UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Stoneovy algebry a jejich reprezentace

Katedra algebry a geometrie
Vedoucí bakalářské práce: **Doc. RNDr. Jan Kühr Ph.D.**
Vypracoval(a): **Bc. David Dohnal**
Studijní program: N1101 - Matematika
Studijní obor M-IV Učitelství matematiky pro střední školy - Učitelství informatiky pro střední školy
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2020

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Bc. David Dohnal

Název práce: Stoneovy algebry a jejich reprezentace

Typ práce: Diplomová práce

Pracoviště: Katedra algebry a geometrie

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jan Kühr Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2020

Abstrakt: Tato diplomová práce shrnuje základní vlastnosti pseudokomplementárních polosvazů a svazů a Stoneových algeber. Hlavní část práce je věnována tzv. triple konstrukci. V práci jsou předvedeny tři konstrukce a následně jsou ukázány vztahy mezi takto vzniklými Stoneovými algebrami.

Klíčová slova: pseudokomplementární polosvaz, pseudokomplementární svaz, Stoneova algebra, triple konstrukce

Počet stran: 63

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Bc. David Dohnal

Title: Stone algebras and their representations

Type of thesis: Master's

Department: Department of Algebra and geometry

Supervisor: Doc. RNDr. Jan Kühr Ph.D.

The year of presentation: 2020

Abstract: This master's thesis summarizes the basic properties of pseudocomplemented semilattices and lattices and Stone algebras. The main part of the thesis is devoted to the so-called triple construction. Three constructions are presented and then the relationships between the resulting Stone algebras are shown.

Key words: pseudocomplemented semilattice, pseudocomplemented lattice, Stone algebra, triple construction

Number of pages: 63

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně pod vedením pana Doc. RNDr. Jana Kühra Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Seznam obrázků

Poděkování

Děkuji vedoucímu mé diplomové práce doc. RNDr. Janu Kührovi, Ph.D., za trpělivost, cenné rady, ochotu a čas, které mi při konzultacích věnoval. Dále děkuji své rodině, která mě podporovala po celou dobu studia. Také děkuji své přítelkyni, za všechno.

Úvod

Stoneovy algebry byly poprvé popsány v roce 1957 matematiky G. Grätzerem a E.T Schmidtem jako odpověď na otázku „*Jaký je nejobecnější pseudokomplementární svaz, ve kterém platí* $x^* \vee x^{**} = 1$?“ Stoneovy algebry byly pojmenovány po americkém matematikovi M. H. Stoneovi. C. C. Chen a G. Grätzer se poté zaobírali otázkou, jak tuto Stoneovu algebru vytvořit, aniž by to nebyl řetězec, Booleova algebra nebo jejich direktní součin. V roce 1969 vydali článek [7], ve kterém popisují metodu konstrukce Stoneovy algebry. Základní idea konstrukce spočívá v asociování dvou jednodušších struktur spolu se zobrazením mezi nimi (vytvoření trojice) a poté dokázali, že existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi Stoneovými algebrami a jejich trojicemi. Poté G. Grätzer položil otázku „*Lze najít přímý (méně výpočetně náročný) důkaz, jak z trojice vytvořit Stoneovu algebru*? “ V roce 1973 T. Katriňák odpověděl na tuto otázku svým důkazem [9].

Cílem této diplomové práce je shrnout základní poznatky o pseudokomplementárních polosvazech a svazech a Stoneových algebrách, včetně tzv. „triple“ konstrukce.

První kapitola je věnována základním vlastnostem pseudokomplementárního poslovazu. Ve druhé kapitole jsou popsány základní vlastnosti pseudokomplementární algebry (zkráceně p-algebra). Ve třetí kapitole jsou shrnuty základní vlastnosti Stoneovy algebry.

Hlavní částí diplomové práce jsou pak kapitoly čtyři a pět. Ve čtvrté kapitole jsou popsány konstrukce Stoneových algeber z abstraktních trojic. V poslední kapitole jsou pak popsány vztahy mezi jednotlivými Stoneovými algebrami sestrojenými v kapitole předešlé.

Kapitola 1

Pseudokomplementarní polosvaz

V této kapitole jsou shrnuty základní vlastnosti pseudokomplementárních polosvazů. Byly použity zdroje [3], [10].

1.1. Pseudokomplementarní polosvaz

Definice 1.1.1. Nechť $(P, \wedge, 0)$ je dolní polosvaz s nejmenším prvkem 0. Prvek $y \in P$ nazveme pseudokomplement prvku $x \in P$, právě když platí:
(i) $x \wedge y = 0$,
(ii) jestliže existuje $z \in P$ takové, že $x \wedge z = 0$, pak $z \leq y$.

V dalším textu budeme pseudokomplement prvku x označovat jako x^*.

Definice 1.1.2. Polosvaz $(P, \wedge, 0)$, kde ke každému prvku $x \in P$ existuje pseudokomplement x^*, nazveme pseudokomplementární polosvaz.

Podíváme-li se zpět na definici, tak z existence nejmenšího prvku 0 v pseudokomplementárním polosvazu P ihned plyne, že tento polosvaz musí nutně obsahovat i největší prvek 0^* (dále v textu budeme tento prvek označovat jako 1). V dalším textu budeme dolní polosvaz (nebude-li řečeno jinak) nazývat pouze polosvaz.

Věta 1.1.1. *Nechť P je pseudokomplementární polosvaz. Pro každé $x, y \in P$ platí:*
(1) $x \leq y \Rightarrow y^* \leq x^*$,

(2) $x \leq x^{**}$,

(3) $x^* = x^{***}$,

(4) $x^* \wedge x^{**} = 0$.

Důkaz. (1) Z $x \leq y$ plyne, že $x = x \wedge y$. Dále $x \wedge y^* = (x \wedge y) \wedge y^* = x \wedge 0 = 0$, avšak z definice pseudokomplementu plyne, že $y^* \leq x^*$.

(2) Plyne přímo z definice pseudokomplementu.

(3) Nejdříve zavedeme substituci $x^* = y$. Pomocí této substituce a bodu (2) dostáváme $y \leq y^{**}$, dosadíme zpět do substituce a máme: $x^* \leq x^{***}$. Dále z bodů (1) a (2) plyne : $x^{***} \leq x^*$. Konečně tedy $x^* \leq x^{***}$ a $x^{***} \leq x^*$, což znamená, že $x^* = x^{***}$.

(4) Plyne z definice pseudokomplementu a ze substituce $x^{**} = y$ a $x^* = x$. $\square$

1.2. Skeleton

Definice 1.2.1. Nechť P je pseudokomplementární polosvaz. Pak množinu

$$S(P) = \{a^* \mid a \in P\}$$

nazveme skeleton. Prvek $x \in S(P)$ nazveme skeletární.

Věta 1.2.1. *Nechť P je pseudokomplementární polosvaz. Pak pro $S(P)$ platí:*

(1) $S(P)$ je ohraničená,

(2) pro všechna $a \in S(P)$ platí $a^{**} \in S(P)$,

(3) jestliže $a, b \in S(P)$, pak $a \wedge b \in S(P)$.

Důkaz. (1) plyne z definice pseudokomplementu.

(2) Pokud $a \in S(P)$, pak platí, že $a = b^*$ pro nějaké $b \in P$. Z vlastnosti pseudokompelemntu víme, že $a^* = a^{***}$ pro všechna $a \in P$, tedy $a^{**} = b^{***} = b^* = a$ to tedy znamená, že $a^{**} = a$. Obráceně nechť $a = a^{**}$, pak $a = b^*$, tedy $a \in S(P)$.

(3) Nechť $a, b \in S(P)$. Pak ovšem $a = a^{**}$ a zároveň $b = b^{**}$. Avšak z $a \wedge b \leq a$ plyne $(a \wedge b)^{**} \leq a^{**}$. Z předchozího bodu však víme, že $a^{**} = a$. Dostáváme tedy $(a \wedge b)^{**} \leq a$. Podobně z $a \wedge b \leq b$ plyne $(a \wedge b)^{**} \leq b^{**}$, tedy $(a \wedge b)^{**} \leq b$. Celkově

dostáváme $(a \wedge b)^{**} \leq a \wedge b$. Avšak také platí $a \wedge b \leq (a \wedge b)^{**}$. Dohromady máme $a \wedge b = (a \wedge b)^{**}$, což dokazuje, že $a \wedge b \in S(P)$. $\square$

Z předchozí věty plyne, že $(S(P), \wedge, 0, 1)$ je ohraničený dolní podpolosvaz polosvazu P. Ukážeme, že $S(P)$ je Booleova algebra. Jako první si v tomto polosvazu definujeme operaci spojení následovně:

$$x \sqcup y = (x^* \wedge y^*)^*. \tag{1.1}$$

Věta 1.2.2. *Nechť P je pseudokomplementární polosvaz. Pak $(S(P), \sqcup, \wedge, 0, 1)$ je ohraničený distributivní svaz.*

Důkaz. Nechť $x, y, z \in S(P)$. Dokážeme, že $S(P)$ spolu s operací $\sqcup$ definovanou jako (1.1) tvoří polosvaz. Triviálně je operace $\sqcup$ komutativní, dále:

$$\begin{aligned} x \sqcup (y \sqcup z) &= (x^* \wedge (y^* \wedge z^*)^{**})^* = (x^* \wedge y^* \wedge z^*) \\ &= ((x^* \wedge y^*)^{**} \wedge z^*)^* = (x \sqcup y) \sqcup z, \end{aligned}$$

$$x \sqcup x = (x^* \wedge x^*)^* = x.$$

$S(P)$ s operací $\sqcup$ je tedy polosvaz. Dále ukážeme, že $(S(P), \sqcup, \wedge, 0, 1)$ je svaz. Stačí ukázat, že operace $\sqcup$ a $\wedge$ jsou svázány zákony absorpce. Tedy

$$x \sqcup (x \wedge y) = (x^* \wedge (x \wedge y)^*)^* = x^{**} = x,$$

protože $x \wedge y \leq x$, z čehož plyne, že $x^* \leq (x \wedge y)^*$. Dále

$$x \wedge (x \sqcup y) = x \wedge (x^* \wedge y^*)^* = x^{**} = x,$$

protože $x^* \wedge y^* \leq x^*$, z čehož plyne, že $x^{**} \leq (x^* \wedge y^*)^*$.

Zbývá dokázat, že $(S(P), \sqcup, \wedge)$ je distributivní, tedy

$$z \wedge (x \sqcup y) \leq (z \wedge x) \sqcup (z \wedge y),$$

protože obrácená nerovnost jistě platí. Dále nechť $t = (z \wedge x) \sqcup (z \wedge y)$. Pak ale $z \wedge x \leq t = t^{**}$, tedy $z \wedge x \wedge t^* = 0$, celkově $z \wedge t^* \leq x^*$. Podobně pro $z \wedge t^* \leq y^*$. Dohromady $z \wedge t^* \leq x^* \wedge y^* = (x^* \wedge y^*)^{**}$, z tohoto však plyne $z \wedge t^* \wedge (x^* \wedge y^*)^* = 0$, tudíž

$$z \wedge (x \sqcup y) = z \wedge (x^* \wedge y^*)^* \leq t^{**} = t = (z \wedge x) \sqcup (z \wedge y).$$

$\square$

Věta 1.2.3. *Nechť P je pseudokomplementární polosvaz. Pak $(S(P), \sqcup, \wedge, ^*, 0, 1)$ je Booleova algebra, kde * je unární operace pseudokomplementace.*

Důkaz. Všimněme si, že $1^* = 0 \in S(P)$ a $0^* = 1 \in S(P)$. Navíc pro každé $x \in S(P)$ platí $x \wedge x^* = 0$ a $x \sqcup x^* = (x^* \wedge x^{**})^* = 0^* = 1$. Dohromady každému prvku $x \in S(P)$ existuje prvek x^*. Budeme-li uvažovat * jako unární operaci, pak je $S(P)$ Booleova algebra. $\square$

Kapitola 2

p-algebra

V této kapitole jsou shrnuty základní vlastnosti pseudokomplementárního svazu a pseudokomplementární algebry. Byly použity zdroje [2], [3], [2], [8].

2.1. Pseudokomplementární svaz

V minulé kapitole jsme si definovali pseudokomplementární polosvazy jako polosvazy, kde ke každému prvku existuje jeho pseudokomplement. Obdobně budeme postupovat i nyní.

Definice 2.1.1. Svaz L s nejmenším prvkem 0, kde ke každému prvku $x \in L$ existuje pseudokompelemt x^*, nazveme pseudokomplementární svaz.

Všechny vlastnosti, které platily u pseudokomplementárního polosvazu budou analogicky platit i zde. Jelikož máme navíc (oproti dolnímu polosvazu) definovanou operaci spojení, můžeme popsat další vlastnosti tohoto svazu.

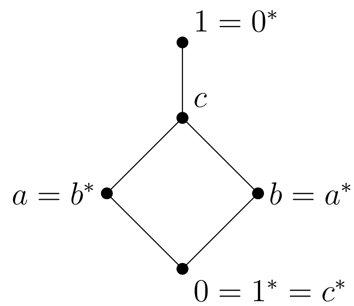
Věta 2.1.1. *Nechť L je pseudokomplementární svaz. Pro každé $x, y \in L$ platí:*
(1) $(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*$,
(2) $x^* \vee y^* \leq (x \wedge y)^*$.

Důkaz. (1) Víme, že platí $x \leq x \vee y$, tedy $(x \vee y)^* \leq x^*$, podobně $(x \vee y)^* \leq y^*$. Celkově $(x \vee y)^* \leq x^* \wedge y^*$. Obráceně $x \leq x^{**} \leq (x^* \wedge y^*)^*$, podobně $y \leq y^{**} \leq (x^* \wedge y^*)^*$. Dále $(x^* \wedge y^*)^{**} \leq (x \vee y)^*$ z čehož plyne, že $x^* \wedge y^* \leq (x \vee y^*)$.

(2) Protože $x \wedge y \leq x$, $x \wedge y \leq y$, pak platí, že $x^* \leq (x \wedge y)^*$ a $y^* \leq (x \wedge y)^*$. Dohromady $x^* \vee y^* \leq (x \wedge y)^*$. $\square$

Poznamenejme, že ve vlastnosti (2) v předchozí větě obecně nemůžeme nahradit nerovnost za rovnost (viz následující příklad).

Příklad 1. Nechť L je 5-prvkový Stoneův svaz z obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Pseudokomplementární svaz L.

Všimněme si, že například pro prvky $a, b \in L$ neplatí rovnost ve vlastnosti (2) předchozí věty, tedy

$$a^* \vee b^* = b \vee a = c \neq 1 = 0^* = (a \wedge b)^*.$$

2.2. p-algebra

Definice 2.2.1. Pseudokomplementární algebra (zkráceně p-algebra) je algebra $(L, \vee, \wedge, ^*, 0, 1)$ typu $(2, 2, 1, 0, 0)$, kde:
(i) $(L, \vee, \wedge)$ je pseudokomplementární svaz,
(ii) 0 resp. 1 je nejmenší resp. největší prvek tohoto svazu,
(iii) symbol * označuje operaci pseudokomplementace, tj. pro každé $x \in L$ je x^* pseudokomplement prvku x ve svazu $(L, \vee, \wedge)$.

Věta 2.2.1. *Ohraničený svaz L je $p-$algebra, právě když existuje unární operace $x \mapsto x^*$ v L taková, že platí*
(1) $x \wedge (x \wedge y)^* = x \wedge y^*$,
(2) $x \wedge 0^* = x$,
(3) $0^{**} = 0$.

