UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Leona Salvetová

IV. ročník – prezenční studium

Obor: Učitelství matematiky-rodinné výchovy pro 2. stupeň ZŠ

Didaktické testy a jejich využití v matematické analýze

Diplomová práce

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Olomouc 2010

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jsem jen uvedenou literaturu.

V Olomouci dne 9. 4. 2010 Leona Salvetová

Děkuji vedoucí diplomové práce doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc. za vstřícnost, odborné vedení diplomové práce a poskytování rad k práci.

OBSAH

1 ÚVOD

Tento učební text, který právě držíte v rukou, je zaměřen na problematiku didaktického testování. Jedná se o metodu pedagogické diagnostiky, kterou každý učitel během profesní kariéry mnohokrát aplikuje ve vyučovacím procesu. Didaktické testy slouží jako nástroj k zjištění výsledků výuky, na jejichž základě se to vyučující snaží spravedlivě a objektivně hodnotit. Vyvolávají tak zpětnou vazbu nejen pro studenty tím, že si uvědomí úroveň jejich dosavadních vědomostí a znalostí, ale jsou i důležitým prostředkem pro učitele, poněvadž může odhalit konkrétní příčiny narušení procesu učení a zpětně se je pokusit napravit. Ať už to může být nedostatečná připravenost studentů na testování, nepřiměřená prezentace učiva ze strany vyučujícího nebo vysoká náročnost zvolených testových úloh aj. Z těchto důvodů je důležité, aby každý pedagog uměl sestavit kvalitní didaktický test s dodržením základních pravidel pro jeho tvorbu.

Další důležitou roli v didaktickém testování hraje způsob hodnocení výsledků výuky. Správné hodnocení studenta má velký motivační postoj k učení, naopak nesprávné hodnocení vyvolává negativní postoj.

Toto téma diplomové práce jsem si zvolila z důvodu kladného vztahu k disciplíně matematická analýza. Zároveň jsem chtěla, jako to budoucí učitel, sestavit soubor didaktických testů tvořených různými typy úloh, zaměřené na problematiku integrálního počtu a diferenciálního počtu funkcí více proměnných pro studenty prvního a druhého ročníku bakalářského studijního programu Matematika se zaměřením na vzdělávání na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci. Usnadnit tak práci vyučujícímu tuto oblast matematiky před vymýšlením zadání testů a uspořit volný čas k jeho opravování. Uvedený materiál tak může sloužit jako praktická příručka pro učitele.

Text je rozdělen na dvě hlavní části, na teoretickou a praktickou. První z nich věnuji pozornost nezbytným teoretickým poznatkům k dané problematice. Nejprve se snažím čtenáře seznámit se vznikem a vývojem didaktických testů, následně objasnit jejich funkčnost a uvést hlavní výhody a nevýhody, které si určitě po přečtení sami uvědomíte. Dále uvádím jednotlivé druhy didaktických testů s jejich charakteristikami, testové úlohy a vlastnosti didaktických testů nezbytné pro jejich vytvoření. Důležitou částí dokumentu pro začínajícího autora didaktického testu jsou kapitoly pět a šest, které informují a popisují v jednotlivých krocích, jak správně a kvalitně vytvořit didaktický test.

Praktickou část tvoří soubor kompletně připravených didaktických (záznamové archy, testová příručka, vyhodnocovací šablona) testů s výše uvedenou tématikou. Testy mají povahu nestandardizovaných testů, které jsou připravovány dokonaleji s tím, že jsou obohaceny o testovou příručku. Záznamové archy a vyhodnocovací šablony k daným testům přísluší kapitole věnované přílohám.

2 CÍL

Hlavním přínosem diplomové práce je sestavení testů pro studenty bakalářského studijního oboru Matematika se zaměřením na vzdělávání na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci, které budou ověřovat jejich znalosti z disciplín integrální počet funkce jedné proměnné a diferenciální počet funkcí více proměnných.

Dílčí cíle k této práci jsou vytvořit čtyři ekvivalentní varianty testů z jedné oblasti učiva, soubor kompletně připravených testů (záznamové archy, testová příručka, vyhodnocovací šablona), uvést nezbytnou teorii pro sestavení didaktických testů. Ukázat didaktické testy s využitím různých typů testových položek a různých způsobů jejich vypracování. Na základě toho stanovit, jak se dají tyto testy využít v matematické analýze.

3 STRUČNÁ HISTORIE TESTOVÁNÍ

Počátky systému školního zkoušení a hodnocení žáků se datují rokem 1599 ve studijních řádech jezuitských škol, avšak v českých zemích se ustálily až koncem 19. století. Tyto řády zavádějí věci, jako je klasifikační stupnice (z roku 1530 pochází první dochovaná písemná zmínka o použití klasifikace), důraz kladený na písemné zkoušky a katalog žáků vedený třídním učitelem. Pojmy písemné zkoušení a didaktický test nelze ztotožnit. Zásadní změnou se ukázalo zavedení maturity na gymnáziích v roce 1854 dle pruského vzoru. (Škoda, Doulík, 2007)

„Zde byl položen základ systému, který spočívá v tom, že hodnocení prospěchu žáků se stalo neodmyslitelnou součástí vyučování v systému tříd a učebních předmětů.“ (Škoda, Doulík, 2007, s. 8) Hodnocení a zkoušení žáků procházelo i dalšími rozhodujícími obraty. Tato ustálená součást vyučování byla vystavena různým tlakům. Jako první kritickou vlnu spojují Škoda a Doulík se jménem Lev Nikolajevič Tolstoj, který ve svobodné výchově odmítal zkoušení jako takové a preferoval, aby zpětnovazebná informace byla získána aplikací žákovských vědomostí v praktických situacích. V druhé kritické vlně bylo školní hodnocení a zkoušení vystaveno ze strany reformních pedagogických směrů. Kritizovali zejména nízkou objektivitu ústního zkoušení. (Škoda, Doulík, 2007, s. 8)

„Snaha po větší objektivitě zkoušení a po možnosti srovnávat vzájemně výsledky výuky mezi různými školami stála za prvním pokusem používat objektivního měřítka ke zjišťování úrovně vědomostí ve školní praxi, které nacházíme patrně u Fischera.“ Ten používal už v roce 1864 ve škole v Greenwichi tzv. Scale books (sbírky stupnic). Rice se v USA zasloužil o rozvoj metod zjišťování objektivního hodnocení vzdělávacích výsledků a od roku 1894 doporučoval při nácviku pravopisu používat objektivní měřítka pro srovnání výsledků, jichž bylo dosaženo ve více různých školách. První standardizovaný test vědomostí byl sestaven v roce 1908 v USA, jeho autorem byl Stone a od této doby došlo k rozvoji didaktických testů v řadě zemí světa. Od počátku 20. století se začala věnovat pozornost didaktickým testům. (Škoda, Doulík, 2007, s. 8)

„Po první světové válce byla situace pro rozvoj pedagogické i psychologické diagnostiky v českém školství příznivá.“ Zasloužil se o to Příhoda, který zahrnoval mezi problémy školního zkoušení objektivitu, srovnatelnost zkoušek a výkonnost zkušebního systému. Chlup v době první republiky vystupoval proti přeceňování didaktických testů a kritizoval inteligenční testy za málo odborně propracované, o deset let později vystoupil kriticky i proti didaktickým testům. Spor o didaktické testy se projevil ve dvou rovinách. V první rovině vedl spor ke zdokonalování didaktických testů a kombinaci testů s jinými zkušebními metodami, zatímco v druhé rovině vedl k nepoužívání didaktických testů při vyučování. (Škoda, Doulík, 2007, s. 9)

V době druhé světové válce a ani po ní se testování příliš v praxi nepoužívalo. Až po kontrole postojů ke společenským vědám (psychologii a sociologii) nastal postupný obrat v šedesátých letech minulého století. V roce 1965 se ve vysokoškolské učebnici pedagogiky autor zmiňuje o didaktických testech jako o metodách snižující subjektivnost hodnocení žáků. Didaktické testy se začínají objevovat při přijímacím řízení a později pronikly do školní praxe. Výsledkem změny negativních postojů k didaktickým testům bylo založení podniku (Psychodiagnostické a didaktické testy v Bratislavě v roce 1968), který vydává didaktické testy pro různé vyučovací předměty. V dnešní době lze předpokládat význam i budoucnost didaktických testů. (Škoda, Doulík, 2007)

4 FUNKCE TESTŮ

Řada z nás si pokládá otázky: K čemu nám didaktické testy slouží? Jaké funkce plní didaktické testy? V odborné literatuře se můžeme setkat s různým výčtem funkcí testů. Hališka (1999) je rozděluje následovně:

1. Funkce diagnostická:

a) vůči studentovi - co neumí, co je potřeba se doučit
- co umí (získání pocitu sebedůvěry)

b) vůči učiteli - objektivizace - zda studenty něco naučil či nenaučil, v jaké kvalitě, v jakém rozsahu,
- co by měl se studenty zopakovat a procvičit,
- případně co má studentům znovu vysvětlit.

2. Funkce motivační a stimulační:

- „očekávání zkoušky, jejichž výsledky budou v co největší míře eliminovat a subjektivní postoje učitele, vede u většiny k aktivaci učební činnosti a podněcování zájmu co nejlépe se připravit.“ (Hališka, 1999, s. 7)

3. Funkce klasifikační:

- je možné převést výsledky testů (skóre) pro všechny studenty na prospěchovou známku.

4. Funkce kontrolní:

a) vůči studentům - zda si osvojili učivo a jakým způsobem,
b) vůči učitelům - jakých výsledků se studenty dosahují.

5. Funkce prognostická:

- podle výsledků testů se dá do určité míry odhadnout finální vzdělání.

5 VÝHODY A NEVÝHODY TESTOVÁNÍ

Výhod a nevýhod testování existuje mnoho. Hališka (1999) považuje za výhody testování stejné podmínky pro všechny studenty při vypracování testu, stejný stupeň obtížnosti úkolů pro testované, ověření znalostí studentů z vybraných částí učiva během krátké doby. Výhody vidí i ve výsledcích testování, které pomáhají vyučujícím nacházet přesné nedostatky ve zvládnutí učiva, příčiny neúspěchů ve vlastní práci (např. nejasné vysvětlení učiva, nedostatečné procvičování) a tím se podle něj realizuje zpětná vazba ve vztahu ke studentům, ale i k práci učitele a objektivní hodnocení podle vypracovaných správných řešení, použitím zpracovaných norem se může stát prostředkem pro srovnávání vědomostí i dovedností studentů paralelních škol. „Snižuje se někdy značná subjektivita učitele při posuzování výsledků vyučování a učení." (1999, s. 8)

Mezi nevýhody testování zahrnuje postrádání mluveného projevu zkoušeného, neumožnění sledovat různé reakce studenta během zkoušky, projevy jeho chování. Problém ale vidí i v nemožnosti pomáhat studentovi při řešení obtížnějších úloh, napovědět mu způsob řešení, připomenout dříve předvedený pokus. Podle Hališky „plně nerozvíjíme samostatné tvůrčí myšlení". Příprava testů a jejich vyhodnocování bývají při prvním použití pro vyučující časově náročnější. (1999, s. 8).

6 DIDAKTICKÝ TEST

Pojem didaktický test je definován v literatuře různě. V této kapitole uvádím pro ukázku jen několik definic didaktického testu. Dále se tato kapitola zabývá druhy testů a jejich vlastnostmi, které hrají nezbytnou roli pro jejich správné vytvoření.

„Didaktický test je vyzkoušený (ověřený) soubor opakovaně použitelných úkolů vybraných z celků učiva tak, aby z průběhu a výsledků jejich řešení bylo možno usuzovat na stupeň a kvalitu osvojení vymezeného didaktického (učebního) cíle u zkoušeného jedince nebo skupiny.“ (Smekal, Švec, Zajac, 1973, s. 9)

„Test obecně představuje zkoušku, jejíž podmínky jsou pro všechny testované jedince shodné a jejíž výsledky mají číselný charakter.“ Zdůrazňují důležitost didaktických testů v systému školního hodnocení za předpokladu, že jsou dobře utvořeny náležitě použity a jejich výsledky jsou správné a citlivě interpretovány. (Škoda, Doulík, 1973, s. 11)

Dle Smekala, Ševce a Zajace (1973) existuje spousta rozdílů mezi běžnou písemnou zkouškou a didaktickým testem. Jako první rozdíl uvádějí způsob zadání testu a opravování jeho výsledků. Pozitivní předností didaktického testu vidí ve velké časové úspoře při kontrole výsledků zkoušených pomocí vyhodnocovací šablony.

Chráska poukazuje na zúžené chápání významu pojmu didaktický test. „Učitelé v praxi za test (respektive didaktický test) považují někdy jen krátkou písemnou zkoušku, někdy také jen zkoušku, která je sestavena výhradně z úloh s výběrem odpovědí.“ Nepovažuje didaktický test jen jako zkoušku písemnou. Zdůrazňuje existenci a použití i jiných typů testů například testy psaní na stroji, testy řízení motorových vozidel. (1999, s. 12)

Tato kapitola podrobněji popisuje druhy testů a jejich charakteristiku nejen podle Byčkovkého, které zmiňuje Chráska (1999) ve svém díle, ale i Hališkovo dělení.

6.1 Druhy didaktických testů

Byčkovský při klasifikaci testů volí osm hledisek, které si uvedeme níže. (Chráska, 1999)

6.1.1 Měřená charakteristika výkonu

Jestliže didaktickým testem měříme rychlost, za kterou je student schopen provést určitý výkon, mluvíme o testech rychlosti. Pokud se testem zjišťuje kvalita (úroveň) výkonu, hovoříme o testech úrovně. (Chráska, 1999)

Testy rychlosti

U těchto testů rychlostí se zjišťuje, jak je schopen student rychle řešit určitý typ testových úloh. Obsahují velmi snadné úlohy a mají pevně stanovený časový limit pro řešení. Předpokládá se zvládnutí řešení úloh u všech zkoušených, liší se pouze rychlostí řešení. Příkladem testu rychlosti by mohl být např. test rychlosti čtení, ve kterém měříme, kolik slov za minutu je schopen student přečíst, při tom se nepřihlíží ke kvalitě čtení. (Chráska, 1999)

Testy úrovně

Na našich školách se v současné době používají testy blížící se testům úrovně. Časové omezení u testů úrovně bývá voleno tak, aby znamenalo přerušení práce jen pro ty nejpomalejší studenty. Výzkumy ukázaly, že tito studenti ani při prodloužení časového limitu nedosahují lepších vědomostí. Úlohy v těchto testech bývají zpravidla seřazeny se vzrůstající obtížností. Z toho důvodu pak pomalý student v okamžiku přerušení práce na testu začne řešit nejobtížnější úlohy. „Někdy i testy úrovně používají rychlosti jako vedlejšího kritéria pro hodnocení výkonu v testu.“ (Chráska, 1999, s. 14)

6.1.2 Stupeň dokonalosti přípravy testu a jeho příslušenství

Didaktické testy připravované důkladněji a s úplnějším vybavením, se označují jako standardizované testy. Naopak testy, u nichž nebyly důkladně realizovány všechny obvyklé kroky při přípravě a ověřování se nazývají nestandardizované testy. (Chráska, 1999)

Standardizované testy

Umožňují srovnávat určitou testovanou skupinu na škole s reprezentací určité věkové kategorie, aniž bychom znali dosažené výsledky testování jiných studentů. V tom spočívá jejich přednost, výhoda a vysoká platnost dosažených výsledků. Tyto testy vydávají specializované instituce (u nás donedávna Psychodiagnostika Bratislava). (Hališka, 1999)

„Součástí příslušenství standardizovaného testu je testová příručka (manuál), ze které se uživatel dozví o vlastnostech testu, o jeho správném použití atd." Bývá připraven profesionálně, je důkladně ověřen a obsahuje základní vlastnosti. Většinou je k dispozici i standard (testová norma), která slouží k hodnocení dosažených výkonů. (Chráska, 1999, s. 14)

Nestandardizované testy (učitelské, neformální)

Tyto didaktické testy nejsou realizovány obvyklými kroky při přípravě a ověřování testů standardizovaných. Tyto testy si učitelé připravují sami pro svou potřebu. U testů nestandardizovaných není k dispozici objektivně stanovený testový standard (testová norma). Testy, které jsou připravované dokonaleji než testy učitelské, ale standardizace není provedena beze zbytku, se označují termínem kvazistandardizované testy. Při konstrukci těchto testů se věnuje větší pozornost než u nestandardizovaných testů, bývají známy některé jejich vlastnosti a občas bývají k dispozici i standardy při hodnocení výsledků. (Chráska, 1999)

6.1.3 Povaha činnosti testovaného

„Dělení didaktických testů na kognitivní a psychomotorické vychází z dělení lidského učení do tří oblastí podle B. S. Blooma (učení kognitivní, afektivní, psychomotorické)." (Chráska, 1999, s. 15)

Test kognitivní

Jsou to didaktické testy měřící úroveň poznání u studentů. Příkladem kognitivních testů jsou například testy, ve kterých má student překládat text do cizího jazyka, řešit úlohy z matematiky. V současné pedagogické praxi se častěji užívají testy kognitivní než psychomotorické. (Chráska, 1999)

Test psychomotorický

Jedná se o didaktické testy, které zjišťují výsledky psychomotorického učení. Příkladem psychomotorického testu je test psaní na stroji. (Chráska, 1999)

6.1.4 Míra specifičnosti učení zjišťovaného testy výsledků výuky

Tyto testy se v pedagogické praxi vyskytují často. Měří to, co se studenti naučili v dané oblasti. (Chráska, 1999)

Test studijních předpokladů

„Testy studijních předpokladů (angl. Aptitude tests) měří úroveň obecnějších charakteristik jedince, které jsou potřebné k dalšímu studiu." Konstrukce takových testů je podstatně náročnější a vyžadují pedagogickou kvalifikaci učitele i psychologickou kvalifikaci. (Chráska, 1999, s. 15)

6.1.5 Interpretace výkonu testu

Podle způsobu interpretace výkonu testovaného rozlišujeme dva druhy testů a to testy rozlišující a testy ověřující. (Chráska, 1999)

Testy rozlišující (testy relativního výkonu)

Testy rozlišující bývají často označovány jako testy statisticko-normativní nebo NR testy (norm-referenced tests). Pomocí těchto testů se výkon studentů určuje vzhledem k populaci testovaných. „Základní ideou, o kterou se opírá koncepce rozlišujících didaktických testů, je snaha dosáhnout maximální možné objektivity a diferencovanosti hodnocení testových výkonů." Konstruují se tak, že umožňují rozhodnout, jakého výkonu v testu student dosáhl vzhledem k celé populaci, k níž patří. Tím se dá tedy posoudit, jestli konkrétní student ve srovnání s ostatními studenty je například „velmi slabý" atd. (Chráska, 1999, s. 23)

Testy ověřující (testy absolutního výkonu)

„Didaktické testy ověřující jsou často v literatuře označovány také jako kriteriální testy nebo CR testy (criterion-referenced tests)." Jejich úkolem je prověřit úroveň dovedností a vědomostí studenta ve vymezené části učiva. Výkon testovaného se nesrovnává s výkonem populace, ale vyjadřuje se vůči všem úlohám, které reprezentují učivo. Kritériem úspěchu je stanovený stupeň zvládnutí učiva. Požadují zejména u vybraných základních poznatků téměř úplné zvládnutí (četnost chyb musí zhruba odpovídat náhodě). Cílem je rozhodnout, zda student zvládl dané učivo či nikoli. Při konstrukci je základním problémem výběr učiva, které musí student zvládnout. Toto učivo se pak převádí do testových úloh. V naší pedagogické praxi se tento typ testů zatím téměř neužívá. (Chráska, 1999, s. 16)

6.1.6 Časové zařazení do výuky

Testy vstupní

Vstupní didaktické testy se zadávají na začátku výuky určitého celku učiva. Jejich cílem je postihnout úroveň dovedností a vědomostí důležité pro úspěšné zvládnutí daného celku učiva. (Chráska, 1999)

Testy průběžné

Průběžné didaktické testy se zadávají v průběhu výuky. Jejich úkolem je poskytnout učiteli zpětnovazební informace potřebné ke správnému řízení výuky. Zkouší jen malou část učiva a jejich posláním je sledovat, jak studenti dané učivo chápou, osvojují, přijímají. Často se o nich hovoří jako o formativních testech, které sledují proces formování dovedností a vědomostí studentů. Tyto testy slouží k hodnocení výuky. (Chráska, 1999)

Testy výstupní

Výstupní didaktické testy se zadávají buď na konci výukového období nebo na konci určitého celku. Poskytují informace potřebné k hodnocení studentů. Často se označují jako testy sumativní. (Chráska, 1999, s. 16)

6.1.7 Rozsah obsahového zaměření

Testy monotématické

Monotématické testy zkouší jediné téma učební látky. (Chráska, 1999)

Testy polytématické

Zkouší učivo několika tématických celků. Jsou náročnější na přípravu i konstrukci. (Chráska, 1999)

6.1.8 Stupeň objektivity skórování

Testy objektivně skórovatelné

Obsahují úlohy, u nichž lze rozhodnout, zda je student vyřešil správně či nesprávně. Skórování těchto testů může provádět jakákoliv osoba, někdy i stroj. Většina používaných didaktických testů se vyznačuje možností objektivního skórování. Z toho důvodu vznikla u části pedagogické veřejnosti nesprávná představa, že test je zkouška, která obsahuje objektivně hodnotitelé úlohy. (Chráska, 1999)

Testy subjektivně skórovatelné

„Subjektivně skórovatelné testy (označované často jako esej testy) obsahují úlohy, u nichž není možno stanovit jednoznačná pravidla pro skórování." Bývají tvořeny z otevřených širokých úloh, ve kterých student rozsáhlou odpovědí volně odpovídá na položenou otázku. Otevřené široké úlohy mohou zkoušet komplexnější vědomosti a dovednosti než úlohy objektivně skórovatelné. (Chráska, 1999, s. 17)

Hališka (1999) dělí testy z hlediska:

a) obsahu - na testy matematické, fyzikální, biologické atd.,
b) typu použitých testových položek - stejnotypové, různotypové,
c) možností použití - individuální, skupinové, hromadné,
d) účelu - diagnostické, kontrolní, ověřovací, klasifikační,
e) specifikace zjišťování vědomostí - testy celkových vědomostí, testy speciálně vybraných vědomostí, monotematické, polytematické, komplexní,
f) doby zadávání - testy vstupní, výstupní, průběžné,
g) užití slova - testy verbální, nonverbální, smíšené,
h) zaměření na učebními osnovami stanovené učivo - testy standardní, nestandardní,
i) způsobu zadávání a záznamu řešení položek - testy písemné, ústní, obrázkové, manipulační, smíšené.

6.2 Vlastnosti dobrého didaktického testu

Chráska (1999) mezi základní vlastnosti dobrého didaktického testu zahrnuje validitu, reliabilitu a praktičnost, na jejichž základě se stává test dobrým prostředkem měření výsledků výuky.

6.2.1 Validita didaktického testu

Pojem validita objasňují Škoda a Doulík jako platnost, funkčnost, adekvátnost. Definují ji slovy „validita nám odpovídá na otázku, zda skutečně měříme to, co se domníváme, že chceme měřit". (2007, s. 28)

Podle M. Řešátko (1975) při posuzování validity by měly být testy podrobeny kontrole podle typu položek a jejich správném zastoupení:

1. Položky, z nichž můžeme posoudit osvojení nejdůležitějších vědomostí, které je potřeba si zapamatovat.
2. Položky, pomocí nichž student prokáže dovednost využít nově osvojené vědomosti.
3. Položky, v nichž student prokáže, že dovede využít nové vědomosti, dovednosti začlenit do systému dříve nabytých.

6.2.1.1 Druhy validit

Škoda a Doulík (2007) rozdělují validitu na 3 druhy, které dále uvádím.

Obsahová validita

Obsahová validita se zabývá mírou, do jaké je test reprezentativním výběrem učiva, jehož znalost měříme. Tuto validitu považují za nejdůležitější typ validity při sestavování testů úspěšnosti studijních výsledků.

Chráska (1988) klade důraz na obsah úloh, který by měl být v těchto případech reprezentativním vzorkem zkoušeného učiva. Jejím kritériem je shoda obsahu testu s obsahem vyučování, tak jak jsou dány v učebních osnovách. Proto učitel musí vycházet z příslušných učebních osnov, příruček a učebnic.

Kriteriální validita

„Vyjadřuje míru, do jaké jsou testové výsledky v souladu s hodnotami určitého kritéria.“ Nabízejí možnost posuzovat ji matematicky na základě korelační analýzy. (Škoda, Doulík, 2007, s. 28)

Rozlišujeme dva druhy kriteriální validity:

a) Kriteriální validita souběžná

Porovnávaní kritérium je k dispozici ihned. Je to například korelace mezi výsledkem kratšího a delšího testu stejného učiva.

b) Kriteriální validita predikční

Její srovnávací kritérium je k dispozici až v budoucnosti. Příkladem může být test studijních předpokladů, u kterých se koreluje výsledek přijímacího testu s úspěšností studenta při studiu vyjádřená například průměrným prospěchem, výsledkem státní závěrečné zkoušky atd.

Konstruktová (teoretická) validita

„Vyjadřuje míru, nakolik je použitý didaktický test v souladu s teoriemi, ze kterých vychází výzkumný nástroj.“ (Škoda, Doulík, 2007, s. 28)

6.2.2 Reliabilita didaktického testu

Chráska vysvětluje pojem reliabilita jako spolehlivost a přesnost testu. „Spolehlivost spočívá v tom, že za týchž podmínek by měl poskytovat stejné (velmi podobné) výsledky.“ Reliabilitu považuje za ukazatel technické kvality testu. Dále vysvětluje, jakým způsobem se spolehlivost testu určuje, jaké metody výpočtu při ní používáme (např. Kuder-Richardsonův vzorec nebo tzv. metoda půlení). (1999, s. 18)

6.2.2.1 Kuder-Richardsonův vzorec

$$r_{k_r} = \left\{\frac{k}{k-1}\right\} \cdot \left\{1 - \left(\frac{\sum pq}{s^2}\right)\right\}$$

kde K_r je Kuder-Richardsonův koeficient reliability, k je počet položek testu, p je podíl studentů ve vzorku, kteří řešili určitou úlohu v testu správně, $q = 1 - p$, s^2 je rozptyl.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum n_i (x_i - \bar{x})^2$$

kde $\bar{x}$ je aritmetický průměr výsledků studentů v testu, n je celkový počet testovaných studentů, x_i jsou jednotlivé dosažené počty bodů, n_i počty studentů dosahujících výsledků x_i. (Chráska, 1999)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_i \cdot x_i$$

6.2.2.2 Metoda půlení

Podle Chrásky se dá metoda půlení použít jak pro testy úrovně, tak pro testy rychlosti.

Provádí se pomocí Spearmanova-Brownova vzorce:

$$r_{sb} = \frac{2 \cdot rp}{1 + rp}$$

kde r_{sb} je koeficient reliability, r_p je koeficient korelace mezi výsledky studentů v obou polovinách didaktického testu

$$r_p = \frac{n \sum x_L \cdot x_S - \sum x_L \cdot \sum x_S}{\sqrt{\left[n \sum x_L{}^2 - \left(\sum x_L\right)^2\right] \cdot \left[n \sum x_S{}^2 - \sum \left(x_S\right)^2\right]}}$$

r_p je koeficient korelace, x_L jsou výsledky studentů v polovině L (liché), x_S jsou výsledky studentů v polovině S (sudé). Princip metody půlení spočívá v rozdělení testu na dvě poloviny tak, že jednu polovinu tvoří úlohy s lichým pořadovým číslem a druhou polovinu testu tvoří úlohy se sudým pořadovým číslem. Z toho plyne první podmínka při použití metody půlení, což je sudý počet úloh. Druhou podmínkou je seřazení úloh dle vzrůstající obtížnosti. (1999)

Koníček, Malčík, Maťašeje a Mazurová (2007) určují míru spolehlivosti podle toho, jaké hodnoty koeficient nabývá. Jestliže nabývá hodnot od 0 (pro případ naprosté nespolehlivosti a nepřesnosti) až po hodnoty blízké 1 (pro případ dokonalé spolehlivosti a přesnosti didaktického testu). Pro pedagogickou diagnostiku se často požaduje koeficient reliability minimálně 0,8. Stupeň reliability závisí na počtu úloh v testu. U testů s vyšším počtem otázek a při výběrových odpovědí lze dosáhnout největší reliability. U testů s počtem úloh deset nebo méně, dosahuje koeficient hodnoty maximálně 0,6, proto správný didaktický test by měl mít zhruba deset úloh, jakož jeho dolní hranici.

Řešátko (1975) připomíná, že při konstrukci testu jde tedy o to, aby se vyloučily náhodné vlivy způsobující odlišnost výsledků testování při stejným podmínkách. Důvodem kolísání výsledků testu jsou subjektivní jevy závislé na zkoušené, např. jeho psychický zdravotní stav, fyzikální podmínky.

6.2.3 Objektivnost didaktického testu

Dle Smekala, Ševce a Zajace (1973) je didaktický test objektivní tehdy, pokud:

a) položky v testu jsou sestaveny tak, aby student mohl odpovídat jednoznačně na otázku
b) u jednotlivých odpovědí lze rozhodnout, zda jsou správné či chybné
c) celkový výkon téhož studenta je posuzován a interpretován dle určitého systému norem.

„Stupeň objektivnosti můžeme stanovit různými metodami, jejichž podstatou je výpočet korelačního koeficientu.“ (Smekal, Švec, Zajac, 1973, s. 15)

Uvádějí vzorec pro výpočet korelačního koeficientu:

$$R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N\left(N^2 - 1\right)}$$

kde R = symbol korelace, D = rozdíl v pořadí, které zaujímají prvky každé dvojice ve svém sloupci, N = počet párů hodnot. „Je-li $R = 0{,}00 - 0{,}20$, znamená to, že neexistuje souvislost nebo že je nepatrná, je-li $R = 0{,}20 - 0{,}40$, je souvislost nízká, je –li $R = 0{,}40 - 0{,}70$, jde o značnou souvislost a v případě $R = 0{,}70 - 1{,}00$ je souvislost vysoká nebo velmi vysoká.“ Pro úplnou objektivnost musí být korelační koeficient R= 1. (Smekal, Švec, Zajac, 1973, s. 69)

6.2.4 Senzibilita (citlivost) didaktického testu

Koníček, Malčík, Maťašeje a Mazurová považují didaktický test za citlivý tehdy, jestliže umožňuje zjistit i menší rozdíly v rozsahu kvalitě měřených vědomostí nebo dovedností studentů. Základním požadavkem na tvorbu didaktického testu je přiměřenost z hlediska délky a náročnosti testu. „Položky testu mají být přiměřené populaci, pro kterou test připravujeme." S délkou testu souvisí i doba na jeho vypracování. (Koníček, Malčík, Maťašeje, Mazurová, 2007, s. 16)

6.2.5 Praktičnost didaktického testu

Podle Škody a Doulíka (2007) praktičnost zahrnuje různá hlediska:

a) rychlost opravy a vyhodnocení testu
b) náklady na přípravu, zadání a vyhodnocení testu
c) počet forem testu k dispozici
d) kolikrát je test použitelný.

„Základní ideou je, že správný didaktický test má znamenat výraznou úsporu času ve srovnání s ostatními způsoby zkoušení." (Škoda, Doulík, 2007, s. 29)

Dle Koníčka, Malčíka, Maťašeje a Mazurové musí být oprava testu snadná a rychlá. „Za tímto účelem má být součástí testu vyhodnocovací šablona s uvedením norem pro klasifikaci." (2007, s. 17)

6.2.6 Ekonomičnost didaktického testu

Ekonomičností didaktického testu se společně zabývali Smekal, Švec a Zajac. Kromě časové úspory při testování, která vyplývá z praktičnosti testu, je dalším znakem ekonomičnosti možnost používat tzv. záznamové archy. Do těchto archů studenti zapisují řešení položek testu. Pak lze použít tyto testy opakovaně. „Je užitečné, když sestavený, ověřený a upravený didaktický test dá učitel rozmnožit a používá jej opakovaně." Tím je menší spotřeba papíru, protože studenti nevpisují své odpovědi přímo do textu. (1973, s. 17)

7 TVORBA DIDAKTICKÉHO TESTU

K tomu, abychom vytvořili kvalitní didaktický test, musíme znát postup, pomocí něhož docílíme požadované kvality. Tato část dokumentu věnuje značnou pozornost právě tomuto postupu a obsahuje doporučení při návrhu různých typů testových úloh.

„Chceme-li vytvořit didaktický test skutečně kvalitní, musíme věnovat dostatečnou pozornost také jeho plánování." Chráska doporučuje nezačínat navrhováním testových úloh. Tento postup vede k tomu, že se vytvoří testové úlohy, které vytvářejí nevyvážený didaktický test nepokrývající rovnoměrně celé učivo a zaměřuje se na pouhou reprodukci zapamatovaných poznatků. (1988, s. 17)

Tvrdí, že hlavní kroky nebo činnosti, které se doporučují při plánování a konstrukci standardizovaného testu jsou (Chráska, 1999):

1) plánování testu
2) konstrukce testu
3) ověřování testu.

7.1 Plánování testu

Chráska říká, že první otázku, kterou by si měl každý autor testu položit v etapě plánování je: „K jakému účelu má didaktický test sloužit?" Účelem testu může být zjištění výsledků výuky na konci tématického celku nebo na konci semestru, zjištění, jak studenti probírané učivo přijímají a chápou. (1999, s. 20)

Škoda a Doulík (2007) stanovili zásady při plánování testu, jsou to:

- určit účel testu, co, v jakém rozsahu, na jaké úrovni testovat
- vymezit a upřesnit obsah testu
- analyzovat učivo, jehož ovládnutí studentem chceme testem zjišťovat
- určit strukturu učiva
- určit počet úloh v testu - čím je více úloh v testu, tím je pak jeho výsledek méně ovlivněn náhodnými vlivy, minimum je 10 úloh
- určit úroveň osvojení poznatků - poměr úloh zaměřených na zapamatování a vyšší úrovně hierarchie kognitivních cílů je vhodné být v poměru 1:2 ve prospěch úloh testujících osvojení poznatků na vyšších úrovních dosažení kognitivních cílů.

Chráska (1999) doporučuje po ujasnění účelu testování rámcově vymezit obsah testu, který se v učitelské praxi nejčastěji provádí dvěma způsoby - technika specifikační tabulky a technika seznamu výukových cílů.

