VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA PODNIKATELSKÁ
ÚSTAV INFORMATIKY

FACULTY OF BUSINESS AND MANAGEMENT
INSTITUTE OF INFORMATICS

# ANALÝZA FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH V ŘÍZENÍ ZÁSOB

ANALYSIS OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES IN INVENTORY MANAGEMENT

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE — HANA ŠILAROVÁ
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — Mgr. VERONIKA NOVOTNÁ, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2015

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta podnikatelská

Akademický rok: 2014/2015
Ústav informatiky

# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

## Šilarová Hana

Matematické metody v ekonomice (6207R005)

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách, Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně a Směrnicí děkana pro realizaci bakalářských a magisterských studijních programů zadává bakalářskou práci s názvem:

**Analýza funkcí více proměnných v řízení zásob**

v anglickém jazyce:

**Analysis of Functions of Several Variables in Inventory Management**

Pokyny pro vypracování:

Úvod
Cíle práce, metody a postupy zpracování
Teoretická východiska práce
Analýza současného stavu
Vlastní návrhy řešení
Závěr
Seznam použité literatury
Přílohy

Seznam odborné literatury:

DOŠLÁ, Zuzana a Ondřej DOŠLÝ. Diferenciální počet funkcí více proměnných. 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2003, 142 s. ISBN 80-210-2052-0.
HORÁKOVÁ, H. Řízení zásob: Logistické pojetí, metody, aplikace, praktické úlohy. 3.přepr. vyd. Praha: Profess Consulting, 1998, 236 s. ISBN 80-852-3555-2.
MERCADO, Ed C. Hands-on inventory management. New York: Auerbach Publications, c2008, xiii, 110 p. ISBN 978-08-493-8326-7.
ŠTŮSEK, J. Řízení provozu v logistických řetězcích. 1. vyd. Praha: C. H. Beck, 2007, xi, 227 s. C. H. Beck pro praxi. ISBN 978-80-7179-534-6.
VOCHOZKA, M. a P. MULAČ. Podniková ekonomika. 1. vyd. Praha: Grada, 2012, 570 s. Finanční řízení. ISBN 978-80-247-4372-1.

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Veronika Novotná, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

L.S.

| | |
|---|---|
| doc. RNDr. Bedřich Půža, CSc.<br>Ředitel ústavu | doc. Ing. et Ing. Stanislav Škapa, Ph.D.<br>Děkan fakulty |

V Brně, dne 28.2.2015

**Abstrakt**

Tato bakalářská práce vytváří model, který obchodníkovi pomáhá stanovit optimální cenu za zboží a délku intervalu, ve kterém je zboží prodáváno se ziskem. Model pojednává o dvou situacích, ve kterých dodavatel poskytuje obchodníkovi dodavatelský úvěr na předem smluvenou dobu. Model je tvořen na základě časové závislé poptávky a pro nekazící se zásoby. Vše je tvořeno za pomocí metod matematické analýzy.

**Abstract**

This bachelor's thesis construates model which helps to retailer determining optimal prices of items and determining the maximum length of the period over which the goods can be sold at a profit. This model deals with two situations in which supplier provides the supplier credit for permissible delay. The model expects the time-dependent demand and has been developed for non-deterioration items. In this model are used the methods of mathematical analysis.

**Klíčová slova**

Diferenciální počet funkcí více proměnných, přípustné zpoždění, nekazící se zboží, zásoby, dodavatelský úvěr.

**Keywords**

Differential calculus of multivariable functions, permissible delay, non-deterioration items, inventory, supplier credit.

**Bibliografická citace**

ŠILAROVÁ, H. *Analýza funkcí více proměnných v řízení zásob*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta podnikatelská, 2015. 54 s. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Veronika Novotná, Ph.D..

**Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že předložená bakalářská práce je původní a zpracovala jsem ji samostatně. Prohlašuji, že citace použitých pramenů je úplná, že jsem ve své práci neporušila autorská práva (ve smyslu Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském a o právech souvisejících s právem autorským).

V Brně dne 21. května 2015

Hana Šilarová

**Poděkování**

Tímto bych chtěla poděkovat paní Mgr. Veronice Novotné, Ph.D. za věcné rady, odbornou pomoc a ochotu při zpracování bakalářské práce. Dále bych chtěla poděkovat pracovníkům společnosti XY, s.r.o. za jejich vstřícný přístup a poskytnuté informace.

# Obsah

# Úvod

Tradiční modely zásob předpokládají, že je obchodník schopen platit za obdržené zboží v momentě, kdy je zboží umístěno na sklad. Praxe je ale mnohdy bohužel jiná. Obchodníci nedokáží ihned zaplatit za získané zboží, a proto jsou nuceni vzít si úvěr.

V tomto momentě většinou nabídne dodavatel obchodníkovi dodavatelský úvěr, který je pro obě strany výhodný. Obchodník se stává majitelem zboží ještě předtím, než za něj zaplatí a dodavatel se díky tomu stává zajímavějším pro další odběratele a zvyšuje tedy konkurenceschopnost své firmy na trhu. Obě strany se většinou domluví na určitých podmínkách. Jestliže odběratel zaplatí za poskytnutý úvěr v předem stanovené lhůtě, neplatí dodavateli žádné úroky z prodlení a naopak může zadržovat platbu na svém účtu, z čehož mu plynou úroky. Pokud ale odběratel stanovenou lhůtu nedodrží, je nucen dodavateli platit úroky z prodlení.

# 1 Cíl a metodika práce

Cílem bakalářské práce je stanovit matematický model, který by měl obchodníkovi pomoci s určením optimální ceny a maximální délky intervalu, ve kterém je zboží prodáváno s nejvyšším možným ziskem. Předpokládá se, že uživatel předem zná určité parametry. Celý model je tvořen pro jeden druh zásob, a to nekazící zásoby.

Následně je model znázorněn na konkrétním příkladu a analyzuje se, jak se model změní, pokud je za zboží zaplaceno včas nebo je zaplaceno pozdě. Zkoumá se také, jaký vliv bude mít změna určitých parametrů na celý model a následné grafické zpracování.

V práci byly použity metody matematické analýzy (diferenciální počet funkcí více proměnných a řešení obyčejných diferenciálních rovnic).

# 2 Teoretická část

V této části si zavedeme nutné teoretické poznatky, ze kterých budeme vycházet v praktické části.

## 2.1 Matematická část

Zde si uvedeme nejdůležitější definice a věty z oblasti diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

### 2.1.1 Limita a spojitost funkce

Limita je jedním ze základních pojmů diferenciálního počtu. Limitou rozumíme lokální vlastnost funkce, která nám popisuje chování funkce v ryzím okolí bodu, ve kterém limitu určujeme. (DOŠLÁ, 2003)

**Definice 1.1.** *„Řekneme, že funkce $f$ : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ limitu $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý bod $[x, y] \in \mathcal{D}(f)$ splňující $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, $[x, y] \neq [x_0, y_0]$, platí $|f(x, y) - L| < \varepsilon$. Píšeme*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$ “ (DOŠLÁ, 2003)

*Věta 1.1. „Funkce $f$ má v bodě $[x_0, y_0]$ nejvýše jednu limitu.“* (DOŠLÁ, 2003)

**Definice 1.2.** *„Nechť bod $[x_0, y_0]$ je hromadný bod definičního oboru $\mathcal{D}(f)$ funkce $f$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, který patří do $\mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce $f$ je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$ “ (DOŠLÁ, 2003)

**Definice 1.3.** *„Řekneme, že funkce $f$ je spojitá na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$, jestliže pro každý bod $[x_0, y_0] \in M$, který je jejím hromadným bodem, platí*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in M}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$ “ (DOŠLÁ, 2003)

Platí tedy, že funkce je spojitá na libovolné množině, jestliže je spojitá ve všech bodech této množiny. (ŠINDELÁŘ, 1972)

Důležitými větami pro nás budou věty o spojitosti. Věty 1.2. a 1.3. platí jak pro funkci jedné proměnné, tak pro funkci $n$ proměnných.

*Věta 1.2. (Weierstrassova) „Nechť funkce $f$ je spojitá na kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak nabývá na $M$ své nejmenší a největší hodnoty.“* (DOŠLÁ, 2003)

*Věta 1.3. (Bolzanova) „Nechť funkce $f$ je spojitá na otevřené souvislé množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Nechť pro $A$, $B \in M$ platí $f(A) \neq f(B)$. Pak ke každému číslu $c$ ležícím mezi hodnotami $f(A)$ a $f(B)$ existuje $C \in M$ tak, že $f(C) = c$.“* (DOŠLÁ, 2003)

### 2.1.2 Parciální derivace

Dalším důležitým pojmem jsou derivace, v našem případě parciální derivace.

**Definice 1.4.** *„Nechť $f$ je funkce $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, bod $A \in \mathbb{R}^m$. Pak*

$$\varphi(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m),$$

*tedy $\varphi'(a_i)$ je parciální derivace funkce $f$ podle proměnné $x_i$ v bodě $A$, značíme $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ nebo $f'_{x_i}(A)$. Spočítáme-li parciální derivaci ve všech bodech, získáme parciální derivaci funkce $f$ podle $x$ ($\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$).“* (KUREŠ, 2013)

Definice 1.4. analogicky platí pro parciální derivaci $f'_{y_i}(A)$.

**Definice 1.5.** *„Nechť $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}(f_x)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné $x$ v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci parciální derivací 2. řádu podle $x$ funkce $f$ v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme $f_{xx}(x_0, y_0)$ nebo také $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$.*

Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné $y$ v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci smíšenou parciální derivací 2. řádu funkce $f$ v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme $f_{xy}(x_0, y_0)$ nebo také $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.“ (DOŠLÁ, 2003)

Definice 1.5. analogicky platí pro parciální derivace 2. řádu $f_{yx}(x_0, y_0)$ a $f_{yy}(x_0, y_0)$.

