

JIHOČESKÁ UNIVERZITA
V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

EKONOMICKÁ FAKULTA

KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY A INFORMATIKY

STUDIJNÍ PROGRAM: SYSTÉMOVÉ INŽENÝRSTVÍ A INFORMATIKA

STUDIJNÍ OBOR: EKONOMICKÁ INFORMATIKA

**Sbírka řešených úloh
z diferenciálního a integrálního
počtu pro studenty Ekonomické
fakulty Jihočeské univerzity
v Č. Budějovicích**

Autor:

Vojtěch KOZELKA

Vedoucí:

Marika KAFKOVÁ, RNDr. Ph.D.

2013

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Vojtěch KOZELKA**
Osobní číslo: **E10388**
Studijní program: **B6209 Systémové inženýrství a informatika**
Studijní obor: **Ekonomická informatika**
Název tématu: **Sbírka řešených úloh z diferenciálního a integrálního počtu pro studenty Ekonomické fakulty Jihočeské univerzity v Č. Budějovicích**
Zadávací katedra: **Katedra aplikované matematiky a informatiky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

V dnešní době existuje na českém i světovém trhu celá řada publikací týkajících se diferenciálního a integrálního počtu a otázka, kterou si studenti různých fakult mnohdy kladou, zní: "Jaké publikace využít ke kvalitní přípravě na zkoušku?" Která publikace mi přípravu na zkoušku ulehčí? Při výuce matematiky na EF JU nezbývá mnoho času na řešení aplikačních úloh a jednou z možností, jak studentům ukázat celou řadu řešených úloh vycházejících z praxe, by mohla být předložená práce. Cílem bakalářské práce je vytvořit "Sbírku řešených úloh z diferenciálního a integrálního počtu". Sbírka by měla posloužit studentům prezenčního i kombinovaného studia na EF JU, popř. ZF JU, ke kvalitnější přípravě na zkoušku z předmětu Matematika. Bude ji možné využívat nejen při cvičeních k uvedenému předmětu, ale i pro již zmíněnou samostatnou práci, tj. k dalšímu procvičení a lepšímu pochopení probírané látky. Práce bude rozdělena na tři části - stručná teoretická část, řešené vzorové příklady, úlohy k procvičení. Úlohy budou tříděny podle obtížnosti a řešení jednotlivých úloh bude doplněno názornými obrázky, vytvořenými např. v programu Maple.

Metodický postup:

1. Nastudování diferenciálního a integrálního počtu. Studium odborné literatury.
2. Seznámení se s matematickým programem Maple.
3. Vytvoření seznamu standardních i těžších úloh. Zaměřit se především na aplikační úlohy.
4. Vytvoření srozumitelného řešení jednotlivých úloh s využitím programu Maple aj.
5. Závěr.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy: 40 - 50 stran

Forma zpracování bakalářské práce: tištěná

Seznam odborné literatury:

1. AKSAMIT, P. a F. MRÁZ. *Příklady z matematické analýzy pro učitelské studium*. Č. Budějovice: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 1996. ISBN 80-7040-150-8.
2. DĚMIDOVÍČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Praha: Fragment, 2003. ISBN 80-7200-587-1.
3. DLOUHÝ, O. a V. TRYHUK. *Matematika 1: Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*. 2. vyd. Brno: CERM, s.r.o., 2006. ISBN 80-7204-469-9.
4. GILLMAN, L. a R. MCDOWELL. *Matematická analýza*. Praha: SNTL, 1983.
5. JARNÍK, V. *Diferenciální počet I*. Praha: Academia, 1984. ISBN 104-21-852.
6. KAŇKA, M. a J. HENZLER. *Matematika pro ekonomické fakulty*. Praha: Ekopress, 2000. ISBN 80-86119-31-9.
7. LUKAWECKI, S. *Student's solutions manual to accompany Calculus for Business, economics, and the social and life science*. New York: McGraw-Hill, 1989. ISBN 0-07-029336-8.
8. ZAJÍČEK, L. *Vybrané úlohy z matematické analýzy*. Praha: Matfyzpress, 2005. ISBN 80-86732-58-4.

Vedoucí bakalářské práce:

RNDr. Marika Kafková, Ph.D.

Katedra aplikované matematiky a informatiky

Datum zadání bakalářské práce: 19. ledna 2012

Termín odevzdání bakalářské práce: 12. dubna 2013

doc. Ing. Ladislav Rolínek, Ph.D.

děkan

JIHOČESKÁ UNIVERZITA
V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
EKONOMICKÁ FAKULTA
L.S.
370 05 České Budějovice

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.

vedoucí katedry

V Českých Budějovicích dne 23. března 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že v souladu s §47 zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě/v úpravě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných Ekonomickou fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 11. září 2013

.....

