit tak, abychom dostali prvně půlnoc, tedy $0{:}00$ a potom přičteme zbytek ze 17:

$$17{:}00 + 7{:}00 + 10{:}00$$

tedy:

$$0{:}00 + 10{:}00$$

Tento výsledek nám opět nabízí možnost *(B)*.

Řešení 3:

K $17:00$ nemusíme jenom přičítat, ale můžeme využít znalosti, že za 24 hodin od $17:00$ bude opět $17:00$. Jelikož 24 je o 7 větší, tak musíme ještě odečíst 7 od součtu $17:00$ a $24:00$, dostaneme tedy následující:

$$17:00 + 24:00 - 7:00$$

což tedy přepíšeme na:

$$17:00 - 7:00 = 10:00$$

Opět nám vyjde 10:00, tedy možnost *(B)*.

4) **(2017, 8.)** ***Mirka má 20 eur. Každá z jejích 4 sester má 10 eur. Kolik eur musí Mirka dát každé ze svých sester, aby všechny dívky měly stejnou částku?***

(A) 2 *(B) 4* *(C) 5* *(D) 8* *(E) 10*

Řešení 1:

Můžeme zjistit, kolik eur je dohromady, Mirka jich má 20 a pak jsou tady 4, kde každá má po 10 eurech, tedy:

$$20 + 4 \cdot 10 = 60$$

Celkově pracujeme s 60 eury, tyto eura musíme rozdělit rovnoměrně mezi Mirku a 4 její sestry, tedy mezi 5 lidí celkově, dostaneme tedy:

$$60 \div 5 = 12$$

Každá z dívek bude mít 12 eur, Mirka tedy přijde o 8 eur, každá ze sester dostane 2 eura, tedy možnost *(A)*.

Řešení 2:

Pokud nechceme příliš počítat, můžeme si pomoct psaním do sloupečků, jako například takto:

	Původní peníze	1. rozdělení	Peníze po 1. rozdělení	2. rozdělení	Peníze po 2. rozdělení
Mirka	$20\,€$	$20\,€ - 4\,€$	$16\,€$	$16\,€ - 4\,€$	$12\,€$
1.sestra	$10\,€$	$10\,€ + 1\,€$	$11\,€$	$11\,€ + 1\,€$	$12\,€$
2.sestra	$10\,€$	$10\,€ + 1\,€$	$11\,€$	$11\,€ + 1\,€$	$12\,€$
3.sestra	$10\,€$	$10\,€ + 1\,€$	$11\,€$	$11\,€ + 1\,€$	$12\,€$
4.sestra	$10\,€$	$10\,€ + 1\,€$	$11\,€$	$11\,€ + 1\,€$	$12\,€$

V tabulce vidíme, že každá sestra bude mít nově 12 eur, což je o 2 eura víc, než měla každá předtím, tedy možnost *(A)*.

Řešení 3:

Pro zjištění můžeme sestavit i rovnici, pokud chceme zjistit, kolikrát Mirka rozdá po euru každé své sestře, tak můžeme sestavit např. takovouto rovnici:

$$20 - (x \cdot 4) = 10 + x$$

Tedy:

$$20 - 4x = 10 + x$$

Nyní odečteme od obou stran 10 a přičteme ke každé straně $+4x$, dostaneme tedy:

$$10 = 5x$$

Stačí už jen vydělit obě strany 5:

$$2 = x$$

I v tomto řešení jsme se dostali k odpovědi *(A)*, tedy 2 eura.

5) **(2018, 2.)** ***Které číslo musíme doplnit do rovnice*** $\mathbf{2 \cdot 18 \cdot 14 = 6 \cdot \bigstar \cdot 7}$ ***místo*** $\bigstar$***, aby rovnost platila?***

(A) 8 *(B) 9* *(C) 10* *(D) 12* *(E) 15*

Řešení 1:

Všimněme si, že na obou stranách rovnice se nachází nápadně podobné číslovky, rovnici si můžeme přepsat jako:

$$2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 7 = 6 \cdot \bigstar \cdot 7$$

Vidíme, že na obou stranách se vyskytuje číslo 6 a 7, můžeme jimi vydělit obě strany a zbude:

$$2 \cdot 3 \cdot 2 = \bigstar$$

$$12 = \bigstar$$

Odpovědí je tedy 12, což je možnost *(D)*.

Řešení 2:

Chceme mít na jedné straně čísla, na druhé straně neznámou, musíme tedy vydělit obě strany čísly 6 a 7, na pravé straně nám vznikne zlomek a na levé straně zůstane $\bigstar$:

$$\frac{2 \cdot 18 \cdot 14}{6 \cdot 7} = \bigstar$$

Zlomek nyní upravíme, 18 pokrátíme číslem 6, 14 pak pokrátíme se 7, dostaneme tedy:

$$2 \cdot 3 \cdot 2 = \bigstar$$

$$12 = \bigstar$$

Odpovědí je tedy opět 12, tedy možnost *(D)*.

Řešení 3:

Celou tuto úlohu lze řešit i tak, že si všechna čísla na pravé straně rovnice vynásobíme, obdobně to uděláme na straně levé, vyjde:

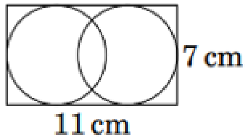
$$504 = 42\bigstar$$

Zde vydělíme obě strany číslem 42 a vyjde:

$$12 = \bigstar$$

Odpovědí je zase číslo 12, což je možnost *(D)*.

6) (2018, 8.) ***Na obrázku je obdélník o rozměrech 7 cm × 11 cm. Uvnitř něj leží dvě kružnice, každá se dotýká tří stran obdélníku. Určete vzdálenost mezi středy kružnic.***



(A) 1 *(B) 2* *(C) 3* *(D) 4* *(E) 5*

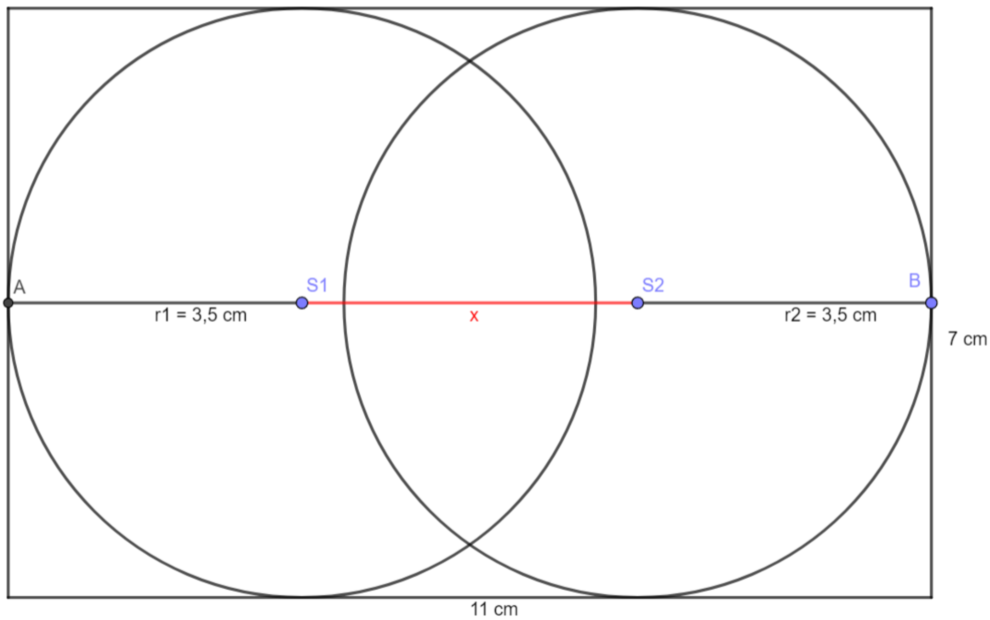
Řešení 1:

Pomocí výšky obdélníku zjistíme, že průměr kružnice je 7 cm, poloměr kružnice je pak polovina průměru, tedy 3,5 cm. Díky tomu jsme schopni říct, že 3,5 cm od začátku úsečky a 3,5 cm od konce úsečky se nachází středy kružnic. Požadovaná vzdálenost x mezi středem první kružnice S_1 a středem druhé kružnice S_2 je potom délka obdélníku mínus dvakrát poloměr kružnice, tedy:

$$x = 11\ cm - 2 \cdot 3{,}5\ cm$$
$$x = 11\ cm - 7\ cm$$
$$x = 4\ cm$$

Dostali jsme 4 cm, což je v nabídce odpovědí možnost *(D)*.

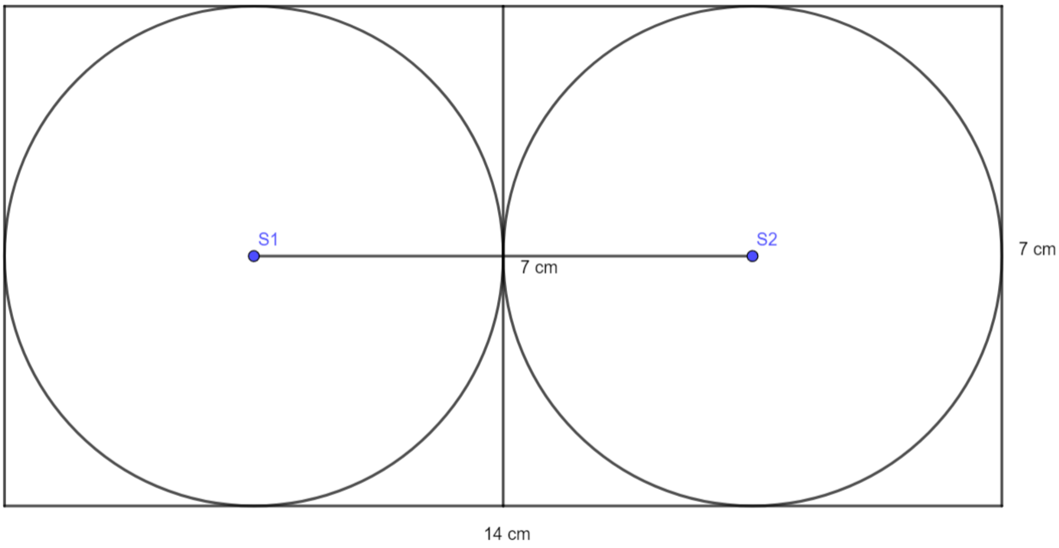
Obrázek by mohl vypadat následovně:



Obrázek 10: Možné řešení úlohy (2018, 8)

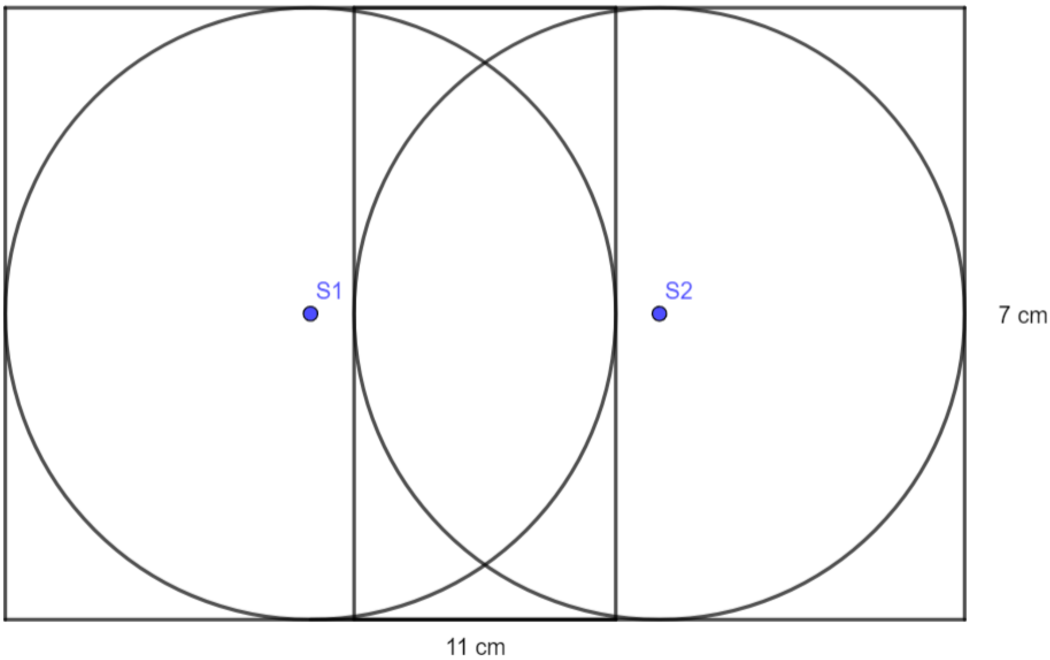
Řešení 2:

Jedna kružnice se vleze do čtverce o rozměru $7\ cm \times 7\ cm$, můžeme tedy dát vedle sebe dva čtverce o rozměrech $7cm \times 7cm$, které budou v sobě mít kružnici vepsanou. Délka tohoto obdélníku je $14\ cm$, vzdálenost mezi středy je potom $7\ cm$, z S_1 k tečně se čtvercem je to $3{,}5\ cm$, z S_2 k tečně se čtvercem je to $3{,}5\ cm$.



Obrázek 11: Kružnice ve čtverci

V tomto případě se kružnice nikde neprotínají, mají pouze společný bod v tečně se čtvercem. Jelikož v zadání je délka obdélníku $11\ cm$, tak musíme posunout čtverce i s kružnicemi blíž k sobě, a to o $14\ cm - 11\ cm = 3\ cm$. Vznikne tedy následující obrázek:



Obrázek 12: Posunutí čtverců, aby byla délka strany 11 cm

Čtverce se museli posunout o 3 cm blíže k sobě, to znamená, že i vzdálenost mezi středy se musela zmenšit o 3 cm, tudíž z původní délky 7 cm musíme odebrat 3 cm, dostaneme tedy, že vzdálenost mezi středy kružnic v obdélníku o rozměrech $7cm \times 11\ cm$ jsou $7\ cm - 3\ cm = 4cm$, tedy možnost *(D).*

7) (2019, 1.) ***Kolik hodin je deset čtvrtin hodiny?***

(A) 40 hodin *(B) 5 a půl hodiny* *(C) 4 hodiny*

(D) 3 hodiny *(E) 2 a půl hodiny*

Řešení 1:

Čtvrtina hodiny je $15\ minut$. Těchto čtvrtin je deset, tedy $15\ minut\ \cdot 10 = 150\ minut$. Hodina má $60\ minut$, tudíž musíme celkové hodiny vydělit šedesáti, tedy:

$$150\ minut\ \div 60\ minut = 2{,}5\ hodin$$

$2{,}5\ hodiny$ máme v nabídce, a to jako odpověď *(E).*

Řešení 2:

Čtvrt hodiny budou celkově 4 v jedné hodině, my máme k dispozici 10 čtvrt hodin, můžeme tedy provést $10 \div 4 = 2{,}5$, což je možnost *(E).*

8) (2019, 4.) ***Pět přátel se setkalo. Každý z nich dal každému ze zbývajících koláč. Poté snědli všechny koláče, které dostali. Celkový počet koláčů se snížil na polovinu. Kolik koláčů mělo původně pět přátel dohromady?***

(A) 20 *(B) 24* *(C) 30* *(D) 40* *(E) 50*

Řešení 1:

Celkově je 5 přátel, když jeden rozdá koláč každému ze svých přátel, tak dá celkově 4 pryč. Všech pět přátel musí rozdat po čtyřech koláčích, tedy $5 \cdot 4 = 20$ je celkový počet rozdaných koláčů, tedy koláčů, které dostali. Když snědli 20 koláčů, tak snědli půlku veškerých koláčů na setkaní, proto musíme vynásobit koláče, které se rozdaly, dvojkou. Celkový počet koláčů na setkaní je proto $20\ \cdot 2 = 40$.

V možnostech odpovědí tomuto odpovídá možnost *(D).*

Řešení 2:

Řekneme si, že každý z přátel přinesl stejný počet koláčů na setkání, každý tedy přišel s 20 % celkových koláčů na setkání, tedy $\frac{1}{5}x$, kde x jsou všechny koláče na setkání. Rozdají si navzájem po jednom koláči, tedy svých původních koláčů bude mít každý z přátel $\frac{x}{5} - 4$. Jelikož to platí u všech pěti přátel, tak vynásobíme původní počet koláčů jednotlivce pěti, dostaneme tedy $5(\frac{x}{5} - 4)$, po vynásobení $x - 20$. Celkový počet koláčů na setkání, označeno jako x, je počet původních koláčů, které zbyly u těch, kteří si je přinesli, označme si např. p, plus počet snězených koláčů, označme si jako s, v rovnici tedy $p + s = x$. Ze zadání ale víme, že snězených koláčů byla polovina, tedy stejně, jako zbylých původních, tedy $s = p$. Rovnici proto můžeme upravit na $p + p = x$, neboli $2p = x$. Jelikož dohromady zbylo u svých původních majitelů $x - 20$ koláčů, můžeme dosadit do rovnice a dostaneme $2(x - 20) = x$, tedy:

$$2x - 40 = x$$

$$x = 40$$

Celkový počet koláčů na setkání bylo tedy 40, což je možnost *(D)*.

9) **(2020, 3.)** ***Který ze zlomků nabývá největší hodnoty?***

(A) $\frac{8+5}{3}$ *(B)* $\frac{8}{3+5}$ *(C)* $\frac{3+5}{8}$ *(D)* $\frac{8+3}{5}$ *(E)* $\frac{3}{8+5}$

Řešení 1:

V každém zlomku sečteme vše, co jde, dostaneme tedy tyto zlomky:

$$(A)\frac{13}{3} \qquad (B)\frac{8}{8} \qquad (C)\frac{8}{8} \qquad (D)\frac{11}{5} \qquad (E)\frac{3}{13}$$

Pro porovnávání zlomků je dobré mít stejné jmenovatele a následně porovnat čitatele, potřebujeme tedy najít společný násobek čísel 3, 8, 5, 13, kterým je číslo 1 560. Zlomky se stejným jmenovatelem tedy budou následující:

$$(A)\frac{6760}{1560} \qquad (B)\frac{1560}{1560} \qquad (C)\frac{1560}{1560} \qquad (D)\frac{3432}{1560} \qquad (E)\frac{360}{1560}$$

Vidíme, že nejmenší je možnost (E), poté je možnost (B) společně s možností (C), druhé největší je možnost (D) a největší je možnost (A).

Odpovědí tedy bude možnost *(A)*, $\frac{13}{3}$.

Řešení 2:

Mnohem rychlejší metodou bude čísla místo násobení na společný jmenovatel dělit čitatel jmenovatelem, možností poté vypadají následovně:

$(A) 4,\overline{3}$ $(B) 1$ $(C) 1$ $(D) 2,2$ $(E) 0,231$

Odpovědí tedy bude možnost *(A)*.

Řešení 3:

Když se ale podíváme na zlomky:

$(A)\,\frac{13}{3}$ $(B)\,\frac{8}{8}$ $(C)\,\frac{8}{8}$ $(D)\,\frac{11}{5}$ $(E)\,\frac{3}{13}$

Tak si můžeme všimnout, že v možnosti *(A)* je jak největší čitatel, tak nejmenší jmenovatel ze všech nabídnutých možností. Tím pádem největší číslo se nachází v možnosti *(A)*.

10) **(2020, 6.) Eva násobí tři různá čísla z těchto čísel: $-5, -4, -1, 2, 3, 6$. Kterou nejmeší hodnotu může takto získat?**

(A) -120 *(B)* -90 *(C)* -48 *(D)* -15 *(E)* 6

Řešení 1:

Pokud chceme při násobení tří čísel dosáhnout záporného čísla, pak musí být při součinu právě jedno číslo záporné anebo právě tři čísla záporná. Pokud vynásobíme všechna záporná čísla z nabídky, jelikož jsou jenom tři, tak dostaneme:

$$(-5) \cdot (-4) \cdot (-1) = -20$$

Toto číslo dokonce ani není v nabídce, takže musíme pokračovat dál, a to s jedním číslem záporným. Pro dosažení nejmenšího možného čísla potřebuje násobit nejmenším záporným číslem, v tomto případě to bude -5, to potřebujeme násobit s největším možným kladným číslem, což pro nás představují čísla 3 a 6, dostaneme tedy následující:

$$3 \cdot 6 \cdot (-5) = -90$$

Dostali jsem -90, toto číslo už je v nabídce a je to možnost *(B)*.

Řešení 2:

Poměrně nepraktickým řešením, ale taky možností, může být vytvoření každé možné trojice:

$$(-5, -4, -1) = -20,\ (-5, -4, 2) = 40,\ (-5, -4, 3) = 60,$$

$(-5, -4, 6) = 120$, $(-5, -1, 2) = 10$, $(-5, -1, 3) = 15$,

$(-5, -1, 6) = 30$, $(-5, 2, 3) = -30$, $(-5, 2, 6) = -60$,

$(\mathbf{-5}, \mathbf{3}, \mathbf{6}) = \mathbf{-90}$, $(-4, -1, 2) = 8$, $(-4, -1, 3) = 12$,

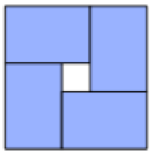
$(-4, -1, 6) = 24$, $(-4, 2, 3) = -24$, $(-4, 2, 6) = -48$,

$(-4, 3, 6) = -72$, $(-1, 2, 3) = -6$, $(-1, 2, 6) = -12$,

$(-1, 3, 6) = -18$, $(2, 3, 6) = 36$

Ze všech těchto možností nabízí nejmenší možný součin kombinace čísel $-5, 3, 6$, které dohromady dají číslo -90, což je v nabídce možnost *(B)*.

