UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Katedra Matematiky

Lenka Špičková

Pascalův trojúhelník

Bakalářská práce

Studijní obor: Matematika

Vedoucí práce: Mgr. David Nocar Ph.D.

Olomouc 2014

Prohlášení:
Prohlašuji, že jsem závěrečnou práci zpracoval/a samostatně a že jsem uvedl/a všechny použité informační zdroje a literaturu. Tato práce ani její podstatná část nebyla předložena k získání jiného nebo stejného akademického titulu.

V Olomouci, 14.04.2014 ....

Podpis

Poděkování
Chtěla bych na tomto místě poděkovat především vedoucímu mé bakalářské práce Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D., za ochotu, trpělivost a cenné rady při psaní této práce. Také bych chtěla poděkovat mé rodině a přátelům za podporu během studia.

Bibliografická identifikace:

Jméno a příjmení autora: **Lenka Špičková**

Název práce: **Pascalův trojúhelník**

Typ práce: **Bakalářská práce**

Vedoucí práce: **Mgr. David Nocar, Ph.D.**

Rok obhajoby práce: **2014**

Abstrakt: **Historie, vznik a využití Pascalova trojúhelníku.Jeho význam a složení. Práce se zaměřuje na obory matematiky, které využívá Pascalův trojúhelník nebo ony využívají jeho.**

Klíčová slova: **Pascalův trojúhelník, kombinační čísla, binomická věta, posloupnosti**

Počet stran: **30**

Jazyk: **Čeština**

Bibliographical identification:

Author´s first name and surname: **Lenka Špičková**

Title: **Pascal´s triangle**

Type of thesis: **Bachelor thesis**

The year of presentation: **2014**

Abstract: **History, foundation and utilization of of Pascal's triangle, it's significance and compositio. The thesis focuses on mathematic branches that are used by Pascal's triangle or vice versa these branches uses the Pascal's triangle itself.**

Keywords: **Pascal's triangle, combinatorial numbers, binomial theorem, mathematical sequences**

Number of pages: **30**

Language: **Czech**

OBSAH

Mezi významné osobnosti období renesance, které velmi ovlivnily rozvoj přírodních věd, zvláště matematiky a fyziky, patří francouzský matematik, fyzik, spisovatel, teolog a náboženský filozof

BLAISE PASCAL

Narodil se 19.června 1623 v Clermontu,ve střední části Francie. Pocházel ze zámožné a vzdělané rodiny.Jeho otec,Etienne Pascal(1588-1651), známý matematik, který byl právník, daňový úředník se zájmem o vědu, matematiku a geometrii, se po smrti manželky(1626) přestěhoval i s dětmi (měl kromě syna ještě 2 dcery,Jacqueline a Gilberte) v roce 1631 do Paříže.

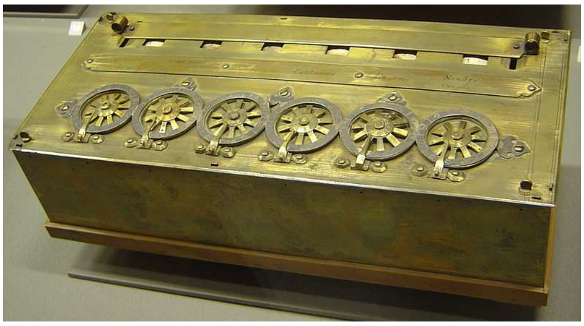
V Blaisově výchově se zaměřil pouze na humanitní vzdělání, ze kterého vyloučil matematiku,že na ni má ještě dost času.

Dvanáctiletý Blaise si však dokázal odvodit některé Euklidovy poučky, aniž by někdy absolvoval hodinu matematiky. Po tomto zjištění jeho otec umožnil Blaisovi přístup ke skříni se svými matematickými knihami a již mu nebránil v dalším studiu matematiky.

Ve třinácti letech již Blaise docházel do matematického kroužku Mersenna(neformální, soukromá pařížská akademie, předchůdce Francouzské akademie věd), do kterého patřila převážná většina pařížských matematiků, včetně jeho otce Etienna Pascala.

V šestnácti letech napsal Blaise svoje "Pojednání o kuželosečkách", které ocenila i Pařížská královská akademie.

Roku 1640 , v 17-ti letech, již vydal svoje dílo"Zkušenosti s kónickými řezy" nákladem 50 kusů. Nejznámější větou je tzv. "Velká Pascalova věta" (průsečíky protějších stran šestiúhelníka kuželosečce vepsané leží na přímce - Pascalova přímka).
2.ledna 1640 se Pascalova rodina přestěhovala do Rouen v Normandii, kde Etienne Pascal získal míso královského úředníka, kontrolujícího výkon královské moci v provincii.Na konci roku 1640 Blaise napadla myšlenka sestrojit počítací stroj, aby pomohl svému otci s mnoha početními pracemi, které musel v novém zaměstnání vykonávat.Za realizací této ohromující myšlenky však stálo 5 let práce. Vytvořil stroj (aritmetický kalkulátor - Pascaline), který prováděl 4 úkony s pěticifernými čísly. Zhotovil asi padesát exemplářů, jeden dokonce poslal švédské královně Kristině (1626-1689). Do dnes se dochovalo 8 exemplářů.V podstatě šlo o předchůdce současné kalkulačky.



Od roku 1618-1648 probíhala ve velké části Evropy 30-tiletá válka, která měla za následek hladomor. V tomto období, v lednu 1646, si Etienne Pascal vymkl nohu a to ho skoro stálo život.Realita možné ztráty otce měla velký vliv na syna. Od lékařů se dozvěděl o učení Cornelia Jansena (1585-1638),nebyl zastáncem předurčení,ale věřil,že člověk se může svou vůlí zasadit o to,aby žil v souladu s Boží vůlí, které stálo proti jezuismu. Díky tomuto učení si vykládá Pascal svou vědeckou činnost jako hříšnou a dosavadní utrpení jako trest za tento hřích.
Vedl velmi nákladný život s velkým dvorem a pro neshody se rozešel se svou sestrou Jackqueline, která vstoupila do kláštera.
Etienne Pascal zemřel 24.9.1651 a po jeho smrti se Blaise,ve svých 26 letech, vrátil do Paříže.
V roce 1654 publikoval Blaise Pascal "Traktát o aritmetickém trojúhelníku", který se nazývá *Pascalovým trojúhelníkem*, i když se tímto tématem zabývali i matematici dříve(ve Starověké Indii, Číně, Persii).

