

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO

V OLOMOUCI

KATEDRA OPTIKY



**Analýza detekčních metod pro  
komunikaci s koherentními stavy světla**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Ondřej Klímek**

Vedoucí práce

**Mgr. Petr Marek, Ph.D.**

PALACKÝ UNIVERSITY OLMOUC

FACULTY OF SCIENCE

DEPARTMENT OF OPTICS



**Analysis of detection methods for  
coherent state communication**

MASTER THESIS

**Ondřej Klíček**

Supervisor

**Mgr. Petr Marek, Ph.D.**

#### Abstrakt:

Cílem diplomové práce je analyzovat komunikaci využívající koherentních stavů světla z pohledu metod detekce. Konkrétně jde o porovnání metod využívajících heterodynní detekci, ideální měření fáze a tzv. jednoznačnou diskriminaci koherentních stavů. Kromě těchto standardních detekčních metod se práce zabývá i analýzou metody nové, a to šumem indukovanou detekcí. Jednotlivé metody jsou porovnávány z pohledu pravděpodobnosti úspěchu realizace a pravděpodobnosti chyby detekce.

#### Klíčová slova:

detekce, koherentní stavy, heterodynní detekce, kanonické měření fáze, jednoznačné určení stavu, šumem indukované měření, pravděpodobnost správné detekce, pravděpodobnost úspěchu metody

#### Abstrakt:

The aim of the thesis is to analyse and compare several methods of detection usable for communication with phase encoded coherent states. In particular, we compare heterodyne detection, canonical phase measurement, unambiguous state discrimination and a new method: the noise induced measurement. We discuss the performance of these measurements in terms of the probability of correct detection and the probability of success.

#### Key words:

detection, coherent states, heterodyne detection, canonical phase measurement, unambiguous state discrimination, noise induced measurement, right detection probability, method success probability

### Poděkování

Mnohokrát děkuji vedoucímu diplomové práce Mgr. Petru Markovi, Ph.D. za veškerou trpělivost a ochotu, za cenné rady a za čas, který mi věnoval při tvorbě této práce. Dále pak mé rodině a blízkým za pochopení a povzbuzení, které pro mne měli v době jejího vypracovávání.

### Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem vytvořil tuto diplomovou práci samostatně pod vedením Mgr. Petra Marka, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje použité při jejím zpracování. Souhlasím, aby byla práce použita pro potřeby výuky a prezentována na internetových stránkách katedry optiky.

V Olomouci dne 25. dubna 2016

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
1.1 Kvantová optika . . . . .	1
1.2 Kvantová komunikace . . . . .	2
<b>2 Teoretické koncepty</b>	<b>4</b>
2.1 Obecný popis klasické komunikace . . . . .	4
2.2 Kvantová komunikace . . . . .	4
2.2.1 Anihilační a kreační operátory . . . . .	5
2.2.2 Koherentní stavy . . . . .	6
2.2.3 Reprezentace ve fázovém prostoru a Wignerova funkce . . . . .	6
2.3 Měření a pravděpodobnost . . . . .	9
<b>3 Optické nástroje</b>	<b>10</b>
3.1 Dělič svazku . . . . .	10
3.2 Operátor posunutí . . . . .	11
3.3 Detektory . . . . .	12
3.3.1 Lavinové fotodiody (APD) . . . . .	14
3.3.2 Homodynní detektor . . . . .	15
3.3.3 Dokonalé měření fáze . . . . .	18
3.3.4 Prahová PNR detekce . . . . .	18
<b>4 Analýza detekčních metod</b>	<b>21</b>
4.1 Pravděpodobnosti úspěchu a správné detekce . . . . .	21
4.2 Jednoznačné určení pomocí APD . . . . .	22
4.2.1 Ideální detekce . . . . .	27
4.2.2 Reálná detekce . . . . .	28
4.2.3 Vyhodnocení . . . . .	30
4.3 Heterodynní detekce . . . . .	32

4.3.1	Ideální detekce . . . . .	36
4.3.2	Reálná detekce . . . . .	36
4.3.3	Vyhodnocení . . . . .	37
4.4	Kanonické měření fáze . . . . .	38
4.4.1	Měření . . . . .	40
4.4.2	Vyhodnocení . . . . .	41
4.5	Šumem indukované měření . . . . .	42
4.5.1	Ideální měření . . . . .	44
4.5.2	Reálné měření . . . . .	44
4.5.3	Vyhodnocení . . . . .	47
4.6	Porovnání analyzovaných metod . . . . .	47
4.6.1	Ideální podmínky . . . . .	47
4.6.2	Reálné podmínky . . . . .	48
4.6.3	Podmínky slabých signálů . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>51</b>

# 1 Úvod

## 1.1 Kvantová optika

Když roku 1899 přišel Max Planck s hypotézou spojenou s vyzařováním černého tělesa, odstartoval novou epizodu chápání světa kolem nás. Max Planck ve své hypotéze pracoval s úplně novou představou toho, jak se světlo může chovat. Planck nejenže nepodpořil představu Isaaca Newtona, která popisuje světlo coby proud mechanických částic a která byla všeobecně uznávána až do 19. století, současně však nesouhlasil ani s představou světla jakožto vlny, popsané Ch. Huygensem, která Newtonovu teorii v 19. století nahradila díky experimentům například T. Younga, když - na rozdíl od Newtona - dokázala vysvětlit jev interference. Planckovo pojetí však neodpovídalo ani v té době nejpropracovanější teorii světla od J. C. Maxwella, který popisoval světlo jako elektromagnetické vlnění.

Planck totiž pracoval s myšlenkou, že černé těleso nevyzařuje energii spojitě, ale po určitých diskrétních hodnotách – *kvantech* – kde jedno kvantum energie je přímo úměrné frekvenci světla a konstantě úměrnosti  $h$  [1]. Když o několik let později A. Einstein vysvětlil fotoelektrický jev právě i na základě Planckovy hypotézy, otevřela se tím fyzikálnímu světu cesta do doposud neprobádaných vod kvantové mechaniky.

Od té doby následovala celá řada dalších objevů - kvantová mechanika pomohla k lepšímu pochopení atomární struktury látek a elementárních částic, čímž dala vzniknout celé řadě dílčích kvantových odvětví včetně kvantové chemie či kvantové elektroniky. Pochopení toho, jak spolu interaguje světlo a hmota vedlo k tomu, že byl roku 1960 sestaven první laser [2].

Vznik laseru dal vědcům do rukou výborný nástroj ke zkoumání dalších vlastností světla. Experimentální realizace nelineárních optických procesů, jednofotonových či entanglovaných stavů vedly k rozvoji nových oblastí uvnitř kvantové optiky jako například kvantová ko-



munikace a kvantové zpracování informace [3].

Současná kvantová optika se zabývá například výzkumy generování ultrakrátkých laserových pulzů, interakce světla a jiných fyzikálních systémů, kvantových počítačů či efektivní kvantové komunikace.

## 1.2 Kvantová komunikace

Vědecký pokrok ve dvacátém století v oblastech fyziky a matematiky vedl k vývoji efektivnějších technologií pro komunikaci a šíření informací. Tyto technologie tvoří jeden ze základních pilířů informační společnosti a naší globální ekonomiky, které jsou vysoce závislé na rychlých a bezpečných metodách pro přenos a distribuci informací. Aby dokázaly uspokojit stále se zvyšující nároky na rychlost a bezpečnost, šifrování a metody komunikace, je nutné tyto technologie a metody neustále vyvíjet a zlepšovat [4].

Jednou z výhodou kvantových komunikačních systémů je právě jejich bezpečnost. Na základě poznatků z kvantové mechaniky totiž lze zajistit, aby komunikace mezi dvěma stranami (pojmenujme je Alice a Bob) nebyla kompromitována [3]. Tato činnost se nazývá *kvantová kryptografie* anebo *kvantová distribuce klíče*. Základní myšlenka této procedury vychází z pravidel kvantové mechaniky, kde každé pozorování mění systém, který je pozorován [5]. Tedy skutečnost, že je zde někdo, kdo odposlouchává komunikaci mezi Alicí a Bobem, se projeví v komunikačním kanálu mezi nimi [6]. První takový komunikační protokol (BB84) vznikl v roce 1984 a je pojmenován po Charlesi H. Bennetovi a Gillesi Brassardovi, kteří jej navrhli [7]. V dnešní době jsou kryptografické systémy založené na kvantové distribuci klíče dostupné dokonce už i komerčně [8, 9].

V kvantových komunikačních systémech se jako komunikační médium využívají fotony, které umožňují snadnou změnu kvantového stavu, současně se volně nemění v čase a špatně interagují s okolním prostředím [3]. Potřebnou informaci můžeme vkládat buďto do inten-

zity anebo do fáze komunikačního optického pole[2, 10].

V kapitole 2 této práce se nejprve seznámíme se základními pojmy a koncepty kvantové komunikace potřebnými pro naše účely. Kapitola 3 vysvětluje optické nástroje, které jsme v naší práci používali. Kapitola 4 nám přiblíží konkrétní metody, které jsme zkoumali. Tato kapitola se rovněž pokouší dané metody charakterizovat z pohledu přesnosti výsledků a úspěšnosti jednotlivých realizací, a na závěr mezi sebou porovnat. Poslední kapitola, kapitola 5, shrnuje výsledky této práce.

## 2 Teoretické koncepty

Na úvod se pokusíme vysvětlit několik základních konceptů, které tato práce, potažmo kvantová komunikace, využívá. Popíšeme si, jak je možné pomocí světla komunikovat, jak se kvantová komunikace liší od klasické a jakou roli v tom hraje pravděpodobnost.

### 2.1 Obecný popis klasické komunikace

Základem každé efektivní komunikace musí být společná soustava symbolů, kterou dokážou obě strany stejně identifikovat. V našem případě půjde o komunikaci mezi stranami A a B, kde

A (Alice) kóduje znaky  $\{a_i\}$   
B (Bob) měří (čte) znaky  $\{b_j\}$ .

V nejjednodušším případě jsou množiny  $\{a_i\}$  a  $\{b_i\}$  totožné a Bob vždy přesně dekóduje Alicí zaslané symboly.

V reálném případě však může v důsledku vnějších vlivů, jako je například šum, dojít k případům, kdy při čtení dojde k chybě. Takovou komunikaci lze charakterizovat pomocí matice podmíněných pravděpodobností

$$P_{ij} = P(b_j|a_i), \tag{1}$$

kde  $P_{ij}$  je pravděpodobnost, že Bob změřil symbol  $b_j$  pokud Alice kódovala symbol  $a_i$ .

S pomocí těchto pravděpodobností lze celý komunikační protokol kvantitativně ohodnotit, například pomocí *kapacity* nebo *pravděpodobností chyby* [11].

### 2.2 Kvantová komunikace

Kvantová komunikace spočívá v tom, že informace, kterou si Alice s Bobem předávají, je kódována do kvantových systémů. Kvantové stavy jsou obecně neortogonální a přirozeně vedou na závislost typu (1).

Historicky nejstarší funkční protokoly (například BB84) pro kvantovou komunikaci využívají *polarizace fotonů* [3]. Můžeme tak například fotonům s vertikální polarizací, které Alice vysílá, přiřadit hodnotu 1 a fotonům s horizontální hodnotu 0. Neortogonálna se pak projeví při zasílání polarizací diagonálních či kruhových. V nejjednodušším případě tak Bob podle jejich polarizace přečte binární vzkaz.

Jinou variantou je kódování pomocí různých časových oken. Sleduje se zde pouze jeden mód a rozhodující je čas ve kterém foton dorazí [2, 12].

V této práci se budeme zabývat komunikací kódovanou do fáze optického signálu. Jako kvantový systém, skrze který komunikace probíhá, budeme pracovat výhradně s koherentními stavy, které si popíšeme na následujících řádcích. Začneme však od začátku: Budiž světlo!

### 2.2.1 Anihilační a kreační operátory

V základním přiblížení můžeme jeden mód světla popisovat jako harmonický oscilátor s hamiltoniánem

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right), \quad (2)$$

vyjadřujícím jeho energii, kde  $\hat{n}$  je operátor počtu částic, který můžeme vyjádřit jako součin

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (3)$$

operátorů  $\hat{a}^\dagger$  a  $\hat{a}$ . Protože tyto operátory popisují změnu systému přidáním anebo odebráním jednoho kvanta energie, nazýváme je *kreační* ( $\hat{a}^\dagger$ ) a *anihilační* ( $\hat{a}$ ). Užitím kvadratur  $\hat{x}$  a  $\hat{p}$  můžeme oba operátory vyjádřit následujícími vztahy:

$$\hat{a} = \left(\frac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \left(\frac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}\right). \quad (4)$$

Samotné operátory  $\hat{x}$  a  $\hat{p}$  nabývají tvarů:

$$\hat{x} = \frac{\hat{a}^\dagger + \hat{a}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p} = \frac{i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

Na následujících stránkách budeme nadále zachovávat konvenci  $\hbar = 1$ .

### 2.2.2 Koherentní stavy

Koherentní stavy jsou vlastními stavy anihilačního operátoru

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (6)$$

kde  $\hat{a}$  je anihilační operátor a  $\alpha$  vlastní číslo. Koherentní stav lze vyjádřit pomocí báze Fockových stavů  $|n\rangle$  jako nekonečnou superpozici:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (7)$$

Tyto stavy mají Poissonovské rozdělení počtu fotonů se střední hodnotou  $|\alpha|^2$  [13].

Koherentní stavy, jsou kvantovým analogem klasické komplexní amplitudy, a kvalitní lasery produkují záření popsatelné právě takovými stavy [3].

### 2.2.3 Reprezentace ve fázovém prostoru a Wignerova funkce

Na základě historické analogie s mechanickým oscilátorem může být světlo popisováno jako elektromagnetický oscilátor se statistikou komplexní amplitudy  $\alpha$ , kde je reálná a imaginární část této komplexní amplitudy vyjádřena pomocí složek polohy  $x$  a hybnosti  $p$  a následně rozdělením  $P(x,p)$  ve fázovém prostoru. Toto rozdělení vyjadřuje pravděpodobnost nalezení libovolného páru hodnot  $x$  a  $p$  během jejich současného měření.

V kvantové optice je situace trochu složitější. Světlo nepopisujeme pomocí elektromagnetických vln, ale pomocí stavů módů pole, které jej plně charakterizují. Ukazuje se však,

že ne vždy je pro nás tento stavový popis výhodný a že bychom na světlo také rádi nahlíželi jako na distribuci jeho elektrických a magnetických složek namísto popisu stavu v Hilbertově prostoru. Ačkoliv cesta k takovému popisu není tak snadná jako v klasickém případě - například už Heisenbergovy relace neurčitosti nám neumožňují studovat  $x$  a  $p$  zároveň - je možná pomocí tzv. Wignerovy funkce.

Užitím formalismu Wignerovy funkce můžeme stav jednoho modu světla, jehož operátor hustoty je  $\hat{\rho}$ , charakterizovat reálnou dvourozměrnou funkcí

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} \int \exp(2ipq) \langle x - q | \hat{\rho} | x + q \rangle dq \quad (8)$$

Přestože je tato funkce reálná a normalizovaná, může nabývat záporných hodnot. Z tohoto důvodu se spíše než o rozdělení pravděpodobnosti mluvíme o *kvazipravděpodobnostním rozdělení*. I tak má však velmi užitečné fyzikální vlastnosti. Marginální rozdělení Wignerovy funkce

$$P_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, p) dp, \quad P_p(p) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, p) dx \quad (9)$$

jsou rozdělení pravděpodobností, které plně popisují statistiku měřených hodnot kvadrurních operátorů  $\hat{x}$  a  $\hat{p}$  [13].