4.2 Úlohy za 4 body



11)* (2016, 9.)** ***Na obrázku jsou čtyři shodné obdélníky s obvodem $\mathbf{16}\ \boldsymbol{cm}$ umístěny do čtverce. Určete obvod tohoto čtverce?

(A) $16\ cm$ *(B)* $20\ cm$ *(C)* $24\ cm$ *(D)* $28\ cm$ *(E)* $32\ cm$

Řešení 1:

Obvod obdélníku má vzorec $o = 2(a + b)$, kde a a b jsou délky stran. Na obrázku si můžeme všimnout, že čtverec se skládá ze čtyřikrát kratší strany obdélníku a čtyřikrát delší strany obdélníku, tedy:

$$4a + 4b = 4(a + b)$$

Jelikož víme, že $2(a + b) = 16$, tak nám stačí tento obvod vynásobit dvěma a dostaneme:

$$2 \cdot 2(a + b) = 4(a + b) = 32$$

Číslo 32 je v nabídce, a to v možnosti *(E)*.

Řešení 2:

Můžeme si všimnout, že z každého obdélníku zasahují do délky strany čtverce právě dvě strany obdélníku, a to pokaždé jednou stranu a a jednou stranu b, což je polovina obvodu jednotlivých obdélníků. Polovina obvodu obdélníku je $16 \div 2 = 8$. Z každého obdélníku tedy započítáme $8\ cm$, jelikož jsou zde 4 obdélníky, tak obvod tohoto čtverce je:

$$4 \cdot (a + b) = 4 \cdot 8 = 32$$

Toto číslo je v nabídce, a to pod možností *(E)*.

12) (2016, 16.) Ve třídě je 20 žáků. Sedí po dvojicích tak, že třetina chlapců sedí s dívkami a polovina dívek sedí s chlapci. Kolik je ve třídě chlapců?

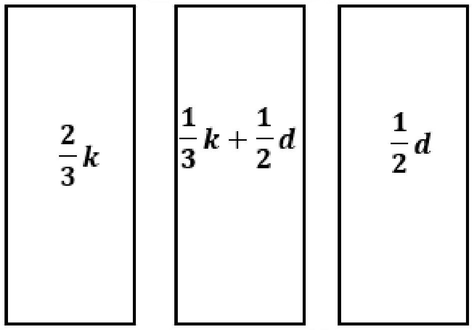
(A) 9 *(B)* 12 *(C)* 15 *(D)* 16 *(E)* 18

Řešení 1:

Ze zadání víme, že jedna třetina chlapců sedí s jednou polovinou dívek, to můžeme popsat vztahem:

$$\frac{1}{3}k = \frac{1}{2}d$$

Zbylé $\frac{2}{3}$ chlapců tedy sedí spolu a zbylá $\frac{1}{2}$ dívek sedí spolu. Uspořádání ve třídě by tedy mohlo vypadat následovně:



Obrázek 13: Možný zasedací pořádek

Rovnicí můžeme tedy napsat:

$$\frac{2}{3}k + \frac{1}{3}k + \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d = 20$$

Víme ale, že $\frac{1}{2}d = \frac{1}{3}k$, můžeme tedy za počet dívek dosadit počet chlapců, jelikož se nás v otázce ptají na chlapce, a dostaneme:

$$\frac{2}{3}k + \frac{1}{3}k + \frac{1}{3}k + \frac{1}{3}k = 20$$

$$\frac{5}{3}k = 20$$

$$k = 12$$

Číslo 12 je v nabídce pod možností *(B)*.

Řešení 2:

Víme tedy, že třetina chlapců seděla s polovinou dívek, pokud by tedy seděl jeden chlapec vedle jedné dívky, pak by ve třídě byli 3 chlapci a 2 dívky, což je celkem 5 dětí.

Ze zadání víme, že ve třídě má být 20 dětí, tedy čtyřikrát víc. Tím pádem je ve třídě 12 chlapců a 8 dívek.

V zadání se ptají na počet chlapců, těch je 12, což odpovídá možnosti *(B)*.

13) **(2017, 9.) Děti tvořily jednu šestinu návštěvníků divadla. Dvě pětiny dospělých byli muži. Jakou část diváků tvořily dospělé ženy?**

(A) $\frac{1}{2}$ *(B)* $\frac{1}{3}$ *(C)* $\frac{1}{4}$ *(D)* $\frac{1}{5}$ *(E)* $\frac{2}{5}$

Řešení 1:

Tady si můžeme vytvořit jednoduchý zápis:

$$Návštevníci \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..x$$

$$Děti \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\frac{x}{6}$$

$$Dospělí \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x-\frac{x}{6}=\frac{5x}{6}$$

$$Muži \ldots\ldots.\frac{2}{5}dospělích = \frac{2}{5}\cdot\frac{5x}{6}$$

$$Ženy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots zbytek$$

Můžeme sestavit následující rovnici:

$$D+M+Ž=N$$

$$\frac{x}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{5x}{6}+Ž=x$$

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{3}+Ž=x$$

$$Ž=x-\frac{x}{6}-\frac{x}{3}$$

$$Ž=\frac{3x}{6}=\frac{x}{2}$$

Zjistili jsme, že ženy tvořily polovinu všech návštěvníků, tedy možnost (*E)*.

Řešení 2:

K řešení můžeme využít i metodu falešného předpokladu. Víme, že dětí byla $\frac{1}{6}$, tedy celkový počet návštěvníků musí být číslo dělitelné 6. Zkusíme si tedy za celkový počet návštěvníků dosadit např. číslo 6.

$$Návštevníci \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..6$$

$$Děti \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\frac{1\cdot 6}{6}=1$$

$$Dospělí \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6-1=5$$

$$Muži \ldots\ldots.\frac{2}{5}\,dospělích = \frac{2}{5}\cdot 5 = 2$$

$$Ženy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots zbytek$$

Opět platí rovnice:

$$D + M + Ž = N$$

Do ní můžeme dosadit tentokrát rovnou čísla, tedy:

$$1 + 2 + Ž = 6$$

$$Ž = 6 - 3$$

$$Ž = 3$$

Pokud by bylo na představení 6 návštěvníků, pak 3 z nich by byly ženy, což jsou $\frac{3}{6}$ celkových návštěvníků, tedy po převedení na základní tvar $\frac{1}{2}$. To odpovídá možnosti *(E)*.

14)* (2017, 11.) Čtyři sestřenice Ema, Iva, Rita a Zina mají 3, 8, 12 a 14 let, přitom jejich věky nemusí být v tomto pořadí. Ema je mladší než Rita. Součet let Ziny a Emy je dělitelný 5. Součet Ziny a Rity je také dělitelný 5. Kolik je Ivě*?

*(A)*14 *(B)*12 *(C)*8 *(D)* 5 *(E)* 3

Řešení 1:

Ze zadání víme, že Ema je mladší než Rita, tím pádem možné věky pro ně jsou zatím:

- Ema – (3, 8, 12)
- Rita – (8, 12, 14)

Taky víme, že součet věku Ziny a Emy je dělitelný pěti, z nabídnutých věků to mohou kombinace:

- (3, 12) nebo (8, 12)

A jako poslední součet věku Ziny a Rity musí být taky dělitelný pěti, pořád máme tyto dvě možnosti:

- (3, 12) nebo (8, 12)

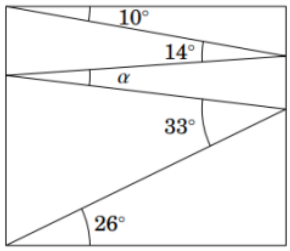
Můžeme si všimnout, že se bavíme o trojici dívek Ema, Rita, Zina a o trojici věků 3, 8 a 12. Nevíme, která dívka má kolik, ale rozhodně víme, že ani jedné není 14. Jediné děvče, které tím pádem může být 14, je Iva. Jelikož otázka byla na Ivu, tak nás věk zbylých dívek nezajímá a vybíráme možnost *(A)*

Řešení 2:

V posledních dvou podmínkách se opakuje dívka Zita, tedy Zitin věk se musí opakovat i v možných kombinacích součtu věků, které musí být dělitelné pěti. Číslo, které se vyskytuje v každé kombinaci věků, které jsou dělitelné pěti, je číslo 12. Zitě tím pádem musí být 12 let. V posledních dvou podmínkách se také zmiňujeme o Emě, resp. Ritě o kterých víme, že Ema je mladší. Jediný možný věk pro Emu jsou tím pádem 3 roky, Ritě je tím pádem 8 let.

Známe tedy věk tří dívek, poslednímu děvčeti pak připadne zbývající věk, kterým je 14 let. Číslo 14 odpovídá možnosti *(A)*.

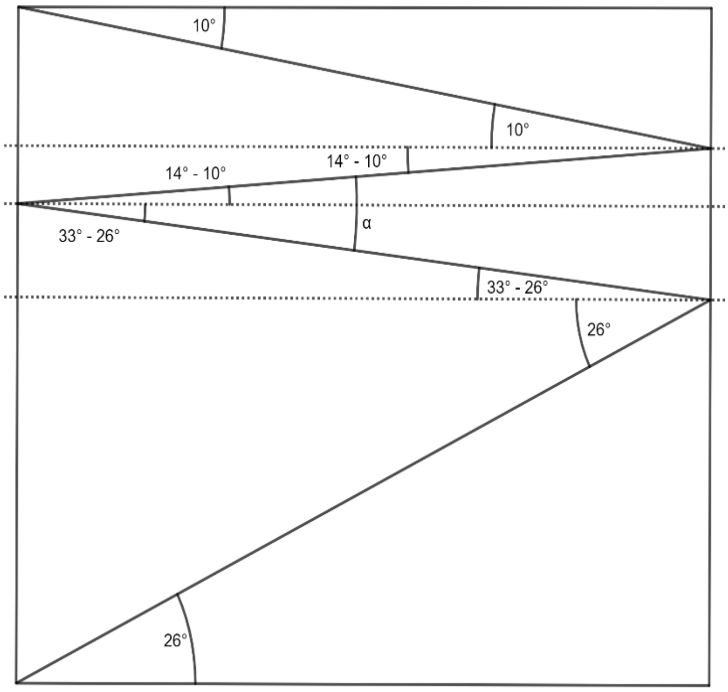
15) **(2018, 12.) Petr rýsuje uvnitř obdélníku úsečky, které svírají úhly o velikosti $\mathbf{10°, 14°, \alpha, 33°, 26°}$, jak je znázorněno na obrázku. Určete úhel $\boldsymbol{\alpha}$.**



(A)$11°$ *(B)*$12°$ *(C)*$16°$ *(D)* $17°$ *(E)* $33°$

Řešení 1:

Do obrázku můžeme doplníme čtyři nové obdélníky, abychom mohli využít střídavých úhlů, obrázek může vybadat následovně:



Obrázek 14: Doplnění úkolu 15 o obdélníky

Můžeme tedy sestavit následující rovnici:

$$\alpha = 14° - 10° + 33° - 26°$$

$$\alpha = 47° - 36°$$

$$\alpha = 11°$$

Velikost úhlu 11° odpovídá možnosti *(A)*.

Řešení 2:

Příklad si taky můžeme rozložit na menší trojúhelníky a dopočítat vždy všechny stupně v nich. Jako první můžeme dopočítat úhly v trojúhelnících, ve kterých je pravý úhel, tedy vrchní pravý a spodní levý.

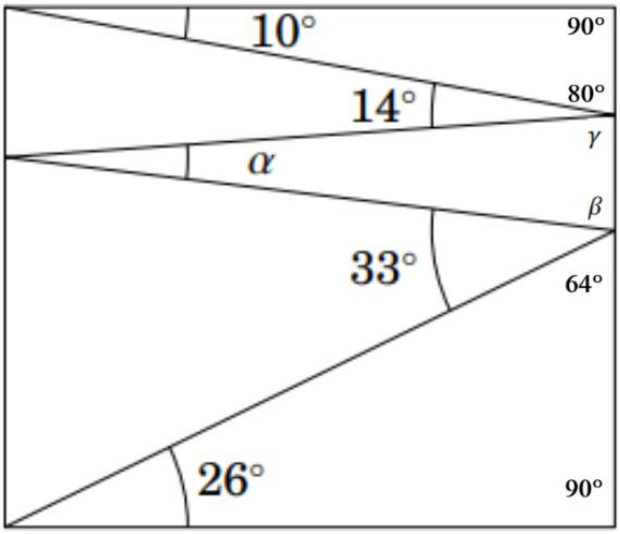
Ve vrchním trojúhelníku jsou úhly 10°, pak je tam pravý úhel, tedy 90°, a pak zbytek do 180°, tedy:

$$180° - 90° - 10° = 80°$$

Ve spodním trojúhelníku jsou úhly 26°, pravý úhel, tedy 90° a zbytek do 180°, tedy:

$$180° - 90° - 26° = 64°$$

Máme tedy takovýto obrázek:



Obrázek 15: Doplněné úhly k pravoúhlým trojúhelníkům

Úhly β, γ musíme ještě dopočítat:

$$\beta = 180° - 64° - 33°$$

$$\beta = 83°$$

$$\gamma = 180° - 80° - 14°$$

$$\gamma = 86°$$

Pro získání úhlu α už máme veškeré podstatné informace, rovnice tedy vypadá následovně:

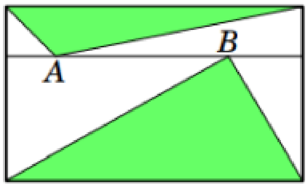
$$\alpha = 180° - \beta - \gamma$$

$$\alpha = 180° - 83° - 86°$$

$$\alpha = 11°$$

Úhel $11°$ je v nabídce možnost *(A)*.

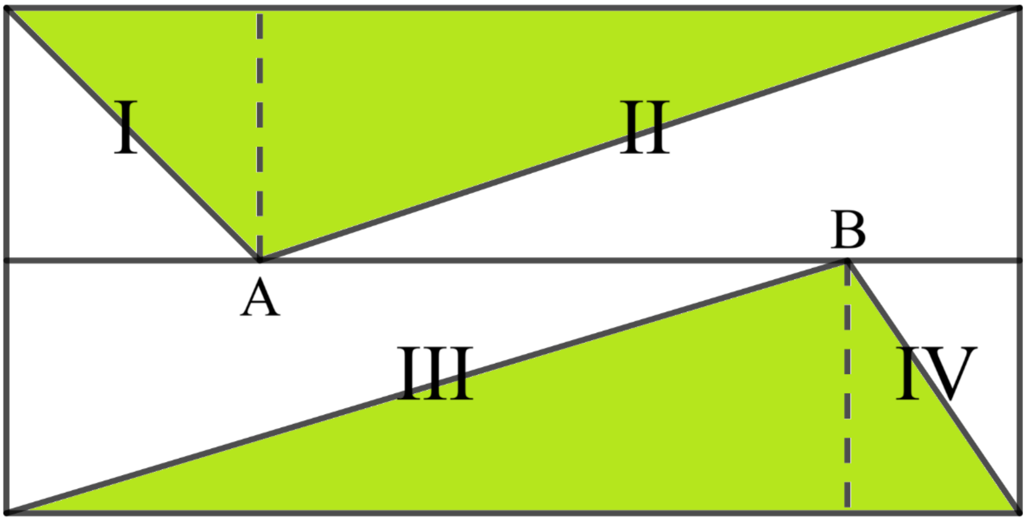
16) **(2018, 15.) Na obrázku je obdélník a přímka AB rovnoběžná s jeho stranou. Součet obsahů obou vyznačených trojúhelníků je 10 cm^2. Najděte obsah obdélníku.**



(A)$18\ cm^2$ *(B)*$20\ cm^2$ *(C)*$22\ cm^2$ *(D)* $24\ cm^2$ *(E)* *Záleží na poloze bodů* A, B.

Řešení 1:

Můžeme si vytvořit v obdélníků čtyři menší obdélníky:



Obrázek 16: Vytvořené menší obdélníky

V každém ze čtyř obdélníků tvoří vybarvená část přesně polovinu obsahu, tedy:

$$S_{vybarvené} = \frac{1}{2}S_I + \frac{1}{2}S_{II} + \frac{1}{2}S_{III} + \frac{1}{2}S_{IV}$$

$$S_{vybarvené} = \frac{1}{2}(S_I + S_{II} + S_{III} + S_{IV})$$

Víme tedy, že $S_{vybarvené}$ je polovina celé plochy, tedy ji vynásobíme dvěma, tak dostaneme obsah celé plochy:

$$S = 2 \cdot S_{vybarvené}$$

$$S = 2 \cdot 10\ cm^2$$

$$S = 20\ cm^2$$

V nabídce odpovědí je $20\ cm^2$ v možnosti *(B)*.

17) **(2019, 14.) Michal chová psy, slepice, morčata a klokany. Heleně prozradil, že celkem má 24 zvířat a že $\frac{1}{8}$ z nich jsou psi, $\frac{3}{4}$ z nich nejsou slepice a $\frac{2}{3}$ z nich nejsou morčata. Kolik klokanů Michal chová?**

*(A)*4 *(B)*5 *(C)*6 *(D)* 7 *(E)* 8

Řešení 1:

Ze zadání tedy víme, že:

$$Zvířata \dots\dots\dots\dots\dots.\dots\dots 24$$

$$Psi \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\dots\dots \frac{1}{8}z = 3$$

$$Slepice \dots\dots\dots z - \frac{3}{4}z = \frac{1}{4}z = 6$$

$$Morčata \dots.\dots..z - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}z = 8$$

$$Klokani \dots\dots\dots..\dots..zbytek$$

Sestavíme rovnici:

$$z = p + s + m + k$$

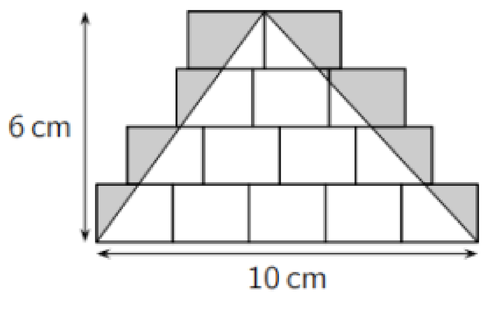
$$24 = 3 + 6 + 8 + k$$

$$24 - 17 = k$$

$$7 = k$$

Z nabídky odpovědí je číslo 7 v možnosti *(D).*

18) **(2019, 15.) Na mozaiku na obrázku složenou ze shodných obdélníků nakreslil Honza trojúhelník s vrcholy ve vrcholech obdélníků. Tento trojúhelník má jednu stranu délky $10\ cm$ a k ní příslušnou výšku $6\ cm$. Oblast vně trojúhelníku vybarvil. Určete její obsah.**



(A)$10\ cm^2$ *(B)*$12\ cm^2$ *(C)*$14\ cm^2$ *(D)* $15\ cm^2$ *(E)* $21\ cm^2$

Řešení 1:

Vidíme, že základna je složená z 5 obdélníků o celkové délce $10\ cm$, tím pádem délka jednoho obdélníku je:

$$10 \div 5 = 2\ cm$$

Na výšku jsou na sobě položeny 4 kostky o celkové výšce 6 cm, výška jednoho obdélníku je:

$$6\ \div 4 = 1{,}5\ cm$$

Obsah jednoho obdélníku je pak:

$$1{,}5 \cdot 2 = 3cm^2$$

Celkově je v pyramidě 14 obdélníků, obsah pyramidy je proto:

$$14 \cdot 3 = 42\ cm^2$$

Obsah trojúhelníku o základně 10 cm a výšce 6 cm je:

$$\frac{10 \cdot 6}{2} = 30\ cm^2$$

Pro zjištění obsahu vybarvené plochy potom stačí odečíst obsah trojúhelníku od obsahu pyramidy:

$$42 - 30 = 12cm^2$$

Obsah 12 cm^2 je v nabídce u možnosti *(B)*.

19) **(2020, 11.) Každý žák ve třídě plave nebo tančí nebo obojí. Tři pětiny plavou a tři pětiny tančí. Pět žáků plave i tančí. Kolik žáků je ve třídě?**

(A) 15 *(B)* 20 *(C)* 25 *(D)* 30 *(E)* 35

Řešení 1:

Celkový počet žáků označíme x. Pokud $\frac{3}{5}x$ plave, tak $\frac{2}{5}x$ jenom tančí. Obdobně pokud $\frac{3}{5}x$ tančí, tak jenom $\frac{2}{5}x$ plave. Žáků, kteří zároveň tančí a plavou, je:

$$x - \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}x = 5$$

$$\frac{1}{5}x = 5$$

Pokud chceme zjistit celkový počet žáků, tak stačí vynásobit počet žáků, kteří zároveň tančí i plavou, pětkou:

$$x = 5 \cdot 5$$

$$x = 25$$

Počet 25 je v nabídce v možnosti *(C)*.

Řešení 2:

Pro zjištění celkového počtu můžeme také sečíst žáky co plavou a žáky co tančí, od tohoto součtu ale musíme odečíst počet žáků, kteří plavou a tančí zároveň:

$$\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}x - 5 = x$$

Žáky, kteří provozují obě aktivity, odečítáme, jelikož už součtu plavců a tanečníků jsou obsaženi dvakrát. Rovnici upravíme na:

$$\frac{6}{5}x - 5 = x$$

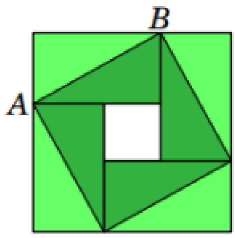
$$\frac{1}{5}x = 5$$

$$x = 25$$

Opět vyšlo, že počet všech žáků je 25, tedy možnost *(C)*.

