



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ**

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

**ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ**

DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

**NEGACE VE FUZZY LOGICE**

NEGATIONS IN FUZZY LOGIC

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**LUKÁŠ DEKRÉT**

**VEDOUcí PRÁCE**

SUPERVISOR

**Doc. RNDr. DANA HLINĚNÁ, Ph.D.**

BRNO 2018

## Vysoké učení technické v Brně - Fakulta informačních technologií

Ústav inteligentních systémů

Akademický rok 2017/2018

### Zadání bakalářské práce

Řešitel: **Dekrét Lukáš**  
Obor: Informační technologie  
Téma: **Negace ve fuzzy logice**  
**Negation in Fuzzy Logic**  
Kategorie: Teoretická informatika

#### Pokyny:

1. Seznamte se s definicemi, vlastnostmi a základními konstrukcemi fuzzy negací, triangulárních norem a konorem.
2. Zkoumejte vlastnosti involutivních fuzzy negací.
3. Určete podmínky, za kterých z triangulární normy a fuzzy negace vznikne triangulární konorma.
4. Využijte získané výsledky při modelování fuzzy negace na základě empirických dat.
5. Zhodnoťte dosažené výsledky a diskutujte možnosti jejich zobecnění.

#### Literatura:

- Alsina, C., Schweizer, B. a Frank, M. Associative Functions: Triangular Norms and Copulas. [b.m.]: World Scientific, 2006. ISBN 981-256-671-6.
- Klement, E., Mesiar, R. a Pap, E. Triangular Norms. [b.m.]: Springer, 2000. Trends in logic, Studia logica library. ISBN 9780792364160.
- Havlena, V. Konjunkce a disjunkce ve fuzzy logice, bakalářská práce, Brno, FIT VUT v Brně, 2015.

Pro udělení zápočtu za první semestr je požadováno:

- První tři body zadání.

Podrobné závazné pokyny pro vypracování bakalářské práce naleznete na adrese <http://www.fit.vutbr.cz/info/szz/>

Technická zpráva bakalářské práce musí obsahovat formulaci cíle, charakteristiku současného stavu, teoretická a odborná východiska řešených problémů a specifikaci etap (20 až 30% celkového rozsahu technické zprávy).

Student odevzdá v jednom výtisku technickou zprávu a v elektronické podobě zdrojový text technické zprávy, úplnou programovou dokumentaci a zdrojové texty programů. Informace v elektronické podobě budou uloženy na standardním nepřepisovatelném paměťovém médiu (CD-R, DVD-R, apod.), které bude vloženo do písemné zprávy tak, aby nemohlo dojít k jeho ztrátě při běžné manipulaci.

Vedoucí: **Křena Bohuslav, Ing., Ph.D.**, UITS FIT VUT  
Konzultant: Hliněná Dana, doc. RNDr., Ph.D., UMAT FEKT VUT  
Datum zadání: 1. listopadu 2017  
Datum odevzdání: 16. května 2018

**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**  
Fakulta informačních technologií  
Ústav inteligentních systémů  
602 00 Brno, Božetěchova 2

---

doc. Dr. Ing. Petr Hanáček  
vedoucí ústavu

## Abstrakt

Táto práca sa venuje fuzzy logickým spojkám, najmä negátorom, ich vlastnostiam a konštrukciám. Zamerali sme sa aj na trojuholníkové normy a konormy, teda na funkcie, ktoré sa často používajú na modelovanie fuzzy konjunkcie a disjunkcie. Ukázali sme možnosti konštrukcie trojuholníkových noriem a konormiem pomocou involutívnych negátorov. Ďalej sa v práci venujeme aproximácii funkcie, vytvorenej na základe empirických dát ku známemu fuzzy negátoru.

## Abstract

This thesis deals with fuzzy logical connections, mainly negations, their properties and constructions. We focused our attention on triangular norms and conorms, which are often used for modeling of fuzzy conjunction and disjunction. We showed the possibilities of constructions of triangular norm and conorm using involutive negations. Furthermore, we dealt with approximation of function, which was created using empirical data to well known fuzzy negator.

## Kľúčové slová

fuzzy negátory, trojuholníkové normy, trojuholníkové konormy, metóda najmenších štvorcov, b-spline krivky

## Keywords

fuzzy negations, triangular norms, triangular conorms, least squares method, b-spline curves

## Citácia

DEKRÉT, Lukáš. *Negace ve fuzzy logice*. Brno, 2018. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií. Vedoucí práce Doc. RNDr. Dana Hliněná, Ph.D.

# Negace ve fuzzy logice

## Prehlásenie

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne pod vedením pani doc. RNDr. Dany Hliněnej, Ph.D. Uviedol som všetky literárne pramene a publikácie, z ktorých som čerpal.

.....  
Lukáš Dekrét  
10. mája 2018

## Podakovanie

Veľké poďakovanie patrí doc. RNDr. Dany Hliněnej, Ph.D. a Ing. Bohuslavovi Křenovi, Ph.D. za odborné vedenie tejto práce, cenné rady a ústretovosť pri konzultáciách.



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Fuzzy negátory, definície a vlastnosti</b>	<b>4</b>
2.1	Konštrukcie fuzzy negátorov . . . . .	6
2.2	Konštrukcie fuzzy negátorov založené na pseudoinverzných funkciách . . . . .	7
2.3	Pevné body fuzzy negátorov . . . . .	10
2.4	Pevné body a $\rho$ -transformácie fuzzy negátorov . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Trojuholníkové normy, definície a vlastnosti</b>	<b>18</b>
3.1	Vlastnosti trojuholníkových noriem . . . . .	20
3.2	Aditívne a multiplikatívne generátory . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Trojuholníkové konormy, definície a vlastnosti</b>	<b>24</b>
4.1	Vlastnosti trojuholníkových konoriem . . . . .	26
4.2	Konštrukcie trojuholníkových konoriem . . . . .	27
4.3	Vzťahy medzi aditívnymi generátormi t-noriem a s-noriem . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Skladanie konštrukcií t-noriem a s-noriem</b>	<b>32</b>
5.1	Konštrukcia t-noriem a s-noriem pomocou Sugenovho a štandardného negátora	32
5.2	Konštrukcia t-noriem a s-noriem pomocou Yagerovho a štandardného negátora	39
<b>6</b>	<b>Modelovanie fuzzy negátora</b>	<b>47</b>
6.1	Zostavenie a spracovanie dotazníka . . . . .	47
6.2	Implementácia programu . . . . .	48
6.2.1	Ukladanie a načítanie tried . . . . .	48
6.2.2	Proces vykresľovania . . . . .	49
6.3	Vyhodnotenie experimentu . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Záver</b>	<b>51</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>52</b>
<b>A</b>	<b>Obsah CD</b>	<b>53</b>
<b>B</b>	<b>Ukážka aplikácie</b>	<b>54</b>
<b>C</b>	<b>Dotazník</b>	<b>55</b>
<b>D</b>	<b>Popis implementovaných tried</b>	<b>56</b>

# Kapitola 1

## Úvod

V bežnom živote sa často stretávame s vágnymi pojmami. Hľadali sa preto spôsoby, ako tieto pojmy modelovať. Jednou z možností je fuzzy logika. Rozdiel medzi klasickou logikou a fuzzy logikou spočíva v tom, že v klasickej logike máme dve pravdivostné hodnoty (pravda/nepavda), kdežto fuzzy logika má nekonečný počet pravdivostných hodnôt z intervalu  $[0,1]$ . Vďaka tomu je schopná modelovať vágnosť. Fuzzy logika bola aplikovaná do mnohých smerov, cez kontrolné systémy po umelú inteligenciu.

Táto bakalárska práca sa zameriava na skúmanie fuzzy negátorov a ich vlastností, ako aj na vytváranie nových negátorov, pomocou skladania už známych negátorov. Fuzzy negátory, tak ako všetky fuzzy spojky, sú monotónnymi rozšíreniami klasických logických spojok. My sme si v práci všimli vzťahy medzi negátormi a funkciami, ktoré modelujú konjunkciu a disjunkciu. Navyše sme zisťovali, ako ľudia chápu negáciu v bežnom jazyku.

Práca je členená do piatich hlavných kapitol. Kapitola 2 sa zameriava na zhrnutie základných vlastností a definícií negátorov, ktoré sú používané v ďalších častiach práce. V tejto kapitole sú taktiež uvedené niektoré zo základných parametrických i neparimetrických negátorov, ktoré sú pre túto prácu dôležité.

Kapitola 3 je venovaná funkciám, ktoré modelujú vo fuzzy logike konjunkciu, teda trojuholníkovým normám, ich definíciám a vlastnostiam. Ďalšou časťou tejto kapitoly je vysvetlenie spôsobu generovania trojuholníkových noriem pomocou aditívnych alebo multiplikatívnych generátorov. Na príkladoch ukážeme, aké vlastnosti musí spĺňať generátor, aby výsledná funkcia bola trojuholníková norma.

V kapitole 4 sa venujeme funkciám, ktoré modelujú vo fuzzy logike disjunkciu, teda trojuholníkovým konormám, ich definíciám a vlastnostiam. Podobne, ako s trojuholníkovými normami, i tu si predstavíme spôsob generovania trojuholníkových konoriem pomocou aditívnych a multiplikatívnych generátorov. Zameriame sa aj na vzťahy medzi generátormi trojuholníkových noriem a konoriem.

Kapitolu 5 tvorí popis konštrukcie trojuholníkových noriem a konoriem pomocou negátorov.

V poslednej kapitole sa venujeme aproximácii fuzzy negátora na základe empirických dát, čím zisťujeme, ako ľudia chápu negáciu v bežnom jazyku. Táto časť práce nadväzuje na bakalársku prácu Vojtěcha Havlena [3], ktorý modeloval konjunkciu z nameraných dát.

V práci sú použité obvyklé matematické symboly, výnimku tvorí len označenie intervalov, ktoré je nasledovné:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\},$$

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\},$$

$$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\},$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}.$$

Tvrdenia, u ktorých nie je uvedený zdroj, sú vlastné a teoretická časť práce bola zaslaná na ŠVOČ v matematike a informatike.

## Kapitola 2

# Fuzzy negátory, definície a vlastnosti

Podobne, ako v klasickej logike, aj vo fuzzy logike má svoje dôležité miesto unárny logický operátor tzv. fuzzy negátor. Jedná sa o monotónne rozšírenie klasického negátora, teda ho vieme definovať nasledovne:

**Definícia 2.0.1.** [7] Unárny operátor  $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  sa nazýva negátor, ak pre ľubovoľné  $a, b \in [0, 1]$  platí

- (N1)  $a < b \Rightarrow N(b) \leq N(a)$ ,
- (N2)  $N(0) = 1, N(1) = 0$ .

Okrem týchto vlastností majú negátory aj mnohé ďalšie, vďaka ktorým sa delia na rôzne triedy.

**Definícia 2.0.2.** [7] Fuzzy negátor  $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  voláme striktný, ak má nasledujúce dve vlastnosti:

- (N3):  $N$  je spojitá funkcia.
- (N4): Ak  $x < y$  potom  $N(y) < N(x)$ ,  $\forall x, y \in [0, 1]$ .

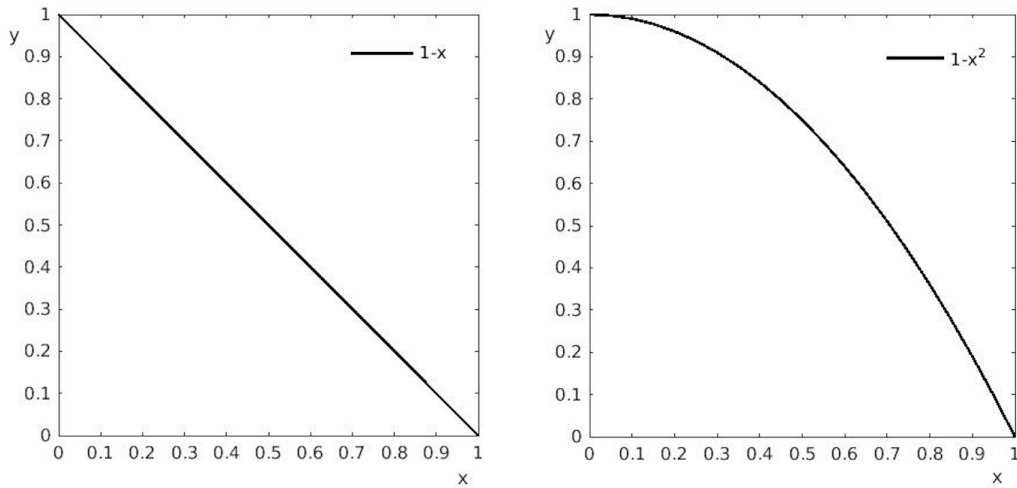
V prípade, že negátor  $N$  spĺňa involutívnosť, teda ak:

- (N5):  $N(N(x)) = x, \forall x \in [0, 1]$ ,

hovoríme o silnom fuzzy negátore.

Všimnime si dve funkcie  $h(x) = 1 - x$  a  $f(x) = 1 - x^2$ , (obr. 2.1). Obidve spĺňajú vlastnosti (N1) až (N4), takže sa jedná o striktné fuzzy negátory. Navyše  $h$  na rozdiel od  $f$  je aj involutívna, (spĺňa (N5)), teda je to silný fuzzy negátor. Negátor  $h$  vo svojej práci predstavil Lotfi A. Zadeh, [9]. Ďalej s ním budeme pracovať pod menom *štandardný negátor* a označovať ho budeme symbolom  $N_S$ . Z vlastností a príkladov, ktoré sme uviedli je zrejmé, že nie každý striktný fuzzy negátor musí byť silný. Dá sa dokázať, že každý silný negátor je zároveň striktný.

Pri negátoroch môžeme uvažovať o čiastočnom usporiadaní. Nech máme dva fuzzy negátory  $N_1, N_2$ . Hovoríme, že  $N_1 \leq N_2$ , ak pre každé  $x \in [0, 1]$ ,  $N_1(x) \leq N_2(x)$ . Vďaka tomu môžeme hovoriť o najmenšom  $N_{\perp}$  a najväčšom  $N_{\top}$  negátore:



Obr. 2.1: Funkcie  $h(x)$  naľavo a  $f(x)$  napravo.

- Gödelov negátor

$$N_{\perp} = \begin{cases} 0, & \text{ak } x > 0, \\ 1, & \text{ak } x = 0, \end{cases}$$

- Duálny Gödelov negátor

$$N_{\top} = \begin{cases} 0, & \text{ak } x = 1, \\ 1, & \text{ak } x < 1. \end{cases}$$

Okrem spomínaných negátorov, poznáme mnohé ďalšie negátory, dokonca parametrické triedy negátorov. Uvedieme aspoň tie najznámejšie:

- Prahové negátory

$$N_{\theta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \leq \theta, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases} \quad \theta \in [0, 1[,$$

- Sugenove negátory

$$N_{Su}^c(x) = \frac{1-x}{1+cx}, \quad c \in ]-1, \infty],$$

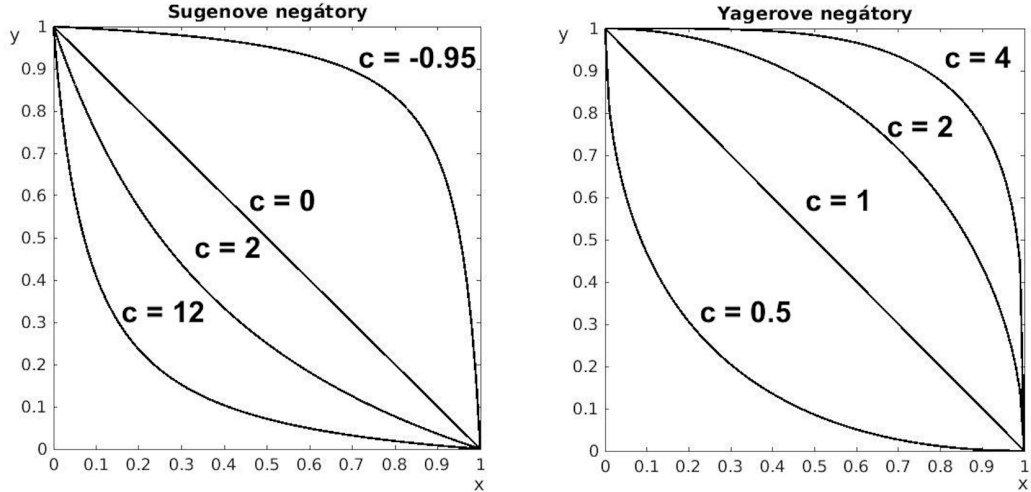
- Yagerove negátory

$$N_Y^c(x) = (1-x^c)^{\frac{1}{c}}, \quad c \in ]0, \infty].$$

Ďalej sa budeme venovať Sugenovým a Yagerovým negátorom. Pozrieme sa na niektoré ich vlastnosti a odvodíme súvislosti, ktoré z toho vyplývajú. Ako prvú vlastnosť si všimneme spojitosť. Na intervale  $[0, 1]$  sú Sugenove i Yagerove negátory spojité. Parameter  $c$  len upravuje výsledný tvar negátora, čo ukazujú i nasledujúce obrázky.

Obidve triedy negátorov sú bijektívne a klesajúce, teda platí aj vlastnosť (N1). Po dosadení do vzorca je  $N_{Su}/N_Y(0) = 1$  a  $N_{Su}/N_Y(1) = 0$ , teda platí i (N2). Jednoduchým výpočtom sa ukáže, že platí i vlastnosť (N4), a teda Yagerove a Sugenove negátory sú striktné.

Ďalšou z vlastností, ktoré si všimáme, je involutívnosť, (N5). Involutívnosť je zovšeobecnenie zákona dvojitej negácie. V klasickej logike s pravdivostnými hodnotami 1, 0 je



Obr. 2.2: Sugenove a Yagerove negátory s vyznačenými parametrami.

splnená automaticky, pretože platí:  $N(N(0)) = 0$  a  $N(N(1)) = 1$ . V úvode sme ukázali, že nie všetky fuzzy negátory musia byť involutívne. Zameriame sa postupne na Sugeno a Yagerove negátory a zistíme, ako sú na tom s involutívnosťou. Priamym dosadením dostaneme:

$$N_{Su}(N_{Su}(x)) = N_{Su}\left(\frac{1-x}{1+cx}\right) = \frac{1+cx-1+x}{1+cx+c-cx} = \frac{x(1+c)}{1+c} = x,$$

$$N_Y(N_Y(x)) = N_Y\left(\left(1-x^c\right)^{\frac{1}{c}}\right) = \left(1-\left(\left(1-x^c\right)^{\frac{1}{c}}\right)^c\right)^{\frac{1}{c}} = x.$$

Zrejme obidve triedy negátorov sú involutívne, teda sú silné.

## 2.1 Konštrukcie fuzzy negátorov

Negátory môžeme konštruovať pomocou generátorov, teda pomocou funkcií  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , ktoré sú spojité, ostro rastúce a spĺňajú podmienky  $g(0) = 0, g(1) = 1$ . Spôsob generovania je daný vzťahom:

$$N_g(x) = g^{-1}(1 - g(x)). \quad (1)$$

Zrejme  $N_g(0) = g^{-1}(1 - g(0)) = g^{-1}(1) = 1$  a  $N_g(1) = g^{-1}(1 - g(1)) = g^{-1}(0) = 0$ . Vlastnosť (N1) je pre  $N_g$  tiež splnená, lebo  $1 - g$  je ostro klesajúca a  $g^{-1}$  ostro rastúca funkcia.

Sugenove negátory generujeme pomocou funkcie

$$g_c(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+cx)}{\ln(1+c)} & \text{ak } c \in ]-1, 0[ \cup ]0, \infty[, \\ x & \text{ak } c = 0, \end{cases}$$

a generátor pre Yagerove negátory má tvar:

$$g_c(x) = x^c.$$

Nie pre každý negátor existuje takýto generátor. Existuje však vzťah medzi existenciou generátora a silnými negátormi.

**Tvrdenie 2.1.1.** [7] Funkcia  $N_g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je silný fuzzy negátor práve vtedy, keď existuje spojitá rastúca funkcia  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  s vlastnosťami  $g(0) = 0$  a  $g(1) = 1$  taká, že pre každé  $x \in [0, 1]$  platí:

$$N_g(x) = g^{-1}(1 - g(x)).$$

Túto konštrukciu sa pokúsime zovšeobecniť pre ľubovoľnú neklesajúcu funkciu  $g$ . Najskôr však musíme vyriešiť problém inverznej funkcie.

## 2.2 Konštrukcie fuzzy negátorov založené na pseudoinverzných funkciách

Na jednoduchých príkladoch si vysvetlíme princíp monotónneho rozšírenia klasického inverzného zobrazenia.

**Definícia 2.2.1.** [4] Nech  $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$  je neklesajúca funkcia, potom pre každé  $y \in [c, d]$  je predpisom

$$g^{(-1)}(y) = \sup\{x \in [a, b]; f(x) < y\}$$

definovaná pseudoinverzná funkcia  $g^{(-1)}$  k danej funkcii  $g$ .

**Príklad 2.2.1.** Nech  $g_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je daná predpisom:

$$g_1(x) = \begin{cases} 2x & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ \frac{1}{2} & \text{ak } x \in ]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ x & \text{ak } x \in ]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Funkcia  $g_1$  nie je síce bijekcia, ale na intervale  $[0, \frac{1}{4}]$  je funkcia  $g_1$  spojitá a injektívna, preto na ňom môžeme nájsť inverznú funkciu  $g_1^{-1}/[g(0), g(\frac{1}{2})]$ . Podobná situácia je na intervale  $] \frac{1}{2}, 1]$ . Pseudoinverzná funkcia je teda daná takto:

$$g_1^{(-1)}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ x & \text{ak } x \in ]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

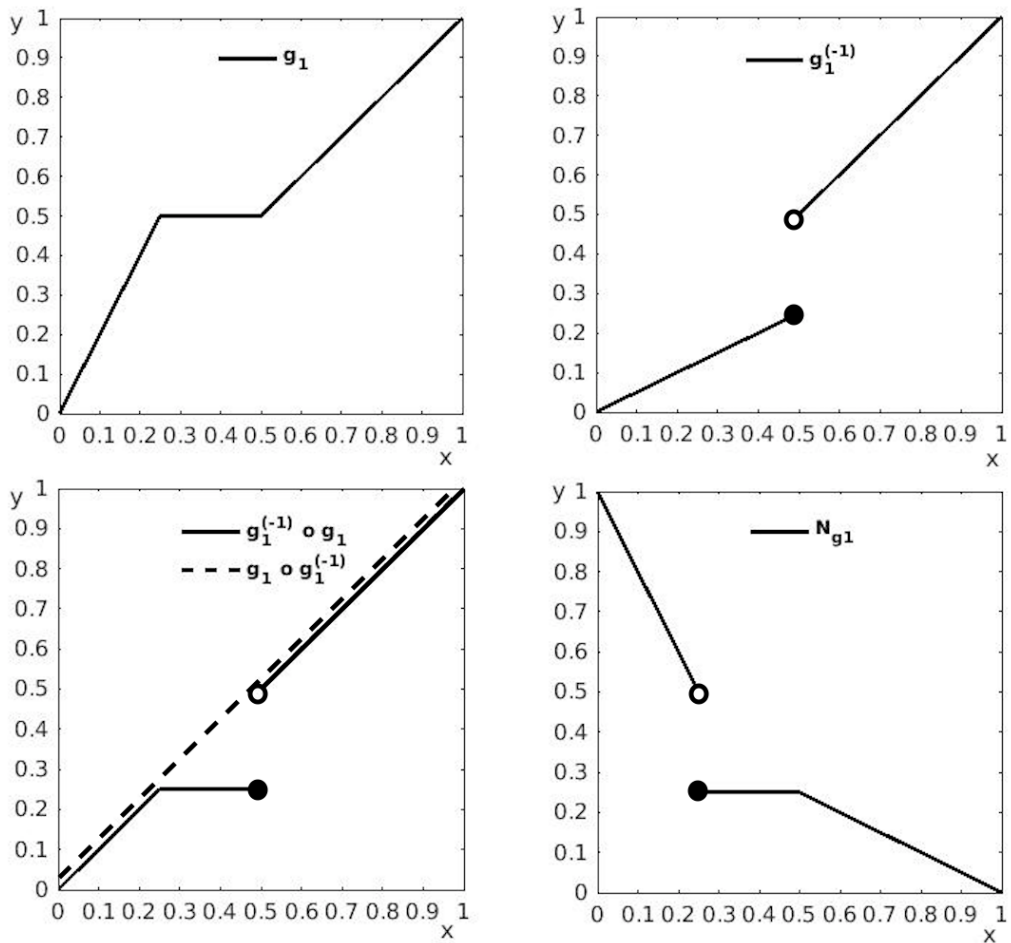
Všimnime si, že zložením funkcií  $g_1 \circ g_1^{(-1)}$  je identita, no  $g_1^{(-1)} \circ g_1$  nie je identita.