Důkaz. Pokud je $(L; \vee, \wedge, ^*, 0, 1)$ $p-$algebra, pak (1) platí, jelikož $x \wedge y \wedge (x \wedge)^* = 0$, z čehož plyne, že $x \wedge (x \wedge y)^* \leq y^*$, tedy $x \wedge (x \wedge y^*)^* \leq y^* \wedge$. Obráceně $x \wedge y \leq y$, z čehož plyne $y^* \leq (x \wedge y)^*$, dohromady $x \wedge (x \wedge y^*)^* = x \wedge y^*$. Dále kvůli definici pseudokomplementu platí $0^* = 1$ a $1^* = 0$, takže je splněno i (2) a (3).
Obráceně nech platí (1) - (3). Pak ovšem

$$x \wedge x^* = x \wedge (x \wedge 0^*)^* = x \wedge 0^{**} = x \wedge 0 = 0.$$

Dále pokud $x \wedge y = 0$, pak

$$y \wedge x^* = y \wedge (y \wedge x)^* = y \wedge 0^* = y,$$

z čehož plyne $y \leq x^*$. Celkově jsme dokázali, že operace $x \mapsto x^*$ je pseudokomplementace. □

Kapitola 3

Stoneova algebra

V této kapitole jsou shrnuty základní vlastnosti Stoneových svazů, množin hustých prvků a Stoneových algeber. Byly užity zdroje [2], [4], [5], [8].

3.1. Stoneův svaz

Definice 3.1.1. Distributivní pseudokomplementární svaz L nazveme Stoneův svaz, jestliže pro každý prvek $x \in L$ platí:

$$x^* \vee x^{**} = 1.$$

Věta 3.1.1. *Nechť L je Stoneův svaz. Pak pro všechna $x, y \in L$ jsou následující výroky ekvivalentní.*
(1) $x^* \vee x^{**} = 1$,
(2) $x^* \vee y^* = (x \wedge y)^*$.

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2) : Předpokládejme tedy, že platí $x^* \vee y^* = (x \wedge y)^*$. Dále $x^* \vee x^{**} = (x \wedge x^*)^* = 0^* = 1$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Předpokládejme, že $x^* \vee x^{**} = 1$. Ukážeme, že $x^* \vee y^*$ je pseudokomplement $x \wedge y$. Pomocí distributivity a komutativity vidíme, že platí: $(x \wedge y) \wedge (x^* \vee y^*) = (x^* \wedge x \wedge y) \vee (y^* \wedge x \wedge y) = (0 \wedge y) \vee (0 \wedge x) = 0$. Dále předpokládejme, že $(x \wedge y) \wedge z = 0$. Potom tedy $(y \wedge z) \leq x^*$ tudíž $(y \wedge z) \wedge x^{**} \leq x^* \wedge x^{**} = 0$ (s využitím vlastnosti $x^* \wedge x^{**} = 0$). Odsud tedy $z \wedge x^{**} \leq y^*$. Nakonec dostáváme $z = z \wedge 1 = z \wedge (x^* \vee x^{**}) = (z \wedge x^*) \vee (z \wedge x^{**}) \leq x^* \vee y^*$ □

Věta 3.1.2. *Distributivní pseudokomplementární svaz L je Stoneův svaz, právě když platí pro všechna $x, y \in L$:*

$$(x \vee y)^{**} = x^{**} \vee y^{**}.$$

Důkaz. Nechť L je Stoneův svaz. Pak $(x \wedge y)^* = x^* \vee y^*$ pro všechna $x, y \in L$. Z De Morganova zákona tedy vyplývá, že $(x \vee y)^{**} = (x^* \wedge y^*)^*$. Nakonec tedy $(x^* \wedge y^*)^* = x^{**} \vee y^{**}$.

Obráceně, nechť platí $(x \vee y)^{**} = x^{**} \vee y^{**}$ pro všechna $x, y \in L$. Víme, že L je distributivní pseudokomplementární svaz, tedy pro všechna $x \in L$ platí, že $x \wedge x^* = 0$. Z tohoto však plyne $(x \wedge x^*)^{**} = 0^{**}$, z čehož vyplývá, že $x^{**} \wedge x^{***} = 0$. Avšak z vlastností pseudokomplementu víme, že $x^{***} = x^*$. Můžeme tedy psát $x^{**} \wedge x^* = 0$. Následně z $(x \vee x^*)^* = x^* \wedge x^{**} = 0$ plyne, že $(x \vee x^*)^{**} = 0^*$, z předchozího však dále plyne $x^{**} \vee x^{***} = 1$. Použijeme opět vlastnost $x^{***} = x^*$ a dostáváme nakonec $x^{**} \vee x^* = 1$, což je Stoneova identita. Svaz L je tedy Stoneův. $\square$

Věta 3.1.3. *Každý Booleovský svaz je Stoneův svaz.*

Důkaz. Nechť L je Booleovský svaz. Pak pro každý prvek $x \in L$ platí $x^* \vee x^{**} = x' \vee x'' = x' \vee x = 1$. Booleovský svaz je tedy i Stoneův. $\square$

Poznamenejme, že obrácena věta k předchozí neplatí. Vezměme si například 3 prvkový řetězec $L = \{0, a, 1\}$, kde $0 \leq a \leq 1$. Tento řetězec jistě tvoří Stoneův svaz, protože $a^* \vee a^{**} = 0 \vee 0^* = 0 \vee 1 = 1$. Avšak s jistotou můžeme říct, že Booleovský není, protože prvek a nemá komplement.

3.2. Množina hustých prvků

Definice 3.2.1. Nechť L je Stoneův svaz. Pak množinu

$$D(L) = \{x \mid x \in L, x^* = 0\}$$

nazveme množinou hustých prvků. Prvek $x \in D(L)$ nazveme hustý prvek.

Věta 3.2.1. *Nechť L je Stoneův svaz, pak pro $D(L)$ platí:*
(1) $1 \in D(L)$,
(2) *jestliže $a, b \in D(L)$, pak $a \wedge b \in D(L)$,*
(3) *jestliže $a \in D(L)$ a $a \leq b$, pak $b \in D(L)$.*

Důkaz. (1) plyne z definice.

(2) Nechť $a, b \in D(L)$, tedy $a^* = 0$ a $b^* = 0$. Z tohoto vyplývá, že $a^{**} = b^{**} = 0^* = 1$. Dále $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**} = 1 \wedge 1 = 1$. Nyní pomocí vlastnosti $a^* = a^{***}$ dostáváme $(a \wedge b)^* = (a \wedge b)^{***} = ((a \wedge b)^{**})^* = 1^* = 0$, to avšak znamená, že $a \wedge b \in D(L)$.

(3) Pokud $a \in D(L)$, pak $a^* = 0$. Dále podle vlastnosti $x \leq y \Rightarrow y^* \leq x^*$ z $a \leq b$ vyplývá $b^* \leq a^*$ avšak $a^* = 0$. Dostáváme tedy $b^* \leq 0$ z čehož vyplývá $b^* = 0$ a tím konečně $b \in D(L)$. $\square$

Z předchozí věty plyne, ze $(D(L), \vee, \wedge, 1)$ je distributivní svaz s největším prvkem.

3.3. Stoneova algebra

Definice 3.3.1. Stoneova algebra je algebra $(L, \vee, \wedge, ^*, 0, 1)$ typu $(2, 2, 1, 0, 0)$, kde:

(i) $(L, \vee, \wedge)$ je Stoneův svaz,

(ii) 0 resp. 1 je nejmenší resp. největší prvek tohoto svazu,

(iii) symbol * označuje operaci pseudokomplementace, tj. pro každé $x \in L$ je x^* pseudokomplement prvku x ve Stoneově svazu $(L, \vee, \wedge)$.

Věta 3.3.1. *Pro distributivní pseudokomplementární svaz je následující ekvivalentní:*

(1) *L je Stoneova algebra,*

(2) *$(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$ pro všechna $a, b \in L$,*

(3) *pokud $a, b \in S(L)$, pak $a \vee b \in S(L)$,*

(4) *$S(L)$ je podalgebra L.*

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2) jsme již dokázali.

(2) $\Rightarrow$ (3) Nechť $a, b \in S(L)$, pak $a = a^{**}, b = b^{**}$. Tedy $a \vee b = a^{**} \vee b^{**} = (a^* \wedge b^*)^* = (a \vee b)^{**}$ z čehož plyne $a \vee b \in S(L)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Nechť $a, b \in S(L)$ a $a \wedge b \in S(L)$. Pak ale $a = a^{**}$ a $b = b^{**}$. Dále $a \sqcup b = (a^* \wedge b^*)^* = (a \vee b)^{**} = a^{**} \vee b^{**} = a \vee b$. To tedy znamená, že $S(L)$ je podalgebra L.

(4) $\Rightarrow$ (1) Nechť $S(L)$ je podalgebra L. Pak pro každé $x \in L$ platí $x^* \vee x^{**} = x^* \sqcup x^{**} = (x^{**} \wedge x^{***})^* = (x^{**} \wedge x^*)^* = 0^* = 1$, L je tedy Stoneova algebra. □

Kapitola 4

Triple konstrukce

V první části této kapitoly si popíšeme, jak ze Stoneovy algebry $L = (L, \vee, \wedge, ^*, 0, 1)$ vytvoříme trojici. V druhé části si popíšeme, jak zle vytvořit z abstraktní trojice Stoneovu algebru jejíž asociovaná trojice je izomorfní s trojicí původní. Ve třetí části si popíšeme metodu konstrukce Stoneovy algebry podle T. Katriňáka. V poslední části si ukážeme, jak lze tyto konstrukce zjednodušit, budeme-li uvažovat, že množina D je ohraničená. Byly použity zdroje [1], [5], [6], [7], [9].

4.1. Vytvoření trojice ze Stoneovy algebry

Než přejdeme k samotné konstrukci trojice, uvedeme si zde několik ústředních pojmů, které budeme nadále používat. Nejdřív si však připomeňme zavedená značení z minulé kapitoly. Podalgebru $S(L)$ Stoneovy algebry L jsme nazvali skeleton ($(S(L), \vee, \wedge, ', 0, 1)$ je Booleova algebra). $D(L)$ značí množinu hustých prvků (tato množina obsahuje 1), která spolu s operacemi průsek a spojení tvoří distributivní svaz.

Nechť D je distributivní svaz s největším prvkem 1. Filtry ve svazu D tvoří distributivní svaz $F(D)$, kde

$$J \wedge K = J \cap K,$$

$$J \vee K = \{x \wedge y \mid x \in J, y \in K\},$$

pro $J, K \in F(D)$.

Důkaz. Nejprve si ukážeme, že je operace spojení dobře definovaná. Očividně

$$J \vee K = \{z \in D \mid z \geq x \wedge y \text{ pro některé } x \in J, y \in K\}.$$

Uvědomme si, že toto platí v libovolném svazu (i nedistributivním), avšak D je distributivní, takže když $z \geq x \wedge y$, pak $z = z \vee (x \wedge y) = (z \vee x) \wedge (z \vee y) = x_1 \wedge y_1$, kde $x_1 = z \vee x \in J$ a $y_1 = z \vee y \in K$. Dokázali jsme tedy, že operace spojení je dobře definovaná.

Nyní dokážeme, že $F(D)$ je distributivní svaz. Nechť $I, J, K \in F(D)$. Stačí ověřit, že

$$(I \vee J) \cap K \subseteq (I \cap K) \vee (J \cap K),$$

protože opačná nerovnost očividně platí. Nechť tedy $z \in (I \vee J) \cap K$, tj. $z = x \wedge y \in K$ pro některé $x \in I, y \in J$. Pak ale $x \in I \cap K$ a $y \in J \cap K$, protože $z \leq x$ a $z \leq y$. To ale znamená, že

$$z = x \wedge y \in (I \cap K) \vee (J \cap K).$$

□

Dále definujme zobrazení $h : L \to S(L)$ následovně:

$$h(x) = x^{**}.$$

Ukážeme si, že je toto zobrazení surjektivní homomorfismus algeber L a $S(L)$.

Důkaz. Připomeňme, že $S(L) = \{x \mid x \in L, x = x^{**}\}$, z čehož plyne, že zobrazení h je surjektivní. Zbývá nám tedy dokázat, že h je homomorfismus. Tedy

$$\begin{aligned}
h(x \vee y) &= (x \vee y)^{**} = x^{**} \vee y^{**} = h(x) \vee h(y), \\
h(x \wedge y) &= (x \wedge y)^{**} = x^{**} \wedge y^{**} = h(x) \wedge h(y), \\
h(x^*) &= (x^*)^{**} = (x^{**})^* = h(x)^*, \\
h(0) &= 0^{**} = 0, \\
h(1) &= 1^{**} = 1.
\end{aligned}$$

Zobrazení h je surjektivní homomorfismus algeber L a $S(L)$. □

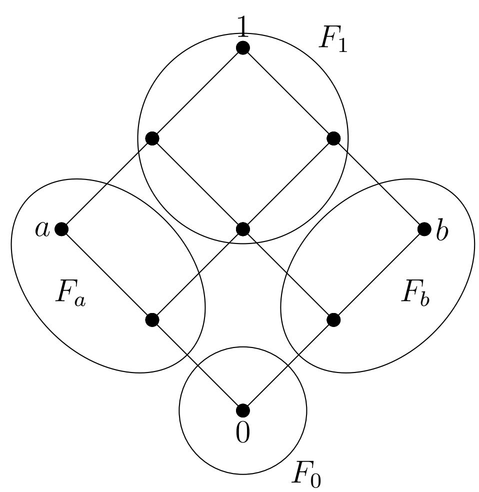
Pak ovšem z věty o homomorfismu plyne, že relace $\sim$ definovaná jako

$$x \sim y, \text{ právě když } h(x) = h(y) \quad \text{ pro } x, y \in L,$$

je kongruence na L a platí $L/\sim \cong S(L)$. Zaměřme se nyní na třídy algebry $L/\sim$. Pro libovolné $x \in L$ platí $x \leq x^{**}$, z čehož pro každé $a \in S(L)$ plyne

$$[a]_\sim = \{x \mid x \in L, x^{**} = a\}.$$

V dalším textu budeme tyto třídy značit F_a (v souladu s literaturou). Všimněme si, že $F_1 = \{x \mid x \in L, x^{**} = 1\} = D(L)$ a $F_0 = \{x \mid x \in L, x^{**} = 0\} = \{0\}$. Navíc $(F_a, \vee, \wedge, a)$ tvoří svaz s největším prvkem a pro každé $a \in S(L)$. Ovšem svaz $(F_a, \vee, \wedge, a)$ je podsvazem svazu $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, který je distributivní, tedy i svaz $(F_a, \vee, \wedge, a)$ je distributivní.



Obrázek 4.1: Třídy rozkladu Stoneovy algebry L

Nyní nechť $a \in S(L)$. Pak

$$\psi : x \mapsto x \vee a^*, \text{ pro } x \in F_a$$

je vnoření F_a do F_1.

Důkaz. Předpokládejme, že pro $x, y \in F_a$ platí $\psi(x) = \psi(y)$. Můžeme tedy psát

$$x \vee a^* = y \vee a^*$$

$$(x \vee a^*) \wedge a = (y \vee a^*) \wedge a$$

$$(x \wedge a) \vee (a^* \wedge a) = (y \wedge a) \vee (a^* \wedge a)$$

$$x = y,$$

protože $x \leq x^{**}$ a $y \leq y^{**}$. Zobrazení ψ je tedy injektivní.
Dále

$$\psi(x \vee y) = (x \vee y) \vee a^* = (x \vee a^*) \vee (y \vee a^*) = \psi(x) \vee \psi(y),$$

$$\psi(x \wedge y) = (x \wedge y) \vee a^* = (x \vee a^*) \wedge (y \vee a^*) = \psi(x) \wedge \psi(y).$$

Dokázali jsme, že zobrazení ψ je vnoření (injektivní homomorfismus).

□

Opět nechť $a \in S(L)$. Definujme si zobrazení $\varphi : S(L) \to F(D(L))$ následovně

$$\varphi : a \mapsto \varphi(a) = \{x \mid x \in D(L), x \geq a^*\}.$$

Ukážeme, že je toto zobrazení homomorfismus, tedy

$$\begin{aligned} \varphi(a \wedge b) &= [(a \wedge b)^*) \cap D(L) = [a^* \vee b^*) \cap D(L) \\ &= ([a^*) \cap D(L)) \cap ([b^*) \cap D(L)) \\ &= \varphi(a) \cap \varphi(b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(a \vee b) &= [(a \vee b)^*) \cap D(L) = [a^* \wedge b^*) \cap D(L) \\ &= ([a^*) \cap D(L)) \vee ([b^*) \cap D(L)) \\ &= \varphi(a) \vee \varphi(b). \end{aligned}$$

Navíc platí

$$\varphi(a) \cap \varphi(a^*) = \varphi(0) = \{1\},$$

$$\varphi(a) \vee \varphi(a^*) = \varphi(1) = D(L).$$

Zobrazení φ je tedy homomorfismus ohraničených svazů (v dalším textu budeme zkráceně psát $\{0,1\}-$homomorfismus). Všimněme si, že je tento homomorfismus jednoznačně určen Stoneovou algebrou L, budeme tedy tento homomorfismus zapisovat jako φ^L. Navíc $(\varphi(a), \vee, \wedge, 1)$ je podsvaz svazu $D(L)$ pro každé $a \in S(L)$.