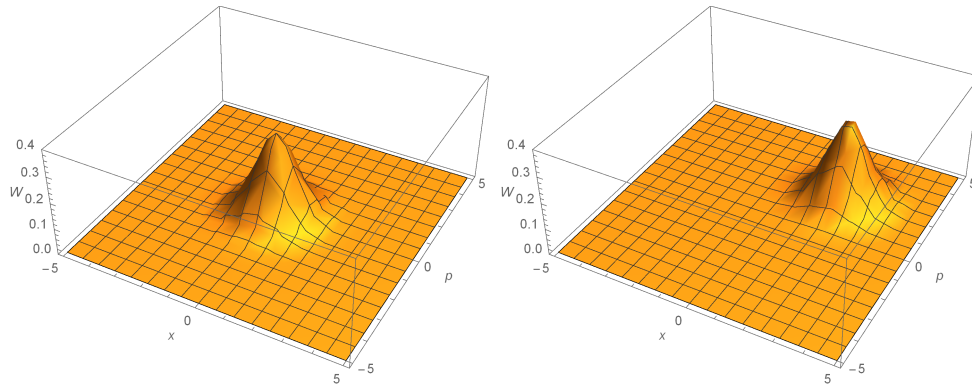
Pro názornost uveďme Wignerovu funkci vakua popsanou

$$W_0(x, p) = \frac{1}{\pi} \exp(-x^2 - p^2) \quad (10)$$

a koherentního stavu s amplitudou  $\alpha$  definovaného

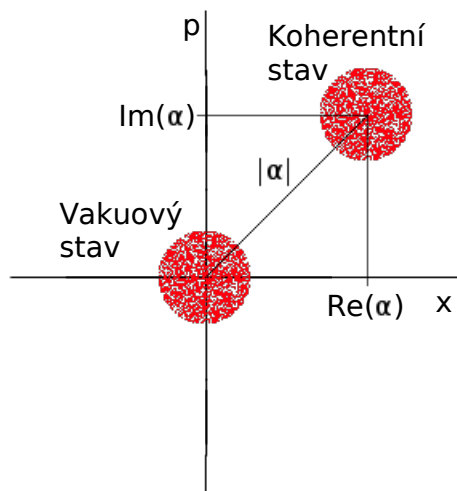
$$W_{CS}(x, p) = \frac{1}{\pi} \exp(-(x - x_0)^2 - (p - p_0)^2), \quad (11)$$

kde  $\alpha = \frac{x_0 + ip_0}{\sqrt{2}}$  způsobuje posunutí  $W_{CS}$  oproti  $W_0$ . Zmíněné Wignerovy funkce ilustrujeme na obrázku 1.



Obrázek 1: Wignerova funkce vakua (vlevo) a koherentního stavu (vpravo).

Při pohledu na rovnice 10 a 11 vidíme, že se jedná o gaussovské funkce. Pro lepší přehlednost můžeme situaci zjednodušit a prezentovat stavy v dvojrozměrném modelu. Při tomto zobrazení funkce znázorňujeme v polovině jejich extrémů. Vakuum tak můžeme schematicky znázornit jako kruh kolem počátku, koherentní stav je potom vakuum posunuté o amplitudu  $\alpha$  (obr.2).



Obrázek 2: Zobrazení vakuového a koherentního stavu ve fázovém prostoru

## 2.3 Měření a pravděpodobnost

V kvantové fyzice lze libovolný stav  $|\psi\rangle$  vždy vyjádřit v bázi vlastních stavů  $|a_k\rangle$  nějakého měření  $A$ . Stav  $|\psi\rangle$  je tak superpozicí všech možných vlastních stavů tohoto měření

$$|\psi\rangle = \sum_{a_k} c_{a_k} |a_k\rangle. \quad (12)$$

Pravděpodobnost, že daným měřením detekujeme právě vlastní stav  $|a_k\rangle$ , je dána jako

$$P_{a_k} = |\langle a_k | \psi \rangle|^2 \quad (13)$$

Ideální projektivní měření je popsáno pomocí projektorů na dané stavy, které jsou určeny jako

$$\hat{\Xi}_k = |a_k\rangle\langle a_k| \quad (14)$$

a pro pravděpodobnosti naměření  $|a_k\rangle$  platí

$$P_{a_k} = \langle \psi | \hat{\Xi}_k | \psi \rangle, \quad (15)$$

Při reálném - tedy složitějším - měření však musíme využít takzvanou *pozitivní operátorovou míru* (POVM). Jejími elementy jsou operátory odpovídající možným výsledkům měření [6].

Pro měřitelnou  $\hat{B}$  s možnými výsledky  $b_k$  je POVM formována operátory  $\Pi_k$  a pravděpodobnosti detekce příslušných hodnot  $b_k$  jsou

$$P_{b_k} = Tr[\hat{\rho}\hat{\Pi}_k] \quad (16)$$

Tyto POVM operátory jsou hermitovské, jejich součet je jednotkový operátor a obecná pravděpodobnost detekce hodnot  $b_k$  podle vztahu (16) leží na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .



## 3 Optické nástroje

Cílem této kapitoly je provést čtenáře veškerými nástroji, které budeme pro úpravu, zpracování, či analýzu optických signálů v této práci potřebovat. Snahou je popsat dané nástroje tak, aby v následujících kapitolách stačilo pouze odkázat a čtenář bude vědět, kde potřebné informace najít. Z tohoto důvodu je na následujících stranách věnována pozornost nejen stránce matematické, ale i stránce experimentální - popisujeme zde tedy i to, jakých fyzikálních mechanismů využíváme, či jak si danou věc představit v laboratoři.

### 3.1 Dělič svazku

Děličem svazku (BS) je optický nástroj, který slouží buďto k rozdělení jednoho svazku na více svazků, anebo k interferenčnímu dělení dvou příchozích svazků. Řečí kvantové optiky to znamená, že dělič zprostředkovává interakci dvou módů světla při zachování celkového počtu fotonů. Hamiltonián této interakce vypadá takto:

$$\hat{H} = \Theta(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger), \quad (17)$$

kde  $\hat{a}$  a  $\hat{b}$  odpovídají anihilačním operátorům interagujících módů a  $\Theta \in \mathbb{R}$ . Po interakci dvou vstupních módů světla získáváme na výstupech z děliče následující:

$$\begin{aligned} \hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U} &= \hat{a} \cos \Theta + \hat{b} \sin \Theta \\ \hat{U}^\dagger \hat{b} \hat{U} &= \hat{b} \cos \Theta - \hat{a} \sin \Theta, \end{aligned} \quad (18)$$

kde  $\Theta$  je definována přes propustnost  $t$  a odrazivost  $r$  děliče tak, že

$$t = \cos \Theta \quad (19)$$

$$r = \sin \Theta. \quad (20)$$

Tyto parametry děliče uvádí, jaká část vstupního svazku bude pokračovat skrze dělič dále a jaká se odrazí pryč. V naší práci budeme nejčastěji pracovat s vyváženými děliči, které zapisujeme jako BS1. Kromě nich budeme uvažovat ještě i silně nevyvážené děliče s  $t \rightarrow 1$ , které značíme BS2.

## 3.2 Operátor posunutí

Operátor posunutí definujeme

$$\hat{D}(\chi) = \exp(\chi \hat{a}^\dagger - \chi^* \hat{a}). \quad (21)$$

Tento operátor posune amplitudu  $\hat{a}$  o komplexní číslo  $\chi$  [13]

$$\hat{D}^\dagger(\chi) \hat{a} \hat{D}(\chi) = \hat{a} + \chi. \quad (22)$$

Experimentálně lze toto posunutí provést pomocí silně nevyváženého děliče (propustnost  $t$  jde k 1), na kterém necháváme interferovat koherentní stav  $|\beta\rangle$  se silným koherentním stavem  $|\alpha_0\rangle$ . Za těchto podmínek stav  $|\beta\rangle$  ovlivní pouze amplituda  $\alpha_0$ , o kterou se stav ve fázovém prostoru posune. Pro koherentní stavy, kterými se naše práce zabývá platí

$$U_{BS}|\beta, \alpha_0\rangle = |t\beta + r\alpha_0, t\alpha_0 - r\beta\rangle \quad (23)$$

užitím vlastnosti  $t \rightarrow 1$  pro silně nevyvážený dělič, můžeme první výstupní mód dále upravovat:

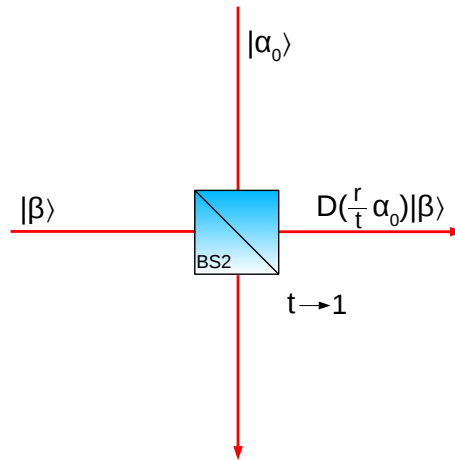
$$|t\beta + r\alpha_0\rangle \rightarrow |t(\beta + \frac{r}{t}\alpha_0)\rangle \approx |\beta + \frac{r}{t}\alpha_0\rangle \quad (24)$$

což můžeme zapsat jako

$$|t\beta + r\alpha_0\rangle \sim D\left(\frac{r}{t}\alpha_0\right)|\beta\rangle, \quad (25)$$

jak je schematicky naznačeno na obrázku 3.

Vidíme tedy, že posunutí o libovolnou komplexní amplitudu  $\gamma$  můžeme dosáhnout interferencí s koherentním stavem  $|\frac{t}{r}\gamma\rangle$ .



Obrázek 3: Experimentální provedení operace posunutí. Na děliči s propustností  $t \rightarrow 1$  interferuje signál  $|\beta\rangle$  se silným koherentním stavem  $|\alpha_0\rangle$ .

### 3.3 Detektory

Potřeba vysoké citlivosti měřících přístrojů, ať už v kvantové komunikaci, či v různých vědeckých a průmyslových aplikacích jako je fluorescenční spektroskopie, profilování vzdálených objektů optickou radarovou technikou, kvantová výpočetní technika a kryptografie a dalších, vede k stále rostoucímu zájmu o nízkoúrovňovou detekci světla a zobrazování. Fotonové čítání je dlouhodobě považováno za techniku vhodnou pro dosažení maximální citlivost v měření optických signálů, která nachází využití zejména v aplikacích, kde je doba měření velmi krátká, nebo okamžik příchodu optického signálu musí být znám s vysokou přesností [14].

Fotonové čítací a časově korelované jedno-fotonové čítací techniky byly vyvinuty za použití *fotonásobičů* (*PMT*), což jsou trubicové detektory s vysokým vnitřním ziskem. Vysoce výkonné PMT se průmyslově vyrábí od 1940 a dnešní komerčně dostupné zařízení může poskytnout čítání dokonce až do řádu milionů za sekundu.

Mezi největší výhody PMT patří velká detekční oblast ( $\approx \text{cm}^2$ ), což značně zjednodušuje konstrukci optického systému. PMT nicméně trpí nízkou účinností detekce. PMT využívají emise elektronů z fotokatody, tj. *vnější fotoelektrický jev*, jako primární krok detekce. Nevýhodou vnějšího fotoelektrického jevu je, že fotoelektrony jsou vysílány ve všech směrech, včetně směru zpět do fotokatody. Proto kvantová účinnost, tedy pravděpodobnost, že foton uvolní fotoelektron, je menší než 0,5. Nejlepší katody dosahují kvantové účinnosti asi 0,4 pro vlnové délky mezi 400 a 500 nm [15].

Detektory na polovodičové bázi jsou cennou alternativou k PMT. Kromě dobře známých výhod pevnolátkových systémů ve srovnání se zařízením z vakuových trubic (malá velikost, robustnost, nízký ztrátový výkon, nízké napětí, vysoká spolehlivost, nízké náklady, atd.), poskytují polovodičové detektory vyšší detekční účinnost, zejména v červené a blízké infračervené oblasti spektra [14].

Polovodičové detektory (*tzv. fotodiody*) totiž oproti PMT využívají *vnitřního fotoelektrického jevu*. To znamená, že fotony generují páry elektron-díra uvnitř polovodiče. Vnitřní fotoelektrický jev teoreticky pracuje s kvantovou účinností 1. V praxi lze s dobrou křemíkovou fotodiodou dosáhnout kvantové účinnosti kolem 0,8 na vlnových délkách okolo 800 nm [15]. Ve fotodiodách odděluje elektrony a díry elektrické pole, takže ve chvíli kdy je zařízení osvětleno, protéká fotoelektrický proud skrz zařízení. Proud způsobený jediným párem elektron-díra je bohužel příliš malý na to, aby byl zaznamenán přímo a jednotlivé fotony tedy mohou být detekovány pouze v případě, že polovodičový detektor má vnitřní mechanismus zesílení.

### 3.3.1 Lavinové fotodiody (APD)

Vhodný mechanismus zisku existuje v tzv. *lavinovém efektu*. Fotodiody jsou v tak vysokém závěrném napětí, že nosiče pohybující se skrz strhávají nové páry elektron-díra z mřížky materiálu polovodiče. Tento lavinový efekt je používán ve standardních lavinových fotodiodách a poskytuje stabilní zisk v řádu  $10^2$  až  $10^3$  [15].

Takovýto, fotonovým průrazem indukovaný, lavinový zisk už může být použit pro detektory čítání fotonů, avšak vyšší zisky mají za následek nestabilitu, která vede ke zničení diody. Aby se lavinovému zničení diody zabránilo, je připojen buďto aktivní anebo pasivní zhasínací obvod, který obnovuje normální funkčnost diody po jednotlivých fotonových detekcích. Tento princip se často nazývá *Geigerovým režimem* fotodiody [15].

V následujících odstavcích si popíšeme lavinovou fotodiodu matematicky.

Lavinová dioda je detektor, který nám dává dva druhy výstupu. První nastává, když detektor detekuje fotony. Tomuto výstupu budeme dále v textu říkat "klik" (detektor "klikl") a budeme mu přisuzovat hodnotu "1". Druhým případem je situace, kdy detektor fotony nedetekuje. V tomto případě říkáme, že "neklikl" a získáváme hodnotu "0".

Ideální měření tímto detektorem můžeme popsat následujícími POVM elementy:

$$\Pi_{not} = |0\rangle\langle 0| \quad (26)$$

pro případ kdy detektor fotony nedetekuje a

$$\Pi_{ok} = 1 - \Pi_{not} \quad (27)$$

při detekci fotonů.

Při užití reálných detektorů však musíme v měření zohlednit dvě nové veličiny: *ztráty* a *temné kliky*. Ztráty jsou způsobeny zejména nízkou kvantovou účinností detektorů. Temné kliky popisují situaci, kdy detektor klikne, ačkoliv na něj žádný foton nedopadá. Důvodem těchto temných kliků je samovolné spuštění laviny uvnitř detektoru bez přítomnosti vnějších

fotonů.

POVM elementy reálného měření APD detektorem mají následující tvary:

$$\Pi_{not} = (1 - P_{TK}) \sum_{n=0}^{\infty} [1 - \eta(1 - P_{TK})]^n |n\rangle\langle n| \quad (28)$$

a

$$\Pi_{ok} = 1 - \Pi_{not},$$

kde  $P_{TK}$  je pravděpodobnost temných kliků a  $\eta$  jsou ztráty. V naší práci budeme vycházet z vlastností APD detektorů stanovených na  $\eta = 0,5$  a  $P_{TK} = 10^{-5}$ .

Pravděpodobnosti příslušných výsledků pro teoretické i reálné detekce jsou dány jako

$$P_{not} = \langle \phi | \Pi_{not} | \phi \rangle \quad (29)$$

a

$$P_{ok} = \langle \phi | \Pi_{ok} | \phi \rangle, \quad (30)$$

kde  $|\phi\rangle$  symbolizuje stav, který měříme.