Ak si vo vzťahu (1) nahradíme funkciu  $g^{-1}$  funkciou  $g_1^{(-1)}$  a funkciu  $g$  funkciou  $g_1$ , dostaneme funkciu  $N_{g_1}$ , ktorá spĺňa vlastnosti negátora:

$$N_{g_1}(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{4}[, \\ \frac{1}{4} & \text{ak } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x & \text{ak } x \in ]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

**Príklad 2.2.2.** Nech  $g_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je daná predpisom:

$$g_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ x & \text{ak } x \in ]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Obr. 2.3: Funkcie  $g_1$ ,  $g_1^{(-1)}$ ,  $g_1 \circ g_1^{(-1)}$ ,  $g_1^{(-1)} \circ g_1$  z príkladu 2.2.1 a negátor  $N_{g_1}$ .

I napriek tomu, že funkcia  $g_2$  je injektívna a existuje ku nej inverzná funkcia, nie je surjektívna, a preto jej inverzná funkcia nie je definovaná na celom intervale  $[0, 1]$ . Jej monotónne rozšírenie na intervale  $[0, 1]$  je dané predpisom

$$g_2^{(-1)}(x) = \begin{cases} 2x & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ \frac{1}{2} & \text{ak } x \in ]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ x & \text{ak } x \in ]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

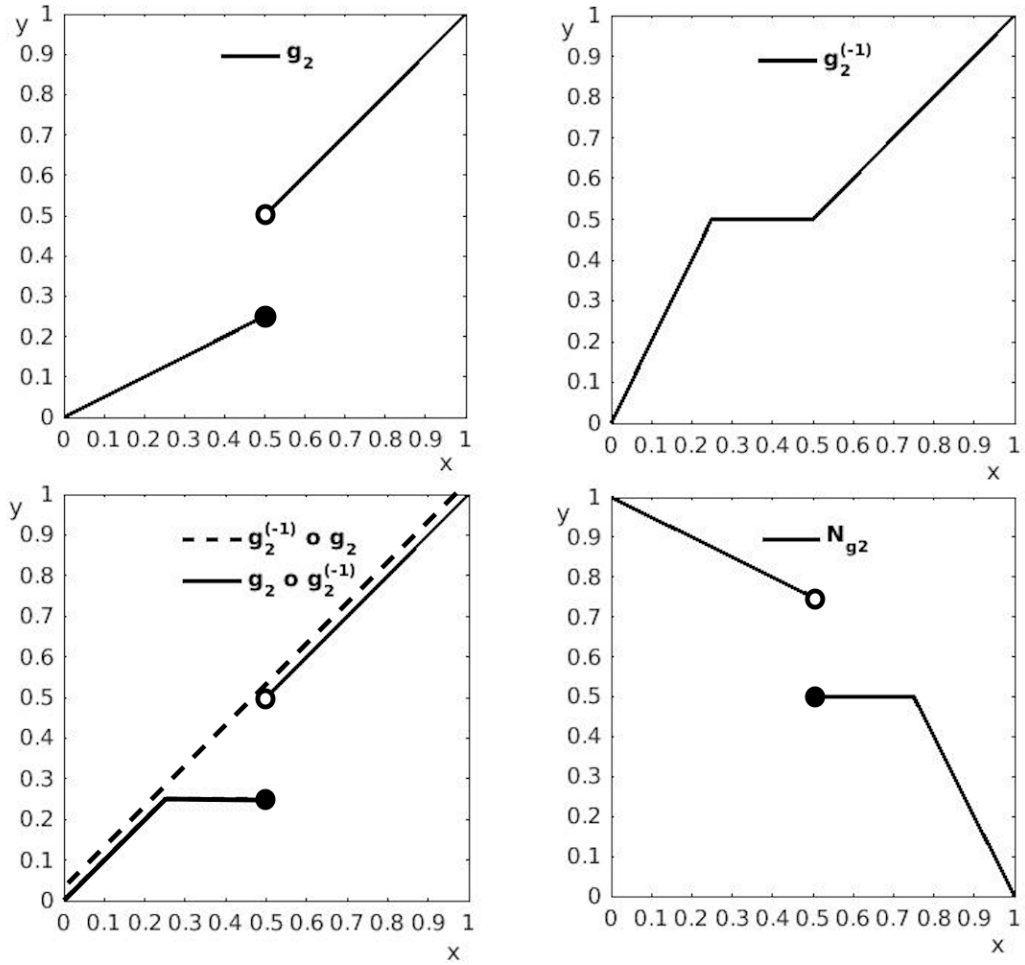
Zložením funkcií  $g_2^{(-1)} \circ g_2$  je identita, no  $g_2 \circ g_2^{(-1)}$  nie je identita.

Ak vo vzťahu (1) znovu nahradíme funkciu  $g^{-1}$  funkciou  $g_2^{(-1)}$  a funkciu  $g$  funkciou  $g_2$ , dostaneme funkciu  $N_{g_2}$ , ktorá tiež spĺňa vlastnosti negátora:

$$N_{g_2}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2} & \text{ak } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ 2 - 2x & \text{ak } x \in ]\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Vďaka predchádzajúcim príkladom vidíme, že negátory sa dajú vygenerovať aj pomocou nespojitých alebo neklesajúcich funkcií  $g$ . Okrajové podmienky výsledného negátora





Obr. 2.4: Funkcie  $g_2$ ,  $g_2^{(-1)}$ ,  $g_2 \circ g_2^{(-1)}$ ,  $g_2^{(-1)} \circ g_2$  z príkladu 2.2.2 a negátor  $N_{g_2}$ .

sú splnené vďaka okrajovým vlastnostiam funkcie  $g$  a jej pseudoinverznej funkcie  $g^{(-1)}$ . Správny typ monotónnosti a spojitosti sprava plynie z vlastností skladania funkcií a typov monotónnosti a spojitosti funkcií  $g$  a  $g^{(-1)}$ . Preto:

**Tvrdenie 2.2.1.** *Nech  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je neklesajúca, zľava spojitá funkcia s vlastnosťami  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$ . Potom funkcia  $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , daná vzťahom  $N(x) = g^{(-1)}(1 - g(x))$ , je nerastúci, sprava spojitý negátor.*

Podobné tvrdenie by sa dalo sformulovať aj pre sprava spojitú, prípadne nespojitú funkciu  $g$ .

**Poznámka 2.2.1.** *Ak použijeme ako generátor funkciu  $g_3 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , danú predpisom:*

$$g_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{ak } x = 1, \end{cases}$$

dostaneme Duálny Gödelov negátor  $N_{\top}$ .

Nakoľko sa v ďalšom texte budeme zaoberať aj nerastúcimi funkciami, tak podobne ako pre neklesajúce funkcie, je pseudoinverzná funkcia definovaná aj pre nerastúce.

**Definícia 2.2.2.** [4] Nech  $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$  je nerastúca funkcia, potom pre každé  $y \in [c, d]$  je predpisom

$$g^{(-1)}(y) = \sup\{x \in [a, b]; f(x) > y\},$$

definovaná pseudoinverzná funkcia  $g^{(-1)}$  k danej funkcii  $g$ .

## 2.3 Pevné body fuzzy negátorov

V tejto časti sa budeme venovať pevným bodom fuzzy negátorov. Hľadanie pevného bodu má najmä v numerickej matematike veľký význam, lebo mnohé úlohy, ktorých zadanie spočiatku vyzerá úplne inak, sa dajú transformovať na problém hľadania pevného bodu. Jedná sa o samodružné body, ktoré sú definované nasledovne:

**Definícia 2.3.1.** [1] Pevným bodom fuzzy negátora  $N$ , nazývame takú hodnotu  $e \in [0, 1]$ , pre ktorú platí  $N(e) = e$ .

Nie každý fuzzy negátor má pevný bod. Jeden taký je napríklad:

$$N(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x > 0.5, \\ 1, & \text{ak } x \leq 0.5. \end{cases}$$

**Tvrdenie 2.3.1.** [1] Ak  $e \in [0, 1]$  je pevný bod negátora  $N$ , potom pre každé  $x \in N$  platí, že ak  $x \leq N(x)$ , potom aj  $x \leq e$  a ak  $N(x) \leq x$ , potom  $e \leq x$ .

Ak je  $N$  striktný/silný negátor, potom vďaka spojitosti, má práve jeden pevný bod. To vo svojej práci [5] dokázali George Klir a Bo Yuan. Vďaka čiastočnému usporiadaniu negátorov platí: Ak  $N_1 \leq N_2$ , potom  $e_1 \leq e_2$ , kde  $e_1, e_2$  sú pevné body  $N_1, N_2$ .

Mnohé negátory majú pevný bod. My sa budeme venovať pevným bodom Sugenových a Yagerových negátorov.

**Príklad 2.3.1.** Pre výpočet pevného bodu pri Sugenových negátoroch potrebujeme vyriešiť nasledujúcu rovnicu:

$$\frac{1-x}{1+cx} = x,$$

po úpravách dostaneme kvadratickú rovnicu:

$$cx^2 + 2x - 1 = 0,$$

pričom pre diskriminant  $D = 4 + 4c$ , musí platiť  $4 + 4c \geq 0$ , teda  $c \geq -1$ . Riešenia rovnice sú:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+c}}{c},$$

kde  $(-1 - \sqrt{1+c})/c$  je záporné, a teda nevyhovuje. Pre kladné riešenie platí:

$$\frac{-1 + \sqrt{1+c}}{c} \in ]0, 1[,$$

preto je pevným bodom Sugenovho negátora  $N_{Su}^c$ . Pre  $c = 0$  dostaneme štandardný negátor  $N_s$ , jeho pevný bod je  $e = \frac{1}{2}$ .

**Príklad 2.3.2.** Ďalšou triedou negátorov, ktoré vyšetříme, budú Yagerove negátory. Teraz budeme riešiť rovnicu:

$$(1 - x^c)^{\frac{1}{c}} = x.$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme výsledok:

$$x = \sqrt[c]{\frac{1}{2}},$$

ktorý evidentne patrí do intervalu  $]0, 1[$ , teda sa jedná o pevný bod negátora  $N_Y^c$ .

## 2.4 Pevné body a $\rho$ -transformácie fuzzy negátorov

Nové fuzzy negátory môžeme konštruovať aj pomocou už známych fuzzy negátorov. Jedna z možností je napríklad  $\rho$ -transformácia negátora.

**Definícia 2.4.1.** [1] Nech  $\rho : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je rastúca bijekcia a  $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  fuzzy negátor. Pod  $\rho$ -transformáciou  $N^\rho$  negátora  $N$  rozumieme funkciu definovanú nasledovne:

$$N^\rho(x) = \rho^{-1}(N(\rho(x))).$$

Tento nový pojem si vysvetlíme na konkrétnych príkladoch.

**Príklad 2.4.1.** Funkcia  $\rho(x) = x/(2-x)$  je na intervale  $]0, 1[$  bijekcia a rovnako aj jej inverzné zobrazenie  $\rho^{-1}(x) = 2x/(1+x)$ . Obidva navyše spĺňajú okrajové podmienky  $\rho(0) = 0$  a  $\rho(1) = 1$ . Ako negátor použijeme všeobecný Sugenov negátor. Potom:

$$N_{Su}^\rho(x) = \rho^{-1}\left(\frac{2-2x}{2+(c-1)x}\right) = \frac{1-x}{1+\frac{c-3}{4}x}.$$

Zrejme  $\frac{c-3}{4} \in ]-1, \infty]$ , teda  $N^\rho(x)$  je tiež Sugenov negátor. Všimnime si, že pre  $c = 3$  dostaneme štandardný negátor.

Vzhľadom k tomu, že sa jedná o Sugenov negátor, pre pevný bod platí:

$$e_{N_{Su}^\rho} = \frac{-4 + 2\sqrt{c+1}}{c-3}.$$

Pre parameter  $c = 3$  je pevný bod  $e = \frac{1}{2}$ . Rovnaký predpis dostaneme, ak si zoberieme pevný bod všeobecného Sugenovho negátora a aplikujeme inverzné zobrazenie bijekcie  $\rho$ :

$$\rho^{-1}(e) = \frac{-4 + 2\sqrt{c+1}}{c-3}.$$

**Príklad 2.4.2.** Analogicky skúsime určiť  $\rho$ -transformáciu Yagerovho negátora. Použijeme bijekciu ako v predchádzajúcom príklade a dostaneme:

$$N_Y^\rho(x) = \rho^{-1}\left(\left(1 - \left(\frac{x}{2-x}\right)^c\right)^{\frac{1}{c}}\right) = \frac{2\left(1 - \left(\frac{x}{2-x}\right)^c\right)^{\frac{1}{c}}}{1 + \left(1 - \left(\frac{x}{2-x}\right)^c\right)^{\frac{1}{c}}}.$$

Ako v predchádzajúcom príklade, aj teraz určíme pevný bod novovzniknutého negátora, teda riešime rovnicu:

$$\frac{2 \left(1 - \left(\frac{x}{2-x}\right)^c\right)^{\frac{1}{c}}}{1 + \left(1 - \left(\frac{x}{2-x}\right)^c\right)^{\frac{1}{c}}} = x.$$

Výsledok je:  $e_{N_Y}^\rho = \frac{2 \sqrt[c]{1/2}}{1 + \sqrt[c]{1/2}}$ .

Znovu si môžeme všimnúť, že rovnaký predpis dostaneme, ak zoberieme pevný bod Yagerovho negátora a na ňom aplikujeme inverzné zobrazenie našej bijekcie:

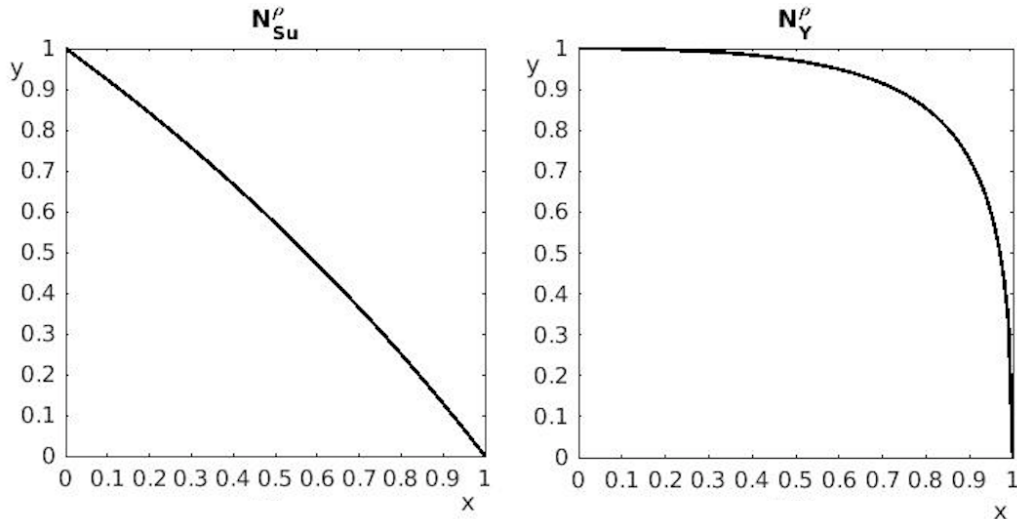
$$\rho^{-1}(e) = \frac{2 \sqrt[c]{1/2}}{1 + \sqrt[c]{1/2}}.$$

Bolo ukázané, že toto nie je náhoda, teda platí:

**Tvrdenie 2.4.1.** [1] *Nech  $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je fuzzy negátor a  $\rho : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je rastúca bijekcia. Ak  $e$  je pevným bodom negátora  $N$ , potom  $\rho^{-1}(e)$  je pevným bodom  $N^\rho$ .*

**Dôkaz.** [1] *Priamym dosadením dostaneme:*

$$N^\rho(\rho^{-1}(e)) = \rho^{-1}(N(\rho(\rho^{-1}(e)))) = \rho^{-1}(N(e)) = \rho^{-1}(e).$$



Obr. 2.5: Negátory z Príkladov 2.4.1 a 2.4.2 s parametrom  $c = 2$ .

**Poznámka 2.4.1.** *Všimnime si funkciu  $\rho_1 = 1 - x$ , ktorá nie je rastúca bijekcia, ale je klesajúca bijekcia a skúsme ju použiť pri  $\rho$ -transformácii negátora  $N_{Su}$ :*

$$N_{Su}^{\rho_1} = \frac{(1+c)(1-x)}{1+c(1-x)}.$$

Znovu sa jedná o negátor. Jeho pevným bodom bude:

$$e_{N_{Su}}^{\rho_1} = \frac{1+c-\sqrt{c+1}}{c}.$$

*I napriek tomu, že sme zmenili monotónnosť bijekcie, výsledok sa nezmení, a platí vzťah  $e_{N_{Su}}^{\rho_1} = \rho_1^{-1}(e)$ . Pre  $c = 0$  opäť dostaneme štandardný negátor a pevný bod  $e = \frac{1}{2}$ .*

Vzhľadom k tomu, že typ monotónnosti bijekcie nie je podstatný, vieme Tvrdenie 2.4.1 zovšeobecniť.

**Tvrdenie 2.4.2.** *Nech  $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je fuzzy negátor a  $\rho : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je bijekcia. Ak  $e$  je pevným bodom negátora  $N$ , potom  $\rho^{-1}(e)$  je pevným bodom  $N^\rho$ .*

Ako dôkaz môžeme použiť dôkaz tvrdenia 2.4.1, lebo sa v ňom nijako nezohľadňuje typ monotónnosti funkcie  $\rho$ . My sa budeme ďalej venovať zovšeobecneniu Tvrdenia 2.4.2 pre ľubovoľné funkcie  $\rho$ . Najskôr si zovšeobecníme Definíciu 2.4.1 pre funkcie  $\rho$ , ktoré nie sú bijektívne.

Zrejme musí platiť  $\rho^{(-1)}(N(\rho(0))) = 1$  a  $\rho^{(-1)}(N(\rho(1))) = 0$ , pričom  $\rho^{(-1)}$  je pseudoinverzná funkcia k  $\rho$ . Najjednoduchší prípad je, ak  $\rho(0) = 0$  a  $\rho(1) = 1$ . Okrajové hodnoty však nemusia byť nutne len z množiny  $\{0, 1\}$ . Ak  $\rho(0) = a > 0$ , potom  $N(a) \in [b, 1]$ , pričom  $b = \inf_{x \in [0, 1]} (\rho^{(-1)}(x) = 1)$ .

Ak  $\rho(1) = a < 1$ , potom  $N(a) \in [0, b]$ , pričom  $b = \sup_{x \in [0, 1]} (\rho^{(-1)}(x) = 0)$ . Ak chceme dostať negátor pre neklesajúce funkcie, musia spĺňať práve jednu z nasledujúcich podmienok:

- (P1):  $\rho(0) = 0 \wedge \rho(1) = 1$ .
- (P2): Ak  $\rho(0) = a > 0$ , tak  $N(a) \in [b, 1]$ ;  $b = \inf_{x \in [0, 1]} (\rho^{(-1)}(x) = 1)$  a ak  $\rho(1) = b < 1$ , tak  $N(b) \in [0, a]$ ;  $a = \sup_{x \in [0, 1]} (\rho^{(-1)}(x) = 0)$ .

Analogicky určíme podmienky aj pre nerastúce funkcie. Opäť je potrebné, aby funkcia  $\rho$  spĺňala práve jednu z nasledujúcich podmienok:

- (P1'):  $\rho(0) = 1 \wedge \rho(1) = 0$ .
- (P2'): Ak  $\rho(0) = a < 1$ , tak  $N(a) \in [0, b]$ ;  $b = \sup_{x \in [0, 1]} (\rho^{(-1)}(x) = 1)$  a ak  $\rho(1) = b > 0$ , tak  $N(b) \in [a, 1]$ ;  $a = \inf_{x \in [0, 1]} (\rho^{(-1)}(x) = 0)$ .

Preto:

**Tvrdenie 2.4.3.** *Ak  $\rho : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je neklesajúca (nerastúca) funkcia a spĺňa podmienky (P1) alebo (P2) ((P1') alebo (P2')), tak funkcia daná predpisom:*

$$N^\rho(x) = \rho^{(-1)}(N(\rho(x))), \quad (2)$$

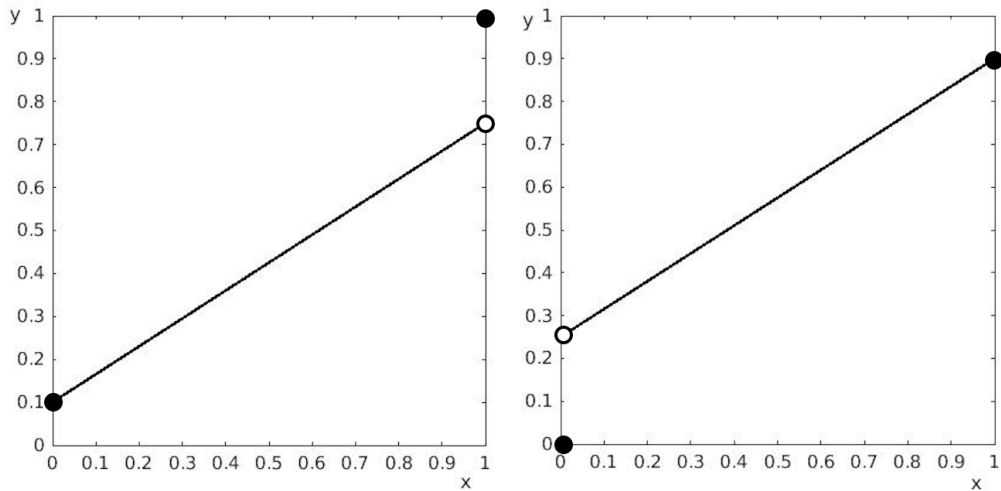
je fuzzy negátor.

Teraz sa už môžeme pokúsiť zovšeobecniť Tvrdenie 2.4.1. Nás teda bude zaujímať, kedy platí:

$$N^\rho(\rho^{(-1)}(e)) = \rho^{(-1)}(e). \quad (3)$$

**Príklad 2.4.3.** *Zoberme si teraz funkciu, ktorá je neklesajúca, ale spojitá, a vytvoríme  $\rho$ -transformáciu negátora  $N_{Su}$ :*

$$\rho_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{2}[, \\ 2x - 1 & \text{ak } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

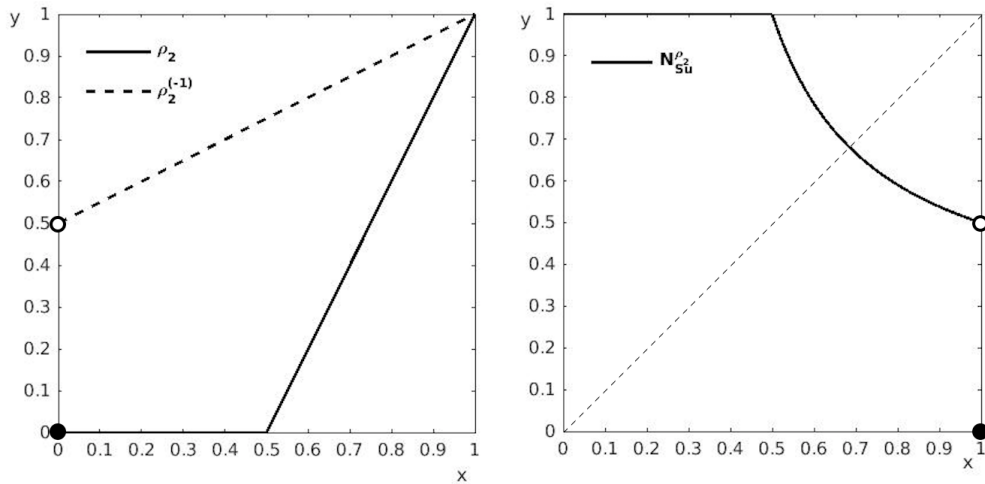


Obr. 2.6: Funkcie spĺňajúce podmienku (P2).