Již od mládí byl Blaise neduživý. trpěl bolestmi a roku 1654 dokonce na čas ochrnul.
V listopadu 1654, při jedné vyjížďce kočárem se na mostě splašili koně. Blaise byl po nehodě 2 týdny v bezvědomí. Poté měl mystický zážitek, po kterém se uchýlil roku 1655 do kláštera,

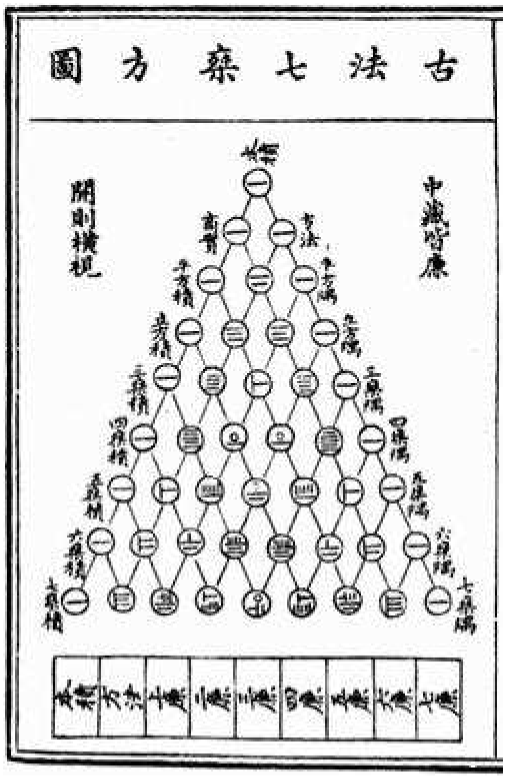
kde se věnoval převážně filozofii a náboženství. V té době psal "Dopisy provinciálovi", které jezuité velmi kritizovali. Když nad nimi pracoval, jasně si uvědomoval, že správné ovládání logiky je důležité nejen pro matematika.
Po roce 1659 se však už Pascal nevrátil k matematice ani fyzice a rozhodl se zabývat smyslem života. Jeho myšlenky o státu oceňoval i Napoleon, který ho chtěl udělat senátorem.
Poslední léta života prožil na venkově a věnoval se hlavně náboženskému rozjímání.
Blaise Pascal zemřel 19.srpna 1662 v 39 letech na nádor na mozku. Pitva po jeho smrti odhalila vážné žaludeční a břišní problémy doprovázené poškozením mozku.

Jeho dílo zahrnuje 3 oblasti: matematiku, fyziku a filozofii.
V <u>matematice</u> se věnoval především geometrii. Svým objevem trojúhelníkového uspořádání binomických koeficientů přispěl k rozvoji kombinatoriky.
Blaise Pascal představil primitivní verzi rulety, která byla spíš vedlejším produktem pokusů ve snaze vynalézt perpetum mobile. V určitém období svého života byl sám vášnivým hráčem a v této souvislosti položil, se svým přítelem Fermatem, základy teorie pravděpodobnosti a vytvořil pojem "matematická naděje".
Pascal byl první zaznamenanou osobou, která nosila hodinky na zápěstí.
V oblasti <u>fyziky</u> se snažil vycházet z pečlivě rozmyšlených experimentů a přesně zapisovaných měření. Patří mezi zakladatele empirické vědy (žádné jiné zdroje nepokládá za spolehlivé). Pokusy ho přivedly k vynálezu výškoměru a barometru. Výsledky shrnul ve spisu "Pojednání o tlaku vzduchu".
Další Pascalovy pokusy se týkaly spojených nádob a šíření tlaku v kapalinách. Tak se dostal k hlubšímu studiu hydrostatiky a hydrodynamiky.
1653 napsal práci "Pojednání o rovnováze kapalin", kde formuloval zákon o přenášení tlaku v kapalinách, dnes ho známe jako Pascalův zákon (Tlak vyvolaný vnější silou v kapalině je ve všech místech a ve všech směrech stejný).
Pascalovým hlavním <u>filozofickým</u> dílem je kniha "Myšlenky", která je také jeho nejslavnějším spisem. Jeho obsahem je obrana křesťanství. Toto dílo ale zcela nedokončil a vyšlo až po jeho smrti.
Matematik **Zhu Shijie** (1265 - 1320) - jeho práce jsou považovány za vrchol klasické čínské matematiky. Kolem roku 1299 napsal knihu *Suan xue qiumeng* (*Úvod do studia matematiky*) a kolem roku 1303 *Siyuan yujian* (*Správné zrcadlo čtyř neznámých*). Původní čínská verze první z nich je ztracena, ale naštěstí existovaly korejské a japonské opisy, které byly tak

kvalitní, že bylo možné knihu zrekonstruovat. Druhá kniha existuje v ne příliš kvalitních opisech.

Úvod do studia matematiky je sbírka úloh na počítání se zlomky a řešení rovnic. Zde se objevuje i metoda na řešení soustavy lineárních rovnic, která se v současné době nazývá Gaussova eliminační metoda. Ve druhé z těchto prací jsou v studovány polynomiální rovnice několika proměnných, součty konečných řad, jsou zde studována čísla, která v současné době tvoří tzv. Pascalův trojúhelník (viz obrázek, na kterém je Pascalův trojúhelník Zhu Schijieho), zde se vyskytuje speciální znak pro nulu.

Pascalův trojúhelník obsahuje koeficienty, které vystupují v jednotlivých členech umocněného výrazu $(a+b)^n$ (obecně pro reálná čísla *a* a *b*). V práci Zhu Shijie jsou tyto koeficienty spočítány až pro $n = 8$.



1. Pascalův trojúhelník je geometrické uspořádání binomických koeficientů do tvaru trojúhelníku.

Sestrojení trojúhelníku je velmi jednoduché. Jednotlivá pole trojúhelníku se vyplní podle pravidla, kde každé číslo je součtem dvou políček nad daným číslem. Na první řádek píšeme číslo jedna. Nyní vytvoříme řadu číslo dvě. Ta se skládá ze dvou polí.
Druhý řádek je tvořen dvěma jedničkami. Další řádek končí a začíná jedničkou (tak končí a začíná každý řádek) a uprostřed bude číslo dvě.

Tato konstrukce využívá Pascalovo pravidlo, které říká, že

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

n a *k* jsou nezáporná celá čísla, $n \geq k$ a počáteční hodnota je:

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1.$$

1.1 Kombinační číslo

je matematická funkce, která udává počet kombinací, způsobů, jak vybrat k-prvkovou podmnožinu z n-prvkové množiny (k a n jsou přirozená čísla). Kombinační číslo se značí ve tvaru $\binom{n}{k}$ (čte se „*n* nad *k*“), Při použití faktoriálu je kombinační číslo rovno

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{pro } n \geq k \geq 0; \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

Platí rovnost $1=\binom{0}{0}=\binom{n}{0}=\binom{n}{n}$

Kombinační číslo se používá hlavně v kombinatorice, velice důležité je využití v binomické větě(zde je označováno jako **binomický koeficient**)

Pascalův trojúhelník lze zobecnit i pro vyšší dimenze. Trojrozměrná verze se nazývá Pascalova pyramida nebo také Pascalův čtyřstěn. Ve vyšších dimenzích se obdoby obecně nazývají Pascalův simplex.

Pascalův trojúhelník je schéma, které znázorňuje vlastnosti kombinačních čísel.

Můžete se s ním setkat ve dvou tvarech.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

nebo

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\cdots\binom{n}{n-2}\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}$$

Schéma nahoře ukazuje základní vztah Pascalova trojúhelníku s kombinačními čísly. Ve schématu dole kombinační čísla vyčíslíme a dají se v něm lépe poznat některé jejich vlastnosti.

Můžeme odvodit, jak obecně vypadá *n*-tý řádek Pascalova trojúhelníku:

***n*-tý řádek Pascalova trojúhelníku** má tvar

$$\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1}\binom{n-1}{2}\binom{n-1}{3}\dots\binom{n-1}{n-3}\binom{n-1}{n-2}\binom{n-1}{n-1}$$

Skládá se z *n* kombinačních čísel $\binom{n-1}{k}$ *k* nabývá postupně hodnoty 0, 1, …, (*n* − 1).