20) **(2020, 14.) Velký čtverec na obrázku je složen ze čtyř shodných obdélníků a malého čtverce. Obsah velkého čtverce je $49\ cm^2$ a délka úhlopříčky AB jednoho z obdélníků je $5\ cm$. Vypočítej obsah malého čtverce.**

(A)$1\ cm^2$ *(B)*$4\ cm^2$ *(C)*$9\ cm^2$ *(D)* $16\ cm^2$ *(E)* $25\ cm^2$



Řešení 1:

Můžeme si všimnout, že velký čtverec se skládá ze světlezelených trojúhelníků, z tmavozelených trojúhelníků a bílého čtverce. Plocha světlezelených a tmavozelených je stejná. Obsah světlezelených trojúhelníků získáme při odečtení plochy, kterou tvoří diagonály v obdélnících, od plochy velkého čtverce, tedy:

$$S_{Tr} = 49 - 5^2$$

$$S_{Tr} = 49 - 25$$

$$S_{Tr} = 24\ cm^2$$

Obsah bílého čtverce můžeme nyní získat tak, že odečteme od obsahu velkého čtverce obsahy světlozelených a tmavozelených trojúhelníku, tyto plochy jsou shodné, takže odečteme od velkého čtverce dvojnásobek plochy trojúhelníků:

$$S_{Bílý} = 49 - 2 \cdot 24$$

$$S_{Bílý} = 49 - 48$$

$$S_{Bílý} = 1\ cm^2$$

1 cm^2 je v nabídce u možnosti *(A)*.

Řešení 2:

Víme, že obsah velkého čtverce je $49\ cm^2$, tedy jeho strana má $\sqrt{49} = 7\ cm.$ Jeho strana je složena ze stran obdélníků, tedy $a + b = 7$. Taky víme, že délka úhlopříčky je $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$. Máme teda dvě podmínky, které musí strany splňovat. Pro jejich zjištění se můžeme zaměřit na první podmínku, tedy že $a + b = 7$. To dostaneme z kombinace čísel:

$$(1, 6), (2, 5), (3,4)$$

Teď můžeme pro každou kombinaci zjistit, jestli by byla délka jejich přepony dlouhá 5 cm:

- $(1, 6) \to \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}$, tato kombinace tedy nevyhovuje.
- $(2, 5) \to \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$, tato kombinace tedy také nevyhovuje.
- $(3, 4) \to \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\ cm,$ tato kombinace tedy vyhovuje.

Kratší strana je tedy 3 cm dlouhá a delší strana je 4 cm dlouhá.

Teď máme dvě možnosti, jak přijít na obsah bílého čtverce. Buď si všimneme, že délka strany bílého čtverce je rozdíl delší strany obdélníku od kratší strany obdélníku:

$$a_{Bílý} = 4 - 3$$

$$a_{Bílý} = 1$$

Obsah je tedy:

$$S_{Bílý} = a_{Bílý}^2$$

$$S_{Bílý} = 1\ cm^2$$

Nebo pokud si toho nevšimneme, tak můžeme od obsahu velkého čtverce odečíst obsahy všech obdélníků, tedy:

$$S_{Bílý} = 49 - 4 \cdot a \cdot b$$

$$S_{Bílý} = 49 - 4 \cdot 12$$

$$S_{Bílý} = 1\ cm^2$$

V obou případech je obsah 1 cm^2, tedy možnost *(A)*.

4.3 Úlohy za 5 bodů

21) **(2016, 18.)** ***Theovy hodinky jdou o 10 minut pozadu, ale Theo se domnívá, že jdou o 5 minut napřed. Leovy hodinky jdou o 5 minut napřed, ale Leo se domnívá, že jdou o 10 minut pozadu. Ve stejném okamžiku se oba podívají na své hodinky. Theo si myslí, že je 12:00. Kolik hodin je podle Lea?***

(A) $11{:}30$ *(B)* $11{:}45$ *(C)* $12{:}00$ *(D)* $12{:}30$ *(E)* $12{:}45$

Řešení 1:

Při této úloze je potřeba si dát pozor na slovíčka, jelikož se člověk může rychle ztratit. Theovy hodinky jsou o $10\,minut$ pozadu, to znamená, že ukazují o $10\,minut$ méně a tím pádem musí $10\,minut$ odečíst od skutečného času. Theo se ale domnívá, že jdou o $5\,minut$ napřed. To znamená, že si v hlavě $5\,minut$ ještě odečte. Theo tedy říká čas, který je od skutečného času menší o $15\,minut$.

$$Č_T = Č_S - 15\,minut$$

Leo naproti tomu má opačný problém. Jeho hodinky jdou o $5\,minut$ napřed, tedy od skutečného času jsou vzdálené o $+5\,minut$. Leo si ale myslí, že jdou o $10\,minut$ pozadu, tedy on k tomu času přičte dalších $10\,minut$. Leův čas tedy je:

$$Č_L = Č_S + 15\,minut$$

Pokud si Theo myslí, že je $12{:}00$, pak skutečný čas je:

$$Č_T = Č_S - 15\,minut$$

$$Č_S = Č_T + 15\,minut$$

$$Č_S = 12{:}15$$

Získali jsme skutečný čas a z toho už lehce určíme, kolik si Leo myslí, že je hodin:

$$Č_L = Č_S + 15$$

$$Č_L = 12{:}30$$

Leo si tedy myslí, že je $12{:}30$, což je v nabídce možnost *(D)*.

Řešení 2:

Úlohu lze také vyřešit pomocí metody falešného předpokladu. Předpokládejme, že je 12:00. Pokud jdou Theovy hodinky o $10\,minut$ pozadu, tak ukazují $11{:}50$. On si ale myslí, že jdou o $5\,minut$ dopředu, takže odečte $5\,minut$, myslí si tedy, že je $11{:}45$.

Pro Lea uděláme stejný předpoklad, pokud je $12:00$ a jeho hodinky jdou o $10\ minut$ napřed, tak ukazují $12:10$. On si ale myslí, že jdou o $5\ minut$ pozadu, tedy přičte $5\ minut$ a myslí si, že je $12:15$.

Pokud si teda Theo myslí, že je $11:45$, tak si Leo myslí, že je $12:15$. Rozdíl mezi jejich časy je:

$$12:15 - 11:45 = 30\ minut$$

V zadání je napsáno, že si Theo myslí, že je $12:00$, Leův čas pak je o $30\ minut$ větší. Leo si tedy myslí, že je:

$$12:00 + 30\ minut = 12:30$$

Čas $12:30$ je v nabídce u možnosti *(D)*.

22) **(2016, 19.)** ***Dvanáct dívek nakoupilo v obchodě v průměru na osobu $\mathbf{1,5}$ trička. Žádná z nich si nekoupila více než dvě trička a dvě z nich si nekoupily žádné. Kolik dívek si koupilo dvě trička?***

(A) 2 *(B)* 5 *(C)* 6 *(D)* 7 *(E)* 8

Řešení 1:

Jestli 12 dívek v průměru nakoupilo 1,5 triček, pak jich celkově nakoupily:

$$T = 12 \cdot 1{,}5$$
$$T = 18$$

Ze zadání také víme, že 2 dívky si nekoupily žádné tričko. To znamená, že 10 dívek koupilo celkem 18 triček. Také víme, že žádná dívka si nekoupila více než 2 trička, proto můžeme napsat rovnici:

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = 18$$

Kde x je počet dívek, které si koupilo jedno tričko, a y je počet dívek, které si koupily dvě trička. Taky víme, že dohromady je jejich počet 10, tedy:

$$x + y = 10$$

Z těchto dvou rovnic můžeme sestavit následující soustavu rovnic:

$$\begin{array}{c} x + 2y = 18 \\ \underline{x + y = 10} \\ x + 2y = 18 \\ \underline{-x - y = -10} \\ y = 8 \end{array}$$

Vyšlo nám, že počet dívek, které si koupily 2 trička, je 8, což je v nabídce možnost *(E)*.

Řešení 2:

Pokud by nás nenapadlo sestavit soustavu rovnic, tak bychom klidně mohli začít zkoušet dosazovat do počtu dívek, které si koupily dvě trička:

- 10 dívek: Pokud by si koupilo 10 dívek 2 trička a žádná 1 tričko, tak by celkově nakoupily:

$$T = 2 \cdot 10 + 0 \cdot 1$$
$$T = 20$$

  Ze zadání víme, že jich měly koupit 18, takže tato možnost to být nemůže.

- 9 dívek: Pokud by si koupilo 9 dívek 2 trička a 1 dívka 1 tričko, tak by celkově nakoupily:

$$T = 2 \cdot 9 + 1 \cdot 1$$
$$T = 19$$

  Ze zadání víme, že jich měly koupit 18, takže tato možnost to být nemůže.

- 8 dívek: Pokud by si koupilo 8 dívek 2 trička a 2 dívka 1 tričko, tak by celkově nakoupily:

$$T = 2 \cdot 8 + 1 \cdot 2$$
$$T = 18$$

  Tento počet sedí s počtem ze zadání.

Zjistili jsme teda, že 2 trička si koupilo 8 dívek, tedy možnost *(E)*.

23) **(2017, 17.)** ***Loňského Běhu s Klokanem se zúčastnilo více než 800 běžců. Ženy tvořily*** $\mathbf{35}$ **%** ***startujících, mužů bylo o 252 více než žen. Kolik lidí se běhu zúčastnilo?***

(A) 802 *(B)* 810 *(C)* 822 *(D)* 824 *(E)* 840

Řešení 1:

Vytvoříme si zápis:

$$B\check{e}\check{z}ci \ldots\ldots\ldots\ldots\ x$$

$$\check{Z}eny \ldots\ldots\ldots 35\ \%\ z\ x = \frac{7}{20}x$$

$$Mu\check{z}i \ldots\ldots o\ 252\ v\acute{i}ce\ ne\check{z}\ \check{Z} = \frac{7}{20}x + 252$$

Rovnici můžeme sestavit následovně:

$$Ž + M = B$$

$$\frac{7}{20}x + \frac{7}{20}x + 252 = x$$

$$\frac{7}{10}x + 252 = x$$

$$252 = \frac{3}{10}x$$

$$840 = x$$

Celkový počet běžců byl tedy 840, což je možnost *(E)*.

Řešení 2:

Pokud se závodu účastnili jenom ženy a muži a žen bylo 35 %, pak muži museli tvořit zbytek do sta, tedy:

$$M = 100\ \% - 35\ \%$$

$$M = 65\ \%$$

Rozdíl, mezi nimi byl o 252. Toto číslo jsme schopni také vyjádřit v procentu, jelikož známe procentuální zastoupení mužů a žen:

$$R = 65\ \% - 35\ \%$$

$$R = 30\ \%$$

Víme tedy, že 30 % všech běžců je 252 lidí. Celkový počet běžců je pak:

$$B = 252 \cdot \frac{100}{30}$$

$$B = 840$$

Celkem se běhu tedy zúčastnilo 840 běžců, což je možnost *(E)*.

24) **(2017, 21.)** ***Autobusy odjíždí z letiště do centra města každé 3 minuty. Autobusy jedou z letiště do centra 60 minut a auto 35 minut. Auto vyjíždí z letiště současně s jedním autobusem a jede do centra stejnou cestou. Kolik autobusů auto na své do centra předjede, nepočítáme-li ten autobus, se kterým vyjíždí?***

(A) 8 *(B)* 9 *(C)* 10 *(D)* 11 *(E)* 13

Řešení 1:

Jestli že autobus jeden do centra 60 minut, pak auto ušetří:

$$60 - 35 = 25\ minut$$

Víme, že autobusy vyjíždí každé 3 minuty, takže stačí zjistit, kolik autobusů vyjelo za ušetřený čas:

$$25 \div 3 = 8,\overline{3}$$

Auto za celou dobu tedy předjede $8,\overline{3}$ autobusu, toto číslo musíme zaokrouhlit dolů, jelikož autobus nepředjel celý.

$$\lfloor 8,\overline{3} \rfloor = 8$$

Auto jedy za svou cestu předjede 8 autobusů, tedy možnost *(A)* je správně.

Řešení 2:

Na cestě je celkově:

$$60 \div 3 = 20\ autobus\text{ů}$$

První autobus nemáme počítat, auto má tedy před sebou ještě 19 $autobus$ů. Víme, že auto dojede za 35 $minut$. Každý autobus je vzdálený od centra podle své pozice, nejvzdálenější autobus je od centra 3 $minuty$, druhý nejvzdálenější autobus je od centra 6 $minut$ atd. Zbývající čas by se dal tedy zapsat jako:

$$Č_Z = 3x$$

Díky tomu jsme schopni zjistit, kolikátý autobus stihne za 35 $minut$ dojet do centra:

$$35 = 3x$$

$$11,\overline{6} = x$$

Toto číslo musíme opět zaokrouhlit dolů, jelikož 12. autobus nestihl dojet do centra včas.

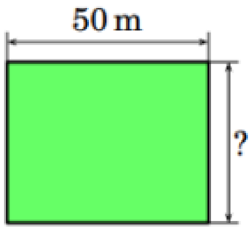
$$\lfloor 11,\overline{6} \rfloor = 11$$

Jestliže stihlo do centra dojet 11 autobusů, pak počet těch, které to před autem nestihly, je:

$$19 - 11 = 8$$

I v tomto případě vyšlo 8 autobusů, tedy možnost *(A)*.

25) **(2018, 20.)** ***Matěj běhá po obvodu obdélníkového bazénu o délce 50 m, zatímco Kamil plave tento bazén na délku. Matěj běží třikrát rychleji, než Kamil plave. Kamil uplaval šest délek bazénu za stejnou dobu, za kterou Matěj oběhl bazén pětkrát dokola. Určete šířku bazénu.***



(A) $25\ cm$ *(B)* $40\ cm$ *(C)* $50\ cm$ *(D)* $80\ cm$ *(E)* $180\ cm$

Řešení 1:

Jako první si zjistíme, kolik metrů naplaval Kamil, jelikož k tomu známe všechny údaje:

$$m_K = 50 \cdot 6$$
$$m_K = 300\ m$$

Kamil tedy uplaval $300\ m$. Víme, že Matěj běhá třikrát rychleji, co Kamil plave, musel tedy naběhat:

$$m_M = 300 \cdot 3$$
$$m_M = 900\ m$$

Matěj tedy naběhal $900\ m$, což odpovídalo pěti oběhnutí celého bazénu. Obvod bazénu je tím pádem:

$$o = 900 \div 5$$
$$o = 180\ m$$

Obvod obdélníků má vzorec $o = 2(a + b)$, a jelikož známe délku jedné strany, tak můžeme do vzorce dosadit:

$$180 = 2(50 + b)$$
$$180 = 100 + 2b$$
$$80 = 2b$$
$$40\ m = b$$

Šířka bazénu tedy musí být $40\ m$, což je v možnost *(B)*.

26)* (2018, 21.) *Adam, Bořek a Cyril šli nakupovat. Bořek utratil jen* $\mathbf{15}$ % *toho, co utratil Cyril. Adam utratil o* $\mathbf{60}$ % *více než Cyril. Dohromady všichni tři utratili 55 Kč. Kolik utratil Adam?

(A) $3\ Kč$ *(B)* $20\ Kč$ *(C)* $25\ Kč$ *(D)* $26\ Kč$ *(E)* $32\ Kč$

Řešení 1:

Vytvoříme si zápis:

$$Útrata \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots 55\ Kč$$

$$Cyril \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x\ Kč$$

$$Bořek \ldots\ldots\ldots\ldots..\ldots 15\%\ z\ x = 0{,}15x\ Kč$$

$$Adam \ldots\ldots o\ 60\ \%\ více, než\ x = 1{,}6x\ Kč$$

Rovnice by potom mohla vypadat následovně:

$$55 = x + 0{,}15x + \ 1{,}6x$$

$$55 = 2{,}75x$$

$$20\ Kč = x$$

Pozor, jako x jsme označili Cyrila, v zadání se nás ptají na Adama, takže částka, kterou utratil Adam je:

$$A = 1{,}6 \cdot 20$$

$$A = 32\ Kč$$

Adam tedy utratil $32\ Kč$, což je v nabídce možnost *(E)*.

Řešení 2:

K řešení můžeme přijít i za pomoci využití poměru. Poměr mezi Bořkem a Cyrilem je:

$$15{:}\ 100$$

Poměr mezi Cyrilem a Adamem je:

$$100{:}\ 160$$

Celý poměr by tedy vypadal následovně:

$$15{:}\ 100{:}\ 160$$

Tento poměr můžeme zkrátit na:

$$3{:}\ 20{:}\ 32$$

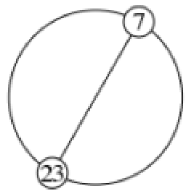
Víme, že dohromady nám poměry musí dát $55\ Kč$, proto jejich součet vynásobíme x, abychom zjistil kolikrát musíme každé číslo zvětšit, abychom dostali přesnou hodnotu:

$$x(3 + 20 + 32) = 55$$

$$55x = 55$$
$$x = 1$$

Jelikož $x = 1$, tak nemusíme čísla násobit. V poměru byl Adam na třetí pozici, takže číslo 32 by mělo odpovídat jeho útratě, 32 Kč je v nabídce u možnosti *(E)*.

27) **(2019, 17.)** ***Přirozená čísla od 1 do n včetně jsou v tomto pořadí rovnoměrně rozmístěna po celé kružnici (sousední čísla jsou tedy od sebe stejně vzdálena). Průměr kružnice spojuje čísla 7 a 23, jak je znázorněno na obrázku. Určete n.***



(A) 30 *(B)* 32 *(C)* 34 *(D)* 36 *(E)* 38

Řešení 1:

Rozdíl mezi čísly 7 a 23 je dalších 16 čísel, to znamená, že na kružnici se nachází 16 dvojic, tedy:

$$16 \cdot 2 = 32\ \check{c}\acute{\imath}sel$$

Na kružnici tedy bude 32 čísel, což odpovídá možnosti *(B)*.

Řešení 2:

Mezi čísly 7 a 23 je dalších 15 čísel, to znamená, že na levou a zároveň i na pravou stranu od čísla 7 bude 15 čísel až k číslu 23, to nám tedy dělá:

$$1 + 2 \cdot 15 + 1 = 32\ \check{c}\acute{\imath}sel$$

Na kružnici tedy bude 32 čísel, což odpovídá možnosti *(B)*.

Řešení 3:

Můžeme si jednotlivé dvojice vypsat, jako první potřebujeme dojít k číslu 1 a najít pro něj dvojici:

$$(7, 23) \to (6, 22) \to (5, 21) \to (4, 20) \to (3, 19) \to (2, 18) \to (1, 17)$$

Zjistili jsme, že na čísle 17 se v kruhu vracíme na první číslo, tím pádem největší číslo na kružnici bude naproti číslu 16, takže můžeme vytvářet dvojice od 7 až po 16:

$$(7, 23) \to (8, 24) \to (9, 25) \to (10, 26) \to (11, 27) \to (12, 28) \to (13, 29) \to (14, 30)$$
$$\to (15, 31) \to (16, 32)$$

Takže největší číslo na kružnici je 32, což je v nabídce u možnosti *(B)*.

28) **(2019, 21.)** ***Petra měla velkou krabici se 60 bonbony. Začala je jíst, a to tak, že v pondělí snědla $\frac{1}{10}$ z nich, v úterý snědla $\frac{1}{9}$ zbytku, ve středu snědla $\frac{1}{8}$ zbytku bonbonů, ve čtvrtek $\frac{1}{7}$ zbytku bonbonů a tak dále, dokud nesnědla polovinu zbytku bonbonů z předchozího dne. Kolik bonbonů jí potom zůstalo?***

(A) 1 *(B)* 2 *(C)* 3 *(D)* 4 *(E)* 6

Řešení 1:

Petra pokaždé sní 6 bonbonů, tím pádem jí musí zbýt 6 bonbonů, aby snědla polovinu. Z toho vyplývá, že možnost *(E)* je správně.

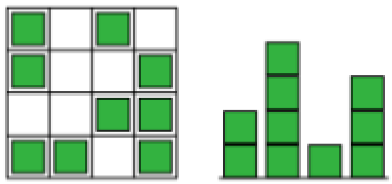
Řešení 2:

Můžeme jít postupně den po dni:

- Pondělí: $\frac{1}{10}$ z 60 → sní 6 bonbonů a 54 jich zbude
- Úterý: $\frac{1}{9}$ z 54 → sní 6 bonbonů a 48 jich zbude
- Středa: $\frac{1}{8}$ z 48 → sní 6 bonbonů a 42 jich zbude
- Čtvrtek: $\frac{1}{7}$ z 42 → sní 6 bonbonů a 36 jich zbude
- Pátek: $\frac{1}{6}$ z 36 → sní 6 bonbonů a 30 jich zbude
- Sobota: $\frac{1}{5}$ z 30 → sní 6 bonbonů a 24 jich zbude
- Neděle: $\frac{1}{4}$ z 24 → sní 6 bonbonů a 18 jich zbude
- Pondělí: $\frac{1}{3}$ z 18 → sní 6 bonbonů a 12 jich zbude
- Úterý: $\frac{1}{2}$ z 12 → sní 6 bonbonů a 6 jich zbude

Vidíme, že v posledním úterý sní stejný počet, jako jí zbude, tedy 6 bonbonů, což je v možnosti *(E)*.