7.1.1 Technika specifikační tabulky

„Specifikační tabulka (kromě jiného) upřesňuje, jaká úroveň osvojení znalostí má být jednotlivými úlohami testu zkoušena.“ Dobrý didaktický test by neměl být zaměřený jen na pamětní osvojování učiva, nýbrž by měl zkoušet i porozumění poznatků, aplikace poznatků, analýzy a syntézy poznatků. U každé testové úlohy je potřeba, aby se autor zamyslel nad tím, co má úloha zkoušet, a snažit se úlohami postihnout v míře co největší vyšší cílové kategorie osvojování. Pomocí různé osvědčené taxonomie výukových cílů lze zjistit úroveň osvojení poznatků úlohy. Jednoduchou a srozumitelnou taxonomii výukových cílů pro vzdělávací oblast navrhl polský autor B. Niemerka. (Chráska, 1999, s. 21)

7.1.1.1 Taxonomie výukových cílů dle B. Niemerka

A/ Zapamatování poznatků

Této kategorie se dosáhne, jestliže je student schopen vybavit si určitá fakta, přičemž je nesmí mezi sebou zaměňovat. Typická aktivní slovesa**:** definovat, opakovat, napsat, reprodukovat, pojmenovat.

B/ Porozumění poznatkům

Student je schopen zapamatované poznatky předložit v jiné formě, než ve které si je zapamatoval, dovede poznatky uspořádat nebo zestručnit. Typická aktivní slovesa: jinak formulovat, objasnit, ilustrovat, odhadnout, přeložit, převést, vyjádřit vlastními slovy.

C/ Používání vědomostí v typových situacích

Student dovede použít vědomosti k řešení situací, které ve výuce již byly řešeny. Typická aktivní slovesa: aplikovat, použít, řešit, prokázat, načrtnout, diskutovat, vyzkoušet, demonstrovat, registrovat.

D/ Používání vědomostí v problémových situacích

Student dovede použít vědomostí k řešení problémových situací, které nebyly ve výuce doposud řešeny. Typická aktivní slovesa: rozhodnout, provést rozbor, kombinovat, vyvrátit, obhájit, prověřit, zhodnotit, posoudit.

7.1.1.2 Postup při sestavování specifikační tabulky

Chráska rozděluje postup při sestavování specifikační tabulky do třech po sobě následujících kroků, které zároveň čtenáři přibližuje konkrétněji.

Struktura učiva

Při sestavování specifikační tabulky se nejdříve určí téma, které chceme testem zkoušet, rozdělí se na dílčí části. Každé dílčí části se přiřadí určitá váha. (Chráska, 1999)

Počet úloh

O počtu úloh v testu rozhoduje mnoho okolností. „Na prvním místě je to požadavek dostatečné vysoké spolehlivosti a přesnosti, tj. reliability testu.“ Protože reliabilita roste s rostoucím počtem testových úloh, za dolní použitelnou hranici lze považovat zhruba 10 otázek. Každý test je také určen časovými možnostmi ve výuce. Nejdelší testy mívají čistý čas 35-40 minut. Monotématické didaktické testy bývají na 15-20 minut čistého času. Pro pochopení výkladu učitele se používají didaktické testy, které se zadávají na konci nebo na začátku hodiny a nepřesahují 10 minut. Počet úloh je také ovlivněn druhem používaných testových úloh. „U jednodušších otevřených úzkých úloh a u jednodušších úloh s výběrem odpovědí lze orientačně počítat s časem od 0,5 minuty do 1,5 minuty na jednu úlohu.“ (Chráska, 1999, s. 22)

Určení úrovně osvojení poznatků

„U každé části učiva je třeba uvážit, jakou úroveň osvojení poznatků mají úlohy zkoušet.“ Z hlediska rozvíjení myšlení studentů a z hlediska kvality osvojovaných vědomostí je žádoucí preferovat vyšší úrovně osvojení. Není normativně dáno, kolik úloh musí určitou úroveň osvojení zkoušet. Záleží vždy na úvaze autora testu, na daném učivu. Specifikační tabulka je základním vodítkem autora pro konstrukci didaktického testu.

„Na základě jejího zpracování získá představu o tom, na které části učiva se mají jednotlivé testové úlohy zaměřovat, i o tom, které cílové kategorie osvojení mají postihovat." (Chráska, 1999, s. 23)

7.1.2 Technika seznamu výukových cílů

Pomocí této techniky se učební látka, která má být testována, transformuje na seznam výukových cílů, jichž chceme ve výuce dosáhnout. „Přitom je třeba, aby vymezení cílů bylo zcela jednoznačné a výukové cíle byly kontrolovatelné. Při upřesňování obsahu testu postupujeme tak, že pro dané učivo formulujeme co největší počet výukových cílů. Snažíme se o to, aby žádný výukový cíl nezůstal opomenut, ale na druhé straně dbáme, aby v seznamu byly zahrnuty jen takové výukové cíle, na které je výuka skutečně zaměřena." Výukové cíle musí vyjadřovat určitý výkon studenta a kontrolovatelné. „Každý výukový cíl musí být zkoušen tolika úlohami, kolik odpovídá jeho výukovému významu." (Chráska, 1999, s. 24)

Výukový význam můžeme posoudit podle počtu hodin, které je nutné k jeho dosažení cíle nebo podle rozsahu učebního textu, který bylo nutno prostudovat pro splnění výukového cíle. Výukovým cílům lze přiřadit určitý počet testových úloh. Úrovně osvojení poznatků přímo vyplývají z formulovaných cílů a není třeba je stanovovat zvlášť. (Chráska, 1988)

7.2 Konstrukce didaktického testu

Chráska tuto etapu vyjadřuje slovy „ve fázi konstrukce didaktického testu se jedná především o vytvoření jednotlivých testových úloh a o vytvoření prvního návrhu (prototypu) didaktického testu". Autor je tedy postaven před závažným rozhodnutím, jaký typ úloh v didaktickém testu má použít, přičemž každý druh testových úloh má určité výhody i nevýhody. Jak zvolit správný typ úloh rozhoduje cíl, obsah učiva, materiální a technické podmínky, obliba určitého druhu testových úloh u autora testu. (Chráska, 1999, s. 25)

7.2.1 Návrh testových úloh

„Testovou úlohou rozumíme otázku, úkol nebo problém obsažený v testu.“ V literatuře se často místo pojmu testová úloha používá výraz testová položka nebo testový úkol, v praxi mluvíme o termínu otázka, příklad nebo úkol. Navrhování testových úloh je náročná činnost, k níž je potřeba zkušenost i náležité teoretické poučení. Dále by měl být autor testu odborníkem v předmětu, pro který test připravuje, měl by být dobrým pedagogem a psychologem, aby se uměl vcítit do pozice testovaných studentů. „V didaktických testech se používají různé typy úloh.“ (Chráska, 1999, s. 25)

7.2.1.1 Otevřené

7.2.1.1.1 Otevřené široké úlohy

Podle toho, jakým způsobem student odpovídá v testové úloze, se dělí úlohy na otevřené (v literatuře jsou někdy označovány jako úlohy s otevřenou odpovědí nebo volnou odpovědí) a na uzavřené (s nabízenou odpovědí, s nucenou volbou odpovědí). V otevřených širokých úlohách se požaduje od studenta rozsáhlejší odpověď, například na ½ strany nebo delší. Autor může požadovat pojednání na určité téma, vyřešení zadaného problému, popis konkrétního procesu. Rozsah odpovědi se studentovi naznačuje velikostí vynechaného místa v testovém zadání. „Jsou vhodné pro zkoušení vyšších úrovní osvojení učiva (např. řešení problémových situací apod.), zatímco pro zkoušení nižších úrovní osvojení učiva (např. zapamatování atd.) jsou výhodnější testy s úlohami objektivně skórovatelnými.“ (Chráska, 1999, s. 27)

Tyto testové úlohy se snadno navrhují, ale jejich hlavní nevýhodou je nemožnost objektivního skórování. „Při skórování širokých úloh se často postupuje tak, že za správné a úplné zodpovězení úlohy se přiřazuje určitý počet bodů (např.10).“ Za chybnou nebo chybějící část odpovědi se strhává určitý počet bodů. Testům vytvořených z otevřených širokých úloh říkáme esej testy. (Chráska, 1999, s. 27)

7.2.1.1.2 Úlohy se stručnou odpovědí

Dle Škody a Doulíka úlohy se stručnou odpovědí požadují od studenta, aby uvedl a vytvořil vlastní krátké odpovědi. „Tyto úlohy se dále dělí na úlohy produkční (short-answer) a úlohy doplňovací.“ (Škoda, Doulík, 2007, s. 16)

Mezi výhody úloh se stručnou odpovědí Chráska zahrnuje snadný návrh, neumožnění studentům tak lehce odhadnout správnou odpověď bez příslušných znalostí, jak je tomu u úloh s výběrem odpovědí. Naopak mezi nevýhody u úloh se stručnou odpovědí uvádí, že student mnohdy odpovídá správně, ale jinak, než si autor testu představoval. (1999)

„Tyto úlohy jsou při pečlivé formulaci otázek objektivně skórovatelné, vyhodnocení však vždy musí být prováděno odborníkem.“ Toto Škoda a Doulík vysvětlují tím, že může totiž dojít k situacím, kdy úloha je zodpovězena jen částečně dobře. (Škoda, Doulík, 2007, s. 16)

Škoda a Doulík (2007) doporučují při tvorbě úloh se stručnou odpovědí tyto zásady:

1. Úlohy používejte jen tehdy, lze-li odpovědět velmi stručně (nejlépe jedním údajem).
2. Úlohy formulujte zcela jasně a jednoznačně.
3. Nikdy nevyžadujte doslovné opakování textu z učebnice.
4. Uvažte předem všechny možné odpovědi. Pokud jich je příliš mnoho, raději úlohu nepoužívejte.
5. Ponechte v úlohách vždy dostatek místa pro uvedení odpovědi.
6. Dávejte přednost produkčním úlohám před doplňovacími. Pokud chcete použít doplňovací úlohy, dodržujte následující doporučení:
    a) Vynechávejte jen důležité a podstatné údaje.
    b) Z neúplné věty musí být patrné, co se má doplnit.
    c) Údaj, který se má doplnit, umísťuje pokud možno až na konec věty.
    d) Pokud se má doplnit několik údajů, vynechejte pro doplnění zhruba stejné místo.

7.2.1.2 Uzavřené

7.2.1.2.1 Úlohy dichotomické

U dichotomických testových úloh jsou studentovi nabízeny dvě alternativy odpovědí. Jedna z nich je správná a tu má označit. „Tyto úlohy bývají také často označovány jako úlohy s dvojčlennou volbou nebo jako alternativní úlohy (angl. True-false item).“ Dichotomické úlohy se snadno navrhují, což je jejich výhoda. Pro zvýšení věrohodnosti výsledků získaných testem s dichotomickými úlohami je třeba, aby test obsahoval dostatečný počet úloh. (Chráska, 1999, s. 29)

„Největší nevýhodou těchto úloh je vysoké riziko uhodnutí správné odpovědi, které činí 50 %.“ Z motivačních důvodů je vhodné zařadit jednu či dvě úlohy tohoto typu na začátek didaktického testu. (Škoda, Doulík, 2007, s. 17)

Chráska (1999) doporučuje pro návrh dichotomických úloh:

1. Tvrzení uváděné v úloze musí být jednoznačně správné nebo nesprávné.
2. Nepoužívejte příliš dlouhých tvrzení.
3. V tvrzeních nepoužívejte dvojího záporu.
4. V tvrzení nepoužívejte výrazů typu často, téměř, vždy, nikdy, zřídka apod.
5. Navrhujte zhruba stejný počet správných a nesprávných tvrzení.
6. Nepoužívejte vět vytržených z učebnice, ani je neobměňujte zařazením záporu.

7.2.1.2.2 Úlohy s výběrem odpovědí

„Úlohy s výběrem odpovědí (v literatuře označované také jako úlohy s vícečlennou či vícenásobnou odpovědí, úlohy polytomické, angl. Multiple-choice) vděčí za svoji teoretickou rozpracovanost především rozvoji programovaného učení (hlavně tzv. větvených programů).“ (Chráska, 1999, s. 30)

Podle Škody a Doulíka (2007) se tyto úlohy se skládají z kmene úlohy (určitý problém nebo otázka) a z nabízené odpovědi (existují v různých variantách).

Úlohy s výběrem odpovědí se vyskytují v didaktických testech v několika formách (Chráska, 1999):

A) *Úlohy typu „jedna správná odpověď“*

Základní formou je úloha, ve které student vybírá jednu správnou odpověď z několika nabídnutých alternativ.

B) *Úlohy typu „jedna nejpřesnější odpověď“*

Jedná se o úlohy, kde se požaduje nejlepší nebo nejsprávnější odpověď.

C) *Úlohy typu „jedna nesprávná odpověď“*

V tomto případě je nutné ve kmenu úlohy patřičně zdůraznit zápor, protože jinak může dojít k přehlédnutí nesprávné odpovědi, přestože student má příslušné vědomosti.

D) *Úlohy s vícenásobnou odpovědí*

Jsou to testové úlohy, ze kterých má student vybrat několik správných odpovědí. Pokud se rozhodneme pro použití této úlohy, je třeba na to studenty předem upozornit. Problémem u těchto úloh je skórování. Neexistuje totiž jen jedna naprosto správná odpověď a jedna naprosto nesprávná odpověď, ale několik částečně správných odpovědí. Doporučují se dva přístupy, z nichž první se dá vyjádřit slovy „všechno nebo nic“. Podle toho přístupu přidělíme 1 bod v případě, když student označí všechny správné odpovědi, a 0 bodů tehdy, když bude třeba jen jedna odpověď nesprávná.

Druhý diferencovanější přístup spočívá v tom, že přidělíme „pomocný“ 1 bod za každou správně označenou odpověď a 1 pomocný bod za každou neoznačenou nesprávnou odpověď. Výsledný součet pomocných bodů potom dělíme počtem nabídek v úloze, pokud maximální počet bodů v úloze byl 1.

E) *Situační úlohy*

Zvláštní modifikací testových úloh s výběrem odpovědí jsou označované někdy jako úlohy situační či interpretační. Jsou to úlohy, u nichž student vybírá ze značně většího počtu nabídek, než je obvyklé, nabídky nejsou předkládány ve formě dlouhého a nepřehledného seznamu, ale vyplynou přímo z dané situace. Pravděpodobnost uhodnutí správné odpovědi bez příslušných vědomostí je u tohoto typu úloh zpravidla velmi malá.

Rady při konstrukci testových úloh s výběrem odpovědí:

Nesprávné odpovědi, které se předkládají studentům k výběru, se označují jako distraktory. „Při navrhování distraktorů většinou vycházíme z logické úvahy anebo ze zkušeností s nejčastěji se vyskytujícími chybami.“ Pro pečlivou přípravu testu se někdy postupuje tak, že se úloha nejdříve zadá studentům jako otevřená a potom se nejčastěji vyskytujících chyb použije jako distraktorů. U testové úlohy, kde distraktory plní svoji funkci, by mělo platit, že student, který správnou odpověď nezná, vybírá náhodně ze všech uvedených nabídek. Jejich atraktivita (přijatelnost) je značně relativní vlastnost, poněvadž studentovi s nižší úrovní vědomostí se může jevit stejný distraktor jako dostatečně atraktivní, zatímco studentovi s vyšší úrovní vědomostí jako nepřijatelný. „Důležitou zásadou při navrhování úloh s výběrem odpovědí je, že informace, otázka i navrhované odpovědi musí být co nejstručnější.“ (Chráska, 1999, s. 35)

Chráska (1999) doporučuje pro návrh úloh s výběrem odpovědí:
Úlohami s výběrem odpovědí nezkoušíme pokud možno zapamatování konkrétních poznatků.

1. Ve formulaci úlohy se vyhýbáme slovům nebo údajům, které by mohly sloužit jako nápověda.
2. Pokud se ve formulaci úlohy vyskytuje zápor, zvýrazníme jej, např. podtržením.
3. Soubor nabízených odpovědí k jedné úloze by měl být homogenní, tj. podobný obsahovým zaměřením i formou.
4. Distraktory se nesmějí vzájemně překrývat nebo jinou formou vyjadřovat totéž.
5. Umístění správné odpovědi mezi distraktory se má volit zcela náhodně.
6. Navrhujeme jen takové distraktory, u nichž je předpoklad, že budou využívány.
7. Při používání úloh s vícenásobnou volbou odpovědi a při používání neurčitých odpovědí na tuto skutečnost studenty upozorníme.
8. Při formulaci úloh s výběrem odpovědi dáváme přednost otázkám před neúplnými tvrzeními.
9. V úlohách s výběrem odpovědí se vyhýbáme příliš dlouhým slovním formulacím.

7.2.1.2.3 Přiřazovací úlohy

Jak řešit úlohy toho typu uvádějí Škoda a Doulík. Úkolem studenta je přiřadit pojmy jedné množiny k pojmům druhé množiny. Pro snížení rizika náhodného vyřešení uvádíme druhou množinu s větším počtem prvků, než má první množina. Pokud by byl počet prvku v obou množinách stejný, studentovi by stačila znalost například 2-3 správných přiřazení a u zbylých možností by se významně zvýšila pravděpodobnost uhodnutí správného přiřazení. Při skórování těchto úloh lze uplatnit dva přístupy.

„Je-li počet přiřazení nízký (4-5), můžeme postupovat podle pravidla vše nebo nic.“ To znamená, že za zcela správné řešení maximum bodů, za řešení, které obsahuje jediné špatné nebo vynechané přiřazení 0 bodů.

„Je-li počet přiřazení vyšší než pět, je vhodnější používat vážené skórování, kdy bodový zisk počítáme podle vzorce $x = \frac{n_s}{n_c}$, kde n_s je počet správných přiřazení a n_c je počet všech možných přiřazení. Výsledné číslo je při binárním skórování bodový zisk za danou úlohu, při váženém skórování je koeficient, kterým násobíme maximální počet bodů, který hodláme úloze přidělit.“ (Škoda, Doulík, 2007, s. 25)

7.2.1.2.4 Uspořádací úlohy

U těchto typů testových úloh se od studenta požaduje uspořádání prvků dané množiny pojmů jedné třídy do řady. Tento typ úlohy se skládá z dané množiny prvků a z instrukce, v níž se uvádí, podle kterého kritéria a jakým způsobem se mají prvky upořádat. Problémy může působit skórování uspořádacích úloh. „Nejjednodušší způsob skórování se provádí tak, že za zcela správné vyřešení úlohy, tj. za uvedení naprosto správného pořadí, se přiděluje 1 bod, za všechna ostatní řešení 0 bodů.“ Tento postup je vhodný pro seřazování pojmů, jejichž počet není větší než pět. Při seřazování více než pět prvků v testové úloze je v literatuře doporučován složitější způsob skórování uspořádacích úloh. (Chráska, 1999, s. 39)

Dále uvádí vztah pro skóre (Chráska, 1999):

$$x = \frac{\sum d_{\max} - \sum d}{\sum d_{\max}}$$

kde x je skóre určitého studenta v uspořádací úloze, d jsou jednotlivé odchylky studenta od správného pořadí, d_{max} jsou největší možné odchylky studenta od správného pořadí.

7.2.2 Požadavky na formulaci položek

a) didaktické - přiměřenost ke studentům, soulad se stanovenými požadavky ke zvládnutí prověřovaného učiva;
b) odborné - věcná správnost, používání jednotné terminologie;
c) logické - stavba otázek musí vyhovovat pravidlům formální logiky;
d) jazykové - gramatická správnost, dodržování pravidel českého pravopisu, stylistická srozumitelnost položek. (Smekal, Švec, Zajac, 2007)

7.2.3 Zásady pro navrhování všech druhů testových úloh

1. Vyhýbáme se úlohám kvízového charakteru. Tyto úlohy mohou být sice zábavné pro studenty, ale k serióznímu měření výsledků vzdělávací činnosti se nehodí.
2. Snažíme se navrhovat testové úlohy, které jsou navzájem nezávislé, tj. takové, u nichž správné vyřešení jedné úlohy není vázáno na správné vyřešení jiné úlohy v testu.
3. Při formulaci testových úloh se musí dbát na to, aby již tyto formulace neobsahovaly nápovědu správné odpovědi (tzv. nezamýšlená nápověda). Zdrojem nápovědy u úloh s výběrem odpovědi bývá často např. obsahová, formální nebo jiná odlišnost správné odpovědi od distraktorů.
4. V didaktických testech zásadně nepoužíváme tzv. „chytáků“, u nichž nezkoušíme stupeň zvládnutí učiva, ale zcela jiné charakteristiky studenta (např. postřeh atd.).
5. Při hodnocení odpovědí v testu je nejvhodnější užívat tzv. jednoduchého skórování (binárního skórování) úloh, kdy za správnou odpověď v kterékoli úloze připisujeme vždy jen jeden bod. Přiřazuje se za správnou odpověď vždy jeden bod. Složitější a pracnější - tzv. vážené skórování (u něhož přiřazujeme různé počty bodů úlohám podle jejich náročnosti) se většinou doporučuje u úloh, které se výrazně liší časem, který je třeba k jejich vyřešení (zodpovězení).

6. Počet testových úloh by měl být o něco více, než kolik má obsahovat konečná podoba testu. Při ověřování testu se totiž zpravidla ukáže, že řada úloh z různých příčin nevyhovuje.
7. Náležitou pozornost bychom měli třeba také věnovat pozornost grafické úpravě úloh. Písmo musí být dostatečně velké a výrazné, text čitelný a přehledný. (Chráska, 1999)

7.2.4 Návrh prototypu didaktického testu

„Málokdy se však podaří navrhnout napoprvé úlohy zcela dokonalé." Doporučuje se vytvořené testové úlohy na nějaký čas odložit a po několika dnech se k nim znovu vrátit, nechat navržené úlohy posoudit další komponentní osobou. „Z úloh, které obstály při opakovaném posuzování autorem, (příp. při posuzování jinými odborníky) sestavíme první návrh (prototypu) didaktického testu." Dále se určí přibližný čas k vypracování. Konkrétnější představu o časové náročnosti na zpracování testu je možno učinit až po prvním použití testu na vzorku studentů.

U jednodušších úloh s výběrem odpovědí lze orientačně počítat s časem od 0,5 minuty do 1,5 minuty na jednu úlohu. Doporučuje se, aby časový limit pro testy úrovně byl zvolen tak, aby 80 %-90 % studentů stačilo testem projít. Abychom předcházeli opisování studentů je třeba vytvořit dvě alternativy testu v ekvivalentních formách. (Chráska, 1999, s. 41)

7.3 Ověřování a optimalizace didaktického testu

Vlastnosti didaktického testu můžeme získat až po důkladném ověření testu na vzorku studentů. „Toto ověřování se ovšem neprovádí pouze za účelem získání informací o kvalitě vytvořeného testu, nýbrž zejména proto, abychom mohli případné nevhodné vlastnosti testu odstranit nebo korigovat." Jestliže vytváříme nestandardizovaný test pro vlastní potřebu, potom zpravidla vystačíme s ověřením testu u studentů, které vyučujeme. (Chráska, 1999, s. 46)

7.3.1 Analýza vlastností testových úloh

Slouží ke stanovení matematických indexů vhodnosti jednotlivých testových úloh a tím ke zvýšení citlivosti bodování výkonů zkoušených osob. Na kvalitě úloh je závislá kvalita testu. „Analýza vlastností testových úloh se zaměřuje na obtížnost úloh, na citlivost úloh a na tzv. nenormované odpovědi.“ (Chráska, 1999, s. 46)

7.3.1.1 Obtížnost úlohy

Nejdůležitějšími vlastnostmi testových úloh jsou obtížnost a citlivost. Jsou to charakteristiky, jimiž lze korigovat a optimalizovat testové položky i celý test. Obtížnost úlohy respektive testu se určuje podle hodnot následujících veličin. (Škoda, Doulík, 2007)

Index obtížnosti testové položky (p)

Index obtížnosti testové položky p získáme jako podíl počtu studentů ve skupině, kteří danou položku zodpověděli správně a celkového počtu studentů ve vzorku vynásobený stem. Hodnota toho indexu se udává v procentech. (Chráska, 1999)

„Jako vhodné označujeme úlohy, jejichž index obtížnosti leží v uzavřeném intervalu $\langle 20;80 \rangle$. Je-li $p < 20$, úloha je příliš obtížná. Je-li $p > 80$, úloha je velmi snadná.“ Úlohy s indexem obtížnosti blížící se hodnotě 0 nebo 100, patří mezi zakázané a v testu by se neměly objevit. Pokud je $p = 50$, úlohy jsou nejvhodnější do rozlišujících testů. (Škoda, Doulík, 2007, s. 30)

Hodnota obtížnosti testové položky (q)

Hodnotu obtížnosti testové položky q získáme jako podíl počtu studentů ve skupině, kteří danou položku zodpověděli nesprávně nebo ji neřešili vůbec a celkového počtu studentů ve vzorku vynásobený stem. „Je-li $q > 80$, úloha je velmi obtížná a měla by být z testu vyřazena.“ Je-li $q < 20$, úloha je příliš snadná a měla by být taky vyřazena z testu. „Vztah mezi hodnotou obtížnosti a indexem obtížnosti je $q = 100 - p$. Vztah mezi indexem obtížnosti a hodnotou obtížnosti je $p = 100 - q$.“ (Škoda, Doulík, 2007, s. 30)

Index obtížnosti testu (P)

Index obtížnosti se vypočítá podle vztahu (Škoda, Doulík, 2007):

$$P = 100 \cdot \frac{x^0}{x}$$

kde P je index obtížnosti testu, x^0 je aritmetický průměr všech hrubých skórů dosažených studenty v testu a x je počet studentů, kteří řešili úlohy v testu.

Hodnota obtížnosti testu (Q)

Hodnota obtížnosti testu se zjistí podle vztahu (Škoda, Doulík, 2007):
$Q = 100 - P$, kde P je index obtížnosti celého testu.

7.3.1.2 Citlivost testových úloh a metody jejich výpočtu

„Citlivost úloh bývá často označována také jako rozlišovací hodnota, diskriminační hodnota či rozlišovací ostrost nebo jako rozlišovací schopnost úloh." Vysokou citlivost má úloha, kterou řeší s úspěchem studenti, kteří mají celkově lepší vědomosti, naopak studenti, kteří mají horší vědomosti, v této úloze dosahují špatných vědomostí. Při posuzování citlivosti úloh se vzorek studentů rozdělí podle celkového počtu dosažených bodů na dvě části: skupinu „lepších" (s vyšším počtem dosažených bodů) a skupinu „horších" (s nižším počtem dosažených bodů). Studenti se seřadí podle dosaženého počtu bodů v testu, přičemž horní polovinu označíme jako „lepší" (L) a spodní polovinu jako „horší" (H). Citlivost úlohy se dá posoudit pomocí výpočtu některého z koeficientů citlivosti. Tyto koeficienty mohou nabývat hodnot od -1 přes nulu do +1. Čím vyšší hodnoty koeficient nabývá, tím lépe úloha rozlišuje mezi studenty s lepšími vědomostmi a mezi studenty s horšími vědomostmi. (Chráska, 1999, s. 49)

Pokud koeficient citlivosti dosahuje hodnoty 0, pak tato úloha vůbec nerozlišuje mezi oběma skupinami studentů. Záporné hodnoty koeficientu vysvětlují, že úloha zvýhodňuje studenty, kteří mají v testu celkově horší výsledky. Naopak kladné hodnoty koeficientu citlivosti vypovídají o tom, že v úloze dosahují lepších výsledků studenti, kteří mají v testu lepší celkové výsledky. (Chráska, 1999)

Koeficient ULI (upper-lower-index)

Stanovení tohoto koeficientu se doporučuje i v přípravě nestandardizovaného testu. Vychází z rozdílu mezi obtížností úlohy ve skupině lepších a ve skupině horších studentů

$$d = \frac{n_L - n_H}{0{,}5N}$$

kde d je koeficient citlivosti ULI, n_L je počet studentů z lepší skupiny, kteří úlohu zodpověděli správně, n_H je počet studentů ze skupiny horších, kteří úlohu řešili správně, N je celkový počet studentů. Uvedený vztah lze užít v případě, že obě skupiny byly vytvořeny na základě rozdělení všech studentů podle celkového počtu bodů na polovinu. „U koeficientu ULI se požaduje, aby v případě úloh s hodnotou obtížnosti 30-70 byl d alespoň 0,25 a u úloh s hodnotou obtížnosti 20-30 a 70-80 alespoň 0,15." (Chráska, 1999, s. 50)

Tetrachorický koeficient citlivosti (r_{tet} *)*

Pro výpočet tetrachordického koeficientu citlivosti je potřeba pro každou testovou úlohu sestavit čtyřpolní (tetrachordickou) tabulku uvádějící počty studentů ze skupin L a H, kteří odpověděli v úloze správně (+) nebo špatně, případně neodpověděli (–). Ve čtyřpolní tabulce jsou jednotlivé počty studentů označeny písmeny a, b, c, d. (Chráska,1999)

Schéma čtyřpolní tabulky:

	+	–
L	a	b
H	c	d

Z uvedeného schématu vyplývá, že a je počet studentů ze skupiny L, kteří odpověděli v úloze správně, b je počet studentů ze skupiny L odpovídající v úloze špatně nebo neodpovídající, c je počet studentů ze skupiny H, kteří odpověděli správně, d je počet studentů ze skupiny H odpovídající v úloze špatně nebo neodpovídající. Vypočítává se ze vztahu

$$r_{tet} = \cos\left(180 \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{bc} + \sqrt{ad}}\right)$$

kde $\cos$ je goniometrická funkce kosinus, čísla a, b, c, d mají význam vyplývající ze schématu čtyřpolní tabulky. Tetrachorický koeficient citlivosti by neměl být u vyhovujících testových úloh nižší než 0,15. Tato hodnota platí tehdy, jestliže skupiny L a H byly vytvořeny z 50 % všech testovaných studentů. (Chráska, 1999)

Bodově biseriální koeficient citlivosti (${}_b r_{bis}$)

Výpočet bodově biseriálního koeficientu citlivosti je dán vztahem:

$$ {}_b r_{bis} = \frac{\bar{x}_s - \bar{x}_n}{s_x} \sqrt{pq} \text{ n} $$

kde ${}_b r_{bis}$ je bodově biseriální koeficient testové úlohy, $\bar{x}_s$ je průměrný počet bodů v testu u studentů, kteří řešili danou úlohu správně, $\bar{x}_n$ průměrný počet bodů u studentů řešící úlohu nesprávně, s_x je směrodatná odchylka, vypočítaná ze všech testových výsledků, $p = 0{,}01P$, kde P je index obtížnosti testové úlohy, $q = 1 - p$. Vyhovující testová úloha by měla nabývat hodnotu bodově biseriálního koeficientu citlivosti minimálně 0,20. (Chráska, 1999)

7.3.1.3 Analýza nenormovaných odpovědí

Analýzou nenormovaných odpovědí rozumíme rozbor odpovědí vynechaných a nesprávných. (Chráska, 1999)

Vynechané odpovědi

Pokud zjistíme, že některé odpovědi v testu jsou vynechány, mohou znamenat, že student nemá požadovanou znalost nebo neporozuměl případnému nejasně formulovanému zadání úlohy. Kritickou hladinou u testů s otevřenými úlohami se rozumí, pokud odpověď vynechá 30-40 % studentů. Kritickou hladinou u uzavřených úloh je už 20 % vynechaných odpovědí. (Škoda, Doulík, 2007)

Nesprávné odpovědi (distraktory)

U úloh s výběrem odpovědí je rozbor nesprávných odpovědí jednoduchý. V tomto případě stačí překontrolovat, zda jsou všechny distraktory (nesprávné odpovědi) pro studenty dostatečně atraktivní. Atraktivnost nesprávných odpovědí se pozná podle toho, že studenti vybírají skutečně ze všech nabídnutých distraktorů. Nesprávné odpovědi, které nikdo nebo téměř nikdo ze studentů nevolí, neplní svoji funkci a měly by být nahrazeny či odstraněny. Při správně fungujících distraktorech by student neznající správnou odpověď, měl více méně náhodně volit jednu z nabídek. Rozbor nesprávných odpovědí u otevřených úloh je obtížnější. V těchto případech se doporučuje chyby studentů v určité testové úloze rozdělit do dvou kategorií. (Škoda, Doulík, 2007)

„Rozdělují se na základní a vedlejší.“ Základní chyby jsou způsobeny neznalostí učiva. Vedlejší chyby jsou způsobeny různými náhodnými vlivy např. nepozorností, numerickou chybou, nepřesností, špatnou čitelností zadání úlohy. „Pokud v nějaké úloze převažují vedlejší chyby nad hlavními, je nutné tuto úlohu z testu vyřadit.“ (Škoda, Doulík, 2007, s. 32)

7.3.2 Vytvoření definitivní podoby didaktického testu

Nevhodné úlohy je lépe vyřadit z testu a nahradit je úlohami vhodnějšími. Z toho důvodu je vhodné navrhovat úloh více. Jestliže se určitá úloha jeví jako problematická a zkouší důležitou část učiva, můžeme se pokusit tuto úlohu upravit. „Pokud se v didaktickém testu užívá úloh více typů, doporučuje se úlohy stejného druhu soustředit do jedné části testu.“ Má-li didaktický test plnit funkci seriózního prostředku měření, je třeba zabezpečit podmínky pro samostatnou práci studentů. Jednou z podmínek pro samostatnou práci studentů je jednak důsledný dozor nebo vytvoření dvou nebo více ekvivalentních forem testu. (Chráska, 1999)

Ekvivalentní formy testu se mohou vytvořit změnou pořadí úloh v testu, změna pořadí nabídek odpovědí (u úloh s výběrem odpovědí), obměnou údajů v zadání úlohy. „Při přeskupování úloh dbáme, aby v tomto případě byla dodržena zásada, že úlohy v testu mají mít celkovou tendenci vzrůstající obtížnosti.“ (Chráska, 1999, s. 57)

7.4 Metody standardizace didaktického testu

Nestandardizovaný kvalitně zpracovaný test může být pro vyučujícího cenným zdrojem informací o průběhu a výsledcích výuky. U nestandardizovaných didaktických testů nemůžeme dosažené výsledků studentů srovnávat s ostatními studenty, poněvadž nemáme k dispozici klasifikační nebo jiný standard, podle něhož bychom mohli studenty objektivně hodnotit a klasifikovat. Hlavním smyslem standardizace je vytvoření testové normy (testového standardu), který umožní zařadit studenta podle dosaženého počtu bodů do určitého žebříčku (škály, stupnice). Na základě srovnání dosaženého výkonu studenta můžeme jedince adekvátně posoudit. (Chráska, 1999)

U standardizovaných testů se výkon jednotlivých studentů porovnává s reprezentativním vzorkem studentů (stovky studentů). Tomuto postupu, kterým se srovnání realizuje, se říká standardizace testu. Standardizovat výsledky testu znamená vyjádřit je vzhledem k výsledkům standardizačního vzorku studentů. Jednodušší metody standardizace spočívají v zjišťování procent studentů, kteří v reprezentativním vzorku dosáhli určitého výsledku. „Složitější metody standardizace většinou předpokládají, že výsledky testování odpovídají předpokladu tzv. normálního rozdělení a vycházejí z určování vzdálenosti jednotlivých výsledků od aritmetického průměru, přičemž jednotkou této vzdálenosti je směrodatná odchylka." (Chráska, 1999, s. 63)

Vzorec pro výpočet aritmetického průměru (Koníček, Malčík, Maťašeje, Mazurová, 2007):

$$X = \frac{(X_{(1)} + X_{(2)} + X_{(3)} + X_{(4)} + X_{(5)} + ... + X_{(n)})}{N}$$

$$X = \frac{1}{N} \sum_{1}^{n} X_i$$

kde $i = 1$ až N a $X_{(i)}$ je skór i-tého respondenta.

