

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

SOUŘADNICOVÉ SYSTÉMY



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.**

Vypracoval(a): **Anna Hanáková**

Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika

Studijní obor Matematika-ekonomie se zaměřením na bankovníctví/pojišťovnictví

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2018

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Anna Hanáková

Název práce: SOUŘADNICOVÉ SYSTÉMY

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2018

Abstrakt: Souřadnicové systémy představují matematický nástroj, s jehož pomocí můžeme jednoznačně určit polohu bodu. Souřadnicové systémy můžeme transformovat a tyto transformace využít v praktických výpočtech. Práce zahrnuje souřadnice na přímce a souřadnicové systémy v rovině. Cílem práce je popsat souřadné systémy, ukázat možné transformace a využití transformací demonstrovat na řešených příkladech.

Klíčová slova: souřadnicový systém, souřadnice, transformace, rovina

Počet stran: 41

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Anna Hanáková

Title: Coordinate systems

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

The year of presentation: 2018

Abstract: Coordinate systems represent a mathematical instrument which can be used for unequivocal determination of the position of the point. Coordinate systems can be transformed and these transformations can be then applied in calculations. This work includes coordinates on a straight line and coordinate systems in plane. The aim of this thesis is to describe coordinate systems and to demonstrate the use of their transformations on solved examples.

Key words: coordinate systems, coordinates, transformation, plane

Number of pages: 41

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Pavly Kouřilové Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne

.....

podpis

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Seznam značení | 7 |
| Úvod | 8 |
| 1 Přípravná kapitola | 9 |
| 2 Souřadnicové systémy | 11 |
| 3 Souřadnice na přímce | 13 |
| 3.1 Transformace na číselné ose | 15 |
| 4 Souřadnicové systémy v rovině | 18 |
| 4.1 Kartézská soustava souřadnic v \mathbb{R}^2 | 18 |
| 4.1.1 Transformace | 20 |
| 4.1.2 Posunutí kartézské soustavy souřadnic | 22 |
| 4.1.3 Otočení kartézské soustavy souřadnic | 25 |
| 4.2 Polární soustava souřadnic | 27 |
| 4.2.1 Transformace kartézských a polárních souřadnic | 28 |
| 4.2.2 Využití polárních souřadnic | 32 |
| Závěr | 40 |
| Literatura | 41 |

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí své bakalářské práce, Mgr. Pavle Kouřilové, Ph.D., za čas věnovaný vedení této práce, za všechny připomínky a poskytnuté rady. Velký dík patří také mým nejbližším za trpělivost a podporu během celého studia.

Seznam použitého značení

| | | |
|--------------------------------------|-----|--|
| \mathbb{R} | ... | množina reálných čísel |
| \mathbb{R}^2 | ... | rovina |
| \mathbb{R}^3 | ... | prostor |
| \mathbb{Z} | ... | množina celých čísel |
| X, Y, Z | ... | body |
| X' | ... | transformovaný bod |
| $[x]$ | ... | souřadnice bodu na přímce |
| $[x']$ | ... | transformovaná souřadnice bodu na přímce |
| $[x; y]$ | ... | souřadnice bodu v rovině |
| $[x_h; y_h]$ | ... | homogenní souřadnice bodu v rovině |
| $ XY $ | ... | vzdálenost bodů X a Y |
| \vec{u} | ... | vektor |
| $(u_1; u_2)$ | ... | souřadnice vektoru v rovině |
| φ, ϑ | ... | úhel |
| $\mathbf{Z}, \mathbf{T}, \mathbf{R}$ | ... | transformační matice |
| \mathbf{I} | ... | jednotková matice |
| \mathbf{Z}^{-1} | ... | inverzní matice |
| \mathbf{Z}^T | ... | transponovaná matice |

Úvod

Cílem práce je zpracovat téma souřadnicových systémů v \mathbb{R} , kartézské soustavy souřadnic a polární soustavy souřadnic v \mathbb{R}^2 do přehledného celku. Pomocí příkladů ukázat, jak můžeme systémy vzájemně transformovat a jak se dá znalost transformací souřadnic využít k usnadnění některých výpočtů. Obsah práce představují známé a nejčastěji používané systémy souřadnic.

V úvodní první kapitole jsou definovány pojmy, které budeme používat v následujícím textu. Druhá kapitola představuje souřadnicové systémy obecně, k čemu se používají a co je tvoří. Třetí kapitola popisuje systém souřadnic na přímce a jeho možné transformace, tj. posunutí počátku a změna měřítka. K oběma případům je připojen řešený příklad.

Ve čtvrté kapitole se věnujeme souřadnicovým systémům v rovině. V první řadě jde o kartézskou soustavu souřadnic a její transformace posunutím a otočením. V kapitole najdeme část věnovanou lineárním transformacím a jejich řešení pomocí matic.

Velkou část kapitoly o souřadných systémech v rovině \mathbb{R}^2 tvoří podkapitola věnovaná polárním souřadnicím. V první řadě jsou uvedeny převodní vztahy pro souřadnice kartézské a polární. V druhé řadě se práce věnuje využití převodu do polárních souřadnic. Například pro výpočet limit a pro úpravu oboru integrace dvojných integrálů.

Náčrty, kterými je doplněna celá práce, byly vytvořeny v grafickém editoru Inkscape a to výhradně pro tuto práci.

Celý text byl vysázen v typografickém systému L^AT_EX 2_ε.

Kapitola 1

Přípravná kapitola

V přípravné kapitole si definujeme některé důležité pojmy, které budeme v následujícím textu potřebovat nebo budeme předpokládat jejich znalost.

Definice byly použity z [9].

Definice 1 (Metrický prostor)

Metrickým prostorem nazveme uspořádanou dvojici (\mathcal{X}, ρ) , kde \mathcal{X} je neprázdná množina a ρ zobrazení kartézského součinu $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující tyto podmínky:

- $\rho(X, Y) \geq 0$ (nezápornost)
- $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$ (definitivnost)
- $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$ (symetrie)
- $\rho(X, Z) \leq \rho(X, Y) + \rho(Y, Z)$ (trojúhelníková nerovnost)

pro každé $X, Y, Z \in \mathcal{X}$. Číslo $\rho(X, Y)$ budeme nazývat vzdálenost prvků X a Y , zobrazení $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, budeme nazývat metrikou prostoru (\mathcal{X}, ρ) .

Na množině \mathcal{X} , která zůstává stejná, můžeme zavést více různých metrik a tím získáváme další a další metrické prostory. V každém metrickém prostoru pak počítáme vzdálenost jiným způsobem. V této práci budeme pracovat s eukleidovskou metrikou.

Věta 1 (Eukleidovská metrika)

Nechť $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Pak metriku $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou pro $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ vztahem:

$$\rho(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

nazveme eukleidovskou metrikou.