*Věta 1.4. (Schwarzova) „Nechť funkce $f$ má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ parciální derivace $f_x$ a $f_y$ a smíšenou parciální derivaci $f_{xy}$, která je v bodě $[x_0, y_0]$ spojitá. Pak existuje také smíšená parciální derivace $f_{yx}(x_0, y_0)$ a platí*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).\text{“ (DOŠLÁ, 2003)}$$

Zavedeme si také větu o střední hodnotě, nazývanou jako *Lagrangeova věta o střední hodnotě.*

*Věta 1.5. „Předpokládejme, že funkce $f$ má parciální derivaci $f_x$ a $f_y$ ve všech bodech nějakého obdélníků $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a nechť $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$ $\in M$. Pak existují čísla $\xi$, $\eta$ ležící mezi $x_0$, $x_1$ resp. $y_0$, $y_1$ taková, že*

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_1)(x_1 - x_0) + f_y(x_0, \eta)(y_1 - y_0).\text{“ (DOŠLÁ, 2003)}$$

**Definice 1.6.** *„Parciální derivace funkce $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uspořádáme do matice*

$$J\vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix},$$

*kterou nazýváme Jacobiho matice.“* (KUREŠ, 2013)

**Definice 1.7.** *„Pro $m = n$ získáme čtvercovou matici, její determinant se nazývá jacobián. Řekneme, že funkce $\overrightarrow{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je regulární v bodě A, je-li hodnost Jacobiho matice $J\vec{f}$ v bodě A maximální, tedy $min\{m, n\}$.“* (KUREŠ, 2013)

**Definice 1.8.** *„Řekneme, že $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je regulární na množině $M \in \mathbb{R}^m$, je-li regulární ve všech bodech této množiny. Pokud $m = n$, pak regularita znamená nenulový jacobián.“* (KUREŠ, 2013)

*Věta 1.6. (Taylorova) „Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu n+1 včetně. Pak pro každý $[x, y]$ z tohoto okolí platí*

$$f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y),$$

kde

$$T_n(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2\right) + \dots$$
$$+\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{n-j}\,\partial y^j}(x_0,y_0)h^{n-j}k^j,$$

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)h^{n+1-k}k^j$$

a kde $h = x - x_0, k = y - y_0, \vartheta \in (0,1)$. “ (DOŠLÁ, 2003)

Vzorec $f(x,y) = T_n(x,y) + R_n(x,y)$ se nazývá Taylorův vzorec, polynom $T_n$ Taylorův polynom a $R_n$ zbytek v Taylorově vzorci. Taylorův polynom užijeme, pokud chceme přibližně vypočítat funkční hodnotu funkce $f$ v okolí bodu $x_0$. Taylorova věta nám poté říká, jak velká je chyba, která vznikne, nahradíme-li funkci Taylorových polynomem. (DOŠLÁ, 2003).

Taylorův vzorec můžeme také zapsat pomocí diferenciálu ve tvaru

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)(h,k) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0,y_0)(h,k) + \dots$$
$$+\frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0)(h,k) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)(h,k).$$

Jestliže bod $[x_0, y_0] = 0$, pak se tento polynom nazývá Mclaurinův. (KUREŠ, 2003)

### 2.1.3 Kvadratické formy

**Definice 1.9.** *„Nechť $A = (a_{ij}), i,j = 1,\dots,n$, je symetrická matice, $h \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že kvadratická forma $P(h) = \langle Ah,h\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i h_j$ určená maticí $A$ je pozitivně (negativně) semidefinitní, jestliže*

$$P(h) \geq 0, \ \ (P(h) \leq 0), \ \ \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

*Jestliže v předchozí nerovnosti nastane rovnost pouze pro* $h = 0$, *řekneme, že forma P je pozitivně (negativně) definitní. Jestliže existují* $h, \tilde{h} \in \mathbb{R}^n$ *taková, že* $P(h) < 0$ *a* $P(\tilde{h}) > 0$, *řekneme, že kvadratická forma P je indefinitní. Často místo o definitnosti resp. indefinitnosti kvadratické formy P mluvíme o definitnosti resp. indefinitnosti matice A.“* (DOŠLÁ, 2003)

V následující větě si pomocí Silvesterova kritéria ukážeme, jak rozhodnout o definitnosti kvadratické formy určené symetrickou maticí.

*Věta 1.7. „Nechť A je matice kvadratické formy P a označme*

$$D_1 = det[d_{11}],\ D_2 = det\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \dots, D_n = det\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

*Pak platí, že kvadratická forma P je*

- *pozitivně definitní právě tehdy, když*

$$D_1 > 0, \dots, D_n > 0,$$

- *negativně definitní právě tehdy, když*

$$(-1)^1 D_1 > 0, (-1)^2 D_2 > 0, (-1)^3 D_3 > 0, \dots, (-1)^n D_n > 0,$$

*tedy*

$$D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0, \dots,$$

- *pozitivně semidefinitní právě tehdy, když*

$$D_1 \geq 0, \dots, D_n \geq 0,$$

- *negativně semidefinitní právě tehdy, když*

$$D_1 \leq 0,\ D_2 \geq 0,\ D_3 \leq 0, \dots,$$

- *indefinitní právě tehdy, když nenastane žádný z výše uvedených případů.“* (KUREŠ, 2003)

### 2.1.4 Extrémy funkce

V této kapitole se budeme věnovat extrémům funkce. Nejdříve se budeme zabývat lokálními extrémy funkce, tj. extrémy v okolí nějakého bodu, poté absolutními extrémy funkce, tj. extrémy na nějaké množině a posledním typem extrémů budou tzv. vázané extrémy. Ty používáme tehdy, pokud je definiční obor funkce několika nezávisle proměnných omezen tzv. vazebními podmínkami.

#### 2.1.4.1 Lokální extrémy

**Definice 1.10.** *„Řekneme, že funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$ lokálního maxima (minima), jestliže existuje okolí $O(x^*)$ bodu $x^*$ takové, že pro každé $x \in O(x^*)$ platí*

$$f(x) \leq f(x^*) \ \big(f(x) \geq f(x^*)\big).$$

*Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích pro $x \neq x^*$ ostré, pak mluvíme o ostrých lokálních maximech a minimech. Pro (ostrá) lokální minima a maxima budeme používat společný termín (ostré) lokální extrémy.“* (DOŠLÁ, 2003)

Funkce může mít v nějakém bodě lokální extrém, a to i přesto, že funkce nemá v tomto bodě parciální derivaci a není zde ani spojitá. (ŠINDELÁŘ, 1972)

**Definice 1.11.** *„Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $x^* \in \mathbb{R}^n$ je stacionární bod funkce $f$, jestliže v bodě $x^*$ existují všechny parciální derivace funkce $f$ a platí*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$“ (DOŠLÁ, 2003)

*Věta 1.8. (Fermatova) „Nechť funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$ lokální extrém. Pak všechny parciální derivace funkce $f$, které v tomto bodě existují, jsou rovny nule.*

*Lokální extrém funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existuje pouze ve svém stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje.“* (DOŠLÁ, 2003)

Jestliže se v bodě $[x_0, y_0]$ nachází stacionární bod, nicméně zde není lokální extrém, pak se tento bod nazývá sedlový bod. Platí tedy, že v případě indefinitnosti ve stacionárním bodě $[x_0, y_0]$ extrém neexistuje. (KUREŠ, 2013)

*Věta 1.9. „Nechť funkce $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť $[x_0, y_0]$ je její stacionární bod. Jestliže*

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 > 0,$$

*pak má funkce $f$ v $[x_0, y_0]$ ostrý lokální extrém. Je-li $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, jde o minimum, je-li $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, jde o maximum.*

*Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$, pak v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém nenastává." (DOŠLÁ, 2003)*

#### 2.1.4.2 Absolutní extrémy

**Definice 1.12.** *„Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že bod $x^* \in M$ je bodem absolutního minima (maxima) funkce $f$ na $M$, jestliže $f(x^*) \leq f(x)$ $(f(x^*) \geq f(x))$ pro každé $x \in M$. Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x^*$, mluvíme o ostrých absolutních extrémech. Místo termínu absolutní extrém se používá často pojem globální extrém."* (DOŠLÁ, 2003)

*Věta 1.10. „Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina (tj. uzavřená a ohraničená) a funkce $f \to \mathbb{R}$ je spojitá na $M$. Pak $f$ nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálního extrému ležících uvnitř $M$ nebo v některém hraničním bodě."* (DOŠLÁ, 2003)

Vyšetření funkce na hranici množiny se provádí dosazením rovnice křivky, která tvoří část hranice, do funkce, jejíž extrémy hledáme a poté vyšetříme extrémy vzniklé funkce jedné proměnné. (DOŠLÁ, 2003)

#### 2.1.4.3 Vázané extrémy

**Definice 1.13.** *„Nechť $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, hledáme lokální extrém funkce $f$ na množině $M \subset \mathbb{R}^n$ určené rovnicemi*

$$\left.\begin{array}{r} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{array}\right\} \textit{vazebné podmínky (vazby), kde } g < n. \tag{1.1}$$

*Tyto extrémy nazveme vázané (lokální) extrémy.“* (KUREŠ, 2013)

Někdy lze proměnné vyjádřit přímo z vazeb a poté je můžeme hned dosadit do funkce $f$ a do zbývajících vazeb. (KUREŠ, 2013)

Dále si uvedeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Nejdříve si sepíšeme nutnou podmínku pro existenci vázaného extrému.

*Věta 1.11. „Nechť* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g_1, \dots, g_m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ 1 \leq m < n$, *mají spojití parciální derivace 1. řádu v otevřené množině* $U \subset \mathbb{R}^n$ *a nechť v každém bodě množiny U má matice*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

*hodnost* m. *Buď M množina všech bodů* $[x_1, \dots, x_n]$, *které vyhovují rovnicím (1.1). Má-li funkce* $f$ *v bodě* $a = [a_1, \dots, a_n] \in M$ *lokální extrém vzhledem k M, existují reálná čísla* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *tak, že jsou splněny rovnosti*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(a) = 0, \quad j = 1, \dots, n.\text{“ } (DOŠLÁ, 2003) \tag{1.3}$$

**Definice 1.14.** *„Funkce*

$$L(x, \lambda) = L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1, \dots, x_n)$$

*se nazývá Lagrangeova funkce a konstanty* $\lambda_k$ *Lagrangeovy multiplikátory.“* (DOŠLÁ, 2003)

**Definice 1.15.** *„Nechť množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je dána systémem rovnic (1.1). Řekneme, že bod $a \in M$ je stacionární bod funkce $f$ na $M$, jestliže existují Lagrangeovy multiplikátory $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, takové, že platí (1.3).“ (DOŠLÁ, 2003)*

*Věta 1.12. „Nechť funkce $f$ a $g_k, k = 1, \dots, m$, mají spojité parciální derivace druhého řádu v bodě $a$, který je stacionárním bodem $f$ na $M$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou příslušné Lagrangeovy multiplikátory, tj. $L'(a, \lambda) = 0$. Dále nechť matice (1.2) má pro $x = a$ hodnost m. Jestliže pro každé $0 \neq h \in Lin\{g_1'(a), \dots, g_m'(a)\}^\perp$ platí*

$$\langle L''(a)h, h\rangle > 0(< 0),$$

*má funkce $f$ v bodě a ostré lokální minimum (maximum) vzhledem k $M$. Jestliže existují $\bar{h}, \bar{h} \in Lin\{g_1'(a), \dots, g_m'(a)\}^\perp$ taková, že*

$$\langle L''(a)\bar{h}, \bar{h}\rangle > 0, \qquad (\langle L''(a)\bar{h}, \bar{h}\rangle < 0),$$

*v bodě a lokální extrém vzhledem k M nenastává.“ (DOŠLÁ, 2003)*

Jinými slovy, pokud má Lagrangeova funkce $L(x, \lambda)$ lokální extrém v bodě $[x, \lambda]$, pak ve funkci $f$ existuje ve stejném bodě vázaný lokální extrém stejného typu.