Po aplikovaní vzťahu (2) dostaneme funkciu, ktorá spĺňa vlastnosti negátora:

$$N_{Su}^{\rho_2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{3-2x+2xc-c}{2+2c(2x-1)} & \text{ak } x \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 0 & \text{ak } x = 1. \end{cases}$$

Zložením funkcií  $\rho_2 \circ \rho_2^{(-1)}$  vznikne identita, preto  $\rho_2^{(-1)}(N_{Su}^{\rho_2}(\rho_2(\rho_2^{(-1)}(e)))) = \rho_2^{(-1)}(e)$ , teda pre spojité a neklesajúce funkcie, vďaka vzťahu  $\rho_2 \circ \rho_2^{(-1)}(x) = x$ , platí vzťah (3).



Obr. 2.7: Funkcie a negátor z príkladu 2.4.3.

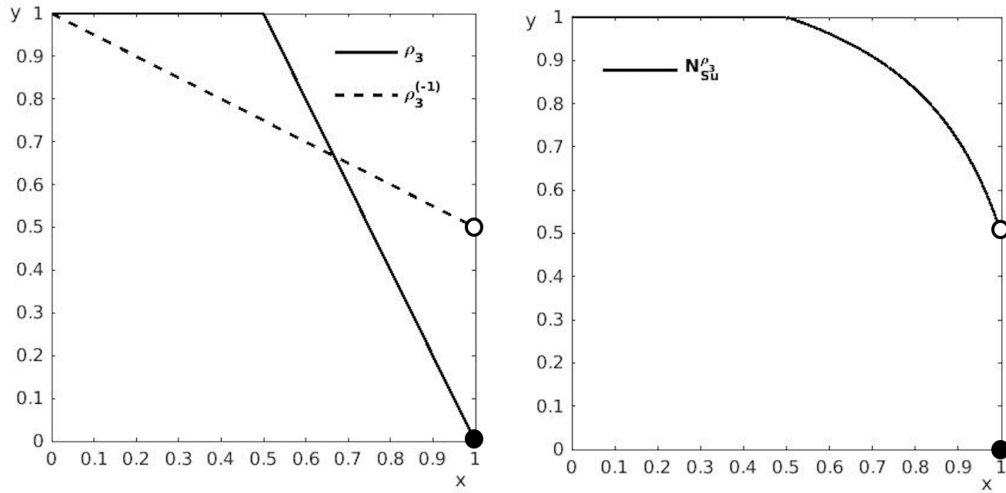
**Príklad 2.4.4.** Zoberme si funkciu, ktorá je nerastúca, ale spojitá a zostrojíme  $\rho$ -transformáciu negátora  $N_{Su}$ :

$$\rho_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2-2x & \text{ak } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Po aplikovaní vzťahu (2) dostaneme funkciu, ktorá splňa vlastnosti negátora:

$$N_{Su}^{\rho_3}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{3+4c-4cx-2x}{2+c(4-4x)} & \text{ak } x \in ]\frac{1}{2}, 1[, \\ 0 & \text{ak } x = 1. \end{cases}$$

Opäť vznikne zložením  $\rho_3 \circ \rho_3^{(-1)}$  identita, preto  $\rho_3^{(-1)}(N_{Su}^{\rho_3}(\rho_3(\rho_3^{(-1)}(e)))) = \rho_3^{(-1)}(e)$ , teda pre spojité nerastúce funkcie, vďaka vzťahu  $\rho_3 \circ \rho_3^{(-1)}(x) = x$ , taktiež platí vzťah (3).



Obr. 2.8: Funkcie a negátor z príkladu 2.4.4.

**Príklad 2.4.5.** Teraz si budeme všimáť nespojité, neklesajúce funkcie. Prvá, ktorú použijeme pri  $\rho$ -transformácii negátora  $N_{Su}$  s parametrom  $c = 2$ , je:

$$\rho_4(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{ak } x \in [0, \frac{3}{4}], \\ \frac{x+1}{2} & \text{ak } x \in ]\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

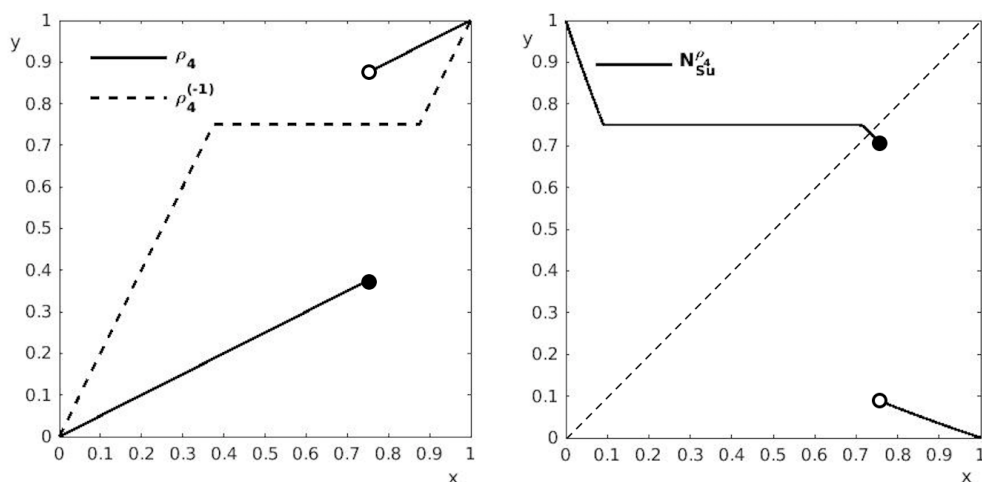
Po aplikovaní vzťahu (2) dostaneme funkciu, ktorá splňa vlastnosti negátora:

$$N_{Su}^{\rho_4}(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{1+x} & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{11}], \\ 0.75 & \text{ak } x \in ]\frac{1}{11}, \frac{5}{7}], \\ \frac{2-x}{1+x} & \text{ak } x \in ]\frac{5}{7}, \frac{3}{4}], \\ \frac{1-x}{2+x} & \text{ak } x \in ]\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Teraz nevznikne zložením  $\rho_4 \circ \rho_4^{(-1)}$  identita, a preto  $\rho_4^{(-1)}(N_{Su}^{\rho_4}(\rho_4(\rho_4^{(-1)}(e)))) \neq \rho_4^{(-1)}(e)$ . Avšak,  $e_{N_{Su}^{\rho_4}} \in H(\rho_4)$  a teda pre nespojité nerastúce funkcie taktiež platí vzťah (3).

**Príklad 2.4.6.** Zoberme si funkciu  $\rho_5$  definovanú takto:

$$\rho_5(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ \frac{x+1}{2} & \text{ak } x \in ]\frac{1}{4}, 1]. \end{cases}$$

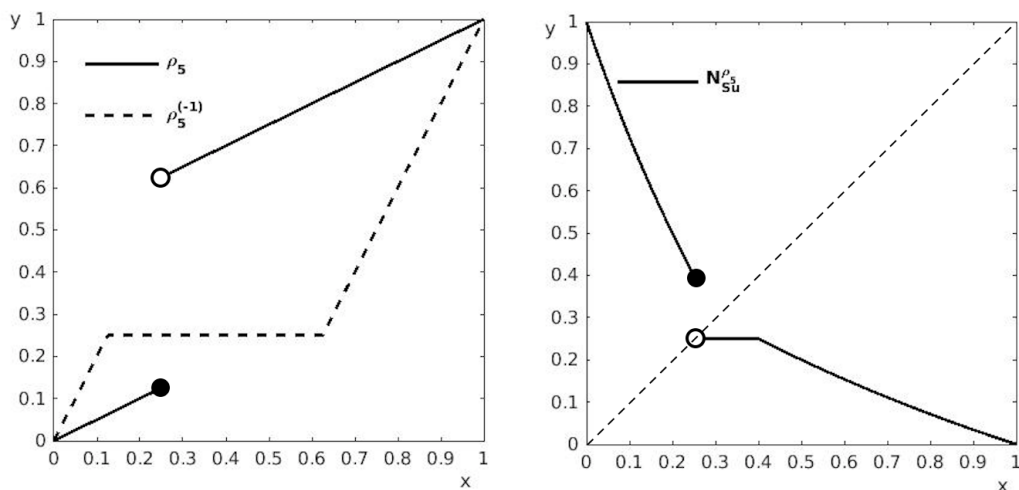


Obr. 2.9: Funkcie a negátor z príkladu 2.4.5.

Po aplikovaní vzťahu (2) dostaneme funkciu, ktorá spĺňa vlastnosti negátora:

$$N_{Su}^{\rho_5}(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{1+x} & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ 0.25 & \text{ak } x \in ]\frac{1}{4}, \frac{2}{5}], \\ \frac{1-x}{2+x} & \text{ak } x \in ]\frac{2}{5}, 1]. \end{cases}$$

Zložením  $\rho_5 \circ \rho_5^{(-1)}$  ani v tomto prípade nevznikne identita, navyše  $e_{N_{Su}^{\rho_5}} \notin H(\rho_5)$ . Priamym dosadením zistíme, že vzťah (3) neplatí. Zmena typu spojitosti (na spojitost sprava) v tomto prípade zaručí platnosť vzťahu (3).



Obr. 2.10: Funkcie a negátor z príkladu 2.4.6.

Predchádzajúce príklady nás vedú k hypotéze, že vzťah (3) platí práve vtedy, keď pevný bod pôvodného negátora  $e$  patrí do oboru hodnôt funkcie  $\rho$ , čiže  $e \in H(\rho)$ . Nasledujúci príklad nám však ukáže, že podmienka  $e \in H(\rho)$  je len postačujúca, no nie nutná.



**Príklad 2.4.7.** Použijeme nespojitú, neklesajúcu funkciu  $\rho_6$ , a vytvoríme  $\rho$ -transformáciu negátora  $N_{S_u}$  s parametrom  $c = 2$ :

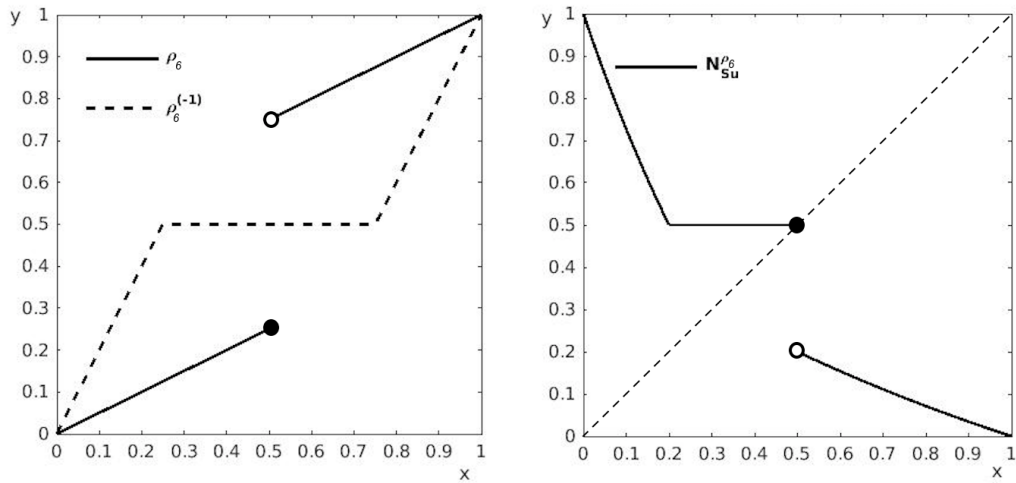
$$\rho_6(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{x+1}{2} & \text{ak } x \in ]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Po aplikovaní vzťahu (2) dostaneme funkciu, ktorá spĺňa vlastnosti negátora:

$$N_{S_u}^{\rho_6}(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{1+x} & \text{ak } x \in [0, \frac{1}{5}], \\ 0.5 & \text{ak } x \in ]\frac{1}{5}, \frac{1}{2}], \\ \frac{1-x}{2+x} & \text{ak } x \in ]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Napriek tomu, že  $\rho_6 \circ \rho_6^{(-1)}$  nie je identita a  $e_{N_{S_u}^2} \notin H(\rho_6)$ , platí vzťah (3).

Príklad 2.4.7 ukazuje, že táto implikácia sa nedá otočiť.



Obr. 2.11: Funkcie a negátor z príkladu 2.4.7.

Podobné výsledky dostaneme aj pre nerastúce, nespojitú funkciu  $\rho$ . Vzhľadom k tomu, že ak  $e \in H(\rho)$ , tak  $\rho \circ \rho^{(-1)}(e) = e$ , tak platí:

**Tvrdenie 2.4.4.** *Nech  $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je fuzzy negátor a  $\rho$  je neklesajúca (nerastúca) funkcia, ktorá spĺňa podmienku (P1) alebo (P2), ((P1') alebo (P2')). Ak  $e$  je pevným bodom negátora  $N$  a platí, že  $e \in H(\rho)$ , potom  $\rho^{(-1)}(e)$  je pevným bodom  $N^\rho$ .*

## Kapitola 3

# Trojuholníkové normy, definície a vlastnosti

Fuzzy negátory sú často používané pri konštrukcii ostatných fuzzy logických spojok. My sa jednej takej konštrukcii konjunktov a disjunktov budeme podrobne venovať, preto je potrebné postupne predstaviť funkcie, ktoré modelujú tieto spojky. V nasledujúcej časti sa budeme zaoberať trojuholníkovými normami. Trojuholníkové normy sa vo fuzzy logike často používajú na modelovanie konjunkcie.

**Definícia 3.0.1.** [7] Funkcia  $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  sa nazýva trojuholníková norma (skrátene *t-norma*) ak pre každé  $x, y, z \in [0, 1]$  platí:

- (T1)  $T(x, y) = T(y, x)$  komutatívnosť,
- (T2)  $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$  asociatívnosť,
- (T3)  $T(x, y) \leq T(x, z)$ , ak  $y \leq z$  monotónnosť,
- (T4)  $T(x, 1) = x$  okrajová podmienka.

Medzi najznámejšie t-normy patria tieto štyri:

- Minimová t-norma  $T_M : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$

$$T_M(x, y) = \min(x, y),$$

- Súčinová t-norma  $T_P : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$

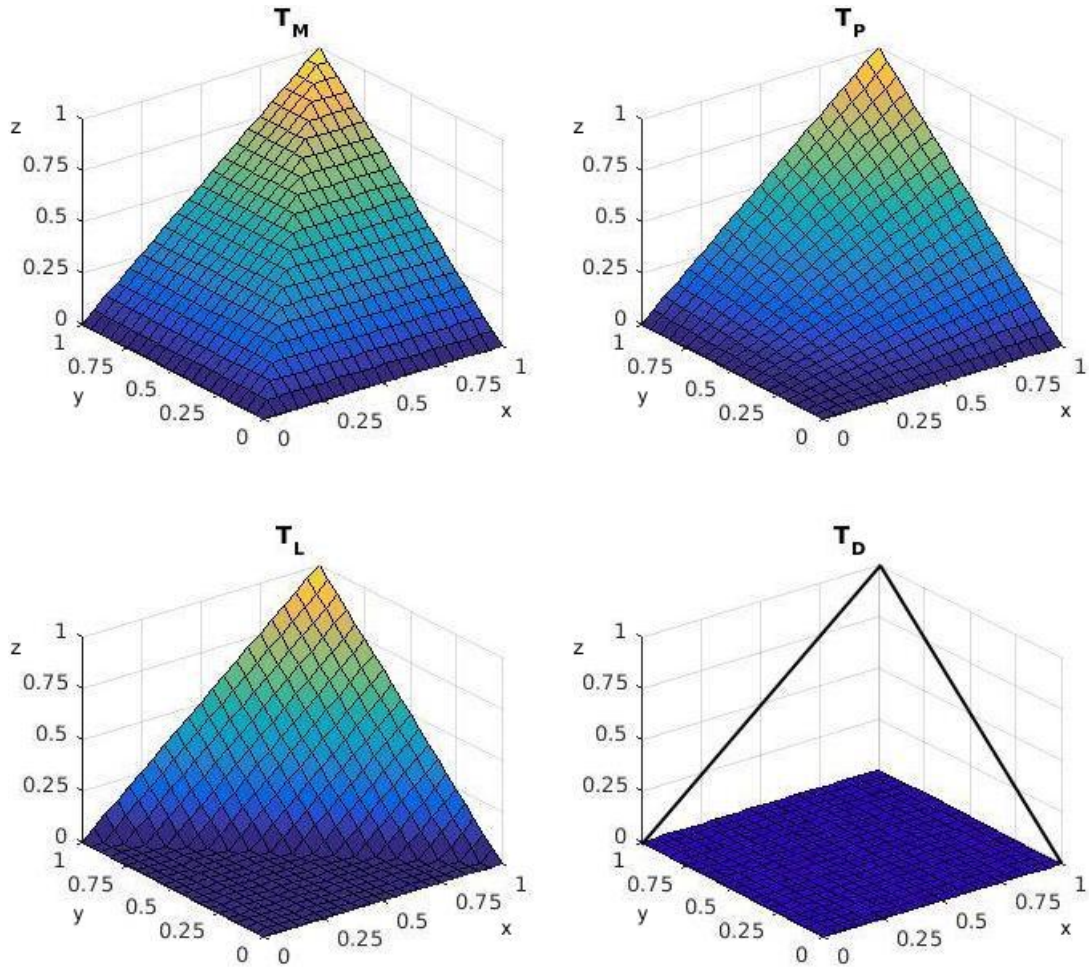
$$T_P(x, y) = xy,$$

- Lukasiewiczova t-norma  $T_L : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$

$$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0),$$

- Drastický súčin  $T_D : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$

$$T_D(x, y) = \begin{cases} \min(x, y), & \text{ak } \max(x, y) = 1, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$



Obr. 3.1: [7] 3D grafy základných t-noriem.

Ďalej si uvedieme štyri známe parametrické triedy t-noriem.

- Frankove t-normy:

$$T_p^F(x, y) = \begin{cases} T_M(x, y) & \text{ak } p = 0, \\ T_P(x, y) & \text{ak } p = 1, \\ T_L(x, y) & \text{ak } p = +\infty, \\ \log_p \left( 1 + \frac{(p^x-1)(p^y-1)}{p-1} \right) & \text{inak,} \end{cases}$$

- Schweizer-Sklarove t-normy:

$$T_p^{SS}(x, y) = \begin{cases} T_M(x, y) & \text{ak } p = -\infty, \\ (x^p + y^p - 1)^{\frac{1}{p}} & \text{ak } -\infty < p < 0, \\ T_P(x, y) & \text{ak } p = 0, \\ (\max(0, x^p + y^p - 1))^{1/p} & \text{ak } 0 < p < +\infty, \\ T_D(x, y) & \text{ak } p = +\infty, \end{cases}$$

- Yagerove t-normy:

$$T_p^Y(x, y) = \begin{cases} T_D(x, y) & \text{ak } p = 0, \\ \max\left(0, 1 - ((1-x)^p + (1-y)^p)^{\frac{1}{p}}\right) & \text{ak } 0 < p < +\infty, \\ T_M(x, y) & \text{ak } p = +\infty, \end{cases}$$

- Sugeno-Weberove t-normy:

$$T_p^{SW}(x, y) = \begin{cases} T_D(x, y) & \text{ak } p = -1, \\ \max\left(0, \frac{x+y-1+pxy}{1+p}\right) & \text{ak } -1 < p < +\infty, \\ T_P(x, y) & \text{ak } p = +\infty. \end{cases}$$

### 3.1 Vlastnosti trojuholníkových noriem

Trojuholníkové normy môžeme rozdeliť do rôznych skupín podľa ich vlastností. Pre nás budú zaujímavé hlavne Archimedovské t-normy, lebo sa dajú vyjadriť pomocou funkcií jednej premennej, tzv. generátorov. Preto zhrnieme aspoň základné pojmy potrebné k zavedeniu archimedovskej vlastnosti. Rovnako ako negátory, aj t-normy môžeme porovnávať a čiastočne usporiadať.

**Definícia 3.1.1.** [4] Ak pre t-normy  $T_1$  a  $T_2$  je pre každý bod  $(x, y) \in [0, 1]^2$  splnená nerovnosť  $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ , hovoríme, že  $T_1$  je slabšia ako  $T_2$ , alebo  $T_2$  je silnejšia ako  $T_1$  a píšeme  $T_1 \leq T_2$ .

**Definícia 3.1.2.** [4] Ak pre t-normy  $T_1$  a  $T_2$  platí, že  $T_1 \leq T_2$  a  $T_1 \neq T_2$  t.j. ak  $T_1 \leq T_2$ , ale  $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$  pre nejaký bod  $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$ , tak  $T_1 < T_2$ .

Základné t-normy môžeme usporiadať nasledovne:

$$T_D(x, y) \leq T_L(x, y) \leq T_P(x, y) \leq T_M(x, y).$$

Vďaka monotónnosti a okrajovým podmienkam, môžeme zaviesť toto všeobecné usporiadanie.

$$T_D(x, y) \leq T(x, y) \leq T_M(x, y),$$

čo znamená, že *drastický súčin* je najslabšia t-norma a *minimová t-norma* je najsilnejšia. Všetky ostatné sú medzi nimi.

Medzi základné vlastnosti t-noríem patria tieto:

**Tvrdenie 3.1.1.** [7] Nech  $T$  je ľubovoľná t-norma. Potom pre každé  $x, y \in [0, 1]$  platí:

- $T(1, x) = x, T(x, 1) = x,$
- $T(0, x) = 0, T(x, 0) = 0,$
- $T(x, y) \leq x, T(x, y) \leq y.$

Ďalší pojem, s ktorým sa môžeme pri t-normách stretnúť, je idempotencia prvku, čo znamená, že  $T(a, a) = a$ . Je zrejmé, že každá t-norma má aspoň dva idempotentné prvky: 0

a 1. Tieto sa nazývajú triviálne idempotentné prvky. Čísla  $a \in ]0, 1[$ , ktoré uvedenú vlastnosť spĺňajú, nazývame netriviálnymi idempotentnými prvkami.

Zoberme si súčinnú t-normu. Idempotentný prvok by musel spĺňať  $T_P(a, a) = a$ , čo v tomto prípade znamená  $a^2 = a$ . To platí len pre 0 a 1, teda súčinná t-norma má len triviálne idempotentné prvky. Zaujímavá trojuholníková norma je minimová. Pre ňu platí, že  $\forall a \in [0, 1], T_M(a, a) = a$ , čo znamená, že minimová t-norma má všetky prvky idempotentné. Je to zároveň jediná t-norma s takou vlastnosťou.

Ďalej sa budeme venovať niektorým algebraickým vlastnostiam t-noriem.

**Definícia 3.1.3.** [4] Prvok  $x \in ]0, 1[$  nazveme deliteľ nuly danej t-normy  $T$ , ak existuje  $y \in ]0, 1[$  také, že  $T(x, y) = 0$ .

Pozrime sa, ako sú na tom základné t-normy. Zrejme  $T_P$  ani  $T_M$  nemajú deliteľa nuly. Pri  $T_L$  sú naopak všetky hodnoty deliteľa nuly, rovnako ako aj pri  $T_D$ .