29) **(2020, 17.)** ***Irena postavila ze stejných dřevěných kostek model města. Na jednom z obrázků vidíš pohled na město shora a na druhém pohled z boku, nevíme však ze které strany. Vypočítej největší možný počet použitých kostek pro vytvoření tohoto modelu.***



(A) 25 *(B)* 24 *(C)* 23 *(D)* 22 *(E)* 21

Řešení 1:

Druhý obrázek si můžeme popsat jako:

$$(2, 4, 1, 3)$$

Kde každé číslo reprezentuje počet kostek na sobě. Vidíme, že největší číslo je 4, takže budeme hledat pohled s největším číslem na druhé pozici. Pokud by nám to nedalo jeden pohled, tak budeme hledat mezi vybranými pohledy pohled s největším číslem na čtvrté pozici. Pokud ani to nebude stačit, tak bude potřeba mezi vybranými pohledy najít pohled s největším číslem na první pozici.

První obrázek můžeme popsat podle pohledů na čtverec následovně:

- Spodní pohled → $(3, 1, 2, 3)$
- Pravý pohled → $(3, 2, 2, 2)$
- Vrchní pohled → $(3, 2, 1, 3)$
- Levý pohled → $(2, 2, 2, 3)$

Hledáme tedy pohledy s největším číslem na druhé pozici, těmi jsou pohledy:

- Pravý pohled → $(3, 2, 2, 2)$
- Vrchní pohled → $(3, 2, 1, 3)$
- Levý pohled → $(2, 2, 2, 3)$

Nyní je potřeba najít pohled s největším číslem na čtvrté pozici:

- Vrchní pohled → $(3, 2, 1, 3)$
- Levý pohled → $(2, 2, 2, 3)$

Z těchto dvou pohledů vybereme ten, který má větší číslo na první pozici. Tím je pohled $(3, 2, 1, 3)$. Počet kostek získáme vynásobením tohoto pohledu s počty kostek na jednotlivých pozicích, tedy:

$$(3, 2, 1, 3) \cdot (2, 4, 1, 3) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 24$$

Vyšlo nám 24 kostek, což je v nabídce možnost *(B)*.

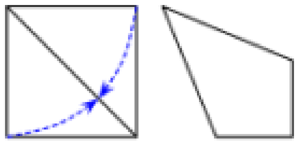
Řešení 2:

Projdeme si všechny strany čtverce vlevo a vybereme následně největší počet kostek, který nám vzejde:

- Spodní pohled → $3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 21$
- Pravý pohled → $3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 22$
- Vrchní pohled → $3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 24$
- Levý pohled → $2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 23$

Největší počet kostek nám vzešel z vrchního pohledu, kde by maximálně mohlo být 24 kostek. V nabídce odpovědí je to možnost *(B)*.

30)* (2020, 18.) *Zuzana vzala čtvercový list papíru, složila jeho dvě sousední strany k úhlopříčce, jak je znázorněno na obrázku, a dostala tak čtyřúhelník. Urči velikost největšího vnitřního úhlu tohoto čtyřúhelníku?



(A) $112{,}5°$ *(B)* $120°$ *(C)* $125°$ *(D)* $135°$ *(E)* $150°$

Řešení 1:

Úhel v levém horním rohu se vlivem přehnutí sousedních rohů k úhlopříčce zmenšil na polovinu, namísto $90°$ je tam nyní $45°$. Čtyřúhelník se tedy skládá z jednoho pravého úhlu, dvou stejně velkých tupých úhlů, jejichž velikost máme zjistit, a jednoho ostrého úhlu, který je $45°$. Součet vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku je vždy $360°$, můžeme tedy napsat:

$$90° + 45° + 2\alpha = 360°$$

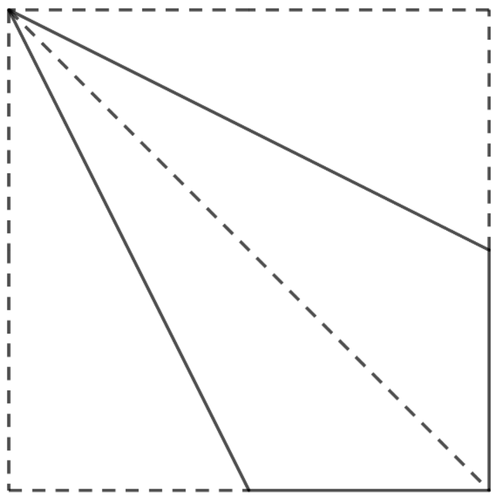
$$2\alpha = 225°$$

$$\alpha = 112{,}5°$$

Vyšlo nám, že tupý úhel ve čtyřúhelníku má $112{,}5°$, což je možnost *(A)*.

Řešení 2:

Můžeme si vytvořit pomocný trojúhelník, dostaneme tedy následující obrázek:

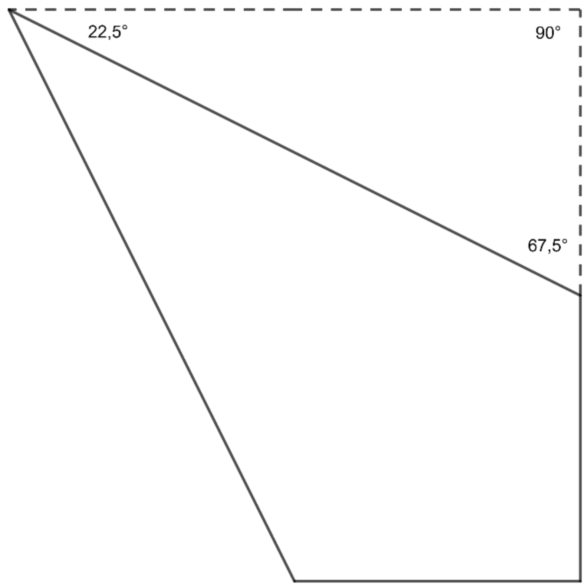


Obrázek 17: Přidání trojúhelníků k doplnění do čtverce

V levé vrchním rohu se úhel $90°$ rozdělil na čtyři stejné úhly o velikosti $22{,}5°$. Teď si můžeme vybrat libovolný malý trojúhelník, ve kterém dopočítáme stupně. Trojúhelník se skládá z jednoho pravého úhlu, úhlu $22{,}5°$ a jednoho neznámého, který vypočteme jako:

$$90° - 22{,}5° = \ 67{,}5°$$

Náš obrázek tedy vypadá nyní takto:



Obrázek 18: Úhly v pomocném trojúhelníku

Potřebujeme zjistit, kolik je tupý úhel ve čtyřúhelníku, na který už můžeme přijít:

$$180° - 67{,}5° = 112{,}5°$$

Tupý úhel má tedy $112{,}5°$, což odpovídá možnosti *(A)*.

5. Příprava vlastních úloh různých obtížností splňující zásady úloh Matematický Klokan

Jak již bylo zmíněno v podkapitole věnující se pravidlům kategorií Klokánek, Benjamín a Kadet, tak Matematický klokan má v této kategorii 24 úloh a na řešení je soutěžícím poskytnuto 60 minut. To znamená, že hodina musí být speciálně upravená tak, aby bylo využito veškerého poskytnutého času. A jelikož nechci způsobovat zbytečné komplikace ve školách, ve kterých žáci budou řešit mé úlohy, tak sestavím „pouze“ 9 úloh, tedy po třech úlohách za každé bodové ohodnocení.

Inspirací pro tvorbu úloh mi byly sborníky, a to jak od české soutěže, které jsou dostupné na stránkách Univerzity Palackého v Olomouci, tak i sborník s úlohami, ze kterých si následně každá země vybírá, který je zveřejněn na stránkách Matematica.pt. Většina úloh je vytvořena tak, aby se dali vyřešit jak elegantně za pomoci logického myšlení, tak za pomoci aplikování naučených matematických postupů, které budou mnohdy zdlouhavější, ale dovedou k výsledku.

5.1. Zadání

Úlohy za 3 body

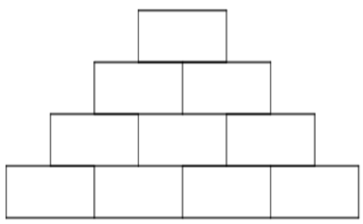
1) Na turnaj ve streetballu se přihlásilo 168 lidí. Organizátoři chtějí týmy rozdělit tak, aby v každém týmu byl stejný počet lidí. Které z těchto čísel nemůže být počet lidí v jednom týmu?

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6　(E) 7

2) Součet tří po sobě jdoucích čísel je 81. Jaký je rozdíl mezi největším a nejmenším číslem z této trojice?

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4　(E) Žádný

3) Kolik bude potřeba kostek kvádru na sestavení pyramidy se základnou 4x4 kostky?



(A) 10　(B) 20　(C) 30　(D) 40　(E) 50

Úlohy za 4 body

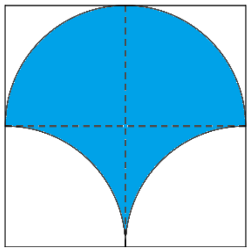
4) Pro které číslo nejsou současně dělitelem čísla 4, 6 a 9?

(A) 9864 (B) 5796 (C) 2880 (D) 9876 (E) 1836

5) Při volejbalovém utkaní je v jeden okamžik na hřišti právě 12 hráčů. Když Petra s Patrikem vystřídají Lukáš s Ludvíkem, tak se poměr leváků ku pravákům na hřišti zvýšil z poměru 1:5 na 1:2. Kolik leváků je právě na hřišti?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

6) Jaký je obsah „kapky“, jestliže délka strany velkého čtverce je 2 cm a délka strany malého čtverce je 1 cm? (Za π dosazuj $\frac{22}{7}$)



(A) 1 cm^2 (B) 2 cm^2 (C) 3 cm^2 (D) π cm^2 (E) 4 cm^2

Úlohy za 5 bodů

7) Jaká další tři čísla budou následovat v této řadě: 3, 4, 2, 5, … , … , … ?

(A) 7, 3, 9 (B) 5, 7, 9 (C) 2, 3, 4 (D) 3, 4, 2 (E) 1, 6, 0

8) Jaké dostaneme číslo, pokud od součtu prvních 25 sudých přirozených čísel odečteme součet prvních 25 lichých přirozených čísel?

(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 30 (E) 0

9) Do pekařské soutěže se přihlásilo 78 % žen, mužů bylo o 700 méně. Kolik lidí se celkově přihlásilo do soutěže?

(A) 1250 (B) 2250 (C) 2500 (D) 3182 (E) Jiné

5.1 Řešení úloh

Úlohy za 3 body

1) ***Na turnaj ve streetballu se přihlásilo 168 lidí. Organizátoři chtějí týmy rozdělit tak, aby v každém týmu byl stejný počet lidí. Které z těchto čísel nemůže být počet lidí v jednom týmu?***

(A) 3 *(B) 4* *(C) 5* *(D) 6* *(E) 7*

Řešení 1:

Můžeme si vzpomenout na znaky dělitelnosti:

- Pro trojku musí být ciferný součet čísla dělitelný třemi. $1 + 6 + 8 = 15$. Patnáct jde dělit třemi, tudíž *(A)* nebude naše hledaná možnost.
- Pro čtverku platí, že poslední dvoučíslí musí být dělitelné čtverkou, tedy $68 \div 4 = 17$. Možnost *(B)* tedy taky není naše hledané číslo.
- Aby číslo bylo dělitelné pěti, tak musí být na poslední cifře buď číslo 0, nebo číslo 5. Vidíme, že na poslední cifře je číslo 8, tudíž pětka není dělitelem čísla 168 a možnost *(C)* je správně.

Řešení 2:

Pokud si nepamatujeme znaky dělitelnosti, tak můžeme dělit číslo 168 každým číslem z nabídky:

- $168 \div 3 = 56$, takže trojka nevyhovuje.
- $168 \div 4 = 42$, tudíž také nevyhovuje
- $168 \div 5 = 33{,}6$, pětka není dělitelem, tudíž možnost *(C)* je správně

2) ***Součet tří po sobě jdoucích čísel je 81. Jaký je rozdíl mezi největším a nejmenším číslem z této trojice?***

(A) 1 *(B) 2* *(C) 3* *(D) 4* *(E) Žádný*

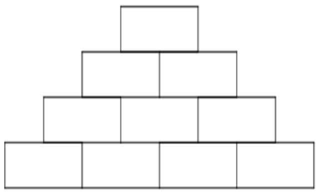
Řešení 1:

Stačí si uvědomit, že pokud jde o tři po sobě jdoucí čísla, tedy $n, n+1, n+2$, tak rozdíl mezi největším a nejmenším je $n+2-n=2$, tedy možnost *(B).*

Řešení 2:

Můžeme vypočítat přesná čísla, o která se jedná, a to např. za pomoci zjištění prostředního čísla z trojice, na které se přijde $81 \div 3 = 27$. Menší číslo je pak o jedna menší než prostřední číslo, tedy 26, a největší číslo je o jedna větší než prostřední číslo, tedy 28. Rozdílem pak je $28-26=2$, tedy možnost *(B).*

3) ***Kolik bude potřeba kostek kvádrů na sestavení pyramidy se základnou 4x4 kostky?***



(A) 10 *(B) 20* *(C) 30* *(D) 40* *(E) 50*

Řešení 1:

Tady stačí jít postupně po patrech pyramidy:

- $4 \cdot 4 = 16$ kvádrů na základně,
- $3 \cdot 3 = 9$ kvádrů na druhém patře,
- $2 \cdot 2 = 4$ kvádrů na třetím patře,
- $1 \cdot 1 = 1$ kvádrů na posledním patře.

Součet kvádrů nám potom dá výslednou hodnotu, tedy $16+9+4+1=30$, což je možnost *(C).*

Úlohy za 4 body

4) ***Pro které číslo nejsou současně dělitelem čísla 4, 6 a 9?***

(A) 9864 *(B) 5796* *(C) 2880* *(D) 9876* *(E) 1836*

Řešení 1:

Najdeme nejmenší společný násobek pro čísla $4, 6\ a\ 9$, tedy $NSD(4,6,9) = 36$. Hledáme tedy číslo, pro které není číslo 36 dělitelem.

- $9864 \div 36 = 274$, nevyhovuje tedy hledanému číslu,
- $5796 \div 36 = 161$, nevyhovuje tedy hledanému číslu,
- $2880 \div 36 = 80$, nevyhovuje tedy hledanému číslu,
- $9876 \div 36 = 274,\overline{3}$, číslo 36 tady není dělitelem, tudíž odpověď *(D)* vyhovuje.

Řešení 2:

Můžeme opět využít znaky dělitelnosti, pro naše čísla tedy platí:

- 4 – poslední dvojčíslí musí být dělitelné čtyřkou,
- 6 – číslo je dělitelné dvojkou a trojkou současně,
- 9 – ciferný součet musí být dělitelný devítkou.

Podmínku pro dělitelnost šestkou můžeme v tomto případě vynechat, protože pokud je číslo dělitelné čtverkou, pak je automaticky dělitelné i dvojkou, a pokud je číslo dělitelné devíti, tak je automaticky dělitelné i trojkou, tedy pokud bude splněna podmínka pro číslo 4 i číslo 9, tak je automaticky splněna podmínka i pro číslo 6.

Projdeme si tedy čísla postupně:

- 9864, poslední dvojčíslí je 64 a $4|64$. Ciferný součet je zde 27 a $9|27$. Nevyhovuje tedy hledanému číslu,
- 5796, poslední dvojčíslí je 96 a $4|96$. Ciferný součet je zde 27 a $9|27$. Nevyhovuje tedy hledanému číslu,
- 2880, poslední dvojčíslí je 80 a $4|80$. Ciferný součet je zde 18 a $9|18$. Nevyhovuje tedy hledanému číslu,
- 9876, poslední dvojčíslí je 76 a $4|76$. Ciferný součet je zde 30, ale neplatí $9|30$. 9876, tedy možnost *(D)* je naše hledané číslo.

Řešení 3:

Pokud si ani na jedno pravidlo nevzpomeneme, tak můžeme každé číslo z nabídky možností dělit $4, 6\ a\ 9$:

- 9864 – $9864 \div 4 = 2466$, $9864 \div 6 = 1644$ a $9864 \div 9 = 1096$. Čísla $4, 6\ a\ 9$ jsou děliteli, tudíž číslo 9864 nevyhovuje zadání.
- 5796 – $5796 \div 4 = 1449$, $5796 \div 6 = 966$ a $5796 \div 9 = 644$. Čísla $4, 6\ a\ 9$ jsou děliteli, tudíž číslo 5796 nevyhovuje zadání.
- 2880 – $2880 \div 4 = 720$, $2880 \div 6 = 480$ a $2880 \div 9 = 320$. Čísla $4, 6\ a\ 9$ jsou děliteli, tudíž číslo 2880 nevyhovuje zadání.
- 9876 – $9876 \div 4 = 2469$, $9876 \div 6 = 1646$ a $9876 \div 9 = 1097,\overline{3}$. Čísla $4\ a\ 6$ jsou děliteli, číslo 9 dělitelem není, tudíž podmínka není splněna a našli jsme hledanou možnost, a to možnost *(D)*.

5) ***Při volejbalovém utkaní je v jeden okamžik na hřišti právě 12 hráčů. Když Petra s Patrikem vystřídají Lukáš s Ludvíkem, tak se poměr leváků ku pravákům na hřišti zvýšil z poměru 1:5 na 1:2. Kolik leváků je právě na hřišti?***

(A) 2 *(B) 3* *(C) 4* *(D) 5* *(E) 6*

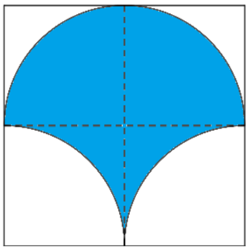
Řešení 1:

V zadání je hnedka napsané, že poměr je $LEVÁCI : PRAVÁCI$, zajímá nás tedy levé číslo. Pokud po vystřídání je poměr $1:2$, tak to při 12 hráčích dělá $12 \div (1+2) \cdot 1 = 4$. Na hřišti jsou 4 leváci, tedy možnost *(C)*.

Řešení 2:

Víme, že na hřišti je 12 hráčů v poměru $1:5$, tedy rozdělení je $2:10$. Po střídání se poměr změnil na $1:2$, tedy při 12 hráčích na $4:8$. Víme, že po vystřídání se zvýšil počet leváků na hřišti, v poměru se zvětšovalo první číslo, a to ze 2 na 4. Leváků tedy po střídání jsou 4, což je možnost *(C)*.

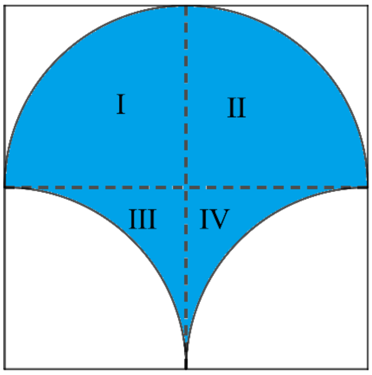
6) ***Jaký je obsah „kapky", jestliže délka strany velkého čtverce je 2 cm a délka strany malého čtverce je 1 cm? (Za π dosazuj $\frac{22}{7}$)***



(A) $1\ cm^2$ *(B)* $2\ cm^2$ *(C)* $3\ cm^2$ *(D)* $\pi\ cm^2$ *(E)* $4\ cm^2$

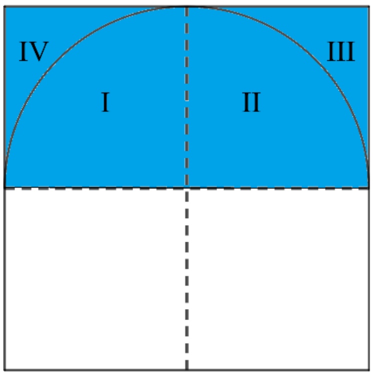
Řešení 1:

Můžeme si všimnout, že to, co chybí ve vrchním obdélníku, je právě vybarveno ve spodním obdélníku:



Obrázek 19: Označení dílků v kapce

Přidáme tedy k dílku I dílek IV a k dílku II dílek III, dostaneme potom následující obrázek:

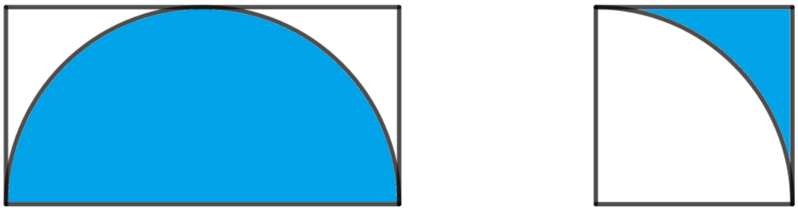


Obrázek 20: Přenesení dílků

Na získání obsahu stačí vypočítat obsah obdélníku o délkách stran $1\ a\ 2$, tedy $1 \cdot 2 = 2$ a to je možnost *(B)*.

Řešení 2:

Obrázek si můžeme rozdělit na dvě části, a to vrchní obdélník a jeden spodní čtverec.



Obrázek 21: Rozdělení na díly

- Ve vrchním obdélníků je obsah vybarvené částí $\frac{\pi \cdot r^2}{2}$, po dosazení tedy obsah $\frac{\frac{22}{7} \cdot 1^2}{2} = \frac{11}{7}\ cm^2$.
- V jednom ze spodních čtverců je obsah vybarvené části $1 - \frac{\pi \cdot r^2}{4}$, po dosazení $1 - \frac{\frac{22}{7} \cdot 1^2}{4} = 1 - \frac{11}{14} = \frac{3}{14}$.
- Celý obsah vybarvené částí je pak obsah ve vrchním obdélníku a dvakrát obsah vybarvené části ve spodním čtverci, tedy $\frac{11}{7} + 2 \cdot \frac{3}{14} = \frac{14}{7} = 2\ cm^2$, tedy možnost *(B)*.