## 2.2 Ekonomická část

V této části si představíme zásoby a uvedeme si model, se kterým budeme později pracovat.

### 2.2.1 Význam zásob

Zásoby jsou část užitných hodnot, které byly vyrobeny, ale dosud nebyly spotřebovány. Vyskytují se jak ve výrobních, tak i v distribučních organizacích. Slouží nám k tomu, aby se mohl vyřešit nesoulad mezi výrobou a spotřebou a pomáhají nám krýt nepředvídatelné poruchy a výkyvy. Na druhou stranu zásoby váží kapitál, využívají další práci a hrozí zde i riziko znehodnocení. (HORÁKOVÁ, 1998)

Podnik musí volit určitý kompromis ve velikosti zásob, neboť zásoby by měly být co nejmenší vzhledem k vázání kapitálu a zároveň by měly být co největší pro případnou dostatečnou pohotovost dodávek. Zásoby proto mají velký vliv na hospodářský výsledek každého podniku a ovlivňují také jeho pozici na trhu. (HORÁKOVÁ, 1998)

### 2.2.2 Řízení zásob

Řízením zásob chápeme soubor činností, které jsou zaměřeny na prognózování, analyzování, plánování a operativní řízení jak jednotlivých skupin zásob, tak i celkových zásob. (ŠTŮSEK, 2007)

Cílem řízení zásob je zajištění plynulosti obchodního provozu při minimálních nákladech souvisejících s procesem zásobování. Je zřejmé, že je potřeba spojit provozní a ekonomické hledisko. Při malé úrovni zásob dochází k narušení plynulosti provozu, a to se negativně projeví v úrovni prodejů. Na druhou stranu příliš velká zásoba je nehospodárná, neboť na její udržování je vynaloženo velké množství finančních prostředků, které se nijak nezhodnocují. (VOCHOZKA, MULAČ, 2012)

Abychom splnili cíl řízení zásob, užíváme různé systémy a jim odpovídající metodické postupy. Volba systému řízení zásob může vycházet např. z charakteru potřeby, z účelu stanovení zásob v daném provozu, z ekonomických podmínek apod. Díky nim poté můžeme určit optimální výši zásob, velikost dodávek, frekvenci dodávek atd. (ŠTŮSEK, 2007)

S postupem času se mění i podniková filozofie zásob. Zatímco dříve každý chtěl mít co nejvyšší zásoby, a to i přes to, že se mohly kazit, později se díky vývoji techniky a technologie myšlení a konání lidí měnilo. Nejprve se zdokonalilo plánování potřeby hmotných výrobků, poté se zjišťovalo, zda hmotné prostředky, které se nacházejí v podniku ve formě zásob, nejsou příliš vysoké a zda kvůli tomu není příliš velký kapitál vázaný v zásobách. (HORÁKOVÁ, 1998)

### 2.2.3 Druhy poptávky

Zde si uvedeme, jak se dělí poptávka, neboť původ poptávky spoluurčuje volbu systému řízení zásob. Poptávku budeme rozlišovat podle původu a jejího časového průběhu

#### 2.2.3.1 Nezávislá a závislá poptávka

Nezávislá poptávka se může také nazývat stochastická. Podnik nemůže ovlivnit, kdy poptávka přijde, ani jak bude veliká. Nezávislá poptávka může být poptávka zákazníků po konečných produktech. Tuto poptávku nelze vypočítat, musí být předpovídána. Můžeme říct, že položky nezávislé poptávky jsou ty, pro něž používáme vlastní úsudek, předpověď, ekonomické analýzy, marketing a různé jiné techniky, které nám pomohou rozhodnout o tom, jaké množství budeme vyrábět. (HORÁKOVÁ, 1998; MERCADO, 2008)

Závislá poptávka může být na rozdíl od nezávislé poptávky odvozena z předpovědi poptávky po konečném produktu. U této poptávky je možné vypočítat čas a velikost potřeby materiálu, pokud si sestavíme hlavní výrobní plán, který obsahuje velikost dávek a čas, kdy budou doplněny zásoby konečných produktů. K výpočtu se používají deterministické výpočetní postupy. Pro položky závislé poptávky nejsou tedy potřeba žádná rozhodnutí nebo prognózy. (HORÁKOVÁ, 1998; MERCADO, 2008)

#### 2.2.3.2 Stejnoměrná a nárazová poptávka

U stejnoměrné poptávky jsou požadavky na výdej trvalé, může zde být ale kolísání velikosti v čase. Toto je typické pro zákazníky poptávající se po konečných produktech, tedy pro nezávislou poptávku. (HORÁKOVÁ, 1998)

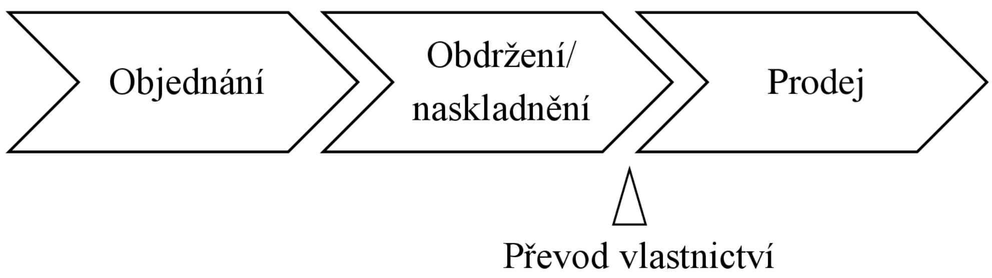
Jestliže ale podniku vyrábí určitý produkt v dávkách jen občas, vzniká u položek se závislou potřebou nárazová poptávka. Při této poptávce není možné vycházet z průměrné roční potřeby. (HORÁKOVÁ, 1998)

### 2.2.4 Zpoždění v platbách

Při odvozování EOQ modelu se předpokládá, že odběratel zaplatí za zboží, jakmile ho obdrží. Avšak v praxi odběratel většinou není schopen ihned uhradit částku za doručené zboží a dodavatel mu nabídne možnost zaplacení až po určité době. Dodavatel tím nabízí odběrateli bezúročný úvěr, během kterého odběratel může prodávat zboží, hromadit příjmy a vydělávat na úrocích. Jestliže ale odběratel není schopen zaplatit v dohodnutém termínu, pak je mu účtován úrok. (GOYAL, 1985)

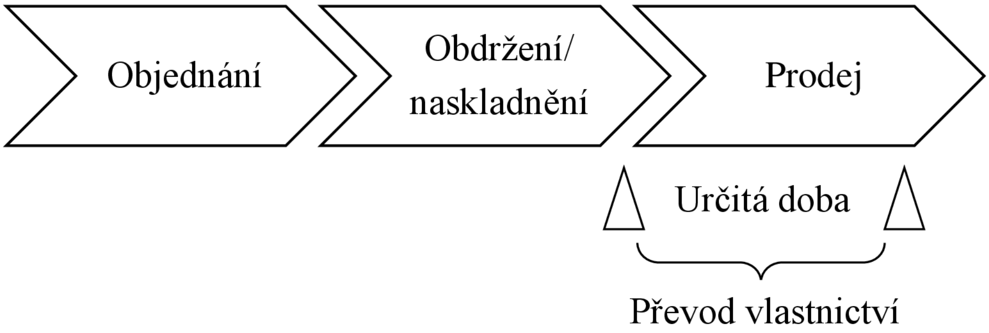
Nyní si definujeme čtyři různé druhy zpoždění v placení:

1) Zaplatit, jakmile se prodá/použije. V tomto typu smlouvy, jejíž průběh je znázorněn na obrázku 1, musí kupující zaplatit za obdržené zboží ihned po tom, co ho užije nebo ho prodá zákazníkům.



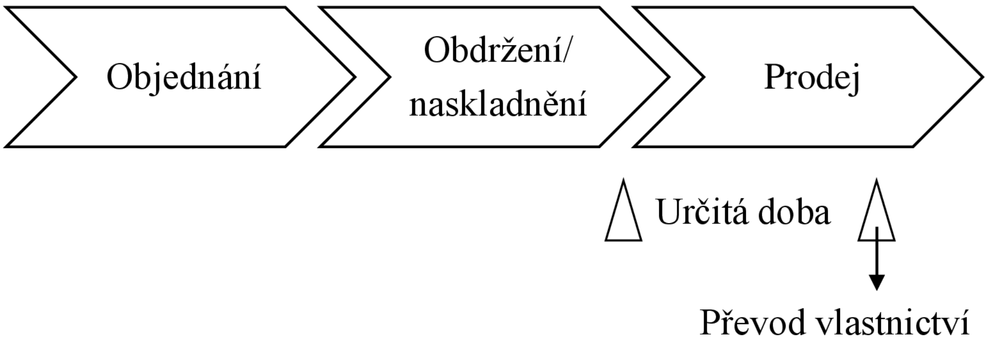

**Obrázek 1: 1. druh zpoždění v placení (**Zdroj: MOLAMOHAMADI, 2014)

2) Zaplatit po určité době, co se prodá/použije. V této smlouvě se prodejce a kupující dohodnou na určité době, během které musí kupující zaplatit prodejci za zboží. Pokud se ovšem kupující zpozdí, musí prodejci zaplatit nabyté úroky. To je ilustrováno na obrázku 2.



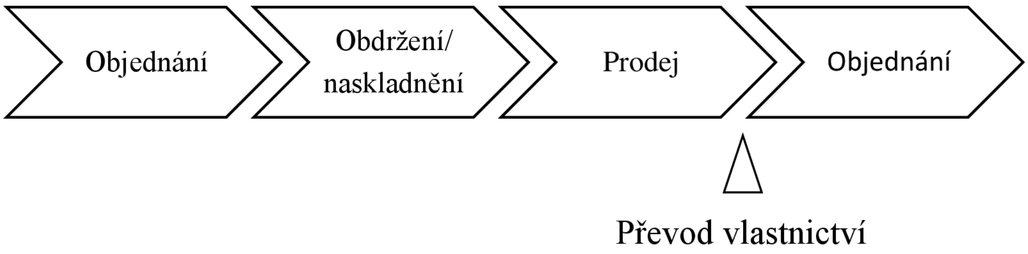

**Obrázek 2: 2. druh zpoždění v placení** (Zdroj: MOLAMOHAMADI, 2014)

3) Zaplatit až po určité době. Jak je znázorněno na obrázku 3, kupujícímu je povoleno odložit platbu až do konce splatnosti úvěru a mezitím získávat úroky. Avšak po uběhnutí sjednané lhůty se účtují úroky za zboží na skladě, kdy sazba těchto úroků je vyšší než získané úroky v průběhu období.