Vzorec pro výpočet směrodatné odchylky (Koníček, Malčík, Maťašeje, Mazurová, 2007) :

$$S_x = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (X_i - X)^2}$$

kde N je počet respondentů, X aritmetický průměr skórů, X_i je skór i-tého respondenta, S_x se označuje rozptyl.

7.4.1 Percentilová škála

Percentilová škála je nejjednodušší metodou standardizace. U této metody se každému dosaženému počtu bodů přiřadí tzv. percentilové pořadí, udávající, kolik procent studentů ve vzorku dosáhlo horšího výkonu. Umožňuje tedy posoudit, jaké je relativní postavení studenta ve skupině.

Pro výpočet percentilového pořadí pro určitý výsledek je dán vzorec:

$$PR = 100 \cdot \frac{n_k - \frac{n_i}{2}}{n}$$

kde PR je percentilové pořadí studenta pro daný výsledek v testu, n_k je kumulativní četnost u daného výsledku, n_i je četnost daného výsledku a n je počet testovaných studentů. Pokud se určují percentilová pořadí z tabulky četností, ve kterých jsou jen výsledky v určitých bodových intervalech, potom se výpočet provádí podle vztahu

$$PR = 100 \cdot \frac{n_i - \frac{d_L \cdot n_i}{h}}{n}$$

kde PR je percentilové pořadí studenta pro daný výsledek v testu, d_L je rozdíl mezi daným výsledkem a dolní hranicí intervalu, v němž se tento výsledek nachází, n_k je kumulativní četnost v intervalu, v němž se výsledek nachází, h je hloubka intervalu. (Chráska, 1999)

7.4.2 C-škála

Při konstrukci C-škály se postupuje tak, že celý standardizační vzorek studentů (uspořádaný podle počtu dosažených bodů) se rozdělí do 11 skupin (stupňů škály) tak, že do první skupiny (bod škály 0) se umístí 1,2 % nejhorších studentů, do druhé skupiny (bod škály 1) se umístí 2,8 % studentů. Ke každému bodu škály je stanoveno procento studentů (Příloha 1). Procenta studentů, která odpovídají bodům škály, jsou volena symetricky vzhledem ke střednímu bodu škály, to je 5. bodu škály. (Chráska, 1999)

7.4.3 Škála stanin

Standardní devítistupňová škála (standard nine) vznikne spojením prvních dvou a posledních dvou stupňů C-škály. První a poslední bod této škály obsahují $1{,}2\ \% + 2{,}8\ \% = 4\ \%$ případů. (Chráska, 1999)

7.4.4 z-škála

Při konstrukci této škály se vychází z předpokladu, že výsledky mají tzv. normální rozdělení. Mělo by se nejdříve ověřit, zda je tento předpoklad splněn. „Hodnota z-škály vyjadřuje, jak daleko je určitý dosažený výsledek od aritmetického průměru, přičemž jednotkou této vzdálenosti je směrodatná odchylka.“ Platí

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

kde z je hodnota z-škály, x určitý testový výsledek, $\bar{x}$ aritmetický průměr výsledků v testu, s směrodatná odchylka pro všechny testové výsledky. Hodnoty z-škály nabývají hodnot zpravidla v intervalu od -3 do +3, průměrný výsledek je hodnota $z = 0$. (Chráska, 1999, s. 67)

7.4.5 Z-škála

Tato škála vychází ze z-škály a je dán vztahem:

$$Z = 100 + 10z = 100 + 10 \cdot \frac{x - \bar{x}}{s}$$

„Pokud se výsledky didaktického testu vyjadřují na této škále, potom velká většina (99,7 %) jich je v intervalu od 70 do 130 a průměrný výsledek je dán hodnotou 100 (směrodatná odchylka je 10).“ (Chráska, 1999, s. 67)

7.4.6 T-škála

Tato šála vychází ze z-škály a je definovaná vztahem:

$$T = 50 + 10 \cdot z = 50 + 10 \cdot \frac{x - \bar{x}}{s}$$

„Pro T-škálu platí, že její hodnoty jsou zpravidla v intervalu od 20 do 80 bodů, průměrná hodnota je vyjádřena stupněm 50 (směrodatná odchylka výsledku je 10).“ (Chráska, 1999, s. 67)

7.5 Základní statistické charakteristiky testovaného souboru

Přehled o výsledcích testu je možné získat na základě stanovení reliability testu, citlivosti jednotlivých položek některým z koeficientů, stanovením obtížnosti jednotlivých položek a provedením standardizace testu.

Pomocí statistických charakteristik můžeme získat další informace o výsledcích testu, jsou to:

1. Rozdělení četností skórů na celý test jsou získané informace o tom, jaké skóry byly dosahovány ve skupině respondentů. Údaje se vnáší do histogramu nebo tabulky, kolikrát se ten skór vyskytl.
2. „Medián je charakteristikou polohy pro ordinální (požadovaná) data. Mediánem je kterákoliv úroveň sledovaného znaku M, taková, že v ní a v úrovních pořadově vyšších se zařazuje alespoň $\frac{N}{2}$ z celkového počtu N respondentů a v ní a úrovních pořadově nižších rovněž alespoň $\frac{N}{2}$ respondentů."
3. Aritmetický průměr je charakteristikou polohy a to pro metrická data. Získáváme ho sečtením skór všech respondentů a výsledek dělíme počtem všech respondentů N.
4. „Empirická entropie hodnotí stupeň rozptýlení četností mezi úrovněmi znaku M." Je charakteristikou rozptýlení pro nominální i ordinální data.

   $H_M = -\sum (\frac{N_{(i)}}{N}) \log(\frac{N_{(i)}}{N})$, kde i se mění od 1 do K.

   K je počet úrovní, N je počet prvků výběru zařazených v i-té úrovni, N je celkový počet prvků výběru (respondentů).
5. Směrodatná odchylka (rozptyl) nám umožňuje odhadnout, jak jsou skóry rozloženy kolem průměru. „Vypočítáme odchylky skórů jednotlivých respondentů od průměru, umocníme je na druhou a sečteme." (Koníček, Malčík, Maťašeje, Mazurová, 2007, s. 33-34)

Jako první operaci při opravování testu provádíme skórování. Skórem položky rozumíme počet bodů, který student dosáhne za správnou odpověď. Skórem studenta rozumíme celkový počet bodů získaný za správné odpovědi. (Koníček, Malčík, Maťašeje, Mazurová, 2007)

8 POSTUP PŘI TVORBĚ NESTANDARDIZOVANÝCH TESTŮ

V pedagogické praxi se často setkáváme s nestandardizovanými testy, které si učitelé vytváří sami a používají je ve vyučovacím procesu ke kontrole vědomostí a znalostí studentů z určité oblasti učiva. Jak správně takový test sestavit popisuje nynější kapitola.

1) Výběr učiva

Nejprve přesně vymezíme úsek učiva, který chceme zkoušet. Musíme samozřejmě znát cíl učení, požadovaný stupeň osvojení jednotlivých dovedností a vědomostí. Znamená to provést analýzu učiva podle učebnice a osnov. Vypíšeme si pojmy, vzorce, fakta, poučky a další vědomosti, dovednosti, které má student zvládnout. Je třeba dát si pozor na odstavce s motivačním charakterem. Obsahují řadu zajímavých faktů, které jsou podružné a se strukturou učiva úzce nesouvisejí. „Tyto části se sice velmi snadno zařazují do testů, vzhledem k jednoduchosti tvorby položek, ale převážně porušují validitu testu.“ Posoudíme, které části jsou fakta, co spadá do tvorby pojmů, co se týká zákonitostí, pravidel, pouček. Pokusíme se vytvořit určité pořadí důležitosti jednotlivých vypsaných částí učiva. Položky začínáme tvořit od jednoduchých. Končit budeme položkami složitějšími, například zkoušením zákonitostí, vztahů. (Řešátko, 1975, s. 47)

2) Sestavení testu

Z analýzy učiva získáme mnohdy veliký počet položek pro zkoušení vědomostí, ale malý pro zkoušení ostatních částí učiva. Z hlediska jednoduchosti hodnocení je nejvýhodnější sestavit test tak, že budou rovnoměrně zastoupeny všechny tři vpředu uvedené části. Pokud se nepodaří rovnoměrné zastoupení, pak je třeba zvážit, jestli vypracování menšího počtu příslušných odpovědí můžeme získat požadovanou informaci. Někdy k tomu stačí dvě až tři položky a není nutné hledat další. Pak je třeba uvážit, zda by nebylo vhodné bodovat správné odpovědi tohoto druhu vyšším počtem bodů, aby nebyli preferováni ti, kteří mají vědomosti, ale nedovedou je užívat. „U nestandardizovaných testů, zejména z omezeného úseku učiva, není nutné zařazovat příliš mnoho položek.“ Nejméně by jich však mělo být deset, protože jinak zkouška ztrácí charakter testu. Obecně platí že v testu by neměla být položka, jejíž vypracování v průměru trvá déle než pět minut. (Řešátko, 1975, s. 49)

3) *Zkoušky testu*

Po prvních korekcí je vhodné odložit zhruba zpracovanou verzi didaktického testu nejméně na čtrnáct dní. Potom v roli studenta začít vypracovávat odpovědi na jednotlivé položky testu. Na začátku práce si poznamenáme čas, potom pečlivě čteme všechny otázky, zapisujeme nebo zaškrtáváme odpovědi atd., přesně podle instrukcí pro studenty, které předem vypracujeme, nejlépe písemně. Nejasné otázky označíme. Po skončení práce změříme čas a začneme upravovat formulace položek. Další korekci by měl provést jiný vyučující příslušného předmětu. „Teprve takto upravený didaktický test by měl být rozmnožen, avšak jen v počtu potřebném pro jeden ročník." Je zřejmé, že test nelze napsat den před testováním a ihned jej rozmnožit, nebo diktovat. (Řešátko, 1975, s. 50)

Při první zkoušce si zjistíme čas, který trvalo vypracování odpovědí nejrychlejšímu studentovi, většině studentů a nejpomalejšímu studentovi. Srovnáním těchto časů s časem, který jsme si sami sobě naměřili, když jsme vystupovali v roli testovaného studenta, dostaneme časový koeficient, který je užitečný pro dílčí úpravy didaktických testů. Po důkladném rozboru chyb, kterých se studenti v testu dopustili, vypracujeme druhou verzi testu. Tu zpracujeme ve dvou variantách. Přepracujeme položky s výběrovými odpověďmi. Nevyhýbáme se kombinovaným a volným odpovědím, je však třeba si uvědomit, že psaní odpovědí trvá studentům déle a také oprava testů je náročnější. „Překontrolujeme, zda u výběrových odpovědí nejsou některé odpovědi, např. odpovědi na prvním místě, uváděny příliš často jako správné a jiné nejsou opomenuty." Střídání správných odpovědí je nutné jak z psychologických důvodů, tak i proto, že pokud se některá odpověď často opakuje, je snadnější zapamatovat si kód řešení. (Řešátko, 1975, s. 51)

U sestaveného testu kontrolujeme, jestli nějaké položky nenapovídají nebo nemají jiné chyby, uvedené v předchozích částech. Pak si znovu v roli studenta test vyzkoušíme, provedeme časové korekce, zadáme test v jedné skupině studentů a popřípadě znovu opravíme zjištěné nedostatky. Teprve takto upravená verze je vhodná pro širší použití. (Řešátko, 1975)

4) *Čas pro zpracování odpovědí*

Každý vyučující preferuje, aby testování trvalo krátkou dobu. Krátké orientační testy stačí asi desetiminutové až dvaceti minutové. Přílišné zkrácení času na vypracování testu má nepříznivé důsledky pro pomalejší, svědomité studenty. „Při zkouškách testů jsme se pokusili určit čas, který je optimální pro zpracování didaktického testu.“ Nejvhodnější je průměrný čas, prodloužený o 25 % až 50 %. Ukončí-li studenti práci před časovým limitem, neodevzdávají hned své řešení, aby nevznikal hluk a nedocházelo k napovídání. Pro zamezení opisování, se doporučuje dát studentům pokyn, aby si ještě jednou zkontrolovali své odpovědi a pokud s tímto budou hotovi, zakryjí své řešení, například otočením. Za nezbytné považujeme oznámit čas na zpracování testu předem, nejlépe ho uvést v záhlaví testu. Nutné je také oznámit u delších testů dobu 5 minut a u kratších 1 minutu před ukončení práce. (Řešátko, 1975, s. 52)

5) *Bodové hodnocení*

„Přisouzení bodů místo klasifikačních stupňů je výhodnější, jednoznačnější a rychlejší.“ Pokud bychom se pokoušeli hodnotit odpověď na každou položku klasifikačním stupněm, bylo by výsledné hodnocení komplikované a málo přesné. Čím je hodnocení složitější, tím více při něm vzniká chyb. „Existují dva typy bodů. První typ, tzv. negativní body, je vhodný pro jednotlivě vyznačované chyby, popř. tam, kde se doplňují všechny vynechané části.“ Počet negativních bodů se odvodí z počtu chyb, přičemž za některé chyby lze dávat různý počet bodů. (Řešátko, 1975, s. 53)

„Druhým typem bodů, tzv. pozitivními body, je účelné hodnotit tam, kde se užívá hromadného značení pro chybnou nebo vynechanou část bez ohledu na to, jaká část chybí.“ V testech s volnými odpověďmi se chybné odpovědi škrtají. U nevypracovaných odpovědí nezapisovat žádná znaménka. Tím se zrychluje oprava testu. Jestliže se odpovědi hodnotí různým počtem bodů, tento počet se vpisuje k pravému okraji testovaného formuláře, na každé straně se provede dílčí součet. Výsledný součet bodů se zpravidla zapisuje na první stranu testu, blízko jména studenta. V testech s výběrovými odpověďmi se přikládá šablona na záznamní list a zapisuje se jen celkový počet dosažených bodů, nevyznačují se chyby. Pro utajení kódu je nezbytné, aby studenti nedostávali opravené testy nebo záznamní listy. (Řešátko, 1975, s. 54)

9 DOKUMENTACE DIDAKTICKÉHO TESTU

Didaktický test je vybaven pomocnou dokumentací, která umožňuje jeho správné ověřování, používání a vyhodnocování výsledků. Do této dokumentace patří testová příručka (manuál), záznamový a vyhodnocovací arch (šablona) a pomocná dokumentace. (Smekal, Švec, Zajac, 1973)

9.1 Testová příručka

Vhodná pracovní atmosféra je důležitým předpokladem pro soustředění při práci studentů při řešení didaktického testu. Vhodnou pracovní atmosféru zásadně ovlivňuje i zkoušející svým vystupováním a přesností, s jakou instruuje studenty při zadávání testu (hovoříme o tzv. administraci testu). Kvalita administrace ovlivňuje počet dotazů, které studenti kladou v průběhu testování vyučujícímu nebo je řeší mezi sebou. Testová příručka obsahuje veškeré základní údaje o testu. Instrukce musí být formulovány přesně a musí postihovat všechny údaje potřebné pro studenty z hlediska nerušeného postupu práce při testování. Při tvorbě testové příručky je vhodné držet se osnovy testové příručky:

1. Název testu - je-li uveden zkratkou nebo krycím názvem, vysvětlíme podrobněji, co zkratka znamená a proč jsme ji zavedli.
2. Autoři testu - případně i jména těch, kdo test adaptovali, upravili, provedli analýzu položek atd.
3. Popis testu - charakteristika účelu a oblasti použití, typ testu po formální stránce, typy úloh atd.
4. Teoretická východiska testu - čím byl inspirován, odkud a jak byly čerpány podklady pro formulaci položek atd.
5. Popis testového materiálu - (např. testový sešit, záznamový arch, klíč odpovědí, šablona apod.).
6. Pokyny pro užívání testu - jak test administrovat, znění instrukce, co sledovat, časy na jednotlivé části, jaký druh pomoci je povolen.
7. Pokyny pro vyhodnocování testu - jak opravovat výsledky, jak pracovat se šablonami atd.
8. Interpretace výsledků - tabulky, normy, diagnostické klíče, kvalitativní analýza výsledků, typy položek z hlediska bodové závažnosti.

9. Údaje o standardizaci - shrnutí dosavadních zkušeností s testem, údaje o analýze položek, přesnosti, validitě, standardizaci vzorku atd.
10. Literatura o testu. (Smekal, Švec, Zajac, 1973)

9.2 Záznamový arch a vyhodnocovací šablona

„Záznamový arch a vyhodnocovací šablona mají při používání didaktických testů značný význam, ovlivňují jeho vlastnosti, a to zejména použitelnost a ekonomičnost.“ Vyhodnocovací šablona slouží zkoušejícímu k vyhodnocování testu. Podoba šablony bude závislá na typu testu a formální úpravě záznamového archu. Didaktické testy typů „papír - tužka“ pro jednorázové použití plní funkci záznamového archu test sám. Řešení jednotlivých úloh student vpisuje přímo do testu. „Vyhodnocování se provádí buďto přímo v testu nebo pomocí jednoduché šablony, ve které jsou obyčejně uvedeny bodové hodnoty jednotlivých položek a správné odpovědi.“ (Smekal, Švec, Zajac, 1973, s. 59)

Jednorázové použití didaktických testů není efektivní především z hlediska ekonomického. Didaktické testy typů „papír - tužka“ pro vícenásobné použití jsou buď s převahou polytomických položek nebo sestávající z otevřených a zavřených položek. U testů s převahou polytomických položek studenti zaznamenávají řešení do záznamového archu. Záznam spočívá v zatržení písmena či čísla výběrové odpovědi. Může se také požadovat, aby některé odpovědi testovaní zdůvodnili slovně nebo číselně na označeném místě záznamového archu u příslušného čísla testové úlohy. „Řešení kontroluje učitel tak, že na záznamovém archy klade vyhodnocovací šablonu zhotovenou např. z umělé hmoty či tvrdého papíru s vystřiženými či vyraženými otvory odpovídajícími správným řešením.“ (Smekal, Švec, Zajac, 1973, s. 60)

U testů sestávajících z otevřených a zavřených položek studenti své odpovědi zaznamenávají do záznamového archu. „Jde tu o odpovědi výběrové a tvořené.“ U polytomických položek zapisují studenti řešení zaškrtnutím písmene v záznamovém archu, označující u příslušné položky zvolenou variantu odpovědi. Záznam tvořených odpovědí provádějí studenti do označených míst v záznamovém archu. „Na okraji záznamového archu je vyznačeno místo pro bodové hodnocení jednotlivých položek testu.“ Vyučující provádí hodnocení testu pomocí vyhodnocovací šablony, kterou přikládá k okraji záznamového archu. „Na šabloně jsou uvedena správná řešení a jejich bodové hodnocení.“ (Smekal, Švec, Zajac, 1973, s. 61)

10 PRAKTICKÁ ČÁST

V praktické části diplomové práce předkládám soubor nestandardizovaných testů určený studentům prvního a druhého ročnímu tříletého bakalářského studijního oboru Matematika se zaměřením na vzdělávání. Při jejich tvorbě jsem postupovala podle jednotlivých kroků popsaných v teoretické části a k nim i vytvořila testovou příručku s pokyny pro examinátora, instrukcemi pro testované, informacemi o způsobu hodnocení. Další součástí testů jsou záznamové archy, do nichž studenti vpisují odpovědi a k jejich opravě slouží vyhodnocovací šablony. Každý typ testu je rozdělen na čtyři skupiny, jejichž obsah úloh je rovnocenný.

Počet testů a rozdělení jednotlivých témat, které mají testy zahrnovat, jsem zvolila na základě časové dotace přednášek a cvičení z předmětů MAZ2B a MAZ3B, což obojí činí po 45 minutách čistého času. Podle povahy testu studenti zaznamenávají své odpovědi buď do záznamového archu anebo přímo do zadání testu.

Testy jsou rozděleny na dvě skupiny. První z nich tvoří čtyři testy, jejichž testové položky vymezují problematiku integrálního počtu. Další skupina testů je tvořena třemi testy s čísly 6, 7, 8 a jsou zaměřeny na diferenciální počet funkcí více proměnných. Test číslo 5 shrnuje veškeré důležité znalosti z oblasti integrálního počtu funkce jedné proměnné, slouží tedy studentům daného ročníku, kteří během letního semestru nezískali z testů požadovaný počet bodů k udělení zápočtu. Stejnou povahu má i test číslo 9. Ten je ovšem zaměřen na diferenciální počet funkcí více proměnných.

Pro stanovení doby na vypracování testů byl zadán test číslo 7 (varianta A) studentům 2. ročníku oboru Matematika se zaměřením na vzdělávání ve cvičení v předmětu MAZ3B (diferenciální počet funkcí více proměnných). Tohoto testování se zúčastnilo sedmnáct studentů a jejich výsledky odpovídaly obvyklému výkonu. Studenti začali odevzdávat test za 40 minut po zahájení psaní. Na tomto základě jsem zvolila čas k vypracování i v dalších testech.

Co se týká hodnocení těchto testů, zvolila jsem bodové hodnocení s tím, že pokud testová položka vyžaduje od studenta pouze jedno řešení, přiřazuji správné odpovědi jeden bod. Pokud student neodpoví vůbec, neodečítám a ani nepřičítám žádný bod, tedy připisuji k hodnocení 0. U testových položek, jejichž odpověď se má skládat ze dvou nebo tří složek, přiřazuji každé správné odpovědi jeden bod. V testu s číslem 2 přiřazuji 2 body (1 bod za zvolení vhodné substituce + 1 bod za správný výsledek) v úlohách 5, 6, 8 a 10.

Z důvodu 45 minutového cvičení a přednášky z předmětů uvedených výše nelze v průběhu semestru použít všechny testy, jejichž doba na vypracování činí přibližně 40-45 minut (výjimku tvoří test číslo 1). Došlo by ke zkrácení počtu hodin na procvičování nového učiva. Proto jsem vytvořila písemné práce, které jsou sestaveny z vybraných úloh uvedených v didaktických testech. Doba na jejich vypracování je maximálně 20 minut. Studenti obdrží zadání příkladů a dané příklady řeší na vlastní papír. Záleží na vyučujícím, zda bude při kontrole hodnotit postup řešení nebo pouze výsledky uvedené v závorkách pod zadáním.

V testové příručce na začátku záměrně neuvádím komu jsou dané testy určeny, protože se o tomto zmiňuji v této části kapitoly výše. Nejprve uvádím k danému testu testovou příručku s potřebnými informacemi a za ně jsou vloženy testy, které se mají těmito pokyny řídit.

10.1 Testy a testové příručky - integrální počet funkce jedné proměnné

10.1.1 Testová příručka pro test číslo 1

Didaktický test slouží k prověřování základních vědomostí studenta v oblasti integrálního počtu a je vytvořen ve čtyřech možných ekvivalentních variantách (A, B, C, D). Test je typu „papír - tužka“. Je složen z deseti testových položek. Jsou to položky s výběrovými odpověďmi (položky typu „jedna správná odpověď“) a dichotomické položky. Položky mají rozdílnou náročnost ve smyslu B. Niemerkovy taxonomie učebních úloh.

Test prověřuje znalost čtyř tématických okruhů:

téma 1: Primitivní funkce

téma 2: Neurčitý integrál

téma 3: Integrování po částech (per partes)

téma 4: Integrování substitucí.

Na vypracování testu je vyhrazený čas 20 minut. Správné odpovědi označí student do záznamového archu. Oprava testu se provádí za pomoci vyhodnocovací šablony. Tato opaření jsou v souladu se snahou o objektivizaci prověřování dovedností a znalostí studentů.

Pokyny pro examinátory:

Před zahájením psaní testu obdrží každý student testový sešit a záznamový arch. Student vyplní základní údaje (jméno, příjmení, studijní skupinu atd.). Pak studenti otevřou testový sešit a začnou řešit úlohy až na zadaný pokyn examinátora. Je třeba upozornit studenty na vymezený čas 20 minut pro vypracování testu. Po uplynutí stanovené doby musí všichni studenti ukončit práci na důrazný pokyn examinátora. Je třeba kontrolovat, aby studenti nepsali odpovědi do testového sešitu, ale své odpovědi značili do záznamového archu. Examinátoři musí dodržovat pokyny pro zkoušené osoby pro zaručení jednotnosti a objektivnosti testování.

Instrukce:

1. Dostali jste test, který má zjistit vaše vědomosti z teorie primitivní funkce, neurčitého integrálu, integrování po částech a integrování substitucí a jejich aplikace v příkladech.
2. Na vypracování testu máte 20 minut.
3. Svá řešení budete zaznamenávat jen do záznamového archu, který jste dostali spolu s testem. Pište čitelně!
4. Budete se řídit dle pokynů examinátora.
5. Vezměte si záznamový arch a vyplňte požadované údaje v záhlaví. Po vyplnění odložte pera a počkejte na další pokyny.
6. Než začnete řešit úlohy, přečtěte si pozorně zadání a své odpovědi zaznamenejte do záznamového archu.
7. Celý test tvoří úlohy s výběrovými odpověďmi (úlohy typu „jedna správná odpověď“). Budete tedy v testu vybídnuti ke zvolení správné odpovědi z několika nabídnutých odpovědí (a, b, c). Vaši odpověď na příslušnou úlohu označíte křížkem (jako ve sportce) v záznamovém archu u příslušného čísla úlohy (examinátor ukáže příklad na tabuli).
8. Můžete mít k dispozici vlastní papír pro pomocné výpočty,
   který neodevzdáváte.

9. Pokud budete chtít vaši odpověď změnit, škrtněte vaši původní odpověď a nově zvolenou odpověď znovu označte křížkem a zakroužkujte.
10. Je to všem jasné? Jsou k tomu nějaké dotazy? Začněte pracovat!

Hodnocení testu:

Oprava řešení se provádí pomocí vyhodnocovacích šablon, na nichž jsou uvedena správná řešení a odpovídající bodové hodnocení. Při opravování se přiloží vyhodnocovací šablona k příslušnému sloupci záznamového archu takovým způsobem, aby byla čísla otázek na záznamovém archu ve stejné úrovni s čísly na šabloně. Sloupec s bodovým hodnocením se na šabloně nachází vpravo. Na záznamovém archu je vpravo volný sloupec pro zápis bodového hodnocení jednotlivých úkolů. V posledním řádku záznamového archu dostaneme celkový počet bodů z testu. U otázky složené z několika částí je hodnocení rozloženo na odpovídající části a také se tyto části hodnotí samostatně.

10.1.1.1 Test číslo 1 (varianta A, B, C, D)

Varianta A

Úloha 1: Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivá (ANO), nebo nepravdivá (NE).

1.1. Integrování je inverzní operace k derivování. (ANO - NE)

1.2. Neurčitým integrálem rozumíme množinu všech primitivních funkcí. (ANO - NE)

1.3. Funkce $4x^3$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ je primitivní funkcí k funkci $x^4 + 5$. (ANO - NE)

Úloha 2: Pro integrál rozdílu dvou funkcí platí:

a) $\int (f_1 - f_2) \mathrm{d}x = \int f_1 - f_2 \mathrm{d}x$

b) $\int (f_1 - f_2) \mathrm{d}x = (f_1 - f_2) \int \mathrm{d}x$

c) $\int (f_1 - f_2) \mathrm{d}x = \int f_1 \mathrm{d}x - \int f_2 \mathrm{d}x$

Úloha 3: Integrujte: $\int \sqrt{\mathrm{z}+3} \mathrm{dz}$.

a) $\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2} + 3z\right) + C$

b) $\frac{2}{3}(z+3)\left(\sqrt{z+3}\right) + C$

c) $\frac{2}{3}(z+3)\sqrt{z+3} + \sqrt{3}\mathrm{z} + C$

Úloha 4: Která substituce je vhodná při výpočtu $\int \operatorname{cotg} x \mathrm{d}x$?

a) $\mathrm{t} = \cos x$

b) $\mathrm{t} = \frac{1}{\sin^2 x}$

c) $\mathrm{t} = \sin x$

Úloha 5: Vypočítejte $\int x5^x \mathrm{d}x$?

a) $\dfrac{x5^x}{\ln 5} - \dfrac{5^x}{\ln^2 5} + C$

b) $\dfrac{5^{x+1}}{x+1}x - \dfrac{5^{x+1}}{x+1} + C$

c) $\dfrac{5^x}{\ln 5} - \dfrac{5^{x+1}}{\ln^2 5} + C$

Úloha 6: Vypočítejte substituční metodou: $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2 - 8x + 16}$.

a) $\ln\left|(x-4)^2\right| + C$

b) $-\dfrac{1}{x-4} + C$

c) $\dfrac{1}{3(x-4)^2} + C$

Úloha 7: Kolikrát použijeme při výpočtu metodu per partes v příkladu: $\int x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

a) 2krát

b) 1krát

c) 3krát

Úloha 8: Vypočítejte daný integrál: $\int \dfrac{\ln^2 x}{x^2} \mathrm{d}x$.

a) $-\dfrac{1}{x}\ln^2 x - \dfrac{2}{x}\ln x - \dfrac{2}{x} + C$

b) $-\dfrac{1}{x}\ln^2 x + 2\ln x \ln\left|x^2\right| + C$

c) $\dfrac{1}{x^2}\ln^2 x - \dfrac{2}{x}\ln x + \dfrac{2}{x} + C$

Úloha 9: Integrujte: $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}\mathrm{d}x$.

a) $\ln\sqrt{x^2+x}+C$

c) $2\ln\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}}+C$

b) $2\sqrt{x^2+x}+C$

Úloha 10: Která substituce je vhodná při výpočtu $\int(\mathrm{a}x+\mathrm{b})^{\mathrm{a}}\,\mathrm{ad}x$?

a) $\mathrm{u}=\mathrm{a}x$

b) $\mathrm{u}=(\mathrm{a}x+\mathrm{b})^{\mathrm{a}}$

c) $\mathrm{u}=\mathrm{a}x+\mathrm{b}$

Varianta B

Úloha 1: Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivá (ANO), nebo nepravdivá (NE).

1.1. Funkce $5x^4$ je primitivní funkcí k funkci x^5+6. (ANO - NE)

1.2. Inverzní operace k derivování je operace integrování. (ANO - NE)

1.3. Integrální křivkou funkce $f(x)$ je křivka, která má rovnici tvaru $y=F(x)$, kde $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$. (ANO - NE)

Úloha 2: Pro integrál součtu dvou funkcí platí:

a) $\int (f_1+f_2)\mathrm{d}x = \int f_1 + f_2 \mathrm{d}x$

b) $\int (f_1+f_2)\mathrm{d}x = \int f_1 \mathrm{d}x + \int f_2 \mathrm{d}x$

c) $\int (f_1+f_2)\mathrm{d}x = (f_1+f_2)\int \mathrm{d}x$

Úloha 3: Integrujte: $\int \sqrt{x+4}\,\mathrm{d}x$.

a) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2}+4x\right)+C$

b) $\dfrac{\sqrt{(x+4)}}{\ln(x+4)}+C$

c) $\dfrac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+4}+C$

Úloha 4: Která substituce je vhodná při výpočtu $\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x$?

a) $\mathrm{t}=\sin x$

b) $\mathrm{t}=\cos x$

c) $\mathrm{t}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Úloha 5: Vypočítejte $\int y\,7^y \mathrm{d}y$?

a) $\dfrac{y7^y}{\ln 7}-\dfrac{7^y}{\ln^2 7}+C$

b) $\dfrac{7^{y+1}}{y+1}y-\dfrac{7^{y+1}}{y+1}+C$

c) $\dfrac{7^y}{\ln 7}-\dfrac{7^{y+1}}{\ln^2 7}+C$

Úloha 6: Vypočítejte substituční metodou: $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+9}$.

a) $\dfrac{1}{3(x-3)^2}+C$

b) $\ln\left|(x-3)^2\right|+C$

c) $-\dfrac{1}{x-3}+C$

Úloha 7: Kolikrát použijeme při výpočtu metodu per partes v příkladu: $\int x^2 \sin x \mathrm{d}x$?

a) 1krát

b) 3krát

c) 2krát

Úloha 8: Vypočítejte daný integrál: $\int \dfrac{\ln^3 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

a) $-\dfrac{1}{x}\ln^3 x-\dfrac{3}{x}\ln x-\dfrac{3}{x}+C$

b) $-\dfrac{1}{x}\ln^3 x+3\ln^2 x\ln\left|x^2\right|+C$

c) $\dfrac{1}{x^2}\ln^3 x-\dfrac{3}{x}\ln^2 x+\dfrac{3}{x}+C$

Úloha 9: Integrujte: $\int \frac{3x+3}{\sqrt{x^3+3x}}\mathrm{d}x$.

a) $2\sqrt{x^3+3x}+C$

b) $\ln\sqrt{x^3+3x}+C$

c) $3\ln\sqrt{x^3+3x+C}$

Úloha 10: Která substituce je vhodná při výpočtu $\int \sin(\mathrm{a}x+\mathrm{b})\mathrm{d}x$?

a) $\mathrm{u}=\mathrm{a}x$

b) $\mathrm{u}=\sin(\mathrm{a}x+\mathrm{b})^{\mathrm{a}}$

c) $\mathrm{u}=\mathrm{a}x+\mathrm{b}$

Varianta C

Úloha 1: Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivá (ANO), nebo nepravdivá (NE).