Důkaz. Nechť $x, y \in \varphi(a)$, tedy $x = x \vee a^*$ a $y = y \vee a^*$. Dokažme, že množina $\varphi(a)$ je uzavřená na průsek a spojení následovně:

$$\varphi(x \vee y) = (x \vee a^*) \vee (y \vee a^*) = (x \vee y) \vee a^* \quad \Rightarrow x \vee y \in \varphi(a),$$
$$\varphi(x \wedge y) = (x \vee a^*) \wedge (y \vee a^*) = (x \wedge y) \vee a^* \quad \Rightarrow x \vee y \in \varphi(a),$$

Víme, že $D(L)$ je distributivní, tedy i $(\varphi(a), \vee, \wedge, 1)$ je distributivní. □

Vraťme se nyní k zobrazení ψ (vnoření F_a do $D(L)$). Budeme-li uvažovat restrikci (zúžení) tohoto zobrazení danou následovně

$$\psi : F_a \to \varphi(a),$$

tak zjistíme, že je toto zobrazení izomorfismus svazů $(F_a, \vee, \wedge, a)$ a $(\varphi(a), \vee, \wedge, 1)$.

Důkaz. Stačí nám dokázat, že je toto zobrazení surjektivní. Nechť $z \in \varphi(a)$. Je jasné, že každý prvek z je ve tvaru $x \vee a^*$ pro nějaké $x \in F_a$. □

Věta 4.1.1. *Nechť L je Stoneova algebra. Pak je ekvivalentní:*
(1) *$D(L)$ má nejmenší prvek,*
(2) *pro všechna $a \in S(L), \varphi(a)$ má nejmenší prvek,*
(3) *pro všechna $a \in S(L), F_a$ má nejmenší prvek.*

Důkaz. (3) $\Rightarrow$ (1): Je triviální, protože $F_1 = D(L)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Zobrazení $\psi(a)$ je izomorfismus mezi F_a a $\varphi(a)$ pro každé $a \in S(L)$. Pokud $\varphi(a)$ má nejmenší prvek, pak má nejmenší prvek i F_a.

(1) $\Rightarrow$ (2): Nechť d_0 je nejmenší prvek v $D(L)$ a $x \in \varphi(a)$ je libovolné. Evidentně $d_0 \leq x$ a $a^* \leq x$. Tudíž $d_0 \vee a^* \leq x, d_0 \vee a^* \in \varphi(a)$, tedy $d_0 \vee a^*$ je nejmenší prvek v $\varphi(a)$. □

Definice 4.1.1. Nechť L je Stoneova algebra. Pak $\langle S(L), D(L), \varphi^L \rangle$ je trojice asociovaná se Stoneovou algebrou L.

Věta 4.1.2 (o jednoznačnosti)**.** *Každá Stoneova algebra L je (až na izomorfismus) jednoznačně určená trojicí $\langle S(L), D(L), \varphi^L\rangle$.*

Než přistoupíme k důkazu předchozí věty, musíme vysvětlit jak z dané trojice vytvořit Stoneovu algebru. Tomuto postupu jsou věnovány kapitoly 4.2 a 4.3. Důkaz věty 4.1.2 bude vysvětlen v kapitole 5.1.

Nechť $\langle S, D, \varphi\rangle$ je trojice, kde S je Booleova algebra, D je distributivní svaz s 1 a $\varphi : S \to F(D)$ je $\{0, 1\}$-homomorfismus ohraničených svazů. Pro každé $a \in S$ platí:

$$\varphi(a) \cap \varphi(a^*) = \varphi(0) = 1,$$
$$\varphi(a) \vee \varphi(a^*) = D.$$

Dále pro každé $a \in S, x \in D$ je $\varphi(a) \cap [x)$ hlavní filtr. Tedy

$$[\varrho_a(x)) = \varphi(a) \cap [x) \tag{4.1}$$

Důkaz. Protože $\varphi(a) \vee \varphi(a') = D$, můžeme x zapsat jako $x = x_1 \wedge x_2$, pro některé $x_1 \in \varphi(a)$ a $x_2 \in \varphi(a^*)$. Potom

$$\begin{aligned}\varphi(a) \cap [x) &= \varphi(a) \cap [x_1 \wedge x_2) = \varphi(a) \cap ([x_1) \vee [x_2)) \\ &= (\varphi(a) \cap [x_1)) \vee (\varphi(a) \cap [x_2)),\end{aligned}$$

protože svaz $F(D)$ je distributivní. Ale z $x_1 \in \varphi(a)$ plyne, že $\varphi(a) \cap [x_1) = [x_1)$ a z $x \in \varphi(a')$ plyne

$$\varphi(a) \cap [x_2) \subseteq \varphi(a) \cap \varphi(a') = \{1\},$$

takže $\varphi(a) \cap [x) = [x_1)$, tzn. $\varrho_a(x) = x_1$. □

Vztah 4.1 tedy definuje zobrazení $\varrho_a : D \to D$ pro každé $a \in S$. Ukážeme, že je toto zobrazení endomorfismus.

Důkaz. Nechť $x, y \in D$. Potom

$$\begin{aligned}[\varrho_a(x \vee y)) &= \varphi(a) \cap [x \vee y) = \varphi(a) \cap ([x) \cap [y)) \\ &= \varphi(a) \cap [x) \cap \varphi(a) \cap [y) \\ &= [\varrho_a(x)) \cap [\varrho_a(y)) = [\varrho_a(x) \vee \varrho_a(y)),\end{aligned}$$

a tedy $\varrho_a(x \vee y) = \varrho_a(x) \vee \varrho_a(y)$. Podobně, protože $F(D)$ je distributivní,

$$\begin{aligned}[\varrho_a(x \wedge y)) &= \varphi_a \cap [x \wedge y) = \varphi(a) \cap ([x) \vee [y)) \\ &= (\varphi(a) \cap [x)) \vee (\varphi(a) \cap [y)) \\ &= [\varrho_a(x)) \vee [\varrho_a(y)) = [\varrho_a(x) \wedge \varrho_a(y)),\end{aligned}$$

a tedy $\varrho_a(x \wedge y) = \varrho_a(x) \wedge \varrho_a(y)$. □

Zobrazení (endomorfismus) $\varrho_a(x)$ navíc splňuje: $x \leq \varrho_a(x)$ a $\varrho_a(\varrho_a(x)) = \varrho_a(x)$, je to tedy tzv. uzávěrový operátor. Shrňme si tedy základní vlastnosti endomorfismu ϱ_a:

(i) pro $a \in S, x \in \varphi(a)$ platí: $\varrho_a(x) = x$,
(ii) $x \in \varphi(a)$, právě když $\varrho_a(x) = x$,
(iii) pro $x \in D, a \in S$ platí: $x \leq \varrho_a(x)$,
(iv) pro $x \in D, a \in S$ platí: $\varrho_a(x) \wedge \varrho_{a'}(x) = x$,
(v) pro $a, b \in S, x \in D$ platí: $\varrho_a(\varrho_b(x)) = \varrho_{a \wedge b}(x)$,
(vi) pro $a, b \in S, x \in D$ platí: $\varrho_a(x) \wedge \varrho_b(x) = \varrho_{a \vee b}(x)$,
(vii) pro $a, b \in S, x \in D$ platí: $\varrho_{a \wedge b}(x) = \varrho_a(x) \vee \varrho_b(x)$.

Důkaz. (i)-(iii) plyne přímo z definice.
(iv):

$$\begin{aligned}[\varrho_a(x) \wedge \varrho_{a'}(x)) &= [\varrho_a(x)) \vee [\varrho_{a'}(x)) = (\varphi(a) \cap [x)) \vee (\varphi(a') \cap [x)) \\ &= [x) \cap (\varphi(a) \vee \varphi(a')) = [x) \cap \varphi(a \vee a') \\ &= [x) \cap D = [x).\end{aligned}$$

(v):

$$\begin{aligned}[\varrho_a(\varrho_b(x))) &= \varphi(a) \cap [\varrho_b(x)) = \varphi(a) \cap \varphi(b) \cap [x) \\ &= \varphi(a \wedge b) \cap [x) = [\varrho_{a \wedge b}(x)).\end{aligned}$$

(vi):

$$\begin{aligned}[\varrho_a(x) \wedge \varrho_b(x)) &= [\varrho_a(x)) \vee [\varrho_b(x)) = (\varphi(a) \cap [x)) \vee (\varphi(b) \cap [x)) \\ &= [x) \cap (\varphi(a) \vee \varphi(b)) = [x) \cap \varphi(a \vee b) \\ &= [\varrho_{a \vee b}(x)).\end{aligned}$$

(vii):

$$\begin{aligned}[\varrho_{a\wedge b}(x)) &= \varphi(a \wedge b) \cap [x) = (\varphi(a) \cap [x)) \cap (\varphi(b) \cap [x)) \\ &= [\varrho_a(x)) \cap [\varrho_b(x)) = [\varrho_a(x)) \vee [\varrho_b(x)).\end{aligned}$$

$\square$

4.2. Konstrukce podle C. C. Chena a G. Grätzera

Cílem této kapitoly bude popsat, jak lze vytvořit Stoneovu algebru z abstraktní trojice $\langle S, D, \varphi\rangle$, kde S je Booleova algebra, D je distributivní svaz s 1 a $\varphi : S \to F(D)$ je homomorfismus ohraničených svazů.

Věta 4.2.1 (o konstrukci)**.** *Nechť S je libovolná Booleova algebra, D je libovolný distributivní svaz s 1 a $\varphi : S \to F(D)$ je homomorfismus ohraničených svazů. Pak lze z trojice $\langle S, D, \varphi\rangle$ sestrojit Stoneovu algebru L, pro kterou platí:*

$$\langle S(L), D(L), \varphi^L\rangle \cong \langle S, D, \varphi\rangle.$$

Důkaz. Nechť

$$L = \{\langle a, x\rangle \mid x \in \varphi(a), a \in S\} \tag{4.2}$$

a

$$\langle a, x\rangle \leq \langle b, y\rangle \iff a \leq b, x \leq \varrho_a(y), \tag{4.3}$$

kde zobrazení ρ_a je definováno takto:

$$[\varrho_a(x)) = \varphi(a) \cap [x), a \in S, x \in D.$$

Našim cílem bude ukázat, ze L je Stoneova algebra. Všimněme si, že z vlastností zobrazení ϱ_a plyne, že $\leq$ je reflexivní, anti-symetrická a tranzitivní.
Nyní si nadefinujeme průsek a spojení na L následovně:

$$\langle a, x\rangle \wedge \langle b, y\rangle = \langle a \wedge b, \varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y)\rangle, \tag{4.4}$$

$$\langle a, x\rangle \vee \langle b, y\rangle = \langle a \vee b, (\varrho_{b'}(x) \wedge y) \vee (x \wedge \varrho_{a'}(y))\rangle. \tag{4.5}$$

Nejprve si dokážeme 4.4. Z definice víme, že $\varrho_b(x) \in \varphi(b)$ a $\varrho_a(y) \in \varphi(a)$. Tudíž $\varrho_b(x) \in \varphi(b) \cap \varphi(a)$, podobně $\varrho_a(y) \in \varphi(a) \cap \varphi(b)$. Dohromady dostáváme $\varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y) \in \varphi(a) \cap \varphi(b) = \varphi(a \wedge b)$. Zjistili jsme, že pravá strana rovnice 4.4 náleží L. Zbývá nám dokázat, že je pravá strana největší dolní zavorou. Snadno se přesvědčíme, že $\langle a \wedge b, \varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y)\rangle$ je dolní závora.
Například $\langle a \wedge b, \varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y)\rangle \leq \langle a, x\rangle \iff a \wedge b \leq a, \varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y) \leq \varrho_{a \wedge b}(x)$. Vidíme, že první podmínka je splněna triviálně. Druhou podmínku si rozepíšeme

pomocí vlastností zobrazení ϱ_a takto, $\varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y) \leq \varrho_{a\wedge b}(x) = \varrho_a(x) \vee \varrho_b(x)$. Došli jsme tedy k závěru, že $\langle a \wedge b, \varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y) \rangle$ je dolní závora, musíme však zjistit, že je největší. Nechť $\langle c, z\rangle$ je nějaká dolní závora $\langle a, x\rangle$ a $\langle b, y\rangle$. Pak platí, že $c \leq a$ a $c \leq b$, tedy $c \leq a \wedge b$ a zároveň $z \leq \varrho_c(x)$ a $z \leq \varrho_c(y)$, tedy $z \leq \varrho_c(x) \wedge \varrho_c(y)$.

$$\varrho_c(\varrho_b(y) \wedge \varrho_a(y)) = \varrho_b(\varrho_c(x)) \wedge \varrho_a(\varrho_c(y)) = \varrho_{b\wedge c}(x) \wedge \varrho_{a\wedge c}(y).$$

Avšak víme, že $b \wedge c = c$ a $a \wedge c = c$, můžeme tedy psát:

$$\varrho_{b\wedge c}(x) \wedge \varrho_{a\wedge c}(y) = \varrho_c(x) \wedge \varrho_c(y).$$

Jenže $z \leq \varrho_c(x) \wedge \varrho_c(y)$, což ovšem vede k tomu, že $\langle c, z\rangle \leq \langle a \wedge b, \varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y)\rangle$, tedy $\langle a \wedge b, \varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y)\rangle$ je největší dolní závora.

Než si dokážeme 4.5, všimněme si, že stačilo dokázat, že je pravá strana 4.4 invariantní vůči $\varrho_{a\wedge b}$ (tímto postupem zjistíme, že pravá strana 4.4 náleží L). Tedy:

$$\text{pokud } \varrho_{a\wedge b}(\varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y)) = \varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y), \text{ pak } \varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y) \in \varphi(a \wedge b).$$

To tedy znamená, že $\langle a \wedge b, \varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y)\rangle$ jistě patří do L. Postupujme následovně:

$$\begin{aligned}
\varrho_{a\wedge b}(\varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y)) &= \varrho_{a\wedge b}(\varrho_b(x)) \wedge \varrho_{a\wedge b}(\varrho_a(y)) \\
&= \varrho_{a\wedge b}(x) \wedge \varrho_{a\wedge b}(y) \\
&= \varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y).
\end{aligned}$$

V důkazu jsme využili toho, že $\varrho_a(x) = x$ a $\varrho_b(y) = y$. Zjistili jsme tedy, že pravá strana je invariantní vůči $\varrho_{a\wedge b}$.