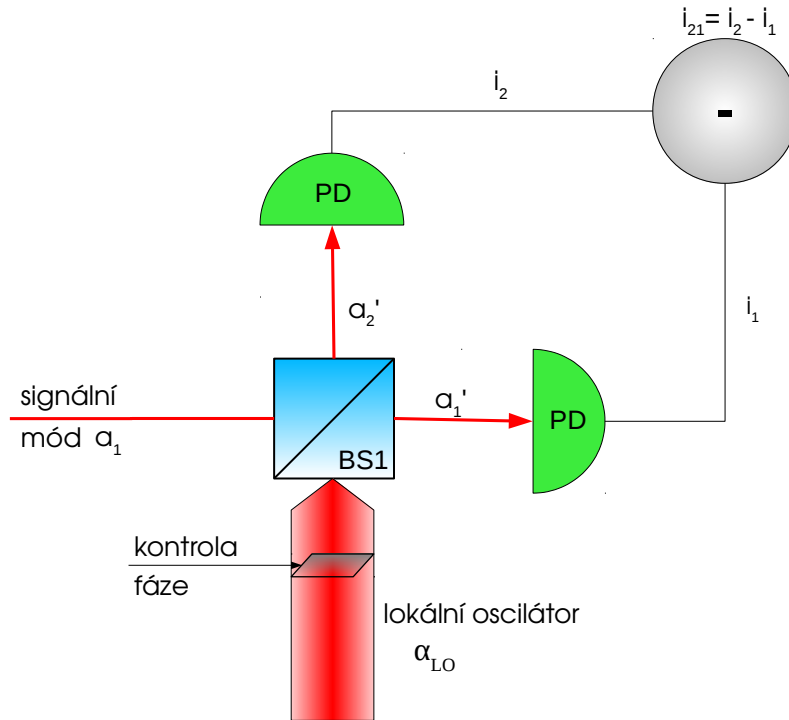
### 3.3.2 Homodynní detektor

Naprosto odlišným typem detektoru je tzv. *Homodynní detektor*. Zatímco u APD jsme intenzitně vyhodnocovali pravděpodobnou (ne)přítomnost fotonů, tento typ detekce je schopen měřit hodnoty libovolné kvadratury [13]:

$$\hat{x}(\theta) = \hat{x} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta. \quad (31)$$

Základní schéma homodynního detektoru je znázorněno na obrázku 4.

Základem homodynního detektoru jsou dva módy vstupního signálu. První z nich je mód signální  $a_1$ , který budeme analyzovat. Druhým - referenčním - módem je silný koherentní



Obrázek 4: Schéma homodynního detektoru. Signální mód interferuje na vyváženém děliči BS1 s lokálním oscilátorem. Oba výstupy jsou detekovány fotodiodami PD a následně vzájemně odečteny. Zrcátko slouží k řízení fáze lokálního oscilátoru.

signál  $\alpha_{LO}$  s dobře definovanou fází  $\theta$ , který nazýváme *lokální oscilátor*. Lokální oscilátor je natolik silný, že zanedbáváme jeho kvantové fluktuace a můžeme jej popisovat klasicky. Fází lokálního oscilátoru jsme schopni kontrolovat například pomocí piezo-elektricky pohyblivého zrcátka.

Tyto dva signály spolu necháme interferovat na vyváženém děliči a výstupní stavy detekujeme pomocí intenzitních detektorů. Naměřené hodnoty intenzit fotoelektrických proudů  $i_1$  a  $i_2$  se elektronicky zpracují a následně od sebe odečtou. Rozdíl intenzit  $i_{21} = i_2 - i_1$  obsahuje interferenční člen lokálního oscilátoru a signálu.

Předpokládejme, že naměřené intenzity  $i_1$  a  $i_2$  jsou úměrné fotonovým číslům  $\hat{n}_1$  a  $\hat{n}_2$  signálů vedoucích k oběma detektorům. Ty jsou dány jako

$$\hat{n}_1 = \hat{a}'^\dagger \hat{a}' \quad a \quad \hat{n}_2 = \hat{a}'^\dagger \hat{a}'_2 \quad (32)$$

za použití operátorů výstupních módů

$$\hat{a}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \alpha_{LO}), \quad \hat{a}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \alpha_{LO}), \quad (33)$$

kde  $\hat{a}$  označuje anihilační operátor signálu a  $\alpha_{LO}$  komplexní amplitudu lokálního oscilátoru (jak již bylo řečeno, na lokální oscilátor pohlížíme klasicky), je velikost intenzity  $i_{21}$  úměrná rozdílu fotonových čísel

$$\hat{n}_{21} = \hat{n}_2 - \hat{n}_1 = \alpha_{LO}^* \hat{a} + \alpha_{LO} \hat{a}^\dagger. \quad (34)$$

Vyjádríme nyní lokální oscilátor pomocí amplitudy a nenulové hodnoty fáze jako

$$\alpha_{LO} = |\alpha_{LO}| e^{i\theta} \quad (35)$$

dosazením tohoto výrazu do rovnice (34) získáváme výraz

$$\hat{n}_{21} = |\alpha_{LO}| e^{-i\theta} \hat{a} + |\alpha_{LO}| e^{i\theta} \hat{a}^\dagger. \quad (36)$$

Pokud nyní operátory  $\hat{a}$  a  $\hat{a}^\dagger$  vyjádříme pomocí rovnic (5) a upravíme exponenciální funkce, získáme vyjádření

$$\hat{n}_{21} = \sqrt{2} |\alpha_{LO}| (\hat{x} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta), \quad (37)$$

což přesně odpovídá měření kvadratury (31).



### 3.3.3 Dokonalé měření fáze

Ačkoliv je využívání fáze kvantových stavů světla jedním ze základních konceptů kvantové komunikace [3], její přímé měření je značně problematické. Fázi totiž, bohužel, není možné vyjádřit jako kvantově-mechanickou pozorovatelnou, a tedy nemůže být projekčně měřena. Nejlepší možné představitelné měření, takzvané "kanonické měření fáze" [16], můžeme matematicky popsat jako projekci na idealizované fázové stavy

$$|\theta\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\theta k} |k\rangle \quad (38)$$

Tyto fázové stavy nejsou normované, čímž jsou podobné vlastním stavům spojitých operátorů (jako poloha a hybnost), ale na rozdíl od nich jsou neortogonální. Právě tato neortogonalita souvisí s tím, že není možné fázi změřit kompletně a je nutné ji odvozovat na základě analýz výsledků jiných měření [17].

### 3.3.4 Prahová PNR detekce

Metoda prahové PNR (Photon number resolving) detekce v našem případě znamená, že máme detektor, který dovede měřit námi stanovené minimální -prahové- množství fotonů  $M$ . Znamená to, že detektor nám dává informaci, zda v proměřovaném signálu bylo alespoň  $M$  fotonů, či nikoliv.

Takto popsaný ideální prahový detektor pro měření koherentních stavů se dá vyjádřit pomocí POVM elementů

$$\Pi_{not} = \sum_{n=0}^{M-1} |n\rangle\langle n| \quad (39)$$

a

$$\Pi_{ok} = 1 - \Pi_{not}. \quad (40)$$

kde  $M$  je minimální množství fotonů, které chceme měřit.

V případě, že chceme tento detektor popsat pomocí reálných komponent, vyjdeme v našem zjednodušeném modelu - určenému pouze pro měření koherentních stavů - z prvků, které jej tvoří - z děličů a APD detektorů. Za pomoci vyvážených děličů a APD detektorů vytvoříme kaskádu schopnou měřit minimální přesné množství fotonů. Schéma experimentální realizace takového měření pro detekci 8 fotonů, které předpokládáme v této práci, je znázorněno na obrázku 5.

V ideálním reálném případě detektor funguje tak, že příchozí signál je rozdělen do větví detektoru až na jednotlivé fotony a počet APD detektorů, které kliknou, nám dávají přesnou informaci o minimálním počtu přítomných fotonů. Čtenáři zabývajícím se problematikou experimentálních sestav PNR detektorů i jejich realizací můžeme doporučit z literatury například [18, 19].

V námi prezentovaném uspořádání se signál musí nejprve rozdělit na  $M$  částí aby mohl být detekován:

$$|\beta\rangle \rightarrow \left| \frac{\beta}{\sqrt{M}} \right\rangle^{\otimes M} \quad (41)$$

Příslušné pravděpodobnosti toho, zda něco detekujeme či nikoliv, jsou poté dány:

$$P_{not} = \left| \left\langle \frac{\beta}{\sqrt{M}} \right| \Pi_{notR} \left| \frac{\beta}{\sqrt{M}} \right\rangle \right|^M \quad (42)$$

a

$$P_{ok} = \left| \left\langle \frac{\beta}{\sqrt{M}} \right| \Pi_{okR} \left| \frac{\beta}{\sqrt{M}} \right\rangle \right|^M \quad (43)$$

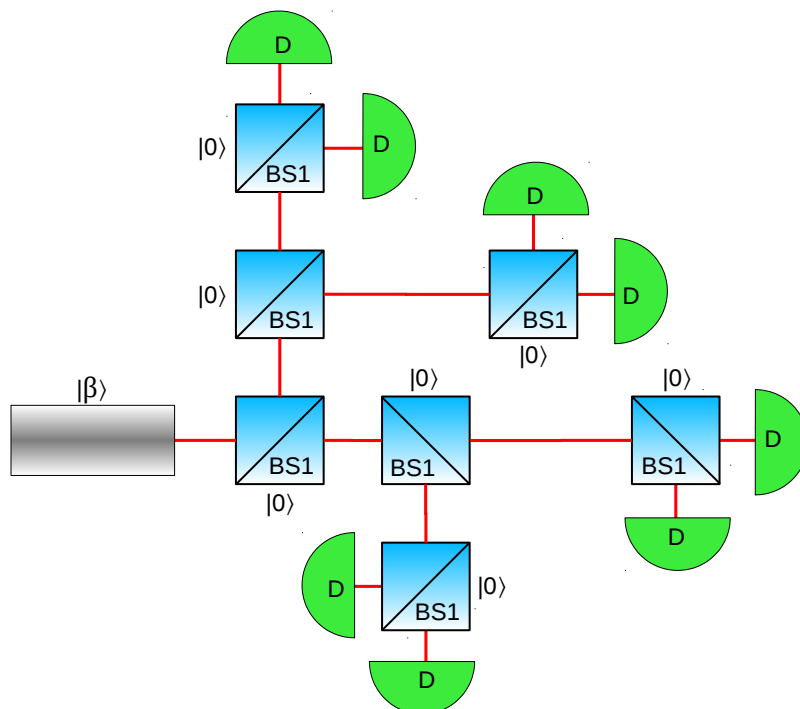
kde

$$\Pi_{notR} = (1 - P_{TK}) \sum_{n=0}^{\infty} [1 - \eta(1 - P_{TK})]^n |n\rangle \langle n| \quad (44)$$

a

$$\Pi_{okR} = 1 - \Pi_{notR}. \quad (45)$$

Hodnoty  $\eta$  a  $P_{TK}$  opět odpovídají ztrátám a pravděpodobnosti temných kliků zmíněných v kapitole 3.3.1.



Obrázek 5: Experimentální realizace námi využívaného prahového PNR detektoru pro měření 8 fotonů. BS1 značíme vyvážené děliče a D detektory APD.

## 4 Analýza detekčních metod

Zatímco předešlé kapitoly nás vybavily především teoretickým aparátem k popisu základních konceptů jak v kvantové fyzice samotné, tak při popisu měření, v této kapitole již budeme diskutovat konkrétní detekční metody a výsledky získané pomocí matematického modelování v programu Matlab. Na začátek vždy krátce metodu představíme, poté prezentujeme výsledky a na závěr metodu zhodnotíme. Každou z metod budeme analyzovat pro zvolené parametry amplitud( $\alpha, \beta$ ), účinnosti detektorů ( $\eta$ ), pravděpodobnosti výskytu temných kliků ( $P_{TK}$ ) a množství rozlišovaných komunikačních stavů ( $N$ ); kde zásadní pro nás bude pohled na *pravděpodobnost úspěchu* ( $P_{succ}$ ) a *pravděpodobnost správné detekce* ( $P_{SD}$ ), které si vysvětlíme hned v následující kapitole.

### 4.1 Pravděpodobnosti úspěchu a správné detekce

V kapitole 2.3 jsme si ukázali, jakým způsobem se dá vyjádřit pravděpodobnost detekovaných veličin. Nyní je pro nás důležité uvědomit si, že mohou existovat detekční metody, které pracují podmíněně. To znamená, že v dané metodě cíleně snížíme pravděpodobnost jejího úspěchu tak, abychom zvýšili pravděpodobnost toho, že výsledek bude pravdivý. V praxi to může znamenat, že detektor, do kterého jsme pustili signál, nám často nemusí dát vyhodnotitelný výsledek, ale když už nám jej dá, budeme vědět, že se bude více blížit pravdivé hodnotě.

Právě pro popis těchto situací u analýz detekčních metod v této práci, je nutné si tyto dva parametry kvantifikující měření vysvětlit.

Prvním parametrem je *pravděpodobnost úspěchu* ( $P_{succ}$ ). Tuto pravděpodobnost budeme vztahovat k provedení daných detekčních metod. Bude nás zajímat, jestli se daná metoda podařila realizovat. V této pravděpodobnosti nebudeme zkoumat výsledek metody, ale pouze to s jakou pravděpodobností jsme schopni výsledku dosáhnout.

Pravděpodobnost správné detekce ( $P_{SD}$ ) se oproti tomu zaměřuje výhradně na výsledek a říká nám, jak můžeme této metodě věřit - jakou má chybovost. Pro pravděpodobnost chyby platí

$$P_{chyby} = 1 - P_{SD}. \quad (46)$$

Pro lepší pochopení uvedeme na příkladu: Mějme měření, které je úspěšné, pokud z množství detektorů v sestavě klikne právě jeden.  $P_{succ}$  nám říká s jakou pravděpodobností klikne právě jeden, libovolný, detektor.  $P_{SD}$  pak udává s jakou pravděpodobností identifikoval tento jeden detektor signál zasláný Alicí.

Obě zmíněné pravděpodobnosti se napříč metodami výrazně liší a je potřeba pečlivě vážit, pro jaký konkrétní případ je pro nás výhodná která konkrétní detekční metoda.

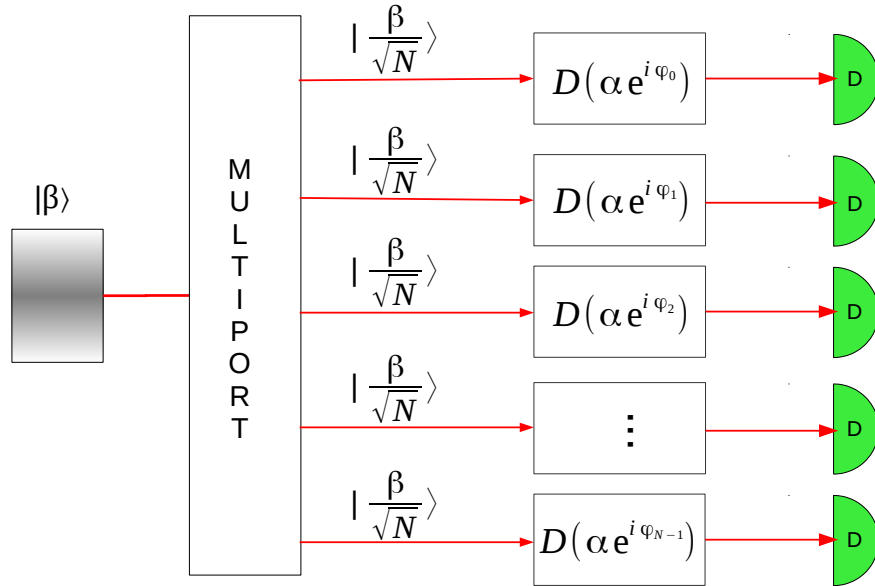
## 4.2 Jednoznačné určení pomocí APD

První popisovanou metodou je Jednoznačné určení/diskriminace pomocí APD (APD unambiguous discrimination (zkráceně APD)) [20]. Princip této metody spočívá v tom, že vstupní signál, který chceme analyzovat, fyzicky rozdělíme na  $N$  kopií, kde  $N$  je celkový počet možných komunikačních stavů, které se od sebe snažíme rozlišit. Na každou kopii následovně aplikujeme operátor posunutí a měříme pomocí APD detektoru. Schematicky je daná metoda zobrazena na obrázku 6.

Formálně můžeme celý proces popsat následujícím způsobem:

Mějme vstupní koherentní signál  $|\beta\rangle$  s neznámou amplitudou  $|\beta|e^{i\psi}$ , který přivedeme do *Multiportu*, který vstupní signál rozdělí na  $N$  stejných částí - kopií. Každý ze členů má nyní tvar  $\left| \frac{\beta}{\sqrt{N}} \right\rangle$ .

$$|\beta\rangle \rightarrow \left| \frac{\beta}{\sqrt{N}} \right\rangle^{\otimes N} \quad (47)$$



Obrázek 6: Schematické znázornění detekční metody. Signál je nejprve multiportem rozdělen na  $N$  kopií, a poté jsou aplikovány operátory posunutí  $D(\alpha_0), \dots, D(\alpha_{N-1})$ . Výsledné stavy jsou detekovány pomocí APD.