**Obrázek 3: 3. druh zpoždění v placení** (Zdroj: MOLAMOHAMADI, 2014)

4) Zaplatit za předchozí objednávku v době stanovení nového doplnění. V tomto typu zasílání zásob, kdykoliv si kupující něco objedná, tak zaplatí prodejci za minulou objednávku. To je znázorněno na obrázku 4. (MOLAMOHAMADI, 2014)




**Obrázek 4: 4. druh zpoždění v placení** (Zdroj: MOLAMOHAMADI, 2014)

### 2.2.5 Matematická formulace

Pro další počítání je nutné zavést si následující proměnné:

H = roční náklady na skladování (bez úroků z prodlení) na jednotku

$I_c$ = roční úrok z prodlení na peněžní jednotku na skladě

$I_d$ = úroky získané v peněžní jednotce za rok

p = prodejní cena

s = náklady na jednu objednávku

m = přípustní zpoždění při placení za zboží

T = délka dodávkového cyklu

I (t): Úroveň zásob v čase t ($0 \leq t \leq T$)

C (T) = celkové roční variabilní náklady. (GOYAL, 1985)

D (T, p) = roční poptávka, závislá na čase a ceně za jednotku

Celkové roční variabilní náklady C(T) se skládají z těchto prvků:

1) Náklady na objednávku = $\frac{s}{T}$

2) Náklady na skladování zásob. Průměrná zásoba $= \frac{DT}{2}$, tudíž náklady na roční skladování se mohou vyjádřit ve tvaru $\frac{DTH}{2}$.

3) Náklady na úroky za skladované položky. V případě, že se položky prodají ještě před tím, než se faktura vyřídí, tak se z tržeb zaplatí úroky. Pokud se ale faktura vyřídí, situace se změní a skladované položky musí být zaplaceny z úrokové míry $I_c$. Stav zásob, kdy se zúčtuje faktura = $D(T-m)$ a úrok je splatný během doby $(T-m)$.

$$\text{Úrok splatný za jedno období} = \frac{Dp(T-m^2)I_c}{2}.$$

$$\text{Úrok splatný za rok} = \frac{Dp(T-m^2)I_c}{2T} = \frac{DpTI_c}{2} + \frac{Dpm^2I_c}{2T} - DpmI_c.$$

4) Úroky získané během zúčtovaného období. Maximální množství získaných úroků $= Dmp$, pokud $T > m$ nebo $DTp$ pokud $T \leq m$. Ukážeme si tedy dva případy získaných úroků během zúčtovaného období:

a) $T > m$

$$\text{Získaný úrok za jedno období} = \frac{Dpm^2I_d}{2}$$

$$\text{Získaný úrok za rok} = \frac{Dpm^2I_d}{2T}.$$

b) $T \leq m.$

$$\text{Získaný úrok za jedno období} = \left(\frac{DT^2p}{2} + DTp(m-T)\right) * I_d =$$

$$= DTpI_d\left(m - \frac{T}{2}\right)$$

$$\text{Získaný úrok za rok} = DpI_d\left(m - \frac{T}{2}\right). \text{ (GOYAL, 1985)}$$

Také si uvedeme předpoklady modelu:

1) Poptávka je známá a konstantní v čase.

2) Systém zásob obsahuje pouze jeden druh zásob.

3) Nedostatek není povolen.

4) Doplnění je okamžité.

5) Dodací lhůta se opomíjí.

6) Časový horizont je nekonečný. (GOYAL, 1985)

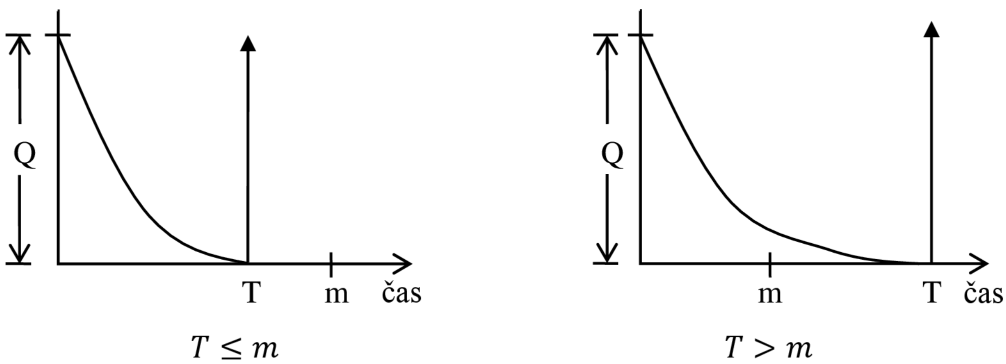
Úroveň zásob $I(T)$ se snižuje, aby uspokojila poptávku, proto můžeme změnu zásob v závislosti načase vyjádřit následujícími diferenciálními rovnicemi:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -D(p,t), 0 \leq t \leq T$$

$$\frac{dI(T)}{dT} = -\, aT, 0 \leq t \leq T, \text{kde } a = \alpha p^{-\beta}.$$

Okrajová podmínka $I(T) = 0$. (TRIPATHI, 2012)

Vzniknou nám dva možné případy $T \leq m$ a $T \geq m$, znázorněné na obrázku 5.




**Obrázek 5: Grafické znázornění situací T ≤ m a T > m** (Zdroj: TRIPATHI, 2012)

1) $T \leq m$.

V tomto případě se neplatí žádné nákladové úroky. Celkový roční zisk můžeme vyjádřit vztahem

$$Z1\,(T,p) = \frac{paT}{2} - \frac{s}{T} - \frac{caT}{2} - \frac{HaT^2}{2} + apI_d\left(m - \frac{T}{2}\right).$$

Celkové roční variabilní náklady lze vyjádřit ve tvaru

$$C(T) = \frac{s}{T} + \frac{caT}{2} + \frac{HaT^2}{2} - apI_d\left(m - \frac{T}{2}\right).$$

2) $T > m.$

V tomto případě celkový roční zisk lze vyjádřit vztahem

$$Z2\,(T,p) = \frac{paT}{2} - \frac{s}{T} - \frac{caT}{2} - \frac{HaT^2}{2} - \frac{ap(T-m)^2Ic}{2T} + \frac{am^2I_d}{2T}.$$

Celkové roční variabilní náklady můžeme vyjádřit ve tvaru

$$C(T) = \frac{s}{T} + \frac{caT}{2} + \frac{HaT^2}{2} + \frac{ap(T-m)^2Ic}{2T} - \frac{am^2I_d}{2T}.$$ (TRIPATHI, 2012)

# 3 Analýza současného stavu

V této části bakalářské práce si přiblížíme, čím konkrétním se budeme dále zabývat a uvedeme si data, která nám firma poskytla. Dále si odvodíme potřebné vztahy, které budeme poté používat pro praktické výpočty.

## 3.1 Firmou poskytnuté informace

V celé práci se budeme zabývat použitím nápojových kelímků.

Na jednom prodejním místě je maximální zásoba 300 kusů kelímků. Software je nastaven tak, pokud je na prodejním místě dosaženo hladiny 10 kelímků, začne signalizovat možný nedostatek kelímků a kelímky jsou následně doplněny pověřenou osobou.

Data, s kterými budeme pracovat, nám poskytla firma XY, s.r.o. Firma působí na českém trhu již po desítky let. Poskytnuté údaje jsou:

$s = 102{,}0833$ Kč/objednávka

$H = 0{,}19$ Kč/roční na kelímek

$c = 0{,}27$ Kč/kelímek

$\alpha = 31426290{,}9$

$\beta = 0{,}5$

$I_c = 0{,}02$

$I_d = 0{,}005$

$m = 10/360$ roku

$a = \alpha\, p^{-\beta}$.

## 3.2 Druhy možných situací

V této kapitole budeme analyzovat stavy, které mohou obchodníkovi vzniknout. Bude to situace, kdy obchodník zaplatí za poskytnuté zboží včas, a situace, kdy za dané zboží nestihne zaplatit ve stanovené lhůtě.

### 3.2.1 Zboží, prodané před stanovenou lhůtou

Jako první budeme modelovat situaci, kdy obchodník prodá své zboží včas. V případě, že $T \leq m$, tedy obchodník zaplatí za zboží ve sjednané lhůtě, obchodníkovi nevznikají nadbytečné náklady a naopak může získat úroky ve výši $aTpI_d(m - \frac{T}{2})$, tzn. za rok získá úroky ve výši $apI_d(m - \frac{T}{2})$. Celkový roční zisk potom můžeme vyjádřit vztahem

$$Z1\,(T,p) = \frac{paT}{2} - \frac{s}{T} - \frac{caT}{2} - \frac{HaT^2}{2} + apI_d\left(m - \frac{T}{2}\right).$$

Nejprve ověříme, že je funkce pro dané proměnné spojitá. Spojitost ověříme pomocí definice 1.2, tedy

$$\lim_{(\mathrm{T,p})\to(\mathrm{T_0,p_0})} \frac{paT}{2} - \frac{s}{T} - \frac{caT}{2} - \frac{HaT^2}{2} + apI_d\left(m - \frac{T}{2}\right) =$$

$$= \frac{p_0aT_0}{2} - \frac{s}{T_0} - \frac{caT_0}{2} - \frac{HaT_0^2}{2} + ap_0I_d\left(m - \frac{T_0}{2}\right).$$

Je zřejmé, že funkce $Z1\,(T,p)$ je spojitá pro obě proměnné.

Pro další modelování se omezíme na hodnoty proměnných $T$ a $p$, čímž nám vznikne obdélník $O1\{[T,p]\,|\,T \in [1, T_{max}],\ p \in [1, p_{max}]\}$, tj. kompaktní množina v rovině. Z věty 1.2 vyplývá, že funkce $Z1$ na dané množině nabývá své největší i nejmenší hodnoty. Abychom dané hodnoty mohli najít, je nutné provést 1. a 2. derivaci funkce $Z1\,(T,p)$. Dostáváme tedy

$$\frac{\partial Z1\,(T,P)}{\partial T} = \frac{pa}{2} + \frac{s}{T^2} - \frac{ca}{2} - HaT + apI_d\left(m - \frac{1}{2}\right),$$
$$\frac{\partial^2 Z1\,(T,P)}{\partial T^2} = -\left(\frac{2s}{T^3} + Ha\right).$$

Vzhledem k tomu, že nám vychází $\frac{\partial^2 Z1(T,p)}{\partial T^2} < 0$, vyplývá z toho, že funkce je konkávní, a pokud existuje extrém, pak je to maximum funkce.

Snažíme se tedy funkci maximalizovat za předpokladu, že bod znovu objednání dosahuje pouze kladných hodnot a zároveň je menší nebo rovnen než lhůta stanovená pro přípustné zpoždění (tj. $0 < T \leq m$) a dále předpokládáme, že nákupní cena kelímku nepřevyšuje jeho prodejní cenu (tj. $p > c$).