Zbývá nám dokázat 4.5. Nejdříve opět dokážeme, že pravá strana náleží L. Postupujme následovně:

$$\begin{aligned}
&\varrho_{a\vee b}((\varrho_{b'}(x) \wedge y) \vee (x \wedge \varrho_{a'}(y)) = \\
&\qquad = (\varrho_{a\vee b}(\varrho_{b'}(x)) \wedge \varrho_{a\vee b}(y)) \vee (\varrho_{a\vee b}(x) \wedge \varrho_{a\vee b}(\varrho_{a'}(y))) \\
&\qquad = (\varrho_{b'\wedge(a\vee b)}(x) \wedge \varrho_{a\vee b}(y)) \vee (\varrho_{a\vee b}(x) \wedge \varrho_{a'\wedge(a\vee b)}(y)) \\
&\qquad = (\varrho_{b'\wedge a}(x) \wedge \varrho_{a\vee b}(y)) \vee (\varrho_{a\vee b}(x) \wedge \varrho_{a'\wedge b}(y)).
\end{aligned}$$

Víme, že $\varrho_a(x) = x$ a $\varrho_b(y) = y$. Odtud dostáváme, že $\varrho_{b' \vee a}(x) = \varrho_{b'}(\varrho_a(x)) = \varrho_{b'}(x)$ a obdobně $\varrho_{a' \wedge b}(y) = \varrho_{a'}(\varrho_b(y)) = \varrho_{a'}(y)$. Pokusme se ještě upravit členy $\varrho_{a \vee b}(y)$ a $\varrho_{a \vee b}(x)$. Úpravu provedeme s využitím absorpčního zákona:

$$\varrho_{a \vee b}(y) = \varrho_{a \vee b}(\varrho_b(y)) = \varrho_{(a \vee b) \wedge b}(y) = \varrho_b(y) = y,$$
$$\varrho_{a \vee b}(x) = \varrho_{a \vee b}(\varrho_a(x)) = \varrho_{(a \vee b) \wedge a}(x) = \varrho_a(x) = x.$$

Celkově dostáváme:

$$\varrho_{a \vee b}[(\varrho_{b'}(x) \wedge y) \vee (x \wedge \varrho_{a'}(y))] = (\varrho_{b'}(x) \vee y) \wedge (x \wedge \varrho_{a'}(y)),$$

a tudíž $\langle a \vee b, (\varrho_{b'}(x) \wedge y) \vee (x \wedge \varrho_{a'}(y)) \rangle \in L$. Zbývá dokázat, že pravá strana je nejmenší horní závora. Tedy

$$\begin{aligned} &\langle a, x \rangle \leq \langle a \vee b, (\varrho_{b'}(x) \wedge y) \vee (x \wedge \varrho_{a'}(y)) \rangle \iff \\ &\qquad \iff a \leq a \vee b, x \leq \varrho_a((\varrho_{b'}(x) \wedge y) \vee (x \wedge \varrho_{a'}(y))), \end{aligned}$$

kde $a \leq a \vee b$ je splněno triviálně. Pohlédněme blíže na druhou podmínku:

$$\begin{aligned} \varrho_a((\varrho_{b'}(x) \wedge y) \vee (x \wedge \varrho_{a'}(y))) &= (\varrho_a(\varrho_{b'}(x)) \wedge \varrho_a(y)) \vee (\varrho_a(x) \wedge \varrho_a(\varrho_{a'}(y))) \\ &= (\varrho_{a \wedge b'}(x) \wedge \varrho_a(y)) \vee (x \wedge \varrho_{a \wedge a'}(y)) \\ &= (\varrho_{b'}(x) \wedge \varrho_a(y)) \vee (x \wedge 1) \\ &= (\varrho_{b'}(x) \wedge \varrho_a(y)) \vee x. \end{aligned}$$

Avšak $(\varrho_{b'}(x) \wedge \varrho_a(y)) \vee x \geq x$. Z toho tedy vyplývá, že pravá strana je větší než prvek $\langle a, x \rangle$. Podobně pro prvek $\langle b, y \rangle$, tedy i $y \vee (\varrho_b(x) \wedge \varrho_{a'}(y)) \geq y$. Celkově pravá strana tvoří horní závoru. Ukážeme si, že je i nejmenší. Nechť $\langle c, z \rangle$ je také horní závora. Platí, že $c \geq a \vee b$, $\varrho_a(z) \geq x$ a $\varrho_b(z) \geq y$. Můžeme psát:

$$\varrho_{a \vee b}(z) = \varrho_{(a \wedge b') \vee b}(z) = \varrho_{a \wedge b'}(z) \wedge \varrho_b(z).$$

Avšak $\varrho_a(z) \geq x$ a $\varrho_b(z) \geq y$, dohromady dostáváme:

$$\varrho_{a \wedge b'}(z) \wedge \varrho_b(z) \geq \varrho_{b'}(x) \wedge y.$$

Podobně:

$$\varrho_{a \vee b}(z) = \varrho_{(a' \wedge b) \vee a}(z) = \varrho_{a' \vee b}(z) \wedge \varrho_a(z) \geq \varrho_{a'}(y) \wedge x.$$

Celkově dostáváme:

$$\varrho_{a\vee b}(z) \geq (\varrho_{b'}(x) \wedge y) \vee (x \wedge \varrho_{a'}(y)).$$

Což ovšem znamená, že $\langle c, z\rangle \geq \langle a \vee b, (\varrho_{b'}(x) \wedge y) \vee (x \wedge \varrho_{a'}(y))\rangle$, tedy $\langle a \vee b, (\varrho_{b'}(x) \wedge y) \vee (x \wedge \varrho_{a'}(y))\rangle$ je nejmenší horní závora. Z předchozího vyplývá, že naše množina L tvoří vzhledem k uspořádání svaz.

Nyní si dokážeme, že L je distributivní. Zavedeme si následující označení:

$$A = (\langle a, x\rangle \wedge \langle b, y\rangle) \vee \langle c, z\rangle,$$
$$B = (\langle a, x\rangle \vee \langle c, z\rangle) \wedge (\langle b, y\rangle \vee \langle c, z\rangle).$$

Jistě platí, že $A \leq B$. Potřebujeme tedy dokázat, že platí: $A \geq B$, z čehož pak plyne rovnost $A = B$. Pro A s využitím 4.4 a 4.5 tedy dostáváme:

$$\begin{aligned}(\langle a, x\rangle \wedge \langle b, y\rangle) \vee \langle c, z\rangle &= \langle a \wedge b, \varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y)\rangle \vee \langle c, z\rangle \\ &= \langle (a \wedge b) \vee c, [\varrho_{c'}(\varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y)) \wedge z] \vee [\varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y) \wedge \varrho_{(a\wedge b)'}(z)]\rangle.\end{aligned}$$

Podobně pro B:

$$\begin{aligned}&(\langle a, x\rangle \vee \langle c, z\rangle) \wedge (\langle b, y\rangle \vee \langle c, z\rangle) = \\ &\quad= \langle a \vee c, (\varrho_{c'}(x) \wedge z) \vee (x \wedge \varrho_{a'}(z))\rangle \wedge \langle b \vee c, (\varrho_{c'}(y) \wedge z) \vee (y \wedge \varrho_{b'}(z))\rangle \\ &\quad= \langle (a \vee c) \wedge (b \vee c), \varrho_{b\vee c}((\varrho_{c'}(x) \wedge z) \vee (x \wedge \varrho_{a'}(z))) \\ &\quad\wedge \rho_{a\vee c}((\varrho_{c'}(y) \wedge z) \vee (y \wedge \varrho_{b'}(z)))\rangle \\ &\quad= \langle (a \vee c) \wedge (b \vee c), [(\varrho_{b\vee c}(\varrho_{c'}(x)) \wedge \varrho_{b\vee c}(z)) \vee (\varrho_{b\vee c}(x) \wedge \varrho_{b\vee c}(\varrho_{a'}(z)))] \\ &\quad\wedge [(\varrho_{a\vee c}(\varrho_{c'}(y)) \wedge \varrho_{a\vee c}(z)) \vee (\varrho_{a\vee c}(y) \wedge \varrho_{a\vee c}(\varrho_{b'}(z)))].\end{aligned}$$

Položme:

$$\begin{aligned}d = {}&[(\varrho_{b\vee c}(\varrho_{c'}(x)) \wedge \varrho_{b\vee c}(z)) \vee (\varrho_{b\vee c}(x) \wedge \varrho_{b\vee c}(\varrho_{a'}(z)))] \\ &\wedge [(\varrho_{a\vee c}(\varrho_{c'}(y)) \wedge \varrho_{a\vee c}(z)) \vee (\varrho_{a\vee c}(y) \wedge \varrho_{a\vee c}(\varrho_{b'}(z)))],\end{aligned}$$

dále označme

$$\begin{aligned}a_0 &= \varrho_{b\vee c}(\varrho_{c'}(x) \wedge \varrho_{b\vee c}(z) & a_1 &= \varrho_{b\vee c}(x) \wedge \varrho_{b\vee c}(\varrho_{a'}(z)) \\ a_2 &= \varrho_{a\vee c}(\varrho_{c'}(y)) \wedge \varrho_{a\vee c}(z) & a_3 &= \varrho_{a\vee c}(y) \wedge \varrho_{a\vee c}(\varrho_{b'}(z)).\end{aligned}$$

Dále označme:

$$d_0 = a_0 \wedge a_2 = \varrho_{b\vee c}(\varrho_{c'}(x)) \wedge \varrho_{b\vee c}(z) \wedge \varrho_{a\vee c}(\varrho_{c'}(y)) \wedge \varrho_{a\vee c}(z),$$

$$d_1 = a_0 \wedge a_3 = \varrho_{b\vee c}(\varrho_{c'}(x)) \wedge \varrho_{b\vee c}(z) \wedge \varrho_{a\vee c}(y) \wedge \varrho_{a\vee c}(\varrho_{b'}(z)),$$

$$d_2 = a_1 \wedge a_2 = \varrho_{b\vee c}(x) \wedge \varrho_{b\vee c}(\varrho_{a'}(z)) \wedge \varrho_{a\vee c}(\varrho_{c'}(y)) \wedge \varrho_{a\vee c}(z),$$

$$d_3 = a_1 \wedge a_3 = \varrho_{b\vee c}(x) \wedge \varrho_{b\vee c}(\varrho_{a'}(z)) \wedge \varrho_{a\vee c}(y) \wedge \varrho_{a\vee c}(\varrho_{b'}(z)).$$

Vidíme tedy, že:

$$\begin{aligned} d &= (a_0 \vee a_1) \wedge (a_2 \vee a_3) \\ &= (a_0 \wedge a_2) \vee (a_0 \wedge a_3) \vee (a_1 \wedge a_2) \vee (a_1 \wedge a_3) \\ &= d_0 \vee d_1 \vee d_2 \vee d_3. \end{aligned}$$

Upravme nyní nejdříve d_0:

$$\begin{aligned} d_0 &= \varrho_{b\vee c}(\varrho_{c'}(x)) \wedge \varrho_{b\vee c}(z) \wedge \varrho_{a\vee c}(\varrho_{c'}(y)) \wedge \varrho_{a\vee c}(z) \\ &= \varrho_{(b\vee c)\wedge c'}(x) \wedge \varrho_{b\vee c}(z) \wedge \varrho_{(a\vee c)\wedge c'}(y) \wedge \varrho_{a\vee c}(z) \\ &= \varrho_{b\wedge c'}(x) \wedge z \wedge \varrho_{a\wedge c'}(y) \wedge z \\ &= \varrho_{b\wedge c'}(x) \wedge z \wedge \varrho_{a\wedge c'}(y), \end{aligned}$$

protože $\varrho_c(z) = z$, $\varrho_{b\vee c}(z) = \varrho_{b\vee c}(\varrho_c(z)) = \varrho_{c\vee(c\wedge b)}(z) = \varrho_c(z)$, podobně pro $\varrho_{a\vee c}(z) = z$ plyne z absorpčního zákona.
Podobně pro ostatní členy d_1, d_2, d_3:

$$\begin{aligned} d_1 &= \varrho_{b\vee c}(\varrho_{c'}(x)) \wedge \varrho_{b\vee c}(z) \wedge \varrho_{a\vee c}(y) \wedge \varrho_{a\vee c}(\varrho_{b'}(z)) \\ &= \varrho_{b\wedge c'}(x) \wedge z \wedge \varrho_{a\vee c}(y) \wedge \varrho_{c\wedge b'}(z) \\ &= \varrho_{b\wedge c'}(x) \wedge \varrho_{a\vee c}(y) \wedge z, \\ d_2 &= \varrho_{b\vee c}(x) \wedge \varrho_{b\vee c}(\varrho_{a'}(z)) \wedge \varrho_{a\vee c}(\varrho_{c'}(y)) \wedge \varrho_{a\vee c}(z) \\ &= \varrho_{b\vee c}(x) \wedge \varrho_{a'}(z) \wedge \varrho_{a\wedge c'}(y) \wedge z \\ &= \varrho_{b\vee c}(x) \wedge \varrho_{a\wedge c'}(y) \wedge z, \\ d_3 &= \varrho_{b\vee c}(x) \wedge \varrho_{b\vee c}(\varrho_{a'}(z)) \wedge \varrho_{a\vee c}(y) \wedge \varrho_{a\vee c}(\varrho_{b'}(z)) \\ &= \varrho_{b\vee c}(x) \wedge \varrho_{a'}(z) \wedge \varrho_{a\vee c}(y) \wedge \varrho_{b'}(z) \\ &= \varrho_{b\vee c}(x) \wedge \varrho_{a\vee c}(y) \wedge \varrho_{a'\vee b'}(z). \end{aligned}$$

Všimněme si nyní, že:

$$\varrho_{c'\wedge a}(y) = \varrho_{c'}(y) \vee \varrho_a(y) \geq \varrho_a(y) \geq \varrho_a(y) \wedge \varrho_c(y) = \varrho_{a\vee c}(y).$$

Odtud je však patrné, že $d_0 \geq d_1$.

Navíc:

$$\varrho_{c'\wedge b}(x) = \varrho_{c'}(x) \vee \varrho_b(x) \geq \varrho_b(x) \geq \varrho_b(x) \wedge \varrho_c(x) = \varrho_{b\vee c}(x),$$

z čehož plyne, že $d_0 \geq d_2$. Dohromady $d = d_0 \vee d_3$. Dále

$$\begin{aligned}
\varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)}&[((\varrho_{c'}(\varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y)) \wedge z) \vee (\varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y) \wedge \varrho_{(a\wedge b)'}(z))] = \\
&[(\varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)}(\varrho_{c'}(\varrho_b(x))) \wedge \varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)}(\varrho_{c'}(\varrho_a(y)))) \wedge \varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)}(z)] \\
&\quad \vee [\varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)}(\varrho_b(x)) \wedge \varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)}(\varrho_a(y)) \wedge \varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)}(\varrho_{(a\wedge b)'}(z))].
\end{aligned}$$

Upravme si jednotlivé členy:

$$\begin{aligned}
\varrho_{(a\wedge c)\vee(b\vee c)}(\varrho_{c'}(\varrho_b(x))) &= \varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)\wedge c'\wedge b}(x) = \varrho_{a\wedge c'\wedge b}(x) = \varrho_{b\wedge c'}(x), \\
\varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)}(\varrho_{c'}(\varrho_a(y))) &= \varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)\wedge c'\wedge a}(y) = \varrho_{b\wedge a\wedge c'}(y) = \varrho_{a\wedge c'}(y), \\
\varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)}(z) &= \varrho_{b\vee c}(\varrho_{a\vee c}(z)) = z, \\
\varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)}(\varrho_b(x)) &= \varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)\wedge b}(x) = \varrho_{b\wedge(a\vee c)}(x) = \varrho_b(x), \\
\varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)}(\varrho_a(y)) &= \varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)\wedge a}(y) = \varrho_{a\wedge(b\vee c)}(y) = \varrho_a(y), \\
\varrho_{(a\vee c)\wedge(b\vee c)}(\varrho_{(a\wedge b)'}(z)) &= \varrho_{a\vee c}(\varrho_{b\vee c}(\varrho_{a'\vee b'}(z))) = \varrho_{a'\vee b'}(z).
\end{aligned}$$

Dohromady dostáváme:

$$(\varrho_{b\wedge c}(x) \wedge \varrho_{a\wedge c'}(y) \wedge z) \vee (\varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y) \wedge \varrho_{a'\vee b'}(z)).$$

Avšak levá závorka je rovna d_0. Celkově tedy $d_0 \vee (\varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y) \wedge \varrho_{a'\vee b'}(z))$. Dále víme jistě, že platí: $(a \wedge b) \vee c \geq (a \vee c) \wedge (b \vee c)$. Konečně podle 4.2 platí, že $A \geq B$, protože $\varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y) \wedge \varrho_{a'\vee b'}(z) \geq d_3$ a tedy:

$$d_0 \vee (\varrho_b(x) \wedge \varrho_a(y) \wedge \varrho_{a'\vee b'}(z)) \geq d_0 \vee d_3 = d.$$

Tímto máme dokázáno, že L je distributivní svaz.

