Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Diplomová práce

Diferenciální počet více proměnných pro studenty učitelství 2. stupně ZŠ

Autor diplomové práce: Vladislav Beňadik

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

České Budějovice 2011

Jihočeská univerzita

Pedagogická fakulta

Zadání diplomové práce

Autor:	**Vladislav Beňadik**
Studijní program:	M7504 Učitelství pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství matematiky a tělesné výchovy
Název závěrečné práce:	**Diferenciální počet více proměnných pro studenty učitelství 2. stupně ZŠ**

Garantující pracoviště:	katedra matematiky
Vedoucí práce:	RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D
Datum zadání závěrečné práce:	26. 11. 2008
Datum odevzdání závěrečné práce:	29. 4. 2011

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne

podpis

Anotace

BEŇADIK, VLADISLAV. Diferenciální počet funkce více proměnných – sbírka řešených a neřešených příkladů, Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity, České Budějovice 2011.

Práce obsahuje řešení základních příkladů diferenciálního počtu funkce více proměnných (speciálně dvou a tří proměnných). Zahrnuje příklady na řešení definičního oboru, prvních a druhých parciálních derivací, určování lokálních extrémů funkcí (explicitně i implicitně zadaných) a nalezení rovnice tečné roviny ke grafu funkce v bodě. Příklady jsou řazeny dle obtížnosti.

Klíčová slova: funkce, definiční obor, první parciální derivace, druhá parciální derivace, stacionární bod, lokální minimum, lokální maximum, tečná rovina.

Abstract

BEŇADIK, VLADISLAV. The differential calculus of functions of several variables - a collection of solved and unsolved examples, University of South Bohemia - Pedagogical faculty, České Budějovice 2011.

This thesis includes solving the basic examples of differential calculus (especially two and three variables). The work covers examples of the solutions of the domain, the first and second partial derivatives, determining the functions of local extremes (both explicitly and implicitly given) and find the equation of the tangent plane to a point in the graphs of functions. The examples are sorted by difficulty.

Key words: function, domain of definition, first partial derivative, second partial derivative, stationary point, local minimum, local maximum, tangent plane.

Poděkování

Děkuji vedoucí práce paní RNDr. Vladimíře Petráškové, Ph.D za cenné připomínky a rady při psaní této diplomové práce a panu Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D. s pomocí při vykreslování grafů.

Obsah

Seznam obrázků

Úvod

Cílem mé diplomové práce je vytvoření sbírky úloh řešených a neřešených příkladů ze základů diferenciálního počtu více proměnných, především však dvou a tří proměnných. Práce je určena pro studenty učitelství matematiky pro základní i střední školy. Příklady jsou vybrány tak, aby na nich byl ukázán co nejsrozumitelněji postup při řešení různých typů úloh.

Diplomová práce je rozdělena do čtyř hlavních kapitol, které obsahují základní problémy diferenciálního počtu. První kapitola se zabývá definičními obory funkcí více proměnných, druhá kapitola jejími parciálními derivacemi. Jsou zde řešeny příklady jak funkcí zadaných explicitně, tak i implicitně. V následujících dvou kapitolách zúročíme praktické zkušenosti procvičené z prvních dvou kapitol při výpočtech lokálních extrémů a tečných rovin. Příklady jsem volil tak, aby byl čtenář seznámen se základními postupy při řešení jednotlivých typů příkladů (převážně ukázkových k danému tématu).

V úvodu každé kapitoly se nachází výběr základní teorie, kterou by měl čtenář minimálně znát k tomu, aby zvládl dané výpočty. Je potřeba mít už základní znalosti z matematické analýzy, převážně z funkcí jedné proměnné. V příkladech jsem se snažil tuto teorii co nelépe čtenáři přiblížit. Pro další studium a rozšíření obzorů tohoto tématu bych doporučil především literaturu [2], [3], [4], [6].

Příklady jsou v této práci řazeny dle obtížnosti. U některých příkladů jsou uvedena dvě řešení, aby čtenář dosáhl širšího náhledu na daný problém. Každý příklady je podrobně vysvětlen a u většiny je doplněn obrázkem, pro lepší pochopení jak zadaného příkladu, tak i teorie.

Práce je napsána v Microsoft Office Word 2007 a převedena do formátu PDF. Obrázky jsou vytvořeny a upraveny v programech Maple 12, GeoGebra a Zoner Photo Studio 8.

1. Definiční obor funkce dvou proměnných

V této kapitole se budeme zabývat určováním definičního oboru. Každý příklad je doplněn grafickým zobrazením výsledku. Na začátku kapitoly je stručná teorie, týkající se tématu, kterou jsem převzal a upravil z literatury [2], [4], [5].

1.1 Základní pojmy

Definice 1.1: Eukleidovským n-rozměrným prostorem (značíme E_n) rozumíme množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel, tj. $E_n = R \times R \times \ldots \times R$. Body tohoto prostoru mají podobu $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Vzdálenost bodů $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n], Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ určuje tzv. eukleidovská metrika (značíme ρ):

$$\rho(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Definice 1.2: Funkce f je zobrazení $f: M \rightarrow R$ (kde R je množina reálných čísel a M je množina v eukleidovském prostoru $R \times R$), které každému prvku $[x, y] \in M$ přiřazuje právě jedno $y \in R$. Množinu M nazveme definičním oborem funkce f, značíme D_f.

Poznámka 1.3: Pokud nebude definiční obor specifikován, tak jím rozumíme maximální množinu, na které můžeme funkci definovat.

Definice 1.4: Nechť $a = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, potom množina $f(M) = \{f(a) \mid a \in D_f\}$ se nazývá obor hodnot funkce f na množině M.

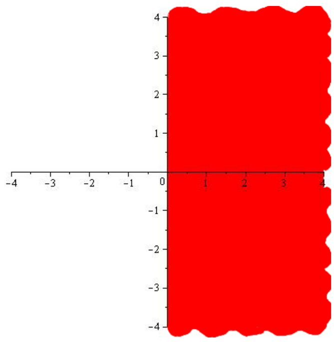
1.2 Řešené příklady

Příklad 1.1: Najděte definiční obor funkce $f: f(x,y) = y + \sqrt{2x}$ a zakreslete.

Řešení:

Zajímá nás, pro které uspořádané dvojice $[x,y] \in R \times R$ bude funkce dvou proměnných definována. Ze zadání vidíme, že y není omezeno žádnou podmínkou, tudíž patří do intervalu $(-\infty;\infty)$ a pro x platí podmínka: $2x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$, to znamená x patří do intervalu $\langle 0;\infty)$. Definičním oborem dané funkce je polorovina, pro kterou platí $x \in \langle 0;\infty) \wedge y \in (-\infty;\infty)$. Výsledek je tedy:

$$D_f = \{[x,y] \in R \times R \,|x \in \langle 0;\infty), y \in (-\infty;\infty)\}.$$



Obrázek 1.1: Definiční obor funkce $f: f(x,y) = y + \sqrt{2x}$.

Příklad 1.2: Určete definiční obor funkce $f: f(x,y) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{y^2-4}$ a zakreslete.

Řešení:

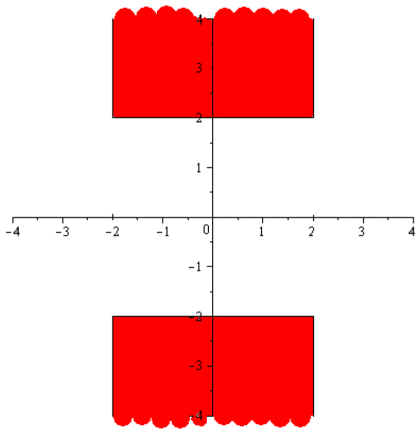
Opět nás zajímá, pro které uspořádané dvojice $[x,y] \in R \times R$ je daná funkce definovaná. Rozdělíme si postup do dvou fází, kdy nejdříve budeme vyšetřovat podmínky existence první odmocniny a poté druhé:

$$\sqrt{4-x^2} \rightarrow 4-x^2 \geq 0 \rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow x \in \langle -2,2\rangle$$

$$\sqrt{y^2-4} \rightarrow y^2-4 \geq 0 \rightarrow |y| \geq 2 \Rightarrow y \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle 2,\infty).$$

Definiční obor dané funkce je:

$$D_f = \{[x,y] \in R \times R \,|x \in \langle -2,2\rangle, y \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle 2,\infty)\}.$$



Obrázek 1.2: Definiční obor funkce $f\colon f(x,y) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{y^2-4}$.

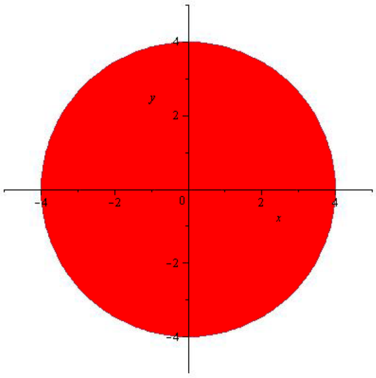
Příklad 1.3: Zjistěte, pro které uspořádané dvojice $[x,y] \in R \times R$ je funkce $f\colon f(x,y) = \sqrt{16-x^2-y^2}$ definována a definiční obor znázorněte.

Řešení:

Vyšetříme podmínky, kdy má daná odmocnina smysl:

$$\sqrt{16-x^2-y^2} \rightarrow 16-x^2-y^2 \geq 0 \rightarrow x^2+y^2 \leq 16.$$

V tomto případě vyšlo, že všechny uspořádané dvojice $[x,y]$, které jsou řešením (definičním oborem) se nachází v kruhu o poloměru 4 se středem v počátku. Definičním oborem funkce $f\colon f(x,y) = \sqrt{16-x^2-y^2}$ je kruh s poloměrem 4, včetně hraniční kružnice: $D_f = \{[x,y] \in R \times R \,|x^2+y^2 \leq 16\}$.



Obrázek 1.3: Definiční obor funkce $f: f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

Příklad 1.4: Nalezněte definiční obor funkce

$$f: f(x,y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)} \cdot \sqrt{(16 - x^2 - y^2)}.$$

Řešení:

Nejprve určíme, pro která $[x, y]$ je odmocnina definovaná, tedy musí platit, že $(x^2 + y^2 - 4)(16 - x^2 - y^2) \geq 0$. Rozdělíme to na dva případy. První, kdy budeme předpokládat, že jsou obě závorky záporné nebo rovny nule a druhý, kdy předpokládáme, že jsou závorky kladné nebo rovny nule.

První případ: $(x^2 + y^2 - 4 \leq 0) \wedge (16 - x^2 - y^2 \leq 0) \to (x^2 + y^2 \leq 4) \wedge$

$$\wedge\, (x^2 + y^2 \geq 16).$$

Pro zjednodušení a lepší viditelnost to lze napsat jako: $4 \geq x^2 + y^2 \geq 16$.

Z tohoto zápisu lze vidět, že se jedná o kruh (včetně hraniční kružnice) s poloměrem 2 a počátku soustavy a vnější okolí kružnice (včetně hraniční kružnice) s poloměrem 4. Tyto dva množiny se neprotnou. Proto tento případ nemá řešení.

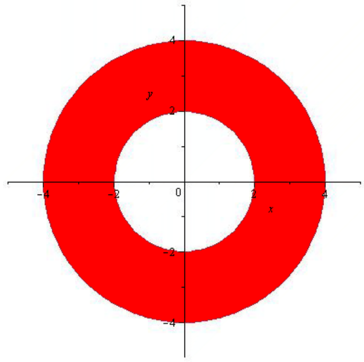
Druhý případ: $(x^2 + y^2 - 4 \geq 0) \wedge (16 - x^2 - y^2 \geq 0) \to (x^2 + y^2 \geq 4) \wedge$

$$\wedge\, (x^2 + y^2 \leq 16).$$

Opět pro zjednodušení a lepší viditelnost to lze napsat jako: $16 \geq x^2 + y^2 \geq 4$.

Tedy definičním oborem funkce $f: f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-4)(16-x^2-y^2)}$ je mezikruží těchto dvou kružnic včetně hraničních kružnic, tj.:

$$D_f = \{[x,y] \in R \times R \mid 16 \geq x^2 + y^2 \geq 4\}.$$

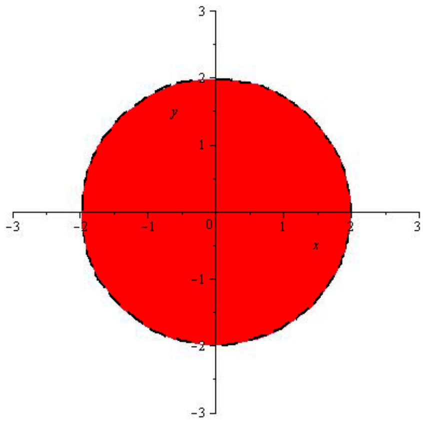


Obrázek 1.4: Červeně vykreslená nerovnost $16 \geq x^2 + y^2 \geq 4$.

Příklad 1.5: Určete definiční obor funkce $f: f(x,y) = \ln(4 - \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2)$ a zakreslete ho do kartézské soustavy souřadnic.

Řešení:

Abychom našli definiční obor této funkce, je potřeba zjistit, pro jaké dvojice $[x,y]$ je argument logaritmu kladný, tj. $4 - x^2 - y^2 > 0$. To znamená, že platí: $D_f = \{[x,y] \in R \times R | x^2 + y^2 < 4\}$. Definičním oborem je tedy kruh s poloměrem 2 a se středem v počátku soustavy souřadnic.

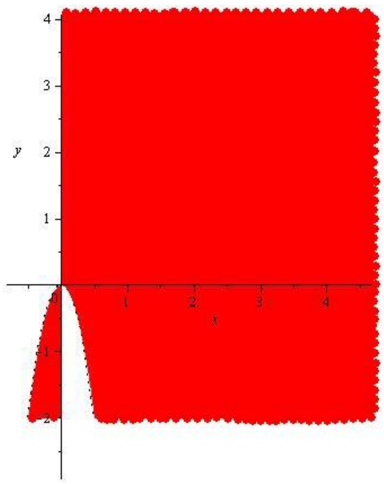


Obrázek 1.5: Červeně vykreslená nerovnost $x^2 + y^2 < 4$.