Na každou kopii nyní aplikujeme operátor posunutí tak, že  $n$ -tý stav posune o amplitudu

$$\alpha_n = \frac{|\beta|}{\sqrt{N}} e^{i\varphi_n}, \quad (48)$$

kde  $\varphi_n = \frac{2\pi n}{N}$  a  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Vzniklý stav  $|\phi_n\rangle$  má tvar

$$|\phi_n\rangle = \left| \frac{|\beta|}{\sqrt{N}} (e^{i\psi} - e^{i\varphi_n}) \right\rangle. \quad (49)$$

Základní myšlenka dané metody vychází z předpokladu, že pakliže je

$$\psi = \varphi_n, \quad (50)$$

pak se amplitudy odečtou a my získáváme vakuový stav. V ostatních případech amplituda zůstane nenulová a my dostáváme koherentní stav  $|\frac{\beta}{\sqrt{N}}\rangle$  posunutý ve fázovém prostoru o  $\alpha_n$ . Výsledkem je tedy množství koherentních stavů  $|\phi_n\rangle$  o různých amplitudách z nichž jeden je vakuový, například:

$$|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle, \dots, |0\rangle, \dots, |\phi_{N-1}\rangle, \quad (51)$$

které přivádíme na APD detektory. Vzhledem k symetrii situace, můžeme pro potřeby analýzy vycházet ze situace, kdy

$$\psi = 0, \quad (52)$$

tedy

$$\psi = \varphi_0 = 0, \quad (53)$$

a tak

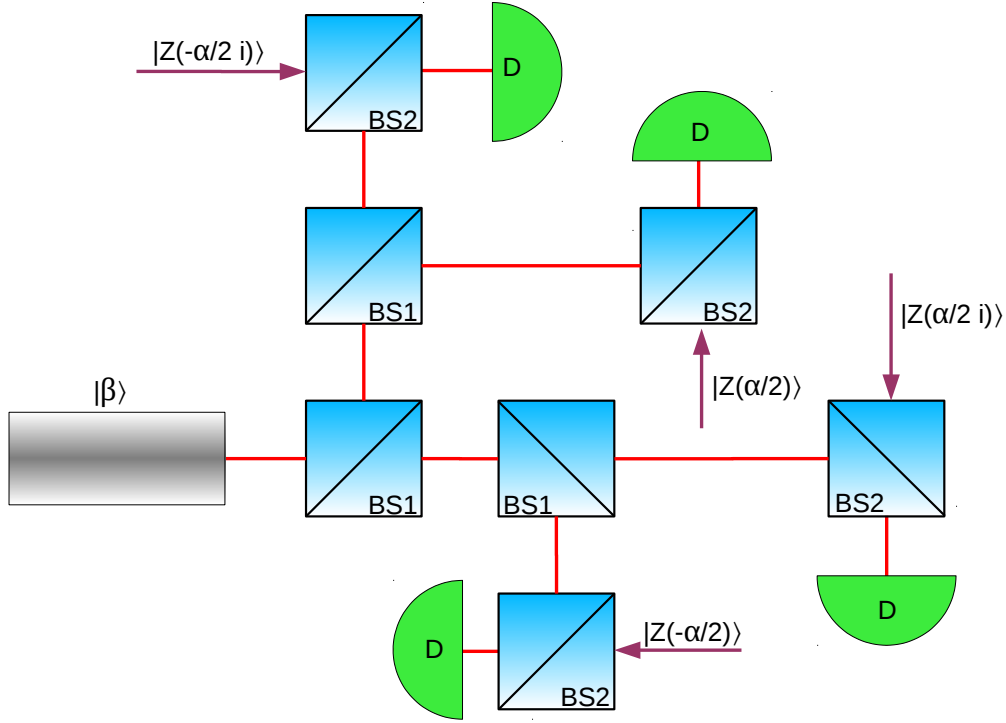
$$|\phi_0\rangle = |0\rangle. \quad (54)$$

Výsledkem daných posunutí jsou tak koherentní stavy  $|\phi_n\rangle$ :

$$|0\rangle, |\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, \dots, |\phi_{N-1}\rangle. \quad (55)$$

Jak by vypadalo experimentální uspořádání pro konkrétní případ, například  $N = 4$ , je vidět na obrázku 7. Multiport rozdělující signál  $|\beta\rangle$  je zde realizován pomocí trojice vyvážených děličů BS1.

Každé jednotlivé měření může vyústit v jeden ze dvou možných výsledků - 1 (naměřili jsme signál), anebo 0 (při absenci signálu), které popisujeme pomocí POVM elementů popsanych v kapitole 3.3.1 .



Obrázek 7: Experimentální uspořádání systému pro  $N=4$ . BS1 je vyvážený dělič, zatímco BS2 jsou děliče nevyvážené, pro které jde  $t \rightarrow 1$ . Písmenem  $D$  jsou označeny APD detektory.  $Z = (t/r)$  tak, aby došlo k posunutí  $|\beta + \alpha_n\rangle$ .

Výsledky měření 0,1 stavů  $|\phi_n\rangle$  budeme zaznamenávat jako vektor  $\vec{V}(\phi_n)$

$$\vec{V}(\phi_n) = \begin{pmatrix} V_0(|\phi_0\rangle) \\ V_1(|\phi_1\rangle) \\ V_2(|\phi_2\rangle) \\ \vdots \\ V_{N-1}(|\phi_{N-1}\rangle) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{pmatrix},$$

kde  $v_n \in \{0, 1\}$ .



Pravděpodobnost toho, že na  $n$ -tém detektoru naměříme na stavu  $|\phi_n\rangle$  hodnotu 0 resp. 1, je dána:

$$P(v_n = 0) = \langle \phi_n | \Pi_{not} | \phi_n \rangle, \quad (56)$$

$$P(v_n = 1) = \langle \phi_n | \Pi_{ok} | \phi_n \rangle. \quad (57)$$

Jak jsme již zmínili, zásadní je pro nás pohled na *pravděpodobnost úspěchu* ( $P_{succ}$ ) a *pravděpodobnost správné detekce* ( $P_{SD}$ ). Vyjděme z předpokladu, že v ideálním posunutí daném vztahem (49) musíme získat  $\vec{V}(\phi_n)$ , který má právě jeden element roven nule, a to v případě kdy  $\psi = \varphi_n$ . Všechny tyto situace dávají pravděpodobnost úspěchu

$$P_{succ} = \sum_{n=0}^{N-1} P(v_n = 0) \prod_{j \neq n} P(v_j = 1), \quad (58)$$

kde  $n, j \in \langle 0, N - 1 \rangle$ .

Pravděpodobnost  $P_{succ}$  obsahuje všechny varianty, kdy na právě jednom detektoru nedetekujeme signál.

Pravděpodobnost správné detekce vychází z rovnice (52) a výsledkový vektor  $\vec{V}$  má tvar:

$$\vec{V}_{SD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

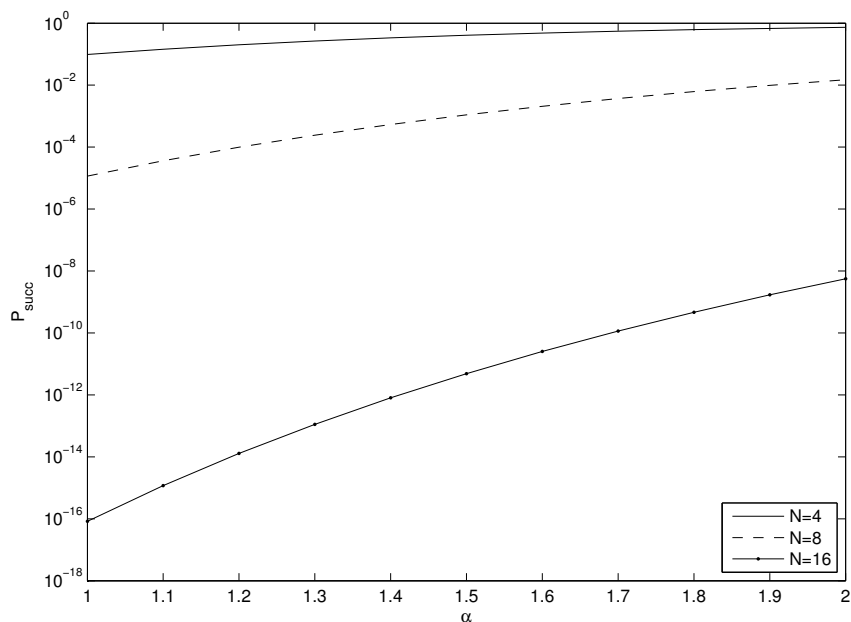
Z toho plyne, že pravděpodobnost správné detekce  $P_{SD}$  je dána jako

$$P_{SD} = \frac{P(v_0 = 0) \prod_{j \neq 0} P(v_j = 1)}{P_{succ}}. \quad (59)$$

Nyní budeme diskutovat výsledky dané detekční metody.

### 4.2.1 Ideální detekce

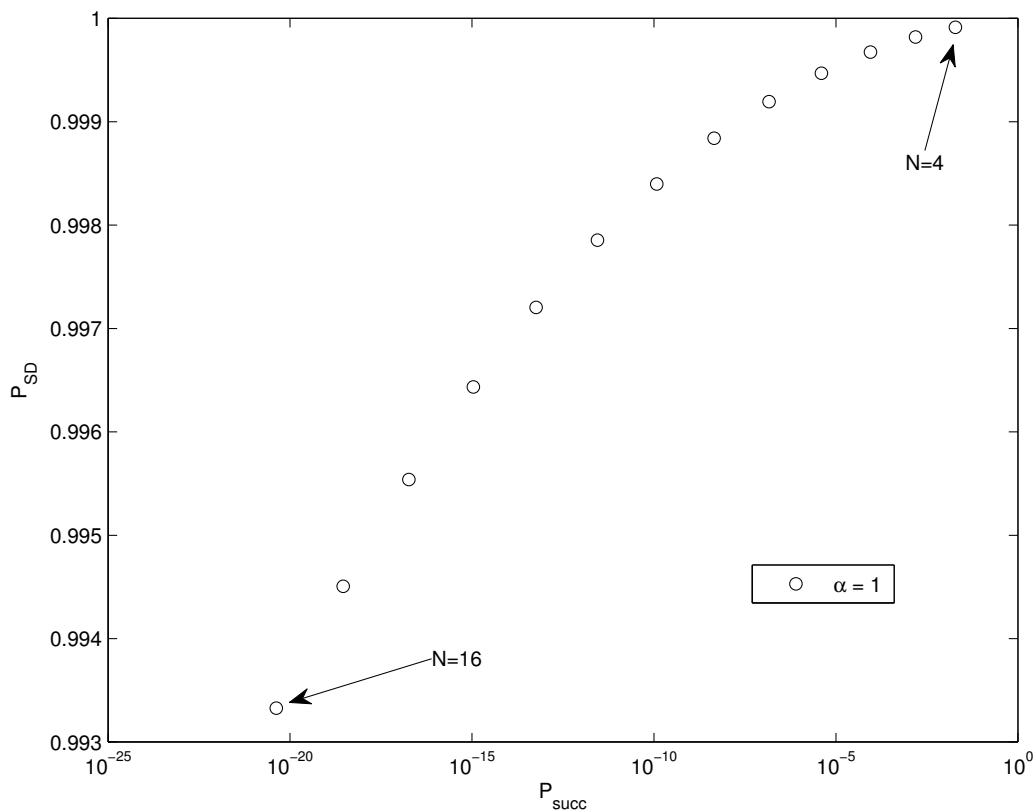
V prvním případě použijeme ideální detektory. To znamená detektory beze ztrát a temných kliků popsané v kapitole 3.3.1 vztahy (26) a (27). V tomto případě je pravděpodobnost správné detekce  $P_{SD} = 1$ , což znamená, že ve chvíli, kdy nám metoda dá výsledek, tak víme, že je správný. Jak ale z grafů, popisujících danou metodu, uvidíme, jistota správné detekce je vykoupena (ne)úspěšností jejího provedení  $P_{succ}$ . Na obrázku 8 vidíme znázorněné pravděpodobnosti úspěchu dané metody  $P_{succ}$  v závislosti na amplitudě signálu při užití různých počtů komunikačních stavů  $N$ . Nejvyšších hodnot při  $\alpha = 1$  na těchto grafech dosahujeme pro  $N = 4$ , což byl pro nás minimální počet stavů, který jsme v metodě pro komunikaci uvažovali. V tomto případě jsou hodnoty  $P_{succ} = 0.098$  při  $P_{SD} = 1$ . Zvětšením amplitudy  $P_{succ}$  výrazně vzroste a dostáváme se až na hodnotu 0,73.



Obrázek 8: Znázornění závislosti hodnot  $P_{succ}$  na hodnotách amplitudy pro různé množství komunikačních stavů  $N$ . Obrázek ilustruje vztah mezi  $P_{succ}$  a hodnotami amplitudy proměnnými na intervalu  $\langle 1, 2 \rangle$  při změně počtu komunikačních stavů  $N=4$ ,  $N=8$  a  $N=16$ .

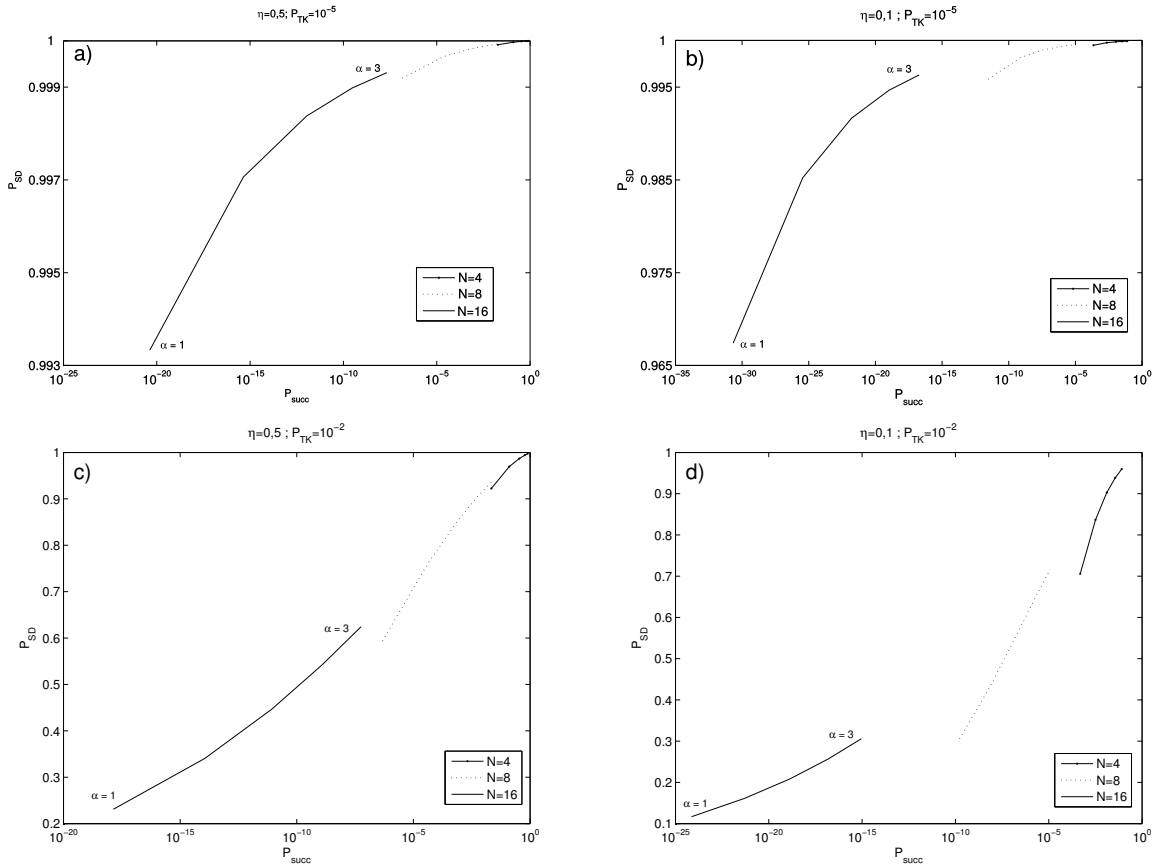
### 4.2.2 Reálná detekce

Nyní použijme detektory reálné. Faktor ztrát se nám projeví na účinnosti jednotlivých APD detektorů. Jak jsme již pověděli v kapitole 3.3.1, budeme uvažovat  $\eta = 0,5$  a  $P_{TK} = 10^{-5}$ . Již zavedením těchto parametrů nám musí být jasné, že přijdeme o jistotu správných výsledků. Na obrázku 9 můžeme vidět pokles hodnot  $P_{SD}$  pro stálou hodnotu amplitudy při změně počtu komunikačních stavů  $N$ .