Nejmenší prvek: Každý prvek L je ve tvaru $\langle a, x\rangle$, kde $a \in S$ a $x \in \varphi(a)$, Víme, že S je Booleova algebra, má tedy nejmenší prvek 0. To znamená, že na 1.

pozici v uspořádané dvojici $\langle a, x\rangle$ musí být 0. Avšak $\varphi(0) = \{1\}$. Nejmenší prvek L je tedy ve tvaru $\langle 0, 1\rangle$.

Největší prvek: V případě největšího prvku L je situace jednodušší, protože S je Booleova algebra a D je shora omezený distributivní svaz. Největší prvek je tedy ve tvaru $\langle 1, 1\rangle$.

Pseudokomplement:

$$\langle a, x\rangle^* = \langle a', 1\rangle, \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\langle a, x\rangle \wedge \langle a', 1\rangle &= \langle a \wedge a', \varrho_{a'}(x) \wedge \varrho_a(1)\rangle \\ &= \langle 0, \varrho_{a'}(x) \wedge 1\rangle = \langle 0, \varrho_{a' \wedge a}(x) \wedge 1\rangle \\ &= \langle 0, 1\rangle.\end{aligned}$$

Pokud $\langle a, x\rangle \wedge \langle b, y\rangle = \langle 0, 1\rangle$, pak ale $b \leq a'$ a $y \leq \varrho_b(1) = 1$ z čehož plyne, že $\langle b, y\rangle \leq \langle a', 1\rangle$.

Stoneova identita:

$$\langle a, x\rangle^* \vee \langle a, x\rangle^{**} = \langle 1, 1\rangle, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\langle a, x\rangle^* \vee \langle a, x\rangle^{**} &= \langle a', 1\rangle \vee \langle a, 1\rangle = \langle a', 1\rangle \vee \langle a, 1\rangle \\ &= \langle a' \vee a, (\varrho_{a'}(1) \wedge 1) \vee (1 \wedge \varrho_a(1))\rangle \\ &= \langle 1, 1\rangle.\end{aligned}$$

Skeleton:

$$S(L) = \{\langle a, 1\rangle \mid a \in S\ \}. \tag{4.8}$$

Množina hustých prvků:

$$D(L) = \{\langle 1, d\rangle \mid d \in D\}. \tag{4.9}$$

Zobrazení φ^L:

$$\varphi^L(\langle a, 1\rangle) = \{\langle 1, d\rangle \mid d \in \varphi(a)\}.$$

L je tedy Stoneova algebra. Trojice asociovaná se Stoneovou algebrou L je $\langle S(L), D(L), \varphi^L\rangle$.

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & F(D) \arrow[d, "\tilde{g}"] \\
S(L) \arrow[r, "\varphi^L"'] & F(D(L))
\end{tikzcd}
$$

Obrázek 4.2: Diagram izomorfních trojic

Trojice $\langle S, D, \varphi \rangle$ a $\langle S(L), D(L), \varphi^L \rangle$ jsou izomorfní, právě když existují izomorfismy $f : S \to S(L)$ a $g : D \to D(L)$ takové, že diagram
komutuje.

V diagramu 4.2 zobrazení $\tilde{g}$ značí izomorfismus svazů $F(D)$ a $F(D(L))$ indukovaný zobrazením g.

Definujme zobrazení $f : S \to S(L)$ předpisem

$$f(a) = \langle a, 1 \rangle.$$

f je surjekce, neboť každý prvek $\langle a, 1 \rangle \in L$ je jednoznačně určen prvkem $a \in S$.
Zobrazení f je izotonní tedy:

$$a \leq b \quad \Rightarrow \langle a, 1 \rangle \leq \langle b, 1 \rangle. \tag{4.10}$$

Předpokládejme, že platí levá strana 4.10. Dále

$$\langle a, 1 \rangle \leq \langle b, 1 \rangle \iff a \leq b \quad \text{a} \quad 1 \leq \varrho_a(1),$$

avšak $\varrho_a(1) = 1$. Pak z $a \leq b$ plyne $\langle a, 1 \rangle \leq \langle b, 1 \rangle$.
Zobrazení f^{-1} je izotonní tedy:

$$\langle a, 1 \rangle \leq \langle b, 1 \rangle \Rightarrow a \leq b. \tag{4.11}$$

Předpokládejme, že platí levá strana, tzn.:

$$\langle a, 1 \rangle \leq \langle b, 1 \rangle \iff a \leq b \quad \text{a} \quad 1 \leq \varrho_a(1),$$

z čehož je okamžitě vidět, že $a \leq b$.

Ukážeme, že zobrazení f zachovává komplement:

$$f(a') = \langle a', 1\rangle = f(a)'.$$

Nejmenší resp. největší prvek:

$$f(0) = \langle 0, 1\rangle,$$
$$f(1) = \langle 1, 1\rangle.$$

Zobrazení f je tedy izomorfismus.

Dále definujme zobrazení $g : D \to D(L)$ předpisem

$$g(d) = \langle 1, d\rangle.$$

g je surjekce, neboť množina $D(L)$ je definována jako $D(L) = \{\langle 1, d\rangle \mid d \in D\}$.

g je izotonní, neboť pro $d_1, d_2 \in D$, kde $d_1 \leq d_2$, okamžitě plyne $\langle 1, d_1\rangle \leq \langle 1, d_2\rangle$,protože $\varrho_1(d_2) = d_2$.

Zobrazení g^{-1} je izotonní, protože z $\langle 1, d_1\rangle \leq \langle 1, d_2\rangle$ ihned plyne $d_1 \leq d_2$. Jako poslední ukážeme, že zobrazení g zachovává nejmenší prvek, tedy

$$g(1) = \langle 1, 1\rangle.$$

Zobrazení g je tedy také izomorfismus.

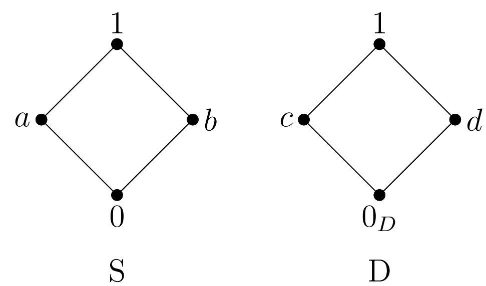
Zbývá dokázat, ze diagram 4.2 komutuje. Nechť $a \in S$. Pak

$$a \overset{\varphi}{\mapsto} \varphi(a) \overset{\tilde{g}}{\mapsto} g(\varphi(a)) = \{\langle 1, x\rangle \mid x \in \varphi(a)\},$$
$$a \overset{f}{\mapsto} \langle a, 1\rangle \overset{\varphi^L}{\longmapsto} \{\langle 1, x\rangle \mid \langle 1, x\rangle \geq \langle a, 1\rangle^*\} = \{\langle 1, x\rangle \mid x \in \varphi(a)\}.$$

Platí tedy, že $\langle S, D, \varphi\rangle \cong \langle S(L), D(L), \varphi^L\rangle$.

$\square$

Příklad 2. Nechť S je čtyřprvková Booleova algebra a D je distributivní svaz s 1 (viz obrázek níže).



Definujme zobrazení $\varphi : S \to F(D)$ předpisem

$$\varphi(0) = \{1\}, \quad \varphi(b) = [c),$$
$$\varphi(a) = [d), \quad \varphi(1) = D.$$

Množinu L jsme v důkazu věty 4.2.1 měli definovanou následovně:

$$L = \{\langle a, x\rangle \mid a \in S, x \in \varphi(a)\}.$$

V našem konkrétním příkladu je množina L ve tvaru:

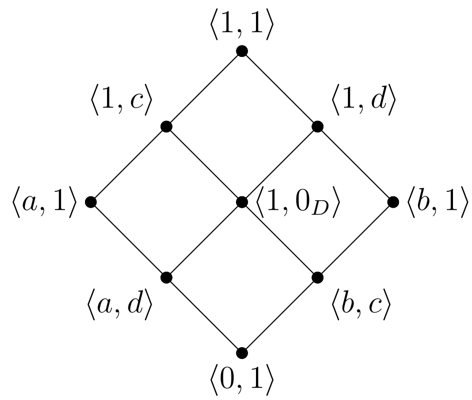
$$L = \{\langle 0,1\rangle, \langle a,d\rangle, \langle a,1\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,1\rangle, \langle 1,0_D\rangle, \langle 1,c\rangle, \langle 1,d\rangle, \langle 1,1\rangle\}.$$

Podle důkazu věty 4.2.1 je L Stoneova algebra (viz obr. 4.3), kde

$$\begin{aligned}
\langle 0,1\rangle^* &= \langle 1,1\rangle,\\
\langle a,d\rangle^* &= \langle a,1\rangle^* = \langle b,1\rangle,\\
\langle b,c\rangle^* &= \langle b,1\rangle^* = \langle a,1\rangle,\\
\langle 1,0_D\rangle^* &= \langle 1,c\rangle^* = \langle 1,d\rangle^* = \langle 1,1\rangle^* = \langle 0,1\rangle.
\end{aligned}$$

Všimněme si, že

$$\begin{aligned}
S(L) &= \{\langle 0,1\rangle, \langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle, \langle 1,1\rangle\} = \{\langle x,1\rangle \mid x \in S\},\\
D(L) &= \{\langle 1,0_D\rangle, \langle 1,c\rangle, \langle 1,d\rangle, \langle 1,1\rangle\} = \{\langle 1,y\rangle \mid y \in D\},\\
\varphi^L(\langle x,1\rangle) &= \{\langle 1,y\rangle \mid y \in \varphi(a)\}.
\end{aligned}$$



Obrázek 4.3: Stoneova algebra L.

Zbývá dokázat, ze diagram 4.2 komutuje, tedy:

$$0 \overset{\varphi}{\mapsto} \{1\} \overset{\tilde{g}}{\mapsto} \{\langle 1, 1\rangle\}, \qquad a \overset{\varphi}{\mapsto} [d) \overset{\tilde{g}}{\mapsto} \{\langle 1, d\rangle, \langle 1, 1\rangle\},$$

$$0 \overset{f}{\mapsto} \langle 0, 1\rangle \overset{\varphi^L}{\longmapsto} \{\langle 1, 1\rangle\}, \qquad a \overset{f}{\mapsto} \langle a, 1\rangle \overset{\varphi^L}{\longmapsto} \{\langle 1, d\rangle, \langle 1, 1\rangle\},$$

$$1 \overset{\varphi}{\mapsto} D \overset{\tilde{g}}{\mapsto} \{\langle 1, 0_D\rangle, \langle 1, c\rangle, \langle 1, d\rangle, \langle 1, 1\rangle\}, \qquad b \overset{\varphi}{\mapsto} [c) \overset{\tilde{g}}{\mapsto} \{\langle 1, c\rangle, \langle 1, 1\rangle\},$$

$$1 \overset{f}{\mapsto} \langle 1, 1\rangle \overset{\varphi^L}{\longmapsto} \{\langle 1, 0_D\rangle, \langle 1, c\rangle, \langle 1, d\rangle, \langle 1, 1\rangle\}, \qquad b \overset{f}{\mapsto} \langle b, 1\rangle \overset{\varphi^L}{\longmapsto} \{\langle 1, c\rangle, \langle 1, 1\rangle\}.$$

Ukázali jsme, že jsou trojice $\langle S, D, \varphi\rangle$ a $\langle S(L), D(L), \varphi\rangle$ izomorfní.

4.3. Konstrukce podle T. Katriňáka

Při konstrukci podle Katriňáka budeme vycházet (stejně jako při minulé konstrukci) z abstraktní trojice $\langle S, D, \varphi\rangle$, kde S je Booleova algebra, D je distributivní svaz s 1 a $\varphi : S \to F(D)$ je homomorfismus ohraničených svazů. Dále si zavedeme duální svaz ke svazu $F(D)$, tedy svaz, kde zaměníme spojení za průsek a obráceně. Tento duální svaz budeme značit $F_d(D)$. Nyní přejdeme k samotné konstrukci Stoneovy algebry L.
Jako první si definujme nosnou množinu L následovně:

$$L = \{\langle a, \varphi(a') \vee [x)\rangle \mid a \in S, x \in D\}.$$

L je podmnožina direktního součinu $S \times F(D)$. Jelikož S i $F(D)$ jsou svazy, pak i $S \times F(D)$ je svaz. Musíme tedy dokázat, že množina L spolu s operacemi průsek a spojení je podsvaz svazu $S \times F_d(D)$.
Tedy:

$$\begin{aligned}\langle a, \varphi(a') \vee [x)\rangle \wedge \langle b, \varphi(b') \vee [y)\rangle &= \langle a \wedge b, (\varphi(a') \vee [x)) \vee (\varphi(b') \vee [y))\rangle \\ &= \langle a \wedge b, \varphi(a') \vee \varphi(b') \vee [x) \vee [y)\rangle \\ &= \langle a \wedge b, \varphi((a \wedge b)') \vee [x \wedge y)\rangle.\end{aligned}$$

Prvek $\langle a \wedge b, \varphi((a \wedge b)') \vee [x \wedge y)\rangle$ jistě patří do L, neboť $(a \wedge b) \in S$ a $x \wedge y \in D$.

$$\begin{aligned}\langle a, \varphi(a') \vee [x)\rangle \vee \langle b, \varphi(b') \vee [y)\rangle &= \langle a \vee b, (\varphi(a') \vee [x)) \cap (\varphi(b') \vee [y))\rangle \\ &= \langle a \vee b, ((\varphi(a') \cap \varphi(b')) \vee (\varphi(b') \cap [x)) \vee ((\varphi(a') \cap [y)) \vee ([x) \cap [y))))\rangle \\ &= \langle a \vee b, ((\varphi(a' \wedge b') \vee (\varphi(b') \cap [x))) \vee ((\varphi(a') \cap [y)) \vee [x \vee y))))\rangle \\ &= \langle a \vee b, \varphi((a \vee b)') \vee (\varphi(b') \cap [x)) \vee (\varphi(a') \cap [y)) \vee [x \vee y)\rangle \\ &= \langle a \vee b, \varphi((a \vee b)') \vee [\varrho_{b'}(x) \wedge \varrho_{a'}(y) \wedge (x \vee y))\rangle.\end{aligned}$$

Prvek $\langle a \vee b, \varphi((a \vee b)') \vee [\varrho_{b'}(x) \wedge \varrho_{a'}(y) \wedge (x \vee y))\rangle$ jistě také patří do L, neboť $a \vee b \in S$ a $\varrho_{b'}(x) \wedge \varrho_{a'}(y) \wedge (x \vee y) \in D$.

Množina L s operacemi průsek a spojení tvoří svaz. Jenže S je Booleova algebra a D je distributivní svaz, takže $L \subseteq S \times F_d(D)$ je distributivní. Nyní se

blíže podíváme, co plyne z předchozího pro relaci uspořádání.
$\langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle \leq \langle b, \varphi(b') \vee [y) \rangle \iff \langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle \wedge \langle b, \varphi(b') \vee [y) \rangle = \langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle$, což je splněno, právě když $a = a \wedge b$ a $\langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle \vee \langle b, \varphi(b') \vee [y) \rangle = \langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle$, tedy $\varphi(b') \vee [y) \subseteq \varphi(a') \vee [x)$.
Celkově:

$$\langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle \leq \langle b, \varphi(b') \vee [y) \rangle \iff a \leq b \quad \text{a} \quad \varphi(b') \vee [y) \subseteq \varphi(a') \vee [x).$$

Nejmenší prvek: Každý prvek L je ve tvaru $\langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle$, kde $a \in S$ a $\varphi(a') \vee [x) \in F(D)$. S je Booleova algebra, tedy na první pozici nejmenšího prvku z L bude jistě nejmenší prvek z S. Na druhé pozici bude největší prvek z $F(D)$, ten však také známe. Celkově tedy dostáváme, že nejmenší prvek v L je $\langle 0, D \rangle$.

Největší prvek: V tomto případě budeme postupovat obdobně jako při hledání nejmenšího prvku. Největší prvek je tedy $\langle 1, \{1\} \rangle$.