V Pascalově trojúhelníku jsou symetricky rozmístěna stejná čísla vzhledem k jeho ose souměrnosti. Je to dané tím, že čísla $\binom{n}{k}$ a $\binom{n}{n-k}$ se sobě rovnají a jsou stejně vzdálena od "středu" každého řádku.

Dvanáctý řádek: 1 + 11 + 55 + 165 + 330 + 462 + 462 + 330 + 165 + 55 + 11 + 1

Třináctý řádek: 1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12

Pascalův trojúhelník obsahuje binomické koeficienty.

Např. třetí diagonála jdoucí zprava shora doleva dolů obsahuje všechna trojúhelníková čísla.

1, 3, 6, 10, 15, ..., $\frac{n(n+1)}{2}$, ..

Stejně čtvrtý šikmý sloupec zprava shora doleva dolů, kde jsou zapsána čtyřstěnová čísla

1, 4, 10, 20, 35, ..., $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, ...

1.2 Binomická věta

je matematická věta, díky které můžeme *n*-tou mocninu dvou sčítanců rozložit na součet *n+1* sčítanců. Věta vychází z kombinatoriky, dnes se používá např. k dokazování ve fyzice. Nejjednodušší verze vypadá takto:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

Pokud je *n* přirozené číslo, tak následující kombinační čísla:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

jsou takzvané binomické koeficienty Pascalova trojúhelníku. Číslo *n!* je faktoriál čísla *n*.

1.3 Polynomy

Polynom neboli **mnohočlen** je výraz sestávající jen ze součtů (rozdílů), násobků a celočíselných mocnin proměnných.

Příkladem jednoduchého mnohočlenu může být mnohočlen: $2x^2 + 5x - 12$

Obecně bychom mohli mnohočlen zapsat takto

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0,$$

- $\mathbf{a_n}$ se nazývají koeficienty a **n** se nazývá stupeň mnohočlenu.

Číslo n odpovídá nejvyšší mocnině mnohočlenu, kde $a_n \neq 0$. Pokud by bylo a_n rovno nule, potom bychom zrušili proměnnou x, ke které koeficient náleží, neboť x na cokoliv je nula: $0^3=0$.

●Sčítání a odečítání polynomů

Sčítání a odečítání mnohočlenů je celkem jednoduchá záležitost. Sčítáme nebo odečítáme koeficienty u členů se stejným exponentem. Tedy platí

$$ax_n+bx_n=(a+b)x_n.$$

●Násobení polynomů

Při násobení mnohočlenů násobíme každý člen prvního mnohočlenu a každým členem druhého mnohočlenu. Koeficienty násobíme jako klasická reálná čísla. Exponenty u proměnných sčítáme podle pravidel počítání s mocninami. Takže například:

$$(3x^2+4x)\cdot 5x^2=(3\cdot 5)x^2+2+(4\cdot 5)x^1+2=15x^4+20x^3$$

●Úprava polynomů

Při úpravě mnohočlenů chceme, abychom upravili mnohočlen tak, aby byl jednodušší. K tomu používáme rozšiřování, krácení, vytýkání, aplikaci vzorců a podobně.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Stačí si roznásobit.

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$$

Dalším vzorcem je

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

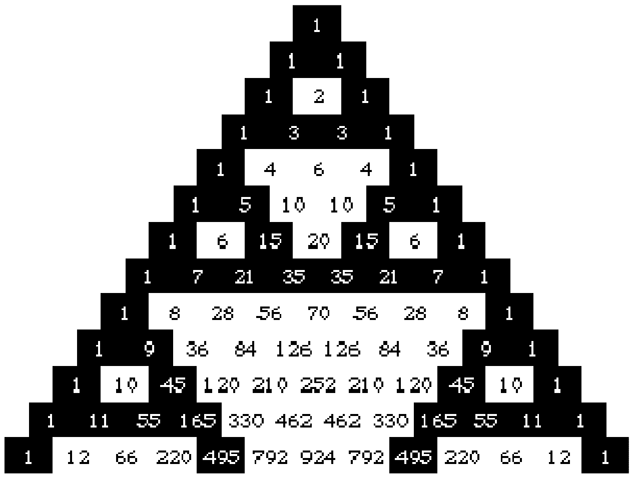
Pascalův trojúhelník ukazuje také koeficienty binonického rozvoje:

Stupeň	Binomický rozvoj	Pascalův trojúhelník
2	$(x+1)^2 = 1x^2 + 2x + 1$	1,2,1
3	$(x+1)^3 = 1x^3+3x^2+3x+1$	1,3,3,1
4	$(x+1)^4 = 1x^4+4x^3+6x^2+4x+1$	1,4,6,4,1
	atd.	

2. Používání Pascalova trojúhelníku

2.1 Pascalův trojúhelník- lichá nebo sudá čísla

Vyčerníme si v Pascalově trojúhelníku lichá čísla...



Co je to fraktál?

Fraktál je geometrická konstrukce, která je sama sobě podobná při různých zvětšeních.

Fraktál bude vypadat skoro stejně, ať na něj budete koukat z jakékoli blízkosti.

Kanonickým příkladem fraktálu je:

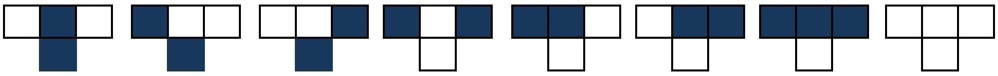
Sierpinského trojúhelník

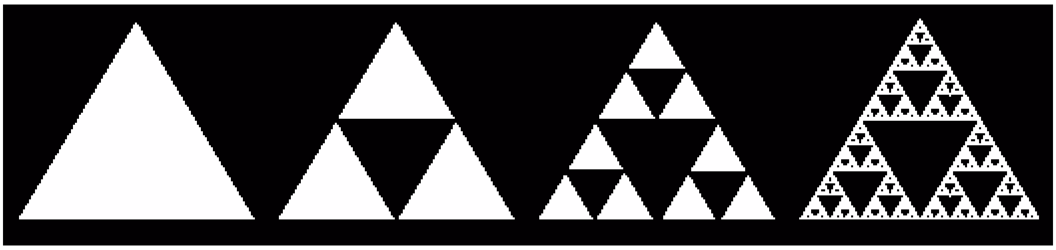
Sierpinského trojúhelník je fraktálový obrázek, který lze vytvořit např. tímto způsobem:

1. Nakreslíme černý trojúhelník
2. Z černého trojúhelníku odstraníme "vnitřní trojúhelník" a tuto funkci zavoláme na tři menší trojúhelníky, které vznikly v okolí

Jeho tvorba je jednoduchá. Buňky jsou buď obarvené nebo neobarvené (PRAVDA/NEPRAVDA). První buňka na vrcholu trojúhelníka je obarvená. V další řadě se pro každou buňku kontroluje, zda ve třech buňkách, které jsou nad touto buňkou (vpravo nad, nad, vlevo nad) je pouze jedna z těchto buněk obarvená. Pokud je pouze jedna obarvená, bude testovaná buňka také mít barvu. Pokud ne zůstane bez barvy. Nejlépe pochopitelné je na ukázce.