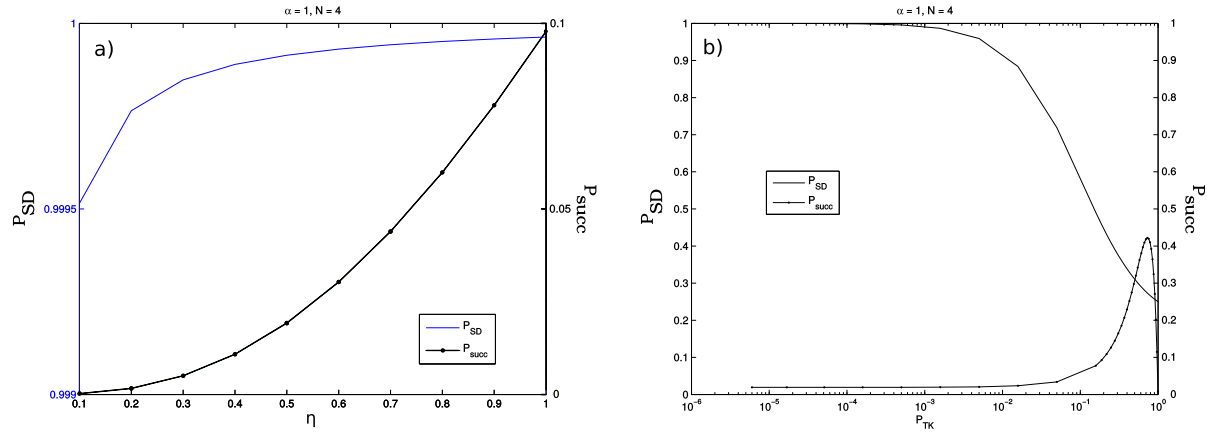
Obrázek 9: Závislost  $P_{SD}$  a  $P_{succ}$  na proměnném počtu komunikačních stavů  $N$  při užití reálných detektorů. Amplituda  $\alpha = 1$ . Pro lepší přehlednost je osa  $x$  v logaritmické škále.

Jak se projeví různé hodnoty ztrát ( $\eta$ ) a temných kliků ( $P_{TK}$ ) na požadovaných pravděpodobnostech  $P_{succ}$  a  $P_{SD}$  při proměnných hodnotách  $\alpha$  ilustrujeme na obrázku 10.



Obrázek 10: Znázornění hodnot pravděpodobností  $P_{succ}$  a  $P_{SD}$  při změně amplitudy  $\alpha$  mezi hodnotami  $\langle 1, 3 \rangle$  a různých hodnotách  $\eta$  a  $P_{TK}$ , uvedených v záhlaví grafů, pro konkrétní hodnoty  $N$ . Každá z křivek má své minimum na  $\alpha = 1$  a maximum při  $\alpha = 3$ , jak je na grafech vždy znázorněno u  $N = 16$ .

Detailnější pohled na vliv nedokonalostí na měření vidíme na obrázku 11. Závislost  $P_{SD}$  a  $P_{succ}$  na hodnotě účinnosti  $\eta$  ukazuje graf 11a) a na temných klicích  $P_{TK}$  graf 11b). Oba grafy zachovávají amplitudu na hodnotě 1 a množství rozlišovaných stavů na  $N = 4$ .



Obrázek 11: Znázornění závislosti pravděpodobností  $P_{succ}$  a  $P_{SD}$  na různých hodnotách  $\eta$  a  $P_{TK}$ . Pro graf a) platí  $P_{TK} = 10^{-5}$ , pro b)  $\eta = 0,5$ . Amplituda zafixována pro oba na  $\alpha = 1$  a počet rozlišovaných stavů na  $N = 4$ . Každá z křivek grafu a) má na ose  $y$  jiné měřítko.

### 4.2.3 Vyhodnocení

Jak je z výsledků analýzy patrné, daná metoda má výborné vlastnosti, co se  $P_{SD}$  týče. Tato pravděpodobnost se, za podmínky nízké hodnoty pravděpodobnosti temných kliků, v našich modelech nedostala pod 99% ani v případě, kdy užíváme reálných detektorů. Tato jistota je však vykupována nízkou  $P_{succ}$  metody.

Při bližším zkoumání grafů na obrázcích 10 a 11 bychom si měli povšimnout, co nám se sledovanými veličinami  $P_{SD}$  a  $P_{succ}$  dělají různé hodnoty pravděpodobnosti temných kliků a ztrát. Můžeme velmi dobře vyhodnotit, že  $P_{TK}$  výrazně snižuje  $P_{SD}$ . Přímo podle obrázku 11b) můžeme říci, že námi stanovená základní hodnota  $P_{TK} = 10^{-5}$  se nachází v oblasti, kdy daný detektor můžeme považovat za temnými kliky téměř neovlivněný - hodnotě  $P_{TK} = 10^{-5}$  odpovídá  $P_{SD} = 0,99$ . Námi uchopená hodnota  $P_{TK} = 10^{-2}$  se nachází na hraně výrazného poklesu  $P_{SD}$ , neboť už pro  $P_{TK} = 0,15$  se  $P_{SD} \approx 0,5$ . Oproti tomu vyjádřené ztráty  $\eta$ , ačkoliv mají jasný přímý vliv na  $P_{succ}$ , pro nás nakonec tak zásadní

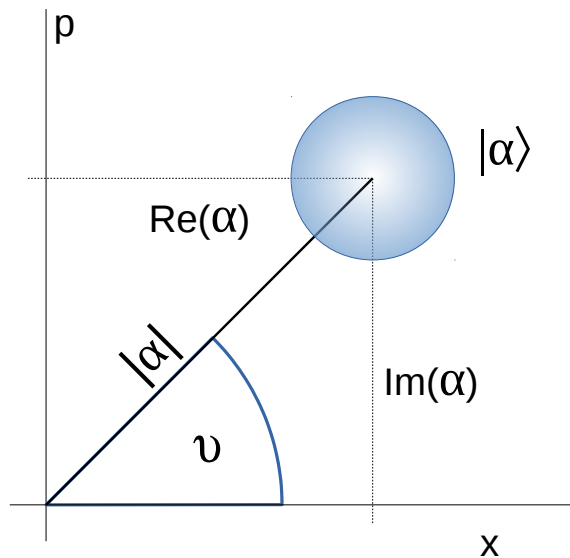
nejsou. Na obrázku 11a) vidíme, že i když jsme nechali faktor  $\eta$  volný na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ , docílili jsme změny jediné desetiny u pravděpodobnosti  $P_{succ}$  a u  $P_{SD}$  ještě méně.

Za komentář rovněž ještě stojí část křivky  $P_{succ}$  na obrázku 11b) vpravo. Jasně vidíme, že křivka nejprve roste, přibližně na hodnotě  $P_{TK} = 0,73$  dosahuje svého maxima, a pak strmě klesá k nule. Toto chování si můžeme vysvětlit pomocí připomenutí toho, co vlastně  $P_{succ}$  vyhodnocuje. Jak již bylo popsáno vztahem (58)  $P_{succ}$  popisuje situaci, kdy všechny kromě jednoho detektoru kliknou. Pakliže ale zvyšujeme  $P_{TK}$  k jedné, je stále těžší pozorovat nekliknutí detektoru a  $P_{succ}$  musí jít k nule. Nicméně detektory s takovými hodnotami  $P_{TK}$  jsou dávno překonané, a proto se dané oblasti nebudeme dále věnovat.

### 4.3 Heterodynní detekce

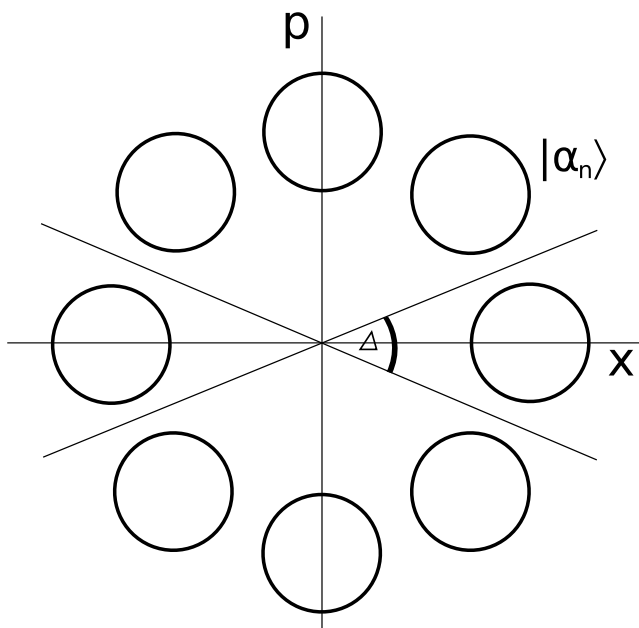
Heterodynní detekce (Heterodyne detection (HTR)) vychází z mechanismu, popsaného v kapitole 3.3.2, jakým nám homodynní detektor umožňuje měřit kvadratury  $x$  a  $p$  a podle toho následně zaznamenávat výsledky do fázového prostoru. Nyní popíšeme, jak nám tato informace může pomoci při komunikaci a jak na tomto detektoru založit detekční metodu fázově závislých komunikačních stavů.

Začněme u zobrazení ve fázovém prostoru. Představme si, že máme dva homodynní detektory, které nám umožní z jednoho signálu získat jak hodnotu kvadratury  $x$  - první - tak kvadraturu  $p$  - druhý. Cena, kterou za to platíme, je sice zvýšení hladiny šumu obsažené v získaných datech, ale jak vidíme na obrázku 12, jsme schopni na základě těchto výsledků určit hodnotu fáze  $\nu$  daného signálu a s její pomocí se pokusit rozlišit zaslané koherentní stavy.



Obrázek 12: Znázornění fáze  $\nu$  stavu  $|\alpha\rangle$  ve fázovém prostoru. Kvadratury  $x$  a  $p$  získáváme z měření dvěma homodynními detektory.

Když již víme, jak získat fázi příchozího signálu, podívejme se opět do fázového prostoru, ve kterém zobrazujeme koherentní stavy. Pakliže jsou tyto jednotlivé stavy dostatečně silné - mají velkou amplitudu - a je jich takové množství ( $N$ ), aby se nepřekrývaly, můžeme každému z nich přiřadit takovou výseč prostoru  $\Delta$ , kde výsledky, které naměříme pomocí homodynního detektoru, budou s jistotou odpovídat stavu, kterému daná výseč náleží. Tato výseč je rovna  $\Delta = \frac{2\pi}{N}$ , kde  $N$  je množství stavů, které rozlišujeme. Situaci ilustrujeme na obrázku 13.



Obrázek 13: Znázornění více koherentních stavů  $|\alpha_n\rangle$  ve fázovém prostoru. Každý z těchto stavů má svou výseč danou úhlem  $\Delta$ , do které spadají výsledky z detekce, které nejpravděpodobněji danému stavu přísluší.

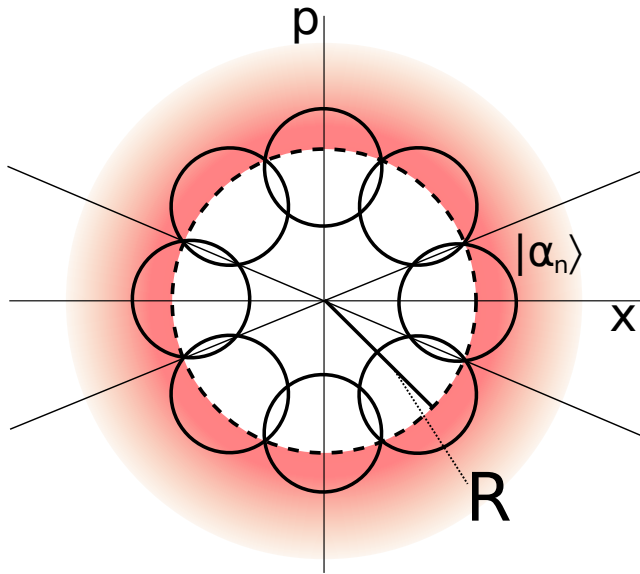
Nyní zavedme do problematiky situaci, kdy buďto amplituda není dostatečně veliká, anebo množství rozlišovaných stavů ( $N$ ) je takové, že dochází k překrytí. Hodnoty zanesené do fázového prostoru detektorem mohou s nenulovou pravděpodobností náležet více sousedícím stavům. Abychom se zbavili nepřesností, které by se kvůli tomu do výsledků měření



dostaly - čím jsou signály slabší, tedy blíže počátku, tím větší překrytí vzniká a tím méně přesné výsledky dostáváme - zavedeme pomocnou proměnnou  $R$ . Tato proměnná je parametr, který určuje oblast, ve které považujeme výsledky za nejednoznačné. Za použitelné budeme považovat takové dvojice  $[x, p]$ , které splňují

$$x^2 + p^2 \geq R^2. \quad (60)$$

$R$  tedy tvoří poloměr kruhu ve fázovém prostoru. Náš přístup ilustrujeme na obrázku 14.



Obrázek 14: Soubor překrytých stavů  $|\alpha_n\rangle$ . Oblast, na kterou se při vyhodnocování zaměřujeme daná parametrem  $R$ , je vyznačena barevným přechodem. Výsledky v oblasti kruhu do poloměru  $R$  považujeme za nepřesné a zahazujeme je jako neúspěšné měření.

Současná detekce  $x$  a  $p$  vede na sdruženou hodnotu pravděpodobnosti  $P_{CS}(x, p)$ , jejíž přesnou formu můžeme odvodit ze znalosti Wignerovy funkce koherentního stavu (kapitola 2.2.3).  $P_{CS}(x, p)$  definujeme:

$$P_{CS}(x, p) = \frac{1}{\pi} \exp(-(x - K)^2 - (p - L)^2), \quad (61)$$

kde  $K = \text{Re}(\alpha)$  a  $L = \text{Im}(\alpha)$ , což odpovídá reálné a imaginární složce amplitudy  $\alpha$  měřeného signálu.

Pro analýzu výsledků potřebujeme získat pravděpodobnosti  $P_{succ}$  a  $P_{SD}$ , k čemuž musíme (61) přeintegrovat přes vhodně zvolenou oblast. Nejprve zavedeme polární souřadnice, které nám funkci (61) upraví do tvaru:

$$P_{CS}(r, \xi) = \frac{1}{\pi} \exp(-(r \cos(\xi) - K)^2 - (r \sin(\xi) - L)^2). \quad (62)$$

Pravděpodobnost vyjadřující úspěch metody je dána jako:

$$P_{succ} = \int_{\varrho} \int_R^{\infty} \frac{1}{\pi} \exp(-(r \cos(\xi) - K)^2 - (r \sin(\xi) - L)^2) r \, dr \, d\xi, \quad (63)$$

kde  $\varrho = \langle 0, 2\pi \rangle$ . Po první integraci využijeme symetrie problému a toho, že v analýze vycházíme z předpokladu, že vstupní stav je  $|\alpha_0\rangle$ , tedy stav který má imaginární složku  $L = 0$  a reálnou složku  $K > 0$ , a tyto předpoklady zahrneme i v následujícím modelování. Současně do integrace podle  $r$  zavedeme výše zmíněný parametr  $R$  tak, že namísto mezí od  $R$  do  $\infty$  integrujeme od  $A$  do  $B$ . Získáváme tak tvar:

$$\begin{aligned} P_{succ} = & \int_{\varrho} \frac{1}{2} N e^{-A^2 - B^2 - K^2} [e^{-B^2 + 2AK \cos(\xi)} - e^{A^2 + 2BK \cos(\xi)} - \\ & - e^{\frac{1}{2}(2A^2 + 2B^2 + K^2 + K^2 \cos(2\xi))} \sqrt{\pi} \operatorname{Erf}(A - K \cos(\xi)) K \cos(\xi) + \\ & + e^{\frac{1}{2}(2A^2 + 2B^2 + K^2 + K^2 \cos(2\xi))} \sqrt{\pi} \operatorname{Erf}(B - K \cos(\xi)) K \cos(\xi)] \, d\xi \end{aligned} \quad (64)$$

Dále již pokračujeme numericky a při řešení záleží jen na nás, jaké mezní hodnoty  $A, B$  zvolíme pro zamezení překryvu stavů poblíž středu.