Příklad 1.6: Určete a zakreslete definiční obor funkce $f: f(x,y) = ln\left(2x + \frac{y}{4x}\right)$.

Řešení:

Daná funkce je definovaná, jestliže platí: $2x + \frac{y}{4x} > 0$. Pravou stranu nerovnice převedeme na společného jmenovatele, tím získáme nerovnici $\frac{8x^2+y}{4x} > 0$. Zlomek je kladný, když platí: $\left((8x^2 + y > 0) \wedge (4x > 0)\right) \vee \left((8x^2 + y < 0) \wedge (4x < 0)\right)$. Vidíme tedy, že $D_f = \{[x,y] \in R \times R | (y > -8x^2 \wedge x > 0) \vee (y < -8x^2 \wedge x < 0)\}$.



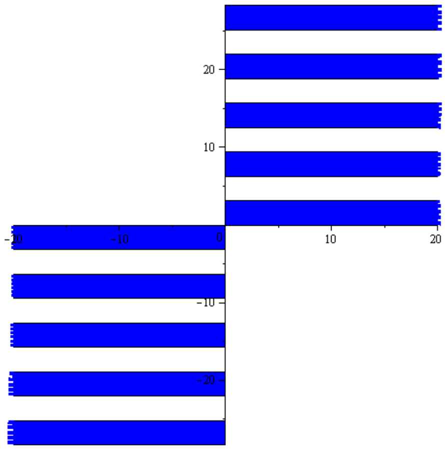
Obrázek 1.6: Vykreslená nerovnost $(y > -8x^2 \wedge x > 0) \vee (y < -8x^2 \wedge x < 0)$.

Příklad 1.7: Určete a nakreslete definiční obor funkce $f: f(x,y) = \sqrt{x(\sin y)}$.

Řešení:

Tento příklad bude specifický tím, že se nám zde objevila funkce sinus, která je periodická. Postup bude ale stejný jako u předchozích příkladů. Nejprve si tedy určíme podmínky, pro které $[x,y]$ má odmocnina smyl: $x(\sin y) \geq 0 \rightarrow (x \geq 0 \wedge \sin y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge \sin y \leq 0)$. Definiční obor se tedy rovná (nesmíme zapomenout, že je funkce sinus periodická):

$$D_f = \{[x,y] \in R \times R; \left(x \geq 0 \wedge y \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle\right)$$
$$\vee \left(x \leq 0 \wedge y \in \bigcup_{k=0}^{-\infty} \langle (2k-1)\pi, 2k\pi\rangle\right)\}.$$



Obrázek 1.7: Definiční obor funkce $f: f(x,y) = \sqrt{x(\sin y)}$.

1.3 Neřešené příklady

1. Určete definiční obory funkcí dvou proměnných a zakreslete:

   a) $f: f(x,y) = \log(1-x) + \sqrt{1-y^2}$ [10],

   b) $f: f(x,y) = \sqrt{\frac{x-1}{y+1}}$ [10],

   c) $f: f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$ [2],

   d) $f: f(x,y) = \log\left(\frac{x-1}{x+y+1}\right)$ [10],

   e) $f: f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ [2].

2. Parciální derivace

V druhé kapitole si ukážeme, jak derivovat funkci více proměnných. Budeme derivovat funkce zadané jak explicitně, tak i implicitně. Teoretická část je převzata z [1], [4], [6], [7], [14], [11].

2.1 Základní pojmy

Definice 2.1: Pro $\epsilon > 0$ definujeme:

ϵ – okolí bodu $x \in R \times R$: $U_\epsilon(x) = \{y \in R \times R: \rho(x, y) < \epsilon\}$.

Prstencové ϵ – okolí bodu $x \in R \times R$: $P_\epsilon(x) = \frac{U_\epsilon(x)}{\{x\}} = \{y \in R \times R: 0 < \rho(x, y) < \epsilon\}$.

Definice 2.2: Funkce f má v bodě $C = [a, b]$ limitu A, jestliže ke každému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|f(x, y) - A| < \epsilon$ platí pro všechny body $P_\epsilon(C)$.

Poznámka 2.2: Limitu funkce f v bodě $[a, b]$, která je rovna A, značíme znakem $\lim_{[x,y]\to[a,b]} f(x, y) = A$.

Definice 2.3: Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 = [a, b]$ svého definičního oboru, jestliže platí: $\lim_{[x,y]\to[a,b]} f(x, y) = f(a, b)$.

Definice 2.4: (Vnitřní bod množiny)

Nechť $A \subset M$. Bod $x_0 \in M$ je vnitřní bod množiny A, existuje-li nějaké $U_\epsilon(x_0) \subseteq A$.

Definice 2.5: (Parciální derivace funkce dvou proměnných)

Nechť f je funkce 2 proměnných definovaná na $D_f \subset R \times R$ a nechť bod $x_0 = [a, b]$ je vnitřním bodem D_f.

Řekneme, že funkce f má parciální derivaci podle proměnné x v bodě x_0, pokud existuje vlastní limita:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}.$$

Řekneme, že funkce f má parciální derivaci podle proměnné y v bodě x_0, pokud existuje vlastní limita:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}.$$

Poznámka 2.5: V některé další literatuře, tak i na internetu, je uvedeno místo $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$ podobná limita $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ (respektive $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$ a $\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$).

Poznámka 2.6: V praxi počítáme parciální derivace tak, že derivujeme funkci f podle proměnné x a proměnnou y bereme jako konstantu. Obdobně počítáme i parciální derivace funkce f podle y, kdy x bereme jako konstantu.

Poznámka 2.7: Derivace funkce podle x značíme $f_x'(x,y)$ nebo $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, derivace podle y značíme $f_y'(x,y)$ nebo $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Definice 2.6: (parciální derivace funkce tří proměnných)

Nechť f je funkce 3 proměnných definovaná na $D_f \subset R\times R\times R$ a nechť bod $x_0 = [a,b,c]$ je vnitřním bodem D_f.

Řekneme, že funkce f má parciální derivaci podle proměnné x v bodě x_0, pokud existuje vlastní limita:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b,c)-f(a,b,c)}{h}.$$

Řekneme, že funkce f má parciální derivaci podle proměnné y v bodě x_0, pokud existuje vlastní limita:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h,c)-f(a,b,c)}{h}.$$

Řekneme, že funkce f má parciální derivaci podle proměnné z v bodě x_0, pokud existuje vlastní limita:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b,c+h)-f(a,b,c)}{h}.$$

Poznámka 2.8: Parciální derivace se počítají úplně stejným principem, jako u funkce dvou proměnných (definice 2.5), jen s tím rozdílem, že při derivování podle x (respektive y) bereme i z jako konstantu a přibude zde navíc ještě derivace funkce podle z, kdy logicky x a y bereme jako konstanty a značíme $f_z'(x,y,z)$ nebo $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$.

Poznámka 2.9: U většiny příkladů se budeme setkávat i s druhou parciální derivací. Jedná se o následné derivování již derivovaných funkcí tak, že první parciální derivaci podle x vezmeme jako funkci a postupujeme jako při první derivaci (tudíž derivujeme podle x a y bereme jako konstantu). Stejně opakujeme postup i u druhé parciální derivace podle y.

Druhé parciální derivace, které jsme poprvé derivovali podle x a pak také podle x značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{x^2}''(x,y)$.

Druhé parciální derivace, které jsme poprvé derivovali podle y a pak také podle y značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{x^2}''(x,y)$.

Derivacím, které jsme poprvé derivovali podle jedné proměnné a podruhé derivovali podle druhé, se říká smíšené parciální derivace. Budeme je značit $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}''(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}''(x,y)$.

Úplně stejný postup aplikujeme i při druhých parciálních derivacích funkce tří proměnných.

Věta 2.7: Pokud jsou smíšené derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ v bodě $x_0 = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ spojité, pak jsou si v tomto bodě rovny, tzn. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Věta 2.8: Nechť existují vlastní derivace funkcí *f*, g v bodě $a = [a_1, a_2]$, kde $a \in D_f \subset R \times R$. Potom:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{\left(g(a)\right)^2}.$$

Věta 2.9: (Derivace složené funkce)

Nechť funkce $h = g°f$, kde f je vnější funkce a g je vnitřní funkce, $a \in D_h$. Nechť $g(a) = b$, nechť existují vlastní derivace $f'\left(g(a)\right), g'(a)$. Potom existuje $(f \circ g)'(a)$ a platí $\left(f\left(g(a)\right)\right)' = f'\left(g(a)\right) \cdot g'(a)$.

Věta 2.10: (Derivace elementárních funkcí)

Platí:

- $(x^n)' = nx^{n-1}$, pro $x > 0, n \in R$
- $(\sin x)' = \cos x$, pro $x \in R$
- $(\cos x)' = -\sin x$, pro $x \in R$
- $(tg\ x)' = \frac{1}{cos^2 x}$, pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in Z$
- $(cotg\ x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$, pro $x \in (k\pi, (k+1)\pi), k \in Z$
- $(e^x)' = e^x$, pro $x \in R$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, pro $x > 0$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, pro $x \in R, a > 0$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, pro $x \in (-1; 1)$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, pro $x \in (-1; 1)$
- $(\mathrm{artg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$, pro $x \in R$
- $(\mathrm{arccotg}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, pro $x \in R$

Věta 2.11: (Diferencovatelnost funkce dvou a tří proměnných)

Nechť existuje funkce dvou proměnných x, y a bod $x_0 = [x_1, x_2]$. Funkce f je diferencovatelná v bodě $a = [a_1, a_2]$, existují-li čísla $A_1, A_2 \in R$ a spojitá funkce dvou proměnných x, y taková, že $\omega_a = 0$ a platí:

$$f(x_0) - f(a) = A_1(x_1 - a_1) + A_2(x_2 - a_2) + \omega_{x_0}|x_0 - a|.$$

Nechť existuje funkce tří proměnných x, y, z a bod $x_0 = [x_1, x_2, x_3]$. Funkce f je diferencovatelná v bodě $a = [a_1, a_2, a_3]$, existují-li čísla $A_1, A_2 \in R$ a spojitá funkce tří proměnných x, y, z taková, že $\omega_a = 0$ a platí:

$$f(x_0) - f(a) = A_1(x_1 - a_1) + A_2(x_2 - a_2) + A_3(x_3 - a_3) + \omega_{x_0}|x_0 - a|.$$

Věta 2.12: (Postačující podmínka diferencovatelnosti)

Nechť existuje funkce dvou proměnných f (respektive tří proměnných), která má všechny parciální derivace spojité v bodě $t \in D_f$. Potom je funkce f diferencovatelná v tomto bodě.

Implicitní funkce

Funkce jedné proměnné může být zadána explicitně ve tvaru $y = f(x)$ nebo implicitně ve tvaru $F(x, y) = 0$, kde F je funkce dvou proměnných.

V některých případech rovnice $F(x, y) = 0$ definuje jednoznačně funkci $y = f(x)$, jindy ne.

Mějme nějakou rovnici křivky, například nám známou rovnici jednotkové kružnice

$x^2 + y^2 - 1 = 0$. Tato rovnice popisuje křivku, kterou si však nemůžeme představit jako graf funkce popsaný $y = f(x)$. Nicméně kolem každého bodu $x = [a, b]$ na této křivce lze najít alespoň jistý úsek, který už je grafem funkce. A co je důležitější, je grafem diferencovatelné funkce (viz. věta 2.11). V tomto případě lze příslušnou funkci vyjádřit explicitním způsobem (v našem příkladu je to pro $b > 0, y = \sqrt{1 - x^2}, b < 0, y = -\sqrt{1 - x^2}$).

Věta 2.13: (Věta o implicitní funkci)

Nechť F je funkce dvou proměnných. Nechť dále F má na nějakém okolí bodu $x_0 = [a, b]$ spojité parciální derivace $F_x^{'}, F_y^{'}$ a platí: $F(a, b) = 0$ a $F_y^{'}(a, b) \neq 0$.

Potom existuje okolí $U_\delta(a) \subset R$ a existuje právě jedna funkce f definovaná na tomto okolí taková, že platí:

- $f(a) = b$
- $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U_\delta(a)$.
- Na $U_\delta(a)$ má f spojitou derivaci, pro kterou platí:

$$f_x^{'} = -\frac{F_x^{'}(x,y)}{F_y^{'}(x,y)}, \text{ kde } y = f(x).$$

Poznámka 2.13: V některé další literatuře se setkáme s obdobným značením derivace $y^{'}(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))}$, které budu používat i já v příkladech.

Poznámka 2.13: Ekvivalentně řešíme i implicitní funkci tří proměnných pro $x_0 = [a, b, c]$. Platí-li: $F(x_0) = 0$ a $F_z^{'}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) \neq 0$. Pak f má spojitou derivaci, pro kterou platí: $z_x^{'}(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z(x))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z(x))}$ a $z_y^{'}(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z(x))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z(x))}$.

2.2 Řešené příklady na parciální derivace:

Příklad 2.1: Vypočítejte první parciální derivace funkce

$$f: f(x,y) = 3x^3 + 5x - 2y^4 + +4x^2y^3.$$

Řešení:

Máme danou funkci $f: f(x,y) = 3x^3 + 5x - 2y^4 + 4x^2y^3$, nyní uděláme první derivaci funkce f podle x (y budeme brát jako konstantu) a potom derivaci funkce f podle y (kde x budeme brát jako konstantu). V tomto konkrétním případě pro výpočet budeme používat větu 2.10 (přesněji pravidlo $(x^n)' = nx^{n-1}$):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x'(x,y) = 9x^2 + 5 - 0 + 8xy^3 = 9x^2 + 5 + 8xy^3$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y'(x,y) = 0 + 0 - 8y^3 + 12x^2y^2 = +12x^2y^2 - 8y^3.$$

Dále již budeme pro zjednodušení značit parciální derivace jen $f_x'(x,y)$ a $f_y'(x,y)$.