Metrický prostor (\mathbb{R}, ρ) , kde $\rho(X, Y) = |y - x|$ pro $x, y \in \mathbb{R}$, je množina reálných čísel s obvyklou definicí vzdálenosti. Tento prostor budeme dále stručně značit \mathbb{R} .

Metrický prostor (\mathbb{R}^n, ρ) , kde ρ je eukleidovská metrika, budeme dále značit \mathbb{R}^n . V této práci dále předpokládejme, že pracujeme s eukleidovskou metrikou. Zavedme, že symbolem \mathbb{R}^2 rozumíme rovinu.

Kapitola 2

Souřadnicové systémy

Základní otázka, kterou musíme na začátku celé práce objasnit, je, co obecně jsou souřadnicové systémy, kde s nimi pracujeme a k čemu se dají použít. Když potřebujeme v matematice určit jednoznačně polohu například bodu, využijeme k tomu čísla, která nazýváme souřadnice. Pro bod v rovině \mathbb{R}^2 to budou dvě čísla, pro bod v prostoru \mathbb{R}^3 už tři. Obecně pak platí, že pro *n-rozměrný* prostor těchto čísel bude *n*.

Obecně je soustava souřadnic tvořena:

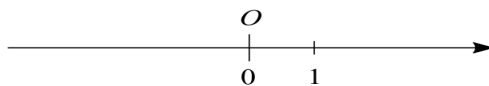
- *počátkem* - Jde o bod, který má všechny souřadnice rovny 0. Pokud se jedná o souřadný systém v rovině \mathbb{R}^2 či prostoru \mathbb{R}^3 , jde taky o bod, ve kterém se protínají všechny osy tvořící soustavu souřadnic.
- *osami* - Repektive příslušným počtem os, podle toho, v kolika rozměrném prostoru pracujeme. Osy se pro přehlednost a snadné zacházení s nimi značí. Značení je důležité dodržovat, protože bod je určen uspořádanou *n-ticí* čísel. Přehozením pořadí těchto čísel získáme bod jiný.
- *používanou jednotkou* - Tuto jednotku si volíme. Běžně pak používáme základní délkové jednotky jako například centimetr.

Bod v systému souřadnic jednoznačně určíme uspořádanou n -tici reálných čísel. Ta odčítáme z číselných os a nazýváme je souřadnicemi bodu. V rovině a prostoru pak můžeme mít několik typů soustav souřadnic. Nejčastěji používáme však ty, jejichž osy jsou na sebe kolmé. Nazýváme je kartézské soustavy souřadnic. Více o nich si řekneme v následujících kapitolách.

Kapitola 3

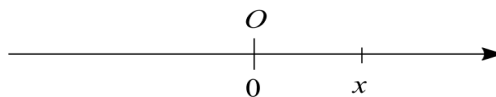
Souřadnice na přímce

Tato část práce popisuje nejjednodušší systém souřadnic, a to souřadný systém na přímce, tj. v \mathbb{R} . Na této přímce je označený počátek, zvolená orientace a zavedená jednotka.



Obrázek 3.1: Soustava souřadnic na přímce

Bod na přímce má jedinou souřadnici, číslo, kterým je jednoznačně určen. Je zřejmé, že každé reálné číslo je obrazem jednoho bodu přímky.



Obrázek 3.2: Souřadnice bodu na přímce

Skutečnost, že číslo x je souřadnicí bodu X , zapisujeme $X = [x]$. Vzdálenost dvou bodů na přímce představuje reálné nezáporné číslo, které přiřadíme libovolné dvojici bodů X, Y . Vzdálenost bodů X, Y značíme: $|XY|$. Toto číslo zjišťujeme jednoduchým výpočtem ve smyslu eukleidovské metriky pro $n = 1$:

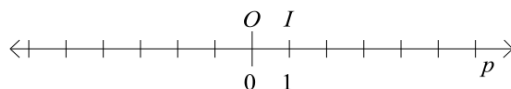
$$|XY| = |y - x|,$$

kde $X = [x]$ a $Y = [y]$.

Počátek O , který má souřadnici $O = [0]$, dělí přímku na dvě polopřímky. Zaveďme si, že doprava od počátku máme kladnou orientaci přímky. Leží-li bod X na kladné polopřímce, platí $x = |OX|$. Leží-li bod na opačné polopřímce, platí $x = -|OX|$.

Definice 2 (Soustava souřadnic na přímce)

Mějme přímku p . Zvolíme orientaci přímky a určíme si na přímce bod O . Bod $O=[0]$ nazveme počátkem soustavy. Zavedeme bod I , pro který platí $|OI| = 1$.



Obrázek 3.3: Soustava souřadnic na přímce

Libovolnému bodu X z kladně orientované části přímky p přiřadíme reálné číslo $x = |OX|$. Číslo x nazveme souřadnicí bodu X a značíme $X = [x]$. Takto definovaný systém říkáme soustava souřadnic na přímce.

Takovouto soustavu souřadnic můžeme zavést mnoha způsoby. Záleží na zvoleném bodu, který představuje počátek soustavy, na orientaci přímky a na daném měřítku.

Speciální případ soustavy souřadnic na přímce představuje reálná číselná osa, která je obrazem všech reálných čísel. Pro tuto platí, že počátek soustavy je v 0 a má jednotku o velikosti $|01|$. Ukažme si na ní příklad výpočtu vzdálenosti.

Příklad 1 Vypočítejme na reálné číselné ose vzdálenost bodů: $X=[3]$, $Y=[5]$

$$|XY| = |5 - 3| \Rightarrow |XY| = 2.$$

□

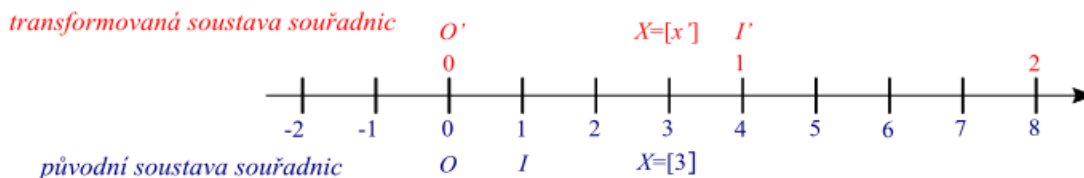
Příklad 2 Vypočítejme na reálné číselné ose vzdálenost bodů: $A=[-2]$, $B=[2]$

$$|AB| = |2 - (-2)| \Rightarrow |AB| = 4.$$

□

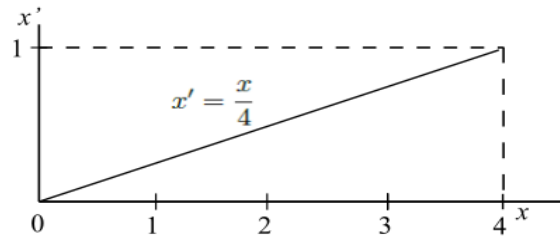
3.1. Transformace na číselné ose

Situace, kdy je 0 počátkem a jednotkou je vzdálenost $|OI| = 1$, je nejběžnější. Ukažme si, jak soustavu souřadnic transformovat. Mějme osu reálných čísel a zaveďme na ní soustavu souřadnic na přímce. Označme $O = [0]$ a jednotku $|OI| = 1$. Provedme následující transformaci, a to změnu měřítka. Pro nový počátek soustavy O' platí $O' = [0] = O$, pro novou jednotku $|O'I'| = 1$ odpovídá v původní soustavě $|OI'| = 4$. Dále si v původní soustavě zvolíme bod $X = [3]$ a chceme získat jeho souřadnici x' v transformované soustavě. Ukažme si na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Nová jednotka