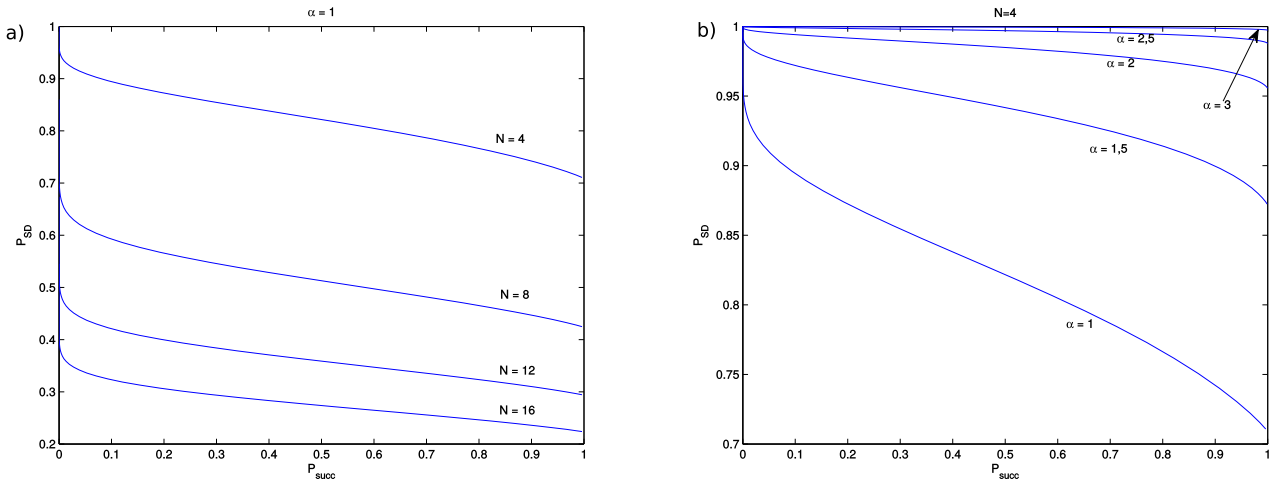
Jako správné výsledky vyhodnotíme právě ty, které se nachází nad hodnotou  $R$  v rozmezí úhlu  $\Delta$ . U výrazů (63) a (64) nyní položíme integrační oblast  $\varrho = \langle -\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2} \rangle$  a získáváme  $P_{succ}^{\Delta}$ , která tyto události popisuje a kde stejně jako u  $P_{succ}$  integrujeme v mezích  $A = R$  a  $B = \infty$ .

Pravděpodobnost správné detekce  $P_{SD}$  je potom dána jako podíl

$$P_{SD} = \frac{P_{succ}^{\Delta}}{P_{succ}}. \quad (65)$$

### 4.3.1 Ideální detekce

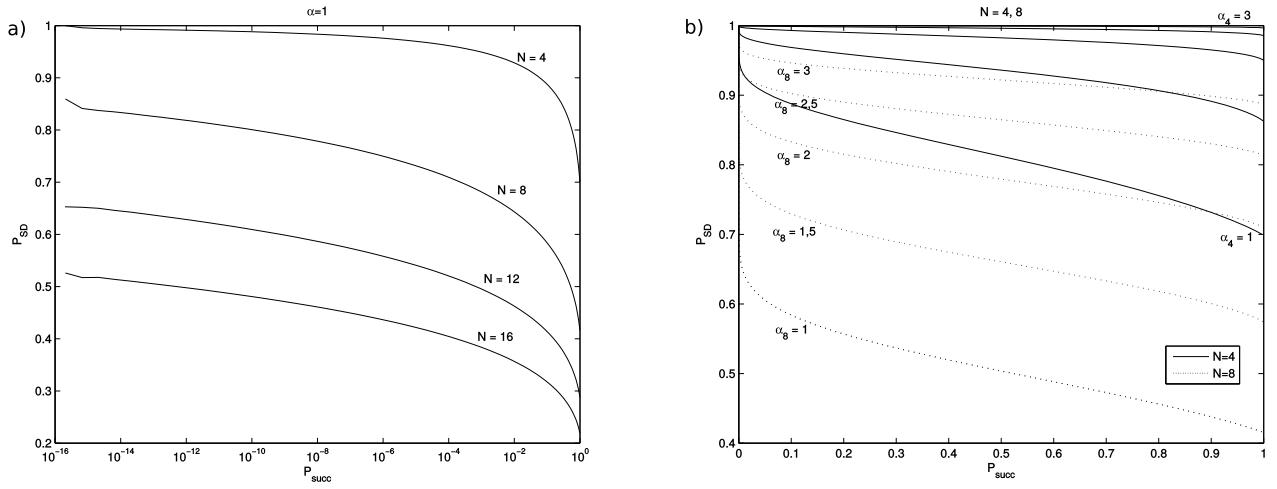
Při ideálním měření opět předpokládáme perfektní vlastnosti detektoru. Pro toto měření určíme množství rozlišovaných komunikačních stavů (volíme 4, 8, 12, 16) a učíme hodnotu amplitudy (volíme postupně  $\alpha = \{1; 1,5; \dots, 3\}$ ). Na obrázku 15 vidíme, jak se hodnoty  $P_{succ}$  a  $P_{SD}$  mění v závislosti na změně parametru  $R \in \langle 0, \infty \rangle$ . Nalevo (u osy  $y$ ) jde  $R$  k nekonečnu, napravo k nule. Výsledky odpovídají předpokladu, že čím větší stanovíme poloměr  $R$ , tím vyšší bude  $P_{SD}$  na úkor toho, že spoustu výsledků zahodíme, a tedy klesne  $P_{succ}$ .



Obrázek 15: Znázornění hodnot pravděpodobností  $P_{succ}$  a  $P_{SD}$  při změně parametru  $R$  na intervalu  $\langle 0, \infty \rangle$ . Graf a) srovnává tyto změny pro různá  $N$  při zafixování amplitudy  $\alpha$ . Graf b) fixuje počet rozlišovaných stavů a ilustruje závislost na  $\alpha \in \{1; 1,5; \dots, 3\}$ .

### 4.3.2 Reálná detekce

Během reálné detekce se projeví účinnost detektoru, kterou jsme stanovili na  $\eta_{HTR} = 0,85$ . Na grafech obrázku 16 můžeme pozorovat průběh vyhodnocovaných dat pro  $P_{SD}$  a  $P_{succ}$  nejprve při zafixované hodnotě amplitudy a změně počtu rozlišovaných stavů  $N$ . Poté i srovnání  $P_{SD}$  a  $P_{succ}$  při proměnném parametru  $\alpha$  a fixní hodnotě  $N$  pro 4 a 8 rozlišovaných stavů.



Obrázek 16: Znázornění hodnot pravděpodobností  $P_{succ}$  a  $P_{SD}$  při změně parametru  $R$  na intervalu  $\langle 0, \infty \rangle$  pro reálné měření. V modelu byly použity reálné detektory o účinnosti  $\eta_{HTR} = 0,85$ . Graf a) srovnává tyto změny pravděpodobností pro různá  $N$  při zafixování amplitudy  $\alpha$ . Graf b) fixuje počet rozlišovaných stavů na  $N = 4$  a  $N = 8$  a ilustruje závislost na  $\alpha$ , které volíme z množiny  $\alpha = \{1; 1,5; \dots, 3\}$ .

### 4.3.3 Vyhodnocení

Pakliže necháme  $R = 0$ , pracujeme s výsledky bez jakýchkoliv omezení - každé měření nám dá výsledek, který můžeme vyhodnotit - musíme však předpokládat vyšší pravděpodobnost chyby daného vyhodnocování. Oproti tomu, pakliže  $R \rightarrow \infty$ , dostáváme se do oblasti, kde se překrytí projevuje méně a  $P_{SD}$  stoupá. Nutně za to ale zaplatíme zahozením velkého množství naměřených dat, a tedy snížením  $P_{succ}$ .

## 4.4 Kanonické měření fáze

Mějme opět snahu komunikovat pomocí  $N$  různých, koherentních stavů. Každý z těchto stavů pojmenujeme  $|\beta_n\rangle$ , kde amplituda má hodnotu  $|\beta|e^{i\varphi_n}$ ,  $\varphi_n = \frac{2\pi n}{N}$ ,  $n = \{0, \dots, N-1\}$ . Tato metoda Kanonického měření fáze (Canonical phase measurement (PM)) spočívá v přímém měření fáze, kde nám každé realizované měření dá hodnotu fáze  $\vartheta$ , a tedy pravděpodobnosti úspěchu dané metody je

$$P_{succ} = 1. \quad (66)$$

Nicméně stále zůstává otázka, jak této informaci můžeme věřit - tedy, jaká je pravděpodobnost správné detekce  $P_{SD}$ .

Pravděpodobnost, s jakou  $|\beta_n\rangle$  vede na výsledek  $\vartheta$ , je:

$$P(\vartheta) = |\langle\beta_n|\vartheta\rangle|^2, \quad (67)$$

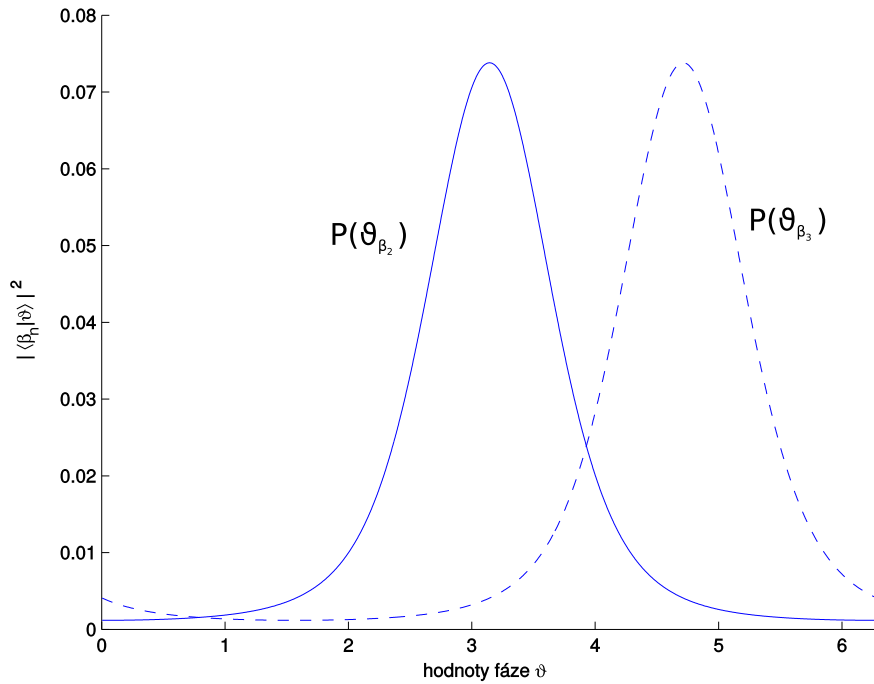
kde

$$|\vartheta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\vartheta n}|n\rangle$$

je kanonický stav fáze a  $\vartheta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

Hodnotami z (67) získáme křivku rozložení pravděpodobnosti napříč celým intervalem  $\langle 0, 2\pi \rangle$ . Pro ilustraci, obrázek 17 ukazuje  $P(\vartheta)$  pro dva stavy  $|\beta_2\rangle, |\beta_3\rangle \in |\beta_n\rangle$ . Na obrázku je rovněž dobře patrný překryv těchto pravděpodobností.

Protože víme, že komunikujeme pomocí  $N$  možných stavů s hodnotou fáze  $\varphi_n$  rovnoměrně rozloženou na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ , jsme na základě hodnot dílčích pravděpodobností z distribuční křivky schopni zjistit, s jakou pravděpodobností odpovídá získaná hodnota  $\vartheta$  konkrétnímu stavu  $|\beta_n\rangle$ . Rozdělíme proto tento interval na  $N$  dílů tak, že každá jedna



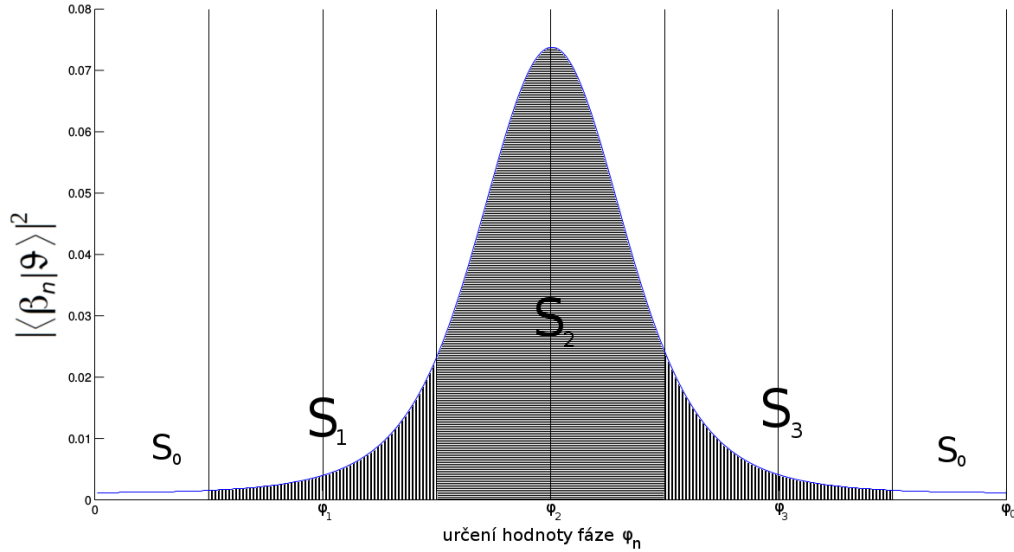
Obrázek 17: Znázornění rozložení pravděpodobnosti  $P(\vartheta) = |\langle \beta_n | \vartheta \rangle|^2$  pro hodnoty  $\vartheta \in \langle 0, 2\pi \rangle$  a  $n = \{2, 3\}$ . Počet rozlišovaných stavů  $N = 4$  a  $|\beta| = 1$ .

hodnota fáze  $\varphi_n$  leží právě uprostřed těchto dílů. Každý díl nám dává oblast  $S_n$ , ve které předpokládáme, že naměřené výsledky podle (67) nejpravděpodobněji odpovídají hodnotě fáze  $\varphi_n$ . Situaci pro případ, kdy  $N = 4$ , ilustrujeme na obrázku 18.

Za pravděpodobnost správné detekce  $P_{SD}$  definujeme integrál na oblasti  $S_n$ :

$$P_{SD} = P(S_m) = \int_{S_m} P(\vartheta) d\vartheta, \quad (68)$$

kde  $P(S_m) > P(S_{n \neq m})$  pro všechna  $n = \{0, \dots, N - 1\}$ .