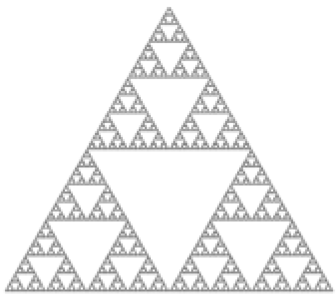
Ukázka "logických funkcí" aneb jak zjistit co bude o řadu níže.



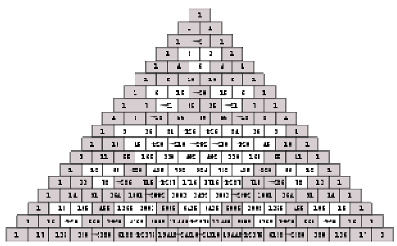


1. Diagonální řady na krajích tvoří pouze číslo jedna (jedná se pouze o dvě diagonály).
2. Diagonální řady vedle krajních řad jsou seřazená přirozená čísla.
3. Jak postupujeme dovnitř, další dvě řady jsou tvořeny trojúhelníkovými čísly.

Pokud vybarvíme pouze lichá čísla, získaný výsledek je velmi podobný fraktálu pojmenovaném Sierpinskim. Pokud vybarvíme čísla podle toho, zda jsou dělitelná třemi, čtyřmi atd...



Pokud vybarvíme čísla, která nejsou dělitelná třemi, získáme následující obrázek:



2.2 Gaussovo normální rozdělení a Pascalův trojúhelník

Normální rozdělení náhodných veličin najdeme v základech mnoha dějů v přírodě i ve společnosti, jeho matematický popis se dostal i na bývalé bankovky sousední země (10 DM). Je to jeden ze základních pojmů matematické statistiky.

Otočný model obdélníkového tvaru vytvořený ze dřeva s prosklenými stěnami je naplněn kovovými kuličkami. Když ho otočíme,kuličky se sypou ze zásobníku za skleněnou stěnou mezi rovnoměrně rozloženými překážkami ve tvaru šestiúhelníku. Kolik má jedna kulička možných cest? Kuličky se při každém násypu navrší přibližně do tvaru Gaussovy křivky. Bude-li kuliček víc, bude krásná symetrická křivka vyšší. Rozdělení kuliček na modelu je náhodný proces.

Binomické koeficienty u členů rozvoje mocniny součtu $(a+b)^n$ tvoří Pascalův trojúhelník:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

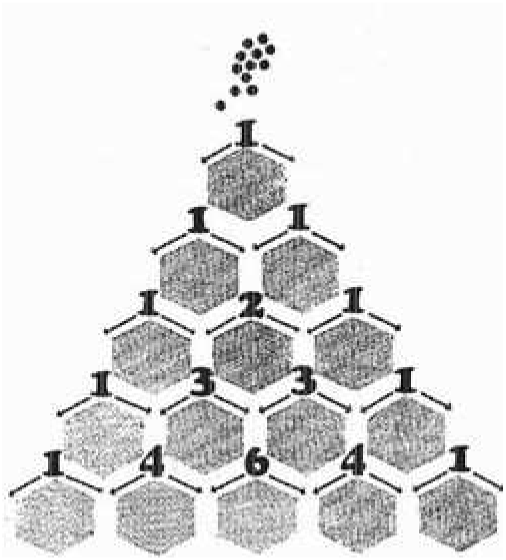
1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Trojúhelník je „obrouben" jedničkami. Vnitřní číslo je vždy součtem dvou sousedních čísel stojících o řádek výš. Toto číslo tak znamená vlastně počet různých cest, které začínají v horním vrcholu trojúhelníka a končí v místě tohoto čísla, přičemž neprocházejí žádným řádkem dvakrát.

Cesty mohou znázornit kuličky, které v modelu padají skříní s překážkami uspořádanými jako Pascalův trojúhelník.

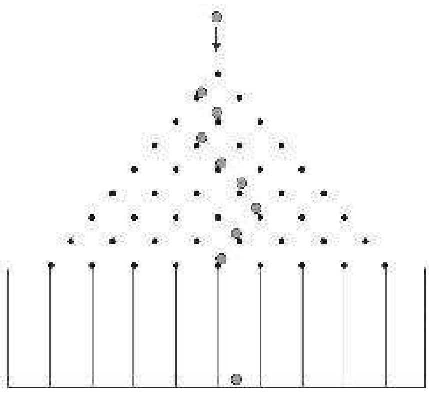


Při dostatečném počtu kuliček se přibližně v zásobnících vytvoří pod trojúhelníkem Gaussovo normální rozdělení (někdy se užívá názvu Gaussovo-Laplaceovo normální rozdělení).

Model byl vystaven v Karolinu v roce 1998 při příležitosti 650. založení Univerzity Karlovy.

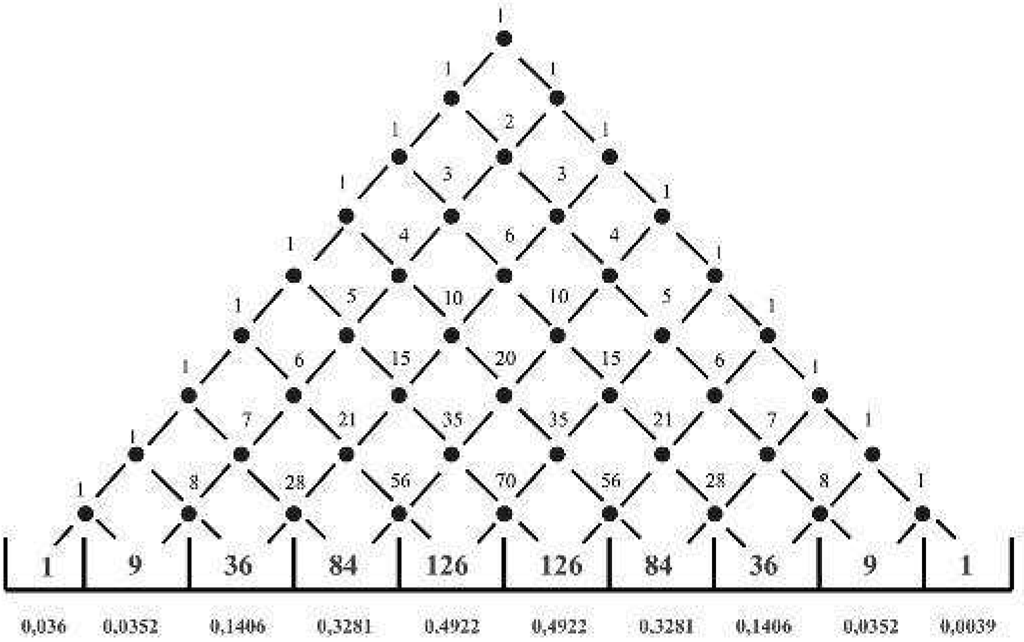
2.3 Galtonova deska — teorie

K popisu chování elektronů je třeba používat *pravděpodobnost*. Matematika zná pojem Galtonova deska.



