UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra psychologie a patopsychologie

Bakalářská práce

Monika Zuzaníková

Matematické myšlení

Olomouc 2017 vedoucí práce doc. PhDr. Josef Konečný, CSc.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Matematické myšlení“ vypracovala samostatně a s použitím uvedené literatury a pramenů.

V Olomouci 2017 Monika Zuzaníková

Anotace

Cílem této práce je poukázat na existenci a důležitost matematického myšlení jako specifického druhu myšlení. Práce tuto oblast mapuje jako celek. Zahrnuje tedy obecný úvod definující, co je to myšlení, vývoj matematického myšlení jednotlivce i historický pohled na vývoj matematického myšlení v kontextu společnosti a v neposlední řadě se zabývá samotným principem matematického myšlení. Klade důraz na uvědomění si, že se jedná o důležitou součást lidského intelektu. V krátkosti polemizuje nad vztahem pohlaví a myšlení v matematice.

Annotation

This thesis is aimed to present the existence and importance of the mathematical thinking as the specific kind of thinking. The thesis maps this area as a complex. Therefore it comprises the general introduction defining what the thinking is, developement of individual mathematical thinking and historical view of the development of mathematical thinking in context of the society and last but not least it is concentrated on the very principle mathematical thinking. It puts emphasis on cousciousness that this is the important part of the human intellect. In brief it argues the relationship between sex and thinking in mathematics.

Klíčová slova: matematické myšlení, myšlení, matematika, vývoj matematických představ, historický vývoj matematických představ

Key words: mathematical thinking, thinking, mathematics, development of mathematical concepts, historical development of mathematical concepts

Obsah

Úvod

Matematické myšlení je součástí našeho života více, než si běžně uvědomujeme. Třebaže matematika nepatří mezi oblíbené studijní předměty a mnozí se jí snaží odjakživa vyhnout, je všudypřítomná. Ať už na ní stojí fungování veškerých moderních technologií, dokáže popisovat mnoho přírodních zákonů, nebo se jedná o běžné úkony, jako je platba v obchodě nebo to, že dokážeme ověřit, že se nám neztrácejí slepice ze dvorku.

Pro tyto úkony si ale nevystačíme jen se znalostí číslic, jak se může zdát. Je třeba s nimi dokázat provádět řadu operací, což je značnou intelektuální činností. Je třeba myslet. Matematické myšlení se vyvíjí spolu s myšlením samotným, je v této oblasti ale určitým specifikem. Obsahuje řadu dílčích kroků, algoritmů ale i zkušeností a cviku. Jeho typickým znakem je velká míra abstrakce, která u mnoha lidí vyvolává známý efekt „Nerozumím matematice!“, otázkou ale vlastně je, zda je obtížná matematika, nebo je obtížné naučit se v ní myslet.

Rozhodla jsem se proto napsat bakalářskou práci o matematickém myšlení a poskytnout tak, třebaže jen krátce, přehled o tom, co to vlastně je. Domnívám se totiž, že je toto myšlení opomíjeno navzdory tomu, že jej učíváme přinejmenším stejně často jako třeba myšlení heuristické. Stačí si uvědomit, kolikrát za den počítáme množství věcí nebo času, kolik komunikace probíhá v rovině čísel (kolik je nám let, na kolikáté straně knihy jsem, kolikrát jsou prarodiče starší než jejich vnoučata …) a nejrůznějších sumarizací a srovnávání.

Cílem práce je podívat se na problematiku jako celek. Zahrnout jak obecný rámec toho, co to všeobecně myšlení je, tak postihnout specifika myšlení matematického. Současně utvořit náhled k tomu, že se matematické myšlení přirozeně vyvíjí díky jeho potřebě – ontogenetické i fylogenetické. Práce by měla být vyváženou mírou odbornosti a současně dokázat čtenáři odpovědět na otázku, proč je přinejmenším zajímavé pozastavovat se nad existencí matematického myšlení.

1 Myšlení obecně

Myšlení je nejsložitější kognitivní proces. Je to vnitřní děj, který nelze přímo pozorovat. V širokém slova smyslu ho lze definovat jako proces zpracovávání a využívání informací (Plháková, 2005). Schopnost myšlení je přitom mezi lidmi na různé úrovni. Tu často v obecném slova smyslu chápeme jako inteligenci. Z hlediska psychologie se však jedná o odlišné pojmy a měření inteligence dnes už není něco, co by bylo považováno za cokoliv, co má odrážet lidskou kvalitu.

Myšlení může být velmi konkrétní a praktické, vztahující se k určitému úkonu denní potřeby, stejně tak ale kontemplativní. Měřit v tomto případě kvalitu myšlení je prakticky nemožné. Funkcí myšlení je formování pojmů (konceptualizace), rozpoznání, nacházení vztahů, vyvozování závěrů a výchozích předpokladů, řešení problémů a vytváření něčeho nového. Mezi myšlenkové operace patří srovnání, abstrakce nebo zobecňování. Výsledkem myšlení je nový poznatek.

Myšlení lze také dělit, a to na tři druhy:

1) Myšlení konkrétní, při kterém manipulujeme s vjemy.
2) Myšlení názorné, při kterém v mysli operujeme s představami, obvykle vizuálními. (Pro naše účely je toto myšlení typické při řešení geometrických úkolů.)
3) Myšlení abstraktní, při kterém provádíme operace se znaky. V matematické podobně jako myšlení názorné, běžně užívané (Homola, 1992).

Kognitivní psychologie přišla dále s pojmem propozičního myšlení, *„jehož základním elementem jsou propozice (výroky, tvrzení) vyjádřené zpravidla ve verbálním kódu, s nimiž provádíme mentální manipulace“* (Aktinsonová et al., 1995, s. 344). V psychologii se ale objevují i další pojmy, jako je analytické myšlení, syntetické myšlení, intuitivní myšlení atd. Myšlení však nelze chápat jako dílčí proces. Naopak, při řešení problému člověk zapojuje komplexní schéma kroků vedoucí k potencionálnímu řešení. Výčet toho, jaké myšlení existuje, by tedy mohl být dlouhý.

1.1 Myšlení podle Aristotela

Myšlením, stejně jako spoustou jiných psychologických fenoménů, se lidstvo zabývá celá tisíciletí. Jeden z největších přínosů v této oblasti měl už Aristoteles (384 – 322 př. n. l.), jehož pojetí je uznáváno dodnes. Tři formy, ve kterých dle něj myšlení probíhá, jsou pojmy, soudy a úsudky. V těchto formách potom existuje jemná hierarchie odrážející se později ve formální logice.