**Poznámka 3.1.1.** Vďaka asociatívnosti platí, že  $T(T(x, x), x) = T(x, T(x, x))$ . Pre predpis  $T(T(x, x), x)$  môžeme použiť jednoduchšie označenie  $x_T^{(3)}$ . Toto označenie môžeme rozšíriť pre ľubovoľné  $n \in \mathbb{N}$  ako  $T(\underbrace{x, \dots, x}_n) = x_T^{(n)}$ .

**Definícia 3.1.4.** [4] Hovoríme, že  $x \in ]0, 1[$  je nilpotentný prvok danej t-normy  $T$ , ak existuje  $n \in \mathbb{N}$  také, že  $x_T^{(n)} = 0$ .

Podobne ako pri deliteľoch nuly, i tu vidíme, že  $T_P$  a  $T_M$  nemajú žiaden nilpotentný prvok. Zato  $T_L$  a  $T_D$  majú všetky prvky nilpotentné.

**Definícia 3.1.5.** [4] Hovoríme, že t-norma  $T$  je archimedovská, ak pre všetky body  $(x, y) \in ]0, 1]^2$  existuje  $n \in \mathbb{N}$  také, že

$$x_T^{(n)} < y.$$

Zo základných štyroch t-noriem, sú archimedovské len  $T_P$ ,  $T_L$  a  $T_D$ .

**Definícia 3.1.6.** [4]

- Hovoríme, že t-norma  $T$  je striktné monotónna, ak je rastúca na  $]0, 1]^2$  ako funkcia  $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ .
- Hovoríme, že t-norma  $T$  je striktná, ak je spojitá a striktné monotónna.

Súčinná t-norma  $T_P$  je jediná t-norma zo štyroch základných t-noriem, ktorá je striktná, pretože je aj spojitá, aj striktné monotónna. Minimová a Lukasiewiczova t-norma sú spojité, no nie striktné monotónne t-normy. Drastický súčin nie je ani spojitý, ani striktné monotónny.

**Definícia 3.1.7.** [4] Hovoríme, že t-norma  $T$  je nilpotentná, ak je spojitá a každé  $x \in ]0, 1[$  je jej nilpotentným prvkom.

Typická predstaviteľka nilpotentných t-noriem je Lukasiewiczova t-norma. Minimová a súčinná t-norma sú síce spojité, ale bez netriviálnych nilpotentných prvkov. Drastický súčin má všetky prvky nilpotentné, no nie je spojitý.

## 3.2 Aditívne a multiplikatívne generátory

Jedným z možných spôsobov konštrukcie t-noríem, je generovanie pomocou funkcie jednej premennej. Tieto funkcie nazývame generátory a môžu byť buď aditívne, alebo multiplikatívne. My si ukážeme príklady oboch.

**Definícia 3.2.1.** [4] *Nech funkcia  $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  je spojitá a klesajúca, pričom  $f(1) = 0$ , potom predpisom:*

$$T_{\langle f \rangle}(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y))$$

je daná t-norma a funkcia  $f$  sa nazýva aditívny generátor t-normy  $T_{\langle f \rangle}$ .

Všimnime si triedu Frankových t-noríem. Ich aditívny generátor je daný parametricky takto:

$$f_p^F(x) = \begin{cases} -\ln x & \text{ak } p = 1, \\ 1 - x & \text{ak } p = +\infty, \\ \ln \frac{p-1}{p^x-1} & \text{inak.} \end{cases}$$

Inverzné zobrazenie k  $f_p^F(x)$  je:

$$(f_p^F)^{-1}(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{ak } p = 1, \\ 1 - x & \text{ak } p = +\infty, \\ \log_p \left( \frac{p-1}{e^x} + 1 \right) & \text{inak.} \end{cases}$$

Ďalej sa budeme zaoberať súvislosťami medzi archimedovskými t-normami a aditívnymi generátormi.

**Tvrdenie 3.2.1.** [4] *Funkcia  $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  je spojitá archimedovská t-norma práve vtedy, ak existuje aditívny generátor, ktorý ju generuje.*

Drastický súčin  $T_D$  nie je spojitý, a teda ho neberieme do úvahy. Z ostatných základných t-noríem je minimová t-norma jediná, ktorá nie je archimedovská. Tá je z nich taktiež jediná, ktorá nemá aditívny generátor. Dá sa dokázať, že keď si zoberieme neohraničený aditívny generátor  $f$  (t. j. s vlastnosťou  $f(0) = \infty$ ), vznikne nám striktná archimedovská t-norma a keď si zoberieme ohraničený aditívny generátor ( $f(0) \in R$ ), vznikne nám nilpotentná archimedovská t-norma.

Okrem aditívnych generátorov máme aj multiplikatívne.

**Definícia 3.2.2.** [4] *Nech funkcia  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je spojitá a rastúca, pričom  $g(1) = 1$ , potom predpisom:*

$$T^{\langle g \rangle}(x, y) = g^{-1}(g(x).g(y))$$

je daná t-norma a funkcia  $g$  sa nazýva multiplikatívny generátor t-normy  $T^{\langle g \rangle}$ .

Rovnako ako pri aditívnych generátoroch, i tu si všimnime Frankove t-normy. Ich multiplikatívny generátor je daný parametricky takto:

$$g_p^F(x) = \begin{cases} x & \text{ak } p = 1, \\ e^{x-1} & \text{ak } p = \infty, \\ \frac{p^x-1}{p-1} & \text{ak } p \in ]0, 1[ \cup ]1, \infty[. \end{cases}$$

Inverzné zobrazenie k  $g_p^F(x)$  je:

$$(g_p^F)^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{ak } p = 1, \\ 1 + \ln x & \text{ak } p = \infty, \\ \log_p(x(p-1) + 1) & \text{ak } p \in ]0, 1[ \cup ]1, \infty[. \end{cases}$$

Všimnime si, že pre aditívny a multiplikatívny generátor Frankových t-noriem platí:  $f_p^F(x) = -\ln g_p^F(x)$ . Bolo ukázané [4], že toto platí pre ľubovoľnú t-normu a jej aditívny a multiplikatívny generátor, a preto nám stačí venovať sa len jednému typu generátorov.

## Kapitola 4

# Trojuholníkové konormy, definície a vlastnosti

V nasledujúcej časti sa budeme zaoberať trojuholníkovými konormami. Trojuholníkové konormy sa vo fuzzy logike často používajú na modelovanie disjunkcie.

**Definícia 4.0.1.** [7] Funkcia  $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  sa nazýva trojuholníková konorma (krátka *s-norma*) ak pre každé  $x, y, z \in [0, 1]$  platí:

- (S1)  $S(x, y) = S(y, x)$  komutatívnosť,
- (S2)  $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$  asociatívnosť,
- (S3)  $S(x, y) \leq S(x, z)$ , ak  $y \leq z$  monotónnosť,
- (S4)  $S(x, 0) = x$  okrajová podmienka.

**Poznámka 4.0.1.** Dá sa ukázať, že funkcia:

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y),$$

kde  $T$  je *t-norma*, je *s-norma*.

Trojuholníkové konormy, ktoré sú takto odvodené zo základných *t-noriem*, vyzerajú nasledovne:

- Maximová *s-norma*  $S_M : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$

$$S_M(x, y) = \max(x, y),$$

- Pravdepodobnostný súčet  $S_P : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$

$$S_P(x, y) = x + y - xy,$$

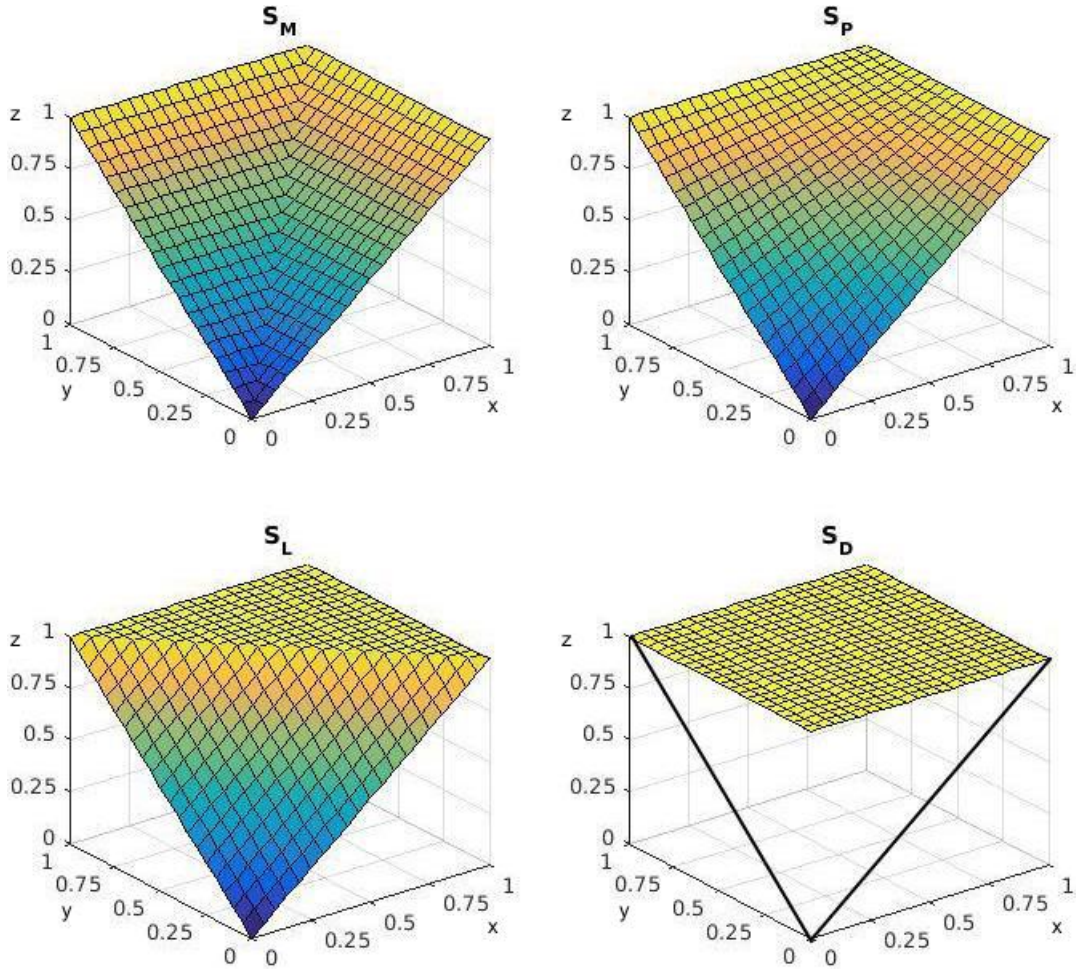
- Lukasiewiczova *s-norma*  $S_L : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$

$$S_L(x, y) = \min(x + y, 1),$$

- Drastický súčet  $S_D : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$

$$S_D(x, y) = \begin{cases} \max(x, y), & \text{ak } \min(x, y) = 0, \\ 1, & \text{inak.} \end{cases}$$





Obr. 4.1: [7] 3D grafy základných s-noriem.

Ďalej si uvedieme štyri známe parametrické triedy s-noriem.

- Frankove s-normy:

$$S_p^F(x, y) = \begin{cases} S_M(x, y) & \text{ak } p = 0, \\ S_P(x, y) & \text{ak } p = 1, \\ S_L(x, y) & \text{ak } p = +\infty, \\ 1 - \log_p \left( 1 + \frac{(p^{1-x}-1)(p^{1-y}-1)}{p-1} \right) & \text{inak,} \end{cases}$$

- Schweizer-Sklarove s-normy:

$$S_p^{SS}(x, y) = \begin{cases} S_M(x, y) & \text{ak } p = -\infty, \\ 1 - ((1-x)^p + (1-y)^p - 1)^{\frac{1}{p}} & \text{ak } -\infty < p < 0, \\ S_P(x, y) & \text{ak } p = 0, \\ 1 - (\max(0, (1-x)^p + (1-y)^p - 1))^{\frac{1}{p}} & \text{ak } 0 < p < +\infty, \\ S_D(x, y) & \text{ak } p = +\infty, \end{cases}$$

- Yagerove s-normy:

$$S_p^Y(x, y) = \begin{cases} S_D(x, y) & \text{ak } p = 0, \\ \min\left(1, (x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}\right) & \text{ak } 0 < p < +\infty, \\ S_M(x, y) & \text{ak } p = +\infty, \end{cases}$$

- Sugeno-Weberove s-normy:

$$S_p^{SW}(x, y) = \begin{cases} S_D(x, y) & \text{ak } p = -1, \\ \min\left(1, \frac{(1+p)x + (1+p)y - pxy}{1+p}\right) & \text{ak } -1 < p < +\infty, \\ S_P(x, y) & \text{ak } p = +\infty. \end{cases}$$

## 4.1 Vlastnosti trojuholníkových konoriem

Podobne ako t-normy, aj s-normy môžeme medzi sebou porovnávať. Ak použijeme rovnaký systém porovnávania ako pri t-normách a aplikujeme ho na štyri základné s-normy, dostaneme:

$$S_M(x, y) \leq S_P(x, y) \leq S_L(x, y) \leq S_D(x, y).$$

Vďaka monotónnosti a okrajovým podmienkam, môžeme zaviesť toto všeobecné usporiadanie:

$$S_M(x, y) \leq S(x, y) \leq S_D(x, y),$$

čo znamená, že *drastický súčet* je najsilnejšia s-norma a *maximová s-norma* je najslabšia. Všetky ostatné sú medzi nimi.

Aj pre s-normy sa prvok  $a \in [0, 1]$ , pre ktorý platí  $S(a, a) = a$ , nazýva idempotentný prvok s-normy. Presne ako minimová t-norma, tak aj maximová s-norma, má všetky prvky idempotentné.

Ďalej sa pozrieme na aditívne a multiplikatívne generátory trojuholníkových konoriem.

**Tvrdenie 4.1.1.** [7] *Funkcia  $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  je spojitá archimedovská s-norma práve vtedy, keď existuje spojitá rastúca funkcia  $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  s vlastnosťou  $f(0) = 0$  taká, že pre každé  $(x, y) \in [0, 1]^2$  platí:*

$$S(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y)).$$

*Funkcia  $f$  sa volá aditívny generátor s-normy.*

Aditívne generátory Frankových s-noriem a ich inverzné zobrazenia budú vyzerat nasledovne:

$$f_{sp}^F(x) = \begin{cases} -\ln(1-x) & \text{ak } p = 1, \\ x & \text{ak } p = \infty, \\ \ln \frac{p-1}{p^{1-x}-1} & \text{inak,} \end{cases}$$

$$(f_{sp}^F)^{-1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{ak } p = 1, \\ x & \text{ak } p = \infty, \\ 1 - \log_p \left( \frac{p-1}{e^x} + 1 \right) & \text{inak.} \end{cases}$$

Všimnime si podobnosť medzi aditívnym generátorom Frankových t-noriem  $f_p^F(x)$  a aditívnym generátorom Frankových s-noriem. Zrejme  $f_{sp}^F(1-x) = f_p^F(x)$ .

**Tvrdenie 4.1.2.** [7] *Funkcia  $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  je spojitá archimedovská s-norma, práve vtedy, keď existuje spojitá klesajúca funkcia  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  s vlastnosťou  $g(1) = 0$  taká, že pre každé  $(x, y) \in [0, 1]^2$  platí:*

$$S(x, y) = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)).$$

*Funkcia  $g$  sa volá multiplikatívny generátor s-normy.*

Pre Frankove s-normy majú multiplikatívne generátory parametrický predpis takýto:

$$g_{sp}^F(x) = \begin{cases} 1-x & \text{ak } p = 1, \\ e^{-x} & \text{ak } p = \infty, \\ \frac{p^{1-x}-1}{p-1} & \text{inak.} \end{cases}$$

Inverzné zobrazenie k  $g_p^F(x)$  je:

$$(g_{sp}^F)^{-1}(x) = \begin{cases} 1-x & \text{ak } p = 1, \\ -\ln x & \text{ak } p = \infty, \\ 1 - \log_p(x(p-1) + 1) & \text{inak.} \end{cases}$$

Všimnime si, že pre aditívny a multiplikatívny generátor Frankových s-noriem platí:  $f_{sp}^F(x) = -\ln g_{sp}^F(x)$ . Bolo ukázané, že toto platí pre ľubovoľnú s-normu a jej aditívny a multiplikatívny generátor, a preto (podobne ako pri t-normách) sa nám stačí venovať len jednému typu generátorov.

## 4.2 Konštrukcie trojuholníkových konoriem

V kapitole 4.0.1 sme spomínali spôsob konštrukcie s-normy pomocou vzťahu:

$$S(x, y) = 1 - (T(1-x, 1-y)).$$

Keď si ho rozoberieme bližšie, môžeme si všimnúť spojitost so štandardným negátorom. Tento vzťah sa dá prepísať takto:

$$S(x, y) = N_S(T(N_S(x), N_S(y))). \quad (4)$$

Štandardný negátor sa za istých okolností dá nahradiť iným negátorom. To, ktorý negátor môžeme použiť a prečo, si vysvetlíme na príkladoch.

**Príklad 4.2.1.** *Skúsme si  $N_s$  nahradiť konkrétnym Sugenovým negátorom pre  $c = 2$  a postupne ho aplikovať na  $T_M$ ,  $T_P$ ,  $T_L$  a  $T_D$ :*

- $T_M$

$$S_M^{N_{Su}^2}(x, y) = \max(x, y),$$

- $T_P$

$$S_P^{N_{Su}^2}(x, y) = \frac{x + y + xy}{1 + 2xy},$$

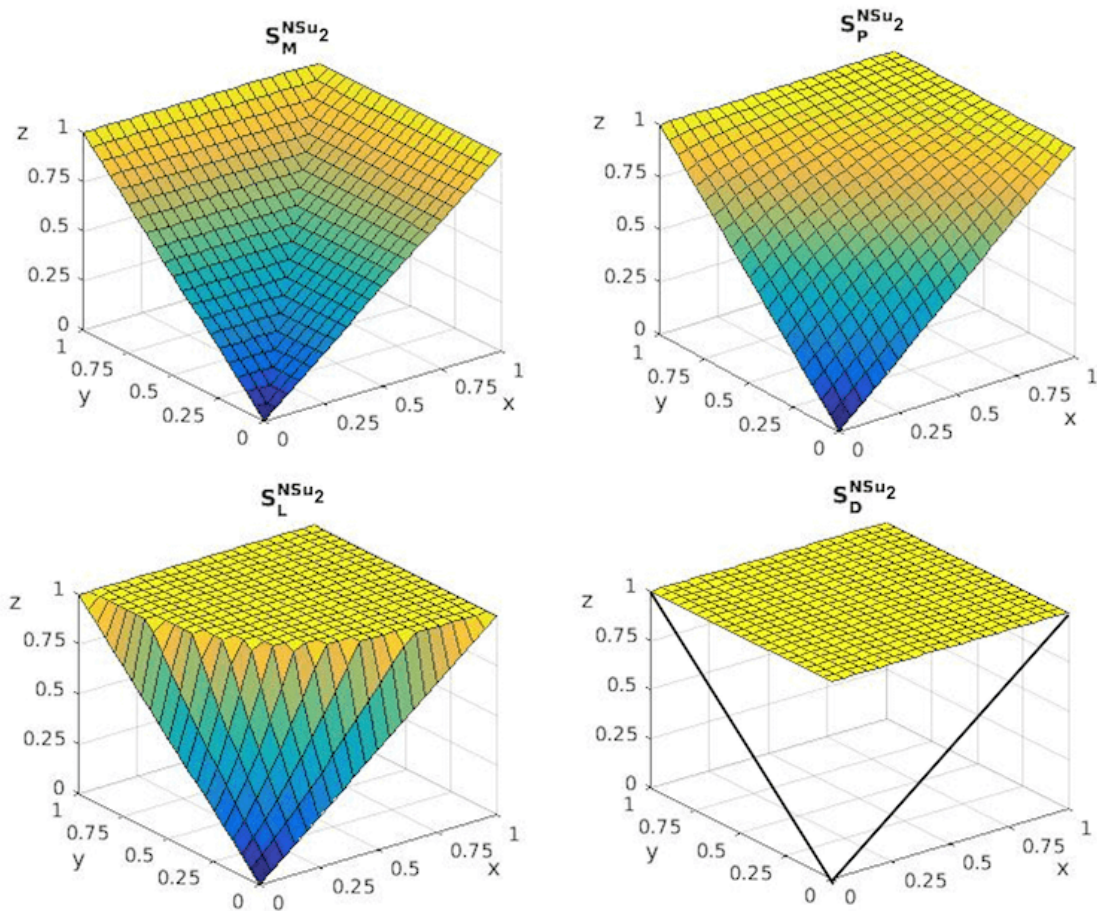
- $T_L$

$$S_L^{N_s^2}(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y+4xy}{1-4xy}, & \text{ak } x+y+8xy < 1, \\ 1, & \text{inak,} \end{cases}$$

- $T_D$

$$S_D^{N_s^2}(x, y) = \begin{cases} \max(x, y), & \text{ak } \min(x, y) = 0, \\ 1, & \text{inak.} \end{cases}$$

Z predpisov daných funkcií vyplýva, že sú komutatívne, monotónne a okrajová podmienka je splnená. Jediný problém môže nastať pri asociativite.  $S_M^{N_s^2}$  a  $S_D^{N_s^2}$  sú identické s-normy postupne s  $S_M$  a  $S_D$ , čiže pre ne asociativita platí. Po dosadení a jednoduchých úpravách zistíme, že aj  $S_P^{N_s^2}$  a  $S_L^{N_s^2}$  sú asociatívne.



Obr. 4.2: S-normy z Príkladu 4.2.1.