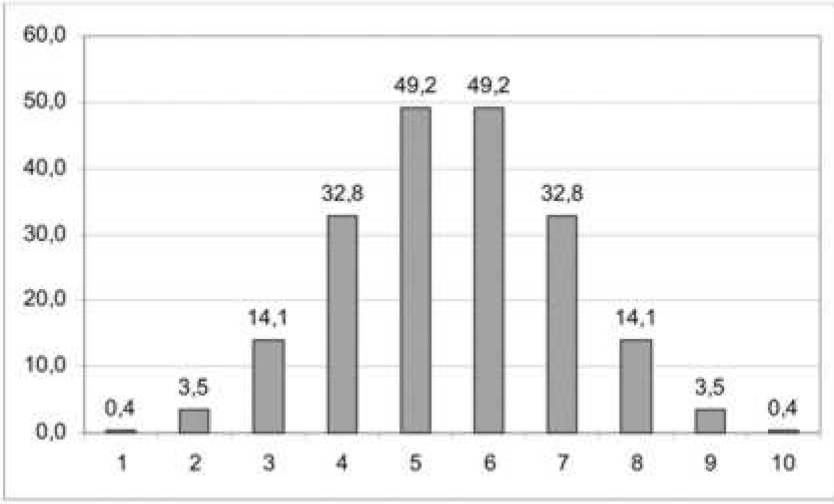
Je to panel, ve kterém padající kulička naráží do překážek uspořádaných do tvaru trojúhelníku a nakonec zapadne do některé přihrádky. Dopad jedné vybrané kuličky je nepředvídatelný. Pokud však vhodíme velké množství kuliček, dojdeme k určitému zákonitému rozdělení.

Předpokládejme, že na každé překážce je pravděpodobnost 1/2 odrazu kuličky vlevo a 1/2 pravděpodobnost odrazu kuličky vpravo. Kulička by měla narážet v každé řadě. Kolik „cest“ vede Galtonovou deskou?



Přiřadíme ke každé z překážek hodnotu, která značí počet cest vedoucích do tohoto centra. Kulička padá na vrchol po jediné cestě, přiřadíme tedy vrcholu hodnotu 1. Ve druhé řadě jsou dva body a každý bude mít také hodnotu 1. Ve třetí řadě mají oba krajní body hodnotu 1. Do prostředního bodu třetí řady se dá dostat z dvou bodů druhé řady dvěma cestami. Sečteme jejich hodnoty a získáme číslo 2. Do libovolného bodu vede tolik cest, kolik získáme sečtením cest dvou bodů, které jsou v řadě nad ním. Tento princip lze opakovat do nekonečna. To je ale známá vlastnost kombinačních čísel, takto se vytváří *Pascalův trojúhelník*.

V 10 přihrádkách jsou zapsána čísla, která vyjadřují počet cest, které do nich vedou. Všech cest je tady 512 a z těchto údajů lze vypočítat pravděpodobnost zasažení přihrádky. Vzniká binomické rozdělení n přihrádek, které pro $n \to \infty$ přejde na Gaussovu křivku.



Binomické rozdělení pro 200 kuliček a 9 rozptylových řad

3. Matice a diference

3.1 Matice a Pascalův trojúhelník

Vypíšeme si počty prvků a doplníme chybějící prvky do tabulky nulami:

1 0 0 0 0
1 1 0 0 0
1 2 1 0 0
1 3 3 1 0
1 4 6 4 1

Každý prvek v tabulce je součtem dvou prvků z předchozího řádku (samozřejmě s výjimkou prvního řádku, který je daný, což jsme dosáhli nultou mocninou) potom dostaneme další řádky v tabulce bez násobení. Tomuto rozšiřování odvozováním prvků z předcházejících se říká rekurentní vzorec. Prvky v tabulce se nazývají binomické koeficienty.

Samotné tabulce se říká Pascalův trojúhelník. Pascalův trojúhelník se vypisuje ve formě rovnoramenného trojúhelníka. Zvolili jsme formu tabulky (matematikové říkají takovým tabulkám matice), protože to umožňuje psát Pascalův trojúhelník v jiném tvaru:

1 1 1 1 1

0 1 2 3 4

0 0 1 3 6

0 0 0 1 4

0 0 0 0 1

Druhý Pascalův trojúhelník dostaneme z prvního maticovou operací, které se říká transpozice. Každý sloupec matice přepíšeme jako řádek transponované matice, nebo každý řádek jako sloupec transponované matice. Podle předpisu by matice měla být v závorkách nebo ohraničena dvojitou čarou.

Prvky obou tabulek dostaneme i bez rekurentního vzorce přímo

Binomické koeficienty počítají permutace, pouze místo n různých prvků máme jen dva různé prvky a každý se opakuje a-krát nebo b-krát. Permutace jednotlivých **a** nebo **b** mezi sebou neumíme rozlišit, proto musíme faktoriál n! dělit faktoriály a! a b!. Součet a + b = n. Binomický koeficient, který se obvykle označuje závorkami se dvěma čísly napsanými nad sebou .Je to vlastně podíl n!/a!b!, třeba 5!/3!2! = 120/6x2 = 10.

Adresa pole matice je pořadové číslo řádku **i** a pořadové číslo sloupce **j**. Matice má **m** řádků a **n** sloupců. Indexy **i** a **j** začínají zpravidla od 1.
V případě Pascalových trojúhelníků je výhodné počítat indexy od nuly, nebo musíme od normálních indexů **i** a **j** odečítat 1.

Matice je vlastně seznam vektorů, buď vektorů řádků, nebo vektorů sloupců. Vektory se píšou v závorkách a jejich prvky se oddělují čárkami. Třeba (4,1) nebo (1,4) znamenají souřadnice na dvojrozměrné ploše.
Vektory a matice se dají násobit. Existuje několik možností. Nejjednodušším násobkem dvou matic je přímý součin. V tom případě se vynásobí vždy pouze prvky ve stejném poli.

Při násobení vektorů se musí násobit vektor řádek vektorem sloupcem, nebo vektor sloupec vektorem řádkem. V prvním případě dostaneme jako výsledek jediné číslo, kterému se říká skalární součin. V druhém případě dostaneme jako výsledek celou matici. Součet prvků na diagonále matice se rovná jedinému číslu. Součiny se nazývají vnitřní a vnější.

Například:

4

1

4 1 =17

4x4 + 1x1 = 17

4 1

4 16 4

1 4 1

Při součinu matic se násobí jednotlivé řádky levé matice se sloupci pravé matice tak, že odpovídající prvky v řádcích se násobí odpovídajícími prvky v sloupci Výsledek se sečte a tvoří prvek součinu. Vzniknou tedy všechny možné vnitřní součiny vektorů matice.

Výsledek násobení u obyčejných čísel (skalárů) nezávisí na pořadí v jakém se čísla násobí. Například 5x4 = 4x5. U matic výsledek závisí na pořadí v jakém se matice násobí.

Podmínkou pro násobení matic je, aby levá matice měla tolik řádků, kolik má pravá matice sloupců.

Při násobení matice stejnou maticí se dostane její kvadratická forma. Pokud matice není symetrická (což znamená, že se při transponování nezmění), dostanou se dvě kvadratické formy.

Můžeme se přesvědčit, že součin dvou Pascalových trojúhelníků shora dá opět Pascalův trojúhelník, pokud si matici na trojúhelník doplníme:

1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35
1	5	15	35	70

Řádky (sloupce) jsou na vedlejší diagonále matice. Tato forma ukazuje, že prvky tabulky jsou součty nejen dvou předcházejících prvků, ale celého předcházejícího řádku (sloupce). Pokud začínají indexy od nuly, pak výsledek, horní hodnota binomického koeficientu, je součet indexů minus jedna, dolní hodnoty binomického koeficientu jsou index i a (j -1).