Příklad 2.2: Vypočítejte první a druhé parciální derivace funkce

$$f: f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3y^2x + y^3.$$

Řešení:

Tato funkce je obdobná jako funkce uvedená výše, proto postup derivování bude stejný:

$$f_x'(x,y) = 3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3(x+y)^2$$

$$f_y'(x,y) = 3x^2 + 6yx + 3y^2 = 3(x+y)^2.$$

Teď přistoupíme k druhým. Budeme brát každou z prvních derivací jako funkci a ty postupně derivujeme opět podle x a podle y. Výsledkem budou druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x,y) = 6(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f(x.y)}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x,y) = 6(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y) = 6(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y) = 6(x+y).$$

Dále již budeme pro zjednodušení značit druhé parciální derivace jen $f''_{x^2}(x,y)$ a $f''_{y^2}(x,y)$ a $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

Příklad 2.3: Zjistěte první a druhé parciální derivace funkce $f(x,y) = \sin x \cdot \cos y$.

Řešení:

V této funkci máme součin dvou periodických funkcí. Ve větě 2.10 nalezneme pravidla, podle kterých budeme derivovat ($(\sin x)' = \cos x$ a $(\cos x)' = -\sin x$). Opět bereme nejdřív x jako proměnnou a y jako konstantu a poté naopak.

První parciální derivace:

$$f'_x(x,y) = \cos x \cdot \cos y$$

$$f'_y(x,y) = \sin x \cdot (-\sin y).$$

Po vypočítání prvních parciálních derivací se zaměříme na druhé. Postupujeme stejně jako v příkladu 2.2.

Druhé parciální derivace:

$$f''_{x^2}(x,y) = -\sin x \cdot \cos y$$

$$f''_{y^2}(x,y) = -\sin x \cdot \cos y$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -\cos x \cdot \sin y.$$

Příklad 2.4: Vypočítejte všechny derivace až do druhého řádu funkce

$$h: h(x,y) = = \ln(x + y^2) \text{ ([3]).}$$

Řešení:

Už na první pohled je patrno, že se jedná o složenou funkci, proto musíme zvolit odlišný přístup na rozdíl od předchozích příkladů. Podle věty 2.9 víme, že $\left(f\left(g(a)\right)\right)' = f'\left(g(a)\right) \cdot g'(a)$. V našem příkladě je funkce $f = ln$ a $g = x + y^2$. Při výpočtech budeme aplikovat jak tuto větu, tak věty o parciálních derivacích.

První parciální derivace:

$$h'_x(x,y) = \frac{1}{x + y^2} \cdot 1 = \frac{1}{x + y^2}$$

$$h'_y(x,y) = \frac{1}{x + y^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x + y^2}.$$

První parciální derivace si přepíšeme do tvaru: $h'_x(x,y) = (x + y^2)^{-1}$;

$h'_y(x,y) = 2y \cdot (x + y^2)^{-1}$. Opět tedy budeme muset použít větu 2.9 o derivaci složené funkce a navíc i větu 2.8 o podílu (součinu) dvou funkcí.

Druhá parciální derivace:

$$h''_{x^2}(x,y) = -(x + y^2)^{-2} \cdot 1 = -\frac{1}{(x + y^2)^2}$$

$$h''_{y^2}(x,y) = -(x+y^2)^{-2} \cdot 2y \cdot 2y + +2 \cdot (x+y^2)^{-1} = -\frac{4y^2}{(x+y^2)^2} + \frac{2}{(x+y^2)} =$$

$$= \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$$

$$h''_{xy}(x,y) = h''_{yx}(x,y) = -2y(x++y^2)^{-2} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

Příklad 2.5: Vypočítejte druhé parciální derivace funkce $f: f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ([3]).

Řešení:

Tento příklad je obdobný, jako předchozí příklad 2.3. Máme složenou funkci, kterou přepíšeme do tvaru $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$. Podle pravidla o derivování složené funkci jednoduše derivujeme.

První parciální derivace:

$$f'_x(x,y,z) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -= -\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$f'_y(x,y,z) = -\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = -\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$f'_z(x,y,z) == -\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z = -\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

Parciální derivace ostatních proměnných se budou počítat analogicky, a proto vždy uvedu postup jen u jedné proměnné. Druhé parciální derivace:

$$f''_{x^2}(x,y,z) = -1(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + (-x) \cdot \left(-\tfrac{3}{2}\right) \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x =$$

$$= -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f''_{y^2}(x,y,z) = \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f''_{z^2}(x,y,z) = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Smíšené parciální derivace:

$$f''_{xy}(x,y,z) = f''_{yx}(x,y,z) = 0 + (-x) \cdot \left(-\tfrac{3}{2}\right) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2y = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f''_{xz}(x,y,z) = f''_{zx}(x,y,z) = = \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f''_{yz}(x,y,z) = f''_{zy}(x,y,z) = \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Příklad 2.6: Vypočtěte první derivaci funkce $f: f(x,y) = x^2y^4 + 2x^4 + 3xy^2 - 2$ v bodě [1; 0]

a) podle definice parciálních derivace,
b) podle vět o parciálních derivacích.

Řešení:

a) Podle definice parciálních derivací platí:

$$f'_x(1,0) = \lim_{x \to 1} \frac{6x^2 \cdot 0 + 2x^4 + 3x \cdot 0 - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^4 - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2 \cdot (x^4 - 1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2 \cdot (x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2 \cdot (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} 2 \cdot (x + 1)(x^2 + 1) = 8$$

$$f'_y(1,0) = \lim_{y \to 0} \frac{6 \cdot 1 \cdot y^3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot y^2 - 2}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{6y^3 + 3y^2}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{3y^2(2y + 1)}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} 3y(2y + 1) = 0.$$

Parciální derivace jsou:

$$f_x^{'}(1,0) = 8;$$

$$f_y^{'}(1,0) = 0.$$

b) Nyní si ukážeme ekvivalentní způsob, jak lze druhé derivace v bodě určit. Vypočteme parciální derivace v obecném bodě a teprve poté dosadíme za proměnné souřadnice daného bodu:

$$f_x^{'}(x,y) = 6y^3 \cdot 2x + 2 \cdot 4x^3 + 3y^2 = 12xy^3 + 8x^3 + 3y^2$$
$$f_y^{'}(x,y) = 6x^2 \cdot 3y^2 + 3x \cdot 2y = 18x^2y^2 + 6xy.$$

Máme vypočítané derivace funkce v obecném bodě $[x,y]$. Abychom získali výsledek, stačí dosadit za proměnné *x* a *y*:

$$f_x^{'}(1,0) = 12 \cdot 1 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8$$
$$f_y^{'}(1,0) = 18 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Příklad 2.7: Vypočtěte $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ funkce

$$f: f(x,y) = 4x^2y + 2\ln x^2 - y^3,$$

je-li $a = [1,2]$, popřípadě $a = [-1,3]$.

Řešení:

Nejprve vypočítáme první parciální derivace dle pravidel o derivování, ale bod ještě nebudeme dosazovat. Dosadíme až do druhých derivací, které vypočítáme z prvních:

$$f_x^{'}(x,y) = 8xy + 2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = 8xy + \frac{4}{x}$$

$$f_y^{'}(x,y) = 4x^2 - 3y^2.$$

Druhé parciální derivace jsou rovny:

$$f''_{x^2}(x,y) = 8y + 4 \cdot (-1) \cdot (x)^{-2} \cdot 1 = 8y - \frac{4}{x^2}$$

$$f''_{y^2}(x,y) = 0 - 6y = -6y$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 8x - 0 = 8x.$$

Nyní dosadíme dané body a získáme hodnoty:

$$f''_{x^2}(1,2) = 8 \cdot 2 - \frac{4}{1} = 12$$

$$f''_{y^2}(1,2) = -6 \cdot 2 = -12$$

$$f''_{xy}(1,2) = f''_{yx}(1,2) = 16$$

$$f''_{x^2}(-1,3) = 8 \cdot 3 - \frac{4}{(-1)^2} = 20$$

$$f''_{y^2}(-1,3) = -6 \cdot 3 = -18$$

$$f''_{xy}(-1,3) = f''_{yx}(-1,3) = -8.$$

Příklad 2.8: Vypočítejte první a druhou derivaci funkce $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$, kde $a \in R$ ([3]).

Řešení:

Tuto funkci máme zadanou v implicitním tvaru, proto musíme pozměnit postup při řešení tohoto příkladu. Nejprve předpokládáme, že existuje nějaký obecný bod, pro který platí rovnost $F(x_0) = 0$, pak musí platit i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$ (dle věty 2.13): $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = F'_y = 2x - 2y \neq 0$. Teď, když máme splněny tyto dvě podmínky, můžeme začít derivovat. Protože ale počítáme derivaci v obecném bodě, nebudeme za y dosazovat souřadnici bodu, ale budeme derivovat podle x a y budeme brát jako funkci (pokaždé, když budeme derivovat y, vložíme tam značení, že jsme derivovali podle y, pro první derivaci se značí y_x' a pro druhou derivaci y_{x^2}'').

První parciální derivace:

$$2x + 2y + 2xy_x' - 2yy_x' = 0.$$

Z rovnice vyjádříme y_x', tím získáme první derivaci funkce podle x:

$$y_x' = -\frac{x+y}{x-y}.$$

Zderivujeme jako složenou funkci $2x + 2y + 2xy_x' - 2yy_x' = 0$, abychom získali druhou parciální derivaci:

$$2 + 2y_x' + 2y_x' + 2xy_{x^2}'' - 2y_x'y_x' - 2yy_{x^2}'' = 0.$$

Vyjádříme y_{x^2}'': $y_{x^2}'' = \frac{-2-4y_x'+2(y_x')^2}{2x-2y}$ a dosadíme za $y_x' = -\frac{x+y}{x-y}$ (první derivaci). Teď stačí zjednodušit zlomek na $y_{x^2}'' = -\frac{2(x^2+2xy-y^2)}{(x-y)^3}$. Je patrné, že ve zlomku (na místě jmenovatele) je naše původní funkce (můžeme ji nahradit konstantou na pravé straně rovnice) a tím nám vyjde druhá parciální derivace: $y_{x^2}'' = -\frac{2a^2}{(x-y)^3}$.

Toto je jeden z postupů, jak derivovat implicitní funkci. Po derivování vyjádříme y_x', čímž získáme první parciální derivaci. Tento postup budeme používat při zjišťování extrému implicitních funkcí. Jiný postup abychom určili první parciální derivaci je podílem derivace funkce *f* podle x a derivace funkce *f* podle y. Z toho lze vidět, proč nesmí být derivace funkce *f* podle y rovna nule, neboť by zlomek neměl smysl. Tento postup si ukážeme u příkladu 2.10. Obdobně tento postup platí i u funkcí tří proměnných.

Příklad 2.9: Máme funkci $2x + 3y - e^{x-y} = 0$. Vypočtěte první a druhou parciální derivaci této funkce.

Řešení:

Abychom získali první derivaci, budeme postupovat jako v příkladě 2.8. Zjistíme, zda platí podmínky takové, že předpokládáme existenci nějakého bodu, pro který platí.: $f_y'(a) = 3 - e^{x-y}(-1) \neq 0$ a $f(a) = 0$. Přistoupíme k derivaci funkce podle *x* a *y* bereme opět jako složenou funkci:

$$2 - 3y_x' - e^{x-y}(1 - y_x') = 0 \to y_x' = \frac{e^{x-y} - 2}{e^{x-y} - 3}.$$

Když máme vypočítané první derivace, dopočítáme druhé tak, že vezmeme funkci $2 - 3y_x' - e^{x-y}(1 - y_x') = 0$ a tu opět derivujeme jako v příkladu 2.8:

$$0 - 3y_{x^2}'' - e^{x-y}(1 - y_x')(1 - y_x') - e^{x-y}(-y_{x^2}'') = 0.$$

Abychom získali druhé derivace, tak nám stačí vyjádřit y_{x^2}'' :

$$y_{x^2}'' = \frac{-e^{x-y}(1 - y_x')^2}{e^{x-y} - 3}.$$

Poznámka k příkladu: V některé literatuře se můžeme setkat s tím, že se do druhé parciální derivace za y_x' dosadí první parciální derivace a upraví se tak výsledek, aby nám tam zůstali pouze dvě proměnné *x*,*y* (viz příklad 2.8).

Příklad 2.10: Vypočítejte první parciální derivaci funkce $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Řešení:

Funkci máme zadanou v implicitním tvaru, ale máme tři proměnné. Opět, abychom mohli derivovat, musí existovat nějaký bod, pro který platí $F(x, y, z) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$ dle věty 2.13: $F_z' = -\frac{2}{c^2} \cdot z \neq 0$. Podmínky jsou pro nějaký libovolný bod (který náleží definičnímu oboru funkce) splněny, proto můžeme přistoupit k derivacím, dle poznámky 2.13:

$$z_x' = \frac{\frac{2}{a^2} \cdot x}{-\frac{2}{c^2} \cdot z} \rightarrow -\frac{xc^2}{za^2}$$

$$z_y' = \frac{\frac{2}{b^2} \cdot y}{-\frac{2}{c^2} \cdot z} \rightarrow -\frac{yc^2}{za^2}.$$

Příklad 2.11: Vypočítejte první parciální derivace funkce $\ln(x^2) + xyz - 3xyz^2 = 0$.

Řešení:

Opět máme funkci tří proměnných, ale nyní zvolíme odlišný postup. Nebudeme postupovat jako v příkladě 2.10, ale jako v příkladě 2.9 kdy funkci derivujeme a vyjádříme proměnné z_x', z_y', které jsme získali při derivování. Předpokládáme, že pro nějaký bod z D_f platí podmínky $F(x, y, z) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$. Poté lze přistoupit k parciálním derivacím:

$$\frac{1}{x^2} \cdot x + yz + xyz_x' - 3yz^2 - 6xyzz_x' = 0 \rightarrow z_x' = \frac{-xyz + 3xyz^2 - 1}{xy - 6xyz}$$

$$xz + xyz_y' - 3xz^2 - 6xyzz_y' = 0 \rightarrow z_y' = \frac{3xz^2 - xz}{xy - 6xyz}.$$

Příklad 2.12: Vypočítejte první parciální derivaci funkce $xe^{2y} - y\, ln\, x - 8 = 0$ v bodě $[1, ?]$ ([7]).