Orientaci v myšlení, či dokonce jeho samotný průběh umožňují pojmy. „*Pojmy jsou mentální kategorie, do kterých zařazujeme předměty, události, zkušenosti nebo ideje, které jsou si v jednom nebo více aspektech podobné*“ (Baron, 1999, s. 246-247). Podle Plhákové (Plháková, 2000) umožňují pojmy člověku překračovat hranice bezprostřední empirické zkušenosti. Z lingvistického hlediska lze většinu pojmů ztotožnit s verbálními znaky, které tvoří slovo vztahující se k určitému významu, tedy k podstatným či typickým znakům dané pojmové kategorie. Pojmy vznikají zejména komparací dvou objektů nebo jevů. Takovému procesu se říká myšlenkové operace.

1.2 Myšlenkové operace

Pojem myšlenkových operací přinesl Jean Piaget, který jejich pomocí charakterizoval etapy kognitivního vývoje na základě převládajících intelektových operací. Myšlenkové operace lze definovat jako „účelné mentální manipulace s psychickými obsahy, které směřují k řešení rozmanitých teoretických i praktických problémů“ (Plháková, 2005, s. 269). Lze je rozdělit na logické a heuristické. Logické používáme, pokud se řídíme jasnými pravidly s cílem dojít ke správnému řešení. Výsledky takového myšlení lze pak posuzovat například jako pravdivé/nepravdivé. Takové myšlení je typické pro matematiku nebo logiku. V těchto oblastech bývá označováno za algoritmus.

Algoritmické myšlení bývá subjektivně považováno za něco, co nenese dostatečnou kvalitu ve smyslu lidskosti. Toto mínění bych přirovnala k pudům, které jsou, i přes svou nenahraditelnost, považovány z pohledu vývoje za něco velmi primitivního. Lidem ale mnohdy uniká, že právě na algoritmech stojí veškeré technologie a pokrok. Až s dostatečným uvědoměním si existence algoritmického myšlení se začaly rozvíjet počítače a umělá inteligence.

Heuristické myšlenkové operace jsou opakem logických. V průběhu života jsou praktičtější a využívanější. Jejich princip není založen na poctivém pátrání po správnosti, ale na cestě nejmenšího odporu. V angličtině mají název „rules of thumb“, což lze překládat jako české „od oka“ (Plháková, 2000). Je třeba říci, že ačkoliv heuristické myšlení nevede ke stejně kvalitní výsledkům jako logické postupy, nelze ho považovat za méněcenné. Pro mnoho životních situací je totiž jediným řešením. Příkladem mohou být mezilidské vztahy, v nichž žádné jednotné algoritmy neexistují.

1.3 Usuzování

Dalším aspektem myšlení je usuzování. Jinak řečeno proces nacházení závěrů z daných předpokladů. Usuzování se dělí na indukci a dedukci. Oba způsoby jsou vázané na logické myšlení. Při indukci vyvozujeme závěr na základě dílčích pozorování (tedy skládáme informace), při dedukci naopak – vycházíme z obecného pravidla, které potom aplikujeme na jednotlivé problémy.

Indukce, a zejména pak dedukce patří k velmi používaným pojmům v běžném laickém životě a z hlediska správnosti bývají obvykle zaměňovány a používány nesprávně. Přestože procesem usuzování, a tedy dedukcí i indukcí, procházíme běžně a denně, není pro člověka úplnou samozřejmostí. V průběhu života se jí postupně učí. Předškolní děti neumí rozlišovat mezi induktivním a deduktivním úsudkem. Nerozumí deduktivní logice, protože věci charakterizují jen na úrovni vnější podobnosti. Zatímco šestileté dítě už dokáže zařadit papriku mezi zeleninu, čtyřleté by ji položilo k červeným jablkům (Vágnerová, 2012).

1.4 Rozhodování

Rozhodování je další funkcí myšlení. Jde přitom o jeden z nejčastějších procesů myšlení, které člověk denně dělá. Člověk se mnohdy nedrží zásady, že je vhodné dělat svá rozhodnutí s ohledem na užitečnost rozhodnutí a pravděpodobnost žádoucího výsledku. Rozhodování je proto snadno ovlivnitelné. Podobně jako u heuristického myšlení dá člověk přednost postupu, který jej příliš nezatěžuje. Profesorka Plháková ve své učebnici obecné psychologie humorně připomíná rčení „myšlení bolí“. Herbert Simon tuto obvyklou iracionalitu označil jako přijatelnost. Člověk neprochází a neověřuje všechny možnosti, ale spokojí se s první, která je alespoň přijatelná (nemá tedy maximální užitek, ale způsobuje přijatelně malou ztrátu nebo nepohodlí).

1.5 Řešení problému

Řešení problémů je hlavní funkcí myšlení. Za problém můžeme obecně označit situaci, v níž známe cíl, ale nevíme, jak ho dosáhnout. Myšlení je v tomto smyslu proces, který nám umožňuje najít způsoby, jak vytyčeného cíle, navzdory různým překážkám, dosáhnout. Je třeba podotknout, že způsobů vedoucích k žádoucímu cíli bývá zpravidla několik. V takovou chvíli vstupuje do řešení problému proces rozhodování.

Typickým mechanizmem řešení problému je metoda pokusu a omylu. Takový postup je obvyklý ve chvílích, kdy nemáme dostatek informací k nalezení nejvhodnějšího řešení, nemůžeme své možnosti porovnat a nezbývá než nějakou zkusit. Pokus a omyl odkazuje na heuristický způsob myšlení. Mnohdy v rámci něj užíváme analogií. Tedy volíme takový postup, který se osvědčil dříve. Opakem i nadále zůstává užití algoritmu, tedy logické a postupné ověření všech alternativ. Stále platí, že tento postup není možný vždy. Je ale třeba uvědomit si, že výhodou algoritmického přístupu k řešení problémů je možnost představit si ho a naplánovat dřív, než ho skutečně realizujeme. I tato činnost je v lidském myšlení zcela běžná. Nutno podotknout, s odkazem na následující kapitoly, že je běžná u dospělých. U dětí se podobné úvahy rozvíjejí až kolem 12. roku života.

Psychologové věnovali velkou pozornost výzkumu faktorů, které ovlivňují rychlost řešení problémových situací. Patří k nim úroveň porozumění problému, dřívější učení, odbornost a tvořivost. Lidé s dobrými schopnostmi usuzovat věnují porozumění problému více času než lidé, kteří mají schopnost usuzovat nižší, a tím se jejich úspěšnost v řešení stává vyšší (Štefanovič, 1982).

Kritickým bodem v řešení problému je také schopnost rozpoznat, které informace jsou důležité. Zde hraje roli vzdělání, resp. znalosti v oblasti, ve které se řešený problém vyskytuje. Jde přitom zjevně o zásadní faktor, který je ale při výzkumu myšlení obtížně zohlednitelný. Za jeho ignoraci bývá kritizován i velikán, jako byl Jean Piaget. Pokud bychom se ale hypoteticky zamysleli, znalosti nám mohou při řešení problému zásadně pomoci – zejména již zmíněná analogie, ale také uškodit, vezmeme-li v úvahu funkční fixaci, může nám řešení problému snadno uniknout.