Tuto formu Pascalova trojúhelníka dostaneme také složitěji, jako součet polynomických koeficientů pro **n** permutace.

Ve shora uvedeném binomu se jednalo o změnu pořadí prvků. Tohle bude **m** permutace, protože se mění pořadí v posloupnosti, to je první implicitní index, jako pořadí vektorů řádků v matici.

Polynomický koeficient je podobně jako binomický koeficient výsledek násobení polynomu, např. (a + b + c + d). V součinech se objevují posloupnosti jako aaab, aaac, bbbc, ccca. Tyto **n** permutace jsou dosažitelné jako substituce. V případě binomu byly triviální, jednalo se vždy o dvě možnosti, odpovídající **n** permutacím vektorů, třeba (3,1) na (1,3), nebo jediné možnosti, jako (2,2).

Polynomický koeficient pro **n** permutace však neodpovídá binomickému koeficientu, ale výsledku, který má u binomu triviální formu 2!/1!1! = 2, například prvku aab odpovídá prvek bba. Pro tři prvky je to zajímavější, třeba 3!/1!1!1! = 6 dá šest členů (3aab + 3abb + 3aac + 3acc + 3bbc + 3bcc).
Polynomický koeficient dostaneme jako postupný součin binomických koeficientů, například 6!/4!2!x4!/3!2! = 6!/3!2!1! = 60.

Polynomický koeficient pro **n** permutace počítá počty lineárních vektorů s **n** prvky s konstantními součty **m**. Např. pro rozklady čísla 4 na 5 prvků jsou to tato čísla:
(4, 0, 0, 0, 0) = 5!/4!1! = 5
(3, 1, 0, 0, 0) = 5!/3!1!1! = 20
(2, 2, 0, 0, 0) = 5!/3!2! = 10
(2, 1, 1, 0, 0) = 5!/2!2!1! = 30
(1, 1, 1, 1, 1) = 5!/4!1! = 5

Celkem 70

3.2 Diference Pascalova trojúhelníku.

Vezmeme třetí formu Pascalova trojúhelníku, kterou jsme dostali jako součin dvou Pascalových trojúhelníků. Opíšeme první řádek. Pak opisujeme další řádky, ale před první číslo napíšeme nuly. Těmto tabulkám budeme říkat k-tá diference Pascalova trojúhelníku. První diference odpovídá transponované formě Pascalova trojúhelníku. Druhá diference transponované formy Pascalova trojúhelníku má tvar

1 1 1 1 1 1 1

0 0 1 2 3 4 5

0 0 0 0 1 3 6

0 0 0 0 0 0 1

Součet 1 1 2 3 5 8 13

Součty sloupců známe jako Fibbonacciho číslená řada(**Fibonacciho posloupnost**):
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

Každé číslo je vždy součtem dvou čísel předchozích. Podíly za sebou následujících členů se blíží číslu **1,618.**
Pokud si Pascalův trojúhelník narýsujeme tak jak vidíme níže a sečteme čísla ve stoupajících úhlopříčkách vidíme,že vychází čísla tvořící Fibonacciho posloupnost

1 1 2 3 5 8 13

1↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗

1 ↗**1** ↗↗ ↗↗ ↗

1↗ **2** **1**↗↗ ↗

1↗ **3**↗ **3** **1**↗

1↗ **4**↗ **6**↗**4** **1**

1↗ **5**↗ **10** **10** **5** **1**

1↗ **6** **15** **20** **15** **6** **1**

Vedle tohoto typu diference všech rozkladů vektoru můžeme vektory
rozlišovat podle velikosti jediného vektoru, bez ztráty obecnosti např. **a**.
Pro shora uvedený příklad:

Hodnota vektoru **a**: 4 3 2 1 0 Celkem

Počet vektorů: 1 4 10 20 30 70

Tato diference je shora uvedená identita součtu předchozího řádku.

4. Figurální čísla

Pythagorovi studenti zkoumali **přirozená čísla**. Používali k tomu kamínky, které rovnali do geometrických obrazců.Podle toho máme čísla trojúhelníková, čtvercová, pětiúhelníková, ..., čtyřstěnová, krychlová, ...

Například několik prvních figurálních čísel a vzorec pro n-té figurální číslo pro libovolné přirozené číslo n:

Trojúhelníková čísla 1,3,6,10,15,..., $\frac{n(n+1)}{2}$,...

Čtvercová čísla 1,4,9,16,25,...n^2,...

Pětiúhelníková čísla 1,5,12,22,35,..., $\frac{n(3n-1)}{2}$,...

Čtyřstěnová čísla 1,4,10,20,35,..., $\frac{n(n+1)(\mathrm{n}+2)}{6}$,...

Krychlová čísla 1,8,27,64,125,...,n^3, ...

Ve třetím šikmém sloupci jdoucím zprava shora doleva dolů jsou zapsána všechna trojúhelníková čísla

$1,3,6,10,15,...,\frac{n(n+1)}{2},...=\binom{2}{2},\binom{3}{2},\binom{4}{2},\binom{5}{2},\binom{6}{2},...,\binom{n+1}{2},...$ pro každé přirozené číslo n

Stejně čtvrtý šikmý sloupec jsoucí zprava shora doleva dolů obsahuje všechna čtyřstěnová čísla 1,4,10,20,35,..., $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$,...= $\binom{3}{3},\binom{4}{3},\binom{5}{3},\binom{6}{3},\binom{7}{3}...,\binom{n+2}{3},...$ pro každé přirozené číslo n.

Mezi kombinačními čísly je ještě jeden vztah, který platí pro všechna přirozená čísla k a n i pro k=0:

$$\binom{0}{0}+\binom{1}{0}+\binom{2}{0}+\ldots+\binom{n-1}{0}=\binom{n}{1}$$

$$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\ldots+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2}$$

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{3}$$

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\ldots+\binom{n+2}{3}=\binom{n+3}{4}$$

....

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k}{k+1}$$

5. Posloupnost

Aritmetické posloupnosti vyšších řádů

V Pascalově trojúhelníku se nachází aritmetická posloupnost

$$1,2,3,4,5,...n,... = \binom{1}{1},\binom{2}{1},\binom{3}{1},\binom{4}{1},\binom{5}{1}...,\binom{n}{1},...$$

Součet prvních n členů této posloupnosti je $\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$, to je kvadratický výraz.

5.1 Trojúhelníková čísla

Posloupnost trojúhelníkových čísel z Pascalova trojúhelníku

$1,3,6,10,15,...,\frac{n(n+1)}{2},...= \binom{2}{2},\binom{3}{2},\binom{4}{2},\binom{5}{2},\binom{6}{2},...\binom{n+1}{2},...$

- vytvoříme rozdíly každých 2 sousedních členů této posloupnosti. Dostaneme aritmetickou posloupnost

$2,3,4,5, ...,n,...= \binom{2}{1},\binom{3}{1},\binom{4}{1},\binom{5}{1},\binom{6}{2}...,\binom{n}{1},...$

Posloupnost

$1,3,6,10,15,..., \frac{n(n+1)}{2}, ... = \binom{2}{2},\binom{3}{2},\binom{4}{2},\binom{5}{2},\binom{6}{2},...\binom{n+1}{2},...$

je tzv. aritmetickou posloupností druhého řádu.

n-tý člen je $\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$, který je kvadratickým výrazem.