1.1. Jestliže $x - x^2$ je primitivní funkcí k funkci $1 - 2x$ v intervalu J, pak $x - x^2 + 3$ je také primitivní funkcí. (ANO - NE)

1.2. Každou funkci $F(x)$, která má derivaci v intervalu J a splňuje v něm rovnost $F'(x) = f(x)$, nazýváme primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu J. (ANO - NE)

1.3. Neurčitým integrálem rozumíme primitivní funkci k dané funkci $f(x)$. (ANO - NE)

Úloha 2: Pro integrál součinu konstanty c a funkce $f(x)$ platí:

a) $\int \mathrm{c}f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{c}\int f(x)\mathrm{d}x$

b) $\int \mathrm{c}f(x)\mathrm{d}x = f(x)\int \mathrm{c}\mathrm{d}x$

c) $\int \mathrm{c}f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{c}f(x)\int \mathrm{d}x$

Úloha 3: Integrujte: $\int \frac{4x^3 + 2x - 1}{x^2}\mathrm{d}x$.

a) $2x^2 + 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C$

b) $2x^2 - 2\ln|x| + \ln|x^2| + C$

c) $x^2 - 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C$

Úloha 4: Která substituce je vhodná při výpočtu $\int \mathrm{cotg}\, x\mathrm{d}x$?

a) $\mathrm{t} = \sin x$

b) $\mathrm{t} = \frac{1}{\sin^2 x}$

c) $\mathrm{t} = \cos x$

Úloha 5: Vypočítejte $\int x \cos 3x \mathrm{d}x$?

a) $x \sin 3x + \frac{1}{3} \cos 3x + C$

b) $\frac{x}{3} \sin 3x + \frac{1}{3} \cos 3x + C$

c) $\frac{x}{3} \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C$

Úloha 6: Vypočítejte substituční metodou: $\int \frac{x^3 - 2x}{x^4 - 4x^2 + 7} \mathrm{d}x$.

a) $\frac{1}{8}(x^4 - 4x^2 + 7) + C$

b) $\frac{1}{4} \ln\left|x^4 - 4x^2 + 7\right| + C$

c) $\frac{1}{2}\left(x^4 - 4x^2 + 7\right) + \ln\left|x^4 - 4x^2 + 7\right| + C$

Úloha 7: Kolikrát použijeme při výpočtu metodu per partes v příkladu $\int x \sin 2x \mathrm{d}x$?

a) 2krát

b) 1krát

c) 3krát

Úloha 8: Vypočítejte daný integrál: $\int \left(x^2 - 1\right) \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

a) $\mathrm{e}^x\left(x^2 - 1\right) + \mathrm{e}^x 2x - 2\mathrm{e}^x + C$

b) $\left(x^2 - 1\right) + \mathrm{e}^x 2x - 2\mathrm{e}^x + C$

c) $\mathrm{e}^x\left(x^2 - 1\right) - \mathrm{e}^x 2x + 2\mathrm{e}^x + C$

Úloha 9: Integrujte: $\int 7\mathrm{e}^{-7x-6} \mathrm{d}x$.

a) $-\frac{\mathrm{e}^{-7x-6}}{7x-5} + C$

b) $-\mathrm{e}^{-7x-6} + C$

c) $\frac{\mathrm{e}^{-7x-5}}{7x-5} + C$

Úloha 10: Která substituce je vhodná při výpočtu $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+a}}$?

a) $u = \sqrt{x+a}$

b) $u = x + a$

c) $u = x\sqrt{x+a}$

Varianta D

Úloha 1: Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivá (ANO), nebo nepravdivá (NE).

1.1. Proces hledání primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$ se nazývá integrace a značí se $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$. (ANO - NE)

1.2. Známe-li integrální křivku $y = \sin x$, pak každou jinou integrální křivku $y = \sin x + C$ dostaneme posunutím křivky $y = \sin x$ ve směru osy y o konstantu C.

(ANO - NE)

1.3. Každá spojitá funkce v intervalu má v něm primitivní funkci. (ANO - NE)

Úloha 2: Pro integrál rozdílu dvou funkcí platí:

a) $\int (f_1 - f_2)\mathrm{d}x = (f_1 - f_2)\int \mathrm{d}x$

b) $\int (f_1 - f_2)\mathrm{d}x = \int f_1 - f_2 \mathrm{d}x$

c) $\int (f_1 - f_2)\mathrm{d}x = \int f_1 \mathrm{d}x - \int f_2 \mathrm{d}x$

Úloha 3: Integrujte: $\int \frac{9x^4 + 5x^3 + 2}{x^2}\mathrm{d}x$.

a) $\frac{9x^3}{3} + \frac{5x^3}{2} + 2\ln\left|x^2\right| + C$

b) $\frac{9x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - \frac{2}{x} + C$

c) $\frac{9x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + C$

Úloha 4: Která substituce je vhodná při výpočtu $\int \operatorname{tg} x \mathrm{d}x$?

a) $\cos x$

b) $\sin x$

c) $\frac{1}{\cos^2 x}$

Úloha 5: Vypočítejte $\int x \sin 2x \mathrm{d}x$?

a) $-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

b) $-x\cos 2x - \sin 2x + C$

c) $-\frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$

Úloha 6: Vypočítejte substituční metodou: $\int \frac{x^5 - 2x}{x^6 - 6x^2 - 1}\mathrm{d}x$.

a) $\frac{1}{3}(x^6 - 6x^2 - 1) + \ln\left|\left(x^6 - 6x^2 - 1\right)\right| + C$

b) $\frac{1}{12}(x^6 - 6x^2 - 1) + C$

c) $\frac{1}{6}\ln\left|\left(x^6 - 6x^2 - 1\right)\right| + C$

Úloha 7: Kolikrát použijeme při výpočtu metodu per partes v příkladu $\int x\cos 3x \mathrm{d}x$?

a) 3krát

b) 1krát

c) 2krát

Úloha 8: Vypočítejte daný integrál: $\int x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

a) $x^2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$

b) $\mathrm{e}^x \frac{x^3}{3} - x^3\mathrm{e}^x + 4x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + C$

c) $\mathrm{e}^x(x^2 - x + 1) + C$

Úloha 9: Integrujte: $\int 3\mathrm{e}^{-3x+1}\mathrm{d}x$.

a) $-\mathrm{e}^{-3x+1} + C$

b) $-\frac{\mathrm{e}^{-3x+2}}{3x+2} + C$

c) $\frac{\mathrm{e}^{-3x+1}}{3x+2} + C$

Úloha 10: Která substituce je vhodná při výpočtu $\int \cos(ax+b)\mathrm{d}x$?

a) $u = ax$

b) $u = ax + b$

c) $u = \sin(ax + b)$

10.1.2 Testová příručka pro test číslo 2

Test zjišťuje znalost základních poznatků z oblasti integrování daných typů funkcí a využití těchto znalostí v aplikačních úlohách. Úlohy mají tedy charakter jak úvahový, tak početní. Test je typu „papír - tužka“ pro jednorázové použití. Test je k dispozici ve čtyřech ekvivalentních variantách (A, B, C, D). Vyskytuje se v něm deset testových úloh. Tento test obsahuje úlohy různého typu (úlohy s výběrovými odpověďmi (typu „jedna správná odpověď“), dichotomické úlohy, úlohy se stručnou odpovědí, otevřené široké úlohy). Úlohy mají rozdílnou náročnost podle B. Niemerkovy taxonomie učebních úloh.

Didaktický test prověřuje znalost tří tématických celků:
téma 1: Racionální funkce a jejich integrování
téma 2: Iracionální funkce a jejich integrování
téma 3: Goniometrické funkce a jejich integrování.

Doba na vypracování testu je stanovena na 40 minut. Správné odpovědi a postup řešení studenti vpisují přímo do testových sešitů. Student může mít k dispozici svůj papír pro pomocné výpočty, který ale neodevzdává. Při hodnocení se kontroluje pouze to, co je zaznamenáno v testovém sešitě. Pro řešení otevřených širokých úloh má student pod zadáním vynechané místo, určené pro postup řešení. Pokud bude student potřebovat více místa pro výpočty, může použít druhou stranu papíru, kde označí číslo úkolu, který právě řeší. Při opravě testu vyučující kontroluje i postup, kterým student úlohu řeší.

Poněvadž tento způsob kontroly je časově náročnější, vyučující má k dispozici arch s uvedenými výsledky i postupy řešení. V archu je uveden vždy jen jeden způsob řešení úlohy. Všechny tyto pokyny mají zajistit objektivizaci zkoušení vědomostí a dovedností studentů.

Pokyny pro examinátora:

Před zahájením testu student obdrží testový sešit. Po vyplnění základních údajů (jméno, studijní skupina atd.) na testovém sešitě student začne řešit úlohy na pokyn examinátora. Je třeba studenty upozornit na vymezený čas pro vypracování testu, což je v tomto případě 40 minut. Po skončení stanovené doby musí všichni studenti práci ukončit na stručný a zřetelný pokyn examinátora. Je třeba dbát na to, aby studenti psali postup řešení a výsledky přímo do testového sešitu. Examinátor musí dodržovat pokyny pro zkoušené, aby byla dodržena objektivnost a jednotnost testování.

Instrukce:

1. Před sebou máte test, kterým se prověří vaše znalosti z teorie racionální funkce, iracionální funkce, goniometrické funkce a způsobu jejich integrování.
2. Na vypracování testu je stanovená doba 40 minut.
3. Postup řešení a výsledky úloh zapisujte přímo do testové sešitu.
4. Budete se řídit pokyny examinátora.
5. Vezměte si testový sešit a vyplňte základní údaje uvedené v hlavičce testu (jméno, studijní skupina atd.). Po jejich vyplnění odložte psací potřeby a čekejte na další pokyny od examinátora.
6. Než-li začnete řešit dané úkoly, pozorně si přečtěte zadaní a teprve potom řešte úkoly přímo pod zadaní.
7. V testu se objevují tyto typy úloh:

a) Úlohy s výběrovými odpověďmi (úlohy typu „jedna správná odpověď“), kde máte za úkol vybrat ze tří nabídnutých odpovědí (a, b, c). Vaši odpověď zakroužkujte.

b) Dichotomické úlohy, kde máte uvedená tvrzení, u nichž máte rozhodnout zda jsou pravdivá či nikoli. Správnou odpověď zakroužkujte.

c) Úlohy se stručnou odpovědí, kde je třeba dopsat na příslušné tečky krátkou odpověď.

d) Otevřené široké úlohy, kde jste vybídnuti k vyřešení příkladu. Postup výpočtu zapisujte přímo pod zadání a konečný výsledek zapište do příslušné kolonky.

8. Některé úlohy tvoří podotázky.
9. Pokud budete chtít změnit váš výsledek a postup řešení v testu, škrkněte to, co vám vyučující nemá považovat za odpověď (u úloh s širokou odpovědí, úlohy se stručnou odpovědí). U úloh s výběrovými odpověďmi špatně zvolenou odpověď škrkněte a nově zvolenou odpověď zakroužkujte.
10. Rozumíte všem uvedeným pokynům? Máte k tomu nějaký dotaz? Začněte pracovat!

Hodnocení testu:

Oprava řešení se provádí pomocí archu, na němž jsou uvedené výsledky jednotlivých úloh spolu s postupem jejich řešení. Bodové hodnocení jednotlivých úloh zapisuje vyučující na okraj testu u příslušné otázky. Celkový počet získaných bodů zapíše vyučující do předtištěného obdélníčku uvedeného v záhlaví na přední straně testového sešitu pod jménem zkoušeného. U otázky složené z jednotlivých částí se zapisuje součet bodů za správné odpovědi (každá část úkolu je hodnocena jedním bodem).

10.1.2.1 Test číslo 2 (varianta A, B, C, D)

Varianta A

<table>
<tr><td colspan="2">Datum:</td><td colspan="2">Jméno a příjmení:</td></tr>
<tr><td>Studijní kombinace:</td><td colspan="2">Skupina: **A**</td><td>Celkový počet bodů:</td></tr>
</table>

Úloha 1: Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivá (ANO), nebo nepravdivá (NE).

1.1. Funkce ve tvaru $f(x) = 4x^5 + 2x^3 - 6x + 4$ je funkce, kterou nazýváme iracionální funkce. (ANO - NE)

1.2. Lomená racionální funkce je dána podílem dvou konečných polynomů. (ANO - NE)

1.3. Racionální funkci nelze rozložit na součet mnohočlenu a konečný počet parciálních zlomků. (ANO - NE)

Úloha 2: Je dán vztah lomené funkce: $f(x) = \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \frac{a_1 x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$,

za jaké podmínky se jedná o funkci:

a) ryze lomenou racionální

………………………………………………………………………………………

b) neryze lomenou racionální

………………………………………………………………………………………

c) lineárně lomenou

………………………………………………………………………………………

Úloha 3: Vypočítejte $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 6x + 25}$.

a) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{4}\right) + C$

b) $\ln\left|x^2 + 6x + 25\right| + C$

c) $16 \operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{16}\right) + C$

Úloha 4: Určete, jak se při výpočtu rozloží daná racionální funkce na parciální zlomky.

$$\frac{x}{(x-1)\left(2x^2+x+3\right)^2}$$

a) $\dfrac{A}{(x-1)}+\dfrac{Bx+C}{\left(2x^2+x+3\right)^2}$

b) $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(2x^2+x+3)}+\dfrac{Cx+D}{(2x^2+x+3)^2}$

c) $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{(2x^2+x+3)}+\dfrac{Dx+E}{(2x^2+x+3)^2}$

Úloha 5: Vypočtěte integrál goniometrické funkce: $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 6: Integrujte iracionální funkci: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 7: Určete koeficienty A, B u funkce $\dfrac{x+7}{x^2-2x-3}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

$A =$
$B =$

Úloha 8: Integrujte racionální funkci: $\int \frac{x^2}{x^4 - 1} \mathrm{d}x$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

$\boxed{}$

Úloha 9: Která substituce je vhodná při výpočtu $\int \frac{1}{\sqrt{1 + x + x^2} + x} \mathrm{d}x$?

a) $\sqrt{1 + x + x^2} = t$

b) $\sqrt{1 + x + x^2} = t - x$

c) $\sqrt{1 + x + x^2} + x = t - x$

Úloha 10: Nalezněte primitivní funkci k dané goniometrické funkci: $\frac{\cos^3 x}{1 + \sin x}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

$\boxed{}$

Varianta B

Datum:		Jméno a příjmení:
Studijní kombinace:	Skupina: **B**	Celkový počet bodů:

Úloha 1: Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivá (ANO), nebo nepravdivá(NE).

1.1. Iracionální funkce je funkce, kterou lze vyjádřit ve tvaru polynomu. (ANO - NE)

1.2. Funkce ve tvaru $f(x)=\dfrac{1}{4+\sqrt{5x^2+6}}$ se nazývá ryze lomená racionální funkce.

(ANO - NE)

1.3. Racionální funkci $\dfrac{\mathrm{Q}(x)}{\mathrm{M}(x)}$ můžeme rozložit na jednoduché neboli parciální zlomky.

(ANO - NE)

Úloha 2: Je dán vztah lomené funkce: $f(x)=\dfrac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}=\dfrac{a_1x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}$,

za jaké podmínky se jedná o funkci:

a) neryze lomenou racionální

……………………………………………………………………………………………

b) lineárně lomenou racionální

……………………………………………………………………………………………

c) ryze lomenou racionální

……………………………………………………………………………………………

Úloha 3: Vypočítejte $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-8x+25}$.

a) $\dfrac{1}{9}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-4}{3}\right)+C$

b) $\ln\left|x^2-8x+25\right|+C$

c) $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-4}{3}\right)+C$

Úloha 4: Určete, jak se při výpočtu rozloží daná racionální funkce na parciální zlomky:

$$\frac{3x-4}{\left(3x^2+2x+6\right)^2(x+1)}$$

a) $\dfrac{A}{3x^2+2x+6}+\dfrac{Bx+C}{\left(3x^2+2x+6\right)^2}+\dfrac{D}{x+1}$

b) $\dfrac{Ax+B}{3x^2+2x+6}+\dfrac{Cx+D}{\left(3x^2+2x+6\right)^2}+\dfrac{E}{x+1}$

c) $\dfrac{Ax+B}{3x^2+2x+6}+\dfrac{C}{x+1}$

Úloha 5: Vypočtěte integrál goniometrické funkce: $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 6: Integrujte iracionální funkci: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 7: Určete koeficienty A, B u funkce $\dfrac{x+2}{3x^2+3x-18}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

$A=$
$B=$

Úloha 8: Integrujte racionální funkci: $\int \frac{x^3+2}{x(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

$\boxed{}$

Úloha 9: Která substituce je vhodná při výpočtu $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2}}$?

a) $x\sqrt{x+2}=t-x$

b) $\sqrt{x+2}=t-x$

c) $\sqrt{x+2}=t$

Úloha 10: Nalezněte primitivní funkci k dané goniometrické funkci: $\frac{\sin^3 x}{\cos x+1}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

$\boxed{}$

Varianta C

Datum:		Jméno a příjmení:
Studijní kombinace:	Skupina: **C**	Celkový počet bodů:

Úloha 1: Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivá (ANO), nebo nepravdivá (NE).

1.1. Funkce ve tvaru $f(x) = -3x^3 + 7x - 5$ je racionální funkce. (ANO - NE)

1.2. Iracionální funkce můžeme označit jako podíl dvou konečných polynomů.

(ANO - NE)

1.3. Integrace iracionálních funkcí spočívá v převedení na integraci racionálních funkcí pomocí vhodné substituce. (ANO - NE)

Úloha 2: Je dán vztah lomené funkce: $f(x) = \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \frac{a_1 x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$,

za jaké podmínky se jedná o funkci:

a) lineárně lomenou racionální

………………………………………………………………………………………

b) ryze lomenou racionální

………………………………………………………………………………………

c) neryze lomenou racionální

………………………………………………………………………………………

Úloha 3: Vypočítejte $\int \frac{1}{9+4x^2}\,\mathrm{d}x$.

a) $\frac{1}{9}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}x + C$

b) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}x + C$

c) $\ln\left|9 + 4x^2\right| + C$

Úloha 4: Určete, jak se při výpočtu rozloží daná racionální funkce na parciální zlomky.

$$\frac{x^3+2x-13}{x^2(x^2+2x+3)}$$

a) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2}+\dfrac{Dx+E}{x^2+2x+3}$

b) $\dfrac{Ax+B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+3}$

c) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+3}$

Úloha 5: Vypočtěte integrál goniometrické funkce: $\int \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 6: Integrujte iracionální funkci: $\int \frac{\sqrt{2x-5}}{x} \mathrm{d}x$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 7: Určete koeficienty A, B u funkce $\frac{5x-3}{x^2-5x+6}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

$A=$
$B=$

Úloha 8: Integrujte racionální funkci: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + 4x}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

$\boxed{}$

Úloha 9: Která substituce je vhodná při výpočtu $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$?

a) $x = t^3$

b) $\sqrt[3]{x} = t$

c) $\left(1+\sqrt[3]{x}\right) = t - x$

Úloha 10: Nalezněte primitivní funkci k dané goniometrické funkci: $\frac{\sin x \cos x}{2 + \sin x}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

$\boxed{}$

Varianta D

<table>
<tr><td colspan="2">Datum:</td><td colspan="2">Jméno a příjmení:</td></tr>
<tr><td>Studijní kombinace:</td><td colspan="2">Skupina: D</td><td>Celkový počet bodů:</td></tr>
</table>

Úloha 1: Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivá (ANO), nebo nepravdivá (NE).

1.1. Funkce ve tvaru $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-7}}{x+1}$ se nazývá iracionální funkce. (ANO - NE)

1.2. Racionální funkce je vyjádřena jako podíl dvou polynomů. (ANO - NE)

1.3. Iracionální funkci můžeme rozložit na částečné neboli parciální zlomky. (ANO - NE)

Úloha 2: Je dán vztah lomené funkce: $f(x)=\dfrac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}=\dfrac{a_1x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$,

za jaké podmínky se jedná o funkci:

a) ryze lomenou racionální

………………………………………………………………………………………

b) lineárně lomenou racionální

………………………………………………………………………………………

c) neryze lomenou racionální

………………………………………………………………………………………

Úloha 3: Vypočítejte $\int \dfrac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+C$

b) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2}+C$

c) $\ln\left|x^2+2x+3\right|+C$

Úloha 4: Určete, jak se při výpočtu rozloží daná racionální funkce na parciální zlomky.

$$\frac{x^2+3x-1}{x^2(4x^2-6)}$$

a) $\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2}+\frac{Dx+E}{4x^2-6}$

b) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{4x^2-6}$

c) $\frac{Ax+B}{x^2}+\frac{Cx+D}{4x^2-6}$

Úloha 5: Vypočtěte integrál goniometrické funkce: $\int \cos^4 x \sin^3 x \mathrm{d}x$. Výsledek zapište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 6: Integrujte iracionální funkci: $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\mathrm{d}x$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 7: Určete koeficienty A, B u funkce $\frac{1}{x^2-6x+5}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

$A =$
$B =$

Úloha 8: Integrujte racionální funkci: $\int \frac{3x-2}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

$\boxed{}$

Úloha 9: Která substituce je vhodná při výpočtu $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$?

a) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t$

b) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t - x$

c) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t^2$

Úloha 10: Nalezněte primitivní funkci k dané goniometrické funkci: $\frac{\cos x \sin x}{\cos x + 2}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

$\boxed{}$

10.1.3 Testová příručka pro test číslo 3

Tento didaktický test slouží ke zjištění kvality znalostí, vědomostí studenta v dané problematice a prokáže se jím i schopnost aplikovat dané vědomosti do konkrétních modelových situací. Test je k dispozici ve čtyřech rovnocenných variantách (A, B, C, D). Úlohy vyžadují od studenta jak správnou početní schopnost, tak i správnou úvahovou schopnost. Test je typu „papír - tužka“. Obsahuje jedenáct testových úloh různého typu. V testu se objevují úlohy s výběrovými odpověďmi (úlohy typu „jedna správná odpověď“), úlohy se stručnou a širokou odpovědí. Náročnost úloh je rozdílná ve smyslu B. Niemerkovy taxonomie učebních úloh.

Test je sestaven ze tří tématických oblastí:

téma 1: Reimannův určitý integrál

téma 2: Výpočet určitých integrálů

téma 3: Nevlastní integrály.

Na vypracování testu je vyhrazen čas 40 minut. Student svá řešení zaznačí do záznamového archu. Kontrola testu se provádí pomocí vyhodnocovací šablony.

Pokyn pro examinátora:

Než začne student test vypracovávat, dostane testový sešit a záznamový arch. Student vyplní základní údaje (jméno, studijní skupinu atd.) uvedené v hlavičce záznamového archu. Potom studenti otevřou testový sešit a na pokyn examinátora začnou pracovat na řešení testu. Čas na vypracování je 40 minut, na což je důležité upozornit studenty předem. Po vypršení doby a jasného pokynu examinátora musí všichni studenti práci ukončit. Examinátor kontroluje, zda studenti skutečně zapisují výsledky do záznamového archu, nikoli do testu. Všechny tyto pokyny se snaží o objektivizaci prověřování vědomostí a dovedností studentů.

Instrukce:

1. Obdrželi jste test, který zkouší kvalitu vašich vědomostí z oblasti Reimannova určitého integrálu, výpočtu určitého integrálu a nevlastních integrálů.
2. Čas určený k vyřešení testu je 40 minut.
3. Odpovědi na otázky a řešení úloh zaznamenávejte pouze do záznamového archu, který vám byl rozdaný spolu s testovým sešitem. Pište čitelně!
4. Budete se řídit opatření examinátora.
5. Vezměte si záznamový arch a vyplňte požadované údaje uvedené v záhlaví testu. Po vyplnění údajů odložte pera a počkejte na další pokyny od examinátora.
6. Před řešením úkolu si vždy pozorně přečtěte v zadání, co se po vás žádá a teprve na to, daný úkol řešte. Svá řešení zaznačte do záznamového archu, který vám byl rozdán zároveň s testovým sešitem.
7. V testu se setkáte s těmito typy úloh:

a) Úlohy s výběrovými odpověďmi - kdy bude vaším úkolem zvolit správnou odpověď ze tří nabídnutých odpovědí (a, b, c), vždy je jen jedna správná odpověď. Své rozhodnutí zaznačte do záznamového archu křížkem (jako ve sportce).

b) Úlohy se stručnou odpovědí - kdy v úkolu musíte doplnit chybějící výraz. Tento výraz vepíšete do předtištěného obdélníčku v záznamovém archu. Pokud budete mít za úkol vypočítat příklad, pouze jeho výsledek zapíšete opět do předtištěného rámečku v záznamovém archu, nikoli celý postup řešení.

8. Pokud budete chtít vaši odpověď změnit, škrtněte váš původní výsledek a nový výsledek znovu označte křížkem a zakroužkujte (v případě úloh s výběrovými odpověďmi) nebo původní výsledek škrtněte a vpište znovu nový výsledek a zakroužkujte ho v záznamovém archu.
9. Můžete mít k dispozici vlastní papír pro pomocné výpočty, který neodevzdáváte.
10. Máte k uvedeným pokynům nějaký dotaz? Začněte psát!

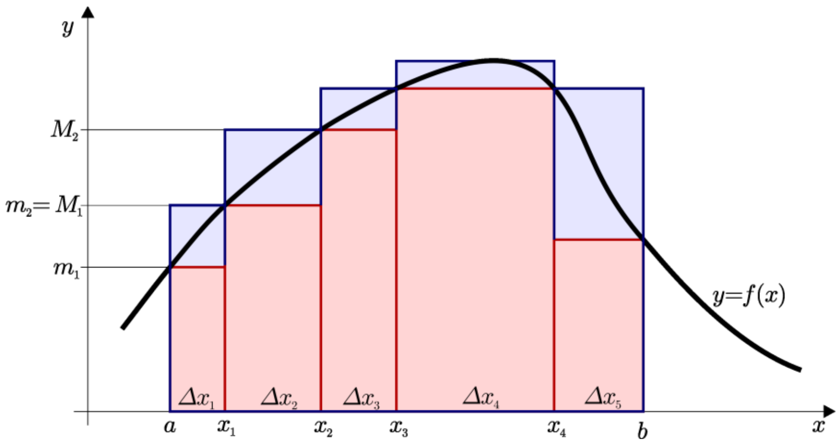
Hodnocení testu:

Oprava řešení se provádí pomocí vyhodnocovacích šablon, na nichž jsou uvedeny správná řešení a odpovídající bodové hodnocení. Při opravování se přiloží vyhodnocovací šablona k příslušnému sloupci záznamového archu takovým způsobem, aby byla čísla otázek na záznamovém archu ve stejné úrovni s čísly na šabloně. Sloupec s bodovým hodnocením se na šabloně nachází vpravo. Na záznamovém archu vpravo je volný sloupec pro zápis bodového hodnocení jednotlivých úkolů. V posledním řádku záznamového archu dostaneme celkový počet bodů z testu. U otázky složené z několika částí je hodnocení rozloženo na odpovídající části a také se tyto části hodnotí samostatně.

10.1.3.1 Test číslo 3 (varianta A, B, C, D)

Varianta A

Obrázek 1. Zavedení Riemannova integrálu



převzato z: mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=851

Úloha 1:

1.1. Zakroužkujte správné tvrzení:

a) Označení M_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje supremum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

b) Označení M_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje infimum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

c) Označení M_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje částečné intervaly.

1.2. Zakroužkujte správné tvrzení.

a) Označení m_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje supremum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

b) Označení m_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje částečné součty.

c) Označení m_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje infimum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

1.3. Symbol Δx_i, $i = 1,2,...,n$ je:

a) částečný interval

b) dolní součet

c) norma dělení

Úloha 2: Zapiš vzorec pro horní součet funkce $f(x)$ při dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ z předchozího úkolu.

$S_n = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Úloha 3: Která z nabídnutých funkcí není integrovatelná na každém uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$?

a) $x^2 + 3x - 4$

b) $\sin x$

c) $\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-1}$

Úloha 4: Je-li $a < b < c$ a funkce *f* je integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$, potom platí: $0 < \vartheta < 1$

a) $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$

b) $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x \cdot \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$

c) $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$

Úloha 5: Pro které funkce se definuje Riemannův určitý integrál?

a) pro spojité funkce

b) pro funkce s konečným počtem bodů nespojitosti

c) pro funkce s nekonečným počtem bodů nespojitosti

Úloha 6: Bez výpočtu užitím vlastností Riemannova integrálu rozhodněte, který z dvojic integrálů $\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$; $\int_1^2 x\,\mathrm{d}x$ má vyšší hodnotu.

a) $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x > \int_1^2 x\mathrm{d}x$

b) $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x < \int_1^2 x\mathrm{d}x$

c) $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^2 x\mathrm{d}x$

Úloha 7: Integrujte: $\int_0^1 \mathrm{x}^2 \ln x\mathrm{d}x$.

Úloha 8: Vypočítejte $\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{2x-1}}$.

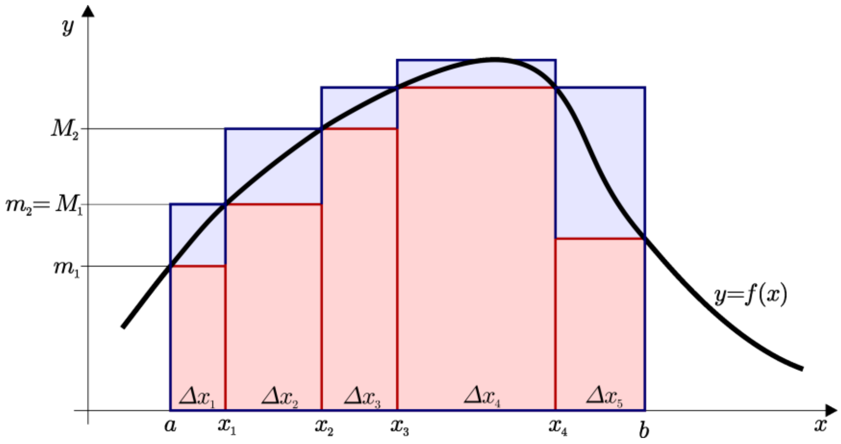
Úloha 9: Určete, zda nevlastní integrál $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2}$ diverguje nebo konverguje.

Úloha 10: Vypočítejte střední hodnotu $f(c)$ funkce $f(x)=\cos x$ v intervalu $\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Úloha 11: Vypočítejte nevlastní integrál: $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Určete, zda integrál konverguje nebo diverguje.

Varianta B

Obrázek 1. Zavedení Riemannova integrálu



převzato z: mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=851

Úloha 1:

1.1. Zakroužkujte správné tvrzení.

a) Označení m_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje supremum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

b) Označení m_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje částečné součty.

c) Označení m_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje infimum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

1.2. Symbol Δx_i, $i = 1,2,...,n$ je:

a) dolní součet

b) norma dělení

c) částečný interval

1.3. Zakroužkujte správné tvrzení:

a) Označení v daném grafu představuje částečné intervaly.

b) Označení M v daném grafu představuje supremum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

c) Označení M v daném grafu představuje infimum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

Úloha 2: Zapiš vzorec pro dolní součet funkce $f(x)$ při dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ z předchozího úkolu.

$s_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Úloha 3: Která z nabídnutých funkcí je integrovatelná na každém uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$?

a) $\cos x$

b) $\mathrm{tg}\, x$

c) $\dfrac{1}{x\sqrt{x-2}}$

Úloha 4: Jsou-li funkce f a g integrovatelné na intervalu $\langle a,b\rangle$ a platí-li $f \le g$, potom:

a) $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

b) $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \ge \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

c) $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Úloha 5: Pro které funkce se definuje Riemannův určitý integrál?

a) pro funkce s konečným počtem bodů nespojitosti

b) pro funkce s nekonečným počtem bodů nespojitosti

c) pro spojité funkce

Úloha 6: Bez výpočtu užitím vlastností Riemannova integrálu rozhodněte, který z dvojic integrálů $\int_1^2 x\mathrm{d}x$; $\int_1^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ má vyšší hodnotu.

a) $\int_1^2 x\mathrm{d}x > \int_1^2 \sqrt{x}\mathrm{d}x$

b) $\int_1^2 x\mathrm{d}x < \int_1^2 \sqrt{x}\mathrm{d}x$

c) $\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

Úloha 7: Integrujte: $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$.

Úloha 8: Vypočítejte $\int_1^6 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{3x-2}}$.

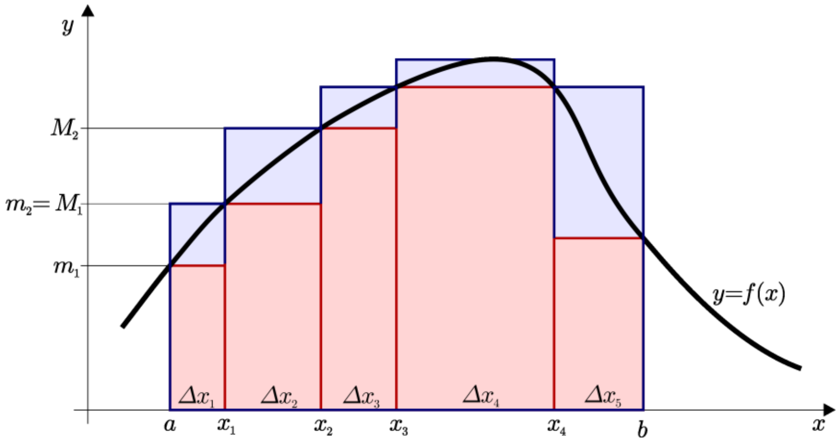
Úloha 9: Určete, zda nevlastní integrál $\int_4^{+\infty} \frac{2x-4}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x$ diverguje nebo konverguje.

Úloha 10: Vypočítejte střední hodnotu $f(c)$ funkce $f(x)=\sin x$ v intervalu $\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Úloha 11: Vypočítejte nevlastní integrál: $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$. Určete, zda integrál konverguje nebo diverguje.

Varianta C

Obrázek 1. Zavedení Riemannova integrálu



převzato z: mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=851

Úloha 1:

1.1. Symbol Δx_i, $i = 1,2,...,n$ je:

a) norma dělení

b) částečný interval

c) dolní součet

1.2. Zakroužkujte správné tvrzení:

a) Označení M_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje supremum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

b) Označení M_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje částečné intervaly.

c) Označení M_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje infimum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

1.3. Zakroužkujte správné tvrzení.

a) Označení m_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje supremum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

b) Označení m_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje částečné součty.

c) Označení m_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje infimum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

Úloha 2: Zapiš vzorec pro integrální součet funkce $f(x)$ při dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ z předchozího úkolu.

$\sigma_n = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Úloha 3: Která z nabídnutých funkcí není integrovatelná na každém uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$?

a) $\dfrac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x}}$

b) $\cos x$

c) $x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 1$

Úloha 4: Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$, proto také $|f|$ je integrovatelná a platí:

a) $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$

b) $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \geq \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$

c) $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$

Úloha 5: Pro které funkce se definuje Riemannův určitý integrál?

a) pro funkce s nekonečným počtem bodů nespojitosti

b) pro spojité funkce

c) pro funkce s konečným počtem bodů nespojitosti

Úloha 6: Bez výpočtu užitím vlastností Riemannova integrálu rozhodněte, který z dvojic integrálů $\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x$; $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ má vyšší hodnotu.

a) $\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x < \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

b) $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

c) $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Úloha 7: Integrujte: $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\,\mathrm{d}x$.

Úloha 8: Vypočítejte $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,\mathrm{d}x$.

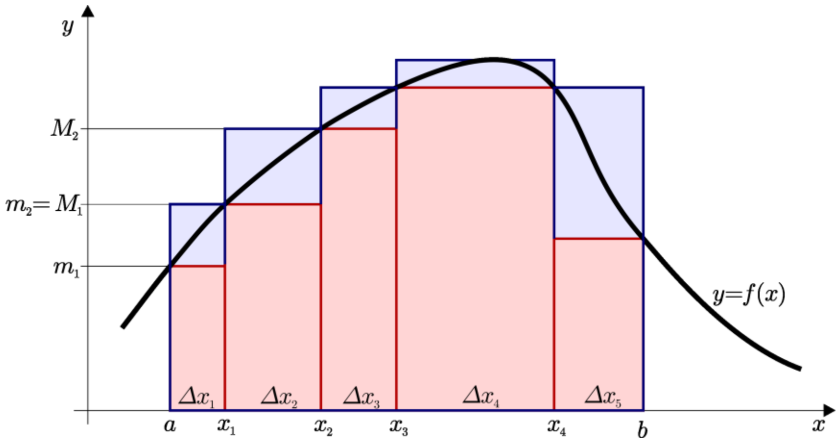
Úloha 9: Určete, zda nevlastní integrál $\int_1^{+\infty} \frac{x+6}{x^3+3x}\,\mathrm{d}x$ diverguje nebo konverguje.