Pseudokomplement ve svazu $(L; \vee, \wedge)$:

$$\langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle^* = \langle a', \varphi(a) \rangle,$$

protože

$$\begin{aligned} \langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle \wedge \langle a', \varphi(a) \rangle &= \langle a \wedge a', \varphi(a') \vee \varphi(a) \vee [x) \rangle \\ &= \langle 0, \varphi(a' \vee a) \vee [x) \rangle \\ &= \langle 0, \varphi(0) \vee [x) \rangle \\ &= \langle 0, D \vee [x) \rangle = \langle 0, D \rangle. \end{aligned}$$

Nechť platí, že

$$\langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle \wedge \langle b, \varphi(b') \vee [y) \rangle = \langle 0, D \rangle.$$

Pak ovšem $b \leq a'$, z čehož plyne $\varphi(a) \subseteq \varphi(b')$.

Stoneova identita:

$$\langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle^* \vee \langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle^{**} = \langle 1, \{1\} \rangle,$$

protože

$$\langle a, \varphi(a') \vee [x)\rangle^{*} \vee \langle a, \varphi(a') \vee [x)\rangle^{**} = \langle a', \varphi(a)\rangle \vee \langle a, \varphi(a')\rangle$$
$$= \langle a \vee a', \varphi(a) \cap \varphi(a')\rangle$$
$$= \langle 1, \varphi(a \wedge a')\rangle$$
$$= \langle 1, \varphi(0)\rangle = \langle 1, \{1\}\rangle.$$

Skeleton:

$$S(L) = \{\langle a, \varphi(a')\rangle \mid a \in S\}.$$

Množina hustých prvku:

$$D(L) = \{\langle 1, [x)\rangle \mid x \in D\}.$$

Zobrazení φ^L:

$$\varphi^L(\langle a, \varphi(a')\rangle) = \{\langle 1, [d)\rangle \mid d \in \varphi(a)\}.$$

L je tedy Stoneova algebra. Trojice asociovaná se Stoneovou algebrou L je $\langle S(L), D(L), \varphi^L\rangle$. Ukážeme, že je tato trojice izomorfní s abstraktní trojicí $\langle S, D, \varphi\rangle$.

Trojice $\langle S, D, \varphi\rangle$ a $\langle S(L), D(L), \varphi^L\rangle$ jsou izomorfní, právě když existují izomorfismy $f : S \to S(L)$ a $g : D \to D(L)$ takové, že diagram 4.2 komutuje.

V diagramu 4.2 zobrazení $\tilde{g}$ značí izomorfismus svazů $F(D)$ a $F(D(L))$ indukovaný zobrazením g.

Důkaz. Definujme zobrazení $f : S \to S(L)$ předpisem

$$f(a) = \langle a, \varphi(a')\rangle \quad \text{pro } a \in S.$$

f je surjekce. Nechť $\langle a, \varphi(a')\rangle \in S(L)$ pro libovolné $a \in S$. Pak

$$\varphi(a') \cap [a) = [a),$$

jenže $a \in S$ a $f(a) = \langle a, \varphi(a')\rangle \in S(L)$. Zobrazení f je tedy surjektivní.
Dále dokážeme, že je zobrazení f izotonní, tedy:

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad \langle a, \varphi(a')\rangle \leq \langle b, \varphi(b')\rangle. \tag{4.12}$$

Předpokládejme, že platí levá strana 4.12. Z $a \leq b$ okamžitě plyne $\varphi(b') \subseteq \varphi(a')$. Celkově $\langle a, \varphi(a')\rangle \leq \langle b, \varphi(b')\rangle$.
Nyní dokážeme, že f^{-1} je izotonní, tedy:

$$\langle a, \varphi(a')\rangle \leq \langle b, \varphi(b')\rangle \quad \Rightarrow \quad a \leq b. \tag{4.13}$$

Předpokládejme, že platí levá strana 4.13, z toho však okamžitě plyne, že $a \leq b$.
Z 4.12 a 4.13 plyne, že:

$$a \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad \langle a, \varphi(a')\rangle \leq \langle b, \varphi(b')\rangle.$$

Dále ukážeme, že zobrazení f zachovává pseudokomplement (v Booleově algebře S pojem komplement a pseudokomplement značí totéž).
Nechť $a \in S$. Pak

$$f(a') = \langle a', \varphi(a)\rangle = f(a)^*.$$

Největší resp. nejmenší prvek:

$$f(1) = \langle 1, \varphi(1')\rangle = \langle 1, \{1\}\rangle,$$
$$f(0) = \langle 0, \varphi(0')\rangle = \langle 0, D\rangle.$$

Dokázali jsme, že f je izomorfismus.

Dále definujme zobrazení $g : D \to D(L)$ předpisem

$$g(d) = \langle 1, [d)\rangle \quad \text{pro } d \in D.$$

Z předpisu zobrazení g ihned plyne, že je surjekce (hlavní filtr $[d)$ je jednoznačně určen prvkem d). Zobrazení g a g^{-1} je izotonní neboť pro libovolné $d_1, d_2 \in D$ platí $d_1 \leq d_2$, právě když $[d_2) \subseteq [d_1)$.

Jako poslední zbývá dokázat, že zobrazení g zachovává největší prvek. Tedy

$$g(1) = \langle 1, \{1\}\rangle.$$

Dokázali jsme tedy, že zobrazení $g : D \to D(L)$ je izomorfismus.

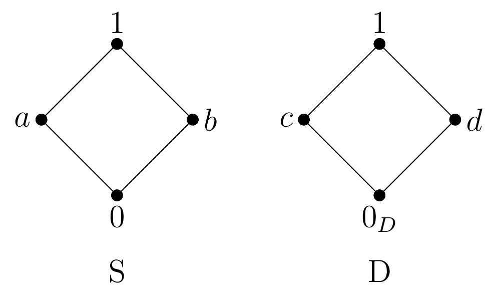
Zbývá dokázat, ze diagram 4.2 komutuje. Nechť $a \in S$. Pak

$$a \overset{\varphi}{\mapsto} \varphi(a) \overset{\tilde{g}}{\mapsto} g(\varphi(a)) = \{\langle 1, [x)\rangle \mid x \in \varphi(a)\},$$

$$a \overset{f}{\mapsto} \langle a, \varphi(a')\rangle \overset{\varphi^L}{\longmapsto} \{\langle 1, [x)\rangle \mid \langle 1, [x)\rangle \geq \langle a, \varphi(a')\rangle^*\} = \{\langle 1, [x)\rangle \mid x \in \varphi(a)\}.$$

Platí tedy, že $\langle S, D, \varphi\rangle \cong \langle S(L), D(L), \varphi^L\rangle$. $\square$

Příklad 3. Nechť S je čtyřprvková Booleova algebra a D je distributivní svaz s 1 (viz obrázek níže).



Definujme zobrazení $\varphi : S \to F(D)$ předpisem

$$\varphi(0) = \{1\}, \quad \varphi(b) = [c),$$
$$\varphi(a) = [d), \quad \varphi(1) = D.$$

Množinu L jsme v první konstrukci podle T. Katriňáka měli definovanou jako:

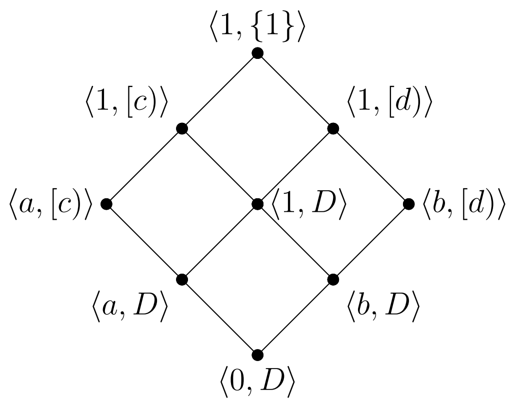
$$L = \{\langle a, \varphi(a') \vee [x)\rangle \mid a \in S, x \in D\}.$$

V našem konkrétní případě bude množina L ve tvaru:
$L = \{\langle 0, D\rangle, \langle a, D\rangle, \langle a, [c)\rangle, \langle b, D\rangle, \langle b, [d)\rangle, \langle a, [c)\rangle, \langle 1, \{1\}\rangle, \langle 1, [c)\rangle, \langle 1, [d)\rangle, \langle 1, D\rangle\}$.
Podle kapitoly 4.3 je L Stoneova algebra (viz obr. 4.4), kde:

$$\langle 0, D\rangle^* = \langle 1, \{1\}\rangle, \quad \langle a, D\rangle^* = \langle b, [d)\rangle,$$
$$\langle a, [c)\rangle^* = \langle b, [d)\rangle, \quad \langle b, D\rangle^* = \langle a, [c)\rangle\rangle,$$
$$\langle b, [d)\rangle^* = \langle a, [c)\rangle,$$
$$\langle 0, \{1\}\rangle^* = \langle 1, [c)\rangle^* = \langle 1, [d)\rangle^* = \langle 1, D\rangle^* = \langle 0, D\rangle.$$

Všimněme si, že

$$S(L) = \{\langle 0, D\rangle, \langle a, [c)\rangle, \langle b, [d)\rangle, \langle 1, \{1\}\rangle\} = \{\langle a, \varphi(a')\rangle \mid a \in S\},$$
$$D(L) = \{\langle 1, D\rangle, \langle 1, [c)\rangle, \langle 1, [d)\rangle, \langle 1, \{1\}\rangle\} = \{\langle 1, [x)\rangle \mid x \in D\},$$
$$\varphi^L(\langle a, \varphi(a')\rangle) = \{\langle 1, [x)\rangle \mid x \in \varphi(a)\}.$$



Obrázek 4.4: Stoneova algebra L

Trojice $\langle S, D, \varphi\rangle$ a $\langle S(L), D(L), \varphi^L\rangle$ jsou izomorfní, právě když existují izomorfismy $f : S \to S(L)$ a $g : D \to D(L)$, takové, že diagram 4.2 komutuje. Definujme tedy zobrazení $f : S \to S(L)$ předpisem

$$f(a) = \langle a, \varphi(a')\rangle.$$

Toto zobrazení je jistě izomorfismus. Dále definujme zobrazení $g : D \to D(L)$ předpisem

$$g(d) = \langle 1, d\rangle.$$

Toto zobrazení je jistě také izomorfismus. Zbývá dokázat, ze diagram 4.2 komutuje, tedy:

$$0 \overset{\varphi}{\mapsto} \{1\} \overset{\tilde{g}}{\mapsto} \{\langle 1, \{1\}\rangle\},$$

$$0 \overset{f}{\mapsto} \langle 0, D\rangle \overset{\varphi^L}{\longmapsto} \{\langle 1, \{1\}\rangle\},$$

$$a \overset{\varphi}{\mapsto} [d) \overset{\tilde{g}}{\mapsto} \{\langle 1, [d)\rangle, \langle 1, \{1\}\rangle\},$$

$$a \overset{f}{\mapsto} \langle a, [c)\rangle \overset{\varphi^L}{\longmapsto} \{\langle 1, [d)\rangle, \langle 1, \{1\}\rangle\},$$

$$b \overset{\varphi}{\mapsto} [c) \overset{\tilde{g}}{\mapsto} \{\langle 1, [c)\rangle, \langle 1, \{1\}\rangle\},$$

$$b \overset{f}{\mapsto} \langle b, [d)\rangle \overset{\varphi^L}{\longmapsto} \{\langle 1, [c)\rangle, \langle 1, \{1\}\rangle\},$$

$$1 \overset{\varphi}{\mapsto} D \overset{\tilde{g}}{\mapsto} \{\langle 1, D\rangle, \langle 1, [c)\rangle, \langle 1, [d)\rangle, \langle 1, \{1\}\rangle\},$$

$$1 \overset{f}{\mapsto} \langle 1, \{1\}\rangle \overset{\varphi^L}{\longmapsto} \{\langle 1, D\rangle, \langle 1, [c)\rangle, \langle 1, [d)\rangle, \langle 1, \{1\}\rangle\}.$$

Zjistili jsme, že jsou trojice $\langle S, D, \varphi\rangle$ a $\langle S(L), D(L), \varphi\rangle$ izomorfní.

4.4. Ohraničený svaz D

V této kapitole si popíšeme, jak vytvořit Stoneovu algebru L z abstraktní trojice $\langle S, D, \varphi\rangle$, kde S je Booleova algebra, D je ohraničený distributivní svaz a $\varphi : S \to F(D)$ je $\{0,1\}-$homomorfismus. Označme 0_D nejmenší prvek D. $\varphi(a)$ je hlavní filtr pro každé $a \in S$, neboť $\varphi(a) = \varphi(a) \cap [0_D) = [\varrho_a(0_D))$. Podobně $\varphi(a') = [\varrho_{a'}(0_D))$. Připomeňme, že v minulé kapitole jsme měli množinu L definovanou následovně:

$$L = \{\langle a, \varphi(a') \vee [x)\rangle \mid a \in S, x \in D\}.$$

Pokud je však D ohraničený distributivní svaz, pak $\varphi(a') \vee [x) = [\varrho_{a'}(0_D) \wedge x)$. Označme $\varrho_{a'}(0_D) = d_a$, pak $d_a \wedge x = y$. Můžeme tedy zkonstruovat množinu L_D, která je ve tvaru:

$$L_D = \{\langle a, y\rangle \mid a \in S, y \in D, y \leq d_a\}.$$

Dokážeme, ze jsou množiny L a L_D izomorfní. Definujme zobrazení $f : L \to L_D$ předpisem

$$f(\langle a, \varphi(a') \vee [x)\rangle = \langle a, d_a \wedge x\rangle.$$

Nechť $f(\langle a, \varphi(a') \vee [x)\rangle = \langle a, d_a \wedge x\rangle = \langle b, d_b \wedge y\rangle = f(\langle b, \varphi(b') \vee [y)\rangle)$. Avšak

$$[d_a \wedge x) = [d_b \wedge y)$$

$$[d_a) \vee [x) = [d_b) \vee [y)$$

$$\varphi(a') \vee [x) = \varphi(b') \vee [y).$$

Navíc $a = b$, celkově je tedy zobrazení f injektivní.

Nechť $\langle a, y\rangle \in L_D$, pro nějaké $a \in S, y \in D, y \leq d_a$. Avšak $y = d_a \wedge x$, kde $x \in D$. Pak $[d_a \wedge x) = [d_a) \wedge [x) = \varphi(a') \vee [x)$, z čehož triviálně plyne, že je zobrazení f surjekce. Dokázali jsme, že je zobrazení f izomorfismus (bijekce) množin L a L_D.

Jelikož jsou množiny L a L_D izomorfní, pak operace průsek a spojení odvodíme z operací průseku a spojení v minulé kapitole, celkově:

$$\langle a, y\rangle \wedge \langle b, z\rangle = \langle a \wedge b, y \wedge z\rangle,$$

$$\langle a, y\rangle \vee \langle b, z\rangle = \langle a \vee b, y \vee z\rangle.$$

L_D s takto definovanými operacemi tvoří svaz, který je podsvazem $S \times D$. Jelikož S i D jsou distributivní. Pak i L_D je distributivní.

Z předchozího pro relaci uspořádání plyne následující:

$$\langle a, y\rangle \leq \langle b, z\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad a \leq b \quad \text{a} \quad y \leq z.$$

Navíc:

$$\langle 0, 0_D\rangle \leq \langle a, y\rangle \leq \langle 1, 1\rangle$$

Pseudokomplement ve svazu L_D je:

$$\langle a, y\rangle^* = \langle a', d_{a'}\rangle.$$

Nechť existuje prvek $\langle b, z\rangle \in L_D$, takový, že $\langle a, y\rangle \wedge \langle b, z\rangle = \langle 0, 0_D\rangle$. Pak ale $b \leq a'$, z čehož plyne $z \leq d_b \leq d_{a'}$, tedy $\langle b, z\rangle \leq \langle a', d_{a'}\rangle$.

Stoneova identita:

$$\langle a, y\rangle^* \vee \langle a, y\rangle^{**} = \langle a', d_{a'}\rangle \vee \langle a, d_a\rangle = \langle a' \vee a, d_{a'} \vee d_a\rangle = \langle 1, 1\rangle,$$

pro každé $\langle a, y\rangle \in L_D$.