Řešení:

Musíme zajistit, aby daný bod vyhovoval rovnici funkce. Proto dosadíme za $x = 1$ a dopočítáme druhou souřadnici bodu: $1e^{2y} - y \ln 1 - 8 = 0 \rightarrow e^{2y} = 8$. Po zlogaritmování rovnice obdržíme: $y = \ln\sqrt{8}$. Tedy bod má souřadnice $[1, \ln\sqrt{8}]$. Nyní zjistíme, zda bod vyhovuje i druhé podmínce ve větě o implicitní funkci:

$\frac{\partial f}{\partial y}(1, \ln\sqrt{8}) \neq 0$, tj. $f_y' = 2xye^{2y} - \ln x \neq 0$ pro bod $[1, \ln\sqrt{8}]$: $2\ln\sqrt{8}\, e^{2\ln\sqrt{8}} \neq 0 \rightarrow$ $\ln 8 \neq 1$. Nerovnost platí, proto víme, že existuje derivace a můžeme derivovat.

První parciální derivace:

$$e^{2y} + x \cdot 2y \cdot e^{2y} \cdot y_x' - \frac{y}{x} - y_x' \cdot \ln x = 0.$$

Vyjádříme y_x', dosadíme za proměnné daný bod a získáme výsledek:

$$y_x' = \frac{\ln\sqrt{8} - 8}{16\ln\sqrt{8}} \rightarrow y_x' = -\frac{1}{2} + \frac{\ln\sqrt{8}}{16}.$$

2.3 Neřešené příklady

1) Vypočítejte první parciální derivace funkcí [4]:
   a) $f: f(x, y) = e^x \cos(xy)$,
   b) $f: f(x, y) = \ln\sqrt{(2x^2 + y^2)}$,
   c) $f: f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$,
   d) $f: f(x, y) = \frac{x}{x-y}$,
   e) $f: f(x, y, z) = x^3yz^2$,
   f) $f: f(x, y, z) = x^3 + y^2 - z^2 - 2x + 3y + z$,
   g) $f: f(x, y, z) = z\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.
2) Vypočítejte druhé parciální derivace funkcí:
   a) $f: f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ [4],
   b) $f: f(x, y) = (x^2y + xy^2)^5$ [4],
   c) $f: f(x, y) = e^x\cos(xy) + e^y\sin(xy)$ [4],
   d) $f: f(x, y) = \frac{\cos x^2}{y}$ [3],
   e) $f: f(x, y) = \ln(x + y^3)$ [3],
3) Určete y_x', y_{x^2}'' funkce $x + y^3 + xy^2 + 2 = 0$ [2].
4) Vypočítejte z_x', z_y' u funkcí:
   a) $x^2 + y^2 - zx + zy^4 - 1 = 0$ [2],

b) $2x^2 - 3y^2 + z^2 + x - 2y + 7 = 0$ [4],

c) $x^2 + y \cdot \sin z + x^3 z^2 - 6 = 0$ [4],

d) $z = xy \cdot \sin(xz)$ [4],

e) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ [2],

f) $x + y + z = e^z$ [2].

3. Extrémy funkce dvou proměnných

V této kapitole, týkající se lokálních extrémů funkce, jsem použil převážně teorii z literatury [4], [10], [11], [14]. Tuto literaturu jsem použil jak u první podkapitoly, tak i u druhé.

3.1 Extrémy funkce zadané explicitně a implicitně

Věta 3.1: Řekneme, že funkce dvou proměnných f má v bodě $c \in R \times R$ lokální minimum (resp. lokální maximum), jestliže existuje okolí U ($U \in D_f$) bodu c ($c = [x_1, x_2]$; $d = [y_1, y_2]$), tak že $f(c) \leq f(d)$ (resp. $f(c) \geq f(d)$), pro všechna $d \in U$.

Řekneme, že funkce dvou proměnných f má v bodě $c \in R \times R$ ostré lokální minimum (resp. ostré lokální maximum), jestliže $f(c) < f(d)$ (resp. $f(c) > f(d)$), pro všechna $d \in U \backslash \{c\}$.

Věta 3.2: Má-li funkce dvou proměnných f v bodě $c \in R \times R$ extrém, pak v tomto bodě platí $\frac{\partial f}{\partial x}(c) = \frac{\partial f}{\partial y}(c) = 0$ (pro funkci tří proměnných platí: $\frac{\partial f}{\partial x}(c) = \frac{\partial f}{\partial y}(c) = \frac{\partial f}{\partial z}(c) = 0$).

Definice 3.3: Bod $c \in R \times R$, pro který platí $\frac{\partial f}{\partial x}(c) = \frac{\partial f}{\partial y}(c) = 0$ se nazývá stacionární bod (platí i pro funkci tří proměnných, kdy $\frac{\partial f}{\partial x}(c) = \frac{\partial f}{\partial y}(c) = \frac{\partial f}{\partial z}(c) = 0$).

Definice 3.4: Nechť f je reálná funkce dvou (respektive tří) proměnných. Nechť v libovolném bodě D_f existují všechny parciální derivace druhého řádu. Hessovou maticí funkce *f* chápeme matici druhého řádu:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{(resp. třetího řádu } H(x,y,z) = \begin{pmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{pmatrix}\text{).}$$

Definice 3.5: Nechť existuje $c \in D_f$ a nechť existují druhé parciální derivace funkce dvou proměnných f. Potom položme: $D_2(c) = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{vmatrix}, D_1(c) = |f''_{x^2}|$.

Nechť existuje $c \in D_f$ a nechť existují druhé parciální derivace funkce tří proměnných f. Potom položme:

$$D_3(c) = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix}, D_2(c) = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{vmatrix}, D_1(c) = |f''_{x^2}|.$$

Poznámka 3.5: Determinanty D_1, D_2, D_3 jsou subdeterminanty Hessovy matice:

$$H(c) = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix}.$$

Věta 3.6: (Postačující podmínka pro lokální extrém)

Buď $c \in D_f$ stacionárním bodem funkce dvou proměnných f. Nechť má funkce f spojité parciální derivace až do druhého řádu. Pak platí:

1) Jestliže $D_1(c) > 0, D_2(c) > 0$, pak funkce f má v c lokální minimum.

2) Jestliže $D_1(c) < 0, D_2(c) > 0$, pak má funkce f v c lokální maximum.

3) Jestliže $D_2(c) < 0$ má funkce f v c sedlový bod.

4) Jestliže $D_2(c) = 0$, pak nelze rozhodnout, zda funkce f má v bodě c lokální extrém, sedlový bod, či ani jedno.

Buď $c \in D_f$ stacionárním bodem funkce tří proměnných f. Nechť má funkce f spojité parciální derivace až do druhého řádu. Pak platí:

1) je-li $D_1(c) > 0, D_2(c) > 0, D_3(c) > 0$, funkce f má v c ostré lokální minimum;

2) je-li $D_1(c) < 0, D_2(c) > 0, D_3(c) < 0$, funkce f má v c ostré lokální maximum;

3) jestliže pro determinanty neplatí 1) ani 2), extrém nenastane. Je-li některý z determinantů roven nule a ostatní mají znaménko jak je uvedeno v 1) nebo 2), pak extrém může, ale nemusí nastat.

Poznámka 3.6: Tato věta ukazuje, jak lze subdeterminantů využít k vyšetření lokálních extrémů.

3.1.1 Řešené příklady

Příklad 3.1: Vypočtěte extrémy funkce $f: f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ a určete jejich hodnotu.

Řešení:

Dle věty 3.2 určíme parciální derivace, z kterých vytvoříme soustavu rovnic. Jejím vyřešením získáme stacionární body:

$$f_x'(x,y) = 2x - y - 2 = 0$$

$$f_y'(x,y) = -x + 2y + 1 = 0.$$

Soustavu vyřešíme tak, že z první rovnice vytkneme $x = 1 + \frac{1}{2}y$ a dosadíme do druhé rovnice. Obdržíme rovnici: $-1 - \frac{1}{2}y + 2y + 1 = 0$. Po jednoduché úpravě zjistíme, že $y = 0$. Tuto hodnotu zpětně dosadíme do první rovnice a určíme jediný stacionární bod [1,0]. Poté už jednoduše dopočítáme z prvních derivací druhé parciální derivace:

$$f_{x^2}''(x,y) = 2$$

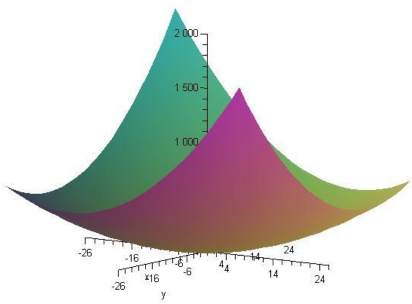
$$f''_{y^2}(x,y) = 2$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -1.$$

Druhé derivace jsou číselné hodnoty, proto nemusíme dosazovat stacionární bod a stačí tyto hodnoty dosadit do Hessovy matice. Z příslušných subdeterminantů této matice zjistíme, o jaký druh extrému se v daném bodě jedná nebo zda tam extrém vůbec je.

$D_2(1,0) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} > 0 \wedge D_1(1,0) = 2 > 0 \rightarrow$ podle věty 3.6 můžeme říci, že v tomto bodě je lokální minimum.

Hodnota extrému je $f(1,0) = 1^2 - 1 \cdot 0 + 0^2 - 2 \cdot 1 + 0 = -1.$



Obrázek 3.1: Funkce $f\colon f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y.$

Příklad 3.2: Máme zadanou funkci $f\colon f(x,y) = -\frac{x^2}{2} + x^2y^2 - \frac{y^2}{2}$. Zjistěte extrémy této funkce.

Řešení:

Nejprve vypočítáme první parciální derivace. Tím získáme dvě rovnice o dvou neznámých a určíme stacionární bod (či body) dle věty 3.2:

$$f'_x = -x + 2xy^2 = 0$$

$$f'_y = -y + 2yx^2 = 0.$$

Tato soustava je složitější na řešení než v předešlém příkladě. Lze ji vyřešit například tímto způsobem: z první rovnice vytkneme před závorku x, takže získáme tvar $x(-1+2y^2)=0$. Aby byla splněna rovnost, musí platit $x=0 \vee y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tyto hodnoty dosadíme do druhé rovnice. Dopočítáním zjistíme souřadnice stacionárních bodů, které jsou:

$$a=[0;0], b=\left[\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right], c=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right], d=\left[\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right], e=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Následně zjistíme druhé derivace:

$$f''_{x^2}=-1+2y^2$$

$$f''_{y^2}=-1+2x^2$$

$$f''_{xy}=f''_{yx}=4xy.$$

Teď již stačí do druhých derivací dosadit stacionární body a vypočíst hodnoty, které dosadíme do Hessovy matice. Z nich určíme hodnoty subdeterminantů. Pak podle věty 3.6 odvodíme, o jaký druh extrému se v daném bodě jedná nebo zda-li tam extrém vůbec je.

Pro bod $a=[0,0]$:

$$f''_{x^2}(0,0)=-1, f''_{y^2}(0,0)=-1, f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)=0.$$

$D_2(0,0)=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}>0 \wedge D_1(0,0)=-1<0 \rightarrow$ podle věty 3.6 se jedná o lokální maximum.

Pro bod $b=\left[\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a bod $e=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$:

$$f''_{x^2}=0, f''_{y^2}=0, f''_{xy}=f''_{yx}=4.$$

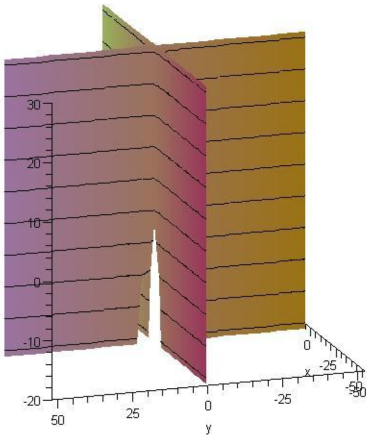
$D_2(b)=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=D_2(e)<0 \wedge D_1(b)=0=D_1(e)\rightarrow D_2(b)=D_2(e)<0$, body b a e jsou sedlové body funkce.

Pro bod $c = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a bod $d = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$:

$$f''_{x^2} = 0, f''_{y^2} = 0, f''_{xy} = f''_{yx} = -4.$$

$D_2(c) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = D_2(d) < 0 \wedge D_1(c) = 0 = D_1(d) \rightarrow D_2(c) = D_2(d) < 0$, body c a d jsou sedlové body funkce.

Takže jsme zjistili, že $[0; 0]$ je jediným bodem, kde se nachází extrém a nalezneme zde lokální maximum.



Obrázek 3.2: Funkce $f: f(x, y) = -\frac{x^2}{2} + x^2y^2 - \frac{y^2}{2}$.

Příklad 3.3.: Vypočtěte lokální extrémy funkce $f: f(x, y) = \ln(x - y) - x^2 + 6y$ ([12]).

Řešení:

Vypočítáme první parciální derivace jako v předchozích příkladech a z nich vypočítáme stacionární bod (či body) ze soustavy rovnic:

$$f'_x = \frac{1}{x-y} - 2x = 0 \rightarrow 1 - 2x^2 + 2xy = 0$$

$$f'_y = (-1)\frac{1}{x-y} + 6 = 0 \rightarrow -1 + 6x - 6y = 0.$$

Z druhé rovnice vytkneme $x = \frac{1}{6} + y$ a dosadíme do druhé rovnice. Tím získáme rovnici: $1 - 2\left(\frac{1}{6} + y\right)^2 + 2y\left(\frac{1}{6} + y\right) = 0$. Z této rovnice vyjádříme proměnnou *y*: $y = \frac{17}{6}$, kterou zpětně dosadíme do druhé rovnice a dopočítáme neznámou *x*. Tím obdržíme stacionární bod $\left[3, \frac{17}{6}\right]$.