2 Matematické myšlení

„Počítání není výkon, ale funkce“ (Hécaen a kol. In Košč, s. 36). Přesto z hlediska psychologie mluvíme o poznávání, o myšlení. Matematické myšlení je ale myšlení specifické s několika charakteristickými znaky (Košč, 1972). Velkou charakteristickou záležitostí, třebaže špatně uchopitelnou, je už intuitivní vnímání matematického myšlení jako odlišného od jiných. *„V podstatě věci ale není matematické myšlení ničím osobitým nebo vlastním. Naopak, vykonávání matematických operací se pokládá za tak typickou aktivitu, že se často používá jako model uskutečňování mentálních procesů i pro jiné oblasti intelektuální činnosti“* (Košč, 1972, s. 39).

2.1 Matematické schopnosti

Abychom mohli dělat závěry o existenci a funkci matematického myšlení, je třeba neopomenout, že samo myšlení se rozvíjí spolu s matematickými schopnostmi. Matematické schopnosti zahrnují v podstatě a) schopnost nebo schopnosti vidět nebo odhadovat vztahy, způsoby jejich spojování a dělat z nich závěry, b) schopnost vyvozovat vztahy, vyčleňovat z daných dat skutečnosti, které nebyly jasně stanovené, c) pohotovost manipulovat s jistými symboly, schopnost pracovat s abstraktními kvalitami bez konkrétních pomůcek, d) schopnost analyzovat situaci, rozlišovat podstatná a nepodstatná data, analyzovat postupnost kroků vedoucích k řešení (Canisa, 1962).

2.2 Matematické myšlení jako intelektuální činnost

Henschen (1920) zdůrazňoval, že každé počítání, třeba i to zcela nejjednodušší, je intelektuálním procesem, protože vyžaduje sérii myšlenkových procesů. Při výpočtech míříme k vytyčenému cíli – najít odpověď na otázku, kterou si příkladem pokládáme, vyžaduje postupné řešení a vyřešení úlohy. Je proto třeba zorientovat se v podmínkách (informacích), které jsou dány jako výchozí, poté tyto informace zanalyzovat a uvést je do vzájemných vztahů. Z tohoto základu potom vychází všeobecné schéma řešení úlohy nebo výběr postupu řešení. *„Strategie tady spočívá v uplatnění systému pomocných (částečných) operací, které ve větší nebo menší míře odpovídají objektivnímu algoritmu řešení úlohy a které mají někdy podobu dlouhého řetězce úvah“* (Košč, 1972, s. 38).

Dospějeme-li k hledanému řešení, probíhá následně také jeho zpětné zanalyzování. Tedy vyhodnocení, zda je nalezené řešení adekvátní k původnímu zadání. Pokud zde dochází k rozporu, je třeba vše zopakovat a kriticky nahlédnout na použité metody a postupy. Této myšlenkové činnosti je schopný dospělý člověk, dítě se jí učí v rámci vývoje abstraktního myšlení.

2.3 Matematické myšlení v procesu matematických operací

Asocianismus, filozofický směr z přelomu 18. a 19. století, chápal matematiku právě jen jako vyvozování vztahů mezi proměnnými. Třebaže za tímto názorem stála i osobnost, jakou byl Charles Spearman, dnešní psychologie už matematické myšlení považuje za skutečnou formu myšlení, které stojí na uvědomování a uvádění jednotlivých prvků do souvislostí.

Aritmetika zahrnuje několik odlišných procesů. Prvním je numerace, chápání pojmu čísla a počítání, druhým technika počítání, která obsahuje sčítání, odčítání, násobení a dělení. Třetí proces můžeme nazvat řešením úloh. Při správném užití prvních dvou procesů jsme tedy schopni řešit potencionálně jakýkoliv matematický úkol. Přitom je třeba počítat s tím, že „ *„geneticky“ jsou operace činnostmi ve vlastním slova smyslu, ne jen konstatováním nebo pochopením vztahů“* (Košč, 1972, s. 42). Pokud sčítáme, sjednocujeme dva prvky dohromady, třebaže jsme je mohli nechat oddělené. Sečtené prvky můžeme zpětně oddělit, odečteme-li je, a tím se vracíme v úvaze na začátek. Takové činnosti, které jsme schopni v mysli provádět, se možností vracet na začátek a zpět, bez poškození samotné úvahy, liší od jakékoliv jiné činnosti.

Podívejme se blíže třeba jen na proces sčítání. Při sčítání je třeba vědět, že zvlášť sčítáme jednotky, desítky, stovky atd. Pokud ale jednotky přesahují desítku, desítky stovku, stovku tisíce apod., je třeba číslo získané po sečtení v daném řádu převést do řádu o jedna vyšší. Pokud bychom například sčítali 589 + 614, pak součet jednotek (tj. 9 + 4) je roven 13. Přitom trojka v zápisu konečného výsledu zůstává v řádu jednotek, jednička spadá do řádu desítek, a bude tedy přičtena k číslu 9, které vzniklo součtem 8 + 1, a stejný princip se pak z řádu desítek přenáší do řádu stovek. *„Často se zde vyžaduje uskutečňování tzv. sériových operací, které spočívají v uskutečňování postupných aktů počítání. V těch je potřeba – zejména když se dějí „zpaměti“ – podržet v „mysli“ více čísel a výsledek předcházejícího aktu pokládat za výchozí bod pro následující akty atd.“* (Košč, 1972, s. 44). Je zjevné, že se jedná v podstatě věci o náročný proces, a to jsem jen u modelové situace, ve které jsme nevzali v úvahu existenci čísel desetinných ani záporných.

V tomto smyslu je počítání exaktní záležitostí. Zmíněné sčítání je například v oboru matematiky – algebry označeno jako binární operace. Sčítání je v ní definováno tak, že při sčítání přirozených čísel je libovolné dvojici (sčítancům) jednoznačně přiřazen výsledek (součet). Sečteme-li 2 + 3, je výsledek vždy 5, řekla bych bez ohledu na okolnosti. V tuto chvíli se do procesu přemýšlení nad samotným součtem vkrádá také pochopení pojmu komutativnosti. A tedy že 2 + 3 = 3 + 2. Rovná se už pak nenese jen informaci o součtu samotném nebo řekněme sumarizaci čísla 2 a 3, ale také o rovnosti ve smyslu možné záměny. Od chvíle, kdy jsme schopni tyto zákonitosti vstřebat a vhodně kombinovat, je už na schopnosti našeho myšlení vyhodnotit, zda pro náš (složitější) výpočet chceme hodnotu 5 zapsat číslem 5, nebo součtem 2 + 3 (resp. 3 + 2). Matematice jako vědě totiž formálně odpovídají oba zápisy. Matematické myšlení a řešení problému není postiženo emocemi a obecně má vždy jednotný výsledek. Proto jde o specifický druh myšlení, v jehož postupu není místo pro heuristické metody, a je tedy kombinatoricky náročné.