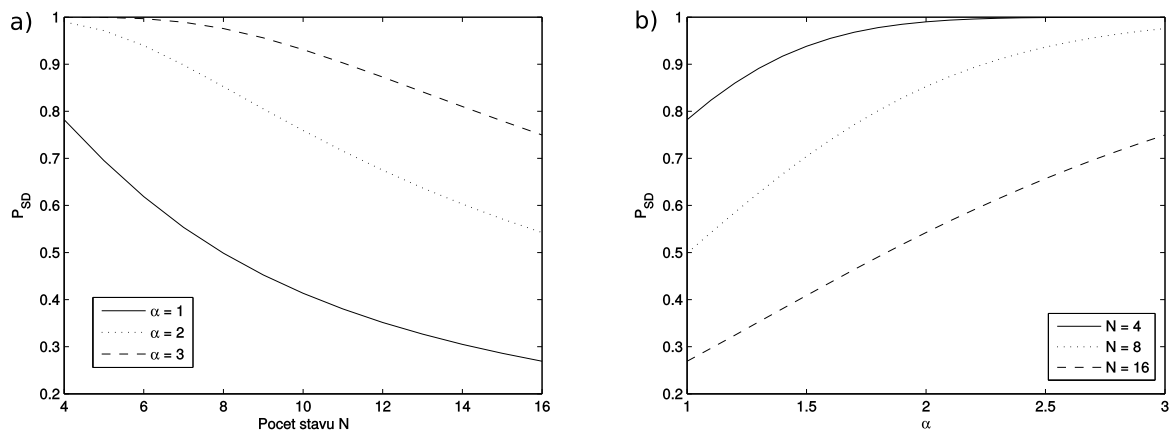


Obrázek 18: Znázornění oblastí  $S_n$ , odpovídající hodnotám  $\varphi_n$ . Integrace přes dané oblasti určuje s jakou pravděpodobností budou naměřeny  $\vartheta$  pro stav s  $\varphi_2$ . Modelováno pro 4 rozlišované komunikační stavy  $N$  a  $|\beta| = 1$ .

#### 4.4.1 Měření

Jak již bylo řečeno (66)  $P_{succ} = 1$ , proto jsme se v dané metodě zaměřili pouze na získávání informace o  $P_{SD}$ . Na obrázku 19 a) vidíme jak se  $P_{SD}$  mění, když pro koherentní stavy s konkrétními hodnotami amplitud  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 2$  a  $\alpha = 3$  získáváme závislost na různém množství rozlišovaných komunikačních stavů.

Poté jsme  $\alpha$  nechali volné a sledovali změnu  $P_{SD}$  pro  $N = 4$ ,  $N = 8$  a  $N = 16$ . Tato data prezentujeme na grafu 19 b).



Obrázek 19: Zobrazení výsledků Kanonickým měřením fáze. Graf a) porovnává hodnoty  $P_{SD}$  při užití konkrétních hodnot amplitudy  $\alpha$  pro různá  $N$ . Graf b) situaci obrací a fixuje počet komunikačních stavů oproti volným hodnotám amplitudy na intervalu  $\langle 1, 3 \rangle$ .

#### 4.4.2 Vyhodnocení

Tato metoda je charakteristická svou 100% pravděpodobností úspěchu. Hodnoty  $P_{SD}$  se nicméně rovněž drží poměrně vysoko a například pro  $N = 8$  se i při  $\alpha = 1$  stále pohybujeme nad 40%, což se s ohledem na takto nízkou amplitudu, vysoké  $N$  a  $P_{succ}$  dá považovat za velmi dobrý detekční výsledek.



## 4.5 Šumem indukované měření

Poslední metodou, kterou se v rámci této práce budeme zabývat je Šumem indukované měření (Noise induced measurement (NIM)). Šumem indukované měření využívá stejných experimentálních komponent jako metoda Jednoznačného rozlišení pomocí APD a těmi jsou posunutí, děliče a APD detektory. Přesto však se metoda výrazně liší. Přivedený neznámý koherentní signál  $|\beta\rangle$  nejprve posuneme o náhodně zvolenou komplexní amplitudu  $\alpha_k$ , která je z množiny uvažovaných signálů  $\{\alpha_j\}$  s amplitudou  $|\alpha|e^{i\varphi_j}$ ,  $j \in \{0, \dots, N-1\}$ , kde  $\varphi_j = \frac{2\pi j}{N}$  a  $N$  je množství rozlišovaných stavů, a následnou detekci poté provádíme pomocí prahového PNR detektoru popsaného v kapitole 3.3.4. Pokud bude zaznamenaný počet fotonů vyšší než práh  $M$ , prohlásíme, že metoda uspěla a zjistila stav  $|\beta\rangle$ , který se nejpravděpodobněji rovná  $|\alpha_k\rangle$

Mějme na vstupu koherentní signál  $|\beta\rangle$ , který odpovídá jednomu z možných stavů, pomocí kterých komunikujeme. Tento neznámý vstupní signál posuneme o  $\alpha_k$ , kde  $k \in j$  je náhodně zvolené, ale známé. Získáváme tak stav  $|\gamma_k\rangle$

$$|\gamma_k\rangle = |\beta + \alpha_k\rangle \quad (69)$$

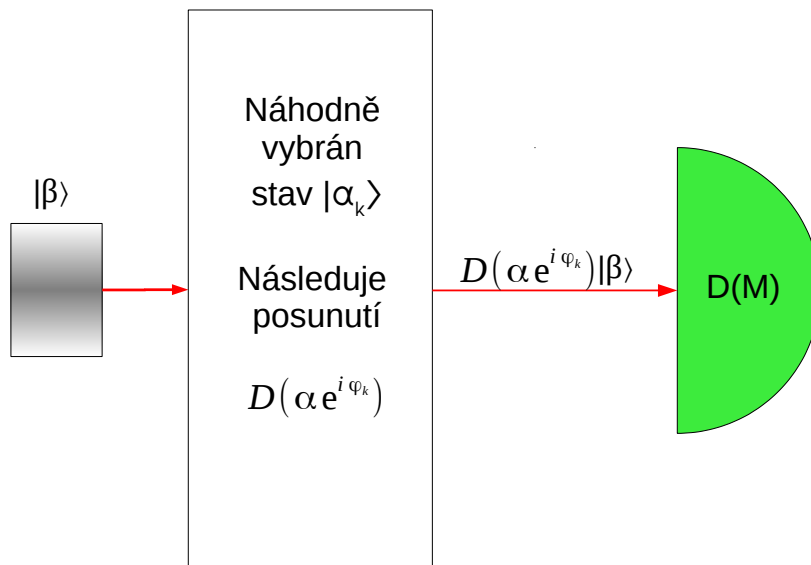
Pravděpodobnost toho, že získáváme právě tento stav  $|\gamma_k\rangle$  je  $\frac{1}{N}$ . Tato náhoda, která vytváří podobu stavů  $|\gamma_k\rangle$  je zmíněný šum, který se v metodě vyskytuje.

Přestože měřený stav  $|\gamma_k\rangle$  generujeme náhodně, vždy víme, o jakou amplitudu  $\alpha_k$  byl původní stav  $|\beta\rangle$ . Pro potřeby analýzy budeme nyní, stejně jako v předchozích částech, uvažovat že  $\beta = \alpha_0$ .

Stav  $|\gamma_k\rangle$  nyní změříme pomocí prahového PNR (kapitola 3.3.4) a pokud obdržíme kladný výsledek, prohlásíme, že bylo měření úspěšné. Za kladný výsledek budeme považovat detekci alespoň  $M$  fotonů, kde  $M$  je parametr ovlivňující pravděpodobnost úspěchu i správnosti detekce a můžeme si jej libovolně zvolit.

V případě, že se hodnoty fází neznámého stavu  $|\beta\rangle$  a náhodně přidaného  $|\alpha_k\rangle$  rovnají,

získáváme nejsilnější signál. Oproti tomu, když jsou fáze opačné, bude amplituda nulová. Ostatní hodnoty amplitudy  $\gamma_k$  leží mezi těmito dvěma hranicemi. Z tohoto přiblížení je patrný význam stanovení dané hranice  $M$ . Čím vyšší zvolíme hraniční hodnotu  $M$ , tím pravděpodobněji bude detekovaný stav  $|\beta\rangle$  přímo stav  $|\alpha_k\rangle$ . Zbývající případy, kdy detekce hranice  $M$  nedosáhne zahazujeme a považujeme je za neúspěšné měření. Ilustrační schéma dané metody ukazuje obrázek 20.



Obrázek 20: Znázornění Šumem indukované detekční metody. Příchozí signál  $|\beta\rangle$  je posunut o náhodně zvolenou komplexní amplitudu  $\alpha_k$  a poté proměřován. Signál je detekován prahovým PNR detektorem ( $D(M)$ ), který má stanovenou detekční hranici  $M$  a který jej vyhodnotí.

Pro ideální měření prahovým PNR detektorem využíváme vztahů (39) a (40) a pravděpodobnosti měření na stavech  $|\gamma_k\rangle$  jsou poté dány:

$$P_{not}(k) = \langle \gamma_k | \Pi_{not} | \gamma_k \rangle \quad (70)$$

a

$$P_{ok}(k) = \langle \gamma_k | \Pi_{ok} | \gamma_k \rangle. \quad (71)$$

Pro reálné měření využijeme vztahů (41) - (45) a vytvoříme analogickou závislost pravděpodobností  $P_{not}(k)$  a  $P_{ok}(k)$  zaměněním vstupního stavu  $|\beta\rangle$  za stav  $|\gamma_k\rangle$  ve vztazích (41) - (43).

Pro následnou analýzu (jak ideálního, tak reálného měření) jsou opět důležité pravděpodobnosti úspěchu dané metody a správné detekce. Pravděpodobnost úspěchu dané metody je

$$P_{succ} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} P_{ok}(k), \quad (72)$$

kde  $N$  je množství rozlišovaných stavů.

Pravděpodobnost správné detekce určíme jako

$$P_{SD} = \frac{P_{ok}(m)}{\sum_{k=0}^{N-1} P_{ok}(k)}, \quad (73)$$

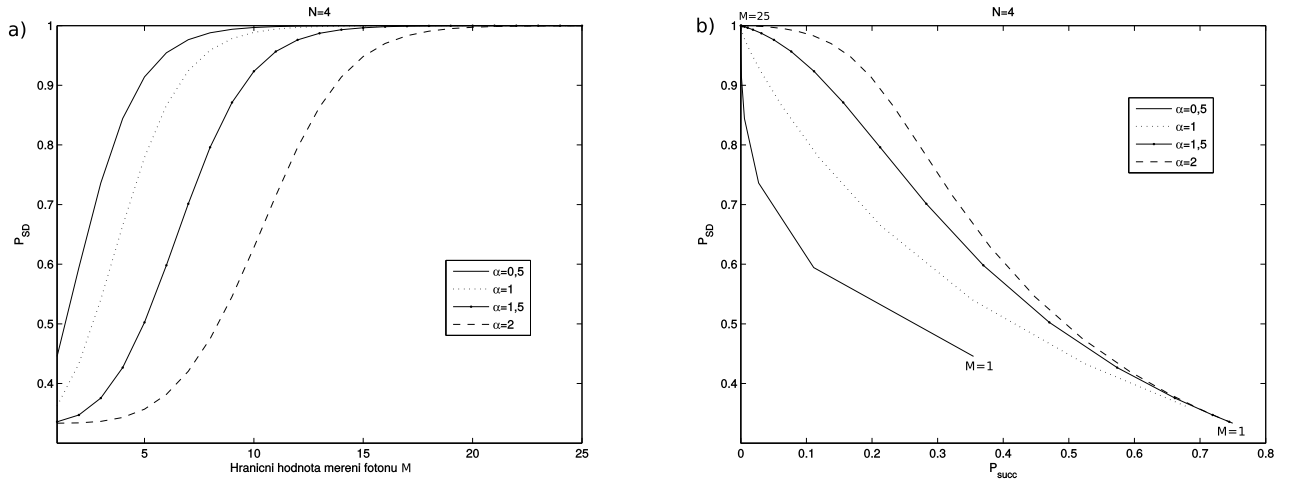
kde  $m \in \{0, \dots, N-1\}$  a  $m$  je správná hodnota fáze stavu  $|\beta\rangle$ .

#### 4.5.1 Ideální měření

Během ideálního měření budeme vycházet z detektorů popsaných vztahy (39) a (40) pomocí kterých nebudeme sledovat jen pouhou závislost  $P_{SD}$  na  $P_{succ}$ , ale i závislost  $P_{SD}$  na hraniční hodnotě počtu měřených fotonů  $M$ . Tyto závislosti ilustrujeme na obrázku 21.

#### 4.5.2 Reálné měření

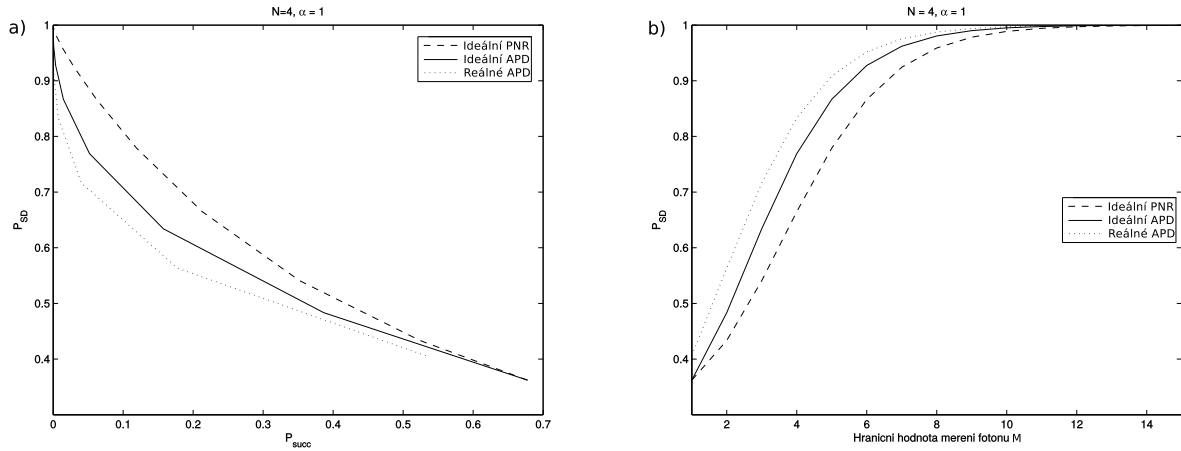
Reálné měření - a tedy nutnost danou situaci převést do soustavy děličů, posunutí a APD detektorů - nám u této metody dává možnost diskutovat dvě situace. První z nich předpokládá, že ačkoliv nejsme schopni měřit podle vztahu (39), stále máme po ruce několik ideálních APD detektorů, které netrpí ztrátami a temnými kliky. Tuto situaci v obrázcích



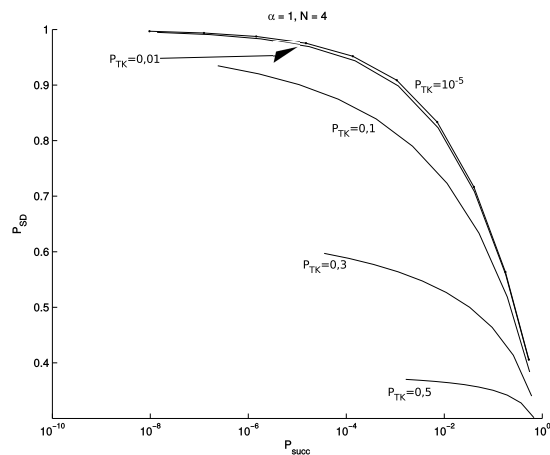
Obrázek 21: Zobrazení výsledků šumem indukovaným měřením. Graf a) ukazuje závislost  $P_{SD}$  na hodnotě hranice  $M$  při užití různých hodnot amplitudy  $\alpha$  od 0,5 do 2 při fixním počtu rozlišovaných komunikačních stavů  $N = 4$ . Graf b) porovnává hodnoty  $P_{SD}$  a  $P_{succ}$  rovněž při zafixování  $N$  a volbě různých amplitud.

pojmenováváme zkráceně „Ideální APD“. Zmíněnou druhou situací se míní nutnost užití reálné APD detektory a tedy nutnost zatížit výsledky ztrátami a temnými kliky. Tuto situaci pojmenováváme „Reálné APD“. Na obrázku 22 porovnáme tyto dvě „reálné“ situace s detekcí ideální.