Nyní vypočítáme druhé parciální derivace:

$$f''_{x^2} = (-1)(x-y)^{-2} - 2 = -\frac{1}{(x-y)^2} - 2 = -\frac{1-2(x-y)^2}{(x-y)^2}$$

$$f''_{y^2} = (-1)(x-y)^{-2} - 0 = -\frac{1}{(x-y)^2}$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = (-1)(x-y)^{-2} = -\frac{1}{(x-y)^2}.$$

Do druhých parciálních derivací dosadíme stacionární bod:

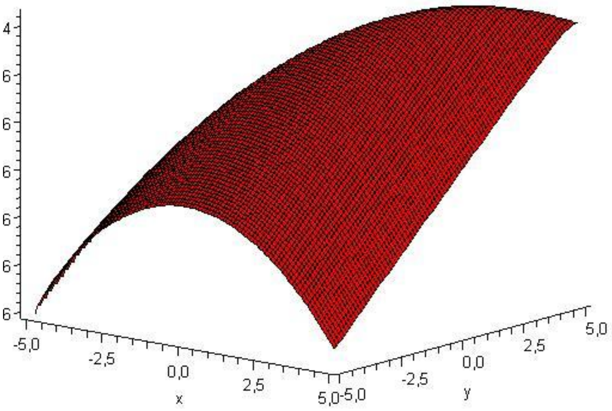
$$f''_{x^2}\left(3, \frac{17}{6}\right) = -\frac{1-2\left(3-\frac{17}{6}\right)^2}{\left(3-\frac{17}{6}\right)^2} = -38$$

$$f''_{y^2}\left(3, \frac{17}{6}\right) = -\frac{1}{\left(3-\frac{17}{6}\right)^2} = -36$$

$$f''_{xy}\left(3, \frac{17}{6}\right) = f''_{yx}\left(3, \frac{17}{6}\right) = -\frac{1}{\left(3-\frac{17}{6}\right)^2} = -36.$$

Poté zjistíme Hessovu matici a na základě věty 3.6 zjistíme, zda se jedná o extrém:

$D_2\left(3, \frac{17}{6}\right) = \begin{vmatrix} -38 & -36 \\ -36 & -36 \end{vmatrix} > 0 \wedge D_1\left(3, \frac{17}{6}\right) = |-38| < 0 \rightarrow$ jedná se o lokální maximum.



Obrázek 3.3: Funkce $f: f(x,y) = \ln(x-y) - x^2 + 6y$.

Příklad 3.4: Máme danou funkci $f: f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, vypočítejte její extrémy.

Řešení:

Máme zadanou funkci dvou proměnných. Abychom zjistili extrémy této funkce, musíme nejprve vypočítat první parciální derivace, které položíme rovny nule. Obdržíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Řešením soustavy jsou stacionární body:

$$f_x' = e^{x^2+y^2} \cdot 2x = 0$$

$$f_y' = e^{x^2+y^2} \cdot 2y = 0.$$

Je zřejmé, že platí:

$e^{x^2+y^2} = 0 \vee 2x = 0 \to x = 0; e^{x^2+y^2} = 0 \vee 2y = 0 \to y = 0.$

Případ $e^{x^2+y^2} = 0$ nikdy nemůže nastat, proto souřadnice stacionárního bodu získáme z druhých podmínek rovnic. Stacionární bod má tedy souřadnice $[0,0]$.

Teď stačí dopočítat druhé parciální derivace, dosadit stacionární bod, abychom vypočítali hodnoty a ty poté mohli dosadit do Hessovy matice:

$$f''_{x^2} = e^{x^2+y^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2 \to f''_{x^2}(0,0) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$$

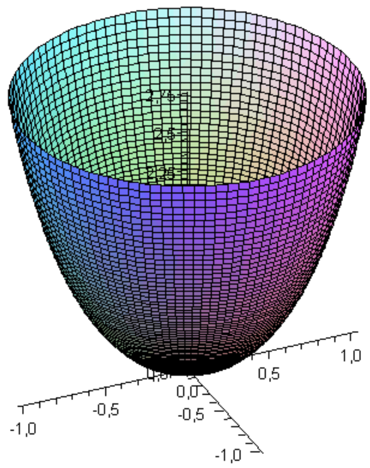
$$f''_{y^2} = e^{x^2+y^2} \cdot 2y \cdot 2y + e^{x^2+y^2} \cdot 2 \to f''_{y^2}(0,0) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$$

$$f''_{xy} = f''_{yx}: e^{x^2+y^2} \cdot 2x \cdot 2y + e^{x^2+y^2} \cdot 0 \to f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0) = 0.$$

Dosadím hodnoty do matice a z ní odvodíme hodnoty příslušných subdeterminantů:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0; D_1 = |2| > 0.$$

Podle věty 3.6 se v bodě [0,0] nachází lokální minimum.



Obrázek 3.4: Graf funkce $f: f(x, y) = e^{x^2+y^2}$.

Příklad 3.5: Vypočítejte lokální extrémy funkce dané rovnicí

$$f: f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z \text{ ([3]).}$$

Řešení:

Ze zadání vidíme, že máme danou funkci tří proměnných. Postup je stejný jako u funkcí dvou proměnných, které jsme již počítali výše. Určíme první parciální derivace všech proměnných, které položíme rovny nule. Obdržíme soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$f_x' = 2x + 2 = 0$$

$$f_y' = 2y + 4 = 0$$

$$f_z' = 2z - 6 = 0.$$

Je zřejmé, že $x = -1; y = -2; z = 3$, tedy stacionární bod máme jen jeden a ten má souřadnice $[-1, -2{,}3]$. Nyní vypočítáme druhé parciální derivace a dosadíme do nich stacionární bod. Vzhledem k tomu, že druhé parciální derivace jsou čísla, jsou jejich hodnoty ve všech bodech definičního oboru stejné:

$$f_{x^2}'' = f_{y^2}'' = f_{z^2}'' = 2$$

$$f_{xy}'' = f_{yx}'' = 0, f_{xz}'' = f_{zx}'' = 0, f_{yz}'' = f_{zy}'' = 0.$$

Z Hessovy matice získáme příslušné subdeterminanty:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} > 0; D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0; D_1 = |2| > 0.$$

Na základě věty 3.6 obdržíme, že v bodě $[-1, -2{,}3]$ je lokální minimum.

Příklad 3.6: Mějme $f: f(x, y, z) = -\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}$, zjistěte u této funkce lokální extrémy.

Řešení:

Máme zadanou funkci tří proměnných. Vypočítáme první parciální derivace, všech proměnných, které dáme rovny nule. Získáme soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$f_x' = \frac{1}{8}x = 0$$

$$f_y' = \frac{2}{9}y = 0$$

$$f_z' = \frac{1}{2}z = 0.$$

Je zřejmé, že stacionární bod je jediný a má souřadnice $[0,0,0]$.

Teď vypočítáme druhé parciální derivace. Dosadíme do nich stacionární bod a určíme hodnoty. Vzhledem k tomu, že druhé parciální derivace jsou čísla, jsou jejich hodnoty ve všech bodech definičního oboru stejné:

$$f_{x^2}'': \frac{1}{8};\ f_{y^2}'': \frac{2}{9};\ f_{z^2}'': \frac{1}{2}$$

$$f_{xy}'' = f_{yx}'' = 0, f_{xz}'' = f_{zx}'' = 0, f_{yz}'' = f_{zy}'' = 0.$$

Z Hessovy matice získáme příslušné subdeterminanty:

$$D_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} > 0;\ D_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} \end{vmatrix} > 0;\ D_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{8} \end{vmatrix} > 0.$$

Podle věty 3.6 jsme určili, že v bodě $[0,0,0]$ se nachází lokální minimum funkce $f(x,y,z) = -\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}$.

Příklad 3.7: Máme danou funkci $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z = 0$, vypočítejte její extrémy.

Řešení:

Funkci máme zadanou implicitně. V kapitole 2 jsme si ukázali, jak postupujeme při derivování takto zadaných funkcí. Funkci zderivujeme a vyjádříme z_x' , z_y', které položíme rovny 0. Tím získáme dvě rovnice o třech neznámých. Jako třetí rovnici vložíme do soustavy i zadanou funkci *f*. Vyřešením soustavy rovnic získáme stacionární body:

$$2x + 2zz'_x - 2 - 4z'_x = 0 \rightarrow z'_x = \frac{2 - 2x}{2z - 4} = 0$$

$$2y + 2zz'_y + 2 - 4z'_y = 0 \rightarrow z'_y = \frac{-2y - 2}{2z - 4} = 0$$

$$\underline{x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z = 0.}$$

Z prvních dvou rovnic je zřejmé, že $2 - 2x = 0 \rightarrow x = 1$ a $-2y - 2 = 0 \rightarrow y = -1$.

Získané hodnoty dosadíme do třetí rovnice soustavy:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z = 0 \rightarrow 1 + 1 + z^2 - 2 - 2 - 4z - 10 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow z^2 - 4z - 12 = 0.$

Nyní vypočítáme kořeny kvadratické rovnice, které vyjdou $z_1 = 6$ a $z_2 = -2$. Tím jsme určili dva stacionární body $[1, -1, 6]$ a $[1, -1, -2]$.

Vypočítáme druhé parciální derivace, ze kterých vyjádříme z''_{x^2}, z''_{y^2} a $z''_{xy} = z''_{yx}$. Za proměnné z'_x, z'_y dosadíme 0, protože v prvních parciálních derivacích jsme určili, že jsou rovny 0, aby byla splněna podmínka o stacionárních bodech:

$$2 + 2z'_x z'_x + 2zz''_{x^2} - 4z''_{x^2} = 0 \rightarrow z''_{x^2} = \frac{-2}{2z - 4}$$

$$2 + 2z'_y z'_y + 2zz''_{y^2} - 4z''_{y^2} = 0 \rightarrow z''_{y^2} = \frac{-2}{2z - 4}$$

$$2z'_x z'_y = 0 \rightarrow 0.$$

Do druhých parciálních derivací dosadíme stacionární body, abychom určili hodnoty. Ty poté dosadíme do Hessovy matice a pomocí věty 3.6 určíme typ extrému:

Pro bod $[1, -1, 6]$:

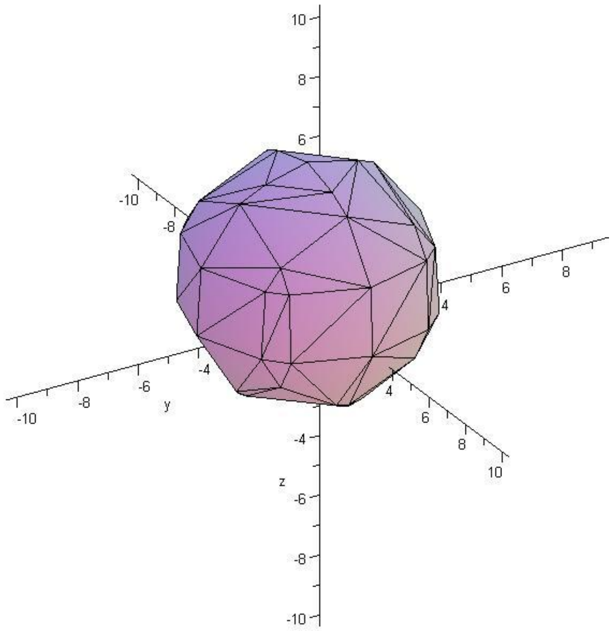
$z''_{x^2}(1, -1, 6) = -\frac{1}{4}, z''_{y^2}(1, -1, 6) = -\frac{1}{4}, z''_{xy}(1, -1, 6) = z''_{yx}(1, -1, 6) = 0.$

$D_2(1,-1,6) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} > 0 \wedge D_1(1,-1,6) = -\frac{1}{4} < 0 \rightarrow$ podle věty 3.6 se jedná o lokální maximum.

Pro bod $[1,-1,-2]$:

$z''_{x^2}(1,-1,-2) = \frac{1}{4}$, $z''_{y^2}(1,-1,-2) = \frac{1}{4}$, $z''_{xy}(1,-1,-2) = z''_{yx}(1,-1,-2) = 0$.

$D_2(1,-1,-2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} > 0 \wedge D_1(1,-1,-2) = \frac{1}{4} > 0 \rightarrow$ podle věty 3.6 je v tomto bodě lokální minimum.



Obrázek 3.5: Graf funkce $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z = 0$.

3.1.2 Neřešené příklady

1) Určete lokální extrémy funkcí:
   a) $f: f(x,y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$ [10],
   b) $f: f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ [10],

c) $f: f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ [10],

d) $f: f(x,y,z) = x - 4xy - y^2 + 5z^2 - 2yz$ [10],

e) $f: f(x,y,z) = 25 - x^2 - y^2 - z^2$ [10].

2) Vypočítejte lokální extrémy funkce zadané implicitně:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0 \quad [2].$$

3.2 Extrémy funkce 2 proměnných vázané na množinu (metoda přímého dosazení a Lagrangeova metoda)

Definice 3.7: Je dána funkce dvou proměnných g. Tato funkce vymezuje v rovině množinu bodů $M = \{[x, y]; g(x, y) = 0\}$. Podmínka $g(x, y) = 0$ se nazývá vazba.

Řekneme, že funkce dvou proměnných f nabývá v bodě $c \in R \times R$ lokální extrém vzhledem k vazbové podmínce $g(x, y) = 0$, jestliže má funkce f v bodě c lokální extrém vzhledem k množině $M \cap D_f$.

Poznámka 3.7: Funkce g v uvedené definici vymezuje často v rovině některou ze známých křivek nebo jejich částí – přímku, kružnici, elipsu, atd. Hledáme tedy lokální extrémy funkce *f* na křivce *M* nebo by bylo možno říci „nad" křivkou *M*.

Lagrangeova metoda

Věta 3.8: (Nutná podmínka extrému funkce vzhledem k množině)

Nechť funkce dvou proměnných *f* a g mají v otevřené množině $A \subseteq D_F$ spojité parciální derivace 1. řádu, $M \subseteq A, c \in M (c = [x_1, x_2])$ a $g_y'(c) \neq 0$.

Potom, jestliže funkce *f* má v bodě c lokální extrém vzhledem k množině *M*, platí, že existuje $\lambda, \lambda \neq 0$ takové, že $f_x'(c) + \lambda g_x'(c) = 0 \ \wedge \ f_y'(c) + \lambda g_y'(c) = 0$. Množina *M* je popsána rovnicí $g(x, y) = 0$.