Na tomto banálním příkladu chci upozornit ještě na jednu velmi důležitou záležitost, kterou si díky zběhlosti v počítání neuvědomujeme, ale která je nutnou součástí, aby naše počtářské postupy vůbec měly závěr. V našem případě jde o úplnost operace sčítání na dané množině. Použijme pro vysvětlení už výše zmíněná čísla. Máme množinu čísel {2,3,5}. Pokud by toto byla všechna čísla, která známe, nedokázali bychom na nich provádět sčítání zcela. Dokážeme totiž sečíst 2 + 3 a 3 + 2, pokud budeme chtít ale kterékoliv z těchto čísel přičíst k pětce, nedobereme se výsledku, pokud množina čísel, kterou užíváme, neobsahuje 7, 8 nebo 10. Pro matematické myšlení je vždy třeba jeho určitého přesahu oproti právě řešenému problému.

Všechny zmíněné informace se učíme a vyvozujeme zejména v průběhu dospívání. Díky schopnosti myšlení k nim dokážeme docházet i samostatně bez ohledu na to, že je matematici definovali dříve, než k nim naše osobní úvahy dojdou.

Na závěr je třeba připomenout, že analogické postupy, které byly výše nastíněny, probíhají při odečítání, které má ale svá další specifika. Podobně jako operace násobení, dělení apod. Jak píše Lurja (1946, s. 261), *„operace při výpočtech vyžadují přesné vnitřní plánování“*.

2.4 Fylogeneze matematického myšlení

Jak se asi vyvíjelo matematické myšlení, je nejlépe možné odvozovat z výzkumů primitivních národů, které dodnes zůstávají oddělené od civilizace. Ukázalo se, že obyvatelé nejprimitivnějších národů často rozlišují jen na úrovni množství ve smyslu méně/více a větší/menší nebo neodlišují, že celek je složen z částí, které jsou proto nutně menší (Grewel, 1952). Lévy-Bruhl (1926) píše, že australští domorodci ještě začátkem dvacátého století znali jen číslovky jedna, dva a „mnoho“.

Dalším stupněm vývoje, co se pochopení pojmu čísla týká, bylo sčítání. Sumarizací jedna a dva muselo časem vzniknout tři (atd.), protože se jedná o čísla (resp. v tomto případě množství) často se vyskytující a s praktickým využitím. To lze pozorovat z postupného pojmenovávání číslovek například australského kmene Murray River: *„1 = enea, 2 = petcheval, 3 = petcheval-enea, 4 = petcheval-petcheval.*

Nebo kmene Kamilarol: 1 = mal, 2 = bulan, 3 = guliba, 4 = bulan-bulan, 5 = bulan-guliba, 6 = guliba-guliba“ (Struik, 1963, s. 9).

Současně je třeba uvědomit si základní vlastnost čísla. Čísla a výpočty se nikdy nezabývají kvalitou např. sčítaných objektů. Jedná se o extrémní abstrakci, kterou je třeba si osvojit. Často používaná průpovídka z hodin matematiky: „Nemůžeš sčítat jablka a hrušky!“ je vlastně sama o sobě nesmyslná, matematika může sčítat jablka a hrušky, protože se nezabývá obsahem sčítaného. Toto uvědomění ale probíhá postupně. V této souvislosti upozorňuje Lévy-Bruhl (1926), že u primitivních kmenů nedošlo k dokončení pochopení čísla jako abstrakce. Mají tedy různá slova, která označují jednu a tu samou číslovku – odlišují, kdy se jedná o pět kamenů a kdy o pět mužů. *„Trvalo skutečně dlouho, než se kvantita začala chápat jako něco nezávislého od konkrétních vlastností předmětů, které se počítají,“* dodává Košč (Košč, 1972, s. 50).

Souvislost zde mají i soustavy, ve kterých se počítá. Nám dnes osvojená desítková soustava není samozřejmostí. Například mayská kultura užívala soustavu dvacítkovou a čísla, na rozdíl od předchozích zmíněných kmenů, dokázala zapisovat. V historii běžná je soustava pětková, desítková a dvacítková (Lévy-Bruhl, 1926). Jak zásadní vliv na chápání matematiky a schopnost myslet v matematice mají soustavy, ve kterých se počítá, by mohlo být zajímavou výzkumnou otázkou. Třebaže je dnes po absolvování základní školy schopný každý počítat s poměrně vysokými čísly, a to bez dalšího studia či velké námahy, jedná se o naučený proces, který vyžaduje vždy stejné kroky. I jako pomyslně dobrým počtářům nám však dělá problém přepočítávat čas. Pokud potřebujeme k aktuálnímu času přičíst hodnotu přesahující 60 min, činí nám to obtíže. Čas totiž, na rozdíl od jiných počtů, počítáme v soustavě šedesátkové. Jsme natolik svazováni zběhlostí v počítání s desítkovou soustavou, že si jen stěží uvědomujeme, že většina elektroniky funguje například díky soustavě dvojkové.

Je těžké odlišit od sebe vývoj matematického myšlení, historii matematiky a filozofii, která se obou předchozích témat dotýká v celé své vlastní historii. Cílem této práce však není sepisovat dějiny filozofie ani matematiky, přestože by v mnohém kontext matematického myšlení dokreslovaly. Zatímco Pythagoras hledal dokonalé číslo, generace matematiků stovky let po něm přicházela na integrální počet, protože ho potřebovala s ohledem na industriální rozvoj. V jiném měřítku se můžeme na nutnost vývoje matematického myšlení dívat například skrze existenci tzv. vrubovek, užívaných zřejmě už 30 tisíc let př. n. l. Jde o nejstarší způsob zápisu číslic. Šlo o hůl nebo podobný předmět, do kterého se dělaly zářezy znázorňující počet. Je zkrátka nutné si uvědomit, že matematické myšlení se vyvíjí a mnohé jeho posuny se zapisují do historie. Vyvíjí se v závislosti na lidské potřebě, a není tedy zanedbatelnou součástí lidské existence.

3 Ontogeneze matematických schopností

Způsobů, jak nahlížet na ontogenetický vývoj matematického myšlení, je několik. Na počátku stojí otázka, kdy dítě dospívá do fáze, ve které je schopné chápat pojem množství a čísla. Obecně se tato oblast týká zejména dětské vývojové psychologie, matematické dovednosti jsou sledovány od narození po dospělost.

Stejně, jako se postupně tříbí schopnost myslet a dospělostí dosahuje pomyslného maxima, postupuje takto i schopnost matematického myšlení. Jako přínosné se ukázaly výzkumy jednotlivých dětí, jejichž vývoj matematických schopností lze poté zobecnit.