Úlohy za 5 bodů

7) ***Jaká další tři čísla budou následovat v této řadě: 3, 4, 2, 5, … , … , … ?***

(A) 7, 3, 9 *(B) 5, 7, 9* *(C) 2, 3, 4* *(D) 3, 4, 2* *(E) 1, 6, 0*

Řešení 1:

Můžeme si všimnout jistého vzorce z prvních čtyř čísel:

- $3 \rightarrow 4\ (+1)$
- $4 \rightarrow 2\ (-2)$
- $2 \rightarrow 5\ (+3)$
- Pokračujeme dál ve vzorci:
- $5 \rightarrow \mathbf{1}\ (-4)$
- $1 \rightarrow \mathbf{6}\ (+5)$
- $6 \rightarrow \mathbf{0}\ (-6)$

Vyšla trojice čísel $1, 6, 0$. To odpovídá možnosti *(E)*.

8) ***Jaké dostaneme číslo, pokud od součtu prvních 25 sudých přirozených čísel odečteme součet prvních 25 lichých přirozených čísel?***

(A) 15 *(B) 20* *(C) 25* *(D) 300* *(E) 0*

Řešení 1:

Prvních 25 přirozených sudých čísel jsou čísla $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50$. Prvních 25 přirozených lichých čísel jsou čísla $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49$. Můžeme si všimnout, že rozdíl mezi prvním sudým a prvním lichým je 1, rozdíl mezi druhým sudým a druhým lichým je také 1, rozdíl mezi sudým číslem a lichým číslem na stejné pozici je tedy vždy 1. Je zapotřebí rozhodnout jaký je rozdíl mezi 25 přirozenými sudými a lichými čísly, tedy $25 \cdot 1 = 25$. To odpovídá možnosti *(C)*.

Řešení 2:

Sečteme prvních deset sudých přirozených čísel, tedy $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30 + 32 + 34 + 36 + 38 + 40 + 42 + 44 + 46 + 48 + 50 = 650$. Součet prvních deseti lichých přirozených čísel je $1 + 3 + 5 + 7 + 9 +$

$11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 + 43 + 45 + 47 + 49 = 625$. Rozdíl mezi nimi je $650 - 625 = 25$, což je možnost *(C)*.

9) ***Do pekařské soutěže se přihlásilo 78 % žen, mužů bylo o 700 méně. Kolik lidí se celkově přihlásilo do soutěže?***

(A) 1250 *(B) 2250* *(C) 2500* *(D) 3182* *(E) Jiné*

Tato úloha je pouze lehce pozměněná 17. úloha z Matematického klokana 2017. Rozhodl jsem se ji sem vložit, jelikož mi ze všech řešených úloh způsobila největší problémy, i když úloha ve své podstatě není příliš těžká, tak se v ní dá lehce zamotat.
Jelikož se jedná o typově stejnou úlohu, jako je *(2017,17)*, tak i způsob řešení je stejný, jenom s jinými čísly.

Řešení 1:

Vytvoříme si zápis:

$$Přihlášek \dots\dots\dots\dots\; x$$

$$Ženy \dots\dots\dots 78\ \%\ z\ x = \ 0{,}78x$$

$$Muži \dots\dots\ o\ 700\ méně\ než\ Ž = \ 0{,}78x - 700$$

Rovnici můžeme sestavit následovně:

$$Ž + M = P$$

$$0{,}78x + 0{,}78x - 700 = x$$

$$1{,}56x - 700 = x$$

$$0{,}56x = 700$$

$$x = 1250$$

Celkový počet přihlášek byl tedy 1250, což je možnost *(A)*.

Řešení 2:

Pokud se závodu účastnili jenom ženy a muži a žen bylo 78 %, pak muži museli tvořit zbytek do sta, tedy:

$$M = 100\ \% - 78\ \%$$

$$M = 22\ \%$$

Rozdíl, mezi nimi byl o 700. Toto číslo jsme schopni také vyjádřit v procentu, jelikož známe procentuální zastoupení mužů a žen:

$$R = 78\% - 22\ \%$$

$$R = 56\ \%$$

Víme tedy, že $56\ \%$ všech přihlášek je 700 lidí. Celkový počet přihlášek je pak:

$$P = 700 \cdot \frac{100}{56}$$

$$P = 1250$$

Celkem se přihlásilo 1250 lidí, což je možnost *(A)*.

6. Statistické vyhodnocení výzkumného šetření

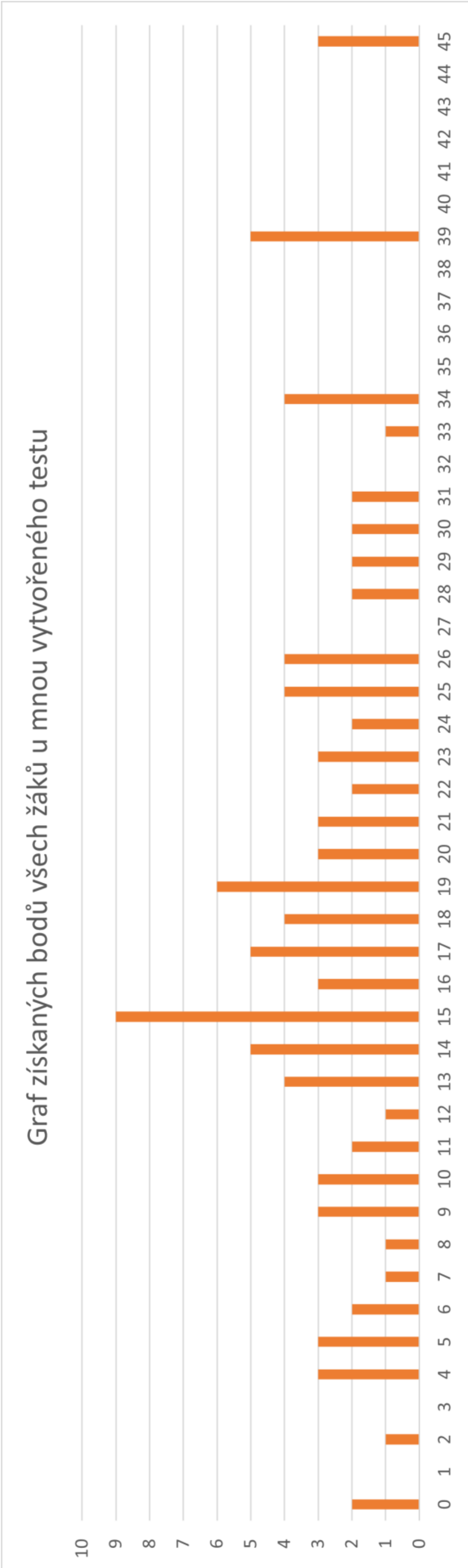
Výzkumné šetření proběhlo na dvou školách, a to na ZŠ Andělská Hora dne 14.3.2025 a na ZŠ Bruntál Okružní dne 19.3.2025. Celkově si mých 9 úloh vyzkoušelo 100 žáků a tabulka četnosti vypadá následovně:

45	3	**29**	2	**13**	4
44	0	**28**	2	**12**	1
43	0	**27**	0	**11**	2
42	0	**26**	4	**10**	3
41	0	**25**	4	**9**	3
40	0	**24**	2	**8**	1
39	5	**23**	3	**7**	1
38	0	**22**	2	**6**	2
37	0	**21**	3	**5**	3
36	0	**20**	3	**4**	3
35	0	**19**	6	**3**	0
34	4	**18**	4	**2**	1
33	1	**17**	5	**1**	0
32	0	**16**	3	**0**	2
31	2	**15**	9		
30	2	**14**	5		

Tabulka 12: Tabulka výsledků všech zúčastněných žáků výzkumného šetření

Aritmetický průměr je zde $\bar{x} \cong 19{,}46$ bodů, modus je zde $\hat{x} = 15$ bodů a mediánem je $\tilde{x} = 18$ bodů. Rozptyl $\sigma^2 \cong 105{,}26$ a směrodatná odchylka je $\sigma \cong 10{,}26$.

Graf četnosti bodů vypadá následovně:



Obrázek 22: Graf získaných bodů všech zúčastněných žáků výzkumného šetření

Při zjišťování normality za pomoci Kolmogorovo-Smirnova testu zjistíme, že největší diference je u 19 bodu, kumulativní hodnota je zde $0{,}58$ a distribuční hodnota je 0,482, tudíž diference je $d = 0{,}098$. Kritická hodnota na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ je $D_{krit} \cong 0{,}136$. Jelikož naše získaná diference je menší než kritická hodnota, tak můžeme říct, že jde o normální rozdělení.

Testování se zúčastnilo 6 tříd, 2 třídy ze ZŠ Andělská Hora, na které budu v práci odkazovat jako 8.AA resp. 9.AA, kde žáci dosáhli těchto bodů:

8.AA	
Žák číslo	Body
1	17
2	16
3	15
4	14
5	14
6	13
7	13
8	10
9	10
10	5

9.AA	
Žák číslo	Body
1	29
2	26
3	22
4	19
5	17
6	16
7	16
8	14
9	12
10	11
11	9
12	6
13	5

Tabulka 13: Body žáků ZŠ Andělská Hora

A 4 třídy ze ZŠ Bruntál Okružní, na které budu v práci odkazovat jako 8.OA, 8.OB, 9.OA a 9.OB. Zde žáci dosáhli těchto bodů:

8.OA	
Žák číslo	Body
1	35
2	31
3	31
4	28
5	28
6	25
7	22
8	18
9	17
10	15
11	11
12	7
13	5
14	4

8.OB	
Žák číslo	Body
1	45
2	34
3	30
4	28
5	25
6	25
7	23
8	22
9	22
10	20
11	19
12	19
13	19
14	19
15	18
16	15
17	14
18	10
19	9
20	7
21	2
22	0

Tabulka 14: Body žáků 8. ročníku ZŠ Bruntál Okružní

9.OA	
Žák číslo	Body
1	39
2	39
3	35
4	29
5	26
6	26
7	24
8	24
9	23
10	21
11	21
12	20
13	19
14	18
15	15
16	15
17	15
18	15
19	15
20	10
21	8
22	4
23	4

9.OB	
Žák číslo	Body
1	45
2	45
3	39
4	39
5	39
6	34
7	34
8	32
9	25
10	24
11	21
12	20
13	20
14	19
15	17
16	13
17	13
18	0

Tabulka 15: Tabulka 8: Body žáků 9. ročníku ZŠ Bruntál Okružní

U každé třídy bude potřeba zjistit, zdali pochází z normálního rozdělení. Pokud data budou pocházet podle Kolmogorov-Smirnovova testu z normálního rozdělení, tak je budeme moct testovat moci F-testu, pro který bude hladina významnosti $\alpha = 0{,}05$. V případě, že pro danou dvojici dat nebudeme moct zamítnout nulovou hypotézu, tak provedeme t-test, který bude také na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$.

6.1 Statistické testy – ZŠ Andělská Hora

6.1.1 8.ročník

Zde se testu zúčastnilo pouze 10 žáků, nejméně ze všech testovaných tříd, a jejich získané body byly následující:

8.AA	
Žák číslo	Body
1	17
2	16
3	15
4	14
5	14
6	13
7	13
8	10
9	10
10	5

Tabulka 16: Dosažené body žáky 8.ročníku ZŠ Andělská Hora

Aritmetický průměr je zde $\bar{x} = 12{,}7$ bodů, modem je $\hat{x} = 14$ bodů a medián je $\tilde{x} = 13{,}5$ bodů. Rozptyl $\sigma^2 = 12{,}46$ a směrodatná odchylka je $\sigma = 3{,}5$. Pro další testování je potřeba také zjistit, jestli získaná data pochází z normálního rozdělení. Při aplikování Kolmogorovo-Smirnova testu dostaneme následující tabulku:

Body	Relativní četnost	Kumulativní četnost	Distribuční funkce	Difenrence
5	0,1	0,1	0,0145632	0,0854368
10	0,2	0,3	0,2221247	0,0778753
13	0,2	0,5	0,5338709	-0,033871
14	0,2	0,7	0,6436943	0,0563057
15	0,1	0,8	0,7427021	0,0572979
16	0,1	0,9	0,8251176	0,0748824
17	0,1	1	0,8884626	0,1115374

Tabulka 17: K-S test 8. ročník ZŠ Andělská Hora

Největší diference je $d = 0{,}11$ a kritická hodnota pro $n = 10$ je podle tabulky $d_{krit} = 0{,}21$. Jelikož je $d < d_{krit}$, tak můžeme říct, že data pochází z normálního rozdělení. (Pavlík 2005)

6.1.2 9.ročník

9.AA	
Žák číslo	Body
1	29
2	26
3	22
4	19
5	17
6	16
7	16
8	14
9	12
10	11
11	9
12	6
13	5

Tabulka 18: Dosažené body žáky 9.ročníku ZŠ Andělská Hora

Aritmetický průměr je zde $\bar{x} = 15{,}54$ bodů, modem je $\hat{x} = 16$ bodů a medián je také $\tilde{x} = 16$ bodů. Rozptyl $\sigma^2 = 52{,}27$ a směrodatná odchylka je $\sigma = 7{,}23$. I zde je potřeba zjistit, jestli získaná data pochází z normálního rozdělení. Při aplikování Kolmogorovo-Smirnova testu dostaneme následující tabulku:

Body	Relativní četnost	Kumulativní četnost	Distribuční funkce	Difenrence
5	0,076923	0,0769231	0,0724675	0,0044556
6	0,076923	0,1538462	0,0935277	0,0603185
9	0,076923	0,2307692	0,1828948	0,0478744
11	0,076923	0,3076923	0,2650828	0,0426096
12	0,076923	0,3846154	0,3122665	0,0723489
14	0,076923	0,4615385	0,415741	0,0457975
16	0,153846	0,6153846	0,5254486	0,089936
17	0,076923	0,6923077	0,5801006	0,1122071
19	0,076923	0,7692308	0,6839544	0,0852764
22	0,076923	0,8461538	0,8142689	0,031885
26	0,076923	0,9230769	0,9260525	-0,002976
29	0,076923	1	0,9686956	0,0313044

Tabulka 19: K-S test 9. ročník ZŠ Andělská Hora

Největší diference je $d = 0{,}11$ a kritická hodnota pro $n = 13$ je podle tabulky $d_{krit} = 0{,}203$. Jelikož je $d < d_{krit}$, tak můžeme říct, že data pochází z normálního rozdělení. (Pavlík 2005)

6.1.3 Porovnání výsledků mezi 8. a 9. ročníkem

Jelikož data z obou tříd pochází z normálního rozdělení, tak je můžeme mezi sebou zkusit porovnat pomocí F-testu. Pokud nám v F-testu vyjde, že rozptyl mezi třídami je statistický stejný, tak budeme moct aplikovat i t-test. Nulová hypotéza pro F-test je tedy

$$H_0: rozptyl\ výsledků\ v\ 8.ročníku\ je\ stejný\ jako\ rozptyl\ výsledků\ v\ 9.ročníku$$

a alternativní hypotéza je

$$H_1: rozptyl\ výsledků\ v\ 8.\ a\ 9.ročníku\ není\ stejný.$$

Body	
8. ročník	9. ročník
17	29
16	26
15	22
14	19
14	17
13	16
13	16
10	14
10	12
5	11
	9
	6
	5

Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

	Soubor 1	*Soubor 2*
Stř. hodnota	15,53846	12,7
Rozptyl	52,26923	12,45556
Pozorování	13	10
Rozdíl	12	9
F	4,196459	
P(F<=f) (1)	0,019284	
F krit (1)	3,072947	

Tabulka 20: F-test pro 8. a 9. ročník ZŠ Andělská Hora

Jak můžeme vidět, tak hodnota $F = 4{,}20$ a $F_{krit} = 3{,}07$. A jelikož $F > F_{krit}$, tak zamítáme nulovou hypotézu a přijímáme hypotézu alternativní. Jelikož nám tedy F-test nevyšel, tak na tuto dvojici nemůžeme použít t-test.

6.2 Statistické testy – ZŠ Bruntál Okružní

6.2.1 8.ročník

Zde se testu zúčastnilo 14 žáků z 8.A a 22 žáků z 8.B. Jejich získané body byly následující:

8.OA
Body
35
31
31
28
28
25
22
18
17
15
11
7
5
4

8.OB	
Body	
45	19
34	19
30	19
28	18
25	15
25	14
23	10
22	9
22	7
20	2
19	0

Tabulka 21: Dosažené body žáky 8.ročníku ZŠ Bruntál Okružní

I zde je potřeba otestovat, zdali data pochází z normálního rozdělení. Jelikož budeme chtít tyto dvě třídy porovnávat i mezi sebou, tak musíme provést test normality pro obě třídy zvlášť. Pro 8.A vypadá tabulka následovně:

8.OA				
Body	Relativní četnost	Kumulativní četnost	Distribuční funkce	Difenrence
4	0,07143	0,07142857	0,06705105	0,0043775
5	0,07143	0,14285714	0,08088118	0,061976
7	0,07143	0,21428571	0,11482391	0,0994618
11	0,07143	0,28571429	0,21027653	0,0754378
15	0,07143	0,35714286	0,34102856	0,0161143
17	0,07143	0,42857143	0,41614894	0,0124225
18	0,07143	0,5	0,45509286	0,0449071
22	0,07143	0,57142857	0,61141166	-0,039983
25	0,07143	0,64285714	0,71899331	-0,076136
28	0,14286	0,78571429	0,80967707	-0,023963
31	0,14286	0,92857143	0,8797144	0,048857
35	0,07143	1	0,94171851	0,0582815

Tabulka 22:Tabulka 16: K-S test 8.A ZŠ Bruntál Okružní

Největší diference v 8.A je $d = 0{,}099$ a kritická hodnota pro $n = 14$ je podle tabulky $d_{krit} = 0{,}201$. Jelikož je $d < d_{krit}$, tak můžeme říct, že data pochází z normálního rozdělení. (Pavlík 2005)

8.OB				
Body	Relativní četnost	Kumulativní četnost	Distribuční funkce	Difenrence
0	0,045455	0,04545455	0,0365168	0,00893777
2	0,045455	0,09090909	0,0547206	0,03618852
7	0,045455	0,13636364	0,1311583	0,00520538
9	0,045455	0,18181818	0,1764389	0,00537927
10	0,045455	0,22727273	0,2024037	0,02486905
14	0,045455	0,27272727	0,3266277	-0,0539004
15	0,045455	0,31818182	0,3619359	-0,0437541
18	0,045455	0,36363636	0,4739188	-0,1102825
19	0,181818	0,54545455	0,512179	0,03327552
20	0,045455	0,59090909	0,5503274	0,04058171
22	0,090909	0,68181818	0,624909	0,05690915
23	0,045455	0,72727273	0,6606929	0,06657982
25	0,090909	0,81818182	0,7278309	0,09035092
28	0,045455	0,86363636	0,8143745	0,04926191
30	0,045455	0,90909091	0,8612701	0,04782083
34	0,045455	0,95454545	0,9292009	0,02534459
45	0,045455	1	0,9942213	0,00577874

Tabulka 23:K-S test 8.B ZŠ Bruntál Okružní

Největší diference v 8.B je $d = 0{,}09$ a kritická hodnota pro $n = 22$ je podle tabulky $d_{krit} = 0{,}185$. Jelikož je $d < d_{krit}$, tak můžeme říct, že data pochází z normálního rozdělení. (Pavlík 2005)

Jelikož obě data pochází z normálního rozdělení, tak můžeme i zde vyzkoušet F-test a případně i t-test. Hypotézy pro F-test jsou

$$H_0: rozptyl\ výsledků\ ve\ třídě\ A\ a\ B\ je\ stejný$$

$$H_1: rozptyl\ výsledků\ ve\ třídě\ A\ a\ B\ není\ stejný.$$

8.OA
Body
35
31
31
28
28
25
22
18
17
15
11
7
5
4

8.OB	
Body	
45	19
34	19
30	19
28	18
25	15
25	14
23	10
22	9
22	7
20	2
19	0

Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

	Soubor 1	*Soubor 2*
Stř. hodnota	19,31818	19,14286
Rozptyl	105,9416	102,1319
Pozorování	22	14
Rozdíl	21	13
F	1,037302	
P(F<=f) (1)	0,486955	
F krit (1)	2,447942	

Tabulka 24: F-test pro 8.A a 8.B ZŠ Bruntál Okružní

Zde už jsou hodnoty o něco lepší, $F = 1{,}04$ a $F_{krit} = 2{,}45$. A jelikož $F < F_{krit}$, tak nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu a můžeme říct, že rozptyl výsledků ve třídě A a B je statisticky stejný. Nyní tedy můžeme provést t-test, zde budou hypotézy

$$H_0\text{: průměrný počet bodů získaných žáky A a B je stejný}$$

$$H_1\text{: průměrný počet bodů získaných žáky A a B není stejný}$$

Tabulka t-testu vypadá pro tyto data následovně:

Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů		
	Soubor 1	*Soubor 2*
Stř. hodnota	19,318182	19,14286
Rozptyl	105,94156	102,1319
Pozorování	22	14
Společný rozptyl	104,48491	
Hyp. rozdíl stř. hodnot	0	
Rozdíl	34	
t Stat	0,0501696	
P(T<=t) (1)	0,4801404	
t krit (1)	1,6909243	
P(T<=t) (2)	0,9602808	
t krit (2)	2,0322445	

Tabulka 25: t-test pro 8.A a 8.B ZŠ Bruntál Okružní

Z této tabulky je pro nás důležitá hodnota $t = 0{,}05$ a $t_{krit} = 2{,}03$. Jelikož $t < t_{krit}$ tak přijímáme nulovou hypotézu.