Úloha 10: Vypočítejte střední hodnotu $f(c)$ funkce $f(x) = x-1$ v intervalu $\langle 2;4 \rangle$.

Úloha 11: Určete hodnotu nevlastního integrálu: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$. Určete, zda integrál konverguje nebo diverguje.

Varianta D

Obrázek 1. Zavedení Riemannova integrálu



převzato z: mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=851

Úloha 1:

1.1. Zakroužkujte správné tvrzení.

a) Označení m_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje částečné součty.

b) Označení m_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje infimum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

c) Označení m_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje supremum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

1.2. Zakroužkujte správné tvrzení:

a) Označení M_i, $i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje částečné intervaly.

b) Označení $M_i, i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje infimum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

c) Označení $M_i, i = 1,2,...,n$ v daném grafu představuje supremum množiny funkčních hodnot funkce na intervalu.

1.3. Symbol Δx_i, $i = 1,2,...,n$ je:

a) částečný interval

b) norma dělení

c) dolní součet

Úloha 2: Zapiš vzorec pro horní součet funkce $f(x)$ při dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ z předchozího úkolu.

$S_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

Úloha 3: Která z nabídnutých funkcí je integrovatelná na každém uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$?

a) $\dfrac{\sqrt{4x-6}}{x}$

b) $\arcsin x$

c) $x^3 - 3x^2 + 8x - 5$

Úloha 4: Jsou-li funkce f a g integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$, pak platí:

a) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b g(x)\mathrm{d}x$

b) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

c) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Úloha 5: Pro které funkce se definuje Riemannův určitý integrál?

a) pro spojité funkce

b) pro funkce s nekonečným počtem bodů nespojitosti

c) pro funkce s konečným počtem bodů nespojitosti

Úloha 6: Bez výpočtu užitím vlastností Riemannova integrálu rozhodněte, který z dvojic integrálů $\int_0^1 x\mathrm{d}x$; $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ má vyšší hodnotu.

a) $\int_0^1 x\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x$

b) $\int_0^1 x\mathrm{d}x > \int_0^1 x^2\mathrm{d}x$

c) $\int_0^1 x\mathrm{d}x < \int_0^1 x^2\mathrm{d}x$

Úloha 7: Integrujte: $\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

Úloha 8: Vypočtěte $\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\mathrm{d}x$.

Úloha 9: Určete, zda nevlastní integrál $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+4x}$ diverguje nebo konverguje.

Úloha 10: Vypočítejte střední hodnotu $f(c)$ funkce $f(x) = x + 2$ v intervalu $\langle 0;3 \rangle$.

Úloha 11: Určete hodnotu nevlastního integrálu: $\int_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$. Určete, zda integrál konverguje nebo diverguje.

10.1.4 Testová příručka pro test číslo 4

Test zjišťuje kvalitu osvojení poznatků v dané oblasti učiva a zjišťuje úroveň operačních a myšlenkových schopností studenta. Test je vytvořen ve čtyřech ekvivalentních variantách (A, B, C, D). K řešení testových položek nepotřebuje fyzikální vědomosti. Úlohy vyžadují od studenta výbornou znalost základních poznatků z daného okruhu a početní schopnost. Test je typu „papír - tužka“. Tvoří ho deset testových položek. Vyskytují se v něm úlohy se stručnou odpovědí a úlohy s výběrovými odpověďmi (úlohy typu „jedna správná odpověď“).

Náročnost testových položek je různá dle B. Niemerkovy taxonomie učebních úloh.

Test tvoří rozsáhlý tématický celek Použití určitého integrálu, konkrétněji:

téma 1: Obsah rovinné plochy

téma 2: Délka křivky

téma 3: Obsah pláště rotačního tělesa

téma 4: Objem rotačního tělesa

téma 5: Fyzikální aplikace

téma 6: Přibližný výpočet určitého integrálu.

Na vypracování testu je 40 minut s možností prodloužení času o 5 minut z důvodu časově náročnějšího způsobu vypracování testu. Student zapisuje správné výsledky do záznamového archu. K opravě testu se používá vyhodnocovací šablona. Všechna tato opatření v souladu se snahou o objektivizaci prověřování znalostí a dovedností studentů.

Pokyny pro examinátora:

Před uvedením pokynu k začátku práce od examinátora, dostane každý student testový sešit a záznamový arch. Nejdříve si student vyplní základní informace (jméno, studijní skupinu atd.) uvedené na záznamovém archu, a teprve potom studenti otevřou testový sešit. Až na pokyn examinátora mohou studenti začít test vypracovávat. Na to mají i s prodloužením času 40 minut. Po tomto čase examinátor dá pokyn k ukončení práce a všichni studenti toto musí respektovat. Examinátor kontroluje, zda studenti zapisují výsledky do příslušných záznamových archů. Tyto pokyny udržují objektivnost a jednotnost testování.

Instrukce:

1. Test, který je před vámi, zjišťuje hloubku vašich znalostí z oblasti použití určitého integrálu (obsah rovinné plochy, délka křivky, obsah pláště rotačního tělesa, objem rotačního tělesa, fyzikální aplikace, přibližný výpočet určitého integrálu).
2. Na vypracování testu je čas 40 minut s možností prodloužení o 5 minut.
3. Odpovědi na otázky a řešení příkladů zapisujte do záznamového archu, který jste dostaly spolu s testovým sešitem. Pomocné výpočty provádějte na svůj vlastní papír, který neodevzdáváte. Pište čitelně!
4. Dodržujte pokyny od examinátora.
5. V záznamovém archu doplňte potřebné údaje uvedené v záhlaví didaktického testu. Až to budete mít, odložte psací potřeby a čekejte na následující pokyny od examinátora.
6. Před vypracováním si pečlivě přečtěte zadání úkolu, teprve potom začněte úkol vypracovávat a nakonec svoji odpověď zapište do příslušného obdélníčku v záznamovém archu.
7. Pokud budete chtít svoje řešení změnit, škrtněte původní řešení a vedle v téže kolonce napište řešení nové a zakroužkujte ho.
8. Test je sestaven z těchto typů úloh:

a) úlohy se stručnou odpovědí - kde bude vaším úkolem vyřešit příklad a jeho výsledek zapsat do záznamového archu do předtištěného obdélníčku.

b) úlohy s výběrem odpovědi - vaším úkolem bude zvolit správnou odpověď ze tří nabídnutých odpovědí (a, b, c). A tuto odpověď označit v záznamovém archu pomocí křížku (jako ve sportce).

9. Můžete mít k dispozici vlastní papír pro pomocné výpočty, který neodevzdáváte.
10. Rozumíte všem uvedeným pokynům? Máte k tomu nějaký dotaz? Začněte pracovat!

Hodnocení testu:

Oprava řešení se provádí pomocí vyhodnocovacích šablon, na nichž jsou uvedeny správná řešení a odpovídající bodové hodnocení. Při opravování se přiloží vyhodnocovací šablona k příslušnému sloupci záznamového archu takovým způsobem, aby byla čísla otázek na záznamovém archu ve stejné úrovni s čísly na šabloně. Sloupec s bodovým hodnocením se na šabloně nachází vpravo. Na záznamovém archu je vpravo volný sloupec pro zápis bodového hodnocení jednotlivých úkolů. V posledním řádku záznamového archu dostaneme celkový počet bodů z testu.

10.1.4.1 Test číslo 4 (varianta A, B, C, D)

Varianta A

Úloha 1: Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = x^2 + 2x$ a přímkou $x - y + 2 = 0$.

Úloha 2: Vypočtěte délku křivky $y = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2\ln x\right);\ x \in \langle 1, 2 \rangle$.

Úloha 3: Pro obsah plochy, který vznikne rotací oblouku křivky $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$; $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ kolem osy y platí:

a) $S = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} (t - \sin t)\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\ \mathrm{d}t$

b) $S = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{\sin^2 t + (t - \sin t)^2}\ \mathrm{d}t$

c) $S = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} (t - \sin t)\sqrt{\left(\frac{t^2}{t} - \cos t\right)^2 - \sin^2 t}\ \mathrm{d}t$

Úloha 4: Vypočítejte objem tělesa vytvořeného rotací rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = 1 - x^2$; $y = x^2$ kolem osy x.

Úloha 5: Vypočtěte obsah rovinné oblasti D ohraničené křivkou $\rho = 2a(1 - \cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a > 0$.

Úloha 6: Pružina délky $0{,}3\,\mathrm{m}$ je stlačována silou $12\,\mathrm{N}$ na délku $0{,}02\,\mathrm{m}$. Vypočtěte modul pružnosti a hodnotu práce vykonané podélným zkrácením pružiny na délku $0{,}4\,\mathrm{m}$.

Úloha 7: Vypočtěte těžiště homogenní tenké desky, která má tvar ohraničený danými křivkami $y = 2x - x^2$, $y = 0$, její plošná hustota je rovna jedné.

Úloha 8: Pro objem tělesa vytvořeného otáčením obrazce ohraničeného křivkou $2\rho = 1 + \cos\varphi$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ kolem polární osy platí:

a) $\mathrm{V} = \dfrac{2\pi}{3} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{(1+\cos\varphi)^3}{8} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$

b) $\mathrm{V} = \dfrac{2\pi}{3} \displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{(1+\cos\varphi)^3}{8} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$

c) $\mathrm{V} = \pi \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{(1+\cos\varphi)^2}{4} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$

Úloha 9: Pro délku oblouku křivky $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$ platí:

a) $L = \pi \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{(-\sin t + \sin t + t\cos t)^2 + (\cos t - \cos t + t \sin t)^2}\,\mathrm{d}t$

b) $L = \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{(\cos t - \cos t + t \sin t)^2 - (-\sin t + \sin t + t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$

c) $L = \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{(-\sin t + \sin t + t\cos t)^2 + (\cos t - \cos t + t \sin t)^2}\,\mathrm{d}t$

Úloha 10: Pro obdélníkovou metodu přibližného výpočtu určitého integrálu platí:

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2n}\left(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right)$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}\left(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \ldots + \bar{y}_n\right)$

c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + 4\bar{y}_1 + 2y_1 + 4\bar{y}_2 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + 4\bar{y}_n + y_n\right)$

Varianta B

Úloha 1: Vypočtěte obsah části roviny ohraničeného oblouky křivek: $y = x^2 - x - 6$; $y = -x^2 + 5x + 14$.

Úloha 2: Vypočtěte délku křivky $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$; $x \in \langle 1, 3 \rangle$.

Úloha 3: Pro obsah plochy, který vznikne rotací obsahem křivky $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$; $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$; $a > 0$ okolo osy x platí:

a) $S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2(1 + \sin t)^2}\,\mathrm{d}t$

b) $S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + (a \sin t)^2}\,\mathrm{d}t$

c) $S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t)\sqrt{a(1 - \cos t)^2 + (a + \sin t)^2}\,\mathrm{d}t$

Úloha 4: Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníku ohraničeného křivkami $f(x) = \sin\frac{x}{3}$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ kolem osy x.

Úloha 5: Vypočtěte obsah rovinné oblasti D ohraničené křivkou $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Úloha 6: Pružina délky $0{,}4\,\mathrm{m}$ je stlačována silou $16\,\mathrm{N}$ na délku $0{,}02\,\mathrm{m}$. Vypočtěte modul pružnosti a hodnotu práce vykonané podélným zkrácením pružiny na délku $0{,}5\,\mathrm{m}$.

Úloha 7: Vypočtěte těžiště homogenní tenké desky, která má tvar ohraničený danými křivkami $y = 1 - x^4$, $y = 0$, její plošná hustota je rovna jedné.

Úloha 8: Pro objem tělesa vytvořeného otáčením obrazce ohraničeného křivkou $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a > 0$ kolem polární osy platí:

a) $V = \dfrac{2\pi a^3}{3} \displaystyle\int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$

b) $V = \dfrac{2\pi a^3}{3} \displaystyle\int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$

c) $V = \pi a^2 \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\varphi)^2}{4} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$

Úloha 9: Pro délku jednoho oblouku asteroidy křivky $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$, $t \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$ platí:

a) $L = 3a \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t - \sin^4 t \cos^2 t \,\mathrm{d}t$

b) $L = 3a \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t \,\mathrm{d}t$

c) $L = 3a\pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t \,\mathrm{d}t$

Úloha 10: Pro lichoběžníkovou metodu přibližného výpočtu určitého integrálu platí:

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + 4\bar{y}_1 + 2y_1 + 4\bar{y}_2 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + 4\bar{y}_n + y_n\right)$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}\left(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \ldots + \bar{y}_n\right)$

c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2n}\left(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right)$

Varianta C

Úloha 1: Vypočtěte obsah rovinného obrazce, který je ohraničen parabolou $y = x^2 + 4x$ a přímkou $x - y + 4 = 0$.

Úloha 2: Vypočtěte délku křivky $y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, $x \in \langle -1,1 \rangle$.

Úloha 3: Pro obsah plochy, který vznikne rotací oblouku křivky $x = \mathrm{e}^t \sin t$, $y = \mathrm{e}^t \cos t$, $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ okolo osy x platí:

a) $S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \cos t \sqrt{\left(\mathrm{e}^t \sin t + \mathrm{e}^t \cos t\right)^2 + (\mathrm{e}^t \cos t - \mathrm{e}^t \sin t)^2}\, \mathrm{d}t$

b) $S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \sqrt{\left(\mathrm{e}^t \sin t + \mathrm{e}^t \cos t\right)^2 + (\mathrm{e}^t \cos t - \mathrm{e}^t \sin t)^2}\, \mathrm{d}t$

c) $S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \sqrt{\left(\mathrm{e}^t \sin t - \mathrm{e}^t \cos t\right)^2 + (\mathrm{e}^t \cos t + \mathrm{e}^t \sin t)^2}\, \mathrm{d}t$

Úloha 4: Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkami f $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = x^2 + 2$, $x \in \langle -1,1 \rangle$.

Úloha 5: Vypočtěte obsah rovinné oblasti D ohraničené křivkou $\rho = a \sin 2\varphi$, $a > 0$.

Úloha 6: Pružina délky $0{,}2\,\mathrm{m}$ je stlačována silou $16\,\mathrm{N}$ na délku $0{,}04\,\mathrm{m}$. Vypočtěte modul pružnosti a hodnotu práce vykonané podélným zkrácením pružiny na délku $0{,}3\,\mathrm{m}$.

Úloha 7: Vypočtěte těžiště homogenní tenké desky, která má tvar ohraničený danými křivkami $y = x^2$, $y = 9$, její plošná hustota je rovna jedné.

Úloha 8: Pro objem tělesa vytvořeného otáčením obrazce ohraničeného křivkou $\rho = a$, $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, $a > 0$ kolem polární osy platí:

a) $V = \pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi$

b) $V = \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi$

c) $V = \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\pi} \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi$

Úloha 9: Pro délku jednoho oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ platí:

a) $L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2 (1 - \cos t)^2 - a^2 \sin^2 t} \, \mathrm{d}t$

b) $L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2 (1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} \, \mathrm{d}t$

c) $L = 2\pi\int_0^{\pi} \sqrt{a^2 (1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} \, \mathrm{d}t$

Úloha 10: Pro Simpsonovu metodu přibližného výpočtu určitého integrálu platí:

a) $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \frac{b-a}{6n} \left(y_0 + 4\bar{y}_1 + 2y_1 + 4\bar{y}_2 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + 4\bar{y}_n + y_n \right)$

b) $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2n} \left(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n \right)$

c) $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \frac{b-a}{n} \left(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \ldots + \bar{y}_n \right)$

Varianta D

Úloha 1: Vypočtěte obsah vzniklého obrazce, který je ohraničen křivkami $y = x^2$, $y = (2x-1)^2$.

Úloha 2: Vypočtěte délku křivky $y = \ln(1-x^2)$, $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Úloha 3: Pro obsah plochy, který vznikne rotací křivky $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$, okolo osy y platí:

a) $S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \sqrt{\left(-3a\cos^2 t \sin t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t \cos t\right)^2}\, \mathrm{d}t$

b) $S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t \sqrt{\left(-3a\cos^2 t \sin t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t \cos t\right)^2}\, \mathrm{d}t$

c) $S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t \sqrt{\left(3a\cos^2 t \sin t\right)^2 - \left(3a\sin^2 t \cos t\right)^2}\, \mathrm{d}t$

Úloha 4: Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkami $x + y = 5$, $xy = 4$ kolem osy x.

Úloha 5: Vypočtěte obsah rovinné oblasti D ohraničené křivkou $\varphi = a\sin 3\varphi$, $a > 0$.

Úloha 6: Pružina délky $0{,}3\,\mathrm{m}$ je stlačována silou $15\,\mathrm{N}$ na délku $0{,}05\,\mathrm{m}$. Vypočtěte modul pružnosti a hodnotu práce vykonané podélným zkrácením pružiny na délku $0{,}4\,\mathrm{m}$.

Úloha 7: Vypočtěte těžiště homogenní tenké desky, která má tvar ohraničený danými křivkami $y = x^2 - x^3$, $y = 0$, její plošná hustota je rovna jedné.

Úloha 8: Pro objem tělesa vytvořeného otáčením obrazce ohraničeného křivkou $\rho = a\cos^2 \varphi$, $a > 0$ okolo polární osy platí:

a) $V=\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$

b) $V=\dfrac{2\pi a^3}{3}\int_0^{2\pi}\cos^6\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$

c) $V=\dfrac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\pi}\cos^6\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$

Úloha 9: Pro délku křivky $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$ platí:

a) $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-4\cos^3 t\sin t\right)^2+\left(4\sin^3 t\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t$

b) $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-4\cos^3 t\sin t\right)^2-\left(4\sin^3 t\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t$

c) $L=\pi\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-4\cos^3 t\sin t\right)^2+\left(4\sin^3 t\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t$

Úloha 10: Pro chybu přibližného výpočtu určitého integrálu obdélníkovou metodou, jestliže funkce je spojitá a má spojitou derivaci a je ohraničená na intervalu $\langle a,b\rangle$ platí:

a) $E_n=-\dfrac{(b-a)^5}{180(2n)^4}f^{(4)}(c)$, kde $c\in(a,b)$

b) $E_n=-\dfrac{(b-a)^2}{12n^2}f''(c)$, kde $c\in(a,b)$

c) $E_n=-\dfrac{(b-a)^2}{n}f'(c)$, kde $c\in(a,b)$

10.1.5 Testová příručka pro test číslo 5

Didaktický test zkouší základní důležité poznatky z oblasti integrálního počtu probrané v průběhu celého semestru v předmětu matematická analýza. Test je k dispozici ve dvou ekvivalentních variantách (A, B). Test je typu „papír - tužka“. Je složen z deseti testových položek. Převažují v něm položky se stručnou odpovědí, vyskytuje se i položka s výběrovou odpovědí. Úlohy jsou rozdílného charakteru podle B. Niemerkovy taxonomie učebních úloh. Na vypracování celého testu je stanovená doba 40-45 minut. Test je opravován podle vyhodnocovací šablony. Tyto pokyny jsou v souladu se snahou o objektivizaci testování znalostí a dovedností studentů.

Pokyny pro examinátora:

Před zahájením psaní testu bude studentům rozdán testový sešit a záznamový arch. Po vyplnění základních údajů (jméno, studijní skupina atd.) na záznamovém archu otevřou studenti testový sešit a úlohy začnou řešit až na zřetelný pokyn examinátora. Studenty je třeba upozornit na čas k vypracování testu. U toho typu testu je stanovený čas 40-45 minut.

Po skončení stanovené doby dá examinátor stručný a důrazný pokyn k ukončení práce. Úkolem studentů je práci ukončit. Examinátor by měl dbát na to, aby studenti skutečně nic nepsali do testových sešitů, ale záznamy řešení prováděli jen do záznamových archů. Každý examinátor musí dodržovat níže uvedené pokyny pro zkoušené pro zaručení objektivnosti a jednotnosti testování.

Instrukce:

1. Před sebou máte rozdaný test, jímž se prokáže vaše orientace v základních vědomostech z tématického okruhu integrální počet, na jehož základě vám buď bude či nebude udělen zápočet z předmětu matematická analýza.
2. Čas na vypracování testu máte 40-45 minut.
3. Odpověď na otázky a řešení úloh zapisujte do rozdaného záznamového archu. Pište čitelně!
4. K pomocným výpočtům jsi vezměte vlastní papír, který ale v závěru neodevzdáváte.
5. Budete se řídit pokyny examinátora.
6. V záznamovém archu na jeho přední straně vyplňte základní údaje.
   Jakmile s tím budete hotovi, odložte psací potřeby a čekejte na další

pokyny.

7. Než začnete řešit daný úkol, pozorně si přečtěte jeho zadání a řešení zaznamenejte do příslušného předtištěného obdélníčku v záznamovém archu.
8. V testu se objevují úlohy převážně se stručnou odpovědí, v níž budete muset vypočítat zadané integrály. Vyskytuje se i úloha s výběrem odpovědí, kde budete muset zvolit jednu z nabídnutých odpovědí (a, b, c).
9. Můžete mít k dispozici vlastní papír pro pomocné výpočty,
   který neodevzdáváte.
10. Pokud budete chtít změnit svoji vybranou odpověď v úloze s výběrem odpovědí, škrtněte původní odpověď v záznamovém archu a zakřížkujte vaši novou odpověď a pro výraznější označení ji ještě zakroužkujte. V případě úloh se stručnou odpovědí škrtněte původní odpověď v předtištěném obdélníčku v záznamovém archu do téhož místa vepište novou odpověď.
11. Je to všem jasné? Chcete se k tomu ještě něco zeptat? Začněte psát!

Hodnocení testu:

Oprava řešení se provádí pomocí vyhodnocovacích šablon, na nichž jsou uvedeny správná řešení a odpovídající bodové hodnocení. Při opravování se přiloží vyhodnocovací šablona k příslušnému sloupci záznamového archu takovým způsobem, aby byla čísla otázek na záznamovém archu ve stejné úrovni s čísly na šabloně. Sloupec s bodovým hodnocením se na šabloně nachází vpravo. Na záznamovém archu je vpravo volný sloupec pro zápis bodového hodnocení jednotlivých úkolů. V posledním řádku záznamového archu dostaneme celkový počet bodů z testu. U otázky složené z několika částí je hodnocení rozloženo na odpovídající části a také se tyto části hodnotí samostatně.

10.1.5.1 Test číslo 5 (varianta A, B)

Varianta A

Úloha 1: Integrujte: $\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x$.

Úloha 2: Vypočítejte $\int (x^2-3x+4)\cos x\mathrm{d}x$.

Úloha 3: Jaká substituce je vhodná při výpočtu $\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$?

a) $\sqrt[3]{x^2}=t-x$

b) $x=t^6$

c) $\sqrt{x}=t$

Úloha 4: Vypočítejte integrál racionální funkce $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-9x^2}$.

Úloha 5: Integrujte iracionální funkci $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$.

Úloha 6: Vypočítejte $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

Úloha 7: Integrujte $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

Úloha 8: Nechť pružina délky $0{,}5\,\mathrm{m}$ je stlačována silou $15\,\mathrm{N}$ na délku $0{,}03\,\mathrm{m}$.

a) Vypočtěte modul pružnosti.

b) Vypočtěte hodnotu práce vykonané podélným zkrácením pružiny na délku $0{,}6\,\mathrm{m}$.

Úloha 9: Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkami $y=1-x^2$, $x=1$, $x=-1$, $y=0$ kolem osy x.

Úloha 10: Rozhodněte, zda nevlastní integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}\, x\mathrm{d}x$ konverguje nebo diverguje.

Varianta B

Úloha 1: Integrujte: $\int \ln(x^2+1)\mathrm{d}x$.

Úloha 2: Vypočítejte $\int (x^2-7x+13)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Úloha 3: Jaká substituce je vhodná při výpočtu $\int \frac{a^x+2}{(1+a^{2x})^2}\mathrm{d}x$?

a) $a^x = t$

b) $(1+a^{2x}) = t - x$

c) $(1+a^{2x})^2 = t$

Úloha 4: Vypočítejte integrál racionální funkce $\int \frac{x^4+2}{x^2(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x$.

Úloha 5: Integrujte iracionální funkci $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2}}$.

Úloha 6: Vypočítejte $\int \sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x$.

Úloha 7: Integrujte $\int_0^1 3x\sin 2x^2\mathrm{d}x$.

Úloha 8: Nechť pružina délky $0{,}8\,\mathrm{m}$ je stlačována silou 24N na délku $0{,}02\,\mathrm{m}$.

a) Vypočtěte modul pružnosti.

b) Vypočtěte hodnotu práce vykonané podélným zkrácením pružiny na délku $0{,}9\,\mathrm{m}$.

Úloha 9: Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkami $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ kolem osy x.

Úloha 10: Rozhodněte, zda nevlastní integrál $\int_{-2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ konverguje nebo diverguje.

10.2 Testy a testové příručky - diferenciální počet funkcí více proměnných

10.2.1 Testová příručka pro test číslo 6

Didaktický test slouží k prověřování vědomostí z diferenciálního počtu funkcí více proměnných, konkrétněji z oblastí funkce více proměnných, z limity, spojitosti funkce a z parciální derivace prvního řádu. Test je k dispozici ve čtyřech rovnocenných variantách (A, B, C, D). Test je typu „papír - tužka“ pro jednorázové použití. Objevuje se v něm deset testových úloh. Jsou to úlohy s výběrovými odpověďmi (úlohy typu „jedna správná odpověď“), dichotomické úlohy a úlohy se širokou odpovědí. Úlohy mají rozdílnou náročnost podle B. Niemerkovy taxonomie učebních úloh.

V didaktickém testu jsou zahrnuty tři tématické celky:

téma 1: Pojem funkce více proměnných

téma 2: Limita a spojitost funkce

téma 3: Parciální derivace prvního řádu.

Na vypracování testu je vymezeno 40 minut. Záznamy provádí zkoušení studenti přímo do testového sešitu. Pro pomocné výpočty má student k dispozici vlastní papír pro pomocné výpočty, který student neodevzdává. Při hodnocení vyučující kontroluje jen to, co je napsáno v testovém sešitě. Na řešení otevřených širokých úloh je vymezeno volné místo přímo pod zadáním úlohy. Vyučující kontroluje i postup, kterým student úlohu řeší a k tomu má na pomoci arch nejen s uvedenými výsledky, ale i postupy řešení. Tato opatření se snaží zajistit objektivizaci testování vědomostí a dovedností studentů.

Pokyny pro examinátora:

Před zahájením práce každý student obdrží testový sešit. Student vyplní základní údaje uvedené v záhlaví testu (jméno, studijní skupinu atd.). Poté otevřou testový sešit a na jasný pokyn examinátora začnou řešit úlohy. Zkoušení studenti musejí být předem upozorněni na čas, během kterého mohou pracovat na testě. Na tento test je stanovený čas 40 minut. Po uplynutí stanovené doby musí všichni zkoušení práci ukončit na pokyn examinátora. Examinátoři musí dodržovat uvedenou instrukci pro zachování jednotnosti a objektivnosti testování.

Instrukce:

1. Test, na který se právě díváte, má zjistit vaše znalosti a schopnost aplikovat teoretické poznatky do příkladů.
2. Na test je vymezený čas 40 minut.
3. Řešení úloh a odpovědi zaznamenávejte do testového sešitu na vynechané místo pod zadáním úlohy. Pište čitelně!
4. Budete se řídit pokyny examinátora.
5. Vezměte si testový sešit a vyplňte údaje uvedené v jeho záhlaví.
   Až to budete mít, odložte potřeby a čekejte na další pokyny. (Examinátor počká, až to budou mít všechny osoby vyplněné.)
6. Pozorně si přečtěte zadání úlohy, co se po vás požaduje, teprve pak řešte daný úkol.
7. V testu se setkáte s těmito typy úloh:

b) Úlohy se širokou odpovědí - kde budete muset napsat celý postup
   řešení příkladu. Výsledek zapsat do předtištěného obdélníčku.

c) Úlohy s výběrovými odpověďmi (typu „jedna správná odpověď“)
   - kde budete vybídnuti ke zvolení správné odpovědi z nabídnutých odpovědí (a, b, c), svoji odpověď zakroužkujte.

d) Dichotomické úlohy - kde budete muset rozhodnout, zda předepsané tvrzení je či není pravdivé. Své rozhodnutí zakroužkujte.

8. Pokud budete chtít změnit původní výsledek uvedený v předtištěném obdélníčku, škrtněte ho a napište do obdélníčku výsledek nový a pro zvýraznění ho ještě zakroužkujte. U úloh s výběrovými odpověďmi původní rozhodnutí škrtněte a zakroužkujte nové.
9. Jsou k tomu nějaké dotazy? Je to všem jasné? Začněte pracovat!

Hodnocení testu:

Oprava řešení se provádí pomocí archu, na němž jsou uvedené výsledky jednotlivých úloh spolu s postupem jejich řešení. Bodové hodnocení jednotlivých úloh zapisuje vyučující na okraj testu u příslušné otázky. Celkový počet získaných bodů zapíše vyučující do předtištěného obdélníčku uvedeného v záhlaví na přední straně testového sešitu pod jménem zkoušeného. U otázky složené z jednotlivých částí se zapisuje součet bodů za správné odpovědi (každá část úkolu je hodnocena jedním bodem).

10.2.1.1 Test číslo 6 (varianta A, B, C, D)

Varianta A

Datum:		Jméno a příjmení:
Studijní kombinace:	Skupina: **A**	Celkový počet bodů:

Úloha 1: Určete definiční obor dané funkce: $f(x,y)=\sqrt{y^2-4x^2+4}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 2: Zakroužkujte správnou odpověď. Jestliže $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L_1$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=L_2$, kde $L_1,\ L_2,\ c_1,\ c_2\ \in R$, potom platí:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[c_1 f(x,y)+c_2 g(x,y)\right]=c_1L_2+c_2L_1$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[c_1 f(x,y)+c_2 g(x,y)\right]=c_1L_1+c_2L_2$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[c_1 f(x,y)+c_2 g(x,y)\right]=c_1 f(x_0,y_0)+c_2 g(x_0,y_0)$

Úloha 3: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{(x,y\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{4-xy}}{\sqrt{xy}}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 4: Dokažte, že limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$ neexistuje. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 5: Určete, ve kterých bodech roviny E_2 není spojitá funkce $f(x.y) = \dfrac{xy}{x+y}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 6: Najděte parciální derivace prvního řádu dané funkce podle proměnných: $h(x,y) = \ln(x + \ln y)$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 7: Vypočítejte parciální derivace funkce $z = (2x-3y)^2$ v bodě $A[2;1]$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 8: Vyšetřete zavedením polárních souřadnic, zda limita v bodě existuje, pokud ano, vypočtěte: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 9: Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivá (ANO), nebo nepravdivá (NE).

9.1. Funkcí více proměnných rozumíme zobrazení R^n do R, kdy $n \leq 1$. (ANO - NE)

9.2. Derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

(ANO - NE)

Úloha 10: Vypočtěte parciální derivaci prvního řádu: $z = (2x + y)^{2x+y}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Varianta B

Datum:		Jméno a příjmení:
Studijní kombinace:	Skupina: **B**	Celkový počet bodů:

Úloha 1: Určete definiční obor dané funkce: $z(x,y)=\sqrt{\ln\frac{16}{x^2+y^2}}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 2: Jestliže $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L_1$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=L_2$, kde L_1, $L_2\in R$, potom platí:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[f(x,y)g(x,y)\right]=L_1L_2$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[f(x,y)g(x,y)\right]=f(x_0,y_0)g(x_0,y_0)$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[f(x,y)g(x,y)\right]=L_1+L_2$

Úloha 3: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 4: Dokažte, že limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{xy+x^2-y^2}$ neexistuje. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 5: Určete, ve kterých bodech roviny E_2 není spojitá funkce $f(x,y)=\dfrac{x^2+2y^2}{y-x^2}$.

Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 6: Najděte parciální derivace prvního řádu dané funkce podle proměnných: $\varphi(s,t)=\cos\dfrac{s^2}{t}$**.** Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 7: Vypočítejte parciální derivace funkce $z=\sqrt{x^2-y^2}$ v bodě $A[2;0]$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 8: Vyšetřete zavedením polárních souřadnic, zda limita v bodě existuje, pokud ano, vypočtěte: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 9: Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivá (ANO), nebo nepravdivá (NE).

9.1. Funkce f má v bodě a limitu L. Limita se nazývá nevlastní, jestliže $L \in R$.

(ANO - NE)

9.2. Pro funkci tří proměnných je grafem funkce množina bodů ve čtyřrozměrném prostoru. (ANO - NE)

Úloha 10: Vypočtěte parciální derivaci prvního řádu: $z = (x^2 + y^2)^{xy^2}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Varianta C

Datum:	Jméno a příjmení:	
Studijní kombinace:	Skupina: **C**	Celkový počet bodů:

Úloha 1: Určete definiční obor dané funkce: $g(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 2: Jestliže $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L_1$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=L_2$, kde L_1, $L_2 \in R, L_2 \neq 0$, potom platí:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{L_2}{L_1}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{f(x_0,y_0)}{g(x_0,y_0)}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{L_1}{L_2}$

Úloha 3: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 4: Dokažte, že limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ neexistuje. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 5: Určete, ve kterých bodech roviny E_2 není spojitá funkce $f(x,y)=\frac{x+y}{|x|-|y|}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 6: Najděte parciální derivace prvního řádu dané funkce podle proměnných: $f(x,y)=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+x^y$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 7: Vypočítejte parciální derivace funkce $z=\frac{y}{x}$ v bodě $A[3;2]$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 8: Vyšetřete zavedením polárních souřadnic, zda limita v bodě existuje, pokud ano, vypočtěte: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 9: Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivá (ANO), nebo nepravdivá (NE).

9.1. Funkce f má v bodě a limitu L. Limita se nazývá vlastní, jestliže $L \in R$.

(ANO - NE)

9.2. Pro funkci dvou proměnných je grafem funkce množina bodů ve dvojrozměrném prostoru. (ANO - NE)

Úloha 10: Vypočtěte parciální derivaci prvního řádu: $z = (yx)^{y-1}$**.** Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Varianta D

Datum:	Jméno a příjmení:	
Studijní kombinace:	Skupina: **D**	Celkový počet bodů:

Úloha 1: Určete definiční obor dané funkce: $s(x,y)=\sqrt{2x+y-4}+\sqrt{16-x^2-y^2}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 2: Nechť $h(x,y)\le f(x,y)\le g(x.y)$ v ryzím okolí bodu $[x_0,y_0]$ platí $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)=\lim\limits_{(x.y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$, pak:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\le L$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\ge L$

Úloha 3: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\mathrm{tg}(x^2+y^4)}{3(x^2+y^4)}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 4: Dokažte, že limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ neexistuje. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 5: Určete, ve kterých bodech roviny E_2 není spojitá funkce $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - 2y}$.

Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 6: Najděte parciální derivace prvního řádu dané funkce podle proměnných: $c(a,b) = \dfrac{\operatorname{tg}(a^2)}{b}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 7: Vypočítejte parciální derivace funkce $z = 5x^4 y^2 + \dfrac{x}{y} + 2x^2 - 3y$ v bodě $A[1;1]$.

Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 8: Vyšetřete zavedením polárních souřadnic, zda limita v bodě existuje, pokud ano, vypočtěte: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

Úloha 9: Rozhodněte, jsou-li následující tvrzení pravdivé (ANO), nebo nepravdivé (NE).

9.1. Funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ právě jednu limitu. (ANO - NE)

9.2. Vrstevnice funkce na úrovni c je množina všech bodů s nadmořskou výškou rovnou c. (ANO - NE)

Úloha 10: Vypočtěte parciální derivaci prvního řádu: $z = (3x - y)^{2x-y}$. Výsledek napište do předtištěného obdélníčku.

10.2.2 Testová příručka pro test číslo 7

Didaktický test má prověřit vědomosti z oblasti diferenciálního počtu funkcí více proměnných (derivace vyšších řádů, diferenciál funkce, tečná rovina, derivace složené funkce a diferenciál vyšších řádů). Test je typu „papír - tužka“. Obsahuje deset testových položek a to položky s výběrovými odpověďmi (položky typu „jedna správná odpověď“) a položky se stručnou odpovědí. Položky jsou rozdílného charakteru ve smyslu B. Niemerkovy taxonomie učebních úloh.

Didaktický test prověřuje znalost čtyř tématických celků:

téma 1: Derivace vyšších řádů

téma 2: Diferenciál funkce

téma 3: Derivace složené funkce

téma 4: Diferenciál vyšších řádů.

Na vypracování celého testu je stanoveno 40 minut. Záznamy o výsledcích studenti zaznamenávají do záznamových archů. Oprava testů se provádí na základě vyhodnocovací šablony. Tyto pokyny jsou v souladu se snahou o objektivizaci testování znalostí i dovedností studentů.

Pokyny pro examinátora:

Před zahájením testování dostane každý zkoušený student testový sešit, záznamový arch. Jakmile zkoušení vyplní potřebné údaje (jméno, studijní skupinu atd.) na záznamovém archu, otevřou testová sešit a na pokyn examinátora začnou řešit didaktický test. Studentům je třeba oznámit, že na řešení úloh v testu mají vyhrazený čas 40 minut. Po této době všichni zkoušení odloží psací potřeby a ukončí práci na pokyn examinátora. Je důležité kontrolovat, aby studenti nepsali do testových sešitů, ale záznamy prováděli pouze do záznamových archů. Podle dále uvedených instrukcí se musí examinátoři řídit z důvodu zachování jednotnosti a objektivnosti testování.

Instrukce:

1. Před sebou máte rozdaný test, který má prověřit vaše znalosti z diferenciálního počtu funkcí více proměnných a prověřit schopnost používat tyto poznatky v příkladech.

2. Na test máte vymezenou dobu 40 minut.
3. Odpovědi na otázky a řešení položek budete zaznamenávat pouze do záznamového archu, který vám byl rozdaný spolu s testem.
4. Budete se řídit pokyny examinátora.
5. V záznamovém archu vyplňte požadované údaje uvedené na přední straně testu. Po vyplnění odložte psací potřeby a čekejte na další pokyny.
6. Než přistoupíte k řešení úkolu, nejprve si pozorně přečtěte jednotlivé úlohy a jejich řešení zapište do záznamového archu až po úplném pochopení úlohy.
7. Test je sestaven z těchto typů úloh:

a) úlohy se stručnou odpovědí - kde bude vaším úkolem stanovit hodnotu daného příkladu. Jeho výsledek zapíšete do předtištěného obdélníčku v záznamovém archu.
b) úlohy s výběrem odpovědí (úlohy typu „jedna správná odpověď“) - kde budete vyzváni ke zvolení správné odpovědi ze tří odpovědí nabídnutých (a, b, c), uděláte v kolonce záznamového archu nesoucí označení vybrané odpovědi křížek (jako ve sportce).

8. Můžete mít k dispozici vlastní papír pro pomocné výpočty, který neodevzdáváte.
9. Pokud se rozhodnete svoji odpověď změnit a to v případě úlohy s výběrem odpovědí, škrtněte původní odpověď v záznamovém archu a novou odpověď zakřížkujte a zakroužkujte. U úloh se stručnou odpovědí, škrtněte původní odpověď a napište do předtištěného obdélníčku novou odpověď a zakroužkujte.
10. Je vám to všem jasné? Jsou k tomu ještě nějaké dotazy? Začněte psát!

Hodnocení testu:

Oprava řešení se provádí pomocí vyhodnocovacích šablon, na nichž jsou uvedeny právná řešení a odpovídající bodové hodnocení. Při opravování se přiloží vyhodnocovací šablona k příslušnému sloupci záznamového archu takovým způsobem, aby byla čísla otázek na záznamovém archu byla ve stejné úrovni s čísly na šabloně. Sloupec s bodovým hodnocením se na šabloně nachází vpravo. Na záznamovém archu je vpravo volný sloupec pro zápis bodového hodnocení jednotlivých úkolů. V posledním řádku záznamového archu dostaneme celkový počet bodů z testu.

10.2.2.1 Test číslo 7 (varianta A, B, C, D)

Varianta A

Úloha 1: Vypočtěte parciální derivaci 2.řádu f''_{xx} funkce $f(x, y) = \dfrac{y^2}{1+5x}$.

Úloha 2: Vypočtěte parciální derivaci 2.řádu f''_{xy} funkce $f(x, y) = \sqrt{3xy + x^2}$.

Úloha 3: Vypočtěte parciální derivaci 2.řádu f''_{yy} $f(x, y) = \dfrac{\cos x^2}{y}$.

Úloha 4: Najděte totální diferenciál df funkce $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 - 3$ v bodě $A[1;2]$, jestliže $\mathrm{d}x = -1$, $\mathrm{d}y = 1$.

Úloha 5: Najděte diferenci Δf funkce $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 - 3$ v bodě $A[1;2]$, jestliže $\mathrm{d}x = -1$, $\mathrm{d}y = 1$.

Úloha 6: Vypočtěte přibližnou hodnotu výrazu $\ln\left(\sqrt{1{,}03} + \sqrt[3]{1{,}06} - 1\right)$ pomocí totálního diferenciálu.

Úloha 7: Je-li $z = \dfrac{u^2}{v}$, kde $u = x - 2y$ a $v = 2x + y$, pro $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ platí:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2u}{v}1 - \dfrac{u^2}{v^2}2$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2u}{v}2 - \dfrac{u^2}{v^2}1$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2u}{v} - \dfrac{u^2}{v^2}$

Úloha 8: Je-li funkce f spojitá v bodě $[x_0; y_0]$, pak:

a) je v něm i diferencovatelná

b) nemusí být diferencovatelná

c) není v něm diferencovatelná

Úloha 9: Najděte totální diferenciál dané funkce: $f(x, y) = \ln \dfrac{y}{x}$.

Úloha 10: Zjistěte $\mathrm{d}^2 z$ funkce $z = \sin(2x + y)$.

Varianta B

Úloha 1: Vypočtěte parciální derivaci 2.řádu f''_{xx} funkce $f(x,y)=\sqrt{3xy+x^2}$.

Úloha 2: Vypočtěte parciální derivaci 2.řádu f''_{xy} $f(x,y)=\dfrac{\cos x^2}{y}$.

Úloha 3: Vypočtěte parciální derivaci 2.řádu f''_{yy} funkce $f(x,y)=\ln(x^3+y)$.

Úloha 4: Najděte totální diferenciál df funkce $f(x,y)=x^4-2x^2y+y^3$ v bodě $A[1;1]$, jestliže $\mathrm{d}x=0{,}02$, $\mathrm{d}y=-0{,}01$.

Úloha 5: Najděte diferenci Δf funkce $f(x,y)=x^4-2x^2y+y^3$ v bodě $A[1;1]$, jestliže $\mathrm{d}x=0{,}02$, $\mathrm{d}y=-0{,}01$.

Úloha 6: Vypočtěte přibližnou hodnotu výrazu $\dfrac{\sqrt[3]{0{,}97}}{\sqrt[4]{1{,}05}}$ pomocí totálního diferenciálu.

Úloha 7: Je-li $z=u^2v-uv^2$**,** kde $u=x\cos y$ a $v=x\sin y$**,** pro $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ platí:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=(2uv-v^2)+(u^2-2uv)$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=(2uv-v^2)x\cos y+(u^2-2uv)(-x\sin y)$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=(2uv-v^2)(-x\sin y)+(u^2-2uv)x\cos y$

Úloha 8: Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0;y_0]$, pak:

a) je v tomto bodě spojitá

b) je v tomto bodě nespojitá

c) nemusí být v tomto bodě spojitá

Úloha 9: Najděte totální diferenciál dané funkce: $f(x,y)=\mathrm{e}^x\ln y$.

Úloha 10: Zjistěte d^2z funkce $z=x^3-y^3-xy$.

Varianta C

Úloha 1: Vypočtěte parciální derivace 2.řádu f''_{xx} funkce: $f(x,y)=\ln(x^3+y)$.

Úloha 2: Vypočtěte parciální derivaci 2.řádu f''_{xy} funkce $f(x,y)=\dfrac{y^2}{1+5x}$.

Úloha 3: Vypočtěte parciální derivaci 2.řádu f''_{yy} funkce $f(x,y)=\sqrt{3xy+x^2}$.

Úloha 4: Najděte totální diferenciál $\mathrm{d}f$ funkce $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $A[3;4]$, jestliže $\mathrm{d}x=0{,}1,\ \mathrm{d}y=0{,}2$.

Úloha 5: Najděte diferenci Δf funkce $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $A[3;4]$, jestliže $\mathrm{d}x=0{,}1,\ \mathrm{d}y=0{,}2$.

Úloha 6: Vypočtěte přibližnou hodnotu výrazu $\sqrt{0{,}95^3+2{,}02^3}$ pomocí totálního diferenciálu.

Úloha 7: Je-li $z=u^2v-uv^2$, kde $u=x\cos y$ a $v=x\sin y$, pro $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ platí:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^u\ln v\sin y+\dfrac{e^u}{v}\cos y$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^u\ln v\cos y+\dfrac{\mathrm{e}^u}{v}\sin y$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^u\ln v+\dfrac{\mathrm{e}^u}{v}$

Úloha 8: Diferenciál funkce f je:

a) přírůstek funkce na tečné nadrovině vedené ke grafu funkce bodem

b) nadrovina, která má s grafem funkce lokálně společný právě jeden bod

c) spojitá parciální derivace 1.řádu

Úloha 9: Najděte totální diferenciál dané funkce: $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$.

Úloha 10: Zjistěte d^2z funkce $z=\ln(x-y)$.

Varianta D

Úloha 1: Vypočtěte parciální derivaci 2.řádu f''_{xx} $f(x,y)=\dfrac{\cos x^2}{y}$.

Úloha 2: Vypočtěte parciální derivace 2.řádu f''_{xy} funkce: $f(x,y)=\ln(x^3+y)$.

Úloha 3: Vypočtěte parciální derivaci 2.řádu f''_{yy} funkce $f(x,y)=\dfrac{y^2}{1+5x}$.

Úloha 4: Najděte totální diferenciál df funkce $f(x,y)=2x^2+3xy-y^2+2$ v bodě $A[2;-1]$, jestliže $\mathrm{d}x=0{,}4$, $\mathrm{d}y=0{,}5$.

Úloha 5: Najděte diferenci Δf funkce $f(x,y)=2x^2+3xy-y^2+2$ v bodě $A[2;-1]$, jestliže $\mathrm{d}x=0{,}4$, $\mathrm{d}y=0{,}5$.

Úloha 6: Vypočtěte přibližnou hodnotu výrazu $\sqrt{1{,}1}\cdot\sqrt[3]{1{,}3}$ pomocí totálního diferenciálu.

Úloha 7: Je-li $z=u^2\ln v$, kde $u=\dfrac{x}{y}$ a $v=3x-2v$, pro $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ platí:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2u\ln v(-2)+\dfrac{u^2}{v}\left(\dfrac{-x}{y^2}\right)$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2u\ln v+\dfrac{u^2}{v}$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2u\ln v\left(\dfrac{-x}{y^2}\right)+\dfrac{u^2}{v}(-2)$

Úloha 8: Jestliže má funkce f v bodě $[x_0;y_0]$ spojité parciální derivace 1.řádu, pak:

a) nemusí být v tomto bodě diferenciál

b) v tomto bodě není diferenciál

c) má v tomto bodě diferenciál

Úloha 9: Najděte totální diferenciál dané funkce: $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2y}$.

Úloha 10: Zjistěte d^2z funkce $z=\mathrm{e}^{xy}$.

10.2.3 Testová příručka pro test číslo 8

Test zkouší úroveň vědomostí z diferenciálního počtu funkcí více proměnných (Taylorova věta, lokální a absolutní extrémy, funkce zadaná implicitně). Test je typu „papír - tužka“. Je složen z deseti testových úloh, které jsou typu dichotomické úlohy a hlavně úlohy se stručnou odpovědí. Úlohy jsou navrhovány podle B. Niemerkovy taxonomie učebních úloh, tedy jsou různě obtížné.

Didaktický test ověřuje orientaci ve třech tématických celků:

téma 1: Taylorova věta

téma 2: Lokální a absolutní extrémy

téma 3: Funkce zadaná implicitně.

Čas na vypracování testu je vymezen na 40 minut. Záznamy o výsledcích studenti zapisují do záznamových archů. Vyučující opravuje testy za pomoci vyhodnocovací šablony. Všechna tato opatření se snaží dodržet objektivizaci testování dovedností a znalostí studentů.

Pokyny pro examinátora:

Než-li začnou zkoušení studenti pracovat na testu, examinátor jim rozdá testový sešit spolu se záznamovým archem. Studenti si vyplní základní údaje (jméno, studijní skupinu atd.) na záznamovém archu v záhlaví. Potom otevřou testový sešit a jakmile examinátor zadá pokyn k práci, studenti začnou řešit úlohy. Důležité je studenty předem upozornit na vymezenou dobu pro vypracování testu, což je u toho testu 40 minut. Po uplynutí této doby, examinátor dá pokyny pro ukončení práce a všichni studenti musí odložit na příkaz psací potřeby a přestat psát. Je třeba kontrolovat, zda opravdu všichni studenti nepsali do testových sešitů, nýbrž aby prováděli záznamy řešení úloh pouze do záznamových archů. Examinátoři musí dodržovat dále uvedené pokyny pro zkoušené osoby, aby byla zaručena objektivnost a jednotnost testování.

Instrukce:

1. Test, který máte před sebou, má zjistit vaše dosavadní znalosti a vědomosti z učiva diferenciálního počtu funkcí více proměnných a schopnost použít tyto informace v konkrétních příkladech.

2. Na test je stanovený čas 40 minut.
3. Řešení úloh budete zapisovat do předtištěného obdélníčku v záznamovém archu, který vám byl rozdán spolu s testem.
4. Budete se řídit pokyny examinátora.
5. Vezměte si záznamový arch a vyplňte údaje uvedené na jeho přední straně (jméno, studijní skupinu atd.). Po vyplnění odložte psací potřeby a čekejte na další pokyny. (Examinátor počká až budou mít všichni studenti vyplněné údaje.)
6. Než začnete řešit úlohu, nejprve si pozorně přečtěte její znění, a teprve potom začněte úlohu vypracovávat.
7. V testu se setkáte s úlohami se stručnou odpovědí, kde se bude po vás požadovat výpočet nebo určení hodnoty daného příkladu.
8. Můžete mít k dispozici vlastní papír pro pomocné výpočty, který neodevzdáváte.
9. Při změně vaší odpovědi, škrtněte vaši původní odpověď v záznamovém archu a do toho stejného obdélníčku vepište novou odpověď a ještě ji zakroužkujte.
10. Rozumíte všem uvedeným pokynům? Chcete se k tomu něco zeptat? Začněte pracovat!

Hodnocení testu:

Oprava řešení se provádí pomocí vyhodnocovacích šablon, na nichž jsou uvedeny správná řešení a odpovídající bodové hodnocení. Při opravování se přiloží vyhodnocovací šablona k příslušnému sloupci záznamového archu takovým způsobem, aby byla čísla otázek na záznamovém archu ve stejné úrovni s čísly na šabloně. Sloupec s bodovým hodnocením se na šabloně nachází vpravo. Na záznamovém archu je vpravo volný sloupec pro zápis bodového hodnocení jednotlivých úkolů. V posledním řádku záznamového archu dostaneme celkový počet bodů z testu. U otázky složené z několika částí je hodnocení rozloženo na odpovídající části a také se tyto části hodnotí samostatně.

10.2.3.1 Test číslo 8 (varianta A, B, C, D)

Varianta A

Úloha 1: Rozviňte funkci $f(x,y)=x^2+xy-y^2+x+3y$ podle Taylorovy věty v okolí bodu $A[-1;1]$.

Úloha 2: Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y)=4-(x-2)^2-(y+3)^2$.

Úloha 3: Vypočítejte směrnici tečny ke grafu funkce $x^2+9y^2-13=0$ v bodě $A[2;-1]$.

Úloha 4: Určete stacionární bod dané funkce $f(x,y)=1+6y-y^2-xy-x^2$.

Úloha 5: Určete derivaci y' implicitní funkce dané rovnicí

$f(x,y)=4x^3-2x^2y+xy^2-y^3$.

Úloha 6: Rozhodněte, zda je tvrzení pravdivé či nikoli.

6.1. Taylorův polynom používáme k přibližnému výpočtu funkčních hodnot v okolí bodu.

(ANO - NE)

6.2. Při studiu globálních extrémů vyšetřujeme danou funkci pouze v okolí nějakého bodu.

(ANO - NE)

Úloha 7: Určete parciální derivace z'_x, z'_y implicitní funkce $z=f(x,y)$ definované rovnicí: $z^3+3x^2z-2xy=0$.

Úloha 8: Rozhodněte, zda je rovnice $x^2-xy+2y^2+x-y-1=0$ v bodě $A[0;1]$ určená implicitně jediná funkce.

Úloha 9: Určete rovnici tečny a normály ke křivce dané rovnicí $x^2-3y^2+9y+3=0$ v bodě $A[3;-1]$.

Úloha 10: Pomocí Taylorova polynomu 2.stupně vypočtěte přibližně $1{,}03^{2{,}98}$.

Varianta B

Úloha 1: Rozviňte funkci $f(x,y)=3x^2-2xy+y^2+x-3y+\frac{19}{4}$ podle Taylorovy věty v okolí bodu $A\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Úloha 2: Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y)=-(2x-3)^2+(y+1)^2-3$.

Úloha 3: Vypočítejte směrnici tečny ke grafu funkce $x^2-3y^2+9y+3=0$ v bodě $A[3;-1]$.

Úloha 4: Určete stacionární bod dané funkce $f(x,y)=x^2+y^2-xy-x-y+2$.

Úloha 5: Určete derivaci y' implicitní funkce dané rovnicí $f(x,y)=(x^2+y^2)^2-3x^2y+y^3$.

Úloha 6: Rozhodněte, zda je tvrzení pravdivé či nikoli.

6.1. Taylorova věta udává velikost chyby, která vznikne při aproximaci funkce Taylorovým polynomem. (ANO - NE)

6.2. Je-li druhá derivace funkce v bodě menší než nula, pak má funkce v bodě ostré lokální maximum. (ANO - NE)

Úloha 7: Určete parciální derivace z'_x, z'_y implicitní funkce $z=f(x,y)$ definované rovnicí: $x+y^2+z^3+z-4=0$.

Úloha 8: Rozhodněte, zda je rovnice $x^2-xy-y^2-1=0$ v bodě $A[2;1]$ určená implicitně jediná funkce.

Úloha 9: Určete rovnici tečny a normály ke křivce dané rovnicí $xy+\ln y-1=0$ v bodě $A[1;1]$.

Úloha 10: Pomocí Taylorova polynomu 2.stupně vypočtěte přibližně $1{,}05^{2{,}01}$.

Varianta C

Úloha 1: Rozviňte funkci $f(x,y)=2x^2+xy-y^2+7x+4y+6$ podle Taylorovy věty v okolí bodu $A[-2;1]$.

Úloha 2: Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y)=-7+(x+2)^2-(y-3)^2$.

Úloha 3: Vypočítejte směrnici tečny ke grafu funkce $x^2+y^2-10y=0$ v bodě $A[3;1]$.

Úloha 4: Určete stacionární bod dané funkce $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4x-2y$.

Úloha 5: Určete derivaci y' implicitní funkce dané rovnicí $f(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}-y+x^2-1$.

Úloha 6: Rozhodněte, zda je tvrzení pravdivé či nikoli.

6.1. Taylorův polynom používáme k určení rovnice tečny a normály ke křivce.

(ANO - NE)

6.2. Je-li druhá derivace funkce v bodě větší než nula, pak má funkce v bodě ostré lokální minimum. (ANO - NE)

Úloha 7: Určete parciální derivace z'_x, z'_y implicitní funkce $z=f(x,y)$ definované rovnicí: $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$.

Úloha 8: Rozhodněte, zda je rovnice $x^3+y^3-2x^2-4xy+1=0$ v bodě $A[1;-2]$ určená implicitně jediná funkce.

Úloha 9: Určete rovnici tečny a normály ke křivce dané rovnicí $x^2+9y^2-13=0$ v bodě $A[2;-1]$.

Úloha 10: Pomocí Taylorova polynomu 2.stupně vypočtěte přibližně $0{,}98^{3{,}04}$.

Varianta D

Úloha 1: Rozviňte funkci $f(x,y)=-x^2+xy+3y^2+16x+5y-100$ podle Taylorovy věty v okolí bodu $A[9;2]$.

Úloha 2: Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y)=(x+4)^2-(y+1)^2-1$.

Úloha 3: Vypočítejte směrnici tečny ke grafu funkce $3x^2+2y^2-y+2=0$ v bodě $A[1;2]$.

Úloha 4: Určete stacionární bod dané funkce $x^2+y^2+xy-6x+2$.

Úloha 5: Určete derivaci y' implicitní funkce dané rovnic $f(x,y)=x^2-xy+2y^2+x-y-1$.

Úloha 6: Rozhodněte, zda je tvrzení pravdivé či nikoli.

6.1. Pro Taylorovu větu platí vztah: $f(x,y)=T_n(x,y)$, kde $T_n$je Taylorův polynom.

(ANO - NE)

6.2. Lokální extrém může nastat pouze ve stacionárním bodě. (ANO - NE)

Úloha 7: Určete parciální derivace z'_x, z'_y implicitní funkce $z=f(x,y)$ definované rovnicí: $x^2+y^2+z^2-xy-y=0$.

Úloha 8: Rozhodněte, zda je rovnice $x^2-3xy+4y^2-2x+3y=0$ v bodě $A[2;0]$ určená implicitně jediná funkce.

Úloha 9: Určete rovnici tečny a normály ke křivce dané rovnicí $x^2-y^2+2xy-x+y+2=0$ v bodě $A[-3;2]$.

Úloha 10: Pomocí Taylorova polynomu 2.stupně vypočtěte přibližně $0{,}97^{2{,}03}$.

10.2.4 Testová příručka pro test číslo 9

Didaktický test slouží k prověřování základních vědomostí z okruhu diferenciální počet funkcí více proměnných probraného v průběhu semestru z předmětu matematická analýza. Test je k dispozici ve dvou ekvivalentních variantách (A, B). Test je typu „papír - tužka“. Obsahuje deset testových úloh se širokou odpovědí. Úlohy jsou rozdílného charakteru dle B. Niemerkovy taxonomie učebních úloh.
Stanovený čas na vypracování je 40-45 minut. Řešení a výsledky úloh studenti píší do záznamového archu, mohou mít i k dispozici vlastní papír na pomocné výpočty, avšak tento papír neodevzdávají.

Pokyny pro examinátora:

Před zahájením testování obdrží každý student testový sešit a záznamový arch, kde vyplní požadované základní údaje (jméno, studijní skupinu atd.) uvedené v záhlaví a řešit úlohy začnou až na zřetelný pokyn examinátora. Testované studenty je třeba předem upozornit na čas, po který mohou pracovat na řešení testu. U toho typu testu je vymezená doba 40-45 minut. Po uplynutí této doby musí všichni studenti na pokyn examinátora ukončit práci a odložit psací potřeby. Examinátoři musí dodržovat dále uvedené pokyny pro zkoušené osoby pro zaručení jednotnosti a objektivnosti testování.

Instrukce:

1. Didaktický test, který máte před sebou, prověřuje znalost základních pojmů z diferenciálního počtu a jejich aplikace v příkladech. Na základě jeho výsledku vám bude nebo nebude udělen zápočet z předmětu matematická analýza.
2. Na vypracování testu je stanovená doba 40-45 minut.
3. Svá řešení úloh zaznamenávejte do záznamového archu, který jste dostali spolu s testem.
4. Budete se řídit pokyny examinátora.
5. V záznamovém archu vyplňte požadované údaje na jeho přední straně.
   Až to budete mít vyplněné, odložte psací potřeby a počkejte na další pokyny.
6. Než-li začnete řešit úlohu, nejprve si pozorně přečtěte její zadání a řešení zaznamenejte do záznamového archu až po úplném pochopené otázky.

7. Test je sestaven z úloh se stručnou odpovědí - vaším úkol bude zjistit výsledky daných příkladů.
8. K pomocným výpočtům můžete používat vlastní papír, který neodevzdáváte. Hodnotí se pouze výsledky uvedené v záznamovém archu.
9. Při změně vaší odpovědi škrtněte vaši původní odpověď uvedenou v záznamovém archu a do stejného předtištěného obdélníčku vepište odpověď novou a zakroužkujte ji.
10. Rozumíte všemu? Chcete se k tomu ještě něco zeptat? Začněte psát!

Hodnocení testu:

Oprava řešení se provádí pomocí vyhodnocovacích šablon, na nichž jsou uvedeny správná řešení a odpovídající bodové hodnocení. Při opravování se přiloží vyhodnocovací šablona k příslušnému sloupci záznamového archu takovým způsobem, aby byla čísla otázek na záznamovém archu byla ve stejné úrovni s čísly na šabloně. Sloupec s bodovým hodnocením se na šabloně nachází vpravo. Na záznamovém archu je vpravo volný sloupec pro zápis bodového hodnocení jednotlivých úkolů. V posledním řádku záznamového archu dostaneme celkový počet bodů z testu.

10.2.4.1 Test číslo 9 (varianta A, B)

Varianta A

Úloha 1: Vyšetřete definiční obor funkce: $f(x,y)=\ln\sqrt{9-9x^2-y^2}$.

Úloha 2: Vypočtěte parciální derivace 2.řádu funkce: $f(x,y)=\mathrm{e}^{2y}\sin x$.

Úloha 3: Určete, ve kterých bodech roviny E_2 není spojitá funkce.

Úloha 4: Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y)=x^2+y^2+6x-4y$.

Úloha 5: Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně hodnotu výrazu $1{,}95^2\,\mathrm{e}^{0{,}13}$.

Úloha 6: Určete rovnici tečny a normály ke křivce dané rovnicí $x^2-4x+y^2+6y+9=0$ v bodě $A[2;-1]$.

Úloha 7: Rozviňte funkci $f(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$ podle Taylorovy věty v okolí bodu $A\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Úloha 8: Určete parciální derivace z'_x, z'_y implicitní funkce dané rovnicí:

$x^2+2y^3+3z^2+xy-z-9=0$.

Úloha 9: Dokažte, že limita neexistuje: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\left(y+\frac{1}{x}\right)$.

Úloha 10: Derivujte složenou funkci $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, je-li $z=\mathrm{e}^{2u+3v}$ z, kde $u=\sin x$, $v=x^2$.

Varianta B

Úloha 1: Vyšetřete definiční obor funkce: $\log_2(16 - x^2 - y^2)$.

Úloha 2: Vypočtěte parciální derivace 2.řádu funkce $\sin(2x + y)$.

Úloha 3: Určete, ve kterých bodech roviny E_2 není spojitá funkce $\frac{1}{x^2 - 2y}$.

Úloha 4: Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 2x + 1 + y^2$.

Úloha 5: Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně hodnotu výrazu $1{,}97^3 \cdot 2{,}95^4$.

Úloha 6: Určete rovnici tečny a normály ke křivce dané rovnicí $y \ln x + x^3 \mathrm{e}^y - 1 = 0$ v bodě $A[1;0]$.

Úloha 7: Rozviňte funkci $f(x, y) = \dfrac{\sin x}{\cos y}$ podle Taylorovy věty v okolí bodu $A[0;\pi]$.

Úloha 8: Určete parciální derivace z'_x, z'_y implicitní funkce dané rovnicí

$x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z = 0$.

Úloha 9: Dokažte, že limita neexistuje: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy - x^2}{x^2 + y^2}$.

Úloha 10: Derivujte složenou funkci $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, je-li $z = \mathrm{e}^u \ln v$, kde $u = x \cos y$, $v = x \sin y$.

10.3 Písemné práce - integrální počet funkce jedné proměnné

Všechny písemné práce jsou vytvořeny ve čtyřech variantách (A, B, C, D). Pod každou písemnou prací jsou zmíněna témata, jejichž znalost se prověřuje.

10.3.1 Písemná práce č. 1

Tato písemná práce je složena z témat: racionální funkce a jejich integrování, iracionální funkce a jejich integrování, goniometrické funkce a jejich integrování**.**

Skupina A

Úloha 1: Integrujte racionální funkci: $\int \frac{x^2}{x^4-1}\mathrm{d}x$.

Úloha 2: Integrujte iracionální funkci: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$.

Úloha 3: Vypočtěte integrál goniometrické funkce: $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

[**Výsledky: 1.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{2}arctgx+C$; **2.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$; **3.** $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$.]

Skupina B

Úloha 1: Integrujte racionální funkci: $\int \frac{x^3+2}{x(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

Úloha 2: Integrujte iracionální funkci: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}}$.

Úloha 3: Vypočtěte integrál goniometrické funkce: $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\mathrm{d}x$.

[**Výsledky: 1.** $3\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - 2arctgx + C$; **2.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$; **3.** $\frac{2\sqrt{\cos x}}{\cos x} + C$.]

Skupina C

Úloha 1: Integrujte racionální funkci: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+4x}\mathrm{d}x$.

Úloha 2: Integrujte iracionální funkci: $\int \frac{\sqrt{2x-5}}{x}\mathrm{d}x$.

Úloha 3: Vypočtěte integrál goniometrické funkce: $\int \sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$.

[**Výsledky:** **1.** $\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{8}\ln\left|x^2+4\right| + C$; **2.** $2\sqrt{2x-5} - 2\sqrt{5}arctg\sqrt{\frac{2x-5}{5}} + C$**;**

3. $-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$.]

Skupina D

Úloha 1: Integrujte racionální funkci: $\int \frac{3x-2}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

Úloha 2: Integrujte iracionální funkci: $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\mathrm{d}x$.

Úloha 3: Vypočtěte integrál goniometrické funkce: $\int \cos^4 x\sin^3 x\mathrm{d}x$.

[Výsledky: 1. $3arctgx+\ln\left|x^2+1\right|-2\ln|x|+C$; 2. $2\sqrt{x+1}+2\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|-\ln x+C$; 3. $-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}+C$.]

10.3.2 Písemná práce č. 2

Písemná práce prověřuje znalost z témat: Reimannův určitý integrál, výpočet určitých integrálů, nevlastní integrály.

Skupina A

Úloha 1: Pro které funkce se definuje Riemannův určitý integrál?

a) pro spojité funkce

b) pro funkce s konečným počtem bodů nespojitosti

c) pro funkce s nekonečným počtem bodů nespojitosti

Úloha 2: Vypočítejte $\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{2x-1}}$.

Úloha 3: Určete, zda nevlastní integrál $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2}$ diverguje nebo konverguje.

[**Výsledky: 1.** b); **2.** $2\ln 2-\frac{1}{2}$ **; 3.** $1-\ln 2,$ *konverguje*.]

Skupina B

Úloha 1: Pro které funkce se definuje Riemannův určitý integrál?

a) pro funkce s konečným počtem bodů nespojitosti

b) pro funkce s nekonečným počtem bodů nespojitosti

c) pro spojité funkce

Úloha 2: Vypočítejte $\int_1^6 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{3x-2}}$.

Úloha 3: Určete, zda nevlastní integrál $\int_4^{+\infty} \frac{2x-4}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x$ diverguje nebo konverguje.

[**Výsledky: 1.** a); **2.** $\frac{2}{3}\left(3+\ln\frac{2}{5}\right)$**; 3.** $+\infty, \textit{diverguje}$**.**]

Skupina C

Úloha 1: Pro které funkce se definuje Riemannův určitý integrál?

a) pro funkce s nekonečným počtem bodů nespojitosti

b) pro spojité funkce

c) pro funkce s konečným počtem bodů nespojitosti

Úloha 2: Vypočítejte $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x$.

Úloha 3: Určete, zda nevlastní integrál $\int_1^{+\infty} \frac{x+6}{x^3+3x}\mathrm{d}x$ diverguje nebo konverguje.

[**Výsledky: 1.**c); **2.** $\frac{1}{6}$ **; 3.** $\frac{1}{8}\ln 2, \textit{konverguje}$**.**]

Skupina D

Úloha 1: Pro které funkce se definuje Riemannův určitý integrál?

a) pro spojité funkce

b) pro funkce s nekonečným počtem bodů nespojitosti

c) pro funkce s konečným počtem bodů nespojitosti

Úloha 2: Vypočítejte $\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \mathrm{d}x$.

Úloha 3: Určete, zda nevlastní integrál $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+4x}$ diverguje nebo konverguje.

[**Výsledky: 1.** c); **2.** $\frac{1}{6}$**; 3.** $11+8\ln 2,$ *konverguje*.]

10.3.3 Písemná práce č. 3

Tato práce je složena z témat: obsah rovinné plochy, délka křivky, objem rotačního tělesa.

Skupina A

Úloha 1: Vypočtěte obsah rovinné oblasti D ohraničené křivkou $\rho = 2a(1-\cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a > 0$.

Úloha 2: Vypočtěte délku křivky $y = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2\ln x\right)$; $x \in \langle 1, 2 \rangle$.

Úloha 3: Vypočítejte objem tělesa vytvořeného rotací rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = 1 - x^2$; $y = x^2$ kolem osy x.

[**Výsledky: 1.** $6\pi a^2$**; 2.** $\frac{3+2\ln 2}{4}$**; 3.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ **.**]

Skupina B

Úloha 1: Vypočtěte obsah rovinné oblasti D ohraničené křivkou $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Úloha 2: Vypočtěte délku křivky $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$; $x \in \langle 1, 3 \rangle$.