Skeleton:

$$S(L_D) = \{\langle a, d_a\rangle \mid a \in S\}.$$

Množina hustých prvků:

$$D(L_D) = \{\langle 1, d\rangle \mid d \in D\}.$$

Zobrazení φ^{L_D}:

$$\varphi^{L_D}(\langle a, x\rangle) = \{\langle 1, d\rangle \mid d \in \varphi(a)\}.$$

L_D je tedy Stoneova algebra. Trojice asociovaná se Stoneovou algebrou L_D je $\langle S(L_D), D(L_D), \varphi^{L_D}\rangle$. Ukážeme, že je tato trojice izomorfní s abstraktní trojicí $\langle S, D, \varphi\rangle$.

Trojice $\langle S, D, \varphi\rangle$ a $\langle S(L_D), D(L_D), \varphi^{L_D}\rangle$ jsou izomorfní, právě když existují izomorfismy $f : S \to S(L_D)$ a $g : D \to D(L_D)$ takové, že diagram 4.2 komutuje.

V diagramu 4.2 zobrazení $\tilde{g}$ značí izomorfismus svazů $F(D)$ a $F(D(L_D))$ indukovaný zobrazením g.

Důkaz. Definujme zobrazení $f : S \to S(L_D)$ předpisem

$$f(a) = \langle a, d_a \rangle,$$

a zobrazení $g : D \to D(L_D)$ předpisem

$$g(d) = \langle 1, d \rangle.$$

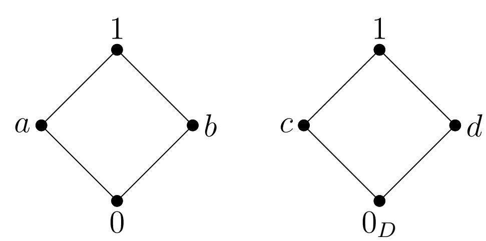
Zobrazení f a g jsou jistě izomorfismy. Zbývá tedy dokázat, že diagram 4.2 komutuje. Nechť $a \in S$. Pak

$$a \overset{\varphi}{\mapsto} \varphi(a) \overset{\tilde{g}}{\mapsto} g(\varphi(a)) = \{\langle 1, x \rangle \mid x \in \varphi(a)\},$$

$$a \overset{f}{\mapsto} \langle a, d_a \rangle \xmapsto{\varphi^{L_B}} \{\langle 1, x \rangle \mid \langle 1, x \rangle \geq \langle a', d_{a'} \rangle\} = \{\langle 1, x \rangle \mid x \in \varphi(a)\}.$$

Platí tedy, že $\langle S, D, \varphi \rangle \cong \langle S(L_D), D(L_D), \varphi^{L_D} \rangle$. $\square$

Příklad 4. Nechť S je čtyřprvková Booleova algebra a D je ohraničený distributivní svaz (viz obrázek níže).



S D

Definujme zobrazení $\varphi : S \to F(D)$ předpisem

$$\varphi(0) = \{1\}, \quad \varphi(b) = [c),$$
$$\varphi(a) = [d), \quad \varphi(1) = D.$$

Množinu L_D jsme v důkazu konstrukce podle T. Katriňáka měli definovanou následovně:

$$L_D = \{\langle a, y \rangle \mid a \in S, y \in D, y \leq d_a\}.$$

V našem případě je množina L_D ve tvaru:

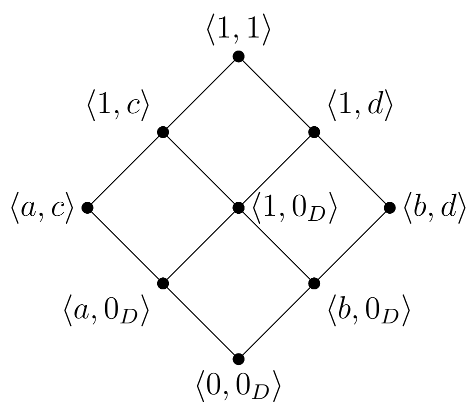
$$L_D = \{\langle 0, 0_D \rangle, \langle a, 0_D \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, 0_D \rangle, \langle b, d \rangle, \langle 1, 0_D \rangle, \langle 1, c \rangle, \langle 1, d \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}.$$

L_D je podle kapitoly 4.4 Stoneova algebra (viz obr. 4.5), kde:

$$\langle 0, 0_D\rangle^* = \langle 1, 1\rangle,$$
$$\langle a, 0_D\rangle^* = \langle a, c\rangle^* = \langle b, d\rangle,$$
$$\langle b, 0_D\rangle^* = \langle b, d\rangle^* = \langle a, c\rangle,$$
$$\langle 1, 0_D\rangle^* = \langle 1, c\rangle^* = \langle 1, d\rangle^* = \langle 1, 1\rangle^* = \langle 0, 0_D\rangle.$$

Všimněme si, že

$$S(L_D) = \{\langle 0, 0_D\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle 1, 1\rangle\} = \{\langle a, d_a\rangle \mid a \in S\},$$
$$D(L_D) = \{\langle 1, 0_D\rangle, \langle 1, c\rangle, \langle 1, d\rangle, \langle 1, 1\rangle\} = \{\langle 1, y\rangle \mid y \in D\},$$
$$\varphi^{L_D}(\langle a, d_a\rangle) = \{\langle 1, y\rangle \mid y \in \varphi\}.$$



Obrázek 4.5: Stoneova algebra L_D

Trojice $\langle S, D, \varphi\rangle$ a $\langle S(L_D), D(L_D), \varphi^{L_D}\rangle$ jsou izomorfní, právě když existují izomorfismy $f : S \to S(L_D)$ a $g : D \to D(L_D)$, takové, že diagram 4.2 komutuje. Definujme tedy zobrazení $f : S \to S(L_D)$ předpisem

$$f(a) = \langle a, d_a\rangle.$$

Toto zobrazení je jistě izomorfismus. Dále definujme zobrazení $g : D \to D(L_D)$ předpisem

$$g(d) = \langle 1, d\rangle.$$

Toto zobrazení je jistě také izomorfismus.

Zbývá dokázat, ze diagram 4.2 komutuje.

$$0 \overset{\varphi}{\mapsto} \{1\} \overset{\tilde{g}}{\mapsto} \{\langle 1,1\rangle\}, \qquad a \overset{\varphi}{\mapsto} [d) \overset{\tilde{g}}{\mapsto} \{\langle 1,d\rangle, \langle 1,1\rangle\},$$

$$0 \overset{f}{\mapsto} \langle 0, 0_D\rangle \xmapsto{\varphi^{L_D}} \{\langle 1,1\rangle\}, \qquad a \overset{f}{\mapsto} \langle a, c\rangle \xmapsto{\varphi^{L_D}} \{\langle 1,d\rangle, \langle 1,1\rangle\},$$

$$1 \overset{\varphi}{\mapsto} D \overset{\tilde{g}}{\mapsto} \{\langle 1,0_D\rangle, \langle 1,c\rangle, \langle 1,d\rangle, \langle 1,1\rangle\}, \qquad b \overset{\varphi}{\mapsto} [c) \overset{\tilde{g}}{\mapsto} \{\langle 1,c\rangle, \langle 1,1\rangle\},$$

$$1 \overset{f}{\mapsto} \langle 1, 1\rangle \xmapsto{\varphi^{L_D}} \{\langle 1,0_D\rangle, \langle 1,c\rangle, \langle 1,d\rangle, \langle 1,1\rangle\}, \quad b \overset{f}{\mapsto} \langle b, d\rangle \xmapsto{\varphi^{L_D}} \{\langle 1,c\rangle, \langle 1,1\rangle\}.$$

Trojice $\langle S, D, \varphi\rangle$ a $\langle S(L_D), D(L_D), \varphi^{L_D}\rangle$ jsou tedy izomorfní.

Kapitola 5

Izomorfismy Stoneových algeber

Obsahem této kapitoly je dokázání vztahů mezi Stoneovými algebrami sestrojenými v předešlé kapitole.

5.1. Izomorfismus původní a Grätzerovy algebry

V kapitole 4.1 jsme si ukázali, jak ze Stoneovy algebry L vytvořit trojici $\langle S(L), D(L), \varphi^L\rangle$, následně jsme si v kapitole 4.2 ukázali, jak z abstraktní trojice $\langle S, D, \varphi\rangle$ vytvořit Stoneovu algebru L_1. Nyní z těchto tvou poznatků dokážeme větu 4.1.2. Idea důkazu bude dokázat, že je Stoneova algebra L izomorfní se Stoneovou algebrou L_1 sestrojenou podle 4.2. V tomto důkazu budeme však vycházet z toho, že jsme algebru L_1 sestrojili z trojice $\langle S(L), D(L), \varphi^L\rangle$.
Grätzerova algebra je tedy dána takto :

$$L_1 = \{\langle a, x\rangle \mid a \in S(L), x \in \varphi^L(a)\},$$
$$\langle a, x\rangle \leq \langle b, y\rangle \iff a \leq b, x \leq \varrho_a(y),$$
$$\langle a, x\rangle^* = \langle a', 1\rangle, \qquad \text{kde } a' \text{ je komplement prvku } a \in S,$$
$$[\varrho_a(x)) = \varphi(a) \cap [x), \text{ kde } a \in S(L), x \in D(L).$$

Definujme zobrazení $f : L_1 \to L$ předpisem:

$$f(\langle a, x\rangle) = a \wedge x.$$

Důkaz. Nejdříve dokážeme, že je toto zobrazení izomorfismus.
f je surjektivní zobrazení. Nechť $z \in L$, pak $z^{**} \in S(L)$ a $z \vee z^* \in D(L)$, protože $(z \vee z^*)^* = z^* \wedge z^{**} = 0$. Navíc $z \vee z^* \geq z^*$ tzn. $\langle z^{**}, z \vee z^*\rangle \in L_1$. Dále

$$f(\langle z^{**}, z \vee z^* \rangle) = z^{**} \wedge (z \vee z^*) = (z^{**} \wedge z) \vee (z^{**} \wedge z^*) = z.$$

Tímto jsme dokázali, že je zobrazení f surjektivní.

Dále f je injektivní. Označme $f(\langle a, x \rangle) = c$ a $f(\langle b, y \rangle) = d$. Předpokládejme, že $c = d$. Avšak

$$c^{**} = (a \wedge x)^{**} = a^{**} \wedge x^{**} = a,$$
$$c \vee c^* = (a \wedge x) \vee (a^* \vee x^*) = x \vee a^* = x,$$

podobně pro $d^{**} = b$ a $d \vee d^* = y$. Jenže $c = d$, tedy i $c^{**} = d^{**}$ a $c^* = d^*$. Celkově $\langle a, x \rangle = \langle b, y \rangle$.

Jako další dokážeme, že je zobrazení f izotonní, tedy:

$$\langle a, x \rangle \leq \langle b, y \rangle \Rightarrow f(\langle a, x \rangle) \leq f(\langle b, y \rangle).$$

Předpokládejme, že $\langle a, x \rangle \leq \langle b, y \rangle$, to tedy znamená, že:

$$a \leq b \quad \text{a} \quad x \leq \varrho_a(y).$$

Označme opět $f(\langle a, x \rangle) = c$ a $f(\langle b, y \rangle) = d$. Pak ovšem

$$c \vee c^{**} \leq d \vee c^{**} \quad \text{a} \quad c \vee c^* \leq d \vee c^*,$$

tedy

$$(c \vee c^{**}) \wedge (c \vee c^*) \leq (d \vee c^{**}) \wedge (d \vee c^*)$$
$$c \vee (c^{**} \wedge c^*) \leq d \vee (c^{**} \wedge c^*)$$
$$c \leq d.$$

Tímto jsme dokázali, že je zobrazení f izotonní.

Dále dokážeme, že je zobrazení f^{-1} izotonní:

$$f(\langle a, x \rangle) \leq f(\langle b, y \rangle) \Rightarrow \langle a, x \rangle \leq \langle b, y \rangle.$$

Předpokládejme, že $f(\langle a, x \rangle) \leq f(\langle b, y \rangle)$. Označme $f(\langle a, x \rangle) = c$ a $f(\langle b, y \rangle) = d$, tedy $c \leq d$. Dále:

$$d^* \leq c^*, c^{**} \leq d^{**} \Rightarrow a \leq b.$$

Navíc $c \vee c^* \leq d \vee c^*$, což je ekvivalentní s $x \leq \varrho_a(y)$. Celkově tedy dostáváme, že $\langle a, x \rangle \leq \langle b, y \rangle$.

Zbývá nám dokázat $f(\langle a, x \rangle^*) = f(\langle a, x \rangle)^*$. Pseudokomplement prvku $\langle a, x \rangle$ je ve tvaru $\langle a', 1 \rangle$. Platí tedy:

$$\begin{aligned} f(\langle a, x \rangle^*) &= f(\langle a', 1 \rangle) = a' \wedge 1 = a' = a' \vee 0 \\ &= a' \vee x^* = (a \wedge x)^* = f(\langle a, x \rangle)^*. \end{aligned}$$

Tímto jsme dokázali, že je zobrazení $f : L_1 \to L$ izomorfismus. $\square$

5.2. Izomorfismus Katriňákovy a Grätzerovy algebry

V první části této kapitoly si popíšeme vztah mezi Stoneovou algebrou sestrojenou z abstraktní trojice $\langle S, D, \varphi \rangle$ podle Grätzera (4.2) a podle Katriňáka (4.3). Grätzerova algebra je dána takto:

$$\begin{gathered} L_1 = \{\langle a, x \rangle \mid a \in S, x \in \varphi(a)\}, \\ \langle a, x \rangle \leq \langle b, y \rangle \quad \iff \quad a \leq b \quad \text{a} \quad x \leq \varrho_a(y), \\ \langle 0, 1 \rangle \leq \langle a, x \rangle \leq \langle 1, 1 \rangle, \\ \langle a, x \rangle^* = \langle a', 1 \rangle. \end{gathered}$$

Katriňákova algebra je dána takto:

$$\begin{gathered} L_2 = \{\langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle \mid a \in S, x \in D\}, \\ \langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle \leq \langle b, \varphi(b') \vee [y) \rangle \iff a \leq b \quad \text{a} \quad \varphi(b') \vee [y) \subseteq \varphi(a') \vee [x), \\ \langle 0, D \rangle \leq \langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle \leq \langle 1, \{1\} \rangle, \\ \langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle^* = \langle a', \varphi(a) \rangle. \end{gathered}$$

Definujme si zobrazení $f : L_1 \to L_2$ předpisem

$$f(\langle a, x \rangle) = \langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle.$$

Nyní dokážeme, že je toto zobrazení izomorfismus.

Důkaz. f je injektivní zobrazení. Označme $f(\langle a, x \rangle) = \langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle$ a $f(\langle b, y \rangle) = \langle b, \varphi(b') \vee [y) \rangle$. Předpokládejme, že $\langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle = \langle b, \varphi(b') \vee [y) \rangle$, tzn.

$$a = b \quad \text{a} \quad \varphi(a') \vee [x) = \varphi(b') \vee [y).$$

Pokračujme takto

$$\begin{gathered} (\varphi(a') \vee [x)) \cap \varphi(a) = (\varphi(b') \vee [y)) \cap \varphi(a) \\ \varphi(a \wedge a') \vee [\varrho_a(x)) = \varphi(a \wedge a') \vee [\varrho_a(y)) \\ [\varrho_a(x)) = [\varrho_a(y)), \end{gathered}$$

jenže $x, y \in \varphi(a)$, celkově $x = y$. Tímto jsme dokázali, že je zobrazení f injektivní.

f je surjekce. Nechť $\langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle \in L_2$ pro nějaké $a \in S, x \in D$. Dále

$$\begin{aligned}
(\varphi(a') \vee [x)) \cap \varphi(a) &= (\varphi(a') \cap \varphi(a)) \vee (\varphi(a) \cap [x)) \\
&= \varphi(a' \wedge a) \vee [\varrho_a(x)) \\
&= \{1\} \vee [\varrho_a(x)) = [\varrho_a(x)).
\end{aligned}$$

Víme, že $\varrho_a(x) \in \varphi(a)$, tedy $\langle a, \varrho_a(x) \rangle \in L_1$.
Zbývá nám dokázat, že $f(\langle a, \varrho_a(x) \rangle) = \langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle$.

$$\begin{aligned}
f(\langle a, \varrho_a(x) \rangle) &= \langle a, \varphi(a') \vee [\varrho_a(x)) \\
&= \langle a, \varphi(a') \vee (\varphi(a) \cap [x)) \rangle \\
&= \langle a, \varphi(a' \vee a) \cap (\varphi(a') \vee [x)) \rangle \\
&= \langle a, D \cap (\varphi(a') \vee [x)) \rangle \\
&= \langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle.
\end{aligned}$$

Avšak $a \in S$ a $x \in D$, celkově $\langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle \in L_2$. Tímto jsme dokázali, že zobrazení f je surjekce.