Souřadnice bodu $X = [x']$ bude mít hodnotu menší než 1. Přesnou hodnotu získáme jednoduchým výpočtem. Interval $\langle 0; 4 \rangle$ chceme transformovat na interval $\langle 0; 1 \rangle$. Tuto operaci můžeme pospat jednoduchým lineárním vztahem.



Obrázek 3.5: Transformace jednotky

Číslo x' bude námi hledaná souřadnice, x je souřadnice bodu X v původní soustavě souřadnic a $q = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$ je směrnice přímky, popisující lineární závislost mezi body z intervalu $\langle 0; 4 \rangle$ a $\langle 0; 1 \rangle$. Pro výpočet souřadnice x' bodu X v transformované soustavě souřadnic získáváme tedy vztah:

$$x' = x \cdot q.$$

Jinak řečeno, $q \in \mathbb{R}$ je koeficient, který nám říká, kolikrát je původní jednotka větší (menší) než ta nová. V našem případě je původní jednotka *4-krát* menší, protože má náš hledaný koeficient hodnotu $q = \frac{1}{4}$.

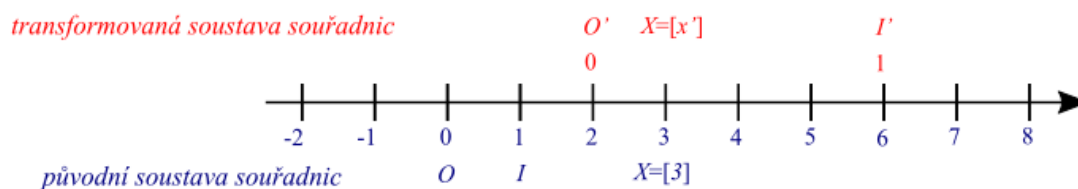
Nyní jen dosadíme do vrozce a spočítáme novou hodnotu.

$$x' = x \cdot q$$

$$x' = 3 \cdot \frac{1}{4}$$

$$x' = \frac{3}{4}$$

Nejen změna měřítka představuje transformaci souřadného systému na přímce. Ke změně jednotky může ještě přibýt posun počátku. Nyní máme za počátek bod $O' = [0]$, který má v původní soustavě souřadnici 2. Transformace jednotky nám zůstává, tj. $q = \frac{1}{4}$. Znovu budeme hledat novou souřadnici x' bodu $X = [3]$.



Obrázek 3.6: Nový počátek soustavy

Předchozí vzorec upravíme následujícím způsobem.

$$x' = (x - o') \cdot q,$$

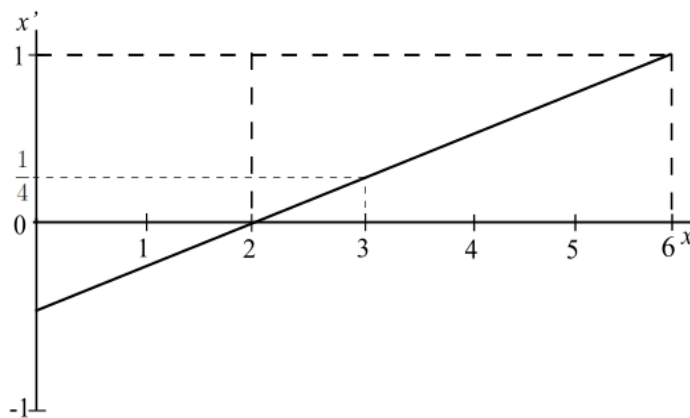
kde o' je souřadnice transformovaného počátku v původní soustavě, respektive hodnota posunutí, kterou musíme odečíst od souřadnice x .

Dosaďme do výrazu:

$$x' = (x - o') \cdot q$$

$$x' = (3 - 2) \frac{1}{4}$$

$$x' = \frac{1}{4}.$$



Obrázek 3.7: Grafické řešení ilustračního příkladu

Kapitola 4

Souřadnicové systémy v rovině

V této kapitole si představíme souřadnicové systémy v rovině \mathbb{R}^2 . Jde o dvoudimenzionální prostor, tudíž budeme hledat souřadnice bodů, které budou určeny uspořádanou dvojicí čísel. K vytvoření kapitoly bylo čerpáno ze zdrojů [5].

4.1. Kartézská soustava souřadnic v \mathbb{R}^2

Kartézská soustava souřadnic v rovině je vůbec nejpoužívanějším typem soustavy v \mathbb{R}^2 . Ukažme si, jak je soustava definovaná a jak se s ní dá pracovat.

Definice 3 (Kartézská soustava souřadnic v rovině)

Dvojice reálných číselných os x , y v rovině, pro které platí:

- *obě osy jsou navzájem kolmé,*
- *obě osy mají stejné měřítko,*
- *jejich průsečíku O odpovídá na obou osách číslo 0,*

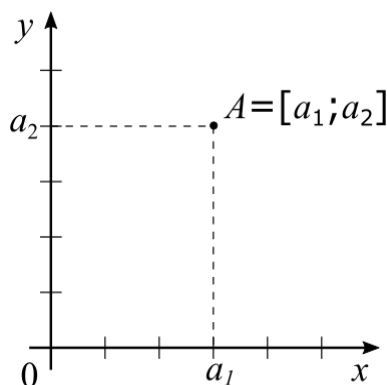
se nazývá kartézská soustava souřadnic v rovině. Značíme ji Oxy . Bod O se nazývá počátek kartézské soustavy souřadnic a přímky x , y se nazývají souřadnicové osy.

Definice 4 (Souřadnice bodu v rovině)

Uspořádanou dvojici reálných čísel $[x; y]$, která jsou rovnoběžnými průměty bodu X na souřadnicové osy, nazýváme souřadnicemi bodu X v rovině.

Ukažme si, jak souřadnice bodu v rovině najdeme. Pro větší přehlednost nyní pracujme s bodem A . Souřadnicemi libovolného bodu A v rovině je pak uspořádaná dvojice reálných čísel $[a_1; a_2]$, které získáme následujícím způsobem.