Pomocí diferenciální rovnice můžeme vypočítat, o kolik se změnila úroveň zásob v čase $T$. Postup je následující:

$$\frac{dI(T)}{dT} = -aT$$

$$dI(T) = -aT\,dT$$

$$\int dI(T) = -a \int T\,dT$$

$$I(T) = -\frac{aT^2}{2} + C$$

z čehož plyne, že obchodník prodá za jeden obchodní cyklus $\frac{aT^2}{2}$ kusů, a za rok tedy prodá $\frac{aT}{2}$ kusů.

### 3.2.2 Zboží, prodané po stanovené lhůtě

Jestliže obchodník prodá své zboží po předem stanovené lhůtě, nastává situace, kdy $T > m$ a obchodník tedy musí zaplatit úroky za poskytnutý úvěr, čímž mu vznikají nadbytečné náklady. Úroky za úvěr dosahují výše $\frac{ap(T-m)^2Ic}{2}$ Kč a tedy roční úroky činí $\frac{ap(T-m)^2Ic}{2T}$ Kč. I přes to, že obchodník musí platit úroky za úvěr, tak může získávat úroky z vkladů, které jsou ve výši $\frac{apm^2I_d}{2}$ Kč a analogicky roční získané úroky se rovnají $\frac{apm^2I_d}{2T}$ Kč. Celkový roční zisk můžeme poté získat z funkce

$$Z2\,(T,p) = \frac{paT}{2} - \frac{s}{T} - \frac{caT}{2} - \frac{HaT^2}{2} - \frac{ap(T-m)^2Ic}{2T} + \frac{am^2I_d}{2T}.$$

Jako u předchozí situace nejdříve ověříme pomocí definice 1.2, zda je funkce spojitá pro proměnné $T$ a $p$, tedy

$$\lim_{(T,p)\to(T_0,p_0)} \frac{paT}{2}-\frac{s}{T}-\frac{caT}{2}-\frac{HaT^2}{2}-\frac{ap(T-m)^2Ic}{2T}+\frac{am^2I_d}{2T}=$$

$$=\frac{p_0aT_0}{2}-\frac{s}{T_0}-\frac{caT_0}{2}-\frac{HaT_0^2}{2}-\frac{ap_0(T_0-m)^2Ic}{2T_0}+\frac{am^2I_d}{2T_0}.$$

Platí, že funkce $Z2\ (T,p)$ je spojitá pro obě proměnné.

Stejně jako u předchozího modelu, je nutné omezit se pro následné modelování na hodnoty proměnných $T$ a $p$, čímž nám vznikne obdélník $O2\{[T,p] \mid T\in[1,T_{max}], p\in[1,p_{max}]\}$, nebo-li vznikne kompaktní množina v rovině. A protože z Weierstrassovy věty vyplývá, že funkce $Z2\ (T,p)$ nabývá na dané množině své největší i nejmenší hodnoty, budeme pomocí 1. a 2. derivace dané hodnoty hledat. Po derivování nám vyjde

$$\frac{\partial Z2\ (T,p)}{\partial T}=\frac{pa}{2}+\frac{s}{T^2}-\frac{ca}{2}-HaT-\frac{apI_c}{2}+\frac{apm^2I_c}{2T^2}-\frac{am^2I_d}{2T^2}$$

$$\frac{\partial^2 Z2\ (T,p)}{\partial T^2}=-\left(\frac{2S}{T^3}+Ha+\frac{am^2}{T^3}(I_c-I_d)\right).$$

Můžeme říct, že funkce $Z2$ je konkávní, neboť $\frac{\partial^2 Z2\ (T,p)}{\partial T^2}<0$ a případný extrém bude maximem funkce.

Dále chceme funkci maximalizovat, víme-li, že bod znovu objednání je větší jak přípustná doba zpoždění (tj. $0<m<T$) a stejně jako u předchozí situace bude platit, že nákupní cena nebude převyšovat prodejní cenu kelímku (tj. $p>c$)

# 4 Vlastní návrhy řešení

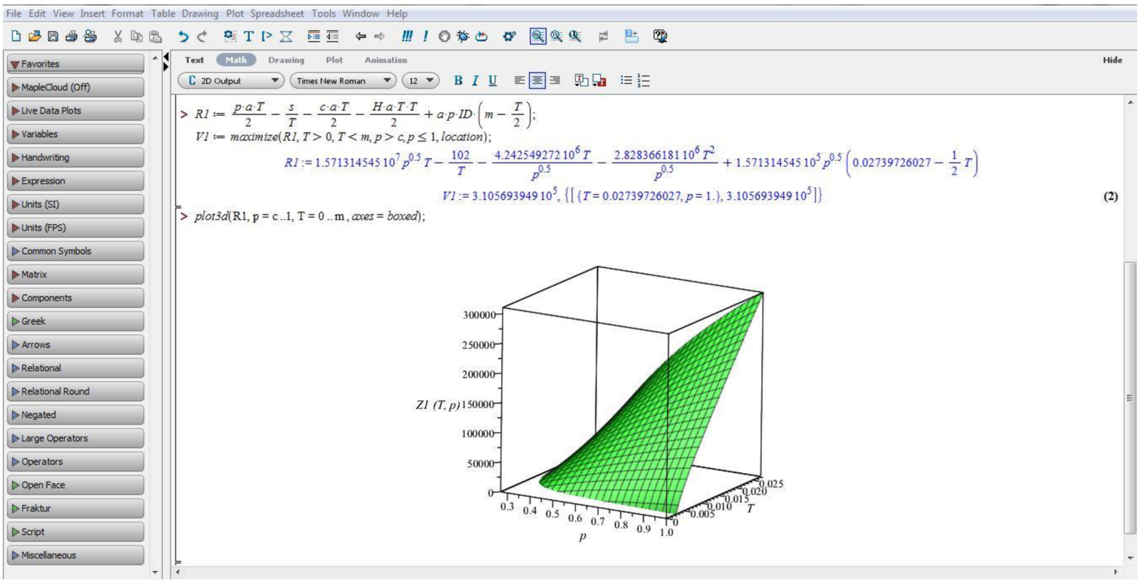
Zde si nejdříve představíme software, který byl po celou dobu používán, následně se budeme zabývat již zmíněnými situacemi, které mohou nastat a jako poslední budeme zkoumat chování modelu, pokud se některý ze stanovených parametrů změní.

## 4.1 Použitý software

Všechny matematické výpočty a grafická zobrazení budou prováděny pomocí softwaru Maple.

Maple byl vytvořen hlavně proto, aby se zjednodušily a zrychlily výpočty v matematice. Je možné ho využívat nejenom pro základní matematické výpočty, ale i v matematické analýze, v lineární algebře, matematické logice atd. Na rozdíl od jiných matematických softwarů dokáže nejenom provádět numerické výpočty, ale umí také modelovat matematické operace se symbolickými výrazy, a proto je schopný dávat výsledky s mnohem větší přesností. Kromě toho všeho zvládá vytvářet grafy funkcí – jedné i dvou proměnných. Výhodou také je, že je možné ukládat data v různých formátech a je možné data exportovat do jiných programovacích jazyků.

Na obrázku 6 je znázorněno, jak vypadá pracovní okno Maple.



**Obrázek 6: Pracovní okno Maple** (Zdroj: Vlastní zpracování)

### 4.1.1 Vkládání symbolů

Pokud chceme použít speciální symbol, existují dvě možnosti, jak jej vložit. První variantou je, že použijeme předdefinované symboly, které se vyskytují v paletách, které se nachází v levé části zápisníku. Existuje zde mnoho palet, kde každá paleta nabízí symboly příslušné skupiny. Je zde například paleta *Greek*, která nám nabízí písmena řecké abecedy, atd. (HŘEBÍČEK, 2011)

Jestliže ale nechceme použít paletu, můžeme k zápisu symbolů používat jejich názvů. Například odmocnina má název *sqrt*, nebo pro $\pi$ použijeme jednoduše *Pi*. Zde nám také může pomoci funkce „dokončování“, která nám po napsání úvodního písmena nabídne možné varianty. Funkce se spouští stisknutím kláves *„Ctrl + mezerník“*. (HŘEBÍČEK, 2011)

### 4.1.2 Provádění výpočtů

I přesto, že Maple dokáže pracovat s výpočty, aniž by byla porušena přesnost výpočtů, existují situace, kdy potřebujeme pouze přibližnou hodnotu čísla v pohyblivé řádové čárce. V tento moment nám pomůže příkaz *evalf*, který zaokrouhluje hodnotu daného argumentu na počet zadaných platných cifer. Pokud nezadáme počet míst, automaticky se nastaví hodnota 10. (HŘEBÍČEK, 2011)

### 4.1.3 Přiřazování hodnot do proměnných

Pokud přiřadíme výraz k nějaké proměnné, je možné se na ní později odkazovat. Přiřazení se provádí symbolem := (dvojtečka + rovnítko). Kromě toho je možné použít příkaz *assign*. Zrušení přiřazení provádí příkaz *unassign*. Pokud chceme všechny uložené hodnoty v paměti vymazat, použijeme příkaz *restart*. (HŘEBÍČEK, 2011)

### 4.1.4 Řešení rovnic

Maple je také schopen vypočítat různé druhy rovnic. V tabulce 1 jsou k různým typům rovnic přiřazeny potřebné příkazy pro řešení.

| **Typ rovnice** | **Příkaz pro řešení** |
|---|---|
| Rovnice a nerovnice | solve, fsolve |

| | |
|---|---|
| Obyčejné diferenciální rovnice | dsolve |
| Parciální diferenciální rovnice | pdsolve |
| Rovnice v oboru celých čísel | isolve |
| Rovnice v oboru celých čísel v konečném tělese | msolve |
| Systémy lineárních rovnic | LinearAlgebra[LinearSolve] |

**Tabulka 1: Příkazy pro řešení rovnic** (Zdroj: HŘEBÍČEK, 2011)

### 4.1.5 Tvorba grafů

V Maple existuje několik možností k vykreslení grafu funkce. Jednou z možností je zadat do zápisníku výraz z funkčního předpisu a po kliknutí pravým tlačítkem myši vybrat z nabídky *Plots > 2-D Plot* (pro funkce jedné proměnné) nebo *Plots > 3-D Plots* (pro funkce více proměnných). Další možností je použití příkazu *plot* a *plot3d*. V případě příkazu *plot3d* je nutné zadat i rozsah hodnot, kterých mají proměnné nabývat. (HŘEBÍČEK, 2011)

## 4.2 Situace při placení za zboží

Nyní již budeme analyzovat již dříve zmíněné situace s konkrétními daty.