Kromě porovnání s ideálním případem se na obrázku 23 u tohoto reálného měření podíváme i na to, jak se na něm podepíše temné kliky. Závislost na hodnotách  $\eta$  zde diskutovat nebudeme. Reálný prahový PNR detektor modelujeme kaskádou APD detektorů, pro které jsme již v kapitole 4.2 tuto závislost simulovali a vyhodnotili ji z pohledu analýzy jako méně zajímavou.



Obrázek 22: Porovnání ideálních a reálných výsledků u Šumem indukované metody detekce. Na grafu a) jsou vidět závislosti pravděpodobnosti správné detekce a pravděpodobnosti úspěchu dané metody. Graf b) vynáší  $P_{SD}$  v závislosti na hraniční hodnotě měření fotonů  $M$ . Oba tyto grafy jsou zobrazeny pro  $\alpha = 1$  a  $N = 4$ .



Obrázek 23: Závislost  $P_{SD}$  a  $P_{succ}$  na různě volených hodnotách pravděpodobnosti temných kliků  $P_{TK}$ . Každá z křivek značí průběh této závislosti s přihlédnutím k hraniční hodnotě  $M$  počtu detekovaných fotonů. Každá z křivek má tak své minimum pro případ kdy  $M = 1$  a maximum pro  $M = 15$ . Model počítá s hodnotou  $\alpha = 1$ ,  $N = 4$  a  $\eta = 0,5$ .

### 4.5.3 Vyhodnocení

Při analýze výsledků dané metody zjišťujeme, že ačkoliv je její mechanismus založen na šumu, tato metoda jde pravděpodobností správné detekce limitně k jedné. Obrázek 23 ilustruje, jak výrazná změna na hodnotách  $P_{succ}$  a  $P_{SD}$  probíhá, čím více se blížíme k  $P_{TK} = 0,5$ . Vedle toho můžeme pozorovat naprosto minimální vliv temných kliků při hodnotách  $P_{TK} < 0,01$ . Za pozornost rovněž stojí závislost  $P_{SD}$  na  $P_{succ}$  s přihlédnutím k hraničním hodnotám  $M$ . U této metody totiž můžeme sledovat situaci, kdy užitím méně dokonalých systémů, neschopných rozlišovat jednotlivé fotonů, výrazně zvyšujeme pravděpodobnost správné detekce daného systému (obrázek 22b). S touto informací však musíme pracovat velmi kriticky, neboť každé zvýšení  $P_{SD}$  znamená snížení  $P_{succ}$ .

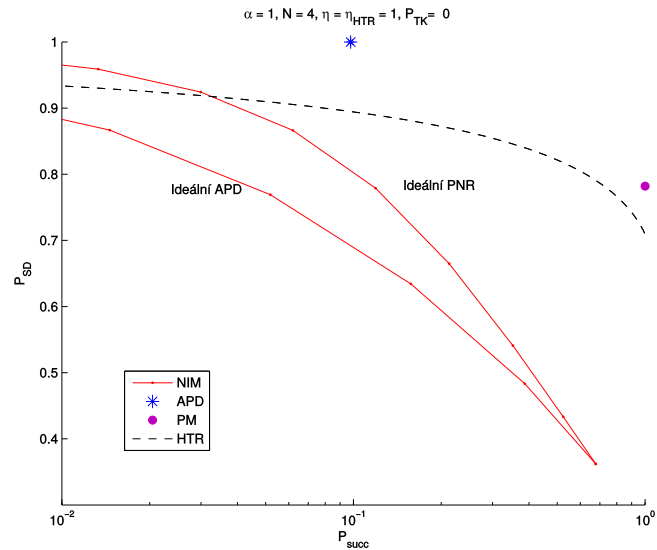
## 4.6 Porovnání analyzovaných metod

Závěrečná část kapitoly věnované detekci se bude zabývat porovnáním všech metod při užití stejných vhodně zvolených podmínek. Protože jsme se již s metodami seznámili, dovolíme si nyní drobné zjednodušení kvůli vyšší přehlednosti a orientaci mezi metodami. Metodu Jednoznačného určení pomocí APD budeme dále značit jen "APD", Šumem indukované měření - "NIM", Kanonické měření fáze označíme "PM" a Heterodynní detekci jen "HTR".

### 4.6.1 Ideální podmínky

Na úvod uvážíme všechny 4 metody za ideálních podmínek - tedy bez temných kliků a oběma účinnostmi  $\eta = \eta_{HTR} = 1$ ,  $\alpha = 1$  a  $N = 4$ . Situace je zobrazena na obrázku 24

Z modelu vyplývá, že pakliže se ptáme po nejvyšší  $P_{SD}$  je optimální metoda APD, pakliže chceme  $P_{succ} = 1$ , pak je to PM. HTR je optimální mezi těmito body. NIM je za ideálních podmínek nejhorší, ale je zajímavé vidět, že pro ideální PNR detektor a nízké  $P_{succ}$  překonává HTR.

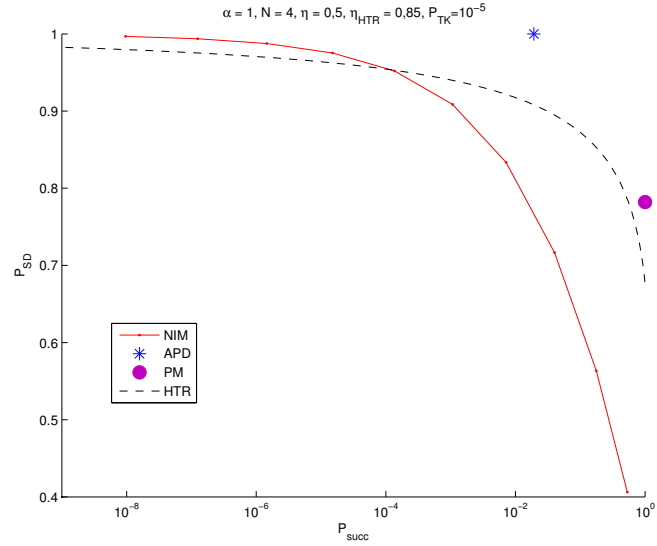


Obrázek 24: Porovnání detekčních metod při ideálních podmínkách a počtu rozlišovaných stavů  $N = 4$ .

#### 4.6.2 Reálné podmínky

Druhou vybranou dvojicí jsou reálné podmínky. Zde je pravděpodobnost temných kliků  $P_{TK} = 10^{-5}$ ,  $\eta = 0,5$ ,  $\eta_{HTR} = 0,85$ . Situaci pro  $\alpha = 1$  a  $N = 4$  můžeme pozorovat na obrázku 25.

Situace zůstává obdobná. Oproti ideálnímu měření pozorujeme pouze mírné změny způsobené zahrnutím ztrát. Protože pravděpodobnost temných kliků  $P_{TK}$  je stále ještě v oblasti téměř minimálního vlivu, jsou rozdíly oproti ideálu způsobené zejména hodnotou  $\eta$ . NIM opět může být lepší než HTR, ale pouze v oblasti příliš malých  $P_{succ}$ , ve které obě metody zaostávají za APD.

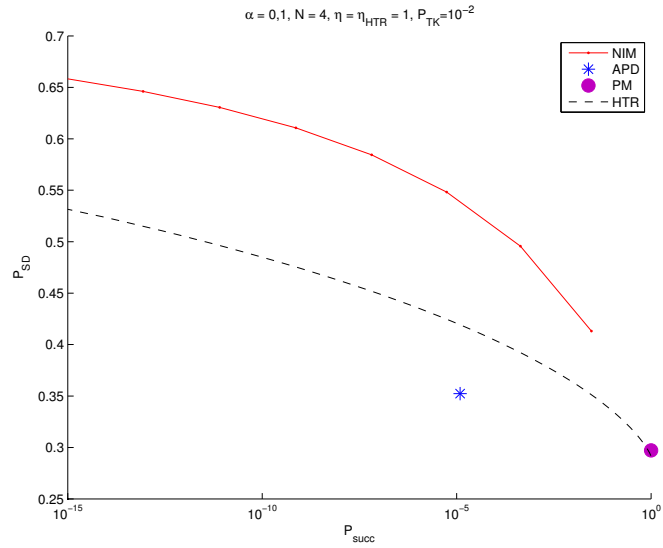


Obrázek 25: Porovnání detekčních metod při reálných podmínkách a počtu rozlišovaných stavů  $N = 4$ .

### 4.6.3 Podmínky slabých signálů

Pokusme se nyní najít případ, ve kterém je NIM optimální. Uvažme komunikaci s velice slabým signálem, což může nastat v důsledku značně ztrátových kanálů, a detektory s jednotkovou účinností, za kterou ale APD platí zvýšenou pravděpodobností temných kliků. Popsanou situaci pro hodnotu amplitudy  $\alpha = 0,1$ , faktor ztrát obou detektorů  $\eta = \eta_{HTR} = 1$ ,  $N = 1$  a pravděpodobnost temných kliků  $P_{TK} = 10^{-2}$  ilustrujeme na obrázku 26.





Obrázek 26: Porovnání detekčních metod při námi vybraných podmínkách a rozlišovaných stavů  $N = 4$ .

Z obrázku 26 vidíme, že za těchto podmínek přestává APD fungovat a optimální metodou detekce se z pohledu  $P_{SD}$  stává NIM.

## 5 Závěr

Cílem této práce bylo analyzovat různé detekční metody koherentních signálů při myšleném komunikačním užití. Z tohoto hlediska kladla nejvyšší důraz na analýzu pravděpodobnosti úspěchu jednotlivých metod  $P_{succ}$  - tedy na to, s jakou pravděpodobností se daná metoda podaří realizovat - a pravděpodobnost správné detekce  $P_{SD}$  - tedy pravděpodobnost popisující chybovost dané metody.

V úvodních kapitolách jsme se seznámili s historickým kontextem kvantové fyziky i kvantové komunikace. Představili jsme si základy toho, jak kvantově komunikovat a seznámili se s hlavním komunikačním médiem využívaným v této práci - koherentními stavy. Následně jsme přešli k popisu dílčích prvků, které nám umožňují provádět rozličné komunikační techniky. Těmi jsou děliče svazku, operátor posunutí a 4 rozdílné detektory. Každý z popsaných detektorů jsme využili v jedné analyzované metodě. Na závěr jsme si vysvětlili, co pro nás znamenají zmíněné pravděpodobnosti úspěchu metody a pravděpodobnost správně detekce.

Těžištěm této práce však byla analýza a porovnání konkrétních metod při různých hodnotách amplitud, počtu rozlišovaných komunikačních stavů a to jak v ideálních případech, tak pak při užití reálných komponent, kde bylo nutno zahrnout i ztráty a chybovost detektorů. Tato analýza byla prováděna pomocí matematických modelů v programu Matlab. Konkrétně byla modelována metoda Jednoznačného určení pomocí APD detektorů, metoda Heterodynní detekce, metoda Kanonického měření fáze a na závěr metoda nová a to metoda Šumem indukovaného měření.

Tato metoda spočívá v tom, že k neznámý příchozí stav náhodně posuneme o komplexní amplitudu jednoho z možných komunikačních stavů. Tento krok řízený šumem - náhodou pak vyhodnocujeme pomocí prahovým PNR detektorem, pomocí kterého vybíráme takové případy, kdy změřený stav obsahuje nějaké dané minimální množství fotonů.

Poslední kapitolu naší práce jsme věnovali porovnání všech metod mezi sebou. Zjistili jsme že za ideálních podmínek je optimální trojice detekčních metod tvořená Jednoznačným určením pomocí APD, Kanonickým měřením fáze a Heterodynní detekcí. Metodě Jednoznačného určením pomocí APD můžeme nejvíce věřit, Kanonické měření fáze má zase nejvyšší  $P_{succ}$ . Heterodynní detekce leží v oblasti mezi těmito metodami.

Ve chvíli, když jsme přešli do reálných podmínek, celá situace zůstala prakticky nezměněna. Všímáme si však metody Heterodynní detekce, která by se dala za ideálních i reálných podmínek považovat za takzvanou "zlatou střední cestu" mezi Jednoznačným určením pomocí APD detektorů a Kanonickým měřením fáze. Nedosahuje sice tak vysoké  $P_{SD}$ , jako první zmíněná, ale to "dohání" vyššími hodnotami  $P_{succ}$ . Metoda Šumem indukovaného měření překonává Heterodynní detekci až při nízkých hodnotách  $P_{succ}$ , kdy už je optimálnější Jednoznačné určením pomocí APD.

Změna situace nastává až ve chvíli, kdy jsme uvážili scénář s velice slabými signály a detektory s vysokou účinností, ale současně i vyšší pravděpodobností temných kliků. V tomto případě se stává optimální metodou právě Šumem indukované měření.

Dalším krokem v naší analýze by byla přesnější charakterizace parametrů, při kterých je Šumem indukované měření optimální, a analýza jeho aplikace na přímé měření fáze namísto rozlišování diskrétních stavů.

## Reference

- [1] *Paul A. Tipler, Ralph A. Llewellyn: Modern Physics* W. H. Freeman and Company 2003, ISBN:0-7167-4345-0
- [2] *B. E. A. Saleh, M. C. Teich: Základy fotoniky* Český překlad Matfyzpress, UK Praha, 1995, ISBN 80-85863-00-6
- [3] *Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang: Quantum Computation and Quantum Information* Cambridge University Press 2000, ISBN 0-521-63503-9
- [4] *Jonathan A. Jones, Dieter Jaksch: Quantum Information, Computation and Communication* Cambridge University Press 2012, ISBN 978-1-107-01446-6
- [5] *J.J. Sakurai: Modern Quantum Mechanics* Addison-Wesley Publishing Company, Inc 1994, ISBN 0-201-53929-2
- [6] *Miloslav Dušek: Konceptní otázky kvantové teorie* Univerzita Palackého, 2002
- [7] *C. H. Bennett and G. Brassard: Quantum cryptography: Public-key distribution and coin tossing* Pro-ceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, Bangalore, India, 1984
- [8] <http://www.maqitech.com>
- [9] <http://www.idquantique.com>
- [10] *Petr Marek, Radim Filip: Coherent-state phase concentration by quantum probabilistic amplification* Physical Review A 81, 022302 (2010), arXiv:0907.2402
- [11] *Graeme Smith: Quantum Channel Capacities*, arXiv:1007.2855
- [12] *Marek Żukowski, S. IA Kilin, Janusz S. Kowalik: Quantum Communication and Security* IOS Press 2007, ISBN 978-1-58603-749-9

- [13] *Ulf Leonhardt: Essential Quantum Optics* Cambridge University Press 2010, ISBN 978-0-521-14505-3
- [14] Alan Migdal, Sergey V. Polyakov, Jingyun Fan, Joshua C. Bienfang: **Single-Photon Generation and Detection: Physics and Applications** ISBN-978-0-12-387695-9, Elsevier Inc. 2013
- [15] *Wolfgang Becker: Advanced Time-Correlated Single Photon Counting Techniques* ISBN-10 3-540-26047-1 Springer Berlin Heidelberg New York, 2005
- [16] *PH. M. Wiseman, R. B. Killip: Adaptive single-shot phase measurements: The full quantum theory* Physical Review A, Volume 57, Number 3, March 1998, arXiv:quant-ph/9710056
- [17] *Petr Marek: Optimal probabilistic measurement of phase* Physical Review A 88, 045802 (2013), arXiv:1307.3070
- [18] *F Marsili<sup>1</sup>, D Bitauld<sup>1</sup>, A Gaggero, S Jahanmirinejad<sup>1</sup>, R Leoni, F Mattioli and A Fiore<sup>1</sup>: Physics and application of photon number resolving detectors based on superconducting parallel nanowires* New Journal of Physics, Volume 11, April 2009, arXiv:0902.4824
- [19] *S. Jahanmirinejad<sup>1</sup>, G. Frucci<sup>1</sup>, F. Mattioli, D. Sahin, A. Gaggero, R. Leoni and A. Fiore<sup>1</sup>: Photon-number resolving detector based on a series array of superconducting nanowires* Appl. Phys. Lett. 101, 072602 (2012), arXiv:1203.5477
- [20] *Anthony Chefles, Stephen M. Barnett: Optimum unambiguous discrimination between linearly independent symmetric states* Physics Letters A 250 (1998) 223-229, arXiv:quant-ph/9807023