- Bodem A vedeme rovnoběžku s osou y .
- Průsečík osy x s touto rovnoběžkou označíme a_1 .
- Analogicky vedeme rovnoběžku s osou x .
- Průsečík osy y a rovnoběžky označíme a_2 .



Obrázek 4.1: Souřadnice bodu v rovině

Kartézská soustava souřadnic, která bodům z roviny přiřadí tímto způsobem uspořádanou dvojici čísel, je zobrazení roviny do množiny všech uspořádaných dvojic reálných čísel.

Pro vzdálenost dvou bodů v rovině $X = [x_1; y_1]$ a $Y = [x_2; y_2]$ získáváme opět ve smyslu eukleidovské metriky pro $n = 2$ vztah:

$$|XY| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Pro úplnost si spočítejme jednoduchý příklad a demonstrujme řešení na obrázku 4.2.

Příklad 3 Vypočítejme vzdálenosti bodů: $X=[1; 2]$, $Y=[5; 5]$

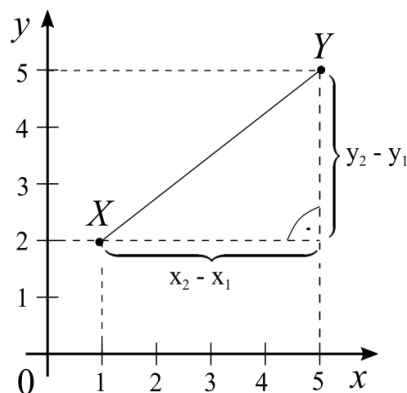
$$|XY| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|XY| = \sqrt{(5 - 1)^2 + (5 - 2)^2}$$

$$|XY| = \sqrt{25}$$

$$|XY| = 5.$$

□



Obrázek 4.2: Vzdálenost bodů X, Y v rovině

4.1.1. Transformace

Definice v kapitole jsou převzaty z [1], [3].

Geometrická transformace představuje funkci, jejíž definiční obor a obor hodnot je množina bodů. Jde o zobrazení Z , které bodu X jednoznačně přiřadí bod X' :

$$Z : X \mapsto X',$$

a souřadnicím x, y bodu X jednoznačně přiřadí nové souřadnice x', y' :

$$Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Pokud vztah mezi $X = [x; y]$ a $X' = [x'; y']$ lze popsat pomocí soustavy lineárních rovnic, mluvíme o lineární transformaci. Tento vztah popíšeme rovnicemi:

$$x' = z_{11}x + z_{12}y,$$

$$y' = z_{21}x + z_{22}y,$$

kde $z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22} \in \mathbb{R}$ nazveme koeficienty soustavy rovnic. Transformace v souřadných systémech můžeme tedy popsat pomocí maticových rovnic:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}' = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{X}.$$

Matici \mathbf{Z} nazveme transformační maticí. Transformační matice jsou nenulové čtvercové matice typu 3×3 , jsou ortogonální a regulární.

Definice 5 (Ortogonální matice)

Ortogonální maticí rozumíme čtvercovou matici \mathbf{A} , pro kterou platí:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

kde \mathbf{A}^T je transponovaná matice k matici \mathbf{A} a \mathbf{I} je jednotková matice.

Definice 6 (Inverzní matice)

Nechť matice \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou čtvercové matice stupně n . Řekneme, že \mathbf{B} je inverzní matice k matici \mathbf{A} nebo že \mathbf{A} je inverzní matice k matici \mathbf{B} , jestliže:

$$\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I},$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice.

Definice 7 (Regulární matice)

Čtvercová matice \mathbf{A} , k níž existuje inverzní matice, se nazývá regulární a platí, že $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Matice jsou pro různé typy transformací specifické. V této práci představíme transformaci posunutí a otočení. Transformace můžeme skládat a složenou transformaci popsat jedinou maticí, která vznikla násobením matic jednotlivých transformací. Pro toto skládání a vznik jediné transformační matice musíme kartézské

souřadnice upravit. Kartézské souřadnice bodu $X = [x; y]$ se převádí na takzvané homogenní souřadnice. Skutečnost, že se jedná o homogenní souřadnici, vyjádříme dolním indexem $_h$:

$$[x; y] \mapsto [x_h; y_h; w_h].$$

Definice 8 (Homogenní souřadnice)

Uspořádanou trojici čísel $[x_h; y_h; w_h]$, $w_h \neq 0$, nazýváme homogenní souřadnice bodu $X \in \mathbb{R}^2$, jestliže platí:

$$\frac{x_h}{w_h} = x, \frac{y_h}{w_h} = y,$$

kde x, y jsou kartézské souřadnice bodu $X \in \mathbb{R}^2$.

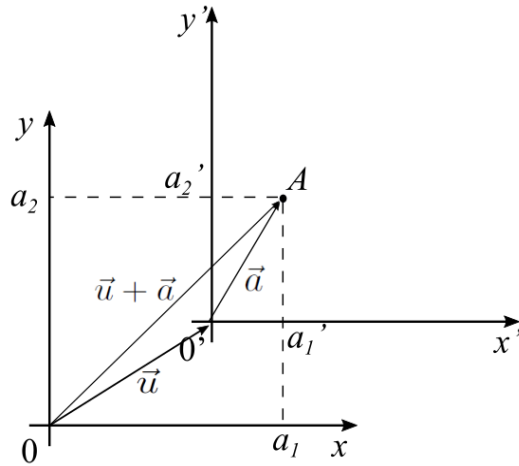
Souřadnici $w_h \in \mathbb{R}$ se nejčastěji volí $w = 1$ a na tento případ se taky omezíme v této práci. Proto můžeme index $_h$ vynechávat. Pro homogenní souřadnice bodu $X = [x_h; y_h; w_h]$ tedy platí:

$$[x_h; y_h; w_h] = [x, y, 1].$$

4.1.2. Posunutí kartézské soustavy souřadnic

V další části si ukážeme, jaké jsou vztahy mezi souřadnicemi bodu v kartézských systémech, které jsou od sebe vzájemně posunuté. K úvahám budeme potřebovat znalosti z analytické geometrie. Posunutím kartézské soustavy souřadnic Oxy v rovině o vektor $\vec{u} = (u_1; u_2)$ získáváme opět kartézskou soustavu souřadnic $O'x'y'$.

Bod A má v takto vzniklé soustavě souřadnice $[a'_1; a'_2]$, které jsou taky souřadnicemi vektoru \vec{a} v soustavě $O'x'y'$. Vektor \vec{a} je určen body O' a A . Souřadnice bodu A v Oxy jsou rovny souřadnicím vektoru, který vznikne součtem vektorů \vec{u} a \vec{a} , což nám ukazuje obrázek 4.3.