Poznámka 3.8: Bod extrému funkce f vzhledem k M je stacionárním bodem Lagrangeovy funkce $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

Věta 3.9: (Postačující podmínka lokálního extrému funkce vzhledem k množině)

Nechť jsou splněny předpoklady nutné podmínky lokálního extrému funkce vzhledem k množině.

Jestliže Lagrangeova funkce $L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ má v bodě $c = [x_1, x_2]$ lokální extrém, má funkce f v bodě $c = [x_1, x_2]$ lokální extrém vzhledem k množině *M* a to stejného typu.

Metoda přímého dosazení

Poznámka 3.9:

V některých případech lze z rovnice $g(x,y) = 0$ jednoznačně určit x či y, například $y = g(x)$. Pak za y dosadíme $g(x)$ do $f(x,y)$, tak vznikne funkce jedné proměnné $f\big(x, g(x)\big)$. U ní pak hledáme lokální extrémy běžnými metodami.

Pokud nelze použít tuto metodu, využívá se Lagrangeovy metody.

3.2.1 Řešené příklady

Příklad 3.9: Určete lokální extrémy funkce $f: f(x,y) = e^{xy}$ na množině

$$M = \{[x,y] | x + y - 1 = 0\}.$$

Řešení:

Tento příklad budeme řešit pomocí dosazovací metody. Z rovnice $g(x,y) = x + y - 1 = 0$ lze jednoduše vyjádřit libovolná neznámá, kterou dosadíme do funkce $f: f(x,y) = e^{xy}$. Tím získáme funkci jedné proměnné. My vyjádříme proměnnou y, tj.:

$$x + y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 - x.$$

Nyní do funkce f dosadíme za proměnnou y a budeme zkoumat extrémy funkce jedné proměnné (proměnné x): $f\big(x, g(x)\big) = e^{x(1-x)} = e^{x-x^2}$.

Dále budeme, pro přehlednost, funkci $f\big(x, g(x)\big)$ značit jako funkci $h(x)$.

Nutná podmínka pro lokální extrém funkce jedné proměnné

Funkci h derivujeme a derivaci položíme rovnu nule: $h'(x) = e^{x-x^2}(1-2x) = 0$.

Z výše uvedené rovnice určíme stacionární bod. Je zřejmé, že musí platit: $e^{x-x^2} = 0 \vee (1-2x) = 0$. První možnost nemůže nastat, neboť je vždy $e^{x-x^2} > 0$. Proto platí $1 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$. Stacionární bod je $x = \frac{1}{2}$.

Abychom získaly druhou souřadnici stacionárního bodu funkce f, dosadíme hodnotu první derivace do funkce g: $g\left(\frac{1}{2}, y\right) = \frac{1}{2} + y - 1 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}$.

Postačující podmínka pro lokální extrém funkce jedné proměnné

Vypočítáme druhou derivaci:

$$h''(x) = e^{x-x^2}(1-2x)(1-2x) + e^{x-x^2}(-2).$$

Po úpravě získáme: $h''(x) = e^{x-x^2}((1-2x)^2 - 2)$. Do druhé derivace dosadíme stacionární bod $x = \frac{1}{2}$: $h''\left(\frac{1}{2}\right) = 23 \cdot e^{-6} > 0$. Funkce h má v bodě $x = \frac{1}{2}$ lokální maximum.

Závěr

Funkce $f: f(x, y) = e^{xy}$ má v bodě $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ lokální maximum vzhledem k množině *M*.

Příklad 3.10: Určete lokální extrémy funkce $f: f(x, y) = x^2 + 2x + 2y$ na množině

$$M = \{[x, y] | y + x^2 = 0\} \text{ ([10])}.$$

Řešení:

Tento příklad budeme řešit metodou přímého dosazení, neboť z vazební podmínky $y + x^2 = 0$ lze jednoduše vyjádřit neznámá y $(y = -x^2)$. Za tu pak dosadíme do funkce f, čímž získáme funkci jedné proměnné *x*:

$$f: f\big(x, g(x)\big) = x^2 + 2x + 2(-x^2) = -x^2 + 2x.$$

Dále budeme funkci $f\big(x, g(x)\big)$ značit jako funkci h.

Nutná podmínka pro lokální extrém funkce jedné proměnné

Vypočítáme první derivaci a určíme stacionární bod:

$$h'(x) = -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1.$$

Stacionární bod funkce *f* vypočítáme dosazením $x = 1$ do funkce g:

$$y + 1^2 = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow \text{stacionární bod: } [1, -1].$$

Postačující podmínka pro lokální extrém funkce jedné proměnné

Určíme druhé parciální derivace:

$$h''(x) = -2 < 0.$$

Druhá derivace vyšla číselná hodnota, proto nemusíme nic dosazovat: Rovnou tedy víme, že funkce $f: f(x, y) = x^2 + 2x + 2y$ má v bodě $[1, -1]$ lokální maximum vzhledem k množině *M*.

Příklad 3.11: Určete lokální extrémy funkce $f: f(x, y) = 4x + 4y - 3$ na množině

$$M = \left\{[x, y] \middle| \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2\right\} \text{ ([10]).}$$

Řešení:

Tento příklad budeme řešit pomocí Lagrangeovy metody. Vytvoříme Lagrangeovu funkci z funkcí f a g. Poté ji zderivujeme podle proměnných, λ budeme brát jako konstantu, a derivace položíme rovny nule. Tím získáme dvě rovnice o třech neznámých *x*,y a λ. Jako třetí rovnici dáme do soustavy funkci g. Lagrangeova funkce bude mít tvar:

$$L(x, y) = 4x + 4y - 3 + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2\right).$$

První parciální derivace:

$$L_x'(x, y) = 4 - \frac{\lambda}{x^2}$$

$$L_y'(x, y) = 4 - \frac{\lambda}{y^2}.$$

Soustava rovnic bude vypadat:

$$4 - \frac{\lambda}{x^2} = 0$$

$$4 - \frac{\lambda}{y^2} = 0$$

$$\underline{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2}.$$

Soustavu vyřešíme tak, že z první a druhé rovnice vyjádříme lambda: $\lambda = 4x^2 \wedge \lambda = 4y^2$. Tyto výrazy dáme do rovnosti: $4x^2 = 4y^2$. Zjednodušíme a vypočítáme, že: $x = y \vee x = -y \vee -x = y$. Po dosazení do třetí rovnice získáme pro:

$$-x = y: -\frac{1}{y} + \frac{1}{y} = 2 \rightarrow 0 = 2$$

$$x = -y: -\frac{1}{y} + \frac{1}{y} = 2 \rightarrow 0 = 2$$

$$x = y: \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = 2 \rightarrow 2 = 2y \rightarrow y = 1.$$

Teď dopočítáme hodnotu proměnné *x*: $x = y \rightarrow x = 1$ a hodnotu λ:

$\lambda = 4 \cdot 1^2 \rightarrow \lambda = 4$. Stacionární bod má souřadnice: $[1,1]$.

Nyní vypočítáme druhé parciální derivace, do kterých dosadíme stacionární bod a vypočítáme hodnotu. Tu dosadíme do Hessovy matice, kde pomocí subdeterminantů určíme typ lokálního extrému:

$$L''_{x^2}(x,y) = \frac{2\lambda}{x^3} \rightarrow L''_{x^2}(1,1) = \frac{2 \cdot 4}{1} = 8$$

$$L''_{y^2}(x,y) = \frac{2\lambda}{y^3} \rightarrow L''_{y^2}(1,1) = \frac{2 \cdot 4}{1} = 8$$

$$L''_{xy}(x,y) = 0.$$

$D_1(1,1) = |8| > 0, D_2(1,1) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} > 0 \rightarrow$ podle věty 3.6 má Lagrangeova funkce v bodě [1,1] lokální minimum a tedy i funkce *f* má v tomto bodě lokální minimum.

Příklad 3.12: Určete lokální extrémy funkce $f: f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, kde $a, b > 0$, na množině

$$M = \{[x,y] | x^2 + y^2 = 1\} \text{ ([2]).}$$

Řešení:

Neboť máme množinu *M* zadanou komplikovanějším podmínkou (nelze jednoduše vyjádřit jedna proměnná), budeme tento příklad počítat pomocí Lagrangeovy funkci. Tuto funkci vytvoříme z funkcí *f* a *g*:

$$L(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Vypočítáme první parciální derivace Lagrangeovy funkce, které položíme rovny nule a spolu s funkcí g vytvoříme soustavu tří rovnic o třech neznámých *x y* a λ:

$$L'_x(x,y) = \tfrac{1}{a} + 2\lambda x = 0$$

$$L'_y(x,y) = \tfrac{1}{b} + 2\lambda y = 0$$

$$\underline{x^2 + y^2 = 1.}$$

Soustavu vyřešíme tak, že z první a druhé rovnice vyjádříme proměnou *x*, resp. *y*: $x = -\frac{1}{2\lambda a}; y = -\frac{1}{2\lambda b}$. Ty dosadíme do třetí rovnice: $\frac{1}{4\lambda^2 a^2} + \frac{1}{4\lambda^2 b^2} = 1$. Výraz upravíme a vyjde nám: $\lambda = \pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$, tedy: $\lambda_1 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$; $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$. Zpětně dosadíme do rovnic a dopočítáme proměnné *x* a *y*:

Pro $\lambda_1 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$ vyjde $x_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, y_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Pro $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$ vyjde $x_1 = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, y_1 = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Máme tedy dva stacionární body: $A = \left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right], B = \left[-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$.

Vypočítáme druhé parciální derivace Lagrangeovy funkce:

$$L''_{x^2}(x,y) = 2\lambda$$

$$L''_{y^2}(x,y) = 2\lambda$$

$$L''_{xy}(x,y) = 0.$$

Do druhých derivací dosadíme stacionární body, vypočítáme hodnoty. Ty dosadíme do Hessovy matice a pomocí věty 3.6 určíme typ extrému:

Pro bod $A = \left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$: $L''_{x^2}(x,y) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}, L''_{y^2}(x,y) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$,

$D_1(A) = \left|\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\right| > 0, D_2(A) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \end{vmatrix} > 0 \rightarrow$ lokální minimum v bodě *A*.

Pro bod $B = \left[-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$: $L''_{x^2}(x,y) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}, L''_{y^2}(x,y) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$,

$D_1(B) = \left|-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\right| < 0, D_2(A) = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \end{vmatrix} > 0 \rightarrow$ lokální maximum v bodě *B*.

Příklad 3.13: Určete rozměry bazénu tvaru kvádru tak, aby při daném objemu V byl obsah plochy jeho dna a stěn nejmenší možný.

Řešení:

$V = abc$ – daný objem kvádru, který bereme jako funkci tří proměnných a kde V značí konstantu. Toto je funkce g.

$S_{(a,b,c)} = 2ab + 2bc + ac$ - obsah ploch jeho dna a stěn, braných jako funkce f.

Z objemu vyjádříme libovolnou neznámou - $c = \frac{V}{ab}$ a dosadíme do funkce tří proměnných S, tím získám funkci dvou proměnných $S_{\left(a,b,\frac{V}{ab}\right)} = 2ab + 2\frac{V}{a} + \frac{V}{b}$. Když máme jednu funkci dvou proměnných, budeme pokračovat v hledání extrémů jako v předešlé kapitole. Nejprve derivujeme:

$$S'_a = 2b - 2\tfrac{V}{a^2} \rightarrow a \neq 0$$

$$S'_b = 2a - \tfrac{V}{b^2} \rightarrow b \neq 0.$$

Vytvoříme soustavu rovnic, abychom vypočítali stacionární body:

$$2b - 2\frac{V}{a^2} = 0$$

$$2a - \frac{V}{b^2} = 0.$$

Z první rovnice vytknu b a dosadím do druhé, tím získám $2a - \frac{V}{\frac{V^2}{a^4}} = 0$. Po úpravách dostaneme $a\left(2 - \frac{a^3}{V}\right) = 0$. Vidíme, že $a_1 = 0 \vee a_2 = \sqrt[3]{2V}$. a_1 nebude řešení, neboť nemůžeme mít nulový rozměr kvádru. Proto jako jediné řešení lze brát $a_2 = \sqrt[3]{2V} \Rightarrow b = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$, což je stacionární bod $T = \left[\sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}, \sqrt[3]{2V}\right]$.

Vypočítáme druhé parciální derivace, dosadíme stacionární bod a vypočítáme hodnotu. Jako v předcházející kapitole budeme určovat, zda je v tomto bodě extrém pomocí věty 3.6:

$$S''_{a^3} = \frac{4V}{a^3} \rightarrow S''_{a^3}\left(\sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}, \sqrt[3]{2V}\right) = 2$$

$$S''_{b^2} = \frac{2V}{b^3} \rightarrow S''_{b^2}\left(\sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}, \sqrt[3]{2V}\right) = 8$$

$$S''_{ab} = S''_{ba} = 2.$$

$D_2\left(\sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}, \sqrt[3]{2V}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} > 0 \wedge D_1\left(\sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}, \sqrt[3]{2V}\right) = 2 > 0 \rightarrow$ dle věty 3.6 lze vidět, že v bodě $\left[\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}/2, \sqrt[3]{2V}\right]$ se nachází lokální minimum. Tím jsme vypočítali rozměry kvádru, které jsou rovny souřadnicím stacionárního bodu.

3.2.2 Neřešené příklady

1) Určete lokální extrémy na dané množině *M* funkcí:
   a) $f: f(x,y) = x - y; M = \{[x,y] | x^2 + y^2 = 2\}$ [10],
   b) $f: f(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{2} + x; M = \{[x,y] | x^2 - y^2 = 1\}$ [10],
   c) $f: f(x,y,z) = x - 2y + 2z; M = \{[x,y,z] | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ [2],
   d) $f: f(x,y) = x^2 + y^2; M = \left\{[x,y] \middle| \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\right\}, (a \neq 0, b \neq 0)$ [2],
   e) $f: f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2; M = \left\{[x,y,z] \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}, (a > b > c > 0)$ [3].

4. Tečná rovina ke grafu funkce

K této kapitole jsem použil teorii z literatury [2], [3], [4], [10].