6.2.2 9.ročník

Zde se testu zúčastnilo 23 žáků z 9.A a 18 žáků z 8.B. Jejich získané body byly následující:

9.OA	
Body	
39	19
39	18
35	15
29	15
26	15
26	15
24	15
24	10
23	8
21	4
21	4
20	

9.OB	
Body	
45	24
45	21
39	20
39	20
39	19
34	17
34	13
32	13
25	0

Tabulka 26: Dosažené body žáky 9.ročníku ZŠ Bruntál Okružní

Také u těchto výsledků je potřeba otestovat, zdali data pochází z normálního rozdělení. I zde budeme chtít tyto dvě třídy porovnávat mezi sebou, tudíž je potřeba provést test normality pro obě třídy zvlášť. Pro 9.A vypadá tabulka následovně:

9.OA				
Body	Relativní četnost	Kumulativní četnost	Distribuční funkce	Difenrence
4	0,08696	0,08695652	0,04504666	0,0419099
8	0,04348	0,13043478	0,1012246	0,0292102
10	0,04348	0,17391304	0,1435615	0,0303515
15	0,21739	0,39130435	0,29491652	0,0963878
18	0,04348	0,43478261	0,41143612	0,0233465
19	0,04348	0,47826087	0,452726	0,0255349
20	0,04348	0,52173913	0,49453394	0,0272052
21	0,08696	0,60869565	0,53640206	0,0722936
23	0,04348	0,65217391	0,61849249	0,0336814
24	0,08696	0,73913043	0,65784879	0,0812816
26	0,08696	0,82608696	0,73130006	0,0947869
29	0,04348	0,86956522	0,82432537	0,0452399
34	0,04348	0,91304348	0,92749032	-0,014447
39	0,08696	1	0,97630107	0,0236989

Tabulka 27: K-S test 9.A ZŠ Bruntál Okružní

Největší diference v 9.A je $d = 0{,}096$ a kritická hodnota pro $n = 23$ je podle tabulky $d_{krit} = 0{,}183$. Jelikož je $d < d_{krit}$, tak můžeme říct, že data pochází z normálního rozdělení. (Pavlík 2005)

9.OB				
Body	Relativní četnost	Kumulativní četnost	Distribuční funkce	Difenrence
0	0,055556	0,05555556	0,0171095	0,03844605
13	0,111111	0,16666667	0,1413343	0,02533232
17	0,055556	0,22222222	0,2256114	-0,0033891
19	0,055556	0,27777778	0,2766256	0,00115221
20	0,111111	0,38888889	0,3040967	0,08479222
21	0,055556	0,44444444	0,3327207	0,1117237
24	0,055556	0,5	0,4239931	0,07600693
25	0,055556	0,55555556	0,4556309	0,0999247
32	0,055556	0,61111111	0,6737321	-0,062621
34	0,111111	0,72222222	0,7293092	-0,007087
39	0,166667	0,88888889	0,8442147	0,0446742
45	0,111111	1	0,9323311	0,06766886

Tabulka 28:K-S test 9.B ZŠ Bruntál Okružní

Největší diference v 9.B je $d = 0{,}11$ a kritická hodnota pro $n = 18$ je podle tabulky $d_{krit} = 0{,}192$. Jelikož je $d < d_{krit}$, tak můžeme říct, že data pochází z normálního rozdělení. (Pavlík 2005)

Jelikož oboje data pochází z normálního rozdělení, tak můžeme i zde vyzkoušet F-test a případně i t-test. Pro F-test jsou zde hypotézy

$$H_0: rozptyl\ výsledků\ ve\ třídě\ A\ a\ B\ je\ stejný$$

$$H_1: rozptyl\ výsledků\ ve\ třídě\ A\ a\ B\ není\ stejný.$$

9.OA	
Body	
39	19
39	18
35	15
29	15
26	15
26	15
24	15
24	10
23	8
21	4
21	4
20	

9.OB	
Body	
45	24
45	21
39	20
39	20
39	19
34	17
34	13
32	13
25	0

Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

	Soubor 1	*Soubor 2*
Stř. hodnota	26,61111	20,13043
Rozptyl	154,8399	90,57312
Pozorování	18	23
Rozdíl	17	22
F	1,709556	
P(F<=f) (1)	0,117963	
F krit (1)	2,113771	

Tabulka 29: F-test pro 9.A a 9.B ZŠ Bruntál Okružní

I zde už jsou hodnoty přívětivé, $F = 1{,}71$ a $F_{krit} = 2{,}11$. A jelikož $F < F_{krit}$, tak nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu a můžeme říct, že rozptyl ve třídě A a B je na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ statisticky stejný. Nyní tedy můžeme provést t-test, jsou hypotézy opět

$$H_0: průměrný\ počet\ bodů\ získaných\ žáky\ A\ a\ B\ je\ stejný$$

$$H_1: průměrný\ počet\ bodů\ získaných\ žáky\ A\ a\ B\ není\ stejný$$

Tabulka t-testu vypadá pro tyto data následovně:

	Soubor 1	Soubor 2
Stř. hodnota	26,611111	20,13043
Rozptyl	154,83987	90,57312
Pozorování	18	23
Společný rozptyl	118,58683	
Hyp. rozdíl stř. hodnot	0	
Rozdíl	39	
t Stat	1,8910819	
P(T<=t) (1)	0,0330291	
t krit (1)	1,6848751	
P(T<=t) (2)	0,0660583	
t krit (2)	2,0226909	

Tabulka 30: t-test pro 9.A a 9.B ZŠ Bruntál Okružní

Z této tabulky je pro nás důležitá hodnota $t = 1{,}89$ a $t_{krit} = 2{,}02$. Jelikož $t < t_{krit}$, tak nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu a můžeme říct, že 9.A a 9.B mají statisticky stejný průměr bodů.

6.2.3 Porovnání výsledků mezi 8. a 9. ročníkem

Nyní spojíme 8. ročníky do jedné skupiny a 9. ročníky do druhé skupiny, tím nám vzniknou ze čtyř tříd třídy dvě. Nyní mezi sebou porovnáme 8. a 9. třídu a pomocí F-testu zjistíme, jestli je rozptyl mezi ročníky statisticky stejný, a pomocí t-testu zjistíme to, jestli jsou i jejich průměry statisticky stejné. Hypotézy pro F-test jsou

$$H_0: rozptyl\ výsledků\ v\ 8. a\ 9. ročníku\ je\ stejný$$

$$H_1: rozptyl\ výsledků\ v\ 8. a\ 9. ročníku\ není\ stejný$$

Pro t-test jsou poté hypotézy

$$H_0: průměrný\ počet\ bodů\ získaných\ žáky\ 8. ročníků\ a\ 9. ročníku\ je\ stejný$$

$$H_1: průměrný\ počet\ bodů\ získaných\ žáky\ 8. ročníků\ a\ 9. ročníku\ není\ stejný$$

Body			
8. ročník		9. ročník	
45	18	45	20
34	17	45	20
33	15	39	20
31	15	39	19
31	14	39	19
30	14	39	19
28	11	39	18
28	10	34	17
26	9	34	15
25	7	34	15
25	7	30	15
25	5	29	15
23	4	26	15
22	2	26	13
22	0	25	13
21		24	10
20		24	8
19		23	4
19		23	4
19		21	0
19		21	

Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

	Soubor 1	*Soubor 2*
Stř. hodnot	22,87805	19,25
Rozptyl	125,7098	101,5071
Pozorován	41	36
Rozdíl	40	35
F	1,238433	
P(F<=f) (1)	0,261241	
F krit (1)	1,735119	

Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů

	Soubor 1	*Soubor 2*
Stř. hodnot	22,87805	19,25
Rozptyl	125,7098	101,5071
Pozorován	41	36
Společný r	114,4152	
Hyp. rozdíl	0	
Rozdíl	75	
t Stat	1,485009	
P(T<=t) (1)	0,070866	
t krit (1)	1,665425	
P(T<=t) (2)	0,141733	

Tabulka 31: F-test a t-test pro 8. a 9. ročník ZŠ Bruntál Okružní

Z tabulky můžeme vidět, že $F = 1{,}24$ a $F_{krit} = 1{,}74$. Jelikož $F < F_{krit}$, tak rozptyly jsou staticky stejné a nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu. Pro t-test můžeme vidět, že $t = 1{,}49$ a $t_{krit} = 1{,}99$. I zde je $t < t_{krit}$, tedy nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu a můžeme říct, že statisticky jsou průměry v obou ročnících stejné.

6.3 Statistické testy – porovnání mezi školami

6.3.1 8.ročník

Zde spojíme dohromady 8.A a 8.B ze ZŠ Bruntál Okružní do jedné třídy a tuto třídu porovnáme pomocí F-testu s 8.A ze ZŠ Andělská Hora. Hypotézy pro F-test jsou

$$H_0: rozptyl\ výsledků\ v\ 8.ročníku\ je\ mezi\ školami\ stejný$$

$$H_1: rozptyl\ výsledků\ v\ 8.ročníku\ není\ mezi\ školami\ stejný$$

Body 8. ročník		
O		A
45	19	17
35	19	16
34	19	15
31	18	14
31	18	14
30	17	13
28	15	13
28	15	10
28	14	10
25	11	5
25	10	
25	9	
23	7	
22	7	
22	5	
22	4	
20	2	

Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

	Soubor 1	*Soubor 2*
Stř. hodnot	19,5	12,7
Rozptyl	103,4	12,45556
Pozorován	36	10
Rozdíl	35	9
F	8,301517	
P(F<=f) (1)	0,001071	
F krit (1)	2,842212	

Tabulka 32: F-test pro 8. ročníky ZŠ Bruntál Okružní a ZŠ Andělská Hora

Zde nám vyšel největší rozdíl mezi F a F_{krit}, kde $F = 8{,}30$ a $F_{krit} = 2{,}84$. Jelikož $F > F_{krit}$, tak zamítáme nulovou hypotézu a přijímáme hypotézu alternativní, tedy že rozptyl mezi žáky 8. ročníku ZŠ Bruntál Okružní a ZŠ Andělská Hora není stejný. Jelikož jsme zamítli nulovou hypotézu u F-testu, tak nemůžeme provést t-test.

6.3.2 9.ročník

Zde spojíme dohromady 9.A a 9.B ze ZŠ Bruntál Okružní do jedné třídy a tuto třídu porovnáme pomocí F-testu s 9.A ze ZŠ Andělská Hora. Hypotézy pro F-test jsou:

$$H_0\text{: } rozptyl\ výsledků\ v\ 9.ročníku\ je\ mezi\ školami\ stejný$$

$$H_1\text{: } rozptyl\ výsledků\ v\ 9.ročníku\ není\ mezi\ školami\ stejný$$

a hypotézy pro t-test jsou:

$$H_0\text{: } průměrný\ počet\ bodů\ získaných\ žáky\ 9.ročníků\ je\ mezi\ školami\ stejný$$

$$H_1\text{: } průměrný\ počet\ bodů\ získaných\ žáky\ 9.ročníků\ není\ mezi\ školami\ stejný$$

Body 9. ročník		
O		A
45	20	29
45	20	26
39	20	22
39	19	19
39	19	17
39	19	16
39	18	16
34	17	14
34	15	12
34	15	11
30	15	9
29	15	6
26	15	5
26	13	
25	13	
24	10	
24	8	
23	4	
23	4	
21	0	
21		

Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

	Soubor 1	Soubor 2
Stř. hodnota	22,87805	15,53846
Rozptyl	125,7098	52,26923
Pozorování	41	13
Rozdíl	40	12
F	2,405043	
P(F<=f) (1)	0,051603	
F krit (1)	2,42588	

Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů

	Soubor 1	Soubor 2
Stř. hodnot	22,87805	15,53846
Rozptyl	125,7098	52,26923
Pozorován	41	13
Společný r	108,7619	
Hyp. rozdíl	0	
Rozdíl	52	
t Stat	2,211057	
P(T<=t) (1)	0,015727	
t krit (1)	1,674689	
P(T<=t) (2)	0,031453	
t krit (2)	2,006647	

Tabulka 33: F-test a t-test pro 9. ročníky ZŠ Bruntál Okružní a ZŠ Andělská Hora

Zde nám pro změnu vyšlo F a F_{krit} nejblíž, $F = 2{,}40$ a $F_{krit} = 2{,}43$. Jelikož $F < F_{krit}$, tak nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu. U t-testu nám vyšly hodnoty $t = 2{,}21$ a $t_{krit} = 2{,}01$, tedy $t > t_{krit}$, zamítáme tedy nulovou hypotézu a můžeme říct, že i když staticky není rozdíl v rozptylu, tak existuje statistický rozdíl mezi žáky 9. ročníku na ZŠ Bruntál Okružní a ZŠ Andělská Hora.

6.3.3 Mezi ročníky

Zde spojíme všechny žáky 8. ročníků do jedné skupiny a všechny žáky 9. ročníků spojíme do skupiny druhé. Hypotézy pro F-test jsou opět

$$H_0: rozptyl\ výsledků\ v\ 8.\ a\ 9.\ ročníku\ je\ stejný$$

$$H_1: rozptyl\ výsledků\ v\ 8.\ a\ 9.\ ročníku\ není\ stejný$$

a hypotézy pro t-test jsou

$$H_0: průměrný\ počet\ bodů\ získaných\ žáky\ 8.\ a\ 9.\ ročníků\ je\ stejný$$

$$H_1: průměrný\ počet\ bodů\ získaných\ žáky\ 8.\ a\ 9.\ ročníků\ není\ stejný$$

Body 8. ročník		Body 9. ročník	
45	16	45	19
34	15	45	19
33	15	39	19
31	15	39	19
31	15	39	18
30	14	39	17
28	14	39	17
28	14	34	16
26	14	34	16
25	13	34	15
25	13	30	15
25	11	29	15
23	10	29	15
22	10	26	15
21	9	26	14
19	9	26	13
19	7	25	13
18	6	24	12
18	5	24	11
18	5	23	10
17	4	23	9
17	2	22	8
17	0	21	6
		21	5
		20	4
		20	4
		20	0

Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

	Soubor 1	Soubor 2
Stř. hodnot	21,11111	17,52174
Rozptyl	116,7421	89,32174
Pozorován	54	46
Rozdíl	53	45
F	1,306985	
P(F<=f) (1)	0,179676	
F krit (1)	1,618577	

Dvouvýběrový t-test s rovností roz

	Soubor 1	Soubor 2
Stř. hodnot	21,11111	17,52174
Rozptyl	116,7421	89,32174
Pozorován	54	46
Společný r	104,1511	
Hyp. rozdíl	0	
Rozdíl	98	
t Stat	1,752921	
P(T<=t) (1)	0,041371	
t krit (1)	1,660551	
P(T<=t) (2)	0,082743	
t krit (2)	1,984467	

Tabulka 34: F-test a t-test pro spojený 8. a 9. ročník ZŠ Bruntál Okružní a ZŠ Andělská Hora

V této sadě je $F = 1{,}31$ a $F_{krit} = 1{,}62$, tedy $F < F_{krit}$ a nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu, tedy rozptyly mezi 8. a 9. ročníkem je statisticky stejný. U t-testu nám vyšlo $t = 1{,}75$ a $t_{krit} = 1{,}98$, tedy $t < t_{krit}$, nemůžeme tak zamítnout nulovou hypotézu a můžeme říct, že průměrný zisk bodů v 8. a 9. ročníku je statisticky stejný.

6.3.4 Mezi školami

Zde spojíme 8.A, 8.B, 9.A a 9.B ze ZŠ Bruntál Okružní do jedné skupiny a do druhé skupiny spojíme 8.A a 9.A ze ZŠ Andělská Hora. Hypotézy pro F-test jsou opět

$$H_0: rozptyl\ výsledků\ v\ mezi\ školami\ je\ stejný$$

$$H_1: rozptyl\ výsledků\ mezi\ školami\ není\ stejný$$

Body A	Body O		
29	45	25	15
26	45	24	15
22	45	24	15
19	39	23	15
17	39	23	15
17	39	23	15
16	39	22	15
16	39	21	14
16	34	21	14
15	34	21	13
14	34	20	13
14	34	20	11
14	33	20	10
13	31	19	9
13	31	19	9
12	30	19	8
11	30	19	7
10	29	19	6
10	28	18	5
9	28	18	4
6	26	18	4
5	26	18	4
5	26	17	2
	25	17	0
	25	17	0
	25	15	

Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

	Soubor 1	*Soubor 2*
Stř. hodnota	21	14,30435
Rozptyl	117,7368	35,67589
Pozorování	77	23
Rozdíl	76	22
F	3,30018	
P(F<=f) (1)	0,001279	
F krit (1)	1,868171	

Tabulka 35:F-test výsledky žáků ZŠ Andělská Hora a ZŠ Bruntál Okružní

V tomto F-testu nám vyšlo, že $F = 3{,}30$ a $F_{krit} = 1{,}87$, tedy $F > F_{krit}$, zamítáme tedy nulovou hypotézu a říkáme, že rozptyl výsledků mezi školami není staticky stejný.

6.3.5 Porovnání výsledků mezi dívkami a chlapci

Zde spojíme výsledky dívek ze všech tříd a obou škol do jedné skupiny a chlapce ze všech tříd a obou škol do skupiny druhé. Hypotézy pro F-test jsou opět

$$H_0: rozptyl\ výsledků\ mezi\ dívkami\ a\ chlapci\ je\ stejný$$

$$H_1: rozptyl\ výsledků\ mezi\ dívkami\ a\ chlapci\ není\ stejný$$

a hypotézy pro t-test jsou

$$H_0: průměrný\ počet\ bodů\ získaných\ dívkami\ a\ chlapci\ je\ stejný$$

$$H_1: průměrný\ počet\ bodů\ získaných\ dívkami\ a\ chlapci\ není\ stejný$$

Dívky			Chlapci		
45	23	16	39	20	13
45	22	15	39	20	13
45	22	15	35	20	10
39	22	15	34	19	10
39	21	15	34	19	10
39	21	15	29	18	9
35	21	14	28	18	9
34	20	13	28	17	7
32	19	12	28	16	6
31	19	11	26	16	5
31	19	11	26	15	5
30	19	10	26	15	4
29	19	8	25	15	4
25	18	7	24	14	2
25	17	5	24	14	0
25	17	4	23	14	
24	17	0	22	13	

Tabulka 36: Body získané dívkami a chlapci

Tabulka pro F-test a t-test vypadá následovně:

Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

	Soubor 1	*Soubor 2*
Stř. hodnot	21,47059	17,95918
Rozptyl	114,6541	94,9983
Pozorován	51	49
Rozdíl	50	48
F	1,206907	
P(F<=f) (1)	0,257239	
F krit (1)	1,609593	

Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů

	Dívky	*Chlapci*
Stř. hodnot	21,47059	17,95918
Rozptyl	114,6541	94,9983
Pozorován	51	49
Společný r	105,0268	
Hyp. rozdíl	0	
Rozdíl	98	
t Stat	1,712829	
P(T<=t) (1)	0,044953	
t krit (1)	1,660551	
P(T<=t) (2)	0,089906	
t krit (2)	1,984467	

Tabulka 37: F-test a t-test pro porovnání výsledků dívek a chlapců

V F-testu nám vychází $F = 1{,}21$ a $F_{krit} = 1{,}61$, zde je tedy $F < F_{krit}$ a nemůžeme tak zamítnout nulovou hypotézu. Můžeme pak říct, že statisticky není rozdíl v rozptylu výsledků u dívek a chlapců. V t-testu nám vyšlo $t = 1{,}71$ a $t_{krit} = 1{,}98$. I v tomto případě je $t < t_{krit}$, což znamená. že nulovou hypotézu nemůžeme zamítnout ani zde. Nelze tedy říct, že by statisticky existoval rozdíl v průměrně získaných bodech u dívek a chlapců.

6.3.6 Bartlettův test

Jelikož můžeme vytvořit dvě trojice, na kterých bychom mohli vyzkoušet ANOVA test, tak si je nejdříve musíme ověřit za pomoci Bartlettova testu homogenity rozptylu. Oba testy budou provedeny na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$.

Jako první porovnáme rozptyly v 8. ročníku, tedy v 8.AA, 8.OA a 8.OB. Hypotézy jsou následující:

$$H_0\text{: } Rozptyly\ skupin\ se\ statisticky\ neliší$$

$$H_1\text{: } Rozptyly\ skupin\ se\ statisticky\ liší$$

8.OB		8.OA	8.AA
45	19	35	17
34	19	31	16
30	19	31	15
28	18	28	14
25	15	28	14
25	14	25	13
23	10	22	13
22	9	18	10
22	7	17	10
20	2	15	5
19	0	11	
		7	
		5	
		4	

Tabulka 38: Získané body v jednotlivých třídách 8. ročníku

V tomto případě bude $N = 46, k = 3,\ n_1 = 22,\ n_2 = 14,\ n_3 = 10, s_1^2 = 105{,}94$, $s_2^2 = 107{,}10, s_3^2 = 12{,}46$. Z těchto hodnot nám potom Bartlettův test vyjde:

$$B = \frac{10{,}52}{1{,}04}$$

$$B = 10{,}12$$

Stejně jako v demonstračním případě pracujeme se 3 skupinami, tedy kritická hodnota se stupněm volnosti 2 je $B_{krit} = 5{,}99$. (Chráska 2016)

Jelikož $B > B_{krit}$, tak zamítáme nulovou hypotézu a říkáme, že rozptyly skupin se statisticky liší. I tak si pro zajímavost vyzkoušíme na této třídě ANOVA test, i když jsme zde nemohli zamítnout nulovou hypotézu.