Obrázek 4.3: Posunutí kartézské soustavy

Věta 2 Jsou-li $[a_1; a_2]$ souřadnice bodu A v soustavě souřadnic Oxy a $[a'_1; a'_2]$ souřadnice bodu A v soustavě souřadnic $O'x'y'$, která vznikla ze soustavy Oxy posunutím o vektor $\vec{u} = (u_1; u_2)$, pak platí:

$$a_1 = a'_1 + u_1$$

$$a_2 = a'_2 + u_2.$$

Příklad 4 Mějme kartézskou soustavu souřadnic Oxy a v ní bod $A=[3; 3]$. Posunutím této soustavy o vektor $\vec{u} = (2; 1)$ získáme soustavu $O'x'y'$. Vypočítejte souřadnice bodu A' v takto vzniklé soustavě.

$$a'_1 = a_1 - u_1$$

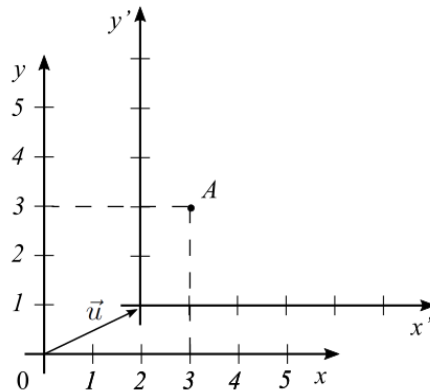
$$a'_1 = 3 - 2 = 1$$

$$a'_2 = a_2 - u_2$$

$$a'_2 = 3 - 1 = 2$$

$$A' = [a'_1; a'_2] = [1; 2]$$

□



Obrázek 4.4: Řešení příkladu

Ukažme si, jak se transformace posunutím dá provést pomocí maticového výpočtu. Mějme bod $A = [a_1; a_2]$. Posunutím o vektor $\vec{u} = (u_1; u_2)$ získáváme $A' = [a'_1; a'_2]$. Kartézské souřadnice bodů A a A' převedeme na homogenní souřadnice a vztah mezi A a A' lze popsat maticovou rovnicí:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A},$$

kde \mathbf{T} (translation) je transformační matice posunutí:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u_1 \\ 0 & 1 & -u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a \mathbf{A} , \mathbf{A}' jsou sloupcové vektory homogenních souřadnic bodu A , A' :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5 Řešme předchozí příklad pomocí matic. Známe souřadnice bodu $A=[3;3]$ v kartézské soustavě souřadnic Oxy . Posunutím soustavy o vektor $\vec{u} = (2;1)$ získáme soustavu $O'x'y'$. Chceme získat souřadnice bodu A' v nově vzniklé soustavě $O'x'y'$.

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A},$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pak:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ 3 - 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

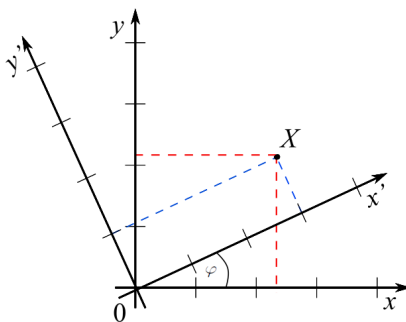
Ze sloupcového vektoru homogenních souřadnic bodu A' snadno získáváme i jeho kartézské souřadnice:

$$A' = [a'_1; a'_2] = [1; 2].$$

□

4.1.3. Otočení kartézské soustavy souřadnic

Nejen posunutím se mění souřadnice bodu. Můžeme si ukázat, jak se souřadnice budou měnit v případě, že kartézskou soustavou otočíme kolem jejího počátku. Otočení kolem počátku je nejjednodušší možností rotace. Je určeno středem rotace, v tomto případě počátkem soustavy, a orientovaným úhlem φ . Úhel je orientovaný po směru hodinových ručiček.



Obrázek 4.5: Otočení kartézské soustavy kolem počátku

Nové souřadnice přepočítáme pomocí goniometrických funkcí $\sin \varphi$, $\cos \varphi$. Platí:

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi,$$

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi,$$

pro střed otáčení $[0; 0]$.

Toto otočení můžeme popsat pomocí matice rotace \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak maticový vztah pro transformaci souřadnic $[x; y]$ na $[x'; y']$ zapíšeme:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{R}\mathbf{X},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud za střed otáčení zvolíme libovolný bod $S = [s_1; s_2] \neq [0; 0]$, pak transformované souřadnice počítáme jako:

$$x' = (x - s_1) \cos \varphi - (y - s_2) \sin \varphi,$$

$$y' = (x - s_1) \sin \varphi + (y - s_2) \cos \varphi.$$

Tato situace reprezentuje skládání transformací. Jedná se o transformaci složenou z transformace otočení a posunutí, kde souřadnice bodu S představují hodnotu posunutí ze středu $[0; 0]$ do bodu $[s_1; s_2]$. Celou tuto operaci můžeme popsat jedinou transformační maticí \mathbf{Z} , která vznikne vynásobením jednotlivých transformačních matic \mathbf{R} a \mathbf{T} :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R}\mathbf{T},$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & -s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & -s_1 \cos \varphi + s_2 \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi & -s_1 \sin \varphi - s_2 \cos \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{X}' = \mathbf{Z}\mathbf{X},$$

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & -s_1 \cos \varphi + s_2 \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi & -s_1 \sin \varphi - s_2 \cos \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x \cos \varphi - y \sin \varphi - s_1 \cos \varphi + s_2 \sin \varphi \\ x \sin \varphi + y \cos \varphi - s_1 \sin \varphi - s_2 \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x - s_1) \cos \varphi - (y - s_2) \sin \varphi \\ (x - s_1) \sin \varphi + (y - s_2) \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6 Mějme bod $X = [3; 1]$ v soustavě Oxy . Vypočítejme souřadnice bodu v soustavě $Ox'y'$, která vznikla otočením soustavy Oxy o $\frac{\pi}{6}$ a posunutím počátku do bodu $S = [1; -1]$.

$$x' = (3 - 1) \cos \frac{\pi}{6} - (1 - (-1)) \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$y' = (3 - 1) \sin \frac{\pi}{6} + (1 - (-1)) \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x' = \sqrt{3} - 1 \doteq 0,732$$

$$y' = 1 + \sqrt{3} \doteq 2,732$$

□

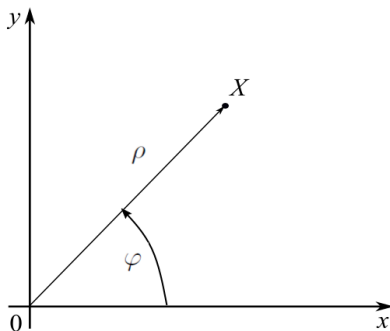
4.2. Polární soustava souřadnic

Tato soustava je další dvoudimenzionální typ soustavy souřadnic. V kapitole o polárních souřadnicích je čerpáno ze zdrojů [2], [8], [7].