### 4.2.1 Zboží, prodané před stanovenou lhůtou

Dosadíme poskytnuté hodnoty od firmy do funkce

$$Z1\,(T,p) = \frac{paT}{2} - \frac{s}{T} - \frac{caT}{2} - \frac{HaT^2}{2} + apI_d\left(m - \frac{T}{2}\right)$$

a získáme

$$Z1\,(T,p) = 1{,}571314545 * 10^7 * p^{0{,}5} * T - \frac{102}{T} - \frac{4{,}242549272 * 10^6 * T}{p^{0{,}5}} -$$

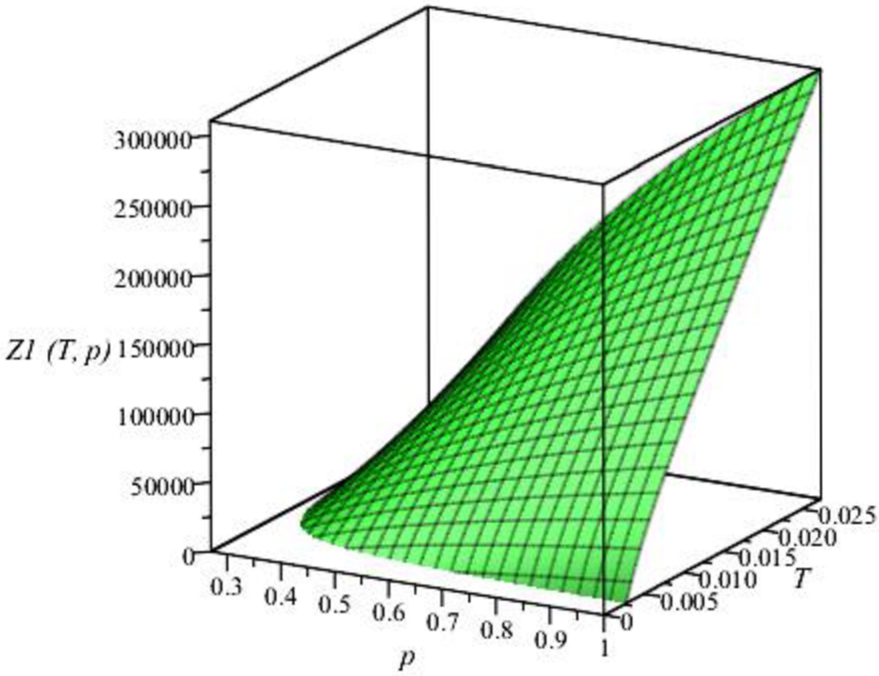
$$- \frac{2{,}828366181 * 10^6 * T^2}{p^{0{,}5}} + 1{,}571314545 * 10^5 * p^{0{,}5}\left(0{,}02739726027 - \frac{1}{2}T\right).$$

Po maximalizace funkce nám vyjde $T = 0{,}027$ a $p = 1$.

Pokud bude obchodník předpokládat, že se zboží prodá včas, pak maximalizuje svůj zisk v případě, že bod znovuobnovení bude $T = 0{,}027$, tj. 10 dní a cena za zboží $p = 1$.

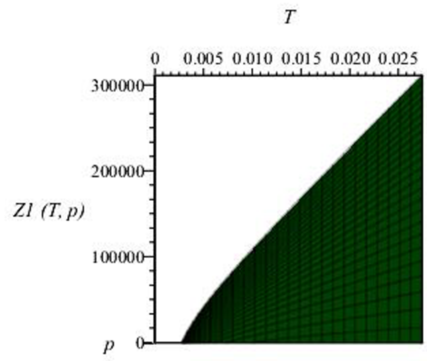
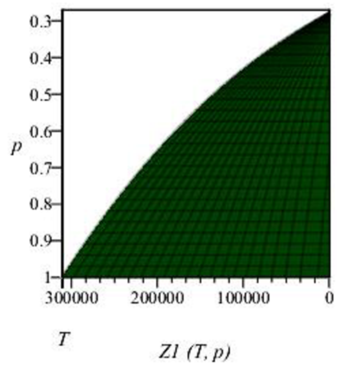
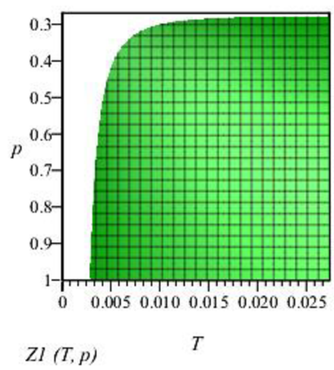
Po dosazení vypočítaných hodnot $T$ a $p$ do funkce $Z1\,(T, p)$ nám vyjde, že podnik bude $310\,569{,}39$ Kč v zisku.

Graf 1 nám vyznačuje plochu, která vykresluje možné situace, které mohou nastat v případě, že obchodník zaplatí za zboží včas.




**Graf 1: Možný zisk v případě T ≤ m** (Zdroj: Vlastní zpracování)

Pro lepší orientaci si v tabulce 2 znázorníme, jak by vypadala plocha grafu 1, pokud bychom si ji znázornili pomocí dvou os.

| Zobrazení podle os | Grafické znázornění |
|---|---|
| $T$<br>$Z1\,(T, p)$ |  |
| $p$<br>$Z1\,(T, p)$ |  |
| $p$<br>$T$ |  |

**Tabulka 2: Znázornění grafu 1 pomocí dvou os** (Zdroj: Vlastní zpracování)

Vzhledem k tomu, že jsme zjistili délku jednoho období T, jsme schopni vypočítat podle výše odvozeného vztahu, kolik je obchodník schopen prodat kelímků, tj.

$$\frac{aT^2}{2} = \frac{31426290{,}9 * 1^{-0,5} * 0{,}027^2}{2} = 11\,454{,}88 \text{ kusů kelímků za jedno období,}$$

a za rok tedy prodá

$$\frac{aT}{2} = \frac{31426290{,}9 * 1^{-0,5} * 0{,}027}{2} = 424\,254{,}93 \text{ kusů kelímků.}$$

Připočteme-li k tomu, že musí také zaplatit dodavatelský úvěr, pak celkem zaplatí za jeden obchodní cyklus

$$\frac{caT^2}{2} = \frac{0{,}27 * 31426290{,}9 * 1^{-0,5} * 0{,}027^2}{2} = 3\,092{,}88 \text{ Kč,}$$

$$\text{tj.} \frac{caT}{2} = \frac{0{,}27 * 31426290{,}9 * 1^{-0,5} * 0{,}027}{2} = 114\,548{,}83\text{Kč Kč za rok.}$$

Zbývá ještě určit, kolik obchodník zaplatí za celkové roční variabilní náklady. Vzhledem k tomu, že za zboží zaplatil včas, neplatí zde žádné nákladové úroky. Celkové roční variabilní náklady můžeme vyjádřit vztahem

$$C(T) = \frac{s}{T} + \frac{caT}{2} + \frac{HaT^2}{2} - apI_d\left(m - \frac{T}{2}\right),$$

kde po dosazení hodnot dostaneme

$$C(T) = \frac{102{,}0833}{0{,}027} + \frac{0{,}27 * 31426290{,}9 * 1^{-0,5} * 0{,}027}{2} +$$

$$+ \frac{0{,}19 * 31426290{,}9 * 1^{-0,5} * 0{,}027^2}{2} - 31426290{,}9 * 1^{-0,5} * 0{,}005 *$$

$$* \left(\frac{10}{360} - \frac{0{,}027}{2}\right) = 118\,204{,}79.$$

Obchodníkovy celkové roční variabilní náklady tedy činí 118 204,79 Kč za rok.

### 4.2.2 Zboží, prodané po stanovené lhůtě

Po vložení hodnot do funkce

$$Z2\,(T,p) = \frac{paT}{2} - \frac{s}{T} - \frac{caT}{2} - \frac{HaT^2}{2} - \frac{ap(T-m)^2Ic}{2T} + \frac{am^2I_d}{2T}$$

získáme

$$Z2\,(T,p) = 1{,}539888254 * 10^7 * p^{0,5} * T - \frac{102}{T} - \frac{4{,}242549272 * 10^6 * T}{p^{0,5}} -$$

$$-\frac{2{,}828366181 * 10^6 * T^2}{p^{0,5}} - \frac{235{,}889 * p^{0,5}}{T} + 17219{,}88542 * p^{0,5} + \frac{58{,}972}{p^{0,5} * T}.$$

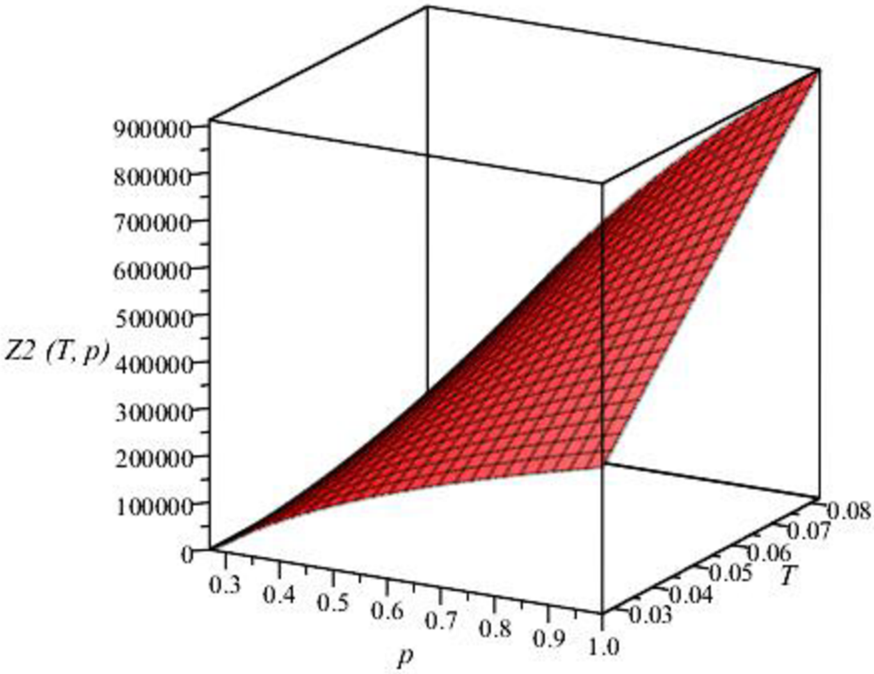
Jestliže funkci maximalizujeme, dostaneme hodnoty $T = 1{,}972$ a $p = 1$.

Získané hodnoty $T$ a $p$ dosadíme do funkce $Z2\,(T,p)$ a vyjde nám $Z2\,(T,p) =$ 11 018 462,66 Kč.

Jestliže obchodník neprodá své zboží včas, maximalizuje svůj zisk pouze tehdy, pokud cena za zboží bude $p = 1$ a úvěr bude splacen v $T = 1{,}972$, tj. 720 dní. V tomto případě dosahuje maximálního zisku 11 018 462,66 $K$č.