Součet prvních n členů této posloupnosti je $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}$ - kubický výraz.

Podobně posloupnosti čtvercových čísel a pětiúhelníkových čísel patří mezi aritmetické posloupnosti druhého řádu.Jejich n-té členy jsou kvadratické výrazy.

OBECNĚ

$\left(b_n\right)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost druhého řádu, právě když je

$\left(a_{n+1}\right)_{n=1}^{\infty} = (b_{n+1} - b_n)_{n=1}^{\infty}$ aritmetická posloupnost.

Konstantní posloupnost např. 1,1,1,1,... v Pascalově trojúhelníku můžeme nazvat *aritmetická posloupnost nultého řádu.* Každá aritmetická posloupnost nultého řádu je konstantní funkce.

5.2 Čtyřstěnová čísla

Posloupnost čtyřstěnových čísel v Pascalově trjúhelníku

$$1,4,10,20,35,...,\frac{n(n+1)(\mathrm{n}+2)}{6}, ...= \binom{3}{3},\binom{4}{3},\binom{5}{3},\binom{6}{3},\binom{7}{3},...\binom{n+2}{3},...$$

Vytvoříme rozdíly každých dvou sousedících členů této posloupnosti:

$3,6,10,15,...,\frac{n(n+1)}{2},...= \binom{3}{2},\binom{4}{2},\binom{5}{2},\binom{6}{2},...,\binom{n+1}{2},...$ toto je aritmetická posloupnost druhého řádu.

Proto posloupnost $1,4,10,20,35,...,\frac{n(n+1)(\mathrm{n}+2)}{6}, ...= \binom{3}{3},\binom{4}{3},\binom{5}{3},\binom{6}{3},\binom{7}{3},...\binom{n+2}{3},...$ je tzv. aritmetickou posloupností třetího řádu. Její n=tý člen je

$\frac{n(n+1)(\mathrm{n}+2)}{6} = \binom{n+2}{3}$ a to je kubický výraz.

Součet prvních n členů této posloupnosti je $\frac{n(n+1)(\mathrm{n}+2)(\mathrm{n}+3)}{24} = \binom{n+3}{4}$ = polynom čtvrtého stupně.

Posloupnost krychlových čísel patří mezi aritmetické posloupnosti třetího řádu.

Je to kubická funkce.

OBECNĚ

$\left(c_n\right)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost třetího řádu, právě když $\left(b_{n+1}\right)_{n=1}^{\infty} = (\mathrm{c}_{n+1} - c_n)_{n=1}^{\infty}$ aritmetická posloupnost druhého řádu.

Každá aritmetická posloupnost třetího řádu je kubická funkce.

V Pascalově trojúhelníku se nacházejí aritmetické posloupnosti všech dalších vyšších řádů.

5.3 Pětiúhelníková čísla

1,5,12,22,35,...

= rozdíly mezi sousedními členy jsou 4,7,10,13,... - to je aritmetická posloupnost prvního řádu

→ pětiúhelníková čísla tvoří aritmetickou posloupnost druhého řádu.

N-té pětiúhelníkové číslo vyjádříme ve tvaru $an^2 + bn + c$

Najdeme koeficienty a,b,c:

$$1 = a + b + c$$
$$5 = 4a + 2b + c$$
$$12 = 9a + 3b + c$$
$$\downarrow$$
$$a = \frac{3}{2},\ b = -\frac{1}{2},\ c = 0$$

→ n-té pětiúhelníkové číslo má tvar $\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{n(3n-1)}{2}$

5.4 Obecně pro n-tý člen

Vzorce pro n-tý člen a součet prvních členů aritmetické posloupnost vyššího řádu

N-tý člen aritmetické posloupnosti k-tého řádu je polynom k-tého řádu a součet prvních n členů této posloupnosti je polynom (k+1)-ního řádu.

Posloupnost 2,2,2,2,2,...

je aritmetická posloupnost nultého řádu, její n-tý člen je 2 a součet prvních n členů je 2n.

Posloupnost 3,5,7,9,11,...

je aritmetická posloupnost prvního řádu. Její n-tý člen je 2n+1. Součet prvních n členů je kvadratický výraz

$$3 + 5 + 7 + ... + (2n+1) = an^2 + bn + c$$

Koeficienty a,b,c, získáme dosazením tří prvních hodnot proměnné *n* do této rovnosti:

$$3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

$$3 + 5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$

$$3 + 5 + 7 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$$

Soustava tří lineárních rovnic o třech neznámých.Jejím řešením jsou čísla a=1,b=2,c=0 → součet prvních n členů je $n^2 + 2n$

Posloupnost -1,4,11,20,31,......

je aritmetická posloupnost druhého řádu. N-tý člen je kvadratický výraz $an^2 + bn + c$.

Koeficienty a,b,c:

$$-1 = a + b + c$$

$$4 = 4a + 2b + c$$

$$11 = 9a + 3b + c$$

$$\downarrow$$

a = 1, b = 2, c = -4 → n-tý člen této posloupnosti druhého řádu je $n^2 + 2n - 4$.

Součet prvních n členů posloupnosti -1,4,11,20,31,.... je kubický výraz.

Platí:

$$-1 + 4 + 11 + 20 + \ldots + (n^2 + 2n - 4) = an^3 + bn^2 + cn + d$$

Koeficienty a,b,c,d získáme např. dosazením čtyř prvních hodnot proměnné n do této rovnosti:

$$-1 = a + b + c + d$$

$$3 = 8a + 4b + 2c + d$$

$$14 = 27a + 9b + 3c + d$$

$$34 = 64a + 16b + 4c + d$$

$$\downarrow$$

$a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = -\frac{17}{6}$, d = 0 →součet prvních členů této posloupnosti druhého řádu je

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{6}n.$$

Odvození vzorců pro součet prvních *n* členů aritmetické posloupnosti vyšších řádů pomocí vzorců pro součet stejných mocnin prvních *n* přirozených čísel

Potřebujeme znát tyto identity:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

dají se najít v některých tabulkách nebo se dají odvodit z Pascalova trojúhelníku.

Platí :

$$-1+4+11+\ldots+(n^2+2n-4)=(1^2+2\cdot 1-4)+(2^2+2\cdot 2-4)+(3^2+2\cdot 3-4)+\ldots+(n^2+2n-4)=$$

$$=(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+2(1+2+3+\ldots+n)+n\cdot(-4) = \frac{1}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2-\frac{17}{6}n.$$

Vzorce pro součet stejných mocnin prvních *n* přirozených čísel+

Pomocí identity $1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ můžeme získat další identity, které představují součet stejných mocnin *n* prvních přirozených čísel:

$$1^2+2^2+3^2+4^2\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

....

V Pascalově trojúhelníku pro součet prvních *n* členů aritmetické posloupnosti druhého řádu platí:

$$1+3+6+10+\ldots+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\frac{1(1+1)}{2}+\frac{2(2+1)}{2}+\frac{3(3+1)}{2}+\frac{4(4+1)}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\frac{(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2)+(1+2+3+4+\ldots+n)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

↓

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + n^2 = 2 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6. Využití

6.1 Hledání všech podmnožin dané množiny

Vyhledáme počet všech podmnožin množiny $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{a,b,c}\}$

Každá větev představuje konkrétní podmnožinu S_i, která je zapsána výčtem svých prvků.