V některých případech není použití kartézské soustavy ideální. Například u popisu obloukovitých křivek, může být vyjádření v kartézských souřadnicích složitější. Jde například o části kruhu nebo spirály. Jednoduchou transformací do polárních souřadnic si tak můžeme výrazně usnadnit výpočty.

Definice 9 (Polární soustava souřadnic)

Nechť $X = [x; y]$ je bod z roviny. Nechť ρ je vzdálenost bodu X od počátku soustavy souřadnic O a φ značí orientovaný úhel, který svírá úsečka OX s kladným směrem osy x . Pak uspořádanou dvojici $[\rho, \varphi]$ nazýváme polárními souřadnicemi bodu X .



Obrázek 4.6: Polární souřadnice bodu X v kartézské soustavě

Číslo ρ značí vzdálenost, tudíž nabývá nezáporných hodnot $\langle 0, \infty \rangle$. Souřadnice $\rho = 0$ má pouze počátek polární soustavy souřadnic. Číslo φ pak nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Z podstaty věci však stejný bod bude určen jak dvojicí souřadnic $[\rho, \varphi]$, tak $[\rho, \varphi + 2k\pi]$, pro $k \in \mathbb{Z}$

4.2.1. Transformace kartézských a polárních souřadnic

Kartézské souřadnice můžeme pomocí vzorců převést na souřadnice polární a naopak. Vztahy pro převod souřadnic představují jednoduchou aplikaci Pythagorovy věty a goniometrických funkcí. Ukážeme si je v následujících podkapitolách.

Převod polárních souřadnic na kartézské

Věta 3 Nechť bod X z roviny \mathbb{R}^2 má v polární soustavě souřadnice $[\rho; \varphi]$, pak pro kartézské souřadnice $[x; y]$ platí vztahy:

$$x = \rho \cos \varphi,$$

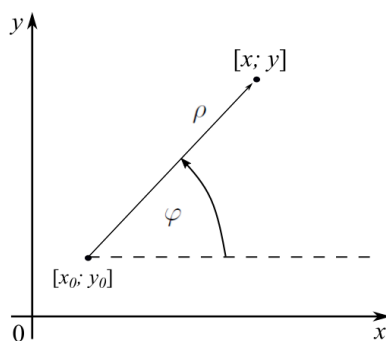
$$y = \rho \sin \varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

Takto definované souřadnice jsou základní souřadnice. Můžeme mít ještě zobecněné polární souřadnice:

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi,$$

$$y = y_0 + \rho \sin \varphi.$$



Obrázek 4.7: Zobecněné polární souřadnice bodu

Převod kartézských souřadnic na polární

K tomuto převodu využijeme znalosti Pythagorovy věty a vlastností goniometrických funkcí. Vztah pro výpočet ρ vyjádříme z rovnice $\rho^2 = x^2 + y^2$ následovně:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Pro $x = 0$ pak platí:

- $\varphi = 0$ pro $y = 0$,
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ pro $y > 0$,
- $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ pro $y < 0$.

Jde o body, které leží na souřadnicových osách.

Pro $x \neq 0$, tj $\rho > 0$, a $\varphi \neq \frac{\pi}{2}, \varphi \neq \frac{3\pi}{2}$ vyjádříme φ pomocí funkce $\tan \varphi$:

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi} = \tan \varphi$$

$$\Rightarrow \varphi = \arctan \frac{y}{x}.$$

Pro $x > 0$ pak platí:

- $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ pro $y > 0$, tj. bod z 1. kvadrantu.
- $\varphi = \arctan \frac{y}{x} + 2\pi$ pro $y < 0$, tj. bod ze 4. kvadrantu.

Pro $x < 0$ pak platí:

- $\varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi$ pro $y > 0$, tj. bod z 2. kvadrantu.
- $\varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi$ pro $y < 0$, tj. bod ze 3. kvadrantu.

Příklad 7 Převeďme polární souřadnice bodu $X = [2; 45^\circ]$ do kartézských souřadnic.

$$x = \rho \cdot \cos \varphi = 2 \cdot \cos 45^\circ$$

$$x = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$y = \rho \cdot \sin \varphi = 2 \cdot \sin 45^\circ$$

$$y = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$X = [\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

□

Příklad 8 Výsledek předchozího příkladu použijme jako výchozí situaci pro opačný postup. Tedy kartézské souřadnice bod $X = [\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ převedme na polární souřadnice.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rho = \sqrt{4}$$

$$\rho = 2$$

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\tan \varphi = 1$$

$$\varphi = 45^\circ$$

$$X = [2; 45^\circ]$$

□

Příklad 9 Převedme kartézské souřadnice bodu $X = [-1; \sqrt{3}]$ do polárních souřadnic.

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$\rho = \sqrt{4}$$

$$\rho = 2$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{1}\right) + \pi$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + \pi$$

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi$$

$$X = [2; \frac{2}{3}\pi]$$

□

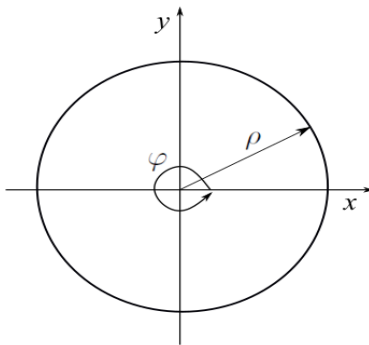
4.2.2. Využití polárních souřadnic

Ukázali jsme si způsob, jak kartézské souřadnice a polární souřadnice vzájemně transformovat. Teď si ukážeme, k čemu se tato transformace dá využít.

Vyjádření křivek a popis oblastí

Máme-li křivku, která je v kartézské soustavě popsána grafem funkce $f(x)$, můžeme ji převést na novou funkci $g(\rho)$, která může mít v některých případech mnohem jednodušší vyjádření. Ukažme si na kružnici.

Příklad 10 Mějme kružnici se středem v bodě $[0; 0]$ a poloměrem r .