Úloha 3: Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníku ohraničeného křivkami $f(x) = \sin\frac{x}{3}$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ kolem osy x.

[**Výsledky: 1.** $\frac{a^2}{4}$**; 2.** $8 + \frac{1}{8}\ln 3$**; 3.** $\frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$**.**]

Skupina C

Úloha 1: Vypočtěte obsah rovinné oblasti D ohraničené křivkou $\rho = a\sin 2\varphi$, $a > 0$.

Úloha 2: Vypočtěte délku křivky $y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Úloha 3: Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníku ohraničeného křivkami $f(x) = \sin\frac{x}{3}$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ kolem osy x.

[**Výsledky: 1.** $\frac{\pi}{8}a^2$**; 2.** $e - e^{-1}$**; 3.** 10π**.**]

Skupina D

Úloha 1: Vypočtěte obsah rovinné oblasti D ohraničené křivkou $\varphi = a\sin 3\varphi$, $a > 0$.

Úloha 2: Vypočtěte délku křivky $y = \ln(1 - x^2)$, $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Úloha 3: Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkami $x + y = 5$, $xy = 4$ kolem osy x.

[**Výsledky: 1.** $\frac{\pi a^2}{4}$**; 2.** $\ln 3 - \frac{1}{2}$**; 3.** 9π**.**]

10.4 Písemné práce - diferenciální počet funkcí více proměnných

Tato písemná práce je vytvořena ve čtyřech rovnocenných variantách (A, B, C, D)

10.4.1 Písemná práce č. 1

Úlohy v písemné práci zahrnují témata: pojem funkce více proměnných, limita a spojitost funkce, parciální derivace prvního řádu.

Skupina A

Úloha 1: Určete definiční obor dané funkce: $f(x,y) = \sqrt{y^2 - 4x^2 + 4}$.

Úloha 2: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{(x,y \to (0,0)} \frac{2 - \sqrt{4 - xy}}{\sqrt{xy}}$.

Úloha 3: Určete, ve kterých bodech roviny E_2 není spojitá funkce $f(x.y) = \frac{xy}{x+y}$.

Úloha 4: Najděte parciální derivace prvního řádu dané funkce podle proměnných: $h(x,y) = \ln(x + \ln y)$.

[**Výsledky: 1.** část roviny mezi dvěma větvemi hyperboly, včetně hyperboly $x^2 - \frac{y^2}{4} \leq 1$; **2.** 0; **3.** přímka o rovnici $y = -x$**; 4.** $l'_x = \frac{1}{x + \ln y}$**;** $l'_y = \frac{1}{y(x + \ln y)}$.]

Skupina B

Úloha 1: Určete definiční obor dané funkce: $z(x,y)=\sqrt{\ln\dfrac{16}{x^2+y^2}}$.

Úloha 2: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$.

Úloha 3: Určete, ve kterých bodech roviny E_2 není spojitá funkce $f(x,y)=\dfrac{x^2+2y^2}{y-x^2}$.

Úloha 4: Najděte parciální derivace prvního řádu dané funkce podle proměnných:

$\varphi(s,t)=\cos\dfrac{s^2}{t}$.

[**Výsledky: 1.** $x^2+y^2\le 16, [x,y]\ne[0,0]$; **2.** 0; **3.** parabola o rovnici $y=x^2$; **4.**

$\varphi'_s=-\dfrac{2s}{t}\cdot\sin\dfrac{s^2}{t}$ **;** $\varphi'_y=-\dfrac{s^2}{t^2}\cdot\sin\dfrac{s^2}{t}$.]

Skupina C

Úloha 1: Určete definiční obor dané funkce: $g(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$.

Úloha 2: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$.

Úloha 3: Určete, ve kterých bodech roviny E_2 není spojitá funkce $f(x,y)=\dfrac{x+y}{|x|-|y|}$

Úloha 4: Najděte parciální derivace prvního řádu dané funkce podle proměnných:

$f(x,y)=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+x^y$.

[**Výsledky: 1.** $x \geq 0 \wedge y \rangle \sqrt{x}$; **2.** $\frac{3}{4}$**; 3.** parabola o rovnici $y = x^2$; **4.** $f'_x = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} + y \cdot x^{y-1}$**;**

$f'_y = xe^{\frac{x}{y}} + x^y \cdot \ln x$.]

Skupina D

Úloha 1: Určete definiční obor dané funkce: $s(x, y) = \sqrt{2x + y - 4} + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

Úloha 2: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{tg}(x^2 + y^4)}{3(x^2 + y^4)}$.

Úloha 3: Určete, ve kterých bodech roviny E_2 není spojitá funkce $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - 2y}$.

Úloha 4: Najděte parciální derivace prvního řádu dané funkce podle proměnných:

$c(a, b) = \frac{\mathrm{tg}\left(a^2\right)}{b}$

[**Výsledky: 1.** $x^2 + y^2 \leq 16$; $y \geq 4 - 2x$; **2.** $\frac{1}{3}$**; 3.** parabola o rovnici $y = \frac{x^2}{2}$; **4.**

$c'_a = \frac{2s}{\cos^2\left(a^2\right)t}$ **;** $c'_b = -\frac{tg\left(s^2\right)}{t^2}$.]

10.4.2 Písemná práce č. 2

Písemná práce je složena z témat: Derivace vyšších řádů, diferenciál funkce, derivace složené funkce, diferenciál vyšších řádů.

Skupina A

Úloha 1: Vypočtěte parciální derivaci 2.řádu f''_{xy} funkce $f(x,y)=\sqrt{3xy+x^2}$.

Úloha 2: Vypočtěte přibližnou hodnotu výrazu $\ln\left(\sqrt{1{,}03}+\sqrt[3]{1{,}06}-1\right)$ pomocí totálního diferenciálu.

Úloha 3: Je-li $z=\frac{u^2}{v}$**,** kde $u=x-2y$ a $v=2x+y$**,** pro $\frac{\partial z}{\partial x}$ platí:

a) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{v}1-\frac{u^2}{v^2}2$

b) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{v}2-\frac{u^2}{v^2}1$

c) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{v}-\frac{u^2}{v^2}$

Úloha 4: Zjistěte d^2z funkce $z=\sin(2x+y)$.

[**Výsledky: 1.** $f''_{xy}=\frac{9xy}{4(3xy+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; **2.** $0{,}035$**; 3.** a); **4.** $d^2z=-\sin(2x+y)(2dx+dy)^2$**.**]

Skupina B

Úloha 1: Vypočtěte parciální derivaci 2.řádu f''_{xy} $f(x,y)=\frac{\cos x^2}{y}$.

Úloha 2: Vypočtěte přibližnou hodnotu výrazu $\dfrac{\sqrt[3]{0{,}97}}{\sqrt[4]{1{,}05}}$ pomocí totálního diferenciálu.

Úloha 3: Je-li $z = u^2v - uv^2$**,** kde $u = x\cos y$ **a** $v = x\sin y$**,** pro $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ platí:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = (2uv - v^2) + (u^2 - 2uv)$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = (2uv - v^2)x\cos y + (u^2 - 2uv)(-x\sin y)$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = (2uv - v^2)(-x\sin y) + (u^2 - 2uv)x\cos y$

Úloha 4: Zjistěte d^2z funkce $z = x^3 - y^3 - xy$.

[**Výsledky: 1.** $f''_{xy} = \dfrac{2x}{y^2}\sin x^2$ **; 2.** $0{,}9775$ **; 3.** c)**; 4.** $\mathrm{d}^2z = 6x(\mathrm{d}x)^2 - 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 6y(\mathrm{d}y)^2$ **.**]

Skupina C

Úloha 1: Vypočtěte parciální derivaci 2.řádu f''_{xy} funkce $f(x, y) = \dfrac{y^2}{1+5x}$.

Úloha 2: Vypočtěte přibližnou hodnotu výrazu $\sqrt{0{,}95^3 + 2{,}02^3}$ pomocí totálního diferenciálu.

Úloha 3: Je-li $z = u^2v - uv^2$**,** kde $u = x\cos y$ **a** $v = x\sin y$**,** pro $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ platí:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^u \ln v \sin y + \dfrac{e^u}{v}\cos y$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^u \ln v \cos y + \dfrac{\mathrm{e}^u}{v}\sin y$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^u \ln v + \dfrac{\mathrm{e}^u}{v}$

Úloha 4: Zjistěte $\mathrm{d}^2 z$ funkce $z = \ln(x - y)$.

[**Výsledky: 1.** $f''_{xy} = \dfrac{-10y}{(1+5x)^2}$ **; 2.** $3{,}015$ **; 3. b);**

4. $d^2 z = \dfrac{1}{(x-y)^2}(dx)^2 + \dfrac{2}{(x-y)^2}dxdy - \dfrac{1}{(x-y)^2}(dy)^2$ **.**]

Skupina D

Úloha 1: Vypočtěte parciální derivace 2.řádu f''_{xy} funkce: $f(x, y) = \ln(x^3 + y)$.

Úloha 2: Vypočtěte přibližnou hodnotu výrazu $\sqrt{1{,}1} \cdot \sqrt[3]{1{,}3}$ pomocí totálního diferenciálu.

Úloha 3: Je-li $z = u^2 \ln v$**,** kde $u = \dfrac{x}{y}$ **a** $v = 3x - 2v$**,** pro $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ platí:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2u \ln v(-2) + \dfrac{u^2}{v}\left(\dfrac{-x}{y^2}\right)$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2u \ln v + \dfrac{u^2}{v}$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2u \ln v\left(\dfrac{-x}{y^2}\right) + \dfrac{u^2}{v}(-2)$

Úloha 4: Zjistěte $\mathrm{d}^2 z$ funkce $z = \mathrm{e}^{xy}$.

[**Výsledky: 1.** $f''_{xy} = \dfrac{-3x^2}{(x^3+y)^2}$ **; 2.** $1{,}11$**; 3.c)**; **4.**

$\mathrm{d}^2 z = e^{xy} y^2 (\mathrm{d}x)^2 + 2e^{xy}(xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + e^{xy} x^2 (\mathrm{d}y)^2$.]

10.4.3 Písemná práce č. 3

Tato písemná práce zkouší znalost z témat: Taylorova věta, lokální a absolutní extrémy, funkce zadaná implicitně.

Skupina A

Úloha 1: Rozviňte funkci $f(x,y) = x^2 + xy - y^2 + x + 3y$ podle Taylorovy věty v okolí bodu $A[-1;1]$.

Úloha 2: Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = 4 - (x-2)^2 - (y+3)^2$.

Úloha 3: Určete parciální derivace z'_x, z'_y implicitní funkce $z = f(x,y)$ definované rovnicí: $z^3 + 3x^2 z - 2xy = 0$.

[**Výsledky: 1.** $f(x,y) = 3 + (x+1)^2 + (x+1)(y-1) - (y-1)^2$; **2.** MAX4 v $[2;-3]$;
3. $z'_x = \dfrac{2y - 6xy}{3z^2 + 3x^2}$; $z'_y = \dfrac{2x}{3z^2 + 3x^2}$.]

Skupina B

Úloha 1: Rozviňte funkci $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 + x - 3y + \dfrac{19}{4}$ podle Taylorovy věty v okolí bodu $A\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Úloha 2: Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = -(2x-3)^2 + (y+1)^2 - 3$.

Úloha 3: Určete parciální derivace z'_x, z'_y implicitní funkce $z = f(x,y)$ definované rovnicí: $x + y^2 + z^3 + z - 4 = 0$.

[**Výsledky: 1.** $f(x,y) = 2 + 3(x-\frac{1}{2})^2 - 2(x-\frac{1}{2})(y-2) + (y+2)^2$; **2.** MAX3 v $\left[\dfrac{3}{2};-1\right]$;

3. $z'_x = \dfrac{-1}{1+3z^2}$; $z'_y = \dfrac{-2y}{1+3z^2}$.]

Skupina C

Úloha 1: Rozviňte funkci $f(x,y) = 2x^2 + xy - y^2 + 7x + 4y + 6$ podle Taylorovy věty v okolí bodu $A[-2;1]$.

Úloha 2: Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = -7 + (x+2)^2 - (y-3)^2$.

Úloha 7: Určete parciální derivace z'_x, z'_y implicitní funkce $z = f(x,y)$ definované rovnicí: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$.

[**Výsledky: 1.** $f(x,y) = 1 + 2(x+2)^2 + (x+2(y-1) - (y-1)^2$; **2.** MIN -7 v $[-2;3]$**;**

3. $z'_x = \dfrac{3yz - 3x^2}{3z^2 - 3xy}$; $z'_y = \dfrac{3xz - 3y^2}{3z^2 - 3xy}$.]

Skupina D

Úloha 1: Rozviňte funkci $f(x,y) = -x^2 + xy + 3y^2 + 16x + 5y - 100$ podle Taylorovy věty v okolí bodu $A[9;2]$.

Úloha 2: Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = (x+4)^2 - (y+1)^2 - 1$.

Úloha 3: Určete parciální derivace z'_x, z'_y implicitní funkce $z = f(x,y)$ definované rovnicí: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - y = 0$.

[**Výsledky: 1.** $f(x,y) = 3 - (x-9)^2 + (x-9)(y-2) + 6(y-2)^2$; **2.** MIN -1 v $[-4;-1]$;

3. $z'_x = \dfrac{z-2x}{2y-x}$; $z'_y = \dfrac{1-2y}{2z-x}$.]

11 ZÁVĚR

Jako téma své diplomové práce jsem zvolila didaktické testy a jejich využití v matematické analýze. Nejprve bylo nutné tuto problematiku vymezit teoreticky na základě vhodné rešerše relevantní literatury. Po důkladném prostudování teoretických poznatků popisující postup ke správnému sestavení didaktického testu jsem vytvořila soubor nestandardizovaných testů určených pro studenty prvního a druhého ročníku tříletého bakalářského studijního oboru Matematika se zaměřením na vzdělávání.

Testy jsou tvořeny různými typy testových položek. Objevuje se test tvořený z úloh s výběrovými odpověďmi typu „jedna správná odpověď" a z úloh se stručnou odpovědí. V testech se setkáte i s úlohami se širokou odpovědí a dichotomickými úlohami, dále s kombinací typů úloh. Také způsob jejich vypracování je různý. Testy 1, 3, 4, 5, 7, 8 a 9 požadují zaznamenávat řešení do záznamových archů a jsou vyhodnocovány pomocí šablony. V testech 2 a 6 se zapisuje řešení přímo do testového sešitu a výsledky se kontrolují na základě archu, kde jsou uváděny i postupy řešení. Samozřejmě vyučující musí počítat s tím, že ne každý student bude řešit úlohy postupem uvedeným v archu. Úlohy lze řešit více způsoby.

Při výběru položek v testech jsem používala literaturu uvedenou v seznamu použitých zdrojů pod čísly 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17. K diplomové práci jsem přispěla vlastní tvorbou testových úloh a to asi z části 25 %. Struktura vytvořených didaktických testů usnadňuje práci učitelům těchto předmětů. Stačí jen, aby si vyučující vybral test podle témat, ze kterých chce studenty testovat. K dispozici má i testovou příručku s potřebnými informacemi a v příloze si vyhledá záznamový arch, pokud to test vyžaduje, vyhodnocovací šablonu nebo arch ke kontrole řešení.

Jedním ze znaků didaktických testů je rychlý způsob kontroly jejich výsledků. Didaktické testy dávají přednost kontrole pomocí vyhodnocovací šablony, což je diskutabilní, zda je vhodné skutečně v oboru matematika kontrolovat pouze řešení.

Poněvadž témata integrální počet funkce jedné proměnné a diferenciální počet funkcí více proměnných jsou velmi obsáhlá, výpočet příkladů s touto tématikou zabírá více času, nelze vytvořit kvalitní didaktický test s kratší dobou na vypracování než 40 minut, pokud se v testu vyskytují úlohy se stručnou odpovědí nebo se širokou odpovědí.

U testů tvořených pouze z úloh s výběrem odpovědí typu „jedna správná odpověď" lze stanovit čas k vypracování kratší než 40 minut, protože lze předpokládat, že ne každý student bude úlohy řešit, ale svou odpověď bude jen tipovat.

Vytvořené didaktické testy, které se nevyužijí ve cvičeních ani jako zadání pro písemnou zkoušku, se mohou zadat studentům za domácí úlohu a k procvičení před psaním testu. Tato diplomová práce tak může sloužit jako praktická příručka pro učitele vyučující matematickou analýzu nejen na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci, ale i na jiných typech vysokých škol.

U výše uvedených didaktických testů není provedena standardizace, a proto se nabízí pokračovat v této práci, provést ji a důkladněji prozkoumat jednotlivé položky v testech.

12 SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

1. BOUCHALA, J. *Matematická analýza II*. 1. vyd. Ostrava : VŠB-Technická univerzita Ostrava, 2007. ISBN 978-80-248-1587-9.
2. BROŽÍKOVÁ, E., KITTLEROVÁ, M. *Sbírka příkladů z matematiky II*. 2. vyd. Praha : ČVUT, 2007. ISBN 978-80-01-03674-7.
3. DOŠLÁ, Z., DOŠLÝ, O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 3. vyd. Brno : Masarykova univerzita, 2006. ISBN 80-210-4159-5.
4. *FreeBSD Handbook* [online]. [cit. 24. 1. 2010]. Dostupné na Internetu: <mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=851>.
5. HALIŠKA, J. *Jak testy sestavit a pracovat s nimi*. 2. vyd. Brno : Středisko služeb školám, 1999.
6. CHARVÁT, J., KELAR, V., ŠIBRAVA, Z. *Matematika II*. 1. vyd. Praha : ČVUT, 2006. ISBN 80-01-03537-9.
7. CHRÁSKA, M. *Didaktické testy v práci učitele*. Olomouc : Krajský pedagogický ústav, 1988.
8. CHRÁSKA, M. *Didaktické testy: příručka pro učitele a studenty učitelství*. Brno: Paido, 1999. ISBN 80-85931-68-0.
9. KONÍČEK, L., MALČÍK, M., MAŤAŠEJE, H., MAZUROVÁ, V. *Evaluace výsledků vzdělávání*. 1. vyd. Ostrava : Ostravská univerzita v Ostravě, 2007. ISBN 978-80-7368-292-7.
10. KRUPKOVÁ, V. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*. 1. vyd. Brno : Vutium, 1999. ISBN 80-214-1542-8.
11. LAITOCHOVÁ, J. *Matematická analýza 2*. 2. vyd. Olomouc : Univerzita Palackého v Olomouci, 2003. ISBN 80-244-0688-8.
12. NEKVIDA, M. *Matematika II*. 1. vyd. Liberec : Technická univerzita v Liberci, 2000. ISBN 80-7083-374-2.
13. NEUSTUPA, J. *Matematika II*. 1. vyd. Praha : ČVUT, 2003. ISBN 80-01-02650-7.
14. PÍŠOVÁ, D., GARDAVSKÁ, E. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 1. vyd. Ostrava : Vysoká škola báňská, 1987.
15. PRACHAŘ, O., JELÍNKOVÁ, J. *Průvodce předmětem matematika II*. 3. vyd. Pardubice : Univerzita Pardubice, 2007. ISBN 978-7395-032-3.
16. PŘIBYLOVÁ, L. *Přímá metoda integrace* [online]. [cit. 24. 1. 2010]. Dostupné na Internetu: <http://www.math.muni.cz/~pribylova/intvzorce>.

17. ROZENSKÝ, Z., SCHMIDTMAYER, J., VEIT, J. *Úlohy z matematiky II.díl*. 1. vyd. Praha : Státní nakladatelství technické literatury, 1964.
18. ŘEŠÁTKO, M. *Didaktické testy ve školní praxi*. Praha : Výzkumný ústav odborného školství, 1975.
19. SMEKAL, V., ŠVEC, V., ZAJAC, J. *Didaktické testy a jejich vyhodnocování*. Brno : Středisko pro výzkum učebních metod a prostředků, 1973.
20. ŠKODA, J., DOULÍK, P. *Tvorba a hodnocení didaktických testů*. 1. vyd. Ústí nad Labem : Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem, 2007. ISBN 978-80-7044-919-6.

13 SEZNAM PŘÍLOH

Příloha 1: Tabulka hodnot pro C-škálu

Příloha 2: Záznamový arch pro test číslo 1

Příloha 3: Šablona pro test číslo 1, skupina A

Příloha 4: Šablona pro test číslo 1, skupina B

Příloha 5: Šablona pro test číslo 1, skupina C

Příloha 6: Šablona pro test číslo 1, skupina D

Příloha 7: Arch k testu číslo 2, skupina A

Příloha 8: Arch k testu číslo 2, skupina B

Příloha 9: Arch k testu číslo 2, skupina D

Příloha 10: Záznamový arch pro test číslo 3

Příloha 11: Šablona na test číslo 3, skupina A

Příloha 12: Šablona pro test číslo 3, skupina B

Příloha 13: Šablona pro test číslo 3, skupina C

Příloha 14: Šablona pro test číslo 3, skupina D

Příloha 15: Záznamový arch pro test číslo 4

Příloha 16: Šablona pro test číslo 4, skupina A

Příloha 17: Šablona pro test číslo 4, skupina B

Příloha 18: Šablona pro test číslo 4, skupina C

Příloha 19: Šablona pro test číslo 4, skupina D

Příloha 20: Záznamový arch pro test číslo 5

Příloha 21: Šablona pro test číslo 5, skupina A

Příloha 22: Šablona pro test číslo 5, skupina B

Příloha 23: Arch k testu číslo 6, skupina A

Příloha 24: Arch k testu číslo 6, skupina B

Příloha 25: Arch k testu číslo 6, skupina C

Příloha 26: Arch k testu číslo 6, skupina D

Příloha 27: Záznamový arch pro test číslo 7

Příloha 28: Šablona pro test číslo 7, skupina A

Příloha 29: Šablona pro test číslo 7, skupina B

Příloha 30: Šablona pro test číslo 7, skupina C

Příloha 31: Šablona pro test číslo 7, skupina D

Příloha 32: Záznamový arch pro test číslo 8

Příloha 1: Tabulka hodnot pro C-škálu

Body C-škály	Procenta případů	Kumulativní procenta
0	1,2	1,2
1	2,8	4,0
2	6,6	10,6
3	12,1	22,7
4	17,4	40,1
5	19,8	59,9
6	17,4	77,3
7	12,1	89,4
8	6,0	96,0
9	2,8	98,8
10	1,2	100,0

Příloha 2: Záznamový arch pro test číslo 1

<table>
<tr><td colspan="2">Datum:</td><td colspan="4">Jméno a příjmení:</td></tr>
<tr><td colspan="4">Studijní kombinace:</td><td colspan="2">Skupina:</td></tr>
<tr><td>Číslo otázky</td><td colspan="4">Řešení položky</td><td>Body</td></tr>
<tr><td>1.1.</td><td colspan="2">ANO</td><td colspan="2">NE</td><td></td></tr>
<tr><td>1.2.</td><td colspan="2">ANO</td><td colspan="2">NE</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3.</td><td colspan="2">ANO</td><td colspan="2">NE</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>a</td><td colspan="2">b</td><td>c</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>a</td><td colspan="2">b</td><td>c</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>a</td><td colspan="2">b</td><td>c</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>a</td><td colspan="2">b</td><td>c</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>a</td><td colspan="2">b</td><td>c</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>a</td><td colspan="2">b</td><td>c</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>a</td><td colspan="2">b</td><td>c</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>a</td><td colspan="2">b</td><td>c</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>a</td><td colspan="2">b</td><td>c</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Celkový počet bodů</td><td></td></tr>
</table>

Příloha 3: Šablona pro test číslo 1, skupina A

Datum:		Jméno a příjmení:		
Studijní kombinace:			Skupina: A	
Číslo otázky	Řešení položky			Body
1.1.	~~ANO~~	NE		1
1.2.	~~ANO~~	NE		1
1.3.	ANO	~~NE~~		1
2	a	b	~~c~~	1
3	a	~~b~~	c	1
4	a	b	~~c~~	1
5	~~a~~	b	c	1
6	a	~~b~~	c	1
7	~~a~~	b	c	1
8	~~a~~	b	c	1
9	a	~~b~~	c	1
10	a	b	~~c~~	1
Celkový počet bodů				12

Příloha 4: Šablona pro test číslo 1, skupina B

Datum:		Jméno a příjmení:		
Studijní kombinace:			Skupina: B	
Číslo otázky	Řešení položky			Body
1.1.	ANO	~~NE~~		1
1.2.	~~ANO~~	NE		1
1.3.	~~ANO~~	NE		1
2	a	~~b~~	c	1
3	a	b	~~c~~	1
4	a	~~b~~	c	1
5	~~a~~	b	c	1
6	a	b	~~c~~	1
7	a	b	~~c~~	1
8	~~a~~	b	c	1
9	~~a~~	b	c	1
10	a	b	~~c~~	1
Celkový počet bodů				12

Příloha 5: Šablona pro test číslo 1, skupina C

<table>
<tr><td colspan="3">Datum:</td><td colspan="3">Jméno a příjmení:</td></tr>
<tr><td colspan="4">Studijní kombinace:</td><td colspan="2">Skupina: C</td></tr>
<tr><td>Číslo otázky</td><td colspan="4">Řešení položky</td><td>Body</td></tr>
<tr><td>1.1.</td><td colspan="2">~~ANO~~</td><td colspan="2">NE</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1.2.</td><td colspan="2">~~ANO~~</td><td colspan="2">NE</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1.3.</td><td colspan="2">ANO</td><td colspan="2">~~NE~~</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>~~a~~</td><td colspan="2">b</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>~~a~~</td><td colspan="2">b</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>~~a~~</td><td colspan="2">b</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>a</td><td colspan="2">b</td><td>~~c~~</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td>a</td><td colspan="2">~~b~~</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td>a</td><td colspan="2">~~b~~</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8</td><td>a</td><td colspan="2">b</td><td>~~c~~</td><td>1</td></tr>
<tr><td>9</td><td>a</td><td colspan="2">~~b~~</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td>~~a~~</td><td colspan="2">b</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="5">Celkový počet bodů</td><td>12</td></tr>
</table>

Příloha 6: Šablona pro test číslo 1, skupina D

Datum:		Jméno a příjmení:		
Studijní kombinace:			Skupina: D	
Číslo otázky	Řešení položky			Body
1.1.	~~ANO~~	NE		1
1.2.	~~ANO~~	NE		1
1.3.	~~ANO~~	NE		1
2	a	b	~~c~~	1
3	a	~~b~~	c	1
4	~~a~~	b	c	1
5	~~a~~	b	c	1
6	a	b	~~c~~	1
7	a	~~b~~	c	1
8	a	b	~~c~~	1
9	~~a~~	b	c	1
10	a	~~b~~	c	1
Celkový počet bodů				12

Příloha 7: Arch k testu číslo 2, skupina A **Bodové hodnocení**

1.1. NE; **1.2.** ANO; **1.3.** NE **3 body**

2.a) $n<m$; b) $n \geq m$; c) $n = m$ **3 body**

3. a) **1 bod**

4. c) **1 bod**

5.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{t^3} \cdot \frac{1}{-\sin x}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{t^{-2}}{2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

substituce: $\cos x = t$

$$-\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{-\sin x}$$

2 body

6. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x =$

$$\int \frac{1}{t - \frac{t^2+1}{2t}} \cdot \frac{t^2-1}{2t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{2t}{t^2-1} \cdot \frac{t^2-1}{2t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$$

substituce: $\sqrt{x^2-1} = t - x$

$$x^2 - 1 = t^2 - 2tx + x^2$$

$$x = \frac{t^2+1}{2t}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2t \cdot 2t - 2(t^2-1)}{4t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{4t^2 - 2t^2 - 2}{4t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2(t^2-1)}{4t^2} = \frac{t^2-1}{2t^2}$$ **2 body**

7. $\dfrac{x+7}{x^2-2x-3} = \dfrac{x+7}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{A}{(x-3)} + \dfrac{B}{(x+1)}$

$x+7 = A(x+1) + B(x-3)$

$x+7 = Ax + A + Bx - 3B$

$$\begin{array}{l} 1 = A+B \\ 7 = A-3B \end{array} \Rightarrow A = -\frac{3}{2}; B = \frac{5}{2}$$ **1 bod**

8. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-1}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x =$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|\right) + \frac{1}{2}arctgx + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}arctgx + C$$

$$\frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$x^2 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$$

$$x^2 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + Dx^2 - Cx - D$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A+C \\ 1 = B+D \\ 0 = A-C \\ 0 = B-D \end{array}\right\} \Rightarrow A = 0; B = \frac{1}{2}; C = 0; D = 2$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$1 = Ax + A + Bx - B$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A+B \\ 1 = A-B \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2}; B = -\frac{1}{2}$$

2 body

9. b) **1 bod**

10.

$$\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^3 x}{1+t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\cos x} = \int \frac{\cos^2 x}{1+t}\mathrm{d}t = \int \frac{1-\sin^2 x}{1+t}\mathrm{d}t =$$

$$\int \frac{1-t^2}{1+t}\mathrm{d}t = \int (-t+1)\mathrm{d}t = -\frac{t^2}{2}+t+C = -\frac{\sin^2 x}{2}+\sin x + C$$

substituce: $\sin x = t$

$\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\cos x}$

$(-t^2+1):(1+t) = -t+1$

2 body

Celkový počet bodů: 18

Příloha 8: Arch k testu číslo 2, skupina B **Bodové hodnocení**

1.1. NE; **1.2.** NE; **3.** ANO **3 body**

2. a) $n \geq m$; b) $n = m$**;** c) $n < m$ **3 body**

3. c) **1 bod**

4. b) **1 bod**

5.

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\sqrt{t^3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin x}\right) \mathrm{d}t = -\int \frac{1}{\sqrt{t^3}} \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{t}} . \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} + C = \frac{2\sqrt{\cos x}}{\cos x} + C$$

substituce: $\cos x = t$

$$-\sin x \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sin x}$$

2 body

6. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{t - \left(\frac{t^2-a}{2t}\right)} = \int \frac{t^2+a}{2t^2} \cdot \frac{2t}{t^2+a} \mathrm{d}t = \int \frac{1}{t} \mathrm{d}t = \ln|t| + C = \ln\left|\sqrt{x^2+a} + x\right| + C$$

substituce: $\sqrt{x^2+a} = t - x$

$$x^2 + a = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-a}{2t}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{4t^2 - 2t^2 + 2a}{4t^2} \mathrm{d}t = \frac{2(t^2+a)}{4t^2} \mathrm{d}t = \frac{t^2+a}{2t^2} \mathrm{d}t$$

2 body

7. $$\frac{x+2}{3x^2+3x-18} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$x + 2 = A(x+3) + B(x-2)$$

$$x + 2 = Ax + 3A + Bx - 2B$$

$$\left.\begin{array}{l}1 = A + B \\ 2 = 3A - 2B\end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{4}{5}; B = \frac{1}{5}$$ **1 bod**

8.

$$\int \frac{3x^2 + 11x + 18}{x^3 + 6x^2 + 9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} = \int \frac{2}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x+3}\mathrm{d}x - \int \frac{4}{(x+3)^2}\mathrm{d}x =$$

$$= 2\ln|x| + \ln|x+3| + \frac{4}{x+3} + C$$

$3x^2 + 11x + 18 = A(x+3)^2 + Bx(x+3) + Cx$ substituce: $(x+3) = t$

$3x^2 + 11x + 18 = Ax^2 + 6Ax + 9A + Bx^2 + 3Bx + Cx$ $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

$$\begin{array}{l}3 = A + B \\ 11 = 6A + 3B + C \Rightarrow A = 2; B = 1; C = -4 \\ 18 = 9A\end{array}$$

2 body

9.c) **1 bod**

10. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 1}\mathrm{d}x =$

$$= \int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 1} \cdot \left(-\frac{\mathrm{d}t}{\sin x}\right) = -\int \frac{\sin^2 x}{t+1}\mathrm{d}t = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{t+1}\mathrm{d}t = -\int \frac{(1-t)(1+t)}{t+1}\mathrm{d}t =$$

$$-\int (1-t)\mathrm{d}t = -t + \frac{t^2}{2} + C = -\cos x + \frac{\cos^2 x}{2} + C$$

substituce: $\cos x = t$

$-\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{-\sin x}$

2 body

Celkový počet bodů: 18

Arch k testu číslo 2, skupina C **Bodové hodnocení**

1.1. ANO; **1.2.** NE; **3.** ANO **3 body**

2. a) $n = m$; b) $n < m$**;** c) $n \geq m$; **3body**

3. b) **1 bod**

4. c) **1 bod**

5. $\int \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x =$

$$= \int \sin^3 x \cos^2 x \left(-\frac{\mathrm{d}t}{\sin x} \right) = -\int \sin^2 x t^2 \mathrm{d}t = -\int (1 - \cos^2 x) t^2 \mathrm{d}t =$$

$$= -\int (t^2 - t^4) \mathrm{d}t = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

substituce: $\cos x = t$

$$-\sin x \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{\sin x}$$ **2 body**

6.

$$\int \frac{\sqrt{2x-5}}{x} \mathrm{d}x = \int \frac{t}{\frac{t^2+5}{2}} \cdot t \mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2}{t^2+5} \mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2+5-5}{t^2+5} \mathrm{d}t =$$

$$= 2\int \frac{t^2+5}{t^2+5} \mathrm{d}t - 10\int \frac{1}{t^2+5} \mathrm{d}t = 2t - 2\sqrt{5} arctg \sqrt{\frac{2x-5}{5}} + C$$

substituce: $\sqrt{2x-5} = t$

$$2x - 5 = t^2$$

$$x = \frac{t^2+5}{2}$$

$dx = t dt$ **2 body**

7. $\frac{5x-3}{x^2-5x+6} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)}$

$5x-3 = A(x-2) + B(x-3)$

$5x-3 = Ax - 2a + Bx - 3B$ **1 bod**

$$\left.\begin{aligned} 5 &= A + B \\ 3 &= -2A - 3B \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = 12; B = -7$$

8. $\int \frac{dx}{x^3+4x} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{4}\int \frac{x}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{8}arctg\,\frac{x}{2} + C$

$\frac{1}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

$1 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 0 &= C \\ 1 &= 4A \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{4}; B = -\frac{1}{4}$$ **2 body**

9. a) **1 bod**

10.