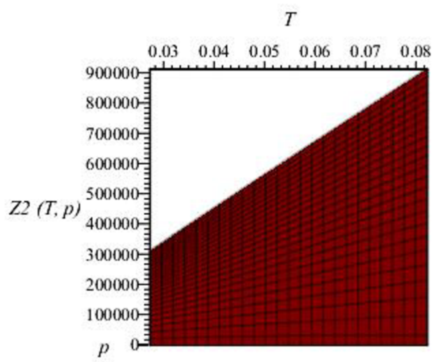
Vzhledem k tomu, že v této bakalářské práci pracujeme s nápojovými kelímky, což je rychloobrátkové spotřební zboží, tak je zřejmé, že hodnoty obdržené v této situaci jsou nereálné a je nutné vzít na vědomí, že tento příklad je pouze modelový.

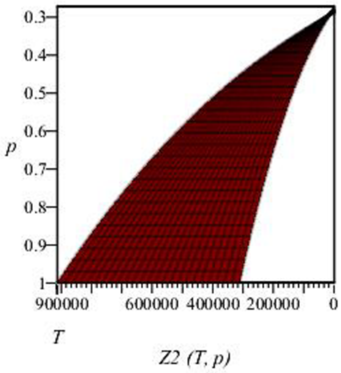
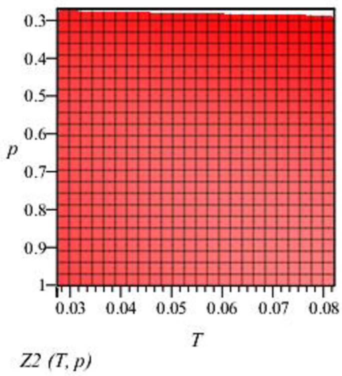
Následující graf 2 nám vykresluje plochu možného zisku v případě, že bude za zboží zaplaceno pozdě.




**Graf 2: Možný zisk v případě T > m** (Zdroj: Vlastní zpracování)

Tak jako u předchozí situace si pro lepší orientaci v grafu 2 znázorníme v tabulce 3, jak by vypadala vykreslená plocha, pokud bychom ji zobrazili pomocí dvou os.

| **Zobrazení podle os** | **Grafické znázornění** |
|---|---|
| $T$<br>$Z2(T,p)$ |   |

<table>
<tr><td>$p$<br>$Z2\ (T, p)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$p$<br>$T$</td><td>
</td></tr>
</table>

**Tabulka 3: Znázornění grafu 2 pomocí dvou os** (Zdroj: Vlastní zpracování)

Pomocí výše odvozené diferenciální rovnice zjistíme, kolik obchodník prodá za jeden obchodní cyklus. Obchodník tedy prodá

$$\frac{aT^2}{2} = \frac{31426290{,}9 * 1^{-0{,}5} * 1{,}972^2}{2} = 61\ 105\ 028{,}6 \text{ kusů kelímků,}$$

analogicky za jeden rok prodá

$$\frac{aT}{2} = \frac{31426290{,}9 * 1^{-0{,}5} * 1{,}972}{2} = 30\ 986\ 322{,}83 \text{ kusů kelímků.}$$

Dále vypočítáme, kolik musí obchodník zaplatit za dodavatelský úvěr. Za jeden obchodní cyklus zaplatí

$$\frac{caT^2}{2} = \frac{0,27 * 31426290,9 * 1^{-0,5} * 1,972^2}{2} = 16\,498\,357,72\,Kč.$$

a za rok musí zaplatit

$$\frac{caT}{2} = \frac{0,27 * 31426290,9 * 1^{-0,5} * 1,972}{2} = 8\,366\,307,72\,Kč.$$

Vzhledem k tomu, že obchodník nestihl zaplatit v předem stanovené lhůtě, musí dodavateli platit úroky za jeden cyklus ve výši

$$\frac{ap(T-m)^2Ic}{2} = \frac{31426290,9 * 1^{-0,5} * (1,972 - 0,027)^2 * 0,02}{2} = 1\,188\,378,85\text{ Kč},$$

za rok zaplatí na úrocích

$$\frac{ap(T-m)^2Ic}{2T} = \frac{31426290,9 * 1^{-0,5} * (1,972 - 0,027)^2 * 0,02}{2 * 1,972} = 602\,626,19\,Kč.$$

I přesto, že obchodník musí platit úroky za poskytnutý úvěr, tak může získat úroky za uložené tržby před okamžikem m. Získané úroky za jeden obchodní cyklus jsme schopni vypočítat pomocí vzorce

$$\frac{am^2I_d}{2} = \frac{31426290,9 * 1^{-0,5} * 0,027^2 * 0,005}{2} = 58,972\text{ Kč}$$

a obdržené úroky za rok činí

$$\frac{am^2I_d}{2\mathrm{T}} = \frac{31426290,9 * 1^{-0,5} * 0,027^2 * 0,005}{2 * 1,972} = 29,905\text{ Kč}.$$

Jako poslední určíme celkové roční variabilní náklady, ty budou na rozdíl od předchozí situace vyšší, neboť obchodník musel platit navíc úrok za poskytnutý úvěr. Celkové roční variabilní náklady vyjádříme vztahem

$$\mathrm{C(T)} = \frac{s}{T} + \frac{caT}{2} + \frac{HaT^2}{2} + \frac{ap(T-m)^2Ic}{2T} - \frac{am^2I_d}{2T} =$$

$$= \frac{102}{1,972} + \frac{0,27 * 31426290,9 * 1^{-0,5} * 1,972}{2} +$$

$$+ \frac{0,18 * 31426290,9 * 1^{-0,5} * 1,972^2}{2} +$$

$$+ \frac{31426290,9 * 1^{-0,5} * (1,972 - 0,027)^2 * 0,02}{2 * 1,972} -$$

$$- \frac{31426290,9 * 1^{-0,5} * 0,027^2 * 0,005}{2 * 1,972} =$$

$$= 19\,967\,860,33 \text{ Kč.}$$

Obchodníkovy celkové variabilní náklady v situaci, že zaplatí za zboží pozdě, jsou 19 967 860,33 Kč.

## 4.3 Dopad změny parametrů na chování modelu

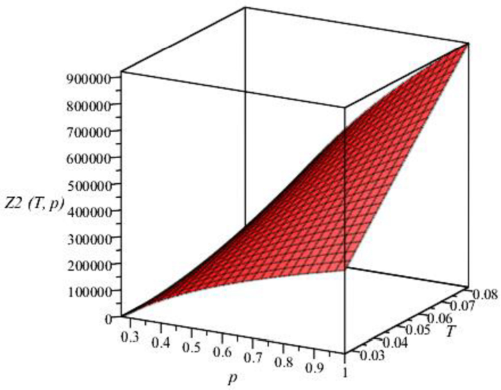
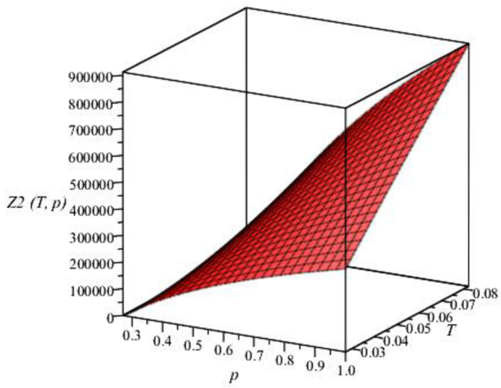
Za použití Maplu můžeme lehce zjistit, jak by se daný model choval, pokud bychom pozměnili některý z parametrů. Budeme zkoumat, jak se změní doba prodeje, pokud pozměníme úroky za poskytnutý úvěr, nebo pokud změníme nákupní cenu.

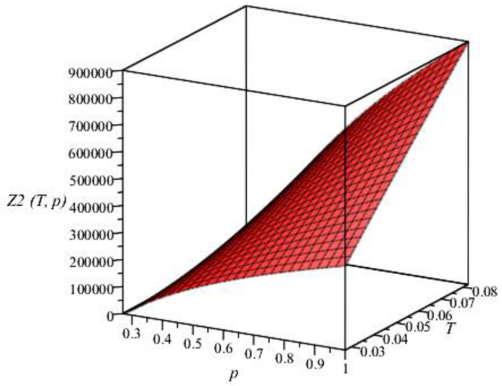
### 4.3.1 Dopad změny úroku za poskytnutý úvěr na dobu prodeje

Vzhledem k tomu, že obchodník neplatí úroky v případě, kdy za dané zboží zaplatí včas, omezíme se tedy na situaci, ve které obchodník nedodržel stanovenou lhůtu a musel si vzít úvěr.

Zvýšíme-li úrok o 2 % (tj. $I_c = 0{,}04$), kdy ostatní proměnné zůstanou neměnné, vyjde nám doba prodeje $T = 1{,}9167$ a prodejní cena $p = 1$. Snížíme-li úrok o 1,5 % (tj. $I_c = 0{,}005$), kdy zbylé proměnné opět zůstanou nezměněné, dostaneme dobu prodeje $T = 2{,}0139$ a prodejní cenu $p = 1$.

Z uvedených hodnot plyne, že čím vyšší bude úrok za poskytnutý úvěr, tím více se bude obchodník snažit, aby zboží prodal co nejdříve, čímž by zabránil dodatečnému nárůstu nákladů. A naopak, čím nižší úrok bude obchodníkovi nabídnut, tím déle bude zboží prodávat. Podrobné grafické znázornění je v tabulce 4.

| **Změněný parametr** | **Hodnoty při maximalizaci funkce** | **Grafické znázornění** |
|---|---|---|
| $I_c = 0{,}005$ | $T = 2{,}014$<br>$p = 1$<br>$Z2\,(T, p) =$<br>$= 11\,475\,396{,}07$ |  |
| $I_c = 0{,}02$ | $T = 1{,}972$<br>$p = 1$<br>$Z2\,(T, p) =$<br>$= 11\,018\,462{,}66$ |  |

| | | |
|---|---|---|
| $I_c = 0{,}04$ | $T = 1{,}917$<br>$p = 1$<br>$Z2\,(T,p) =$<br>$= 10\,424\,488{,}59$ |  |

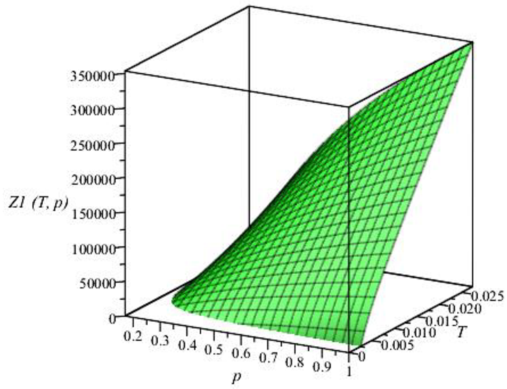
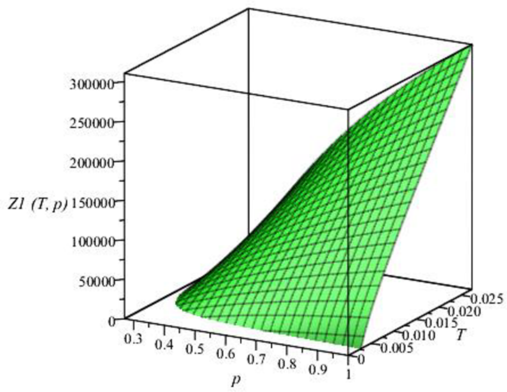
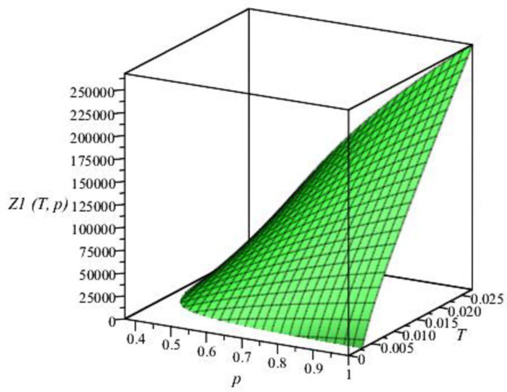
**Tabulka 4: Grafické znázornění změny úrokové sazby v případě T > m** (Zdroj: Vlastní zpracování)

### 4.3.2 Dopad změny nákupní ceny na dobu prodeje

Nejprve budeme zkoumat dopad změny nákupní ceny v případě, že obchodník stihne zaplatit včas a poté v případě, že obchodník za dané zboží nestihne zaplatit ve stanovené lhůtě.