Obrázek 4.8: Kružnice v kartézské soustavě

Platí:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

V prvním a druhém kvadrantu je popsána kružnice výrazem $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ a ve třetím a čtvrtém kvadrantu výrazem $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$. Ukažme si, že existuje jednodušší vyjádření. Převědeme rovnici kružnice do polárních souřadnic:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = r^2$$

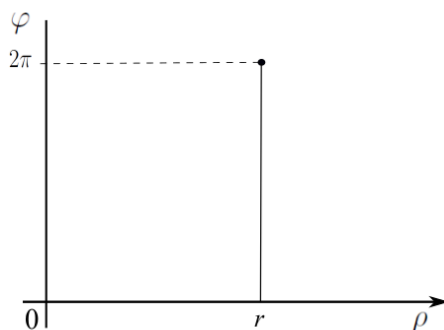
$$\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2$$

$$\rho^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = r.$$

Úhel φ nabývá hodnot z celého intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ a tak kružnici můžeme vyjádřit jednoduše:

$$\rho = r \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

□



Obrázek 4.9: Kružnice v polární soustavě

Výpočet dvojné limity

Studium limit funkcí dvou proměnných není předmětem této práce. Ukažme si však, jak můžeme znalost polárních souřadnic aplikovat ve výpočtech limit. V příkladech, kdy hledáme vlastní limitu, ať už ve vlastním bodě $X_0 = [x_0, y_0]$ nebo v bodech nevlastních, nemusí některé způsoby výpočtů limit stačit. V některých případech se ukazuje vhodné převést původní výraz do polárních souřadnic. Čerpáno z [6].

Věta 4 *Nechť bod $[x_0, y_0]$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $f(x, y)$ a tato funkce je definovaná na nějakém redukováném okolí bodu $[x_0, y_0]$. Nechť existují funkce jedné proměnné g a h a číslo $L \in \mathbb{R}$. Nechť dále funkci $f(x, y)$ lze v polárních souřadnicích zapsat ve tvaru $f(\rho, \varphi) = L + g(\rho) \cdot h(\varphi)$, kde $L \in \mathbb{R}$ a platí:*

$$1. \lim_{\rho \rightarrow 0^+} g(\rho) = 0,$$

2. $h(\varphi)$ je omezená funkce na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$

pak platí $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Ukažme si na příkladu.

Příklad 11 Vypočítejme limitu $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$.

Dosazením $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$ do výrazu dostáváme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Zkusíme limitu řešit pomocí polárních souřadnic.

Vztahy pro převod do polárních souřadnic:

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi, \quad y = y_0 + \rho \sin \varphi,$$

kde $\rho \geq 0$ značí vzdálenost $X_0 = [x_0, y_0]$ a $X = [x, y]$.

Protože $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$, dostáváme:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho^2 \sin^2 \varphi}{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\rho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{\rho^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi.$$

V tuto chvíli aplikujeme Větu 4. Funkci $f(x, y)$ si rozepíšme ve tvaru

$$f(\rho, \varphi) = L + g(\rho) \cdot h(\varphi)$$

$$L = 0$$

$$g(\rho) = \rho^2$$

$$h(\varphi) = \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$$

Protože $\lim_{\rho \rightarrow (0^+)} \rho^2 = 0$ a funkce $h(\varphi) = \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$ je funkce omezená na $\langle 0; 2\pi \rangle$, platí:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = L = 0.$$

Důkaz neexistence limity funkcí dvou proměnných

Spočítat limitu nemusí být vždy možné. Můžeme se ale snažit dokázat, že limita neexistuje. K dispozici máme opět více možností, jak toto dokázat. My se podívejme, jak využít polárních souřadnic. Opět převedeme výraz do polárních souřadnic.

Pokud vyjde limita L závislá na parametru φ , pak limita neexistuje.

Ukažme si na příkladu.

Příklad 12 Dokažme, že limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ neexistuje.

Protože $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$, dostáváme:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\rho \cos \varphi \cdot \rho \sin \varphi}{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\rho^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \cos \varphi \sin \varphi.$$

Dostáváme se do situace, kdy máme limitu funkce $g(\varphi)$ závislou na parametru φ . Existují alespoň dvě hodnoty $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, pro které by vyšla limita různá. Protože víme, že funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu, dokázali jsme, že limita neexistuje.

Výpočet dvojného integrálu

V této části práce předpokládáme znalost pojmů jako integrál, integrační obor a znalost výpočtu primitivních funkcí. V kapitole je čerpáno z [4].

Transformaci kartézských souřadnic do souřadnic polárních využijeme například v geometrických aplikacích dvojného integrálu. Dvojný integrál na základě znalosti Fubiniovy věty převádíme na dvojnásobný integrál. Integrál funkce jedné proměnné počítáme pomocí substituce a metody per partes. Analogicky počítáme i integrály dvojné. Někdy je však ve výpočtech výhodnější použít vyjádření v polárních souřadnicích.

Věta 5 (Fubiniova věta pro dvojný integrál)

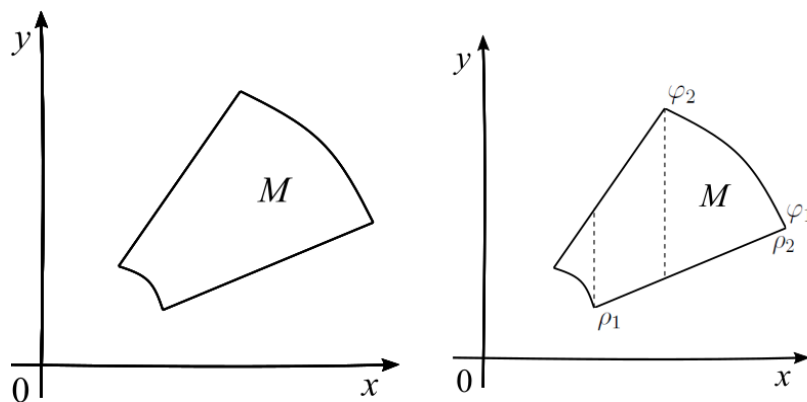
Nechť je dána spojitá funkce f definována na množině:

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a; b \rangle \wedge f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\},$$

kde $f_1(x)$ a $f_2(x)$ jsou funkce definované a spojitě na intervalu $\langle a; b \rangle$. Jestliže pro každé $x \in \langle a; b \rangle$ je funkce $y \mapsto f(x, y)$ integrovatelná na intervalu $\langle f_1(x); f_2(x) \rangle$, pak:

$$\iint_M f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Ukažme si na obrázku 4.10, kdy je vhodné integrační obor upravit. Integrujeme přes uzavřenou množinu $M \in \mathbb{R}^2$, jejíž hranice tvoří křivka, kterou můžeme rozdělit na konečný počet částí, které jsou tvořeny grafem hladké funkce jedné proměnné. Tato množina však nemusí být vždy vhodná jako integrační obor, a proto se používá transformovaná množina.