$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin x}dx = \int \frac{t \cos x}{1+t} \cdot \frac{1}{\cos x}dt = \int \frac{t}{1+t}dt =$

$\int \frac{t+1-1}{1+t}dt = t - \int \frac{1}{1+t}dt = t - \ln|1+t| + C = \sin x - \ln|1+\sin x| + C$

substituce: $\sin x = t$

$\cos x dx = dt$

$dx = \frac{dt}{\cos x}$

2 body

Celkový počet bodů: 18

Příloha 9: Arch k testu číslo 2, skupina D **Bodové hodnocení**

1.1. ANO; **1.2.** ANO; **3.** NE **3 body**

2. a) $n<m$; b) $n=m$**;** c) $n\geq m$; **3 body**

3. a) **1 bod**

4. b) **1 bod**

5.

$$\int \cos^4 x \sin^3 x\left(-\frac{\mathrm{d}t}{\sin x}\right)=-\int \cos^4 x \sin^2 x \mathrm{d}t=-\int t^4(1-\cos^2 x)\mathrm{d}t=$$

$$-\int t^4(1-t^2)\mathrm{d}t=-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}+C=-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^3 x}{3}+C$$

substituce: $\cos x=t$

$-\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$

$\mathrm{d}x=-\dfrac{\mathrm{d}t}{\sin x}$ **2 body**

6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\mathrm{d}x=$

$$\int \frac{t}{t^2-1}dt=2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=2\int \frac{t^2-1}{t^2-1}dt+2\int \frac{1}{t^2-1}dt=2\sqrt{x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$$

substituce: $\sqrt{x+1}=t^2$

$x+1=t^2$

$dx=2tdt$

$$\int \frac{1}{t^2-1}dt=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}dt-\frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$$

$$1 = A(t+1) + B(t-1)$$
$$1 = At + A + Bt - B$$
$$\left.\begin{array}{l} 0 = A + B \\ 1 = A - B \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2}; B = -\frac{1}{2}$$

2 body

7. $\dfrac{1}{x^2 - 6x + 5} = \dfrac{A}{(x-5)} + \dfrac{B}{(x-1)}$

$$1 = A(x-1) + B(x-5)$$
$$1 = Ax - A + Bx - 5B$$
$$\begin{array}{ll} 0 = A + B & 0 = A + B \\ 1 = -A - 5B & 1 = -A - 5B \end{array}\Bigg\} \Rightarrow A = \frac{1}{4}; B = -\frac{1}{4}$$ **1 bod**

8. $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} = \int -\frac{2}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{2x+3}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int -\frac{2}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x^2+1}\mathrm{d}x =$

$$= 3\operatorname{arctg} x + \ln\left|x^2+1\right| - 2\ln|x| + C$$

$$3x - 2 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A + B \\ 3 = C \\ -2 = A \end{array}\right\} \Rightarrow B = 2$$

substituce: $x^2 + 1 = t$

$$2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2x}$$ **2 body**

9. c) **1 bod**

10.

$$\int \frac{\cos x \sin x}{\cos x + 1}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x \sin x}{\cos x + 1} \cdot \left(-\frac{\mathrm{d}t}{\sin x}\right) = -\int \frac{t}{t+1}\mathrm{d}t =$$

$$-\int \frac{t+1-1}{t+1}\mathrm{d}t = -t + \ln|t+1| + C = -\cos x + \ln|\cos x + 1| + C$$

substituce: $\cos x = t$

$$-\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{\sin x}$$

2 body

Celkový počet bodů: 18

Příloha 10: Záznamový arch pro test číslo 3

Datum:		Jméno a příjmení:	
Studijní kombinace:			Skupina:
Číslo otázky	Řešení položky		Body

Číslo otázky	a	b	c	Body
1.1.	a	b	c	
1.2.	a	b	c	
1.3.	a	b	c	
2				
3	a	b	c	
4	a	b	c	
5	a	b	c	
6	a	b	c	
7				
8				
9				
10				
11				
Celkový počet bodů				

Příloha 11: Šablona na test číslo 3, skupina A

Datum:		Jméno a příjmení:		
Studijní kombinace:			Skupina: A	
Číslo otázky	Řešení položky			Body
1.1.	~~a~~	b	c	1
1.2.	a	b	~~c~~	1
1.3.	~~a~~	b	c	1
2	$S_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + M_3\Delta x_3 + M_4\Delta x_4 + M_5\Delta x_5 + \ldots + M_n\Delta x_n$			1
3	a	b	~~c~~	1
4	~~a~~	b	c	1
5	a	~~b~~	c	1
6	a	~~b~~	c	1
7	$-\frac{1}{9}$			1
8	$2\ln 2 - \frac{1}{2}$			1
9	$1 - \ln 2, \mathit{konverguje}$			2
10	$f(c) = \frac{2}{\pi}$			1
11	*diverguje*			1
Celkový počet bodů				14

Příloha 12: Šablona pro test číslo 3, skupina B

Datum:		Jméno a příjmení:		
Studijní kombinace:			Skupina: B	
Číslo otázky	Řešení položky			Body
1.1.	a	b	~~c~~	1
1.2.	a	b	~~c~~	1
1.3.	a	~~b~~	c	1
2	$s_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + m_3\Delta x_3 + m_4\Delta x_4 + m_5\Delta x_5 + \dots + m_n\Delta x_n$			1
3	~~a~~	b	c	1
4	a	~~b~~	c	1
5	~~a~~	b	c	1
6	a	~~b~~	c	1
7	$\pi^2 - 4$			1
8	$\frac{2}{3}\left(3 + \ln\frac{2}{5}\right)$			1
9	$+\infty, divergiuje$			2
10	$f(c) = \frac{2}{\pi}$			1
11	*konverguje*			1
Celkový počet bodů				14

Příloha 13: Šablona pro test číslo 3, skupina C

Datum:		Jméno a příjmení:		
Studijní kombinace:			Skupina: C	
Číslo otázky	Řešení položky			Body
1.1.	a	~~b~~	c	1
1.2.	~~a~~	b	c	1
1.3.	a	b	~~c~~	1
2	$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + f(\xi_4)\Delta x_4 + f(\xi_5)\Delta x_5 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n$			1
3	~~a~~	b	c	1
4	a	~~b~~	c	1
5	a	b	~~c~~	1
6	~~a~~	b	c	1
7	4π			1
8	$\frac{1}{6}$			1
9	$\frac{1}{8}\ln 2, konverguje$			2
10	$f(c) = \frac{4}{3}$			1
11	*diverguje*			1
Celkový počet bodů				14

Příloha 14: Šablona pro test číslo 3, skupina D

Datum:		Jméno a příjmení:	
Studijní kombinace:		Skupina: D	

Číslo otázky	Řešení položky			Body
1.1.	a	~~b~~	c	1
1.2.	a	b	~~c~~	1
1.3.	~~a~~	b	c	1
2	$S_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + M_3\Delta x_3 + M_4\Delta x_4 + M_5\Delta x_5 + ... + M_n\Delta x_n$			1
3	a	b	~~c~~	1
4	a	b	~~c~~	1
5	a	b	~~c~~	1
6	a	~~b~~	c	1
7	1			1
8	$\frac{1}{6}$			1
9	$11 + 8\ln 2, \mathit{konverguje}$			2
10	$f(c) = \frac{7}{2}$			1
11	*konverguje*			1
Celkový počet bodů				14

Příloha 15: Záznamový arch pro test číslo 4

<table>
<tr><td colspan="3">Datum:</td><td colspan="2">Jméno a příjmení:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Studijní kombinace:</td><td colspan="2">Skupina:</td></tr>
<tr><td>Číslo otázky</td><td colspan="3">Řešení položky</td><td>Body</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Celkový počet bodů</td><td></td></tr>
</table>

Příloha 16: Šablona pro test číslo 4, skupina A

<table>
<tr><td colspan="3">Datum:</td><td colspan="3">Jméno a příjmení:</td></tr>
<tr><td colspan="4">Studijní kombinace:</td><td colspan="2">Skupina: A</td></tr>
<tr><td>Číslo otázky</td><td colspan="3">Řešení položky</td><td colspan="2">Body</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">$\frac{9}{2}$</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">$\frac{3+2\ln 2}{4}$</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>~~a~~</td><td>b</td><td>c</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3">$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="3">$6\pi a^2$</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="3">$3\,\mathrm{J}$</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="3">$T=\left[1;\frac{2}{5}\right]$</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>8</td><td>a</td><td>~~b~~</td><td>c</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>9</td><td>a</td><td>b</td><td>~~c~~</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>10</td><td>a</td><td>~~b~~</td><td>c</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td colspan="4">Celkový počet bodů</td><td colspan="2">10</td></tr>
</table>

Příloha 17: Šablona pro test číslo 4, skupina B

<table>
<tr><td colspan="2">Datum:</td><td colspan="3">Jméno a příjmení:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Studijní kombinace:</td><td colspan="2">Skupina: B</td></tr>
<tr><td>Číslo otázky</td><td colspan="3">Řešení položky</td><td>Body</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">$\frac{343}{3}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">$8+\frac{1}{8}\ln 3$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>a</td><td>~~b~~</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3">$\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="3">$\frac{a^2}{4}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="3">4 J</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="3">$T=\left[0;\frac{4}{9}\right]$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8</td><td>~~a~~</td><td>b</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>9</td><td>a</td><td>~~b~~</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td>a</td><td>b</td><td>~~c~~</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="4">Celkový počet bodů</td><td>10</td></tr>
</table>

Příloha 18: Šablona pro test číslo 4, skupina C

Datum:		Jméno a příjmení:		
Studijní kombinace:			Skupina: C	
Číslo otázky	Řešení položky			Body
1	$\frac{74}{3}$			1
2	$\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}$			1
3	~~a~~	b	c	1
4	10π			1
5	$\frac{\pi}{8}a^2$			1
6	4 J			1
7	$T=\left[0;\frac{27}{5}\right]$			1
8	a	b	~~c~~	1
9	a	~~b~~	c	1
10	~~a~~	b	c	1
Celkový počet bodů				**10**

Příloha 19: Šablona pro test číslo 4, skupina D

Datum:		Jméno a příjmení:		
Studijní kombinace:			Skupina: D	
Číslo otázky	Řešení položky			Body
1	$\frac{4}{27}$			1
2	$\ln 3-\frac{1}{2}$			1
3	a	~~b~~	c	1
4	9π			1
5	$\frac{\pi a^2}{4}$			1
6	3 J			1
7	$T=\left[\frac{3}{5};\frac{2}{35}\right]$			1
8	a	b	~~c~~	1
9	~~a~~	b	c	1
10	a	b	~~c~~	1
Celkový počet bodů				10

Příloha 20: Záznamový arch pro test číslo 5

Datum:		Jméno a příjmení:	
Studijní kombinace:		Skupina:	
Číslo otázky	Řešení položky		Body
1			
2			
3	a	b	c	
4			
5			
6			
7			
8.a)			
8.b)			
9			
10			
Celkový počet bodů			

Příloha 21: Šablona pro test číslo 5, skupina A

Datum:	Jméno a příjmení:	
Studijní kombinace:	Skupina: A	
Číslo otázky	Řešení položky	Body
1	$\frac{x^2 \ln(x-1)}{2} - \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} + x + \ln(x-1)) + C$	1
2	$(x^2 - 3x + 2)\sin x + (2x-3)\cos x + C$	1
3	a ~~b~~ c	1
4	$\frac{1}{54}\ln\left\|\frac{x-3}{x+3}\right\| + \frac{1}{9x} + C$	1
5	$\ln\left\|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right\| + C$	1
6	$\frac{1}{3\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x} + C$	1
7	$\frac{\pi}{8}$	1
8.a)	500	1
8.b)	2,5 J	1
9	$\frac{16\pi}{15}$	1
10	$+\infty$; *diverguje*	2
Celkový počet bodů		12

Příloha 22: Šablona pro test číslo 5, skupina B

<table>
<tr><td colspan="2">Datum:</td><td colspan="3">Jméno a příjmení:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Studijní kombinace:</td><td colspan="2">Skupina: B</td></tr>
<tr><td>Číslo otázky</td><td colspan="3">Řešení položky</td><td>Body</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">$x\ln(x^2+1)-2x+\operatorname{arctg} x+C$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">$(x^2-7x+13)\mathrm{e}^x+C$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\cancel{a}$</td><td>b</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3">$x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x-4|+C$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="3">$\frac{2\ln\left|\sqrt{x+2}-2\right|-\ln x}{\sqrt{2}}+C$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="3">$\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin x}{5}+C$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="3">$\frac{3}{4}(1-\cos 2)$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8.a)</td><td colspan="3">1200</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8.b)</td><td colspan="3">12 J</td><td>1</td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="3">12π</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="3">$\mathrm{e}^2, \textit{konverguje}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="4">Celkový počet bodů</td><td>12</td></tr>
</table>

Příloha 23: Arch k testu číslo 6, skupina A **Bodové hodnocení**

1. $f(x,y)=\sqrt{y^2-4x^2+4}$

$y^2-4x^2+4\geq 0$

$\frac{y^2}{4}-x^2\geq -1 \Rightarrow x^2-\frac{y^2}{4}\leq 1$ **1 bod**

2. b) **1 bod**

3. $\lim\limits_{(x,y\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{4-xy}}{\sqrt{xy}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{4-xy}}{\sqrt{xy}}\cdot\frac{2+\sqrt{4-xy}}{2+\sqrt{4-xy}}=$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4-(4-xy)}{\sqrt{xy}.(2+\sqrt{4-xy})}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy}\cdot(2+\sqrt{4-xy})}=0$

1 bod

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+kx}{x-kx}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(1+k)}{x(1-k)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+k}{1-k}$ **1 bod**

5. $f(x.y)=\frac{xy}{x+y}\Rightarrow x+y\neq 0\Rightarrow y=-x$ **1 bod**

6. $h(x,y)=\ln(x+\ln y)$

$h'_x=\frac{1}{x+\ln y}\cdot 1=\frac{1}{x+\ln y}$ **;** $h'_y=\frac{1}{x+\ln y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y(x+\ln y)}$ **2 body**

7. $z=(2x-3y)^2$

$z'_x=2(2x-3y)2=4(2x-3y)$

$z'_x(A)=4(4-3)=4$

$z'_y=2(2x-3y)(-3)=-6(2x-3y)$

$z'_y(A)=-6(4-3)=-6$ **2 body**

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r^2\cos^2\varphi\, r\sin^2\varphi}{r^4\cos^4\varphi + r^2\cos^2\varphi} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r^2 r\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{r^2(r^2\cos^4 x+\sin^2 x)} =$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{r^2\cos^4 x+\sin^2 x}$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$ **1 bod**

9.1. NE; **9.2.**ANO **2 body**

10. $z=(2x+y)^{2x+y}$

$\ln z=(2x+y)\ln(2x+y)$

$\frac{1}{z}z'_x = 2\ln(2x+y)+\frac{2(2x+y)}{2x+y}$

$z'_x = z\left[2\ln(2x+y)+\frac{2(2x+y)}{2x+y}\right] = (2x+y)^{2x+y}\left[2\ln(2x+y)+\frac{2(2x+y)}{2x+y}\right]$

$\frac{1}{z}z'_y = \ln(2x+y)+\frac{2x+y}{2x+y}$

$z'_y = z\left[\ln(2x+y)+\frac{2x+y}{2x+y}\right] = (2x+y)^{2x+y}\left[\ln(2x+y)+\frac{2x+y}{2x+y}\right]$

2 body

Celkový počet bodů: 14

Příloha 24: Arch k testu číslo 6, skupina B **Bodové hodnocení**

1. $z(x,y)=\sqrt{\ln\frac{16}{x^2+y^2}}$

$$\ln\frac{16}{x^2+y^2}\geq 0$$

$$\ln\frac{16}{x^2+y^2}\geq \ln 1$$

$\frac{16}{x^2+y^2}\geq 1 \Rightarrow x^2+y^2\leq 16\,;[x,y]\neq[0,0]$ **1 bod**

2. a) **1 bod**

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)}=0$ **1 bod**

4.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{xy+x^2-y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2kx^2}{kx^2+x^2-k^2x^2}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2k}{x^2(k+1-k^2)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2k}{k+1-k^2}\Rightarrow \text{limita neexistuje}$$

$y=kx$ **1 bod**

5. $f(x,y)=\frac{x^2+2y^2}{y-x^2}$

$y-x^2\neq 0;$ *parabola o rovnici* $y=x^2$ **1 bod**

6. $\varphi(s,t)=\cos\frac{s^2}{t}$

$\varphi'_s=-\sin\frac{s^2}{t}\left(\frac{2st}{t^2}\right)=-\frac{2s}{t}\sin\frac{s^2}{t}$ **;** $\varphi'_t=-\sin\frac{s^2}{t}\left(\frac{s^2}{t^2}\right)=-\frac{s^2}{t^2}\sin\frac{s^2}{t}$ **2 body**

7. $z=\sqrt{x^2-y^2}$ v bodě $A[2;0]$

$$z'_x = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\ ;\ z'_x(A) = \frac{2}{\sqrt{4-0}} = 1$$

$$z'_y = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}\ ;\ z'_y(A) = \frac{0}{\sqrt{4-0}} = 0$$

2 body

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r\cos\varphi \sin\varphi}{r\cos\varphi\, r\sin\varphi} \Rightarrow$ neexistuje

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

1 bod

9.1. NE; **9.2.** ANO **2 body**

10. $z = (x^2 + y^2)^{xy^2}$

$$\ln z = xy^2 \ln(x^2 + y^2)$$

$$\frac{1}{z} z'_x = y^2 \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

$$z'_x = z\left[y^2 \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y^2}{x^2 + y^2}\right] = (x^2 + y^2)^{xy^2}\left[y^2 \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y^2}{x^2 + y^2}\right]$$

$$\frac{1}{z} z'_y = 2xy \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^3}{x^2 + y^2}$$

$$z'_y = z\left[2xy \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^3}{x^2 + y^2}\right] = (x^2 + y^2)^{xy}\left[2xy \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^3}{x^2 + y^2}\right]$$

2 body

Celkový počet bodů: 14

Příloha 25: Arch k testu číslo 6, skupina C **Bodové hodnocení**

1. $g(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$

$x\geq 0\wedge y-\sqrt{x}>0\Rightarrow x\geq 0\wedge y>\sqrt{x}$ **1 bod**

2. c) **1 bod**

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^3-y^3}{x^4-y^4}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}=\dfrac{3}{4}$

1 bod

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2kx^2}{x^2(1+k^2)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2k}{1+k^2}$

1 bod

5. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{|x|-|y|}$

$|x|-|y|>0\Rightarrow \mathit{parabola}\ y=x^2$ **1 bod**

6. $f(x,y)=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+x^y$

$f'_x=e^{\frac{x}{y}}\dfrac{y}{y^2}+yx^{y-1}=\dfrac{e^{\frac{x}{y}}}{y}+yx^{y-1};\ f'_y=-\dfrac{xe^{\frac{x}{y}}}{y}+y\ln x$

2 body

7. $z=\dfrac{y}{x}$ v bodě $A[3;2]$

$z'_x=-\dfrac{y}{x^2};\ z'_x(A)=-\dfrac{2}{9}$

$z'_y=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{3}$ **2 body**

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} =$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r^2\cos^2\varphi - 2r^2\sin\varphi}{r^2\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r^2(\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi)}{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ neexistuje **1 bod**

9.1. ANO; **9.2.** NE **2 body**

10. $z = (yx)^{y-1}$

$$\ln z = (y-1)\ln(yx)$$

$$\frac{1}{z} z'_x = \frac{y(y-1)}{yx}$$

$$z'_x = z\left[\frac{y(y-1)}{yx}\right] = (yx)^{y-1}\left[\frac{y(y-1)}{yx}\right]$$

$$\frac{1}{z} z'_y = \ln(yx) + \frac{x(y-1)}{yx}$$

$$z'_y = z\left[\ln(yx) + \frac{x(y-1)}{yx}\right] = (yx)^{y-1}\left[\ln(yx) + \frac{x(y-1)}{yx}\right]$$

2 body

Celkový počet bodů: 14

Příloha 26: Arch k testu číslo 6, skupina D **Bodové hodnocení**

1. $s(x,y)=\sqrt{2x+y-4}+\sqrt{16-x^2-y^2}$

$2x+y-4\geq 0;16-x^2-y^2\geq 0$

$y\geq 4-2x; x^2+y^2\leq 16$ **1 bod**

2. a) **1 bod**

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\mathrm{tg}(x^2+y^4)}{3(x^2+y^4)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{tg(x^2+y^4)}{x^2+y^4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

1 bod

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2kx}{x^2(x^2+k^2)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{kx}{x^2+k^2}$

1 bod

5. $f(x,y)=\frac{1}{x^2-2y}$

$x^2-2y\neq 0\Rightarrow parabola\ y=\frac{x^2}{2}$ **1 bod**

6. $c(a,b)=\frac{\mathrm{tg}\left(a^2\right)}{b}$

$c'_a=\frac{1}{b\cos^2 a^2}$; $c'_b=-\frac{tga^2}{b^2}$

2 body

7. $z=5x^4y^2+\frac{x}{y}+2x^2-3y$ v bodě $A[1;1]$

$z'_x=20x^3y^2+\frac{1}{y}+4x$; $z'_x(A)=20+1+4=25$

$z'_y=10xy-\frac{x}{y^2}-3$; $z'_y(A)=10-1-3=6$ **2 body**

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{r\cos\varphi\, r\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

1 bod

9.1. NE; **9.2.**ANO **2 body**

10. $z = (3x-y)^{2x-y}$

$$\ln z = (2x-y)\ln(3x-y)$$

$$\frac{1}{z}z'_x = 2\ln(3x-y) + \frac{3(2x-y)}{3x-y}$$

$$z'_x = z\left[2\ln(3x-y) + \frac{3(2x-y)}{3x-y}\right] = (3x-y)^{2x-y}\left[2\ln(3x-y) + \frac{3(2x-y)}{3x-y}\right]$$

$$\frac{1}{z}z'_y = (-1)\ln(3x-y) - \frac{2x-y}{3x-y}$$

$$z'_y = z\left[(-1)\ln(3x-y) - \frac{2x-y}{3x-y}\right] = (3x-y)^{2x-y}\left[(-1)\ln(3x-y) - \frac{2x-y}{3x-y}\right]$$

2 body

Celkový počet bodů: 14

Příloha 27: Záznamový arch pro test číslo 7

<table>
<tr><td colspan="3">Datum:</td><td colspan="2">Jméno a příjmení:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Studijní kombinace:</td><td colspan="2">Skupina:</td></tr>
<tr><td>Číslo otázky</td><td colspan="3">Řešení položky</td><td>Body</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Celkový počet bodů</td><td></td></tr>
</table>

Příloha 28: Šablona pro test číslo 7, skupina A

<table>
<tr><td colspan="3">Datum:</td><td colspan="2">Jméno a příjmení:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Studijní kombinace:</td><td colspan="2">Skupina: A</td></tr>
<tr><td>Číslo otázky</td><td colspan="3">Řešení položky</td><td>Body</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">$f''_{xx} = \frac{50y^2}{(1+5x)^3}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">$f''_{xy} = \frac{9xy}{4(3xy+x^2)^{\frac{3}{2}}}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="3">$f''_{yy} = \frac{2}{y^3}\cos x^2$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3">$\mathrm{d}f = 6$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="3">$\Delta f = 12$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="3">0,035</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$\cancel{a}$</td><td>b</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8</td><td>a</td><td>$\cancel{b}$</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="3">$\frac{(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)}{xy},\ xy > 0$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="3">$\mathrm{d}^2 z = -\sin(2x+y)(2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^2$</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="4">Celkový počet bodů</td><td>10</td></tr>
</table>

Příloha 29: Šablona pro test číslo 7, skupina B

<table>
<tr><td colspan="3">Datum:</td><td colspan="2">Jméno a příjmení:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Studijní kombinace:</td><td colspan="2">Skupina: B</td></tr>
<tr><td>Číslo otázky</td><td colspan="3">Řešení položky</td><td>Body</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">$f''_{xx} = \frac{-9y^2}{4(3xy + x^2)^{\frac{3}{2}}}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">$f''_{xy} = \frac{2x}{y^2} \sin x^2$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="3">$f''_{yy} = \frac{-1}{(x^3 + y)^2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3">$\mathrm{d}f = 0{,}11$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="3">$\Delta f = -3{,}89$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="3">0,9775</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td>a</td><td>b</td><td>$\cancel{\text{c}}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$\cancel{\text{a}}$</td><td>b</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="3">$\frac{\mathrm{e}^x\left(y \ln y \mathrm{d}x + \mathrm{d}y\right)}{y},\ y > 0$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="3">$\mathrm{d}^2 z = 6x(\mathrm{d}x)^2 - 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 6y(\mathrm{d}y)^2$</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="4">Celkový počet bodů</td><td>10</td></tr>
</table>

Příloha 30: Šablona pro test číslo 7, skupina C

<table>
<tr><td colspan="3">Datum:</td><td colspan="2">Jméno a příjmení:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Studijní kombinace:</td><td colspan="2">Skupina: C</td></tr>
<tr><td>Číslo otázky</td><td colspan="3">Řešení položky</td><td>Body</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">$f''_{xx} = \frac{3x(2y - x^3)}{(x^3 + y)^2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">$f''_{xy} = \frac{-10y}{(1+5x)^2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="3">$f''_{yy} = \frac{-9x^2}{4(3xy + x^2)^{\frac{3}{2}}}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3">$\mathrm{d}f = 0{,}08$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="3">$\Delta f = -1{,}92$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="3">3,015</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td>a</td><td>~~b~~</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8</td><td>~~a~~</td><td>b</td><td>c</td><td>1</td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="3">$\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}y,\ y > 0$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="3">$\mathrm{d}^2 z = -\frac{1}{(x-y)^2}(\mathrm{d}x)^2 + \frac{2}{(x-y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{(x-y)^2}(\mathrm{d}y)^2$</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="4">Celkový počet bodů</td><td>10</td></tr>
</table>

Příloha 31: Šablona pro test číslo 7, skupina D

<table>
<tr><td colspan="3">Datum:</td><td colspan="2">Jméno a příjmení:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Studijní kombinace:</td><td colspan="2">Skupina: D</td></tr>
<tr><td>Číslo otázky</td><td colspan="3">Řešení položky</td><td>Body</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">$f''_{xx} = \frac{-1}{y}(4x^2 \cos x^2 + 2\sin x^2)$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">$f''_{xy} = \frac{-3x^2}{(x^3 + y)^2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="3">$f''_{yy} = \frac{2}{1+5x}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3">$\mathrm{d}f = 6$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="3">$\Delta f = 3$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="3">1,11</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td>a</td><td>b</td><td>~~c~~</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8</td><td>a</td><td>b</td><td>~~c~~</td><td>1</td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="3">$x\mathrm{e}^{x\ y}(2y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="3">$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{e}^{xy} y^2 (\mathrm{d}x)^2 + 2\mathrm{e}^{xy}(xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{xy} x^2 (\mathrm{d}y)^2$</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="4">Celkový počet bodů</td><td>10</td></tr>
</table>

Příloha 32: Záznamový arch pro test číslo 8

<table>
<tr><td colspan="2">Datum:</td><td colspan="2">Jméno a příjmení:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Studijní kombinace:</td><td>Skupina:</td></tr>
<tr><td>Číslo otázky</td><td colspan="2">Řešení položky</td><td>Body</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>6.1.</td><td>ANO</td><td>NE</td><td></td></tr>
<tr><td>6.2.</td><td>ANO</td><td>NE</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Celkový počet bodů</td><td></td></tr>
</table>

Příloha 33: Šablona pro test číslo 8, skupina A

Datum:		Jméno a příjmení:	
Studijní kombinace:		Skupina: A	
Číslo otázky	Řešení položky		Body
1	$f(x,y)=3+(x+1)^2+(x+1)(y-1)-(y-1)^2$		1
2	MAX4 v $[2;-3]$		1
3	$\frac{1}{9}$		1
4	$[4;-2]$		1
5	$y'=\frac{12x^2-4xy+y^2}{2x^2-2xy+3y^2}$		1
6.1.	~~ANO~~	NE	1
6.2.	ANO	~~NE~~	1
7	$z'_x=\frac{2y-6xy}{3z^2+3x^2};\ z'_y=\frac{2x}{3z^2+3x^2}$		2
8	$f(0;1)=0 \wedge y=3\neq 0$; ano		1
9	$t: 2x+5y-1=0;\ n: 5x-2y-17=0$		2
10	1,09		1
Celkový počet bodů			13

Příloha 34: Šablona pro test číslo 8, skupina B

Datum:	Jméno a příjmení:
Studijní kombinace:	Skupina: B

Číslo otázky	Řešení položky		Body
1	$f(x,y) = 2 + 3(x - \frac{1}{2})^2 - 2(x - \frac{1}{2})(y-2) + (y+2)^2$		1
2	MAX3 v $\left[\frac{3}{2};-1\right]$		1
3	$-\frac{2}{5}$		1
4	$[1;1]$		1
5	$y' = \frac{-4x(x^2+y^2) - 6xy}{4y(x^2+y^2) - 3x^2 + 3y^2}$		1
6.1.	~~ANO~~	NE	1
6.2.	~~ANO~~	NE	1
7	$z'_x = \frac{-1}{1+3z^2}$; $z'_y = \frac{-2y}{1+3z^2}$		2
8	$f(2;1) = 0 \wedge y = \frac{3}{4} \neq 0$; ano		1
9	$t: x + 2y - 3 = 0$; $n: 2x - y - 1 = 0$		2
10	1,1		1
Celkový počet bodů			13

Příloha 35: Šablona pro test číslo 8, skupina C

<table>
<tr><td colspan="2">Datum:</td><td colspan="3">Jméno a příjmení:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Studijní kombinace:</td><td colspan="2">Skupina: C</td></tr>
<tr><td>Číslo otázky</td><td colspan="3">Řešení položky</td><td>Body</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">$f(x,y)=1+2(x+2)^2+(x+2(y-1)-(y-1)^2$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">MIN -7 v $[-2;3]$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="3">$\frac{3}{4}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3">$[2;0]$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="3">$y'=\frac{-(e^{x-y}+2x)}{-e^{x-y}-1}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6.1.</td><td colspan="2">ANO</td><td>~~NE~~</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6.2.</td><td colspan="2">~~ANO~~</td><td>NE</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="3">$z'_x=\frac{3yz-3x^2}{3z^2-3xy}; z'_y=\frac{3xz-3y^2}{3z^2-3xy}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td colspan="3">$f(1;-2)=0 \wedge y=8\neq 0$; ano</td><td>1</td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="3">$t: 2x-9y-13=0; n: 9x+2y-6=0$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="3">0,94</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="4">Celkový počet bodů</td><td>13</td></tr>
</table>

Příloha 36: Šablona pro test číslo 8, skupina D

Datum:	Jméno a příjmení:
Studijní kombinace:	Skupina: D

Číslo otázky	Řešení položky	Body
1	$f(x,y)=3-(x-9)^2+(x-9)(y-2)+6(y-2)^2$	1
2	MIN -1 v $[-4;-1]$	1
3	$-\frac{6}{7}$	1
4	$[2;0]$	1
5	$y'=\frac{-(2x-y+1)}{-x+4y-1}$	1
6.1.	ANO ~~NE~~	1
6.2.	ANO ~~NE~~	1
7	$z'_x=\frac{z-2x}{2y-x}$; $z'_y=\frac{1-2y}{2z-x}$	2
8	$f(2;0)=0 \wedge y=\frac{2}{3}\neq 0$; ano	1
9	$t: x+3y-3=0; n: 3x-y+11=0$	2
10	0,94	1
Celkový počet bodů		13

Příloha 37: Záznamový arch pro test číslo 9

Datum:		Jméno a příjmení:
Studijní kombinace:		Skupina:
Číslo otázky	Řešení položky	Body
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
Celkový počet bodů		

Příloha 38: Šablona pro test číslo 9, skupina A

Datum:	Jméno a příjmení:
Studijní kombinace:	Skupina: A

Číslo otázky	Řešení položky	Body
1	$Df = (x,y) : x^2 + \frac{1}{9}y^2 < 1$	1
2	$f''_{xx} = -e^{2y}\sin x;\ f''_{xy} = 2e^{2e}\cos x;\ f''_{yy} = 4e^{2y}\sin x$	3
3	$x^2 + y^2 = 1$	1
4	$\mathrm{MIN}[-3;2] = -13$	1
5	4,32	1
6	$t : y = -1, n : x = 2$	2
7	$f(x,y) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2$	1
8	$z'_x = \frac{2x+y}{1-6z};\ z'_y = \frac{4y+x}{1-6z}$	2
9	zavedením přímek procházejících počátkem soustavy souřadnic	1
10	$\frac{dz}{dx} = e^{2\sin x + 3x^2}(2\cos x + 6x)$	1
Celkový počet bodů		14

Příloha 39: Šablona pro test číslo 9, skupina B

Datum:	Jméno a příjmení:	
Studijní kombinace:	Skupina: B	
Číslo otázky	Řešení položky	Body
1	$Df = (x, y) : x^2 + y^2 < 16$	1
2	$f''_{xx} = -4\sin(2x + y);\ f''_{xy} = -2\sin(2x + y);\ f''_{yy} = -\sin(2x + y)$	3
3	$y = \frac{x^2}{2}$	1
4	$\mathrm{MIN}\left[-1;0\right] = 0$	1
5	575,64	1
6	$t : 3x + y - 3 = 0,\ n : x - 3y - 1 = 0$	2
7	$f(x, y) = -1 + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 + \frac{1}{2}y^2$	1
8	$z'_x = \frac{-3x^2 - 12y}{2z + 2};\ z'_y = \frac{-2y - 12x}{2z + 2}$	2
9	zavedením přímek procházejících počátkem soustavy souřadnic	1
10	$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x\cos y} \ln y \cos v + \frac{\mathrm{e}^{x\cos y}}{y} \sin(x \sin y)$	1
Celkový počet bodů		14

14 ANOTACE

Jméno a příjmení:	LEONA SALVETOVÁ
Katedra:	MATEMATIKY
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Rok obhajoby:	2010
Název práce:	Didaktické testy a jejich využití v matematické analýze
Název v angličtině:	Didactical tests a their usage in calculus
Anotace práce:	Diplomová práce se zabývá didaktickými testy a jejich využitím v matematické analýze. Jejím hlavním přínosem je sestavení testů pro studenty bakalářského studijního oboru Matematika se zaměřením na vzdělávání na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci, které ověřují jejich znalosti disciplín Integrální počet funkce jedné proměnné a Diferenciální počet funkcí více proměnných. Teoreticky vymezuje danou problematiku na základě literárních zdrojů, které se staly podkladem pro vytvoření empirické části. Závěr shrnuje poznatky, které vyplývají z předchozího studia odborné literatury a částečné aplikace testů v praxi.
Klíčová slova:	Didaktické testy, testová položka, tvorba didaktických testů, testová příručka, záznamový arch, vyhodnocovací šablona.
Anotace v angličtině:	The diploma thesis deals with didactical tests and their usage in calculus. Its main contribution is to create tests for bachelor's students of Mathematics at the Faculty of Education, Palacký University in Olomouc. These tests verify their knowledge of Differential and Integral Calculus. It theoretically specifies these problems on the basis of literary recourses which became the base for creating the empirical part. It summarizes the pieces of knowledge following from previous study of textbooks and partial tests application in practice.

Klíčová slova v angličtině:	Didactical tests, test item, didactical tests creation, test manual, record sheet, evaluation template.
Přílohy vázané v práci:	1) Tabulka hodnot pro C-škálu 2) Záznamové archy pro testy 3) Šablony pro jednotlivé testy 4) Vyhodnocovací archy k testům
Rozsah práce:	162 s.
Jazyk práce:	Čeština