Dalším klasickým pohledem na myšlení v matematice jsou hromadné průzkumy soustředící se na měření kvality matematických dovedností dětí. Jsou přitom běžnější, než se zdá. Ve školství probíhá řada plošných srovnávacích testů. V České republice probíhá v největší míře pod záštitou ČŠI (Česká školní inspekce), která provádí mezinárodní šetření PISA (Programme for International Student Assesment). *„Šetření je zaměřeno na zjišťování úrovně gramotností patnáctiletých žáků, kteří se ve většině zúčastněných zemí nacházejí v posledních ročnících povinné školní docházky. Testování probíhá ve tříletých cyklech, přičemž pokaždé je kladen důraz na jednu z uvedených oblastí tak, aby bylo možno o ní získat detailnější informace“* (Česká školní inspekce, 2017). Česká společnost si v posledních letech začíná uvědomovat dosah matematických schopností a snaží se rozvoj matematického myšlení vrátit mezi podstatné části vzdělávání.

3.1 Vývoj matematických schopností

„Pojem čísla není objektivně daný jako vlastnost reálně existujících věcí, není to nějaká smysly vnímatelná skutečnost. K pojmu čísla musí člověk dopracovat jako k výsledku složitých psychických procesů, které se uplatňují při uspořádávání věcí, při jejich kombinaci *a také při chápání jejich vzájemných vztahů, tj. při abstrakci. Při pojmu čísla dosahuje abstraktní myšlenková činnost svého vrcholu“* (Košč, 1972, s. 53).

Podobně jako u jiných vývojových procesů, i vývoj matematického myšlení je determinován. Standardně platí, že se matematické schopnosti vyvíjí paralelně rozvojem mozku, roli však hraje i úroveň zkušeností – zejména tedy vzdělání, které proces nutně urychluje. Košč v rozlišuje dvě cesty:

1) Chápání množství.
2) Počítání.

Dítě se od začátku života učí zacházet s množstvím, aniž by tento pojem chápalo, je vystavováno manipulaci s různými předměty v různém množství. V průběhu druhého roku života je dle Košče dítě schopno zhruba čtyř operací souvisejících s kvantifikací.

První z nich je schopnost rozlišit mezi „více“ a „méně“. Toto rozlišení ale zůstává na poli subjektivity. Přesto, že tříleté dítě již dokáže označit počet předmětů jako jedna, dva nebo mnoho, neuvědomuje si význam těchto číslic. Přesto, že jednu kostku stavebnice označí slovem „jedna“ stejně jako jeden bonbón, neshledává v tom žádnou souvislost. Číslice pouze opakuje jako naučené fráze. Kdy je dítě schopné používat čísla s plným porozuměním není zcela jasné.

Druhou schopností je porovnání množství. Dítě kolem druhého roku života dokáže poznat, pokud předmětů, které má k dispozici, ubyde nebo přibude. Neumí je spočítat, vnímá je jako celek, který je odejmutím nebo přidáním kusu narušen. Clauss a Hiebschen (Clauss a Hiebschen, 1960) nechali děti porovnat dvě série barevných kuliček. Experiment přinesl zajímavý výsledek. Děti měly množství odhadovat, ne počítat. Mladší školní děti dokázaly rozdíly v množství rozpoznávat přesněji než děti mladší pěti let. Tento princip fungoval, dokud se skutečný počet kuliček pohyboval kolem 50 ks. Když jej experimentátoři zdvojnásobili, lepších výsledků dosáhly předškolní děti. Autoři se domnívali, že starší děti nahlíží na problém s mírou kritiky a znalosti, která se ukázala na obtíž.

Třetí schopnost nazývá Košč párováním předmětů. Tento proces navazuje na chápání množství. – Dítě samo řadí předměty do skupiny. Po dvojicích, trojicích apod. Nevnímá je jako 3 ks, ale jako jeden nový celek, který se množstvím liší od jiného. *„Z toho potom dítě dospívá k porovnávání jednoduchých konkrétních počtů objektivních předmětů s konkrétními, už osvojenými, i když případně ještě číslem neurčenými počty nejběžnějších věcí“* (Košč, 1972, s. 56).

Tříleté dítě začíná odhadovat počet předmětů bez schopnosti je spočítat, přesto je do jisté míry správně označuje čísly. Remplein (1958) uvádí, že dvě kuličky poskládané nad sebou dítě neoznačí číslem dvě, ale slovy: „jedna kulička a druhá kulička“. Současně ale stejně sestavenou čtveřici kuliček slovy „dvě kuličky a dvě kuličky“. Tento způsob „počítání“ vychází zřejmě z předchozích schopností o přípravě na odhadování množství. Dítě tvoří určité celky. Ve věku tří let dokáže najednou pracovat pouze s množstvím dva. Remplein dál uvádí, že seskupení pěti předmětů je dítě schopné uskutečnit ve věku 4,6 let a seskupení pěti předmětů ve věku 5 let. Neuhaust (1955) dodává, že seskupování předmětů do čtveřic dítě provádí skládáním předmětů nad sebe (jedna k jedné). Nedokáže taková seskupení ale tvořit způsobem, kdy by je skládalo do řady za sebou. Domnívá se, že lineární řazení předmětů vyžaduje počítání, zatímco skládání nad sebe tvoří tvary - celky, vnímatelné principy tvarové psychologie.

Při bližším pohledu je možné srovnat, že ontogenetický vývoj matematického myšlení je podobný fylogenetickému. Primitivní národy postupují s potřebou chápat čísla a množství podobně jako dítě. Stejně jako dítě přiřazuje jednu barevnou kuličku k druhé a dvoří dvojici chápanou jako jeden celek, obyvatelé primitivních kmenů počítají dobytek, když přiřadí každému zvířeti jeden kamínek. Pokud večer nějaký kamínek přebývá, zvíře chybí. Obejdou se tak do jisté míry bez znalosti číslic nebo součtů (Lévy-Bruhl, 1926).

Počítáním budeme rozumět schopnost vyjmenovat číslovky ve správném pořadí s postupným přiřazováním množství a operacemi mezi nimi. *„Aktivita počítání, zdá se, vyplývá ze spontánních rytmických aktivit malého dítěte (kopání, dupání, poklepávání rukama a nohama) a ze současného opakování sérií, ze začátku pro dítě nesmyslných slabik (hra: en-ten-týky apod.), které dítě reprodukuje podle rodičů“* (Košč, 1972, s. 64). Z tohoto základu vychází

i rytmické pohyby prstů, ze kterých brzy vzniká, v ontogenezi i fylogenezi, počítání na prstech. Třebaže umí dítě vyjmenovat řadu několika číslic, nemá je ani zdaleka spojeny s odpovídajícím množstvím. Čísla dlouho tvoří říkanku. Děti občas některou číslici vynechají, nepočítají od jedné, ale od čísla, které se jim zrovna zalíbí, aniž by si uvědomovaly, co dělají.