Jako druhou skupinu si vezme 9. ročník, tedy 9.AA, 9.OA a 9.OB, hypotézy zůstávají pořád stejné, tedy:

$$H_0: Rozptyly\ skupin\ se\ statisticky\ neliší$$

$$H_1: Rozptyly\ skupin\ se\ statisticky\ liší$$

9.OB		9.OA		9.AA
45	24	39	19	29
45	21	39	18	26
39	20	35	15	22
39	20	29	15	19
39	19	26	15	17
34	17	26	15	16
34	13	24	15	16
32	13	24	10	14
25	0	23	8	12
		21	4	11
		21	4	9
		20		6
				5

Tabulka 39: Získané body v jednotlivých třídách 9. ročníku

V tomto případě bude $N = 54, k = 3,\ n_1 = 18,\ n_2 = 23,\ n_3 = 13, s_1^2 = 154{,}84$, $s_2^2 = 92{,}18, s_3^2 = 52{,}27$. Z těchto hodnot nám potom Bartlettův test vyjde:

$$B = \frac{3{,}98}{1{,}02}$$

$$B = 3{,}86$$

I v tomto případě pracujeme se 3 skupinami, tedy kritická hodnota se stupněm volnosti 2 je $B_{krit} = 5{,}99$. (Chráska 2016)

Jelikož $B < B_{krit}$, tak nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu a říkáme, že rozptyly skupin se statisticky neliší.

6.3.7 ANOVA

I v tomto případě budeme testovat na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$. Jediná trojice, u které jsme nemohli zamítnout nulovou hypotézu v Barlettově testu, je trojice 9.OA, 9.OB a 9.AA. Hypotézy pro ANOVA test jsou takovéto:

$$H_0\text{: Střední hodnoty bodů žáků ze všech tří tříd 9. ročníku se statisticky neliší}$$

$$H_1\text{: Střední hodnoty bodů žáků ze všech tří tříd 9. ročníku se statisticky liší}$$

9.OB		9.OA		9.AA
45	24	39	19	29
45	21	39	18	26
39	20	35	15	22
39	20	29	15	19
39	19	26	15	17
34	17	26	15	16
34	13	24	15	16
32	13	24	10	14
25	0	23	8	12
		21	4	11
		21	4	9
		20		6
				5

Tabulka 40: Získané body v jednotlivých třídách 9. ročníku

ANOVA tabulka poté vypadá takto:

Anova: jeden faktor

Faktor

Výběr	*Počet*	*Součet*	*Průměr*	*Rozptyl*
Sloupec 1	18	479	26,61111	154,8399
Sloupec 2	23	465	20,21739	92,17787
Sloupec 3	13	202	15,53846	52,26923

ANOVA

Zdroj variability	*SS*	*Rozdíl*	*MS*	*F*	*Hodnota P*	*F krit*
Mezi výběry	965,9117428	2	482,9559	4,658367	0,013864	3,178799
Všechny výběry	5287,42159	51	103,6749			
Celkem	6253,333333	53				

Tabulka 41: ANOVA test pro 9. ročník

Můžeme vidět, že $F = 4{,}66$ a $F_{krit} = 3{,}18$, jelikož $F > F_{krit}$, tak zamítáme nulovou hypotézu a přijímáme hypotézu alternativní. Střední hodnota bodů žáků 9. ročníku je tedy statisticky odlišná.

6.4 Vyhodnocení jednotlivých úloh

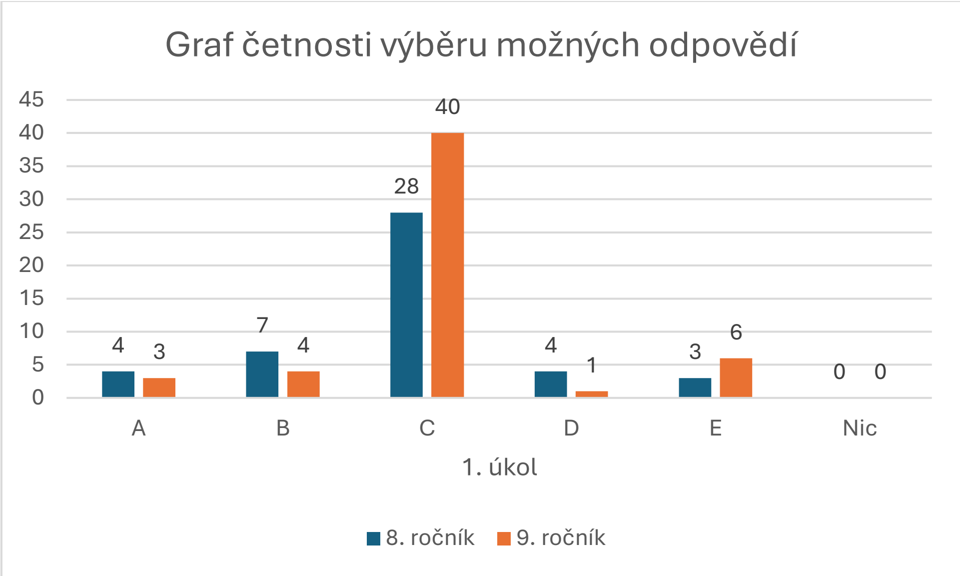
Na závěr jsem si připravil pro každou úlohu z mého testu sloupcový graf četnosti výběru odpovědí *A-E* a potom je zde i sloupec *Nic*, který reprezentuje prázdnou odpověď. U každé možnosti jsou dva sloupce, jeden odpovídá četnosti výběru dané možnosti v 9. ročníku a druhý pak četnosti výběru dané možnosti v 8. ročníku.

6.4.1 Úloha č.1

Na turnaj ve streetballu se přihlásilo 168 lidí. Organizátoři chtějí týmy rozdělit tak, aby v každém týmu byl stejný počet lidí. Které z těchto čísel nemůže být počet lidí v jednom týmu?

(A) 3 *(B) 4* *(C) 5* *(D) 6* *(E) 7*

Graf četnosti vypadá následovně:



Obrázek 23: Graf četnosti výběru pro 1. úlohu

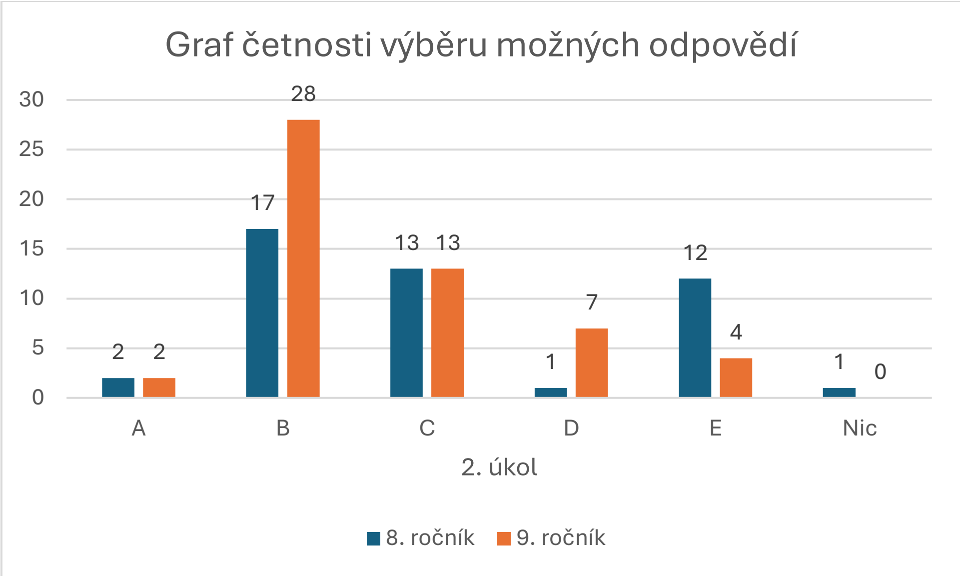
Správnou odpovědí je zde odpověď C, která má tedy v četnosti i největší zastoupení. Při procházení testů bylo patrné, že u této úlohy byly špatné odpovědi zapříčiněny nepozornosti při čtení zadání, jelikož otázka je, které číslo **nemůže** být. Původně jsem měl v plánu slovíčko nemůže zvýraznit, ale když jsem se podíval na zadání v Matematickém klokanovi, tak ani tam nejsou slova zvýrazněna, takže jsem od toho upustil. Tato úloha společně s úlohou č.7 jsou jedinými úlohami, kde si vybral alespoň z jedné odpovědi každý řešitel, ať už z 8. či 9. ročníku.

6.4.2 Úloha č.2

Součet tří po sobě jdoucích čísel je 81. Jaký je rozdíl mezi největším a nejmenším číslem z této trojice?

(A) 1 *(B) 2* *(C) 3* *(D) 4* *(E) Žádný*

Graf četnosti pro toto zadání vypadá následovně:

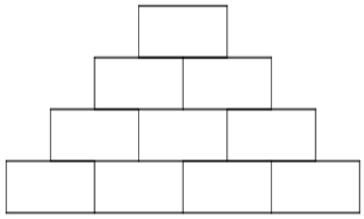


Obrázek 24: Graf četnosti výběru pro 2. úlohu

Zde je správnou odpovědí možnost *B*, která má největší zastoupení, ale dvě další možnosti mají poměrně velké zastoupení. Možnost *C* si vybrali takový žáci, kteří se drželi pouze toho, že čísla jdou po sobě, tedy vynechali jejich součet, pomocí kterého jdou zjistit přesná čísla. Ti si napsali libovolnou trojici po sobě jdoucích čísel, nejčastěji však trojici $\{1,2,3\}$, kde mají tři čísla, největším je číslo 3 a to zakroužkovali jako odpověď. Zapomněli tedy na to, že otázka je na rozdíl mezi největším a nejmenším číslem, Možnost *E* si potom vybírali, kteří buďto tipovali anebo si vydělili číslo 81 číslem 3, z toho jim vyjde číslo 27, které je prostředním číslem v trojici čísel. Na tento fakt však zapomněli a udělali poté $\frac{81-27}{2} = 27$, tedy druhé číslo jim vyšlo opět 27. Na poslední číslici z trojice poté přicházeli jako $81 - (27 + 27) = 27$. Dostali tedy trojici čísel $\{27,27,27\}$, kde je jejich součet 81 a rozdíl mezi čísly není žádný, dostali tak možnost *E*. Ta je ale špatně, jelikož zapomněli na to, že čísla musí jít po sobě.

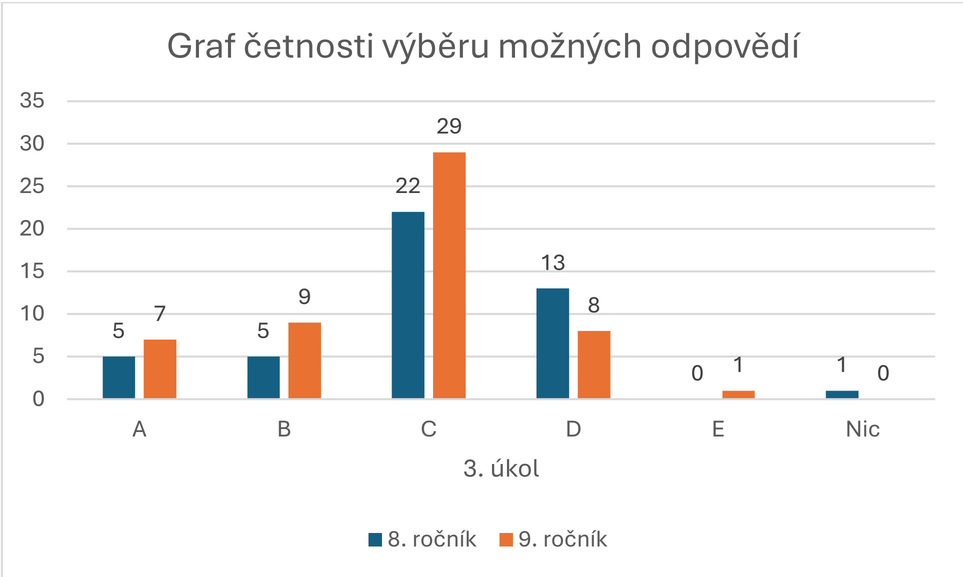
6.4.3 Úloha č.3

Kolik bude potřeba kostek kvádrů na sestavení pyramidy se základnou 4x4 kostky?



(A) 10 *(B) 20* *(C) 30* *(D) 40* *(E) 50*

Graf četnosti pro toto zadání vypadá následovně:



Obrázek 25: Graf četnosti výběru pro 3. úlohu

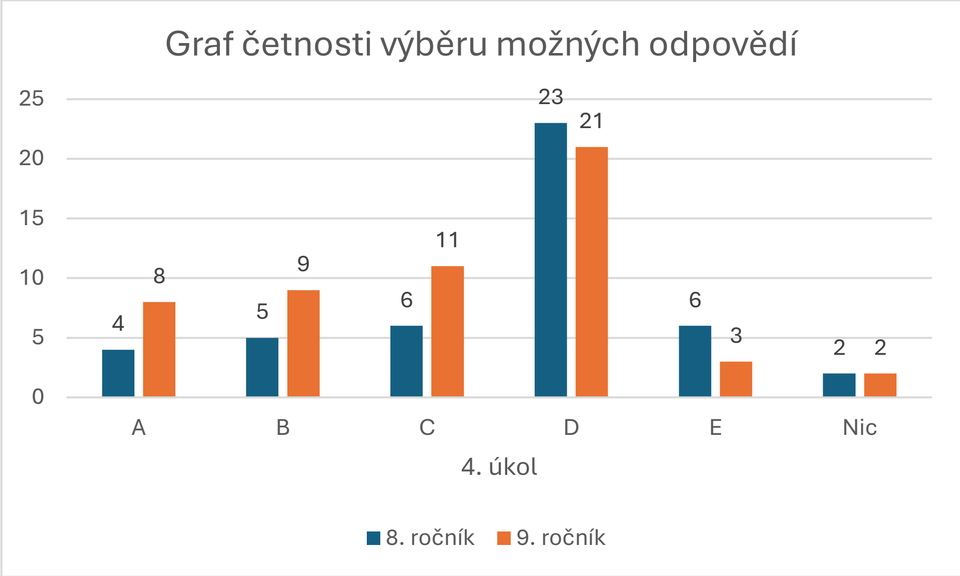
Zde opět převládá správná možnost, což je možnost *C*. Poměrně velké zastoupení má ještě možnost *D*, ke které se žáci dopracovali tak, že si sečetli všechny kostky na obrázku, těch je 10, a vynásobili to číslem 4, jelikož v zadání je, že pyramida je 4×4. Tito žáci tedy opomněli to, že s každým patrem pyramidy se snižuje počet kostek jak na šířce, tak i délce, tedy že druhé patro je 3×3 atd.

6.4.4 Úloha č.4

Pro které číslo nejsou současně dělitelem čísla 4, 6 a 9?

(A) 9864 *(B) 5796* *(C) 2880* *(D) 9876* *(E) 1836*

Graf četnosti pro toto zadání vypadá následovně:



Obrázek 26: Graf četnosti výběru pro 4. úlohu

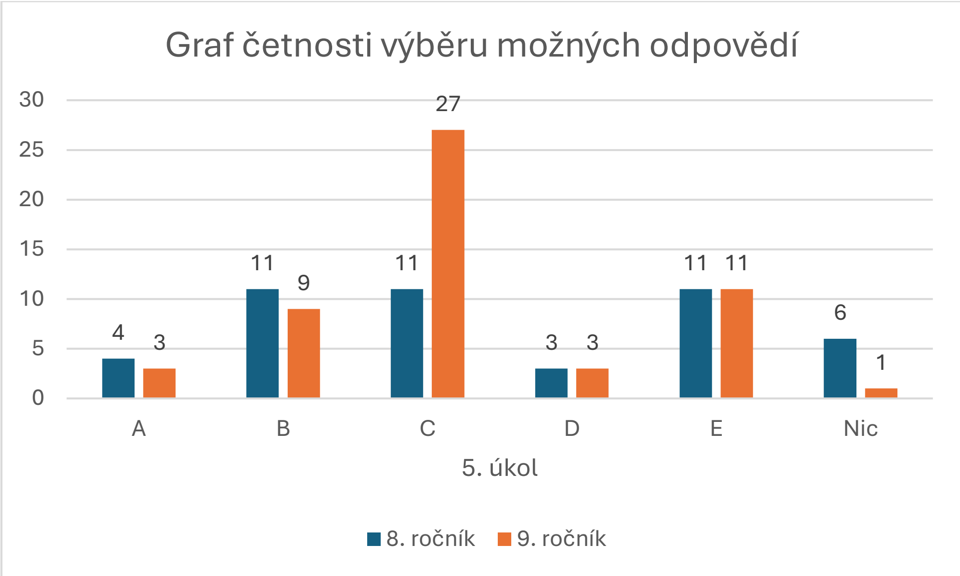
Z grafu je patrné, že největším zastoupením je možnost *D*, což je i správná odpověď. U této úlohy je podobný problém, jako u úlohy č.1, kdy si řešitelé s jinou odpovědí než *D* nepřečetli pořádně zadání, jelikož otázka je opět o tom, které číslo **nelze** dělit.

6.4.5 Úloha č.5

Při volejbalovém utkaní je v jeden okamžik na hřišti právě 12 hráčů. Když Petra s Patrikem vystřídají Lukáš s Ludvíkem, tak se poměr leváků ku pravákům na hřišti zvýšil z poměru 1:5 na 1:2. Kolik leváků je právě na hřišti?

(A) 2 *(B) 3* *(C) 4* *(D) 5* *(E) 6*

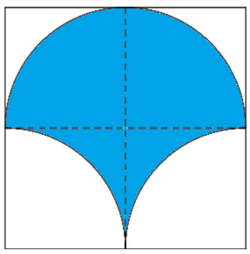
Graf četnosti pro toto zadání vypadá následovně:



Obrázek 27: Graf četnosti výběru pro 5. úlohu

V této úloze je nejčastěji vybranou odpovědí možnost *C*, která je možností správnou. Poměrně hojně se ještě vyskytovaly možnosti *B* a *E*, ke kterým žáci přišli při nesprávné interpretaci poměrů. Když se podíváme na zadání, tak zjistíme, že poměr leváků ku pravákům před střídáním je vlastně naprosto irelevantní údaj. Toto si však někteří řešitelé neuvědomili a začali s tímto poměrem všemožně pracovat, aby se dopracovali k nějakému výsledku. Jednou z nejčastějších chyb pak bylo odečítání poměru praváků, tedy když na začátku byl poměr 1:5 a potom byl poměr 1:2, tak z toho někteří řešitelé udělali $1:(5-2) \rightarrow 1:3$. A při poměru 1:3 by skutečně na hřišti byli 3 leváci, tedy možnost *B*. To je ale špatná úvaha, obdobně jako úvaha, že poměr 1:2 udává poměr leváků ku celku, v tomto případě by leváků skutečně bylo 6, tedy možnost *E*, ale v zadání je řečeno, že poměr je leváci ku pravákům, nikoliv leváci ku celku.

6.4.6 Úloha č.6

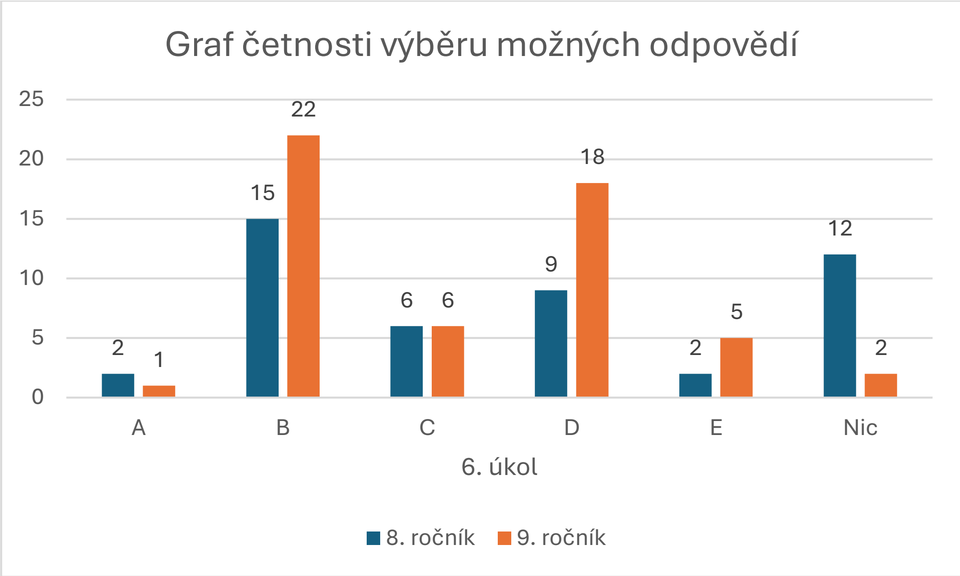


Jaký je obsah „kapky“, jestliže délka strany velkého čtverce je 2 cm a délka strany malého čtverce je 1 cm? (Za π dosazuj $\frac{22}{7}$*)*

(A) $1\ cm^2$ *(B)* $2\ cm^2$ *(C)* $3\ cm^2$ *(D)* $\pi\ cm^2$

(E) $4\ cm^2$

Graf četnosti pro toto zadání vypadá následovně:



Obrázek 28: Graf četnosti výběru pro 6. úlohu

V této úloze vyhrává možnost *B*, což je správnou odpovědí, ale poměrně těsně za ní je možnost *D*, kterou jsem do možností dal jenom z toho důvodu, že jsem potřeboval 5 různých možností odpovědi, které budou alespoň trochu možné. Tedy při čtverci o délce strany $a = 2\ cm$ jsem nechtěl dát možnost obsahu kapky, která bude určitě menší než obsah celého čtverce, např. $5\ cm^2$, což je víc, než má samotný čtverec.