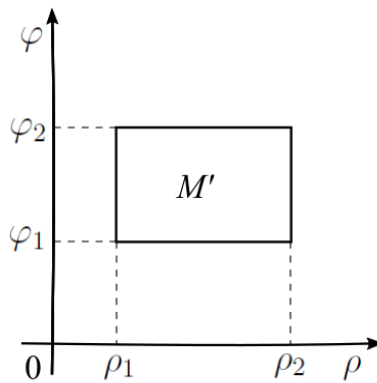


Obrázek 4.10: Integrační obor

Ať si u množiny M z obrázku 4.10 zvolíme jakékoli pořadí integrace, budeme muset množinu dělit na tři části a počítat tak integrál jako součet tří integrálů. Díky znalosti polárních souřadnic můžeme však množinu transformovat. Výšeč mezikružší z obrázku 4.10 převedeme do polárních souřadnic a tím množinu transformujeme na obdelník. Integrovat přes obdelník už není problém. Bod je určen

dvěma parametry, a to vzdáleností od počátku soustavy a orientovaným úhlem, který svírá průvodič bodu s kladnou částí osy x . Množinu transformujeme na obdelník $\langle \rho_1; \rho_2 \rangle \times \langle \varphi_1; \varphi_2 \rangle$, $\rho \geq 0$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$. V polárních souřadnicích má tedy množina M' následující předpis:

$$M' = \{(\rho, \varphi) : \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \wedge \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$$



Obrázek 4.11: Upravený integrační obor

Při výpočtu integrálu pomocí transformace do polárních souřadnic musíme transformovat integrační obor M , integrovanou funkci f a také dx a dy . Transformovat funkci f umíme z kapitoly 4.2.1. Transformaci dx a dy na $d\varphi$ a $d\rho$ provedeme pomocí absolutní hodnoty jakobiánu transformace z kartézských do polárních souřadnic. Platí tedy:

$$dxdy = |\det \mathbf{J}| d\rho d\varphi,$$

kde \mathbf{J} je Jacobiho matice vytvořená z parciálních derivací transformačních vztahů podle proměnných ρ a φ . Konkrétně počítáme determinant z matice:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\rho \cos \varphi)}{\partial \rho} & \frac{\partial(\rho \cos \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial(\rho \sin \varphi)}{\partial \rho} & \frac{\partial(\rho \sin \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$

Tedy:

$$\det(\mathbf{J}) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho.$$

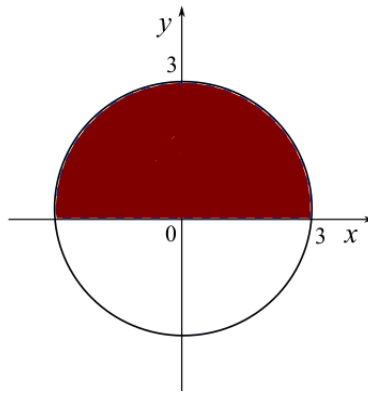
Více o Jakobiho matici v [4]

Integrál tedy upravíme následujícím způsobem:

$$\iint_M f(x, y) \, dx dy = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho \, d\varphi d\rho.$$

Příklad 13 Vypočítejme dvojný integrál $\iint_M (x + y) \, dx dy$, pro $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y \geq 0\}$.

Integračním oborem je část kruhu se středem v $[0; 0]$ a poloměrem 3. Podmínka $y \geq 0$ udává, že půjde o část kruhu v prvním a druhém kvadrantu.



Obrázek 4.12: Integrační obor $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y \geq 0\}$

Pro proměnné x a y získáváme meze:

$$\begin{aligned} -3 &\leq x \leq 3 \\ 0 &\leq y \leq \sqrt{9 - x^2}. \end{aligned}$$

Po dosazení mezí do integrálu získáme výraz, který bude zbytečně složitý na výpočet.

$$\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x + y) \, dy dx.$$

Proto přistoupíme k transformaci do polárních souřadnic a tuto oblast si transformujeme na obdelník. Pro nové proměnné ρ a φ máme meze:

$$0 \leq \rho \leq 3$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Podívejme se, jak se nám změní příklad po transformaci:

$$\int_0^3 \int_0^\pi (\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi) \rho \, d\varphi \, d\rho.$$

Výpočet je už snadný:

$$\int_0^3 \rho^2 [\sin \varphi - \cos \varphi]_0^\pi \, d\rho = \int_0^3 \rho^2 [0 - (-1) - (0 - 1)] \, d\rho = \int_0^3 2\rho^2 \, d\rho = 2 \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^3 = 2 \cdot \frac{27}{3} = 18.$$

Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit přehled známých a běžně používaných souřadnicových systémů, který může posloužit jako podpůrný materiál studentům naší katedry.

V práci jsme popsali soustavu souřadnic na přímce a její možné transformace, a to posunutí počátku a změnu jednotky. Dále se práce věnuje souřadným systémům v rovině \mathbb{R}^2 . Konkrétně kartézské soustavě souřadnic a polární soustavě souřadnic.

Nedílnou součástí práce bylo vytvořit řešené příklady, které by představily možné transformace souřadných systémů. V kapitole o polárních souřadnicích jsme ukázali, že transformace mezi kartézskými a polárními souřadnicemi má využití v praktických výpočtech.

Velkým přínosem pro mě byla tvorba práce jako takové, protože jsem se zdokonalila v práci s programem $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$. Kvůli rozdílnosti značení a různosti použitých symbolů bylo téměř nemožné využít obrázků ze zdrojů, ze kterých bylo v práci čerpáno. Proto bylo nejrozumnější variantou vytvořit si vlastní obrázky. Díky tomu jsem se také naučila vytvářet obrázky a nákresy v grafickém editoru Inkscape.

Literatura

- [1] Bican, L.: *Lineární algebra a geometrie. (2.vydání)*. Academia, Praha, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9.
- [2] Brabec, J., Martan, F., Rozenský, Z.: *Matematická analýza I (1.vydání)*. SNTL - Nakladatelství technické literatury, n.p., Praha, 1985.
- [3] Digitální knihovna UPa [online]. [cit. 2018-05-12]. Dostupné z: <http://dspace.upce.cz/bitstream/handle/10195/36964/HladikovaEPocitacova%20grafikaPT2010.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- [4] Hamhalter, J., Tišer, J.: *Integrální počet funkcí dvou proměnných (2.vydání)*. Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha, 2005.
- [5] Kočandrle, M., Boček, L.: *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie (2.vydání)*. Prometheus, spol. s.r.o., Praha, 2006.
- [6] Matematická sekce/Matematicko-fyzikální fakulta Univerzita Karlova [online]. [cit. 2018-05-07]. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/kuncova/kalkulus1/Limityfunkcivicepromennych.pdf>.
- [7] Matematika pro každého - Matematika pro každého [online]. [cit. 2018-03-10]. Dostupné z: <https://maths.cz/clanky/188-polarni-system-souradnic/>.
- [8] matematika.cuni.cz - Portál pro vysokoškolskou matematiku [online]. [cit. 2018-03-03]. Dostupné z: <http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/animace/k0033/souradnice/home.htm/>.
- [9] Rachůnková, I.: *Matematická analýza - metrické prostory*. Rektorát Univerzity Palackého v Olomouci, Olomouc, 1987.
- [10] 10 - Dvojnásobné limity (DP funkcí více proměnných) - YouTube. [online]. [cit. 2018-03-10]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=SbDOptA0amw/>.