**Príklad 4.2.2.** Skúsme si  $N_s$  nahradit konkrétnym Yagerovým negátorom pre  $c = 2$  a postupne ho aplikovať na  $T_M$ ,  $T_P$ ,  $T_L$  a  $T_D$ :

- $T_M$

$$S_M^{N_Y^2}(x, y) = \max(x, y),$$



- $T_P$

$$S_P^{N_Y^2}(x, y) = (x^2 + y^2 - x^2y^2)^{\frac{1}{2}},$$

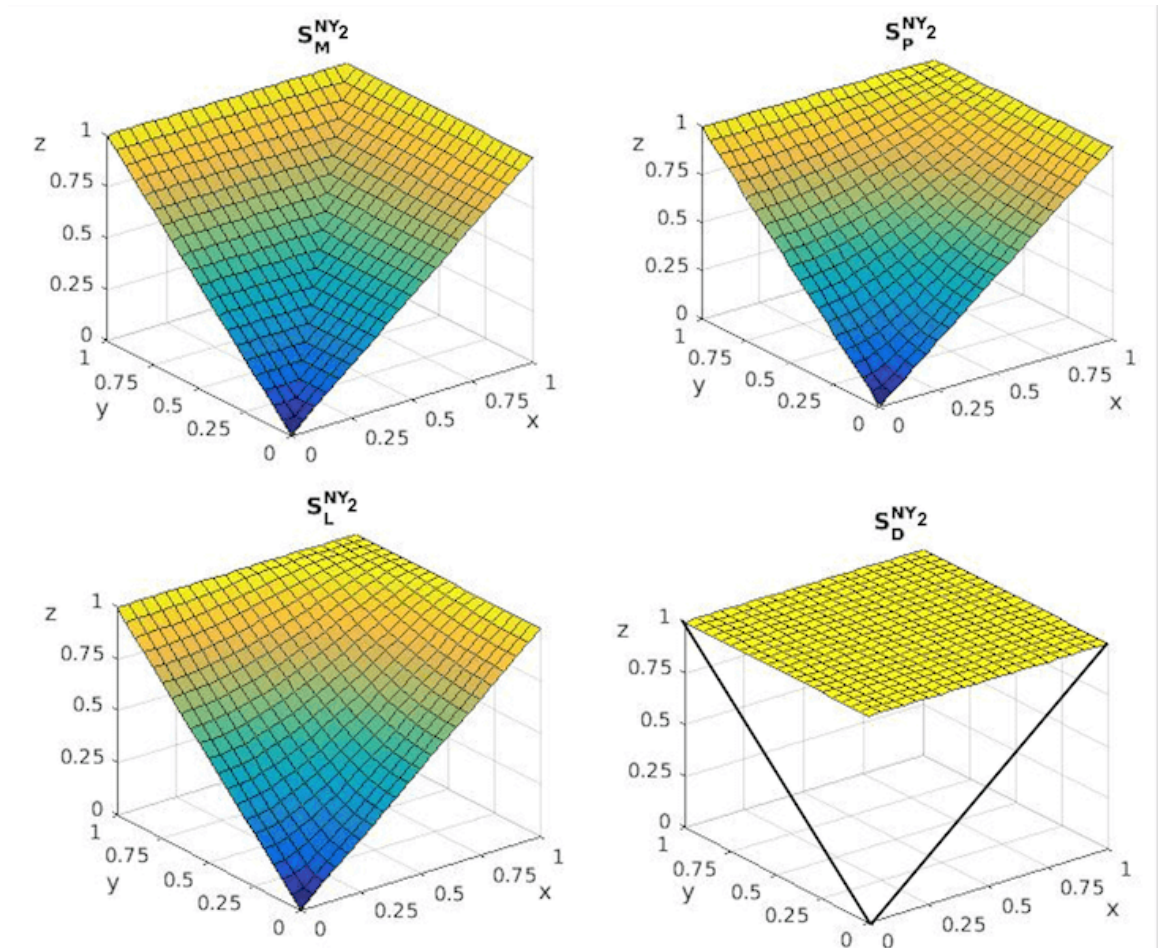
- $T_L$

$$S_L^{N_Y^2}(x, y) = \begin{cases} \left(1 - \left(\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - y^2\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{ak } x^2 + y^2 + (x^2 - y^2)^2 < 3, \\ 1, & \text{inak,} \end{cases}$$

- $T_D$

$$S_D^{N_Y^2}(x, y) = \begin{cases} \max(x, y), & \text{ak } \min(x, y) = 0, \\ 1, & \text{inak.} \end{cases}$$

Z predpisov daných funkcií opäť vyplýva, že sú komutatívne, monotónne, a okrajová podmienka je splnená. Znovu je jediný problém pri asociativite. Po jednoduchých úpravách zistíme, že aj  $S_P^{N_Y^2}$  a  $S_L^{N_Y^2}$  sú asociatívne. Podobne ako v predchádzajúcom príklade sú  $S_M^{N_Y^2}$  a  $S_D^{N_Y^2}$  identické postupne s  $S_M$  a  $S_D$ .



Obr. 4.3: S-normy z Príkladu 4.2.2.

Videli sme, ako to funguje pri Sugenových a Yagerových negátoroch. Dá sa odvodiť, že to takto funguje pre všetky involutívne negátory. Toto tvrdenie je známe, avšak zvyčajne uvádzané bez dôkazu, preto pridávame aj dôkaz.

**Tvrdenie 4.2.1.** [4] *Nech  $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  je  $t$ -norma a  $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  nech je ľubovoľný involutívny negátor, potom:*

$$S(x, y) = N(T(N(x), N(y))), \quad (5)$$

je  $s$ -norma.

**Dôkaz.** *Postupne si dokážeme vlastnosti  $s$ -noriem po aplikovaní involutívneho negátora  $N$ :*

- (S1) *komutatívnosť*

$$S(x, y) = N(T(N(x), N(y))) = N(T(N(y), N(x))) = S(y, x).$$

- (S2) *asociativita*

$$\begin{aligned} S(S(x, y), z) &= N(T(N(S(x, y)), N(z))) = N(T(N(N(T(N(x), N(y))))), N(z))) = \\ &= N(T(T(N(x), N(y)), N(z))) = N(T(N(x), T(N(y), N(z)))) = \\ &= N(T(N(x), N(N(T(N(y), N(z))))) = S(x, S(y, z)). \end{aligned}$$

- (S3) *monotónnosť*

$$\begin{aligned} y \leq z &\Rightarrow N(y) \geq N(z) \Rightarrow T(N(x), N(y)) \geq T(N(x), N(z)) \Rightarrow \\ &N(T(N(x), N(y))) \leq N(T(N(x), N(z))) \Rightarrow S(x, y) \leq S(x, z). \end{aligned}$$

- (S4) *okrajová podmienka*

$$S(x, 0) = N(T(N(x), N(0))) = N(T(N(x), 1)) = N(N(x)) = x.$$

### 4.3 Vzťahy medzi aditívnymi generátormi $t$ -noriem a $s$ -noriem

V tejto časti sa budeme zaoberať vzťahmi medzi aditívnymi generátormi  $t$ -noriem a  $s$ -noriem. Budeme pracovať s aditívnym generátorom Frankových  $s$ -noriem, ktorý je daný predpisom:

$$f_{sp}^F(x) = \begin{cases} -\log(1-x) & \text{ak } p = 1, \\ x & \text{ak } p = +\infty, \\ \log \frac{p-1}{p^{1-x}-1} & \text{inak.} \end{cases}$$

Ak v uvedenom predpise aditívneho generátora Frankových  $s$ -noriem nahradíme výraz  $1-x$  Sugenovým negátorom, dostaneme nasledujúcu funkciu:

$$f_{sp}^{F(NSu)}(x) = \begin{cases} -\log\left(\frac{1-x}{1+cx}\right) & \text{ak } p = 1, \\ \frac{(c+1)x}{1+cx} & \text{ak } p = +\infty, \\ \log \frac{p-1}{p^{\frac{1-x}{1+cx}}-1} & \text{inak.} \end{cases}$$

Vygenerujeme s-normy postupne pre parametre  $p = 1$ ,  $p = \infty$  a  $c = 2$ . Pre  $p = 1$ ,  $c = 2$  dostaneme:

$$S_1^{FN_{Su}}(x, y) = f_{s_1}^{(-1)} \left( -\log \left( \frac{1-x}{1+2x} \right) - \log \left( \frac{1-y}{1+2y} \right) \right) = \frac{x+y+xy}{1+2xy} = S_P^{N_{Su}^2}.$$

Podobne vygenerujeme s-normu pre  $p = \infty$  a  $c = 2$ :

$$S_\infty^{FN_{Su}}(x, y) = f_{s_\infty}^{(-1)} \left( \frac{3x}{1+2x} + \frac{3y}{1+2y} \right) = \frac{x+y+4xy}{1-4xy} = S_L^{N_{Su}^2}.$$

Ak v uvedenom predpise aditívneho generátora Frankových s-normami nahradíme výraz  $1-x$  Yagerovým negátorom, dostaneme nasledujúcu funkciu:

$$f_{sp}^{F(N_Y)}(x) = \begin{cases} -\log(1-x^c)^{\frac{1}{c}} & \text{ak } p = 1, \\ 1 - (1-x^c)^{\frac{1}{c}} & \text{ak } p = +\infty, \\ \log \frac{p-1}{p(1-x^c)^{\frac{1}{c}} - 1} & \text{inak.} \end{cases}$$

Znovu postupne vygenerujeme s-normy pre parametre  $p = 1$ ,  $p = \infty$  a  $c = 2$ . Pre  $p = 1$  a  $c = 2$  dostaneme:

$$S_1^{FN_Y}(x, y) = g_{s_1}^{(-1)} \left( -\log(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \log(1-y^2)^{\frac{1}{2}} \right) = (x^2 + y^2 - x^2y^2)^{\frac{1}{2}} = S_P^{N_Y^2}.$$

A pre  $p = \infty$  a  $c = 2$  dostaneme:

$$S_\infty^{FN_Y}(x, y) = \left( 1 - \left( (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + (1-y^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = S_L^{N_Y^2}.$$

Pri aplikovaní Sugenovho aj Yagerovho negátora sme dostali rovnaké výsledky ako v Príkladoch 4.2.1 a 4.2.2. Toto pozorovanie sa dá zovšeobecniť nasledovne:

**Tvrdenie 4.3.1.** *Nech  $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je involutívny negátor a funkcia  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je aditívny generátor t-normy  $T$ . Potom  $f \circ N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je aditívny generátor s-normy  $S$ , ktorá je daná vzťahom  $S(x, y) = N(T(N(x), N(y)))$ .*

## Kapitola 5

# Skladanie konštrukcií t-noriem a s-noriem

V tejto časti sa budeme venovať podrobnejšie konštrukcii (5). Ak použijeme štandardný negátor na t-normu  $T$ , dostaneme k nej duálnu s-normu  $S$ . Keď na takto skonštruovanú duálnu s-normu  $S$  použijeme znovu štandardný negátor, dostaneme pôvodnú t-normu  $T$ . Toto platí nielen pre štandardný negátor, ale pre ľubovoľný involutívny negátor. Otázka je, či môžeme dostať inú t-normu pomocou tejto metódy, ak použijeme rôzne involutívne negátory na konštrukciu t-normy a s-normy, teda:

$$\begin{aligned}S_1(x, y) &= N_1(T_1(N_1(x), N_1(y))), \\T_2(x, y) &= N_2(S_1(N_2(x), N_2(y))).\end{aligned}$$

Ak  $N_1 \neq N_2$ , či je nutne aj  $T_1 \neq T_2$ ? Ak  $T_1 = T_M$ , potom:

$$\begin{aligned}S_1(x, y) &= N_1(T_M(N_1(x), N_1(y))) = N_1(N_1(S_M(x, y))) = S_M(x, y), \\T_2(x, y) &= N_2(S_M(N_2(x), N_2(y))) = N_2(N_2(T_M(x, y))) = T_M(x, y),\end{aligned}$$

teda  $T_1 = T_2 = T_M$  pre ľubovoľnú dvojicu  $N_1, N_2$ . Podobný výsledok dostaneme aj pre drastický súčin. V nasledujúcich kapitolách sa budeme venovať najmä súčinovej a Lukasiwiczovej t-norme, kde sú výsledky zaujímavejšie.

### 5.1 Konštrukcia t-noriem a s-noriem pomocou Sugenovho a štandardného negátora

V tejto časti si ukážeme, ako sa budú súčinová a Lukasiwiczova t-norma a ich duálne s-normy meniť, keď na ne aplikujeme Sugenov a štandardný negátor. Najskôr sa budeme venovať súčinovej t-norme a teda použijeme nasledujúci vzťah:

$$T_{1P} \xrightarrow{N_{Su}} S_{1PSu} \xrightarrow{N_S} T_{2PS} \xrightarrow{N_{Su}} S_{2PSu} \dots,$$

po prvom kroku dostaneme:

$$S_{1PSu}(x, y) = \frac{x + y - xy + cxy}{1 + cxy}.$$



Tu si môžeme všimnúť, že v čitateli máme podobný výraz ako v súčinovej s-norme, pribudol len výraz  $cxy$ . Na  $S_{1_{PSu}}$  aplikujeme štandardný negátor a dostaneme t-normu s predpisom:

$$T_{2_{PS}}(x, y) = \frac{xy}{1 + c(1 - x - y + xy)}.$$

V čitateli sa nám objavila znovu súčinná t-norma a v menovateli výraz  $(1 - x - y + xy)$ . Od tohto bodu je tvar t-normiem a s-normiem predvídateľný:

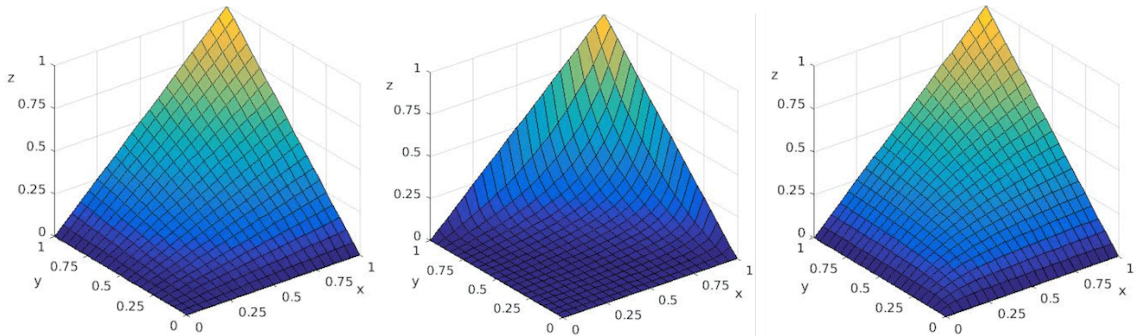
$$S_{2_{PSu}}(x, y) = \frac{x + y - xy + (c^2 + 2c)xy}{1 + (c^2 + 2c)xy}, T_{3_{PS}}(x, y) = \frac{xy}{1 + (c^2 + 2c)(1 - x - y + xy)},$$

$$S_{3_{PSu}}(x, y) = \frac{x + y - xy + (c^3 + 3c^2 + 3c)xy}{1 + (c^3 + 3c^2 + 3c)xy}, T_{4_{PS}}(x, y) = \frac{xy}{1 + (c^3 + 3c^2 + 3c)(1 - x - y + xy)},$$

$$T_{n_{PS}}(x, y) = \frac{xy}{1 + ((c + 1)^{n-1} - 1)(1 - x - y + xy)},$$

$$S_{n_{PSu}}(x, y) = \frac{x + y - xy + ((c + 1)^n - 1)xy}{1 + ((c + 1)^n - 1)xy}.$$

Tieto zmeny názorne ilustrujú nasledujúce obrázky.



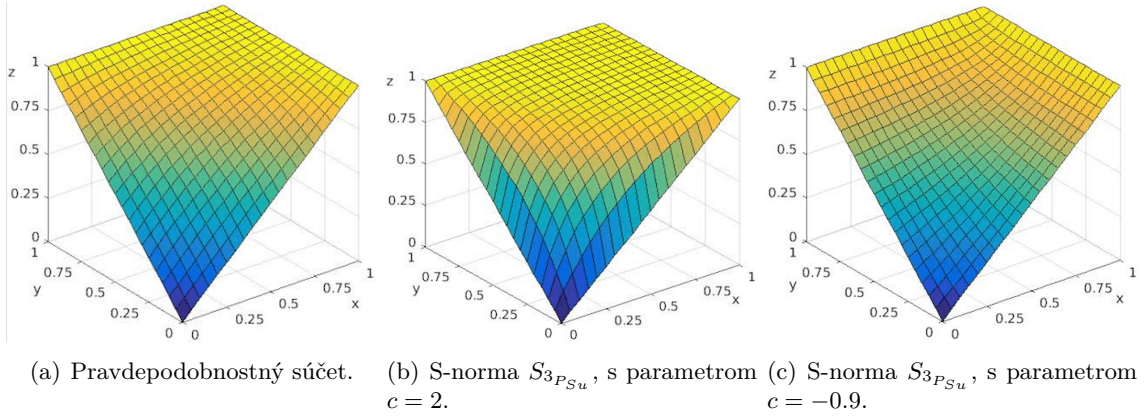
(a) Súčinná t-norma.

(b) T-norma  $T_{4_{PS}}$ , s parametrom  $c = 2$ .

(c) T-norma  $T_{4_{PS}}$ , s parametrom  $c = -0.9$ .

Obr. 5.1: Súčinná t-norma a z nej odvodené t-normy.

Môžeme si všimnúť, že po niekoľkých iteráciách sa súčinná t-norma vzhľadom na parameter  $c$  približuje buď k minimovej t-norme alebo k drastickému súčinu. Z predpisov pre  $T_{n_{PS}}$  vidíme, že pre  $c > 0$  t-norma konverguje k drastickému súčinu a pre  $c < 0$  naopak konverguje k minimovej t-norme. Podobne z predpisov  $S_{n_{PSu}}$  je zřejmé, že pre  $c > 0$  s-norma konverguje k drastickému súčtu a pre  $c < 0$  k maximovej s-norme, čo názorne ilustrujú nasledujúce obrázky.



Obr. 5.2: Pravdepodobnostný súčet a z neho odvodené s-normy.

Ak zmeníme poradie negátorov, teda najskôr použijeme štandardný negátor a potom Sugenov negátor:

$$T_{1P} \xrightarrow{N_S} S_{1P_S} \xrightarrow{N_{Su}} T_{2P_{Su}} \xrightarrow{N_S} S_{2P_S} \dots,$$

tak výsledok prvého kroku má samozrejme tvar pravdepodobnostného súčtu:

$$S_{1P_S}(x, y) = x + y - xy.$$

Aplikovaním Sugenovho negátora na  $S_{1P_S}$  dostaneme:

$$T_{2P(Su)}(x, y) = \frac{(c+1)xy}{1+c(x+y-xy)}.$$

V menovateli sa nám objavila súčinnová t-norma a v čitateli druhý riadok Pascalovho trojuholníka. Na úplne odvodenie predpisov potrebujeme ešte jeden krok:

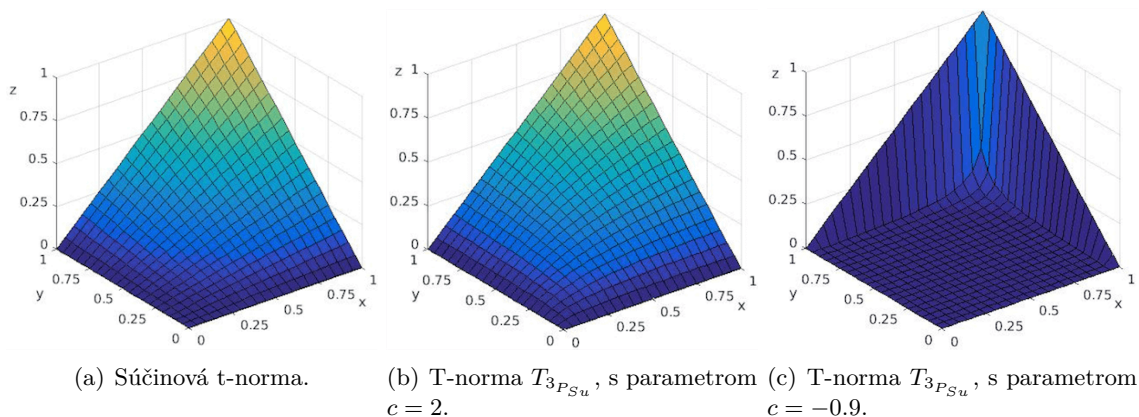
$$S_{2P_S}(x, y) = \frac{(c+1)(x+y-xy) - cxy}{1+c(1-xy)}, T_{3P_{Su}}(x, y) = \frac{(c^2+2c+1)xy}{1+(c^2+2c)(x+y-xy)}.$$

Po tomto kroku sa predpisy pre  $T_{nP_{Su}}$  a  $S_{nP_S}$  dajú odvodiť.

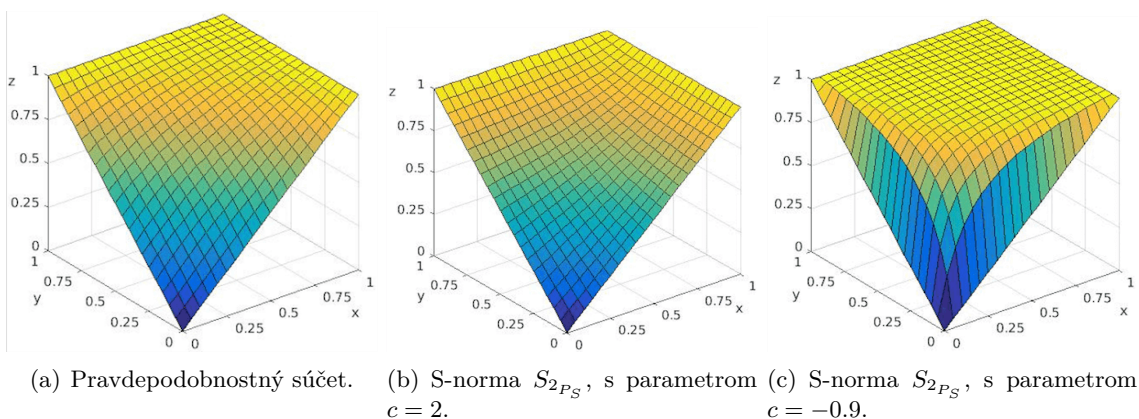
$$T_{nP_{Su}}(x, y) = \frac{(c+1)^{n-1}xy}{1+((c+1)^{n-1}-1)(x+y-xy)},$$

$$S_{nP_S}(x, y) = \frac{(c+1)^{n-1}(x+y-xy) - ((c+1)^{n-1}-1)xy}{1+((c+1)^{n-1}-1)(1-xy)}.$$

Znovu si môžeme všimnúť, že po niekoľkých iteráciách sa súčinnová t-norma vzhľadom na parameter  $c$  približuje buď k minimovej t-norme alebo k drastickému súčtinu. Z predpisov pre  $T_{nP_{Su}}$  vidíme, že pre  $c > 0$  t-norma konverguje k minimovej t-norme a pre  $c < 0$  naopak konverguje k drastickému súčtinu. Podobne z predpisu  $S_{nP_S}$  je zřejmé, že pre  $c > 0$  to konverguje k maximovej s-norme a pre  $c < 0$  k drastickému súčtinu, čo názorne ilustrujú nasledujúce obrázky.



Obr. 5.3: Súčinná t-norma a z nej odvodené t-normy.



Obr. 5.4: Pravdepodobnostný súčet a z neho odvodené s-normy.

Teraz sa podobne budeme venovať Lukasiewiczovej t-norme a jej zmenám po aplikovaní Sugenovho a štandardného negátora. Najskôr si všimneme vzťah:

$$T_{1L} \xrightarrow{N_{Su}} S_{1L_{Su}} \xrightarrow{N_S} T_{2L_S} \xrightarrow{N_{Su}} S_{2L_{Su}} \dots,$$

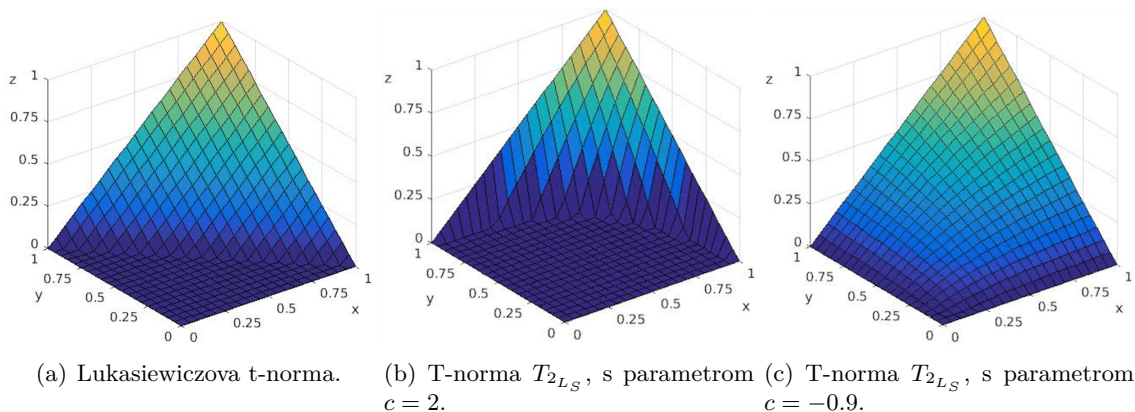
po prvom kroku bude mať s-norma tvar:

$$S_{1L_{Su}}(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y+2cxy}{1-c^2xy}, & \text{ak } x + y + (c^2 + 2c)xy < 1, \\ 1, & \text{inak.} \end{cases}$$

Keď na to aplikujeme štandardný negátor a skúsime vytvoriť t-normu, dostaneme:

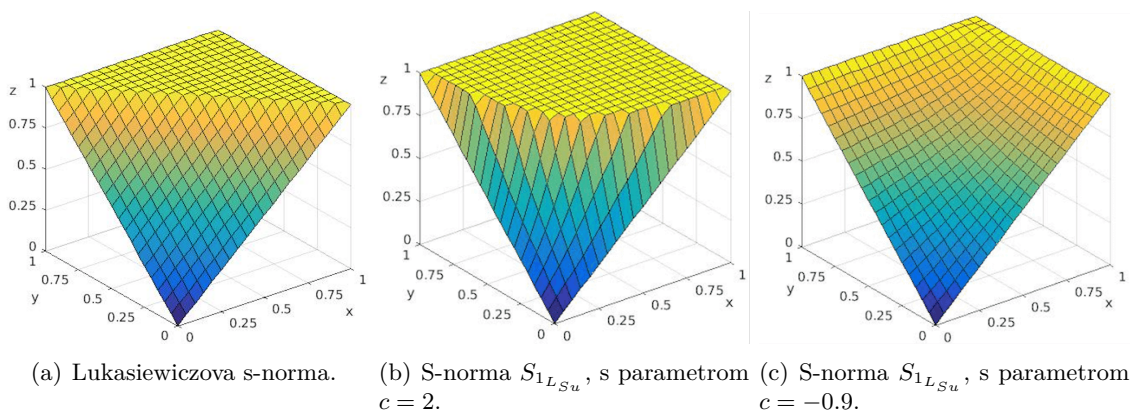
$$T_{2L_S}(x, y) = \begin{cases} \frac{(c^2+2c+1)(x+y-1-xy)+xy}{1-c^2(1-x-y+xy)}, & \text{ak } 2 - x - y + (c^2 + 2c)(1-x)(1-y) > 1, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Túto t-normu môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku 5.5 s rôznymi parametrami  $c$ .