Jako další dokážeme, že je zobrazení f izotonní, tedy:

$$\langle a, x \rangle \leq \langle b, y \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle \leq \langle b, \varphi(b') \vee [y) \rangle. \tag{5.1}$$

Předpokládejme, že platí levá strana, tzn. $\langle a, x \rangle \leq \langle b, y \rangle$. Z tohoto plyne:

$$a \leq b \quad \text{a} \quad x \leq \varrho_a(y),$$

neboli

$$\varphi(a) \cap [y) \subseteq [x).$$

Pokračujme následovně:

$$\begin{aligned}
(\varphi(a) \cap [y)) \vee \varphi(a') &\subseteq \varphi(a') \vee [x) \\
\varphi(a' \vee a) \cap (\varphi(a') \vee [y)) &\subseteq \varphi(a') \vee [x) \\
\varphi(a') \vee [y) &\subseteq \varphi(a') \vee [x).
\end{aligned}$$

Jenže z $a \leq b$ plyne $b' \leq a'$, dále $\varphi(b') \subseteq \varphi(a')$, tedy

$$\varphi(b') \vee [y) \subseteq \varphi(a') \vee [y) \subseteq \varphi(a') \vee [x).$$

Tímto jsem dokázali platnost (5.1).

Nyní dokážeme, že f^{-1} je izotonní, tedy:

$$\langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle \leq \langle b, \varphi(b') \vee [y) \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle a, x \rangle \leq \langle b, y \rangle. \tag{5.2}$$

Předpokládejme, že platí levá strana, tzn. $\langle a, \varphi(a') \vee [x) \rangle \leq \langle b, \varphi(b') \vee [y) \rangle$. Z tohoto plyne:

$$a \leq b \quad \text{a} \quad \varphi(b') \vee [y) \subseteq \varphi(a') \vee [x).$$

Pokračujme tedy takto:

$$(\varphi(b') \vee [y)) \cap \varphi(a) \subseteq (\varphi(a') \vee [x)) \cap \varphi(a)$$
$$\varphi(b' \wedge a) \vee (\varphi(a) \cap [y)) \subseteq \varphi(a' \wedge a) \vee (\varphi(a) \cap [x)),$$

avšak z $a \leq b$ plyne $b' \leq a'$. Navíc $b' \wedge a \leq a' \wedge a = 0$, celkově $b' \wedge a = 0$, tedy $\varphi(b') \cap \varphi(a) = \varphi(0) = \{1\}$. Dále

$$\{1\} \vee (\varphi(a) \cap [y)) \subseteq \{1\} \vee (\varphi(a) \cap [x))$$
$$(\varphi(a) \cap [y)) \subseteq (\varphi(a) \cap [x))$$
$$[\varrho_a(y)) \subseteq [\varrho_a(x))$$
$$\varrho_a(x) \leq \varrho_a(y),$$

navíc $\varrho_a(x) \geq x$, dohromady

$$x \leq \varrho_a(x) \leq \varrho_a(y).$$

Tímto jsme dokázali platnost (5.2).

Dále dokážeme, že zobrazení f zachovává pseudokomplement. Nechť $\langle a, x \rangle \in L_1$, pro libovolné $a \in S, x \in \varphi(a)$.

$$f(\langle a, x \rangle^*) = f(\langle a', 1 \rangle) = \langle a', \varphi(a) \vee [x) \rangle = \langle a', \varphi(a) \rangle.$$

Nejmenší prvek

$$f(\langle 0, 1 \rangle) = \langle 0, \varphi(0) \vee \{1\} \rangle = \langle 0, D \rangle.$$

Největší prvek

$$f(\langle 1, 1\rangle) = \langle 1, \varphi(1) \vee \{1\}\rangle = \langle 1, \{1\}\rangle.$$

Tímto jsme dokázali, že je zobrazení f izomorfismus. $\square$

Předpokládejme nyní, že máme dánu abstraktní trojici $\langle S, D, \varphi\rangle$, kde D je ohraničený distributivní svaz. Dokážeme, že Stoneova algebra sestrojená v kapitole 4.2 je izomorfní se Stoneovou algebrou sestrojenou v kapitole 4.4. Připomeňme, že Stoneova algebra v 4.2 je dána takto:

$$\begin{gathered} L = \{\langle a, x\rangle \mid a \in S, x \in \varphi(a)\}, \\ \langle a, x\rangle \leq \langle b, y\rangle \iff a \leq b \quad \text{a} \quad x \leq \varrho_a(y), \\ \langle a, x\rangle^* = \langle a', 1\rangle, \text{ kde } a' \text{ je komplement } a, \\ \langle 0, 1\rangle \leq \langle a, x\rangle \leq \langle 1, 1\rangle. \end{gathered}$$

Víme, že D je ohraničený distributivní svaz, tedy $\varphi(a) = [\varrho_a(0_D))$, z čehož plyne $x \in [\varrho_a(0_D))$, celkově $x \geq \varrho_a(0_D) = d_{a'}$.

Stoneova algebra v kapitole 4.4 je dána takto:

$$\begin{gathered} L_D = \{\langle a, y\rangle \mid a \in S, y \in D, y \leq d_a\}, \\ \langle a, y\rangle \leq \langle b, z\rangle \iff a \leq b \quad \text{a} \quad y \leq z, \\ \langle a, y\rangle^* = \langle a', d_{a'}\rangle, \text{ kde } a' \text{ je komplement } a, \\ \langle 0, 0_D\rangle \leq \langle a, y\rangle \leq \langle 1, 1\rangle. \end{gathered}$$

Připomeňme, že $y = d_a \wedge x$, kde $x \in D$.

Definujme zobrazení $h : L \to L_D$ předpisem:

$$h(\langle a, x\rangle) = \langle a, d_a \wedge x\rangle.$$

Dokážeme, že je toto zobrazení izomorfismus.

Důkaz. Nechť $h(\langle a, x\rangle) = \langle a, d_a \wedge x\rangle = \langle b, d_b \wedge x\rangle = h(\langle b, y\rangle)$, tzn. $a = b$ a $d_a \wedge x = d_b \wedge y$. Dále

$$\begin{gathered} (d_a \wedge x) \vee d_{a'} = (d_a \wedge y) \vee d_{a'} \\ (d_a \vee d_{a'}) \wedge (x \vee d_{a'}) = (d_a \vee d_{a'}) \wedge (d_{a'} \vee y) \\ d_{a'} \vee x = d_{a'} \vee y, \end{gathered}$$

avšak $x \geq d_{a'}$, podobně $y \geq d_{a'}$, celkově $x = y$. Tímto je dokázáno, že je zobrazení h injektivní.

Předpokládejme, že $\langle a, y\rangle \in L_D$ pro nějaké $a \in S$ a $y \in D$, $y \leq d_a$. Avšak $y = d_a \wedge x$. Dále $(d_a \wedge x) \vee d_{a'} = d_{a'} \vee x$, tedy $\langle a, d_{a'} \vee x\rangle \in L$. Zbývá dokázat, že $h(\langle a, d_{a'} \vee x\rangle) = \langle a, d_a \wedge x\rangle$. To je ovšem triviální neboť $(d_{a'} \vee x) \wedge d_a = (d_{a'} \wedge d_{a'}) \vee (x \wedge d_a) = x \wedge d_a$. Tímto je dokázáno, že je zobrazeni h surjektivní.

Jako další dokážeme, že je zobrazení h izotonní, tedy:

$$\langle a, x\rangle \leq \langle b, y\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle a, d_a \wedge x\rangle \leq \langle b, d_b \wedge y\rangle. \tag{5.3}$$

Předpokládejme, že platí levá strana, tzn. $a \leq b$ a $x \leq \varrho_a(y)$. Pokračujme takto:

$$\begin{aligned}
x \wedge d_a &\leq (d_{a'} \vee y) \wedge d_a \\
x \wedge d_a &\leq (d_{a'} \wedge d_a) \vee (y \wedge d_a) \\
x \wedge d_a &\leq y \wedge d_a,
\end{aligned}$$

jenže $a \leq b$, tedy $b' \leq a$, tzn. $d_a \leq d_b$, dohromady $x \wedge d_a \leq d_b \wedge y$. Tímto jsme dokázali platnost (5.3).

Dále ukážeme, že je zobrazení h^{-1} izotonní, tedy:

$$\langle a, d_a \wedge x\rangle \leq \langle b, d_b \wedge y\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle a, x\rangle \leq \langle b, y\rangle. \tag{5.4}$$

Předpokládejme, že platí levá strana, tzn. $a \leq b$ a $d_a \wedge x \leq d_b \wedge y$. Pokračujme následovně:

$$\begin{gathered}
(d_a \wedge x) \vee (d_{a'} \leq ((d_b \wedge y) \vee (d_{a'} \\
(d_a \vee d_{a'}) \wedge (x \vee d_{a'}) \leq (d_b \vee d_{a'}) \wedge (d_{a'} \vee y),
\end{gathered}$$

jenže z $a \leq b$ plyne $b' \leq a'$. Dále $b' \wedge a \leq a' \wedge a = 0$, celkově $b' \wedge a$, z čehož plyne, že $d_b \wedge d_{a'} = 1$. Dále tedy $x \vee d_{a'} \leq d_{a'} \vee y$. Avšak $x \leq x \vee d_{a'}$, dohromady $x \leq \varphi_a(y)$. Tímto jsme platnost (5.4).

Zbývá dokázat, že zobrazení h zachovává pseudokomplement, nejmenší prvek a prvek největší.

$$h(\langle a, x\rangle^*) = h(\langle a', 1\rangle) = \langle a', d_{a'}\rangle = h(\langle a, x\rangle)^*,$$

$$h(\langle 0, 1\rangle) = \langle 0, 0_D\rangle,$$

$$h(\langle 1, 1\rangle) = \langle 1, 1\rangle.$$

Tímto jsme dokázali, že je zobrazení h izomorfismus.

Zkombinujeme-li větu o jednoznačnosti (4.1.2) s větou o konstrukci (4.2.1), dostaneme zajímavý důsledek:

Důsledek 5.2.1. Dvě Stoneovy algebry jsou izomorfní, právě když jsou jejich asociované trojice izomorfní. Každá trojice je izomorfní s trojicí asociovanou se Stoneovou algebrou.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & L_1 \arrow[d] \\
\langle S(L), D(L), \varphi^L\rangle \arrow[r, "\cong"] \arrow[ur] & \langle S(L_1), D(L_1), \varphi^{L_1}\rangle
\end{tikzcd}$$

Obrázek 5.1: Důsledek věty o jednoznačnosti a věty o konstrukci

□

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo shrnout základní poznatky o pseudokomplementárních polosvazech a svazech a Stoneových algebrách, včetně tzv. „triple“ konstrukce.

První kapitola je věnována pseudokomplementárním polosvazům. Byla zde uvedena definice a základní vlastnosti. Následně byla zavedena množina skeleton, jakožto množina všech pseudokomplementů pseudokomplementárního polosvazu. Následně je dokázáno, že skeleton tvoří Booleovu algebru.

Ve druhé kapitole je zaveden pojem pseudokomplementární svaz a pseudokomplementární algebra (zkráceně p-algebra). Jsou zde popsány vlastnosti těchto struktur.

Třetí kapitola je věnována Stoneovým svazům a Stoneovým algebrám. Je zde zkonstruována množina hustých prvků, která spolu se skeletonem hraje klíčovou roli v dalších kapitolách.

Čtvrtá kapitola je rozdělena do čtyř částí. V první částí je popsáno, jak vytvořit trojici ze Stoneovy algebry. Dále je zde vyslovena věta, která říká, že každá Stoneova algebra je jednoznačně určena touto trojicí. Důkaz této věty je uveden v páté kapitole. Ve druhé a třetí části jsou popsány konstrukce Stoneových algeber z abstraktní trojice, jejichž vztah je popsán v poslední kapitole. Poslední část se zabývá konstrukcí Stoneovy algebry z abstraktní trojice, kde je množina hustých prvků ohraničená. Ukazuje se, že tato změna radikálně zlehčuje konstrukci Stoneovy algebry.

Páta kapitola je rozdělena na dvě části. V první části je dokázána věta o jednoznačnosti, ve druhé je dokázáno, že Stoneovy algebry sestrojené v první a druhé části čtvrté kapitoly jsou izomorfní. Zkombinujeme-li větu o jednoznačnosti s větou o konstrukci, pak získáme důsledek, že dvě algebry jsou izomorfní, právě když jsou izomorfní jejich trojice a že každá trojice je izomorfní s trojicí asociovanou se Stoneovou algebrou.

Literatura

[1] ADAMČÍK, Martin, 2010. On decidability of some classes of Stone algebras. *Študentská vedecká konferencia FMFI UK, Bratislava, 2010: Zborník príspevkov* [online]. Bratislava: Knižničné a edičné centrum, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, 410 s. ISBN 978-80-89186-69-3.

[2] BLYTH, T. S., 2005. *Lattices and Ordered Algebraic Structures* [online]. London: Springer-Verlag. Universitext. DOI: 10.1007/b139095. ISBN 1-85233-905-5

[3] FRINK, Orrin, 1962. Pseudo-complements in semi-lattices. *Duke Mathematical Journal* [online]. 29(4), 505-514. DOI: 10.1215/S0012-7094-62-02951-4. ISSN 0012-7094

[4] GRABOWSKI, Adam, 2015. Stone Lattices. *Formalized Mathematics* [online]. 23(4), 387-396. DOI: 10.1515/forma-2015-0031. ISSN 1898-9934

[5] GRÄTZER, George, 1978. *General Lattice Theory* [online]. Basel: Birkhäuser Basel. DOI: 10.1007/978-3-0348-7633-9. ISBN 978-3-0348-7635-3

[6] GEHRKE, Mai, Carol WALKER a Elbert WALKER, 1997. Stone Algebra Extensions with Bounded Dense Set. *Algebra Universalis* [online]. 37(1), 1-23. DOI: 10.1007/PL00000326. ISSN 0002-5240

[7] CHEN, C. C. a G. GRÄTZER, 1969. Stone Lattices. I: Construction Theorems. *Canadian Journal of Mathematics* [online]. 21, 884-894. DOI: 10.4153/CJM-1969-096-5. ISSN 0008-414X

[8] JÄRVINEN, Jouni, 2007. Lattice Theory for Rough Sets. PETERS, James F., Andrzej SKOWRON, Ivo DÜNTSCH, Jerzy GRZYMAŁA-BUSSE, Ewa ORŁOWSKA a Lech POLKOWSKI, ed. Transactions on Rough Sets VI [online]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, s. 400-498. Lecture Notes in Computer Science. DOI:10.1007/978-3-540-71200-8_22. ISBN 978-3-540-71198-8

[9] KATRIŇÁK, Tibor, 1973. A New Proof of the Construction Theorem for Stone Algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society* [online]. 40(1), 75-78. DOI: 10.2307/2038636. ISSN 00029939

[10] LÓPEZ, Antonio Fernández a María Isabel TOCÓN BARROSO, 2001. Pseudocomplemented Semilattices, Boolean Algebras, and Compatible Products. *Journal of Algebra* [online]. 242(1), 60-91. DOI: 10.1006/jabr.2001.8807. ISSN 00218693