#### 4.3.2.1 Zboží je zaplaceno včas

Ať změníme nákupní cenu jakkoliv, doba prodeje vždy zůstane stejná, neboť pokud chce obchodník co nejvíce maximalizovat svůj zisk, tak bude prodávat co nejdelší možnou dobu. Je logické, že změna ceny bude mít vliv na zisk z prodeje, což je graficky znázorněno v tabulce 5.

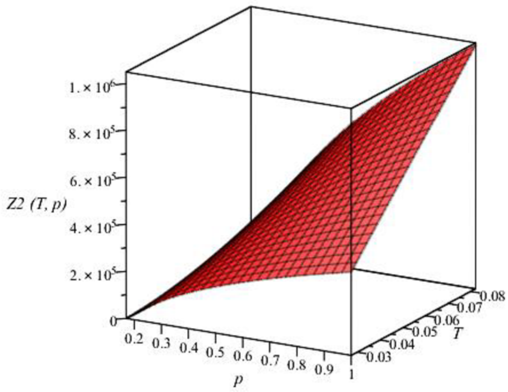
| Změněný parametr | Hodnoty při maximalizaci funkce | Grafické znázornění |
|---|---|---|
| $c = 0{,}17$ | $T = 0{,}027$<br>$p = 1$<br>$Z1\,(T, p) =$<br>$= 353\,619{,}1$ |  |
| $c = 0{,}27$ | $T = 0{,}027$<br>$p = 1$<br>$Z1\,(T, p) =$<br>$= 310\,569{,}39$ |  |
| $c = 0{,}37$ | $T = 0{,}027$<br>$p = 1$<br>$Z1\,(T, p) =$<br>$= 267\,519{,}68$ |  |

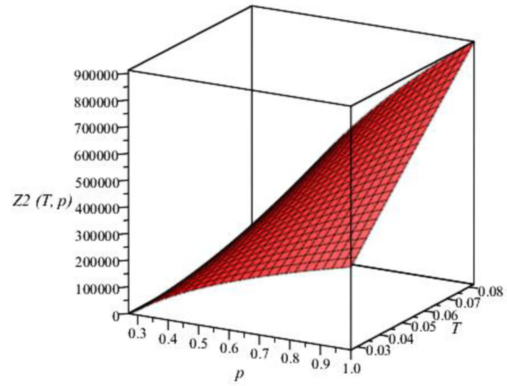
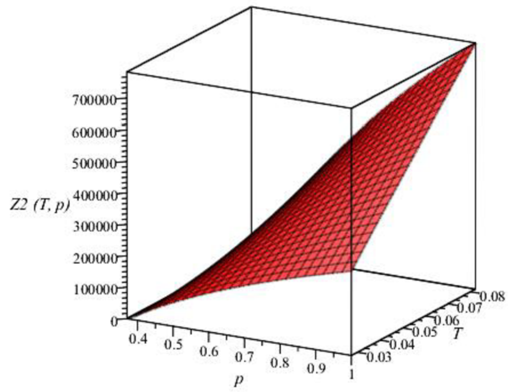
**Tabulka 5: Grafické znázornění změny nákupní ceny v případě T ≤ m** (Zdroj: Vlastní zpracování)

#### 4.3.2.2 Za zboží je zaplaceno včas

Zvýšíme-li nákupní cenu o 0,10 Kč (tj. $c = 0{,}37$), za podmínky, že další proměnné zůstanou neměnné, sníží se nám doba prodeje na $T = 1{,}694$ a prodejní cena bude $p = 1$. Naopak, pokud snížíme nákupní cenu o 0,10 Kč (tj. $c = 0{,}17$), kdy ostatní proměnné budou nezměněné, zvýší se nám doba prodeje na $T = 2{,}250$ a prodejní cena bude opět $p = 1$.

Z výše uvedených hodnot nám vyplývá, čím nižší bude nákupní cena, tím déle bude obchodník prodávat, aby mohl dosáhnout nejvyššího možného zisku a naopak, čím vyšší bude nákupní cena, tím kratší dobu bude prodávat. Podrobné grafické znázornění je v tabulce 6.

| **Změněný parametr** | **Hodnoty při maximalizaci funkce** | **Grafické znázornění** |
|---|---|---|
| $c = 0{,}17$ | $T = 2{,}25$<br>$p = 1$<br>$Z2\,(T, p) =$<br>$= 14\,335\,699{,}72$ |  |

| | | |
|---|---|---|
| $c = 0{,}27$ | $T = 1{,}972$<br>$p = 1$<br>$Z2\ (T, p) =$<br>$= 11\,018\,462{,}66$ |  |
| $c = 0{,}37$ | $T = 1{,}694$<br>$p = 1$<br>$Z2\ (T, p) =$<br>$= 8\,137\,696{,}15$ |  |

**Tabulka 6: Grafické znázornění změny nákupní ceny v případě T > m** (Zdroj: Vlastní zpracování)

# Závěr

Cílem bakalářské práce bylo stanovit takový matematický model, který obchodníkovi pomůže určit optimální cenu a maximální délku intervalu, ve kterém je zboží prodáváno s maximálním možným ziskem.

V modelu jsme zkoumali dvě situace, které mohou obchodníkovi vzniknout, tj. situace, kdy je zboží prodáno včas a situace, kdy je zboží prodáno pozdě. Došli jsme k následujícím závěrům. Cena za jednotku zboží v obou situacích je stanovena na maximální možnou, tedy 1 Kč, neboť je logické, že čím vyšší cena bude, tím vyšší bude mít obchodník zisky. Avšak délka intervalu se nám značně lišila. V případě, že je zboží prodáno včas, nám vyšla maximální možná délka intervalu (10 dní) což znamená, že obchodník se snaží prodávat zboží v co nejdelší možné době. V opačném případě, tj. obchodník prodá dané zboží pozdě, jsme dostali délku intervalu 1,972, z čehož plyne, že obchodník bude prodávat zboží 720 dní, pokud bude chtít dosáhnout maximálního zisku.

Zkoumali jsme také, jaký vliv má změna různých parametrů na daný model. Nejprve jsme pozorovali vliv změny úrokové sazby, kde jsme došli k závěru, čím vyšší je úroková sazba za poskytnutý úvěr, tím dříve se obchodník bude snažit dané zboží prodat. Poté jsme zkoumali, jak se bude model měnit, pokud změníme výši nákupní ceny. V případě, že obchodník stihne zadané zboží zaplatit včas, má změna vliv pouze na výši zisku, což logicky znamená, že čím nižší bude nákupní cena, tím vyššího zisku bude obchodník dosahovat a naopak. V případě, že obchodník nezaplatí včas, má již změna parametru vliv i na délku intervalu, tj. čím nižší je nákupní cena tím větší je délka intervalu a obchodník dosahuje vyššího zisku, a naopak, čím vyšší je nákupní cena, tím kratší je délka intervalu a obchodník dosahuje nižšího zisku.

# Literatura

DOŠLÁ, Zuzana a Ondřej DOŠLÝ. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2003, 142 s. ISBN 80-210-2052-0.

GOYAL, Surinder Kumar. Economic Order Quantity under Conditions of Permissible Delay in Payments. *The Journal of the Operational Research Society*, 1985, Vol. 36, No. 4, pp. 335- 338. ISSN 0160-5682.

HORÁKOVÁ, Helena. *Řízení zásob: Logistické pojetí, metody, aplikace, praktické úlohy*. 3.přepr.vyd. Praha: Profess Consulting, 1998, 236 s. ISBN 80-852-3555-2.

KUREŠ, Miroslav. *Matematická analýza 2*. Přednáška. Brno: VUT, letní semestr 2012/2013.

MERCADO, Ed C. *Hands-on inventory management*. New York: Auerbach Publications, 2008, 110 p. ISBN 9780849383267.

MOLAMOHAMADI, Zohren, Napsiah ISMAIL, Zulkiflle LEMAN and Norzima ZULKFILI. Reviewing the Literature of Inventory Models under Trade Credit Contact. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2014, vol. 2014, Article ID 975425, 19 pages. ISSN 1026-0226.

ŠINDELÁŘ, Karel. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 2. vyd. Praha: SNTL, 1972, 230 s. Polytechnická knižnice. ISBN (Brož.) : Kčs 21,00.

ŠTŮSEK, Jaromír. *Řízení provozu v logistických řetězcích*. Vyd. 1. Praha: C. H. Beck, 2007, 227 s. C. H. Beck pro praxi. ISBN 978-80-7179-534-6.

TRIPTATHI R.P., ,S.S. MISRA and Tarun TAYAL. Optimal Pricing and Ordering Policy under Permissible Delay in Payments. *European Journal of Business and Management*. 2012, Vol 4, No. 6, pp. 67-78. ISSN 2222-2839.

VOCHOZKA, Marek a Petr MULAČ. *Podniková ekonomika*. 1. vyd. Praha: Grada, 2012, 570 s. Finanční řízení. ISBN 978-80-247-4372-1.

**Internetové zdroje**

HŘEBÍČEK, Jiří - POSPÍŠIL, Zdeněk - URBÁNEK, Jaroslav. *Úvod do matematického modelování s využitím Maple [online].* 1 vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2011 [cit. 2015-05-17]. Elportál. Dostupné z: <http://is.muni.cz/elportal/?id=930553>. ISSN 1802-128X.

# Seznam obrázků

# Seznam grafů

# Seznam tabulek