Na zajímavý kontrast upozorňuje Dantzig (1930). Dítě, které počítá na prstech, se učí odlišovat základní číslovky a číslovky řadové. Pokud chce vyjádřit, že na stole leží čtyři předměty, pak ukáže čtyři prsty a pátý nechá skrčený. Pokud ale chce k informaci o čtyřech předmětech teprve dojít, musí je spočítat. V tu chvíli zvedá prsty postupně (první, druhý, třetí …). Clauss (Clauss a Hiebsch, 1960) píše o tříletém Michalovi, který dokáže napočítat do pěti na prstech. S jedničkou zvedne jeden prst, s dvojkou druhý atd. Když se dopočítá pěti, nedokáže už odpovědět na otázku, kolik má prstů a proces stále dokola opakuje.

Teprve po dvanáctém roku života je dítě schopno provádět své výpočty na základě hypoteticko-deduktivním, vyvozovat poznatky z předchozích výpočtů, a tak abstraktně uvažovat o možném řešení (Novák, 2004).

Novák (2010) rozlišuje utváření matematických představ obdobně jako Košč, a to na klasifikaci podle podobnosti, tvoření sérií, ekvivalenci, konzervaci a počítání.

Při třídění předmětů hraje zásadní roli, dle jakého kritéria se tak děje. Je rozdíl, třídíme-li věci dle barvy, tvaru nebo jejich využití. Brian a Goodenought (1929) uvádějí, že tříleté děti třídí předměty raději podle tvaru než barvy. Děti od 3 do 6 let naopak upřednostňují klasifikaci předmětů podle barev. Děti starší 6 let třídí předměty již téměř výhradně podle tvaru.

Sériace je na počátku založená na řazení podle rozdílnosti – dítě si nevšímá, co mají předměty stejné, ale co je na nich rozdílného. Je tedy schopné předměty řadit podle délky. Tato schopnost přichází až kolem šestého roku života. V rozmezí tří až pěti let je sice dítě schopné určit, který předmět je největší a který nejmenší (pokud je mezi nimi velmi výrazný rozdíl), problematický je však výběr předmětu střední velikosti (Košč, 1972). Další fázi sériace Novák označuje jako tranzitivitu. Jde o zacházení s pojmy méně než, více než a stejně. Tranzitivita se neprojevuje až do sedmi let života. Není-li ale poté rozvíjena, nemusí se to pak povést ani ve vyšším věku.

Třetím stupněm je ekvivalence. Jde o srovnání dvou množin na základě počtu jejich prvků. Jde už téměř o abstrakci čísla. Dítě dokáže říct, že množina čtyř kuliček je stejná jako množina čtyř kostek. Následuje tzv. konzervace, jinak řečeno schopnost srovnat množství předmětů bez ohledu na jejich uspořádání. Jednoduše posoudit, že něčeho přibylo nebo ubylo. Novák usuzuje, že pokud takového posouzení není dítě schopno, není připraveno na matematiku základní školy.

Vrcholem utváření matematických představ je počítání, které, jak bylo již zmíněno, souvisí s pochopením číselné řady a schopností danému množství přiřadit odpovídající číslovku. Následným procesem označovaným jako numerace, je osvojení pojmu přirozeného čísla, označovaný jako numerace. Ve škole se děti učí srovnávat, zaokrouhlovat apod. Nejpozději ve 12 letech by mělo být vyvinuto abstraktní myšlení. „Postupně žák dosahuje takového stupně abstrakce, že po přečtení číslovky si nemusí vybavit konkrétní předměty tohoto množství, ale matematicky zapsané číslo chápe jako skupinu o daném počtu prvků“ (Blažková, Matoušková, Vaňurová, Blažek, 2000).

„Při osvojování učiva matematiky jde o specifický proces naučit se používat běžně užívanou soustavu kódů, značek, operačních znaků, číslic a vztahů mezi nimi, které slouží k mezilidské komunikaci. Je zákonité, že každý jedinec nedisponuje stejnými předpoklady stejně kvalitně si takovou dovednost osvojovat, a vznikají tudíž i značné rozdíly mezi žáky“ (Novák, 2010, s. 13).

1 rok	„Jeden a jeden“, příklad manipulace s předměty (začátek počítání).
18 měsíců	Dítě dokáže postavit věž ze tří nebo čtyř kostek. Používá slovo „víc“.
2 roky	Rozlišuje rozdíl mezi „jedna“ a „mnoho“. Říká „dva balónky“, když podává druhý míč.
2,5 roku	Počítá mechanicky: 1, 2, „mnoho“. Dokáže na požádání podat přesně jednu kostku.
3 roky	Dokáže sčítat dva předměty. Na požádání dokáže podat přesně dvě kostky.
4 roky	Počítá 3 předměty se současným ukazováním. Bez ukazování předmětů dokáže počítat, i pokud je jich víc než 3.
5 let	Většina dětí umí sčítat 13 mincí. Třetina dětí dokáže počítat do 30 a více. Nejvíce chyb dělají po čísle 9.
6 let	Umí: počítat do 100; počítat po 5 do 50; správně sčítat v rozsahu 10.
7 let	Umí: počítat po 5 do 100; sčítat v rozsahu 20; odečítat v rozsahu 10.
8 let	Umí: počítat po 2 do 20; počítat po 3 do 30, počítat po 4 do 50; sčítat v rozsahu 25; násobit a dělit s jednoduchými zlomky.
9 let	Zná pojem čísel do 1000 a víc.

Tabulka 1: Tabulka základních matematických schopností vzhledem k věku dítěte

Zdroj: Hurlocková, 1960, s. 498 podle Ilg a Ames 1951

3.2 Matematické myšlení podle Piageta

Jean Piaget je jméno s matematickým myšlením zřejmě nejvíce spojené. Ačkoliv se Piaget ve své práci explicitně nezaměřuje na matematické myšlení, ukazuje se, že vývin dětského myšlení je vlastně paralelní k vývinu myšlení v matematice. Je to i důvod, proč se o myšlení a matematickém myšlení hovoří přinejlepším po dosažení dospělosti. Vývoj myšlení v pozdějším věku už není objektivně pozorovatelný, je tak pro vědecké účely takřka zanedbatelný.

Piaget rozdělil vývoj myšlení do 4 kategorií:

1) **Senzomotorické stádium (narození – 2 roky)**

V tomto stádiu dítě provádí motorickou činnost - může pohybovat s drobnými předměty. Třebaže se může místy jednat o smysluplnou manipulaci (dítě si podá hračku blíž k sobě apod.), tato činnost se však neinternalizuje. Zajímá se při tom jen o předměty, které jsou v jeho percepčním poli.

2) Předoperační stádium (2-7 let)

Předoperační stádium je spojeno s nástupem řeči a dozráváním symbolických funkcí. Jde o dobu, kdy se dítě učí po rodičích opakovat názvy číslic a počítat s pomocí prstů. Po většinu tohoto období ale nemá spojené názvy číslic s množstvím.