Obr. 5.5: Lukasiewiczova t-norma a z nej odvodené t-normy.

Môžeme si všimnúť, že po niekoľkých iteráciách sa aj Lukasiewiczova t-norma vzhľadom na parameter  $c$  približuje buď k minimovej t-norme alebo k drastickému súčínu. Z predpisov pre t-normy, vidíme že pre  $c > 0$  t-norma konverguje k drastickému súčínu a pre  $c < 0$  naopak konverguje k minimovej t-norme. Podobne z predpisov pre s-normy je zrejmé, že pre  $c > 0$  s-norma konverguje k drastickému súčtu a pre  $c < 0$  k maximovej s-norme, čo názorne ilustrujú nasledujúce obrázky.



Obr. 5.6: Lukasiewiczova s-norma a z nej odvodené s-normy.

Ak zameníme poradie negátorov, teda najskôr použijeme štandardný negátor a potom Sugenov negátor, teda ak

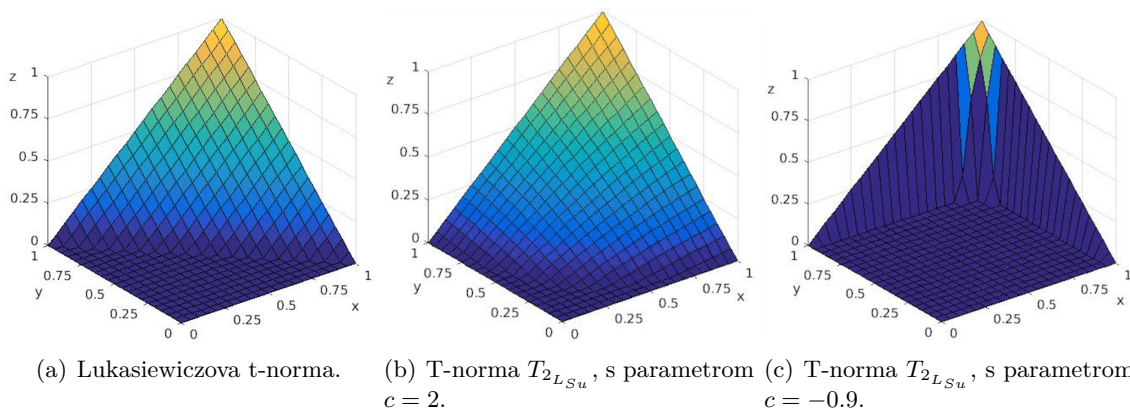
$$T_{1L} \xrightarrow{N_S} S_{1LS} \xrightarrow{N_{Su}} T_{2LSu} \xrightarrow{N_S} S_{2LS} \dots,$$

tak prvá s-norma je samozrejme Lukasiewiczova s-norma  $S_L$ . Po aplikovaní Sugenovho negátora a následne štandardného negátora dostaneme nasledujúcu t-normu a s-normu:

$$T_{2LSu}(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y-1+(c^2+2c)xy}{2c+1+c^2(x+y-xy)}, & \text{ak } x + y + (c^2 + 2c)xy > 1, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

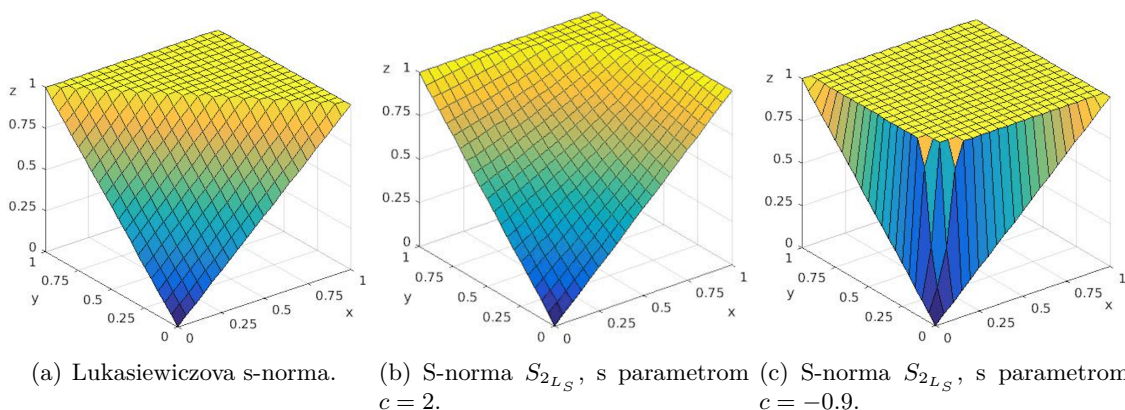
$$S_{2LS}(x, y) = \begin{cases} \frac{(c^2+2c+1)(x+y)-(2c^2-2c)xy}{c^2+2c+1-c^2xy}, & \text{ak } 2 - x - y + (c^2 + 2c)(1-x)(1-y) < 1, \\ 1, & \text{inak.} \end{cases}$$





Obr. 5.7: Lukasiewiczova t-norma a z nej odvodené t-normy.

Rovnako si v obrázku 5.7 môžeme všimnúť, ako vďaka kladnému parametru  $c$  sa Lukasiewiczova t-norma približuje k minimovej t-norme a ako sa pomocou záporného parametra približuje k drastickému súčinu. Pri s-normách je to podobne, teda pri parametri  $c > 0$  postupne vzniká maximová s-norma a pri parametri  $c < 0$  drastický súčet. Vzniknuté s-normy vidíme na obrázku 5.8.



Obr. 5.8: Lukasiewiczova s-norma a z nej odvodené s-normy.

Pri predošlých pokusoch môžeme spozorovať, že aj súčinná aj Lukasiewiczova t-norma sa pri obmenách negátorov pri konštrukciách z t-normy na s-normu a naopak, správajú rovnako. Pri voľbe Sugenovho negátora na tvorenie s-normiem a štandardného negátora na tvorbu spätných t-normiem sa nám pri kladnom parametri Sugenovho negátora t-normy približujú ku drastickému súčinu a s-normy ku drastickému súčtu. Pri parametroch z intervalu  $] -1, 0[$  sa nám z t-normiem stáva minimová t-norma a z s-normiem maximová s-norma. Opačné poradie negátorov nám dáva opačnú konvergenciu t-normiem a s-normiem.

Prirodzená otázka je, či nám nestačí poskladať negátory, a výsledné skladanie aplikovať na t-normu, prípadne s-normu. Prvých pár iterácií skladania vyzerá takto:

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{1+cx} \xrightarrow{N_S} \frac{(c+1)x}{1+cx} \xrightarrow{N_{Su}} \frac{1-x}{1+(c^2+2c)x} \xrightarrow{N_S} \frac{(c^2+2c+1)x}{1+(c^2+2c)x} \xrightarrow{N_{Su}} \frac{1-x}{1+(c^3+3c^2+3c)x} \\ \xrightarrow{N_S} \frac{(c^3+3c^2+3c+1)x}{1+(c^3+3c^2+3c)x} \xrightarrow{N_{Su}} \frac{1-x}{1+(c^4+4c^3+6c^2+4c)x} \dots \end{aligned}$$

$$\underbrace{N_{Su} \circ N_S \dots N_{Su} \circ N_S \circ N_{Su}}_{2n-1} = \frac{1-x}{1+((c+1)^n-1)x},$$

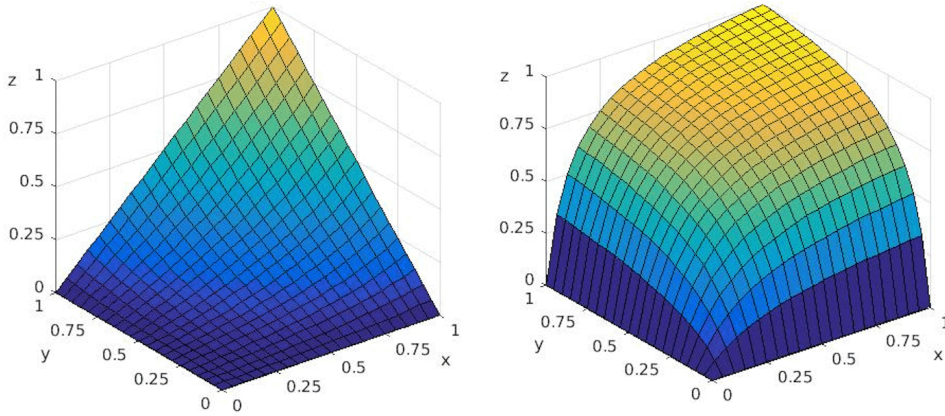
$$\underbrace{N_S \circ N_{Su} \dots N_{Su} \circ N_S \circ N_{Su}}_{2n} = \frac{(c+1)^n x}{1-((c+1)^n-1)x}.$$

Môžeme si všimnúť, že v menovateli i v čitateli sa nám tvorí vzor, ktorý sa opakuje a každým krokom inkrementuje. Rovnaký vzor môžeme vidieť v Pascalovom trojuholníku. Keď sa pokúsime preskočiť s-normu pri súčinovej t-norme, čiže:

$$T_{1P} \xrightarrow{N_S \circ N_{Su}} F_{2P_S} \dots,$$

zistíme, že  $F_{2P_S} \neq T_{2P_S}$ . To je zapríčinené tým, že funkcia  $N_S \circ N_{Su}$  nemá vlastnosti negátora a teda ani výsledná funkcia nespĺňa vlastnosti t-normy. Napríklad, ak zoberieme parameter  $c = 2$ , dostaneme funkciu:

$$F_{2P_S}^2(x, y) = \frac{27xy}{1+2x+2y+22xy}.$$



Obr. 5.9: T-norma vzniknutá postupným skladaním (naľavo) a  $F_{2P_S}^2$  (napravo).

Teraz si budeme všimáť s-normy. Keď preskočíme konštrukciu s-normy, aj t-normy:

$$T_{1P} \xrightarrow{N_{Su} \circ N_S \circ N_{Su}} S_{2P_{Su}}^s \dots,$$

dostaneme výsledok, kde  $S_{2P_S}^s = S_{2P_S}$ . Rovnako by to platilo, i keby sme preskočili viac krokov konštrukcie s-normy a t-normy. Podobne to platí i pre Lukasiewiczovu t-normu. V prípade, že z t-normy chceme skonštruovať t-normu pomocou preskočenia krokov, nepodarí sa nám to. Musíme najskôr skonštruovať duálnu s-normu k pôvodnej t-norme a z nej môžeme preskočiť ľubovoľný počet krokov.

Skúsme sa pozrieť či podobné výsledky dostaneme i pri opačnom skladaní negátorov:

$$1-x \xrightarrow{N_{Su}} \frac{x}{1+c(1-x)} \xrightarrow{N_S} \frac{(c+1)(1-x)}{1+c(1-x)} \xrightarrow{N_{Su}} \frac{x}{1+(c^2+2c)(1-x)} \xrightarrow{N_S} \frac{(c^2+2c+1)(1-x)}{1+(c^2+2c)(1-x)}$$

$$\xrightarrow{N_{Su}} \frac{x}{1+(c^3+3c^2+3c)(1-x)} \xrightarrow{N_S} \frac{(c^3+3c^2+3c+1)(1-x)}{1+(c^3+3c^2+3c)(1-x)} \dots,$$

$$\underbrace{N_S \circ N_{S_u} \dots N_S \circ N_{S_u} \circ N_S}_{2n+1} = \frac{(c+1)^n(1-x)}{1 + ((c+1)^n - 1)(1-x)},$$

$$\underbrace{N_{S_u} \circ N_S \dots N_S \circ N_{S_u} \circ N_S}_{2n} = \frac{x}{1 - ((c+1)^n - 1)(1-x)}.$$

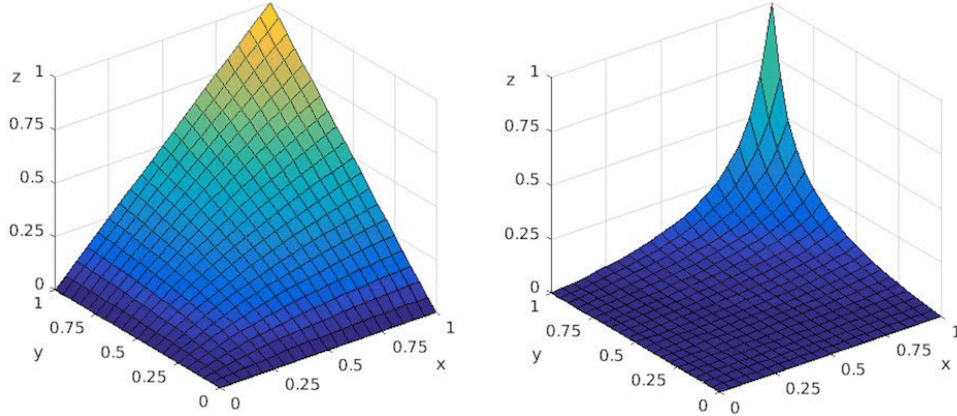
Keď sa pokúsime preskočiť len konštrukciu s-normy:

$$T_{1P} \xrightarrow{N_{S_u} \circ N_S} F_{2P_{S_u}} \dots,$$

výjde nám z rovnakých dôvodov výsledok ako predtým, že  $F_{2P_{S_u}} \neq T_{2P_{S_u}}$ . Keď ale zoberieme:

$$T_{1P} \xrightarrow{N_S \circ N_{S_u} \circ N_S} S_{2P_S}^s \dots,$$

tak  $S_{2P_S}^s = S_{2P_S}$ . Rovnaký princíp môžeme uplatniť i pri Lukasiewiczovej t-norme. Z toho vyplýva, že pri konštrukciách s nepárnym počtom skladaní to funguje a pri párnom nie, pretože nám vznikne neklesajúca funkcia, ktorá nemá vlastnosti negátora.



Obr. 5.10: T-norma vzniknutá postupným skladaním (naľavo) a  $F_{2P_{S_u}}$  (napravo).

## 5.2 Konštrukcia t-noriem a s-noriem pomocou Yagerovho a štandardného negátora

Rovnako, ako so Sugenovým negátorom, si v tejto časti ukážeme ako sa budú súčinová a Lukasiewiczova t-norma a ich duálne s-normy meniť, keď na ne aplikujeme Yagerov a štandardný negátor. Najskôr sa budeme venovať súčinovej t-norme, teda použijeme nasledujúci vzťah:

$$T_{1P} \xrightarrow{N_Y} S_{1P_Y} \xrightarrow{N_S} T_{2P_S} \xrightarrow{N_Y} S_{2P_Y} \dots$$

Po prvom kroku dostaneme:

$$S_{1P_Y} = (x^c + y^c - x^c y^c)^{\frac{1}{c}}.$$

Aby sme mohli zovšeobecniť postupnú zmenu s-noriem, musíme si zaviesť substitúciu. Nech  $\alpha_1 = x^c$  a  $\gamma_1 = y^c$ . Zároveň nech platí, že  $k \in [1, \infty[$  a  $k \in \mathbb{N}$ , potom  $\alpha_{k+1} = (1 - (1 - \alpha_k)^{\frac{1}{c}})^c$  a  $\gamma_{k+1} = (1 - (1 - \gamma_k)^{\frac{1}{c}})^c$ . Tým dostaneme:

$$S_{1_{P_Y}}^k = (\alpha_k + \gamma_k - \alpha_k \gamma_k)^{\frac{1}{c}}, \quad k = 1.$$

Keď na vzniknutú s-normu aplikujeme štandardný negátor, dostaneme t-normu:

$$T_{2_{P_S}} = 1 - ((1 - x)^c + (1 - y)^c - (1 - x)^c(1 - y)^c)^{\frac{1}{c}}.$$

Rovnako ako pri s-normách, i tu si musíme zaviesť substitúciu. Nech  $\beta_1 = (1 - x)^c$  a  $\delta_1 = (1 - y)^c$ . Zároveň nech platí, že  $k \in [1, \infty[$  a  $k \in \mathbb{N}$ , potom  $\beta_{k+1} = (1 - (1 - \beta_k)^{\frac{1}{c}})^c$  a  $\delta_{k+1} = (1 - (1 - \delta_k)^{\frac{1}{c}})^c$ . Tým dostaneme:

$$T_{2_{P_S}}^k = 1 - (\beta_k + \delta_k - \beta_k \delta_k)^{\frac{1}{c}}, \quad k = 1.$$

Pre úplné odvodenie musíme vykonať ešte ďalšie dva kroky. Po ďalšom kroku dostaneme túto t-normu a s-normu:

$$S_{2_{P_Y}}^2 = (1 - (1 - (\alpha_2 + \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_2)^{\frac{1}{c}})^c)^{\frac{1}{c}},$$

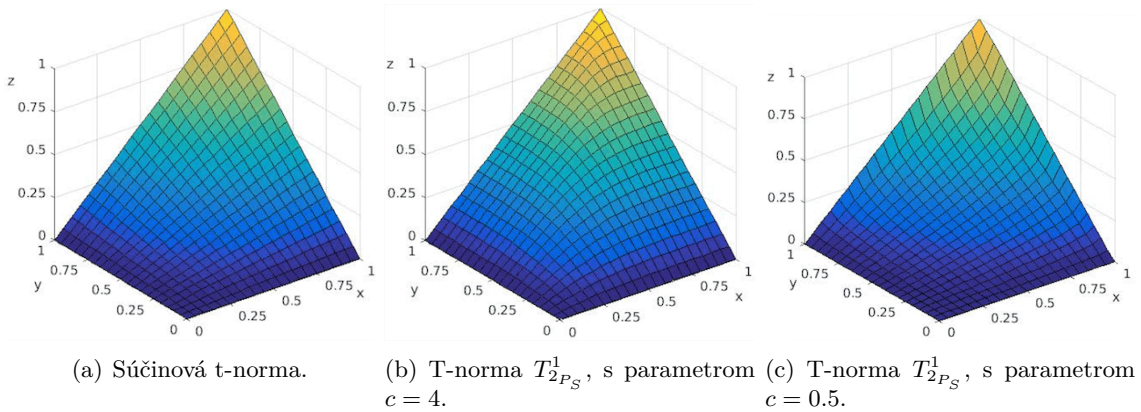
$$T_{3_{P_S}}^2 = 1 - (1 - (1 - (\beta_2 + \delta_2 - \beta_2 \delta_2)^{\frac{1}{c}})^c)^{\frac{1}{c}},$$

Po tomto kroku sa predpisy pre  $T_{n_{P_S}}^k$  a  $S_{n_{P_Y}}^k$  dajú odvodiť.

$$T_{n_{P_S}}^k = 1 - (1 - (T_{n-1_{P_S}}^k)^c)^{\frac{1}{c}}, \quad k = n - 1,$$

$$S_{n_{P_Y}}^k = (1 - (1 - S_{n-1_{P_Y}}^k)^c)^{\frac{1}{c}}, \quad k = n.$$

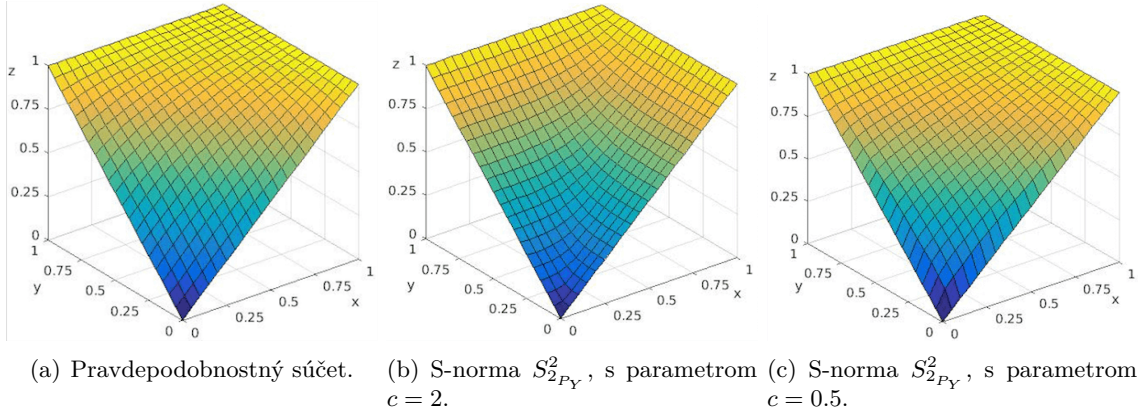
Tieto zmeny názorne ilustrujú obrázky 5.11 a 5.12.



Obr. 5.11: Súčinná t-norma a z nej odvodené t-normy.

Môžeme si všimnúť, že po niekoľkých iteráciách sa súčinná t-norma, opäť vzhľadom na parameter  $c$ , približuje buď k minimovej t-norme, alebo k drastickému súčinu. Z predpisu  $T_{n_{P_S}}^k$  vidíme, že pre  $c > 1$ , t-norma konverguje k minimovej t-norme a pre parameter  $c < 1$ , naopak konverguje k drastickému súčinu. Podobne z predpisu  $S_{n_{P_Y}}^k$  je zřejmé, že pre  $c > 1$  s-norma konverguje k maximovej s-norme a pre  $c < 1$  k drastickému súčtu.





Obr. 5.12: Pravdepodobnostný súčet a z neho odvodené s-normy.