$S_{1\text{-}8} = \{a, b, c\},\{a, b\},\{a, c\}, \{a\}, \{b, c\}, \{b\}, \{c\}, \{\ \}$

V případě tříprvkové množiny získáváme tedy $2\times2\times2 = 8 = 2^3$ větví.

Pro čtyřprvkovou podmnožinu podobně získáme 16 podmnožin, což odpovídá 2^4.

Tento počet je roven součtu prvků Pascalova trojúhelníku pro n = 4.

Pro *n*-prvkovou množinu získáme 2^n podmnožin.

Seřadíme-li příslušné podmnožiny podle počtu prvků, získáme počet podmnožin o stejném počtu prvků jako členy Pascalova trojúhelníka.

Tyto úvahy mohou vést k důkazu celkového počtu všech podmnožin S_i s *k* prvky množiny *S*, která má *n* prvků.

Počet těchto podmnožin odpovídá vztahu

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Uvedená rovnost vyplývá z binomické věty

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$, kde $x = 1$ a $y = 1$.

Příklad:

● Kolika různými způsoby při pohybu pouze dolů a doprava od písmene k písmeni je možné přečíst slovo OBRÁZEK?

O B R Á Z E K
B R Á Z E K
R Á Z E K
Á Z E K
Z E K
E K
K

Řešení: Při čtení slova „obrázek“ můžeme postupovat pouze ve dvou směrech: dolů a doprava. Symbolicky můžeme tuto skutečnost znázornit pomocí šipek ↓, →.

Abychom se od počátečního písmene dostali k poslednímu, musíme provést šest přesunů z výchozí pozice.

Hledáme počet všech podmnožin základní množiny o šesti prvcích, které jsou dány uvedenými směry postupu.

Dostaneme $2^6 = 64$ různých podmnožin, které odpovídají počtu možností, jak je možné přečíst slovo „obrázek“.

Nakreslíme si zjednodušený plán situace. Využijeme uzlového grafu, ve kterém vrcholy představují písmena (uzly grafu), jejichž spojnice (hrany grafu) představují jednotlivé možnosti postupu čtení daného slova. Ve vrcholech získané sítě je vepsán počet cest, vedoucích od začátku do daného vrcholu při pohybu ve směru šipek. Počet dostupných cest je dán součtem cest, které vedou do předchozích písmen.

Sečteme-li získané hodnoty u posledního písmene K, dostaneme celkový počet možností:

$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$, tj. 2^6možností.

→

↓ ●1 ●1 ●1 ●1 ●1 ●1 ●1

●1 ●2 ●3 ●4 ●5 ●6

●1 ●3 ●6 ●10 ●15

●1 ●4 ●10 ●20

●1 ●5 ●15

●1 ●6

●1

Tento problém je možno modifikovat a měnit slova či schémata

6.2 tzv. Panna a orel

Pascalův trojúhelník může ukázat, kolika způsoby můžeme kombinovat výsledky hodů mincí. Např. hodíme-li mincí 3x, je tam jen jedna možnost, kdy nám padne 3x panna. Dále jsou 3 možnosti, kdy nám padne 2x panna a 1x orel, také tři,kdy padne 1x panna a 2x orel a nakonec jedna, kdy padne 3x orel.

Hod	Možné výsledky	Pascalův trojúhelník
1	Panna Orel	1,1
2	PP PO,OP OO	1,2,1
3	PPP PPO,POP,OPP POO,OPO,OOP OOO	1,3,3,1
4	PPPP PPPO,PPOP,POPP,OPPP PPOO,POPO,POOP,OPPO,OPOP,OOPP POOO,OPOO,OOPO,OOOP OOOO	1,4,6,4,1

6.3 Vzor hokejka v Pascalově trojúhelníku

Je-li součet diagonálních čísel libovolné délky počínaje číslem 1 je roven číslu pod koncem z výběru, který není na stelné diagonále.

např.

1+12=13

1+6+21+56 = 84

```
                    1
                  1   1
                1   2   1
              1   3   3   1
            1   4   6   4   1
          1   5   10  10  5   1
        1   6   15  20  15  6   1
      1   7   21  35  35  21  7   1
    1   8   28  56  70  56  28  8   1
  1   9   36  84  126 126 84  36  9   1
1   10  45  120 210 252 210 120 45  10  1
```

6.4 Součty řádků v Pascalově trojúhelníku

- ***0 v Pascalově trojúhelníku***

Do každé druhé úhlopříčky v Pascalově trojúhelníku vložíme znaménko mínus a začneme sčítat řádky, zjistíme další zajímavost. Každý řádek je roven n-té mocnině čísla 0 $\rightarrow$ 0^n

```
              1                                     1 =  0^0
            1   -1                                1-1 =  0^1
          1   -2   1                            1-2+1 =  0^2
        1   -3   3   -1                      1-3+3-1 =  0^3
      1   -4   6   -4   1                  1-4+6-4+1 =  0^4
    1   -5  10  -10   5   -1           1-5+10-10+5-1 =  0^5
  1   -6  15  -20  15   -6   1     1-6+15-20+15-6+1 =  0^6
```

- ***2 v Pascalově trojúhelníku***

Součet čísel v každém řádku je roven 2^n

n je číslo řádku.

$$2^0 = 1$$

$$2^1 = 1+1 = 2$$

$$2^2 = 1+2+1 = 4$$

$$2^3 = 1+3+3+1 = 8$$

$$2^4 = 1+4+6+4+1 = 16$$

- ***11 v Pascalově trojúhelníku***

Jedna ze zajímavostí Pascalova trojúhelníku je, že jednotlivé řádky zapsané v desítkové soustavě jsou mocniny čísla 11 vzorcem zapsáno

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 10^k = 11^n = (1+10)^n$$

n je číslo řádku. První řádek je roven 11^0, druhý řádek je roven 11^1, třetí řádek je roven 11^2, atd. V řádcích, kde jsou čísla větší než devět se pak číslice na místě desítek přičítá k číslu o jedna vlevo

a) první řádek je "1" = 11^0 = 1

b) druhý řádek je "1" a "1" = 11^1 = 11

c) třetí řádek je "1", "2" a "1" = 11^2 = 121

d) atd. 11^3 = 1331

11^4 = 14641

11^5 = 161051 - číslice se překrývají 1 51 01 0 5 1

11^6 =1771561

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
```

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Lenka Špičková
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D.
Rok obhajoby:	2014

Název práce:	Pascalův trojúhelník
Název v angličtině:	Pascal´s triangle
Anotace práce:	Historie, vznik a využití Pascalova trojúhelníku.Jeho význam a složení. Práce se zaměřuje na obory matematiky, které využívá Pascalův trojúhelník nebo ony využívají jeho.
Klíčová slova:	Pascalův trojúhelník, kombinační čísla, binomická věta, posloupnosti
Anotace v angličtině:	History, foundation and utilization of of Pascal's triangle, it's significance and compositio. The thesis focuses on mathematic branches that are used by Pascal's triangle or vice versa these branches uses the Pascal's triangle itself.
Klíčová slova v angličtině:	Pascal's triangle, combinatorial numbers, binomial theorem, mathematical sequences
Přílohy vázané v práci:	0
Rozsah práce:	30stran
Jazyk práce:	čeština