4.1 Základní pojmy

Věta 4.1: Graf funkce f dvou proměnných (respektive f tří proměnných) má v bodě $t = [t_1, t_2]$, $t \in f$ (respektive $t = [t_1, t_2, t_3]$, $t \in f$) tečnou rovinu právě tehdy, když je v tomto bodě funkce f diferencovatelná.

Pak rovnice tečné roviny má tvar $x_3 = f(t) + f'_{x_1}(t) \cdot (x_1 - t_1) + f'_{x_2}(t) \cdot (x_2 - t_2)$ (respektive $x_4 = f(t) + f'_{x_1}(t) \cdot (x_1 - t_1) + f'_{x_2}(t) \cdot (x_2 - t_2) + f'_{x_3}(t) \cdot (x_3 - t_3)$).

Poznámka 4.1: Rovnice tečné roviny lze také psát ve tvaru $f'_{x_1}(t)x_1 + f'_{x_2}(t)x_2 - x_3 + c = 0$ (respektive $f'_{x_1}(t)x_1 + f'_{x_2}(t)x_2 + f'_{x_3}(t)x_3 - x_4 + c = 0$), kde $c \in R$.

Poznámka 4.2: U funkcí jedné proměnné jsme byli zvyklí, že v tečném bodě procházela jen jedna tečna a ta měla s funkcí společný pouze tento bod. U funkcí více proměnných může procházet tímto bodem víc tečen, které ale tvoří pouze jednu tečnou rovinu! A ta nemusí mít s plochou jen tento společný bod.

4.2 Řešené příklady

Příklad 4.1: Najděte rovnici tečné roviny k funkci $f: f(x,y) = x^2 + y^2$ v bodě $t = [1,1]$.

Řešení:

Abychom mohli vypočítat tečnou rovinu, musíme zjistit, zda je daná funkce diferencovatelná v okolí daného bodu *t*. Ze zadání je patrno, že funkce má spojité parciální derivace na celém definičním oboru.

Vypočítáme první parciální derivace funkce v bodě *t*:

$$f_x'(x,y) = 2x \rightarrow f_x'(1,1) = 2$$

$$f_y'(x,y) = 2y \rightarrow f_y'(1,1) = 2$$

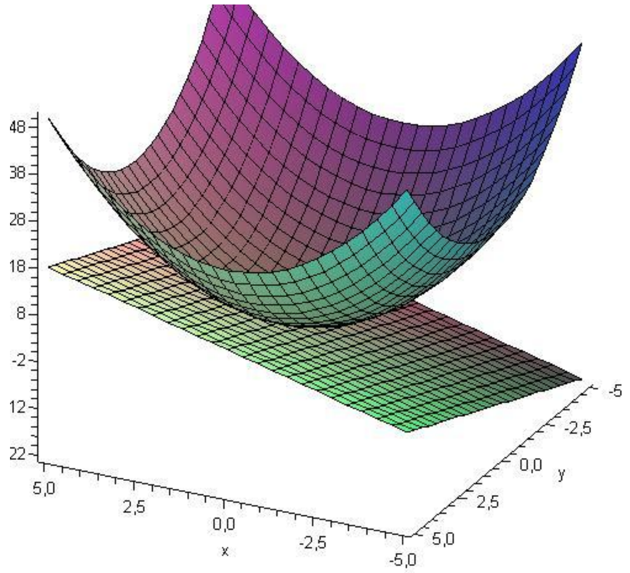
$$f(1,1) = 2.$$

Když máme vypočítané všechny potřebné hodnoty, stačí pouze dosadit do rovnice tečné roviny, kterou máme uvedenou ve větě 4.1:

$$z = 2 + 2 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-1) \rightarrow z = 2x + 2y - 2.$$

Po jednoduché úpravě lze získat rovnici tečné roviny ve tvaru, který máme uvedený v poznámce 4.3:

$$x + y - \tfrac{1}{2}z - 1 = 0.$$



Obrázek 4.1: Graf funkce f a její tečné roviny.

Příklad 4.2: Nalezněte rovnici tečné roviny k funkci $f: f(x,y) = arctg\left(3x - \ln\frac{1}{2}y\right)$ v bodě $t = [0,2]$.

Řešení:

V okolí bodu *t* je funkce diferencovatelná, proto můžeme vypočítat rovnici tečné roviny. Vypočítáme jako v předchozím příkladě první parciální derivace a funkční hodnotu v daném bodě:

$$f_x'(x,y) = \frac{3}{1 + \left(3x - \ln\frac{1}{2}y\right)^2} \to f_x'(0,2) = 3$$

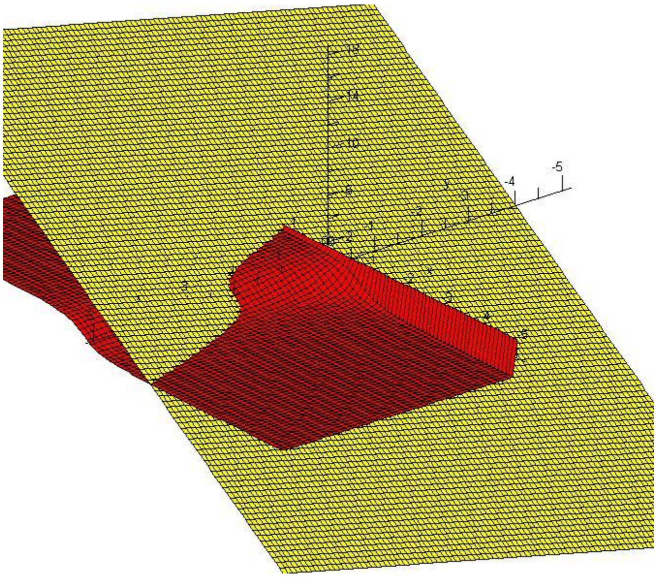
$$f_y'(x,y) = \frac{1}{y\left(1 + \left(3x - \ln\frac{1}{2}y\right)^2\right)} \to f_y'(0,2) = 1$$

$$f(0,2) = 0.$$

Nyní dosadíme hodnoty do rovnice, dopočítáme a získáme rovnici tečny:

$$z = 0 + 3 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 2) \to 3x + y - 2 - z = 0.$$

Rovnice tečné roviny k funkci $f: f(x,y) = arctg\left(3x - \ln\frac{1}{2}y\right)$ v bodě $t = [0,2]$ je $3x + y - 2 - z = 0$.



Obrázek 4.2: Graf funkce f a tečné roviny.

Příklad 4.3: Najděte rovnici tečné roviny k ploše $z = arctg\,\frac{y}{x}$ v tečném bodě $t = \left[1,1,\frac{\pi}{4}\right]$ ([3]).

Řešení:

V tomto příkladě máme rovnici zadanou ekvivalentním způsobem jako v předešlých příkladech (víme, že $z = f(x,y)$). Tečný bod je zadán třemi souřadnicemi. Když dosadíme první dvě souřadnice bodu *t* do rovnice plochy, měla by nám vyjít hodnota funkce stejná, jako je třetí souřadnice bodu. To je kontrola, že bod leží na ploše a zároveň je to funkční hodnota $f(t)$. Teď můžeme vypočítat jednoduše tečnu jako v předchozích příkladech:

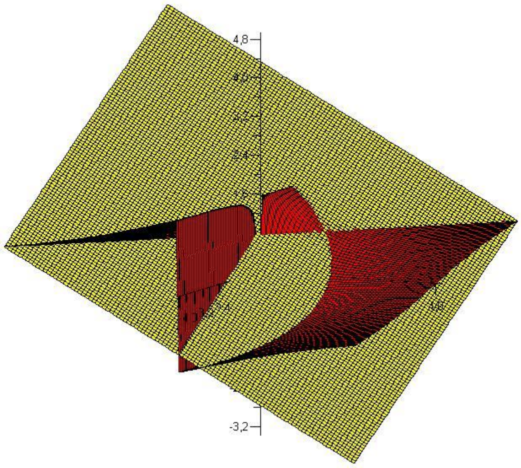
$$z_x' = -\frac{y}{x^2+y^2} \rightarrow z_x'(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$z_y' = \frac{x}{x^2+y^2} \rightarrow z_y'(1,1) = \frac{1}{2}.$$

Dosadíme do rovnice tečné roviny:

$$z = -\tfrac{1}{2}(x-1) + \tfrac{1}{2}(y-1) + \frac{\pi}{4} \rightarrow -x + y - 2z + \frac{\pi}{2} = 0.$$

Tečna má rovnici $-x + y - 2z + \frac{\pi}{2} = 0$.



Obrázek 4.3: Tečná rovina k ploše $z = arctg\ \frac{y}{x}$.

Příklad 4.4: Určete tečnou rovinu funkce určené implicitně $z^3 + 3x^2z - 2xyz = 0$ v bodě $t = [1,2,1]$.

Řešení:

Tentokrát je funkce zadána implicitně a víme, že v nějakém okolí bodu (v našem případě v okolí bodu *t*) můžeme funkci napsat jako $F(x,y,z) = z^3 + 3x^2z - 2xyz$. Nejprve musíme ověřit, zda bod *t* vyhovuje rovnici: $F(1,2,1) = 0$ a zda $F_z'(1,2,1) \neq 0$. Obě tyto podmínky jsou splněny a tak můžeme funkci zderivovat podle pravidel o derivování implicitní funkce v bodě (v bodě *t*):

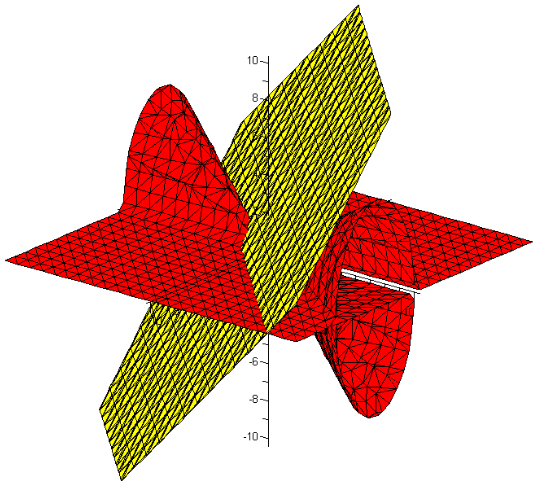
$$3z_x'z^2 + 6xz + 3x^2z_x' - 2y(z + 2xz_x') = 0 \rightarrow z_x' = \frac{2yz - 6xz}{3z^2 + 3x^2 - 2xy}$$

$$3z_y'z^2 + 3x^2z_y' - 2x(2yz_y' + z) = 0 \rightarrow z_y' = \frac{2xz}{3z^2 + 3x^2 - 2xy}.$$

Dosadíme bod t: $z_x^{'}(1,2,1) = -1, z_y^{'}(1,2,1) = 1$. V těchto příkladech, kdy máme funkci zadanou implicitně, dosadíme do rovnice tečny za $f(t)$ z-tovou souřadnici bodu t.

Tečná rovina bude mít tedy rovnici:

$$z = -1(x-1) + 1(y+2) + 1 \rightarrow -x + y - z + 4 = 0.$$



Obrázek 4.4: Implicitní funkce $z^3 + 3x^2z - 2xyz = 0$ a její tečná rovina.

Příklad 4.5: Určete tečnou rovinu k ploše $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ v tečném bodě $t = [2,1,1]$.

Řešení:

Funkci máme opět zadanou implicitně. Ověříme podmínky, zda existuje derivace v bodě t:

$F(2,1,1) = \frac{2^2}{16} + \frac{1^2}{4} + \frac{(1)^2}{4} - 1 = 0 \rightarrow$ vidíme, že levá strana se rovná pravé. Podmínka je splněna.

$F_z^{'}(2,1,1): \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \neq 0 \rightarrow$ derivace podle z je různá od nuly, podmínka je splněna.

Podmínky jsou splněny, proto můžeme přistoupit k derivacím podle proměnných x,y v bodě t:

$$\frac{1}{16}\cdot 2x + 0 + \frac{1}{4}\cdot 2zz_x' = 0 \rightarrow \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}zz_x' = 0 \rightarrow z_x' = -\frac{x}{4z}$$

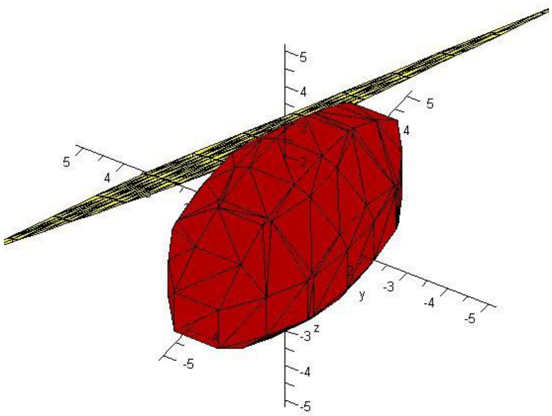
$$0 + \frac{1}{4}\cdot 2y + \frac{1}{4}\cdot 2zz_y' = 0 \rightarrow \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}zz_y' = 0 \rightarrow z_y' = -\frac{y}{z}.$$

Dosadíme bod t: $z_x'(2,1,1) = -\frac{1}{2}; z_y'(2,1,1) = -1$. V těchto příkladech, kdy máme funkci zadanou implicitně, dosadíme do rovnice tečny za $f(t)$ z-tovou souřadnici bodu t.

Tečná rovina bude mít rovnici: $z = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2) + (-1)\cdot(y-1) \rightarrow$

$\rightarrow z = 1 - \frac{x}{2} + 1 - y + 1 \rightarrow 2z = -x - 2y + 6 \rightarrow x + 2y + 2z - 6 = 0.$

Rovnice tečné rovnice plochy $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ v bodě t je $x + 2y + 2z - 6 = 0.$



Obrázek 4.5: Implicitní funkce $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ a její tečná rovina.

Příklad 4.6: Zjistěte tečnou rovinu k ploše dané rovnicí $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ v bodě $t=[2,2,?]$, kdy $a=4, b=4, c=2$.