Ak zmeníme poradie negátorov, teda najskôr použijeme štandardný negátor a potom Yagerov negátor:

$$T_{1P} \xrightarrow{N_S} S_{1PS} \xrightarrow{N_Y} T_{2PY} \xrightarrow{N_S} S_{2PS} \dots,$$

tak po aplikovaní štandardného negátora na súčinovú t-normu dostaneme samozrejme pravdepodobnostný súčet. Znovu si zavedieme substitúciu, kde  $\alpha_1 = x$  a  $\gamma_1 = y$ . Zároveň nech platí, že keď  $k \in [1, \infty[$  a  $k \in \mathbb{N}$ , potom  $\alpha_{k+1} = (1 - (1 - \alpha_k)^c)^{\frac{1}{c}}$  a  $\gamma_{k+1} = (1 - (1 - \gamma_k)^c)^{\frac{1}{c}}$ . Aplikovaním Yagerovho negátora na pravdepodobnostný súčet dostaneme:

$$T_{2PY} = (1 - ((1 - x^c)^{\frac{1}{c}} + (1 - y^c)^{\frac{1}{c}} - (1 - x^c)^{\frac{1}{c}}(1 - y^c)^{\frac{1}{c}})^c)^{\frac{1}{c}}.$$

Použijeme substitúciu  $\beta_1 = (1 - x^c)^{\frac{1}{c}}$  a  $\delta_1 = (1 - y^c)^{\frac{1}{c}}$ . Zároveň nech platí, že  $k \in [1, \infty[$  a  $k \in \mathbb{N}$ , potom  $\beta_{k+1} = (1 - (1 - \beta_k)^c)^{\frac{1}{c}}$  a  $\delta_{k+1} = (1 - (1 - \delta_k)^c)^{\frac{1}{c}}$ . Po dvoch iteráciách a aplikovanej substitúcii budú mať t-norma a s-norma tvar:

$$T_{2PY}^k = (1 - (\beta_k + \delta_k - \beta_k \delta_k)^c)^{\frac{1}{c}}, \quad k = 1,$$

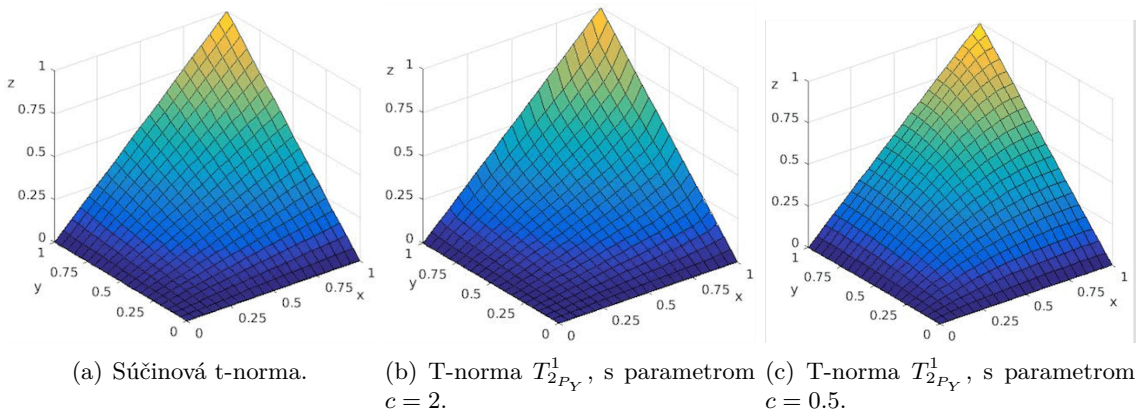
$$S_{2PS}^k = 1 - (1 - (\alpha_k + \gamma_k - \alpha_k \gamma_k)^c)^{\frac{1}{c}}, \quad k = 2.$$

Po tomto kroku sa predpisy pre  $T_{nPY}^k$  a  $S_{nPS}^k$  dajú odvodiť.

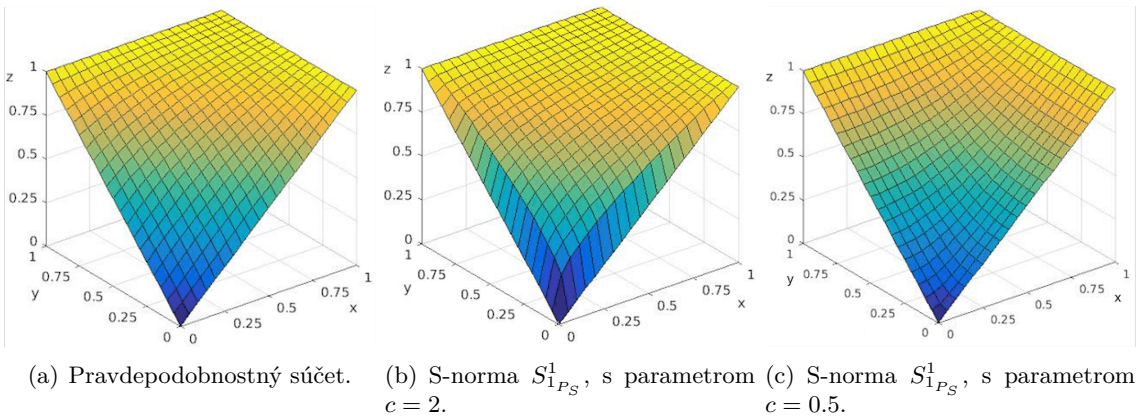
$$T_{nPY}^k = (1 - (1 - T_{n-1PY}^k)^c)^{\frac{1}{c}}, \quad k = n - 1,$$

$$S_{nPS}^k = 1 - (1 - (S_{n-1PS}^k)^c)^{\frac{1}{c}}, \quad k = n.$$

Tieto zmeny názorne ilustrujú obrázky 5.13 a 5.14. Rovnako, ako predtým si môžeme všimnúť, že po niekoľkých iteráciách sa súčinová t-norma vzhľadom na parameter  $c$  približuje buď k minimovej t-norme, alebo k drastickému súčinu. Z predpisov pre  $T_{nPY}^k$  vidíme, že pre  $c > 1$  konverguje k drastickému súčinu a pre parameter  $c < 1$  naopak konverguje k minimovej t-norme. Podobne z predpisu  $S_{nPS}^k$  je zřejmé, že pre  $c > 1$  s-norma konverguje k drastickému súčtu a pre  $c < 1$  k maximovej s-norme.



Obr. 5.13: Súčinná t-norma a z nej odvodené t-normy.



Obr. 5.14: Pravdepodobnostný súčet a z neho odvodené s-normy.

Teraz sa podobne budeme venovať Lukasiewiczovej t-norme a jej zmenám po aplikácii Yagerovho a štandardného negátora. Najskôr si všimneme vzťah:

$$T_{1L} \xrightarrow{N_Y} S_{1LY} \xrightarrow{N_S} T_{2LS} \xrightarrow{N_Y} S_{2LY} \dots,$$

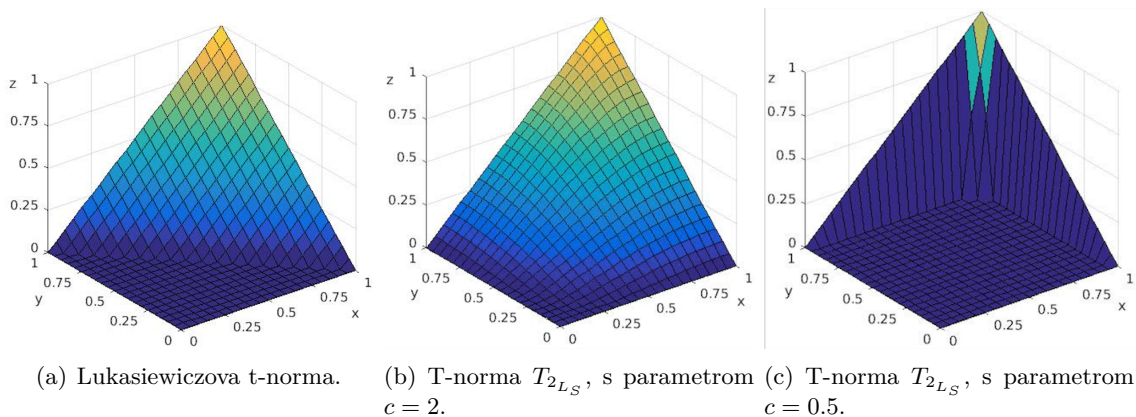
po prvom kroku bude mať s-norma tvar:

$$S_{1LY}(x, y) = \begin{cases} (1 - ((1 - x^c)^{\frac{1}{c}} + (1 - y^c)^{\frac{1}{c}} - 1)^c)^{\frac{1}{c}}, & \text{ak } (1 - x^c)^{\frac{1}{c}} + (1 - y^c)^{\frac{1}{c}} > 1, \\ 1, & \text{inak.} \end{cases}$$

Keď na to aplikujeme štandardný negátor a skúsime vytvoriť t-normu, dostaneme:

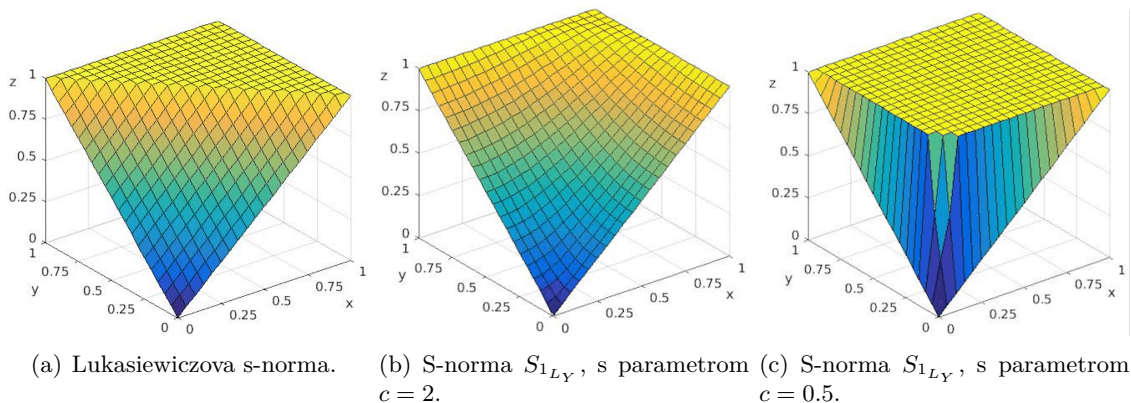
$$T_{2LS}(x, y) = \begin{cases} 1 - (1 - ((1 - (1 - x)^c)^{\frac{1}{c}} + (1 - (1 - y)^c)^{\frac{1}{c}} - 1)^c)^{\frac{1}{c}}, & \text{ak } (1 - (1 - x)^c)^{\frac{1}{c}} + (1 - (1 - y)^c)^{\frac{1}{c}} < 1, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Túto t-normu môžeme vidieť na obrázku 5.15 s rôznymi parametrami  $c$ .



Obr. 5.15: Lukasiewiczova t-norma a z nej odvodené t-normy.

Môžeme si všimnúť, že po niekoľkých iteráciách sa aj Lukasiewiczova t-norma, vzhľadom na parameter  $c$ , približuje buď k minimovej t-norme alebo k drastickému súčtinu. Z predpisov pre t-normy vidíme, že s parametrom  $c > 1$  konverguje k minimovej t-norme a s parametrom  $c < 1$  naopak konverguje k drastickému súčtinu. Podobne z predpisu s-noriem, je zřejmé, že pre  $c > 1$  s-norma konverguje k maximovej s-norme a pre  $c < 1$  k drastickému súčtu.



Obr. 5.16: Lukasiewiczova s-norma a z nej odvodené s-normy.

Ak zmeníme poradie negátorov, teda najskôr použijeme štandardný negátor a potom Yagerov negátor, teda ak

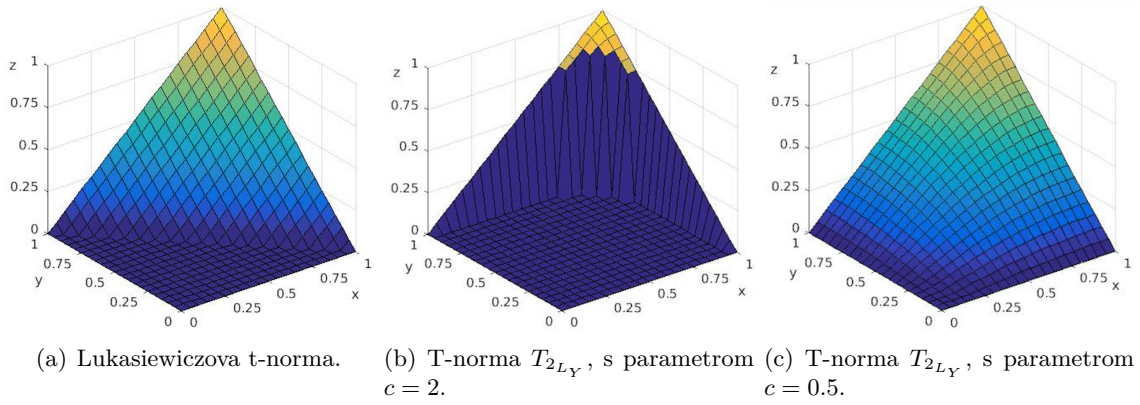
$$T_{1L} \xrightarrow{N_S} S_{1LS} \xrightarrow{N_Y} T_{2LY} \xrightarrow{N_S} S_{2LS} \dots,$$

tak prvá s-norma je samozrejme Lukasiewiczova s-norma  $S_L$ . Po aplikovaní Yagerovho negátora a následne štandardného negátora, dostaneme nasledujúcu t-normu a s-normu:

$$T_{2LY}(x, y) = \begin{cases} (1 - ((1 - x^c)^{\frac{1}{c}} + (1 - y^c)^{\frac{1}{c}})^c)^{\frac{1}{c}}, & \text{ak } (1 - x^c)^{\frac{1}{c}} + (1 - y^c)^{\frac{1}{c}} < 1, \\ 1, & \text{inak.} \end{cases}$$

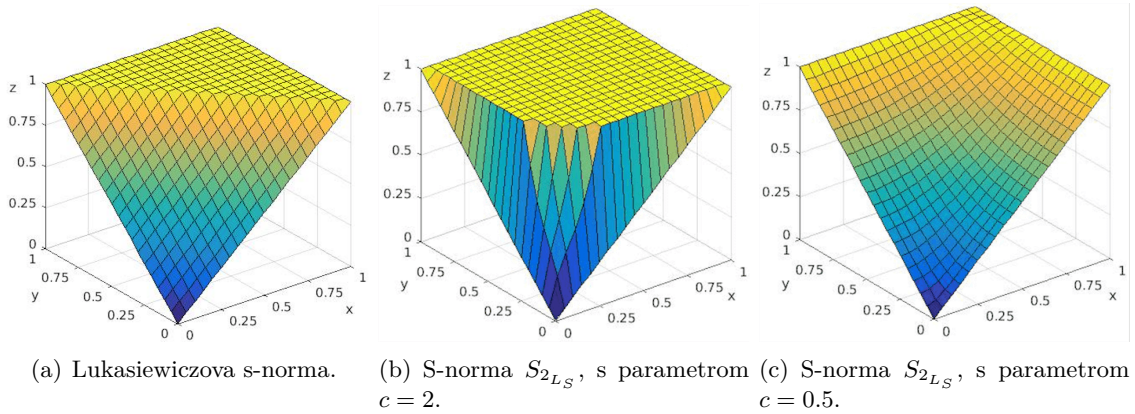
$$S_{2LS}(x, y) = \begin{cases} 1 - (1 - ((1 - (1 - x)^c)^{\frac{1}{c}} + (1 - (1 - y)^c)^{\frac{1}{c}})^c)^{\frac{1}{c}}, & \text{ak } (1 - (1 - x)^c)^{\frac{1}{c}} + (1 - (1 - y)^c)^{\frac{1}{c}} > 1, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$





Obr. 5.17: Lukasiewiczova t-norma a z nej odvodené t-normy.

Rovnako ako predtým si môžeme všimnúť, že po niekoľkých iteráciách sa Lukasiewiczova t-norma, vzhľadom na parameter  $c$ , približuje buď k minimovej t-norme alebo k drastickému súčtinu. Z predpisov pre t-normy vidíme, že pre  $c > 1$  konverguje k drastickému súčtinu a pre parameter  $c < 1$  naopak konverguje k minimovej t-norme. Podobne z predpisu s-normiem je zrejmé, že pre  $c > 1$  s-norma konverguje k drastickému súčtinu a pre  $c < 1$  k maximovej s-norme.



Obr. 5.18: Lukasiewiczova s-norma a z nej odvodené s-normy.

I tu sa nám objavuje prirodzená otázka, či nám rovnako ako pri Sugenovom negátore nestačí poskladať negátory a výsledné skladanie aplikovať na t-normu, prípadne s-normu. Prvých pár iterácií vyzerá takto:

$$(1 - x^c)^{\frac{1}{c}} \xrightarrow{N_S} 1 - (1 - x^c)^{\frac{1}{c}} \xrightarrow{N_Y} (1 - (1 - (1 - x^c)^{\frac{1}{c}})^c)^{\frac{1}{c}} \xrightarrow{N_S} 1 - (1 - (1 - (1 - x^c)^{\frac{1}{c}})^c)^{\frac{1}{c}}.$$

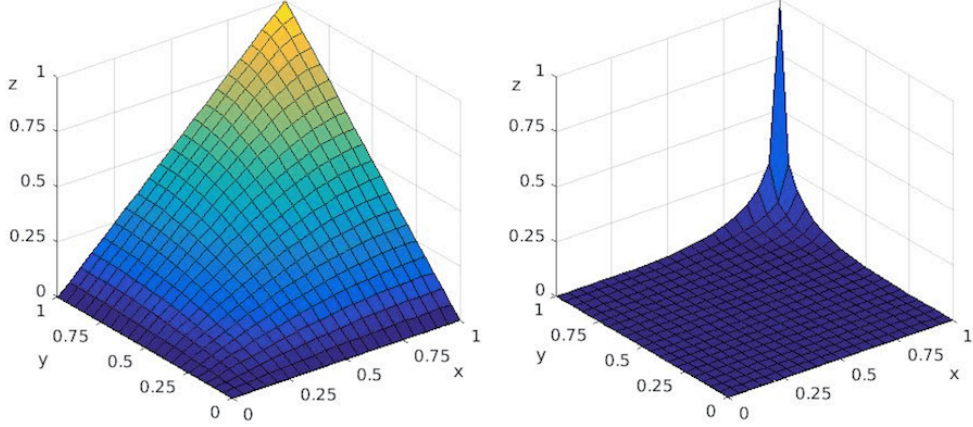
$$\underbrace{N_Y \circ N_S \dots N_Y \circ N_S \circ N_Y}_{2n+1} = (1 - (1 - \underbrace{N_Y \circ N_S \dots N_Y \circ N_S \circ N_Y}_{2n-1})^c)^{\frac{1}{c}},$$

$$\underbrace{N_S \circ N_Y \dots N_Y \circ N_S \circ N_Y}_{2n} = 1 - (1 - (\underbrace{N_S \circ N_Y \dots N_Y \circ N_S \circ N_Y}_{2n-2})^c)^{\frac{1}{c}}.$$

Kvôli štruktúre Yagerovho negátora sme museli definovať postupnosť rekurentne. Keď sa pokúsime preskočiť s-normu pri súčinovej t-norme, čiže:

$$T_{1P} \xrightarrow{N_S \circ N_Y} F_{2P_S} \dots,$$

zistíme, že  $F_{2P_S} \neq T_{2P_S}$ . To je zapríčinené tým, že funkcia  $N_S \circ N_Y$  nemá vlastnosti negátora a teda ani výsledná funkcia nespĺňa vlastnosti t-normy. Napríklad ak zoberieme parameter  $c = 2$ , dostaneme funkciu vykreslenú na obrázku 5.19.



Obr. 5.19: T-norma vzniknutá postupným skladaním (naľavo) a  $F_{2P_S}$  (napravo).

Budeme sa venovať s-normám. Keď preskočíme konštrukciu s-normy, aj t-normy:

$$T_{1P} \xrightarrow{N_Y \circ N_S \circ N_Y} S_{2P_Y}^s \dots,$$

dostaneme výsledok, kde  $S_{2P_Y}^s = S_{2P_Y}$ . Rovnako by to platilo, i keby sme preskočili viac krokov konštrukcie s-normy a t-normy. Podobne to platí i pre Lukasiewiczovu t-normu. Aby sme dostali funkciu, ktorá je t-norma alebo s-norma, musíme preskočiť nepárny počet krokov.

Skúsme sa pozrieť, či podobné výsledky dostaneme i pri opačnom skladaní negátorov:

$$(1-x) \xrightarrow{N_Y} (1-(1-x)^c)^{\frac{1}{c}} \xrightarrow{N_S} 1 - (1-(1-x)^c)^{\frac{1}{c}} \xrightarrow{N_Y} (1-(1-(1-x)^c)^{\frac{1}{c}})^c \xrightarrow{N_S} (1-(1-(1-(1-x)^c)^{\frac{1}{c}})^c)^{\frac{1}{c}}.$$

$$\underbrace{N_Y \circ N_S \dots N_S \circ N_Y \circ N_S}_{2n} = (1 - (1 - \underbrace{N_Y \circ N_S \dots N_S \circ N_Y \circ N_S}_{2n-2})^c)^{\frac{1}{c}},$$

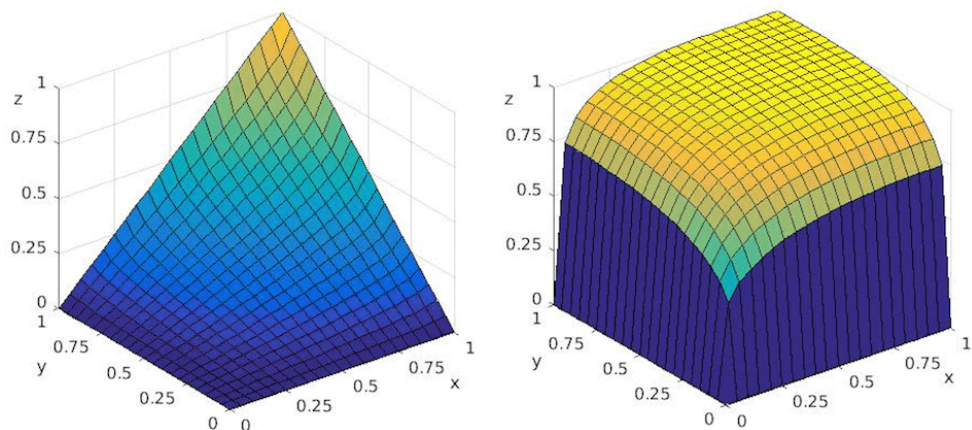
$$\underbrace{N_S \circ N_Y \dots N_S \circ N_Y \circ N_S}_{2n+1} = 1 - (1 - (\underbrace{N_S \circ N_Y \dots N_S \circ N_Y \circ N_S}_{2n-1})^c)^{\frac{1}{c}}.$$

Keď sa pokúsime preskočiť len konštrukciu s-normy:

$$T_{1P} \xrightarrow{N_Y \circ N_S} F_{2P_Y} \dots,$$

výjde nám z rovnakých dôvodov výsledok ako predtým, že  $F_{2P_Y} \neq T_{2P_Y}$ . I tu pri preskočení nepárneho počtu krokov dostávame s-normu, prípadne t-normu. Výslednú funkciu vidíme na obrázku 5.20.

Predchádzajúce experimenty nám ukázali spojitost medzi negátormi a z nich vzniknutými t-normami prípadne s-normami. Sugenov negátor rovnako, ako Yagerov sú involutívne



Obr. 5.20: T-norma vzniknutá postupným skladaním (naľavo) a  $F_{2PY}$  (napravo).

a majú podobný tvar. Počas skladania negátorov na konci podkapitol 5.1 a 5.2 sme si mohli všimnúť, že sa nám postupne striedali negátory, ktoré sa zväčšovali alebo naopak zmenšovali, čím postupne začali konvergovať ku Gödelovmu negátoru alebo Duálnemu Gödelovmu negátoru a funkcie, ktoré postupne konvergovali k nasledujúcim funkciám:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x > 0, \\ 0, & \text{ak } x = 0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x = 1, \\ 0, & \text{ak } x < 1. \end{cases}$$

V nasledujúcom texte použijeme klasické porovnávanie funkcií, teda  $f \leq g$ , ak  $f(x) \leq g(x)$  pre každé  $x \in [0, 1]$  a slovne to vyjadríme, že  $f$  je menšia ako  $g$ , resp.  $g$  je väčšia ako  $f$ . Táto konvergencia negátorov a funkcií, má za následok i postupnú zmenu t-noriem a s-noriem ku ich extrémom. Ďalej si musíme uvedomiť, že spojenie Sugenovho a Yagerovho negátora so štandardným negátorom nám funkciu mení na opačnú, čo znamená, že ak na veľký negátor použijeme štandardný negátor, získame ekvivalentne malú výslednú funkciu, konvergujúcu k funkcii  $f_2$ , a naopak. Tým sa nám v postupnosti skladania negátorov striedajú každým krokom väčšie negátory a následne menšie funkcie. Posledná vec, ktorú musíme brať do úvahy, je fakt, že sa negátory striedajú i v tom, či sú aplikované na vytvorenie t-noriem z s-noriem alebo naopak. V prípade, že hovoríme o nepárnych členoch postupnosti, tie sú aplikované na vytváranie s-noriem. To znamená, že ak sa negátory postupne zmenšujú, s-normy sa budú zväčšovať do drastického súčtu. To je zapríčinené tým, že tieto čoraz menšie negátory sú na t-normu aplikované dvakrát (viď vzťah: (4)). Rovnako to platí i pre generovanie t-noriem.