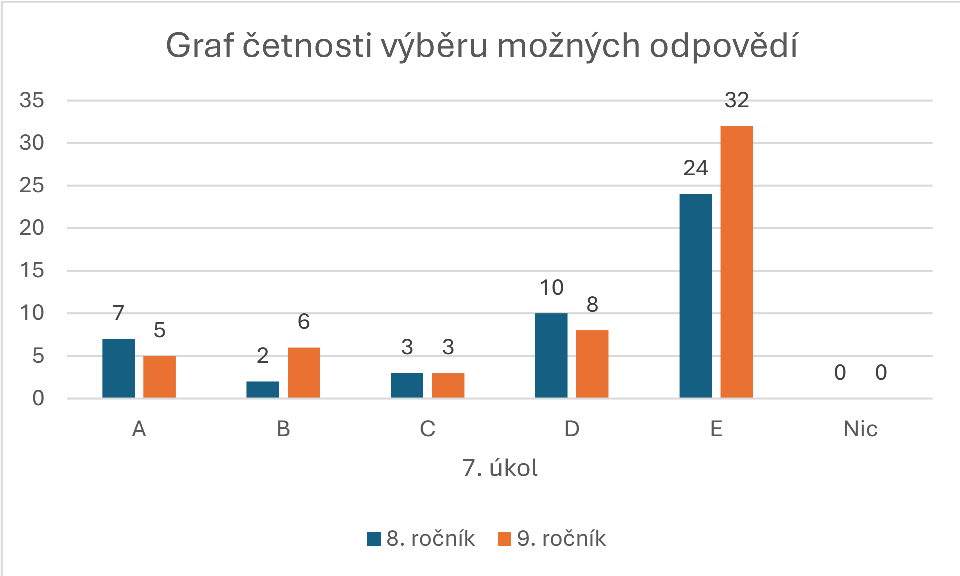
Samotnou odpověď *D* si pak vybírali žáci, kteří buď tipovali anebo špatně vypočítali obsah modrého pole. Jelikož ve vrchní části jde o polokruh, tak jeho obsah je $\frac{\pi r^2}{2}$, což zde vyjde $\frac{\pi}{2} \cong \frac{22}{14}\ cm^2$. Spodní část je pak obsah obdélníku o stranách $a = 2\ cm$ a $b = 1\ cm$ mínus dvě čtvrtiny kruhu. Jedna čtvrtina kruhu je $\frac{\pi r^2}{4}$, s hodnotami ze zadání pak $\frac{22}{28}\ cm^2$. Obsah dvou čtvrtkruhů je potom $2 \cdot \frac{22}{28} cm^2 = \frac{22}{14} cm^2$. Co potom žáci zapomněli bylo to, že tento obsah mají ještě odečíst od obsahu obdélníku. Kde udělali chybu bylo to, že obsah dvou čtvrtkruhů přičetli k obsahu půlkruhu, což dohromady dá kruh, v jejich případě hodnotu $\frac{22}{7} cm^2$, což ze zadaní ví, že tato hodnota je π, takže vybrali odpověď πcm^2.

6.4.7 Úloha č.7

Jaká další tři čísla budou následovat v této řadě: 3, 4, 2, 5, … , … , … ?

(A) 7, 3, 9 *(B) 5, 7, 9* *(C) 2, 3, 4* *(D) 3, 4, 2* *(E) 1, 6, 0*

Graf četnosti pro toto zadání vypadá následovně:



Obrázek 29: Graf četnosti výběru pro 7. úlohu

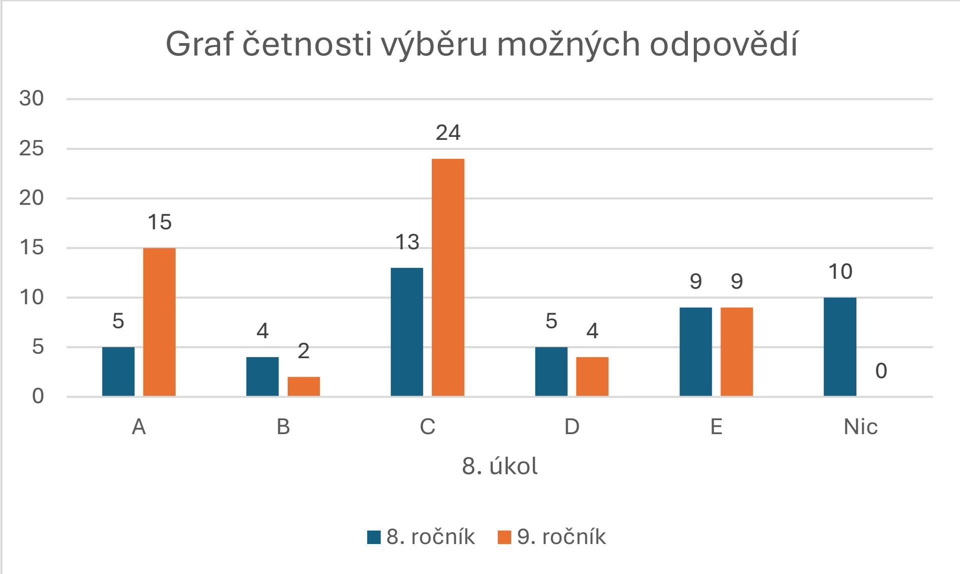
Jak již bylo zmíněno u příkladu č.1, tak se druhé zadání, kde každý řešitel vybral z uvedených možností a nenechal odpověď prázdnou. Největší zastoupení má zde možnost *E*, která je také správnou odpovědí. Druhé největší zastoupení má možnost *D*, kterou si řešitelé vybírali proto, že by se pak v řadě jednalo o opakování. Řada by pak vypadala následovně $\{3,4,2,5,3,4,2,5,\dots\}$. Na tuto skutečnost mě upozornil i vedoucí práce, za mě je však tato odpověď špatná, jelikož v zadání není žádný náznak toho, že by se jednalo o řadu, ve které by se čísla takto opakovala. Kdyby v zadání bylo *Jaká další tři čísla budou následovat v této řade: 3,4,2,5,3*, tak by odpovědí bylo v tomto případě $\{4,2,5\}$, tedy řada s opakováním. Jelikož v původním zadání není žádný náznak toho, že by se řada opakovala, tak je za mě možnost *D* špatně.

6.4.8 Úloha č.8

Jaké dostaneme číslo, pokud od součtu prvních 25 sudých přirozených čísel odečteme součet prvních 25 lichých přirozených čísel?

(A) 15 *(B) 20* *(C) 25* *(D) 30* *(E) 0*

Graf četnosti pro toto zadání vypadá následovně:



Obrázek 30: Graf četnosti výběru pro 8. úlohu

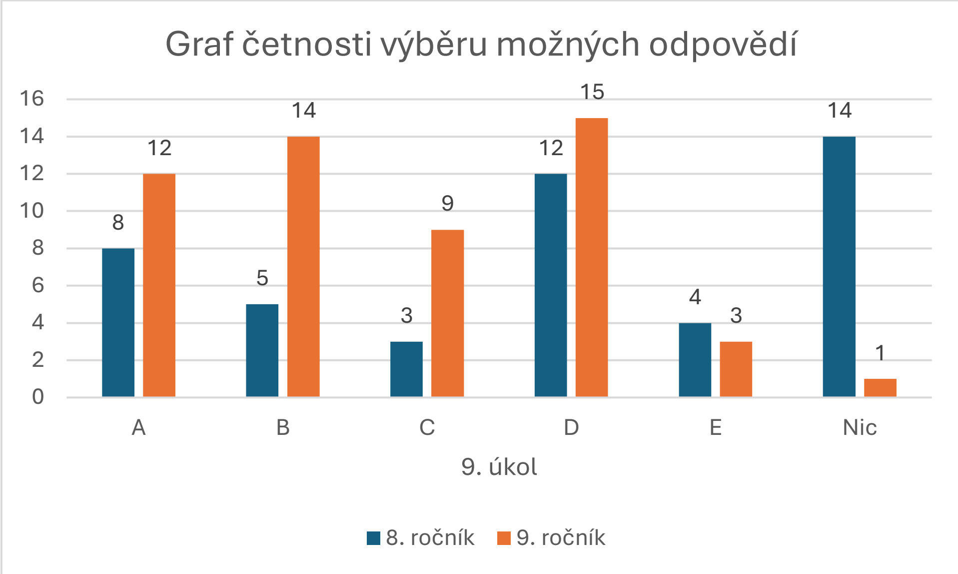
V tomto příkladě převažuje v četnosti výskytu odpověď *C*, která je správnou odpovědí. Za zmínku také stojí odpovědi *A* a *E*. Možnost *E* vybrali tipující řešitelé, tedy v testu ani v papíru na výpočty neměli žádnou zmínku o výpočtu. Možnost *A* na druhou stranu vybrali řešitelé, kteří si udělali součty sudých a lichých čísel a ty od sebe odečetli. Bohužel při sčítání a odčítaní udělali numerickou chybu a vyšlo jim číslo 15 nebo číslo jemu blízké, a tak vybrali možnost *A*.

6.4.9 Úloha č.9

Do pekařské soutěže se přihlásilo 78 % žen, mužů bylo o 700 méně. Kolik lidí se celkově přihlásilo do soutěže?

(A) 1250 *(B) 2250* *(C) 2500* *(D) 3182* *(E) Jiné*

Graf četnosti pro toto zadání vypadá následovně:



Obrázek 31: Graf četnosti výběru pro 9. úlohu

Správnou odpovědí je zde možnost *A*, což je v řadě četností 2. nejčastější odpověď. U této odpovědi je také největší četnost u sloupce *Nic* ze všech úloh. Nejčastěji vybrána možnost byla odpověď *D*, která nejen že vypadá ze všech nabídek nejvíc specificky a tím pádem podezřele, ale také se k ní dá špatným výpočtem skutečně dopracovat. Dopracujeme se k ní tak, že ze zadání špatně pochopíme, co reprezentuje počet 700. Správně jde o rozdíl v počtu mezi ženami a muži, při špatné interpretaci můžeme pochopit, že 700 je počet mužů, tedy 22 % celku. Pro vypočtení celku tím pádem vypočteme $\frac{700 \cdot 100}{22} = 3\,181,\overline{81} \doteq 3182$, což je odpověď *D*.

Samotná úloha byla hodnocená jako nejtěžší z celého testu, a to jak žáky, tak učiteli. Grafy četnosti tomu také napovídají, kde ve všech ostatních případech byly sloupce se správnou odpovědí poměrně jasně nejčetnější. Tuto úlohu jsem si také jako jedinou vypůjčil z Matematického klokana, změnil jsem jenom údaje, ale úloha jako taková je stejná, a to pro to, že jsem sám udělal v této úloze chybu a počítal jsem právě takovým stylem, se kterým bych se dopracoval k odpovědi *D*, proto jsem také do možností dal toto číslo.

Co je také zajímavé je počet nezodpovězení v úlohách žáky 9. ročníků, kdy z celkových 486 odpovědí bylo pouze 6 nezodpovězení, tedy 1,23 % odpovědí byly prázdnými. Pro porovnání v 8. ročníku bylo celkově 414 odpovědí, z toho 46 bylo nezodpovězení, což dělá $11,\overline{11}$ % prázdných odpovědí. Příčinou může být fakt, že si žák 9. ročníku bude víc věřit při výběru odpovědi, než žák 8. ročníků. Osobně se přikláním k tomu názoru, že v druhé půlce března jsou už žáci 9. ročníku v přípravách na přijímací zkoušky na střední školy. A ano, tím pádem můžou mít více „napočítáno“, čímž získávají větší důvěru ve své matematické schopnosti, ale co je důležité je to, že v přijímacím testu z matematiky se neodečítají body, tím pádem žáci můžou v případě, že by si nebyli moc jistí, tipnout a nic neztratit, jenom získat. To se pak může promítnout do odpovídání v mém výzkumném šetření, jelikož jsou žáci vedeni k tomu, že když si nejsou 100 % jistí, tak ať vyberou za ně nejsympatičtější odpověď. S tímto smýšlením by potom dávala smysl četnost vybrání odpovědí D u posledního příkladu, kde, jak jsem zmiňoval, je možné se dopracovat k tomu číslu, ale také působí velice zvláštně v nabídce odpovědí a mohlo by být pravděpodobně výsledkem. Obdobně bychom mohli uvažovat u úkolu č.6, kde opět je na výběr mezi celočíselnými možnostmi i možnost $\pi\ cm^2$, která je oproti ostatním dostatečně odlišná a tím pádem „atraktivní“ na výběr, protože proč by tam taky dávali tak „specifickou“ možnost. Když se podíváme na graf četností u úkolu č.6, tak i zde špatná odpověď je poměrně hodně krát vybrána.

Závěr

Hlavním cílem práce bylo zanalyzovat soutěž Matematický klokan v letech 2016-2020, a to konkrétně v úrovni Kadet, a na základě získaných poznatků vytvořit zadání, které by se neslo v duchu „klokanovských" úloh, a otestovat jej na základní škole a následně zanalyzovat i tyto výsledky.

Teoretická část se zabývá tím, co to je soutěž Matematický klokan, jaké má kategorie a pravidla pro každou kategorii. Také jsou zde představeny statistické nástroje, které jsou dále v práci využity pro analýzu dat.

V práci jsem pro každý ročník zanalyzoval jak získané body, tak i 6 vybraných úloh, kde od každého bodového ohodnocení jsem vybral právě 2 úlohy. Ke každé úloze jsem nabídl různé pohledy řešení, a to jak za použití klasických matematických postupů a metod, tak za pomoci logické úvahy. Překvapením pro mě pak bylo zjištění, že ani jeden z ročníků nemůžeme na základě získaných bodů označit podle Kolmogorov-Smirnova testu za normální rozdělení. I když graf četnosti získaných bodů připomínal vždy Gaussovu křivku, až tedy na ročník 2020, kde bylo ale znatelně méně řešitelů, tak při tak velkém počtu zúčastněných řešitelů byla kritická hodnota vždy menší než největší vypočtená diference, a to jak při hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$, tak při hladině $\alpha = 0{,}01$.

Při vytváření vlastních úloh jsem se snažil držet takové zásady, aby se k výsledku dokázali řešitelé dostat jak za pomoci naučených matematických algoritmů, tak i za pomoci logické úvahy. Relativně složitým úkolem pro mě, jako zadavatele příkladů k řešení, bylo vytvoření možných odpovědí, jelikož jsem se snažil do jednotlivých možných odpovědí k výběru zvolit takové hodnoty, ke kterým by se při chybném výpočtu skutečně mohlo dospět.

Výzkumné šetření proběhlo na dvou školách, a to na ZŠ Andělská Hora, což je škola, kterou jsem jako žák 1. - 9. třídy navštěvoval, tak na ZŠ Bruntál Okružní, na kterém jsem v průběhu vysokoškolského studia vykonával své první praxe, a to jak náslechové, tak i první souvislé. Testování na obou školách proběhlo těsně před 31. ročníkem Matematického klokana, v Andělské Hoře tomu bylo 15.3.2025, v Bruntále pak 19.3.2025. Na obou školách jsem osobně zadával testy já. Test si vyzkoušeli žáci 8. a 9. ročníků, pro které je úroveň Kadet stavěna. Celkově jsem tak měl 100 testů, které jsem mohl vyhodnotit. Z Andělské Hory jsem si odnesl 23 testů, 10 za 8. ročník a 13 za 9. ročník, a z Bruntálu jsem si odnesl 77 testů, 36 za 8. ročník a 41 za 9. ročník. Milým zjištěním pro mě pak bylo to, že u každé třídy jsem mohl říct, že jde podle Kolmogorov-Smirnova testu o normální rozdělení. Díky tomu jsem tedy mohl začít porovnávat různé třídy mezi sebou. Při porovnávání jsem se snažil vytvářet skupiny tak, aby porovnávané skupiny byly na obdobné úrovní vzdělání, proto jsem například neporovnával dvojici 8.A ze ZŠ Andělská Hora a 9.B ze ZŠ Bruntál Okružní. Vzniklo mi tak několik dvojic, které jsem porovnával pomocí F-testu a případně i t-testu na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$. U některých dvojic se zamítala nulová hypotéza už u F-testu, někde se zamítala až u t-testu, ale někde jsme nemohli zamítnout nulovou hypotézu ani u jednoho testu. Jelikož ze získaných dat se daly vytvořit i dvě trojice, tak jsem k testování také použil ANOVA test, který mi umožnil otestovat trojici naráz, což t-test neumožňuje.

Výzkum považuji za úspěšný, jelikož se mi povedlo nasbírat takový soubor dat, na kterém jsem mohl aplikovat statistické metody, které jsem představil v teoretické části, ať už se jednalo o Kolmogorov-Smirnův test, F-test, t-test, Bartlettův test či ANOVA test, pro každý z těchto testů jsem měl alespoň jednu skupinu, na které jsem mohl test provést.

Seznam použité literatury

Literatura

Matematický klokan ČR. [online]. Dostupné z: http://matematickyklokan.upol.cz

Association Kagourou sans Frontières [online]. Dostupné z: https://www.aksf.org/index.xhtml

CHRÁSKA, Miroslav. Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu. 2., aktualizované vydání. Pedagogika (Grada). Praha: Grada, 2016. ISBN 978-80-247-5326-3.

PAVLÍK, Jiří. *Aplikovaná statistika*. Praha: Vysoká škola chemicko-technologická, 2005. ISBN 80-708-0569-2.

ARSHAM, Hossein a LOVRIC, Miodrag. BARTLETT'S TEST. *International Encyclopedia of Statistical Science*. 2011, roč. 2011, č. 2, s. 20-23. ISSN 9783642048975. Dostupné také z: https://www.researchgate.net/publication/252322443_Bartlett's_Test.

CALÁBEK, P.; HÁTLE, J.; MOLNÁR, J. a ZATLOUKALOVÁ, S. Matematický klokan 2016. Olomouc: Jednota českých matematiků a fyziků, pobočka Olomouc, [1995]-. ISBN 978-80-244-5065-0. ISSN 2533-3305. Dostupné z: https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/02/sbornik2016.pdf

CALÁBEK, P.; HÁTLE, J.; MOLNÁR, J. a ZATLOUKALOVÁ, S. Matematický klokan 2017. Olomouc: Jednota českých matematiků a fyziků, pobočka Olomouc, [1995]-. ISBN 978-80-244-5178-7. ISSN 2533-3305. Dostupné z: https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/02/sbornik2017.pdf

CALÁBEK, P.; HÁTLE, J.; MOLNÁR, J. a ZATLOUKALOVÁ, S. Matematický klokan 2018. Olomouc: Jednota českých matematiků a fyziků, pobočka Olomouc, [1995]-. ISBN 978-80-244-5411-5. ISSN 2533-3305. Dostupné z: https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/02/sbornik2018.pdf

CALÁBEK, P.; HÁTLE, J.; MOLNÁR, J. a ZATLOUKALOVÁ, S. Matematický klokan 2019. Olomouc: Jednota českých matematiků a fyziků, pobočka Olomouc, [1995]-. ISBN 978-80-244-5551-8. ISSN 2533-3305. Dostupné z: https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/02/sbornik2019.pdf

CALÁBEK, P.; HÁTLE, J.; MOLNÁR, J. a ZATLOUKALOVÁ, S. Matematický klokan 2020. Olomouc: Jednota českých matematiků a fyziků, pobočka Olomouc,

[1995]-. ISBN 978-80-244-6037-6. ISSN 2533-3305. Dostupné z: https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/02/sbornik2020.pdf

PAVLÍK, Jiří. Aplikovaná statistika. Praha: Vysoká škola chemicko-technologická, 2005. ISBN 80-708-0569-2.

MATHEMATICA.PT. ***Kangaroo Questions***. Online. C2025. Dostupné z: https://www.matematica.pt/en/useful/kangaroo-questions.php. [cit. 2025-03-03].

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Anotace

Jméno a příjmení:	Josef Lengsfeld
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.
Rok obhajoby	2025
Název práce:	Analýza soutěže Matematický klokan, kategorie Kadet, z let 2016-2020
Název v angličtině:	Analysis of the Mathematical Kangaroo competition, Cadet category, from 2016-2020
Anotace práce:	Diplomová práce je zaměřená na soutěž Matematický klokan v úrovni Kadet z let 2016-2020, statistické zpracování této soutěže v daných letech, řešené příklady z vybraných ročníků, tvorbou vlastních úloh podle zásad „klokanovských" úloh, výzkumnému šetření vytvořených úloh na základních školách a následným statistickým zpracováním získaných dat.
Klíčová slova:	Matematický klokan, Kadet, statistika, statistické metody, ANOVA, F-test, t-test, Kolmogorovův-Smirnovův test, Bartlettův test homogenity rozptylu
Anotace v angličtině:	This master thesis focuses on the Mathematical Kangaroo competition at the Cadet level from 2016-2020, statistical processing of this competition in those years, solved examples from selected grades, creation of own tasks according to the principles of 'Kangaroo' tasks, research investigation of the created tasks in primary schools and subsequent statistical processing of the obtained data.
Klíčová slova v angličtině:	Mathematical kangaroo, Cadet, statistics, statistical methods, ANOVA, F-test, t-test, Kolmogorov-Smirnov test, Bartlett's test of homogeneity of variance
Přílohy vázané k práci:	1
Rozsah práce:	131
Jazyk práce:	Český jazyk