3) Stádium konkrétních operací (7-12 let)

Toto období Piaget (1970, s. 87) popisuje jako *„Operační grupování myšlení, týkající se předmětů, se kterými se dá manipulovat nebo které si můžeme názorně představit."* Důležitý je zde právě pojem operací – jde o postup, kde už nezaujímá hlavní místo pokus a omyl, ale činnost je zvnitřněná. To znamená, že mnoho kroků, které dítě dříve řeší pokusem, dokáže provést v hlavě a vyhodnotit, které kroky budou milné a které ne. Přidruženým procesem k operacím je vznik soustav. Piaget tvrdí, že se operace nikdy nevyskytuje samostatně, ale ve vztahu k souvisejícím.

Operace jsou logické, dítě rozlišuje celek a části, chápe, že celek je spojením částí apod. Chápe systém řady a seskupování čísel do systému, ve kterém jedno předchází druhému. Podstatnou nově získanou schopností je generalizace. Dítě dokáže využít zkušenosti a aplikovat získaný výsledek na podobné příklady (Piaget, 1970).

4) Stádium formálních operací

V posledním stádiu jde o hypoteticko-deduktivní usuzování. Myšlení dítěte už nezáleží jen na věcech představitelných nebo do představ přenositelných. *„Dítě může myslet na možné proměnné a může deduktivně vyvozovat možné vztahy, které později můžou být ověřeny experimentem nebo pozorováním"* (Bruner, 1965, s. 43). Obecně lze říci, že ve stádiu formálních operací přichází v plné míře abstraktní myšlení.

Piagetovy výzkumy byly v průběhu 20. století několikrát zopakovány a napodobeny. Nutno říct, že obvykle se výsledky opakovaných pokusů shodovaly s původními (Košč, 1972). Přesto je Piaget právem kritizován za nedostatky ve své teorii. Nerozlišuje v nich totiž mezi biologickým vývojem a tím, nakolik je dítě ovlivněno kulturou a vzděláním. Stejně tak neuvažuje o dalším možném vývoji myšlení, považuje tedy stádium formálních operací za konečné a myšlení v tomto stádiu pravděpodobně přeceňuje (Košč, 1972).

4 Závislost pohlaví na schopnosti matematického myšlení

Žádný z výše uvedených autorů nerozlišuje mezi myšlením ženským a mužským, natož že by byl mezi pohlavími rozdíl na poli matematického myšlení. I vývojová psychologie velmi málo kdy odlišuje mezi vývojem chlapců a děvčat. Lze usuzovat, že se nejedná o efekt genderové rovnosti, který je v posledních letech aktuálním tématem, ale spíše o fakt, že se v této oblasti zásadní rozdíly zkrátka nevyskytují.

Přesto je fungujícím stereotypem, že chlapci mají větší nadání pro matematiku než dívky. Osobně jsem byla i na akademické půdě svědkem výroku, že žena je schopná se matematiku naučit, ale ne ji pochopit. I přes více či méně komerční kampaně, jako je L'Oréal For Women In Science, který vznikl už v roce 1998 (L'Oréal Česká republika, 2017), upozorňující na plnohodnotnost žen v matematických oborech, se nedaří tento stereotyp odbourat. V České republice vzniklo dokonce kontroverzní náborové video na Vysoké učení technické v Brně s názvem „Sem patřím", které vyzývá dívky, aby studovaly technické obory a nepodléhaly nátlaku, že jako ženy toto studium nezvládnou nebo se k němu nehodí.

Článek Gender Similarities Characterize Math Performance (Hyde, 2008) pojednávající o standardizovaném testování žáků v USA potvrzuje, že právě přetrvávající názor rodičů a učitelů, že ženy automaticky vykazují horší matematické schopnosti, je důvodem, proč je žen na vědeckých pozicích stále nesrovnatelně méně než mužů. Na podobný problém upozorňuje i Košč, který říká, že je vztah k matematice podmíněn tím, co dítě slyší od rodičů. Pokud tedy rodič říká, že matematice nikdy nerozuměl, dítě se identifikuje s tím, že je také předurčeno ke slabším výkonům. Stejně je tomu tehdy, pokud ve škole klade vyučující vyšší očekávání v matematických schopnostech na chlapce než na dívky. S tímtéž názorem přišla v roce 2011 i studie The Role of Parents and Teachers in the Development of Gender-Related Math Attitudes (Gunderson, Ramirez, Levine, Beilock, 2011), která výslovně uvádí: *„Dívky mají větší tendenci k negativním matematickým postojům, včetně genderových stereotypů, sebehodnocení a úzkosti než chlapci. Tyto postoje hrají klíčovou roli v matematickém výkonu. … Specifické chování rodičů a přesvědčení učitelů o matematických schopnostech dětí mohou vést ke zlepšení dětského přístupu k matematice."*

Stejnou tématikou, tentokrát však aplikovanou na dospělé ženy, přišla studie The Costs of Accepting Gender Differences: The Role of Stereotype Endorsement in Women's Experience in the Math Domain (Schmader, Johns, Barquissau, 2004). Studie byla zaměřena tak, aby odhalila, zda má ženská náchylnost ke stereotypu vliv na jejich kariéru. Studie se zabývala ženami, které pracují v matematických oborech. Výsledky ukázaly, že ženy, které se ke stereotypu vyjádřily jako ke skutečnému, vykazovaly nižší sebehodnocení v matematických schopnostech a nižší zájem o případné další studium v tomto oboru.

„Jinými slovy ženy, které mají tendenci se domnívat, že rozdíly stavu mezi muži a ženami jsou spravedlivé a legitimní, mají také tendenci podpořit myšlenku, že ženy jsou méně matematicky schopné než muži."

Podobný koncept, aplikovaný na dětech ve věku 5-6 let, provedla studie Math–Gender Stereotypes in Elementary School Children (Cvencek, Meltzoff, Greenwald, 2011). Výsledek se v zásadě nelišil od dospělých. Děti k výrokům přiřazovaly obrázek chlapce nebo dívky podle toho, o kom výrok spíš vypovídá. Dostávaly přitom věty typu „záliba v matematice; víc toho přečte; chuť více se věnovat matematice" apod.

Výsledky ukázaly, že už děti na začátku základní školy operují s myšlenkou, že jsou chlapci pro matematiku předurčeni více než dívky. Nejen, že byli chlapci oběma pohlavími hodnoceni v matematických otázkách jako vhodnější a lepší, ale i sebehodnocení obou pohlaví zvlášť tento znak potvrdilo.

Přesto jsem nenalezla výzkum, jenž by pravdivost tohoto stereotypu prokázal konkrétním měřením výsledků, kterých dosahují obě pohlaví. Mnoho žen se v minulosti prosadilo v oboru matematiky a zasloužilo se o mnohé technické vymoženosti. Přesto zůstává pomyslným pravidlem, že je matematické myšlení dominantou mužů. Z uvedených výzkumů je patrné, že tento vžitý pohled realitu spíše ovlivňuje, než že by jí byl.