Řešení:

Rovnice plochy po dosazení konstant bude $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=-1$, což je rotační dvoudílný hyperboloid. Vidíme, že nemáme *z*-tovou souřadnici bodu *t*, kterou musíme získat dosazením do rovnice plochy a dopočítáním. Tím nejen získáme souřadnice bodu *t* a hodnotu $f(t)$:

$$F(2,2,z): \frac{4}{16}+\frac{4}{16}-\frac{z^2}{4}=-1 \rightarrow \frac{z^2}{4}=1+\frac{1}{2} \rightarrow z=\pm\sqrt{6}.$$

Po dosazení jsme získali dva tečné body: $t_1=\left[2,2,\sqrt{6}\right], t_2=\left[2,2,-\sqrt{6}\right]$. Tím můžeme vypočítat dvě tečné roviny k ploše. Ověříme podmínku existence parciální derivace:

$F_z'(x,y,z)=-\frac{1}{4}\cdot 2z=-\frac{1}{2}z\neq 0$ pro $F_z'(t_1)=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\neq 0$ a pro $F_z'(t_2)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\sqrt{6}\right)\neq 0$. Podmínky platí, můžeme dopočítat derivace a rovnice tečen.

$$\frac{1}{16}\cdot 2x-\frac{1}{4}\cdot 2zz_x'=0 \rightarrow z_x'=\frac{x}{4z}$$

$$\frac{1}{16}\cdot 2y-\frac{1}{4}\cdot 2zz_y'=0 \rightarrow z_y'=\frac{y}{4z}.$$

Dosadíme body t_1, t_2: $z_x'(t_1)=\frac{1}{2\sqrt{6}}, z_y'(t_1)=\frac{1}{2\sqrt{6}}, z_x'(t_2)=-\frac{1}{2\sqrt{6}}, z_y'(t_2)=-\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Rovnice tečen tedy bude vypadat:

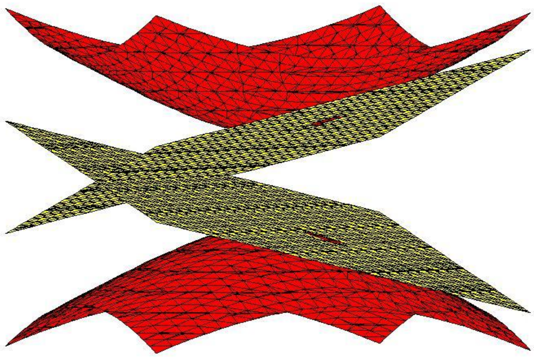
Tečna $n_1: z=\sqrt{6}+\frac{1}{2\sqrt{6}}(x-2)+\frac{1}{2\sqrt{6}}(y-2) \rightarrow 2\sqrt{6}z=8+x+y \rightarrow$

$\rightarrow x+y-2\sqrt{6}z+8=0.$

Tečna $n_2: z=-\sqrt{6}-\frac{1}{2\sqrt{6}}(x-2)-\frac{1}{2\sqrt{6}}(y-2) \rightarrow 2\sqrt{6}z=-8-x-y \rightarrow$

$\rightarrow x+y+2\sqrt{6}z+8=0.$

Tečné roviny, k ploše $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=-1$ v bodech t_1, t_2 mají rovnice $x+y-2\sqrt{6}z++8=0$ a $x+y+2\sqrt{6}z+8=0$.



Obrázek 4.6: Dvoudílný hyperboloid $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=-1$ a jeho tečny.

4.3 Neřešené příklady

1) Najděte rovnici tečné roviny k dané ploše v daném bodě:
   a) $f: f(x,y)=3x^2+2y^2, [-1,2,11]$ [4],
   b) $f: f(x,y)=e^x\cdot\cos y, (0,0,1)$ [4],
   c) $f: f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \left[4,-3,\frac{4}{5}\right]$ [4],
   d) $f: f(x,y)=\frac{xy}{x-2y}+3, A=[3,1], B=[-1,-1]$ [10],
   e) $f: f(x,y)=3x^2+2y^2+x+y, A=[-1,2], B=[0,7]$ [10].
2) Vypočítejte tečné roviny k daným implicitním funkcím v daných bodech:
   a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3, [1,4,0]$ [4],
   b) $\frac{x^2}{4}-y^2-\frac{z^2}{9}=1, \left[4,\sqrt{2},3\right]$ [4],

c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1, [2,3,5]$ [4],

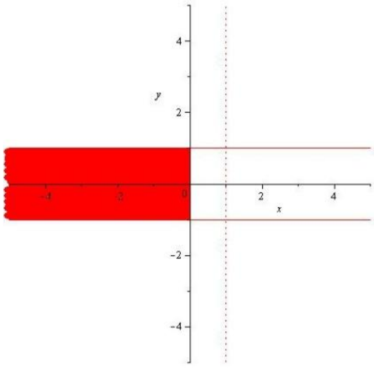
d) $x^2 + y^2 + z^2 = 169, [3,4,12]$ [3],

e) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, [x_0, y_0, z_0]$ [3].

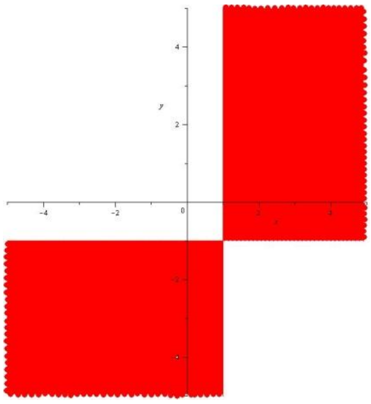
5. Výsledky neřešených příkladů

Kapitola 1.3:

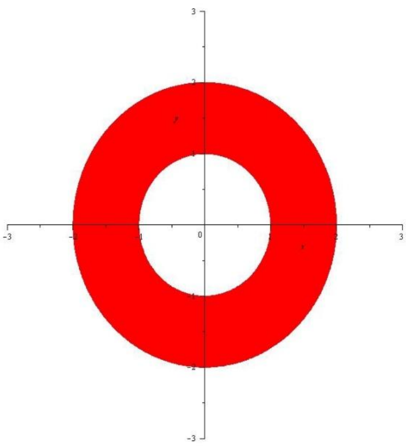
1.a) $D_f = x < 1 \wedge |y| \leq 1$



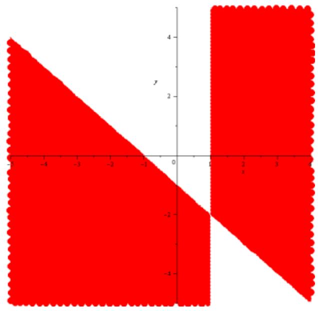
b) $D_f = (x \geq 1 \wedge y > -1) \vee (x \leq 1 \wedge y < -1)$



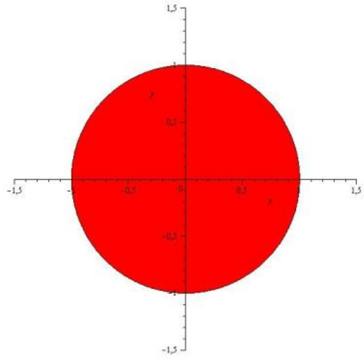
c) $D_f: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$



d) $D_f: (x > 1 \wedge y > -1 - x) \vee (x < 1 \wedge y < -1 - x)$



e) $D_f: x^2 + y^2 \leq 1$



Kapitola 2.3:

1. a) $f_x' = e^x \cdot cos\ (xy) - ye^x \cdot sin\ (xy), f_y' = -ye^x \cdot sin(xy)$

b) $f_x' = \frac{2x}{(2x^2+y^2)}, f_y' = \frac{y}{(2x^2+y^2)}$

c) $f_x' = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, f_y' = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

d) $f_x' = -\frac{y}{(x-y)^2}, f_y' = \frac{x}{(x-y)^2}$

e) $f_x' = 3x^2yz^2, f_y' = x^3z^2, f_z' = 2x^3yz$

f) $f_x' = 3x^2 - 2, f_y' = 2y + 3, f_z' = -2z + 1$

g) $f_x' = -\frac{z}{x}, f_y' = \frac{z}{y}, f_z' = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

2. **a)** $f''_{x^2} = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2)\,, f''_{y^2} = 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2++y^2)\,, f''_{xy} = -4xy\sin(x^2+y^2)$

b) pro $a = x^2y + xy^2$: $f''_{x^2} = 10a^3(ya++2(2xy+y^2)^2), f''_{y^2} = 10a^3(xa + 2(x^2+2xy)^2), f''_{xy} = 10a^3\big((x+y)a + 2(x^2+2xy)(2xy+y^2)\big)$

c) pro $C = \cos xy\,, S = \sin xy$: $f''_{x^2} = (1-y^2)e^xC -$

$-2ye^xS - y^2e^yS, f''_{y^2} = (1-x^2)e^yS + 2xe^yC - x^2e^xC,\ f''_{xy} = e^y(C + yC - xyS) -$

$$-e^x(S + xS + xyC)$$

d) $f''_{x^2} = -\frac{2\sin x^2 + 4x^2\cos x^2}{y}, f''_{y^2} = \frac{2\cos x^3}{y^3}, f''_{xy} = \frac{2x\sin x^2}{y^2}$

e) $f''_{x^2} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}, f''_{y^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}, f''_{xy} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}$

3. $y'_x = -\frac{1+y^2}{3y^2+2xy}, y''_{x^2} = \frac{2(3y^3+3xy^2-3y-x)(1+y^2)}{(3y^2+2xy)^3}$

4. a) $z'_x = \frac{2x-z+y^4}{x-2z}, z'_y = \frac{4xy^3}{x-2z}$

b) $z'_x = -\frac{(4x+1)}{2z}, z'_y = \frac{(3y+1)}{z}$

c) $z'_x = -\frac{(2x+3x^2z^2)}{(2x^3z+y\cos z)}, z'_y = -\frac{\sin z}{(2x^3z+y\cos z)}$

d) $z'_x = \frac{y\sin(xz)+xyz\cos(xz)}{1-x^2y\cos(xz)}, z'_y = \frac{x\sin(xz)}{1-x^2y\cos(xz)}$

e)$z'_x = -\frac{x}{z}, z'_y = -\frac{y}{z}$

f) $z'_x = z'_y = \frac{1}{x+y+z-1}$

Kapitola 3.1.2:

1.a) lokální maximum v $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

b) lokální maximum v [0,0]

c) lokální maximum v $[0,0]$

d) $\left[-\frac{3}{20}, \frac{1}{4}, \frac{1}{20}\right]$, nelze určit

e) lokální maximum v $[0,0,0]$

2. lokální maximum v $[1,-1,6]$ a lokální minimum v $[1,-1,-2]$

Kapitola 3.2.2:

1.a) lokální minimum v $\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right], \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

b) $[1,0]$, není extrém

c) maximum v $\left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$, minimum v $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$

d) maximum v $\left[\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right]$

e) minimum v $[0,0,\pm c]$, maximum v $[\pm a, 0,0]$

Kapitola 4.3:

1.a) $6x - 8y + z + 11 = 0$

b) $x - z + 1 = 0$

c) $9x + 12y - 125z + 100 = 0$

d) $z = -2x + 9y + 3$

e) $z = -5x - 3y + 13$

2.a) $2x + y = 6$

b) $3x - 3\sqrt{2}y - z = 3$

c) $15x + 10y - 6z = 30$

d) $3x + 4y + 12z = 169$

e) $ax_0x + by_0y + cz_0z = 1$

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo vytvoření sbírky řešených a neřešených úloh diferenciálního počtu více proměnných, především pak dvou a tří proměnných. Jelikož je toto téma obsáhlé, zaměřil jsem se pouze na výpočty ukázkových příkladů tak, aby byl čtenář seznámen se základy dané problematiky. V úvodu každé kapitoly se nachází výběr ze základní teorie diferenciálního počtu více proměnných, který je potřebný při výpočtech ukázkových příkladů.

Dané postupy řešení příkladů jsem se snažil předložit stručně a především přehledně. K vybraným příkladům jsem rovněž připojil grafy, které umožní lepší pochopení daného zadání problému i teorie.

Vzhledem k tomu, že je diferenciální počet více proměnných zajímavé a rozsáhlé téma, musel jsem danou problematiku zobecnit a zkrátit. Především pak kapitoly týkající se lokálních extrémů funkce více proměnných a tečné roviny funkce více proměnných. Pokud by čtenář projevil o toto téma hlubší zájem, doporučil bych k prostudování především literaturu [2], [3], [4].

Použitá literatura:

[1] AKSAMIT, P., MRÁZ, F.: *Příklady z matematické analýzy pro učitelské stadium*. České Budějovice: Ediční studio PF JU České Budějovice, 2000, ISBN 80-7040-158-8.

[2] AKSAMIT, P., ČERNYCH, J., JOHN,O., STARÁ, J.: *Příklady z matematické analýzy V*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987.

[3] DĚMIDOVIČ, B.P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Praha: Fragment, 2003, ISBN 80-7200-587-1.

[4] GILLMAN, L., McDOWELL, R. H.: *Matematická analýza*. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1980.

[5] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet I*. Praha: ČSAV, 1974.

[6] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet II*. Praha: ČSAV, 1956.

[7] *Funkce zadaná implicitně* [online]:

dostupné z: http://math.feld.cvut.cz/tiser/web8.pdf [cit. 2011-2-11]

[8] *Matematické výpočty se systémem Maple* [online]:

Dostupné z:

http://www.maple.vladimirzak.com/publikace/matematicke_vypocty_maple.pdf [cit. 2010-11-27]

[9] *Matematika II* [online]:

Dostupné z: http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/fceviceprom.html [cit. 2011-3-23]

[10] NÝDL, V., KLUFOVÁ, R.: *Matematika, část 2 – Matematická analýza*. Zemědělská fakulta Jihočeské univerzity, České Budějovice, 1998, ISBN 80-7040-273-3.

[11] MARKOVÁ, H.: *Derivace funkcí více proměnných*. Olomouc, 2009. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého. Vedoucí diplomové práce Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

[12] *Příklady na lokální extrémy* [online]:

Dostupné z: http://user.mendelu.cz/marik/index.php?item=14 [cit. 2011-2-14]

[13] *Příklady na parciální derivace* [online]:

Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/archiv/m29798l.pdf [cit. 2011-2-23]

[14] ZUBČÁKOVÁ, J.: *Implicitní funkce*. Brno, 2008. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity. Vedoucí práce RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.