Prirodzená otázka ostáva, či podobné chovanie platí aj pre iné involutívne negátory a teda pokračovanie tejto práce by spočívalo práve v zovšeobecnení vyššie popísaného princípu na ľubovoľný involutívny negátor a ľubovoľné t-normy/s-normy.

## Kapitola 6

# Modelovanie fuzzy negátora

V tejto kapitole využijem znalosti najmä o negátoroch a ich vlastnostiach, získaných v predošlých častiach práce. Cieľom tejto kapitoly je, na základe empirických dát, zistiť ako ľudia v bežnom, často vágnom, jazyku chápu negáciu. Podobný experiment, vo svojej bakalárskej práci, predstavil aj Vojtěch Havlena [3], ktorý skúmal, ako ľudia vnímajú konjunkciu v bežnej komunikácii.

Súčasťou experimentu bolo aj zostavenie dotazníka, ktorý je v prílohe C. Ten pozostával z výrokov a ich negácií. Respondenti ohodnocovali tieto výroky hodnotami jedna až desať, ktoré reprezentovali stupeň pravdivosti výroku, podľa ich osobného názoru (1 - úplne nepravdivý, 10 - úplne pravdivý). Ich ohodnotenia som následne transformoval na interval  $[0, 1]$ . Na základe zozbieraných údajov od respondentov som hľadal funkciu, ktorá modeluje chápanie negácie v bežnom jazyku.

Hľadanie tejto funkcie som realizoval pomocou známych numerických metód, ako sú metódy najmenších štvorcov, [8] [6] a b-splinov [2].

Vyhodnotenie experimentu bolo spracované programom, ktorého implementácia je popísaná nižšie.

### 6.1 Zostavenie a spracovanie dotazníka

Dotazník sa skladá zo šesťnástich výrokov, a nachádza sa v prílohe C. Osem z nich sú pôvodné výroky, zvyšné sú ich negácie. Vyberal som výroky, ktoré súvisia s bežným životom. Tie som náhodne usporiadal, aby si respondenti nevšimli, ako spolu pôvodný a negovaný výrok súvisia. Teda sa tu nachádzajú vždy dvojice spolu súvisiacich výrokov. Sú to tieto dvojice: 1. a 8. výrok, 2. a 6. výrok, 3. a 9. výrok, 4. a 11. výrok, 5. a 13. výrok, 7. a 14. výrok, 10. a 15. výrok, 12. a 16. výrok. Niektoré pôvodné výroky som znegoval striktne, napríklad výrok 1 a výrok 10. Ostatné výroky boli zámerne znegované s rôznym stupňom vágnosti.

Po vyplnení dotazníka respondentami som hodnoty vložil do textového súboru. Naprogramoval som jednoduchý program v jazyku C, ktorý tento textový súbor spracoval a uložil do formátu *.graph*, s ktorým pracuje výsledná aplikácia. Program spolu s týmto textovým súborom a súborom *makefile* je v priloženom CD-čku. Aby som mohol porovnávať jednotlivé negácie v dotazníku, vytvoril som pre každú dvojicu *.graph* súbor. Súčasťou takého súboru je aj množina súradníc. Na x-ovej osi sú reprezentované ohodnotenia pôvodných výrokov a na y-ovej osi ohodnotenia ich negácií. V prípade, že by všetci respondenti odpovedali na pôvodné výroky hodnotou  $a \in \{1, 2, \dots, 10\}$  a na znegované výroky  $11 - a$ , dostali by sme

štandardný negátor. Údaje z tohto textového súboru boli spracované programom, ktorého implementácia je popísaná v nasledujúcich kapitolách.

## 6.2 Implementácia programu

Obsahom tejto podkapitoly je najmä popis implementácie výslednej aplikácie pre modelovanie funkcií a následná aproximácia so známymi fuzzy negátormi. Na implementáciu bol použitý jazyk C++ norma 11, kvôli možnosti objektového programovania, prenositeľnosti programu a nízkej réžii pri spracovaní matematických operácií. Grafické užívateľské rozhranie je vytvorené pomocou knižnice Qt. Vykresľovanie samotného grafu zaisťuje knižnica `QCustomPlot`, ktorá poskytuje široké možnosti z hľadiska tvorby viacerých grafov súčasne, ako aj jednoduché ovládanie štýlu grafu a ich popisu. Navyše, nemá žiadne závislosti na iných neštandardných knižniciach a teda nie je problém s jeho prenositeľnosťou, alebo kompatibilitou.

Hlavným cieľom aplikácie je vytvárať vlastné funkcie na základe kontrolných bodov pomocou b-spline kriviek alebo metódy najmenších štvorcov a porovnávať ich s negátormi ktoré boli popisované v tejto práci, prípadne zistiť najlepšiu aproximáciu ku známemu negátoru. Aplikácia umožňuje ukladať a načítavať užívateľom vytvorené grafy vo formáte `*.graph`. Užívateľ si taktiež môže vykresliť nejaký zo známych negátorov (Sugenov, Yagerov, Štandardný, atď.), ktoré sme v tejto práci skúmali, a porovnávať ich so svojimi negátormi. Pri metóde najmenších štvorcov má prístup ku predpisu výslednej funkcie.

### 6.2.1 Ukladanie a načítanie tried

Na ukladanie grafov sa pre jednoduchosť využíva textový formát s koncovkou `.graph`. Každý graf negátora je určený týmito hodnotami: metóda (BSpline, Square), stupeň b-spline alebo metódy najmenších štvorcov polynomu, počet kontrolných bodov s ich hodnotami, počet bodov grafu s ich hodnotami, aby sa pri každom načítavaní nemusel celý graf prepočítavať odznova, a krok na x-ovej osi grafu negátora. Tieto informácie sa do textového formátu uložia ako:

```
<typMetódy>\n
<početKontrolnýchBodov>\n
(<kontrolnýBod>\n)*
<početBodovGrafu>\n
<krok>\n
(<y_{i}>\n)*
```

Načítavanie informácií je implementované v triede `MainWindow`, v metóde `loadFile`, ktorá mimo iného kontroluje validitu údajov a správny formát hodnôt, čo zahŕňa, či sú hodnoty v správnom rozsahu, v správnom poradí, či je v súbore uvedený správny počet hodnôt, či sa v súbore nenachádzajú iné znaky, okrem povolených, a správnosť numerickej metódy. Na záver metóda zavolá vykreslenie grafu funkcie.

Do súboru s takýmto formátom ukladá informácie `saveFile`, ktorá zabezpečuje správnu koncovku súboru a presné uloženie grafu na spätné vykreslenie.



### 6.2.2 Proces vykresľovania

V tejto podsekcii sa zameriam na samotný beh programu a procesu vykresľovania, s jeho logickými časťami.

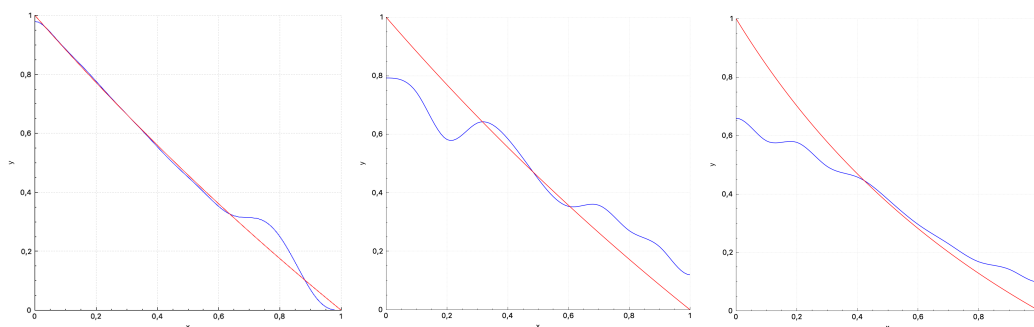
- V prípade, že načítavame graf zo súboru, beží program nasledujúcimi krokmi:
  1. Načítanie dát zo súboru, ich kontrola, a následné uloženie hodnôt do privátnych premenných.
  2. Zobrazenie negátora zavolaním vykresľovacích funkcií, ktoré komunikujú s triedou `QCustomPlot`. V tejto časti sa taktiež nastavujú vlastnosti vzhľadu grafu.
  3. Nastavenie prvkov užívateľského rozhrania, pomocou ktorých bol graf vykreslený, aby ho užívateľ mohol meniť, prípadne porovnávať so známymi negátormi.
- V prípade, že hodnoty získavame z programu, po stlačení užívateľa na tlačítko *Ulož zmeny*:
  1. Načítanie dát z grafického užívateľského rozhrania programu od užívateľa. V tejto časti sa taktiež robí ich kontrola, aby užívateľ nemohol zadať číslo v zlom formáte.
  2. Získanie hodnôt negátora zavolaním statických funkcií z tried `BSpline` alebo `SquareMethod`.
  3. Zobrazenie negátora zavolaním vykresľovacích funkcií, ktoré komunikujú s triedou `QCustomPlot`. V tejto časti sa taktiež nastavujú vlastnosti vzhľadu grafu.

## 6.3 Vyhodnotenie experimentu

Vyplnených a spracovaných dotazníkov bolo 199. Bolo osem výrokov a ich negácií, čo znamená, že bolo vyhodnotených približne 1600 údajov.

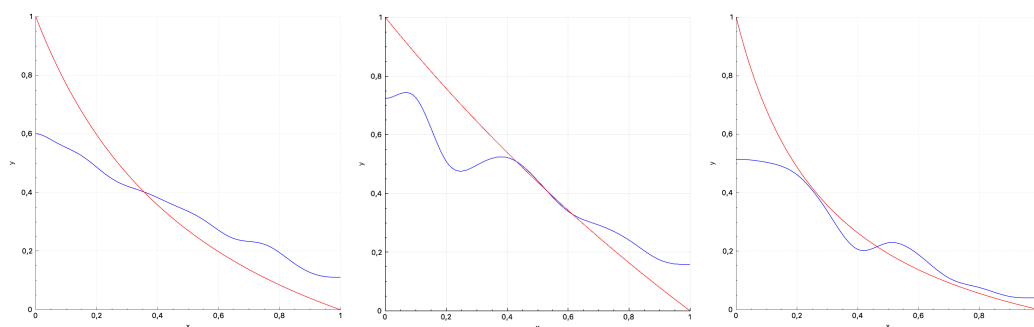
Údaje z vyplnených dotazníkov som transformoval z množiny  $\{1, 2, \dots, 10\}$  do intervalu  $[0, 1]$ . Následne pomocou známych numerických metód, b-spline kriviek a metódy najmenších štvorcov, boli tieto hodnoty aproximované funkciami jednej premennej. Nie všetky tieto funkcie mali vlastnosti fuzzy negátora. Program v týchto negatívnych prípadoch na nesplnenie jednotlivých vlastností upozorňuje a následne určí Sugenov negátor, ktorý túto funkciu najlepšie aproximuje. Pôvodnú funkciu aj vhodný negátor vykreslí. Grafy na obrázkoch 6.1, 6.2, 6.3 ukazujú, ako jednotlivé výroky dopadli, a ktorým známym negátorom sa dajú najpresnejšie aproximovať.

Zaujímavé je, že vo všetkých prípadoch boli porušené okrajové podmienky fuzzy negátora. Dvojice výrokov 1,8 a 10,15 som zámerne znegoval striktne. Tak, ako som predpokladal, boli vnímané z hľadiska negácie ako najbližšie ku klasickej negácii, a teda funkcie z nich vytvorené majú najbližšie k štandardnému negátoru. Pri zvyšných dvojiciach bol pri negovaní použitý rôzny stupeň vágnosti, čo sa prejavilo aj pri ohodnocovaní pravdivosti výrokov, a teda následne to malo vplyv aj na priebeh príslušných funkcií. Otázkou ostáva, do akej miery boli účastníci experimentu ovplyvnení negáciou v klasickej logike, a ako by to dopadlo pri menej technicky založených respondentoch.



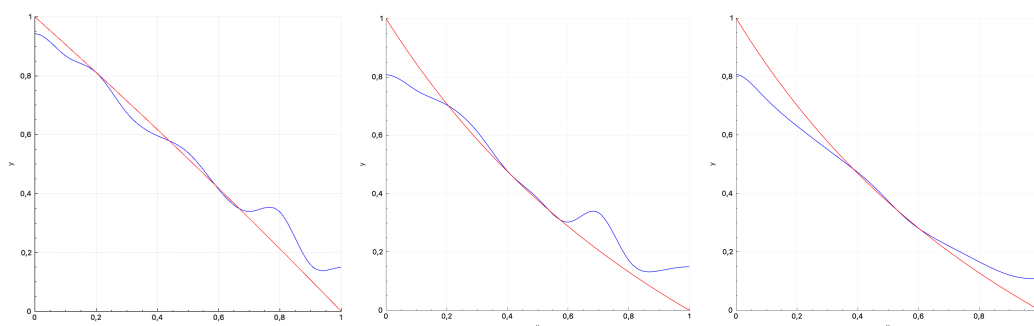
(a) Sugenov negátor s parametrom 0.18 (červená) s funkciou vygenerovanou z výrokov 1 a 8 (modrá). Podobnosť grafov je približne 91.25%.  
 (b) Sugenov negátor s parametrom 0.14 (červená) s funkciou vygenerovanou z výrokov 2 a 6 (modrá). Podobnosť grafov je približne 56.35%.  
 (c) Sugenov negátor s parametrom 0.63 (červená) s funkciou vygenerovanou z výrokov 3 a 9 (modrá). Podobnosť grafov je približne 62.62%.

Obr. 6.1: Získané funkcie vytvorené pomocou b-spline kriviek tretieho stupňa.



(a) Sugenov negátor s parametrom 1.27 (červená) s funkciou vygenerovanou z výrokov 4 a 11 (modrá). Podobnosť grafov je približne 53.3%.  
 (b) Sugenov negátor s parametrom 0.28 (červená) s funkciou vygenerovanou z výrokov 5 a 13 (modrá). Podobnosť grafov je približne 53.46%.  
 (c) Sugenov negátor s parametrom 3.59 (červená) s funkciou vygenerovanou z výrokov 7 a 14 (modrá). Podobnosť grafov je približne 47.95%.

Obr. 6.2: Získané funkcie vytvorené pomocou b-spline kriviek tretieho stupňa.



(a) Sugenov negátor s parametrom -0.07 (červená) s funkciou vygenerovanou z výrokov 10 a 15 (modrá). Podobnosť grafov je približne 79.73%.  
 (b) Sugenov negátor s parametrom 0.59 (červená) s funkciou vygenerovanou z výrokov 12 a 16 (modrá). Podobnosť grafov je približne 73.258%.  
 (c) Sugenov negátor s parametrom 0.71 (červená) s funkciou vygenerovanou zo všetkých použitých výrokov (modrá). Podobnosť grafov je približne 76%.

Obr. 6.3: Získané funkcie vytvorené pomocou b-spline kriviek tretieho stupňa.

# Kapitola 7

## Záver

V tejto práci som sa venoval triedam fuzzy negátorov, ich konštrukciám a aplikáciám pri konštrukcii trojuholníkových noriem a konoriem. Najskôr som predstavil niekoľko základných involutívnych negátorov. Venoval som sa aj generovaniu nových negátorov pomocou rastúcich bijekcií a ich vlastnostiam. Podarilo sa mi zovšeobecniť známu konštrukciu negátorov pomocou funkcií, ktoré nie sú nutne bijektívne.

Je známe, že ak  $\rho : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je rastúca bijekcia a  $e \in [0, 1]$  je pevný bod negátora  $N$ , tak  $\rho^{-1}(e)$  je pevný bod  $\rho$ -transformácie negátora  $N$ . V práci boli stanovené podmienky, za ktorých tento vzťah platí aj ak  $\rho$  nie je rastúca bijekcia.

V ďalšej časti som sa venoval trojuholníkovým normám, ich aditívnym a multiplikatívnym generátorom a spôsobu generovania trojuholníkových noriem pomocou týchto generátorov. Podobne som študoval aj trojuholníkové konormy, kde som zároveň ukázal vzťahy medzi generátormi t-noriem a s-noriem. V závere tejto časti som riešil konštrukciu t-noriem a s-noriem pomocou Sugenovho/Yagerovho negátora a pri ich opakovanom skladaní so štandardným negátorom. Tento spôsob konštrukcie som aplikoval na dve zo štyroch základných trojuholníkových noriem. Boli stanovené podmienky, za ktorých týmto skladaním vznikne znovu t-norma/s-norma a zároveň boli určené limitné t-normy/s-normy vzhľadom k použitým negátorom a vstupným t-normám/s-normám.

Posledná časť práce bola venovaná vyhodnoteniu výsledku experimentu a aproximácii negátora. Tu bola aplikovaná metóda najmenších štvorcov a b-spline krivky.

Ďalšie pokračovanie práce by sa mohlo uberať zovšeobecnením výsledkov konštrukcie t-noriem/s-noriem pomocou ľubovoľných involutívnych negátorov. Zaujímavá bude aj otázka konvergencie takto skonštruovaných t-noriem/s-noriem.

# Literatúra

- [1] Bedregal, B. C.: *On fuzzy negations and automorphisms*. Anais do CNMAC, 2009, ISBN 1984-820X.
- [2] Boor, C.: *A Practical Guide to Splines*. Springer, 1978, ISBN 978-0387953663.
- [3] Havlena, V.: *Konjunkce a disjunkce ve fuzzy logice*. bakalářská práce, Brno, FIT VUT v Brně, 2015.
- [4] Klement, E. P.; Mesiar, R.; Pap, E.: *Triangular Norms*. Boston: Kluwer Academic Publishers,, 2000, ISBN 978-0792364160, 385 s.
- [5] Klir, G.; Yuan, B.: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logics: Theory and Applications*. Prentice Halls PTR, Upper Saddle River, 1995, ISBN 0-13-101171-5.
- [6] Knuth, D. E.: *Umenie programovania 2. diel – Seminumerické algoritmy*. Brno: Computer Press a.s., 2010, ISBN 978-80-251-2898-5.
- [7] Kolesárová, A.; Kováčová, M.: *Fuzzy množiny a ich aplikácie*. Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve STU, 2004, ISBN 80-227-2036-4.
- [8] Wolberg, J.: *Data Analysis Using the Method of Least Squares*. Springer, 2006, ISBN 978-3540256748.
- [9] Zadeh, L. A.: *Information and Control*. Department of Electrical Engineering and Electronics I research Laboratory, University of California, Berkeley, California, 1965, ISBN 8:338-353.

# Príloha A

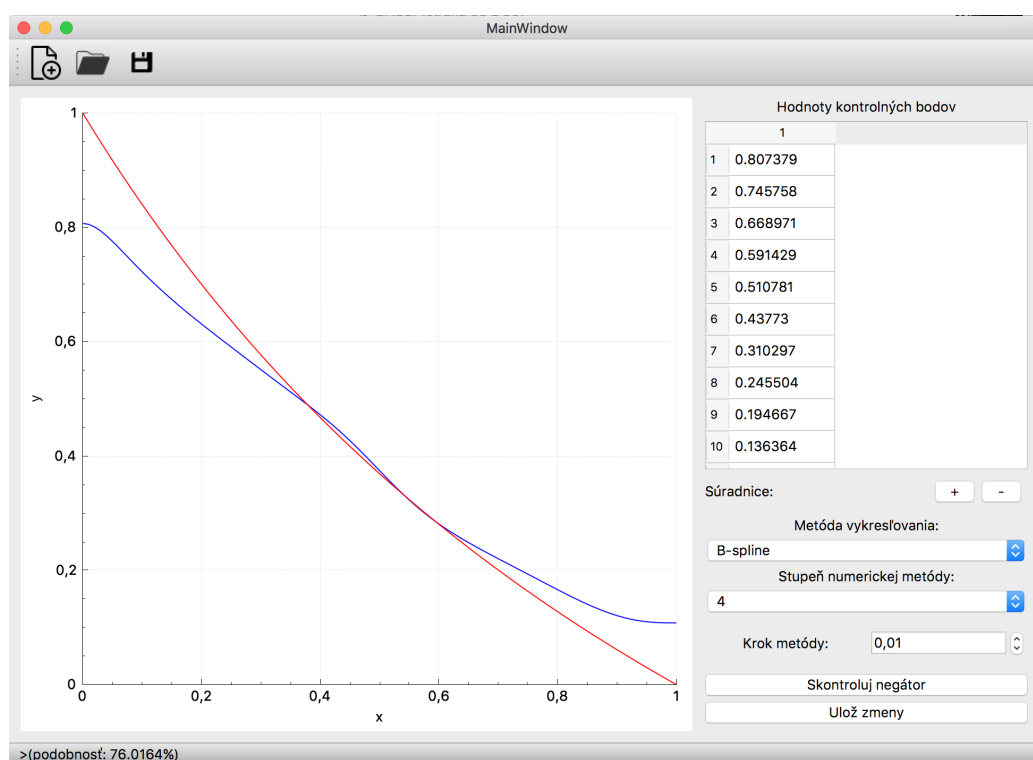
## Obsah CD

Priložené CD obsahuje:

- **xdekre00-BP.pdf** - text písomnej správy vo formáte PDF
- **tex/** - zdrojové kódy písomnej správy vo formate  $\text{\LaTeX}$
- **src/** - zdrojové kódy programu pre vykresľovanie funkcií
- **examples/** - príklady grafov z empirických dát
- **Makefile** - súbor pre preklad programu
- **README.txt** - návod na inštaláciu a užívateľská príručka
- **dotazník/** - dotazník s jednoduchým skriptom na jeho spracovanie

# Príloha B

## Ukážka aplikácie



Obr. B.1: Hlavné okno aplikácie.

# Príloha C

## Dotazník

V rámci svojej bakalárskej práce by som Vás rád poprosil o vyplnenie dotazníka, ktorý slúži pre zistenie ľudského chápania známych matematických operácií. Každému výroku priradte číslo 1-10, ktoré reprezentuje stupeň pravdivosti výroku podľa Vášho osobného názoru (1 - úplne nepravdivý, 10 - úplne pravdivý).

1. Štúdium na vysokej škole je jednoduché.
2. Bývať na Marse by bolo veľké dobrodružstvo.
3. Matematika má v živote človeka nenahraditeľnú úlohu.
4. Dnešní rodičia nevedia vychovať slušné deti.
5. Najkrajším ročným obdobím je leto.
6. Na Marse by bola nuda.
7. Blízka budúcnosť technológie spočíva v umelej inteligencii.
8. Štúdium na vysokej škole je náročné.
9. Matematika je veda, ktorá je najvzdialenejšia od reálneho života.
10. Pozeranie filmov je lepšie ako čítanie kníh.
11. Deti sú čím ďalej, tým vychovanejšie.
12. V Japonsku nemajú dobrú kuchyňu.
13. Leto nie je až tak dobré ako zima.
14. Umelá inteligencia je len sci-fi rozprávka.
15. Knihu nemôže nahradiť žiaden film.
16. Sushi je veľmi chutné jedlo.

## Príloha D

# Popis implementovaných tried

**mainwindow.cpp** - Trieda na kontrolu a riadenie funkcionality požadovanej od aplikácie.

**bspline.cpp** - Trieda na počítanie kontrolných bodov pomocou b-splinov.

**matrix.cpp** - Trieda na operácie s maticami, využívaná pri metóde najmenších štvorcov.

**settings.cpp** - Trieda na kontrolu a spracovanie požiadavkov od užívateľa pri pridávaní známich negátorov.

**squaremethod.cpp** - Trieda implementujúca výpočet bodov pomocou metódy najmenších štvorcov.

**uinterface.cpp** - Trieda implementujúca prácu s užívateľským rozhraním.