Zcela jistě by stálo za to provést experiment, jenž by se zaměřil na výchovu dětí, které jsou vychovávány k možnosti rovných výsledků v oblasti matematických schopností a myšlení. Hlavním argumentem je zřejmě přílišná náročnost podobného výzkumu s ohledem na nalezení relevantních kritérií, podle kterých by bylo možné obě pohlaví skutečně srovnávat. Můžeme se sice orientovat už jen z výše zmiňovaných plošných testování žáků, stále v nich však hraje roli způsob, jakým jsou děti k matematice vedeny. Schopnost nebo úroveň myšlení jen těžce porovnáme na schopnosti rychlého sčítání nebo násobení číslic.

Závěr

V bakalářské práci Matematické myšlení jsem se pokusila shrnout základní fakta o tom, co je to matematické myšlení. Jejím cílem bylo přinést čtenáři srozumitelný pohled na toto téma a vést k uvědomění skutečnosti, jak nedílnou součástí našeho života tento způsob myšlení je a že by neměl být opomíjen nejen jako kritérium vývoje dětí, ale i jako oblast vzdělání. Tento apel doufám dostatečně ukazuje zejména část o ontogenetickém vývoji matematického myšlení, potažmo matematických schopnostech, ve kterém jsem zmínila řadu konkrétních příkladů.

Tvorba této práce pro mě byla velmi inspirativní a bez nadsázky mohu říci, že i zábavná. Utvrdila mě v myšlence, že matematické myšlení není jen o číslech, výpočtech a matematice samotné, ale že jej užíváme zcela bezděčně ve chvílích, kdy věci srovnáváme nebo vyhodnocujeme. Že se vyvíjí přirozeně a úměrně našim potřebám, které vznikají s rozvojem světa kolem nás. Věřím, že bude mít stejný přínos i pro čtenáře.

Krátkým myšlenkovým přesahem je také poslední část textu dotýkající se omílaného tématu, zda se liší schopnost matematického myšlení v závislosti na pohlaví. Má práce si nekladla za cíl najít řešení na tuto otázku nebo se jí samostatně zabývat. Přesto jsem tuto tématiku musela zmínit s ohledem na snahu komplexního pohledu na téma práce. Zda se liší matematické myšlení žen a mužů, by mohlo vydat na celý samostatný výzkum, což nakonec uvádím v samotném textu práce. Považuji ale za důležité alespoň se nad takovými a jim podobnými aspekty myšlení zamýšlet.

Seznam zkratek

PISA – Programme for International Student Assesment

ČŠI – Česká školní inspekce

Seznam použité literatury

ATKINSONOVÁ, R. L. et. al., 2003. *Psychologie*. Praha: Portál. ISBN: 80-7178-640-3.

BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, V., VAŇUROVÁ, M. a M. BLAŽEK, M., 2000. *Poruchy učení v matematice a možnosti jejich nápravy*. Brno: Paido, 2000. ISBN 80-85931-89-3.

BRIAN, C. R. a F. L. GOODENOUGHT, 1929. The relative potency of colour and form perception at various ages. *Journal of Experimental Psychology*. Vol 12(3), 197-213.

BRUNER, J. S., 1965. *O poznání, II. Hledání jasnosti*. Praha.

CANISA, M. (1962). Mathematical ability as related to reaoning and use of symbols. *Educ. Psychol. Measurement.* Roč. 22, s. 105-127.

CLAUSS, G. a H. HIEBSCH, 1960. *Kinderpsychologie*. Berlin: Vol kund Wissen.

CVENCEK, D., MELTZOFF, A. N., GREENWALD, A. G., 2011. Math–Gender Stereotypes in Elementary School Children. *Child Development.* Vol. 82, No. 3, p. 766–779.

Česká školní inspekce, 2017. PISA. *Csicr.cz* [online]. © 2017 [cit. 2017-03-26]. Dostupné z: http://www.csicr.cz/Prave-menu/Mezinarodni-setreni/PISA

DANTZIG. T., 1930. *Number – the Language of Science*. London: Allen and Unwin.

GREWEL, F. 1952. *Acalculia*. *Brain*. Roč. 75, č. 3, s. 397-467.

GUNDERSON, E. A., RAMIREZ, G., LEVINE, S. C., BEILOCK, S. L., 2011. The Role of Parents and Teachers in the Development of Gender-Related Math Attitudes. *Sex Roles*. Vol. 66, p. 153-166.

HÉCAEN, H.; de Ajuriaguerra, J. (1955). *Le syndrome paraxique et gnostique au cours des lésions de l´hémisphéres droit et gauche dans les troubles des fonctions symboliques*, Presse Med. Č. 105, s. 85-103.

HENSCHEN S. E., 1920. *Klinische und anatomische Beiträge zur Pathologie des Gehirns*, Stockohlm: Nordiska Bokhandeln.

HOMOLA, M., 1992. *Dějiny psychologie*. Olomouc: Univerzita Palackého. ISBN: 80-7067-076-2.

HYDE, J. S., 2008. Gender Similarities Characterize Math Performance. *Science.* Vol. 321, p. 494-495.

KOŠČ, L., 1972. *Psychológia matematických schopností*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

LÉVY-BRUHL, L. 1926. *How Natives Think*. London: Alle and Unwin.

L'ORÉAL Česká republika s.r.o., 2017. Hledáme vědkyně. *Prozenyvevede.cz* [online]. © 2017 [cit. 2017-03-26]. Dostupné z: http://www.prozenyvevede.cz/cs-CZ/uvod.html

LURIJA, A. R. 1940. *Učenie ob afaziji v svete mozgovej patologii*. (NEPUBLIKOVANÉ)

NEUHAUS, W., 1955. *Der Aufbau der gestigen Welt des Kindes*. München: Basel.

NOVÁK, J., 2004. *Dyskalkulie: metodika rozvíjení základních početních dovedností*. Havlíčkův Brod: Tobiáš. ISBN 80-731-1029-6.

PIAGET, J., 1970. *Psychologie dítěte*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

PLHÁKOVÁ, A., 2005. *Učebnice obecné psychologie.* Praha: Academia. ISBN 978-80-200-1499-3.

REMPLEIN, H., 1955. *Die seelische Entwicklung des Menschen im Kindes – und Jugendalte*. München: Basel.

SCHMADER, T., JOHNS, M., BARQUISSAU, M., 2004. The Costs of Accepting Gender Differences: The Role of Stereotype Endorsement in Women's Experience in the Math Domain. *Sex Roles.* Vol. 50, Nos. 11/12, p. 835-850.

STRUIK, D. J., 1963. *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis.

ŠTEFANOVIČ, J., 1963. *Psychológia a metodika pracovného a výrobného vyučovania*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

VÁGNEROVÁ, M., 2012. *Vývojová psychologie*. Praha: Karolinum. ISBN 978-802-4608-560.