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucí mé bakalářské práce Marice Kafkové, RNDr. Ph.D., za odbornou spolupráci, velikou trpělivost, ochotu pomoci a čas, který mi věnovala. Děkuji také mé rodině a blízkému okolí za psychickou podporu při psaní této práce.

Obsah

Úvod	3
1 Diferenciální počet	5
1.1 Elementární funkce	5
1.2 Limita funkce	8
1.3 Spojitost funkce	10
1.4 Derivace	11
1.5 Aplikace derivací	15
2 Integrální počet	21
2.1 Neurčitý integrál	21
2.2 Metody výpočtu primitivní funkce	23
2.3 Určitý integrál a jeho vlastnosti	25
2.4 Aplikace integrálů	26
3 Sbírka řešených úloh	31
3.1 Řešené úlohy — diferenciální počet	31
3.2 Řešené úlohy — integrální počet	57
4 Neřešené úlohy	73
Závěr	77
Summary	79
Literatura	81
Seznam obrázků	83
Seznam tabulek	85
A Seznam použitých zkratk	
B Obsah přiloženého CD	

Úvod

V současnosti existuje mnoho publikací, které se zabývají diferenciálním a integrálním počtem. Studenti si mnohdy neví rady při rozhodování, kterou literaturu ke studiu dané problematiky vybrat. Množí se otázky, zda vše, co se učí a naučí, jim bude k něčemu dobré. Cílem mé bakalářské práce je usnadnit a zefektivnit studentům Ekonomické fakulty Jihočeské univerzity nejen přípravu ke zkoušce, ale také pomoci pochopit, jakým způsobem diferenciální a integrální počet využít v reálném životě.

Obsahově je práce členěna do čtyř kapitol. První dvě se věnují teorii. V teoretické části se student setká s definicemi, větami, poznámkami a příklady. Třetí kapitolou je sbírka řešených úloh. Čtvrtá kapitola se zabývá neřešenými příklady s výsledky. Celá práce je doplněna obrázky, tabulkami a příkazy pro program Maple tak, aby student co nejlépe danou látku pochopil.

První kapitola se zabývá diferenciálním počtem. V první podkapitole jsou popsány základní pojmy a představeny elementární funkce, se kterými se již student setkal na střední škole. Dále se student seznámí s limitou funkce a základními poznatky, které s ní souvisí. Následuje podkapitola zabývající se spojitostí funkce, která je zčásti popsána pomocí limity. Poté se již student dostává k podkapitolám věnujícím se derivaci funkce a jejím aplikacím. Vysvětlen je např. pojem derivace, základní vzorce pro derivování, extrémy funkce, monotonie funkce, konvexnost a konkávnost funkce či Taylorův polynom.

Druhá kapitola se zaměřuje na integrální počet. Nejdříve je studentům představena primitivní funkce, poté techniky a základní vzorce pro integrování, dvě metody výpočtu primitivní funkce nebo určitý integrál. Důležitou podkapitolou jsou také aplikace integrálů, ve které je ukázána celá řada užitečných vlastností určitého integrálu.

V třetí kapitole nalezneme řešené příklady. V rámci části věnované diferenciálnímu počtu se student od základních příkladů na procvičení derivování přes vyšetřování průběhu funkce dostane až k výpočtu aplikačních úloh. V aplikačních úlohách se pomocí derivace řeší úkoly jako minimalizace objemu rotačního válce v rotačním kuželu, okamžitá rychlost helikoptéry, ale také zde nalezneme ekonomické aplikace jako např. zjišťování, zda se firmě vyplatí vyrábět při určité úrovni produkci, nebo maximalizaci zisku. V části zabývající se integrálním počtem mají první příklady

za úkol procvičit integrování, další se zaměřují na aplikaci integrálů, tedy např. obsah plochy mezi grafy dvou funkcí, objem tělesa rotujícího kolem osy x . Nakonec jsou studentovi představeny aplikační úlohy, které by mohl využít v praxi. Ty se týkají např. přebytku výrobce/spotřebitele, střední hodnoty nákladové funkce nebo spojitého úroku.

Ve čtvrté kapitole nalezne student neřešené příklady s výsledky, pomocí nichž si může ověřit, zda porozuměl dané látce, a procvičit si získané dovednosti.

Diferenciální počet

1.1 Elementární funkce

S pojmem funkce jsme se již určitě v minulosti setkali. Než pronikneme do tajů derivací, připomeňme si základní funkce a pojmy.

Definice 1.1.1. [5] Zobrazení f , kde $\{D_f, H_f\} \subset \mathbb{R}$, se nazývá **reálná funkce reálné proměnné**.

Grafem funkce f potom nazveme množinu

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D_f\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Poznámka. [7, 18] Připomeňme, že D_f je definiční obor funkce a H_f je obor hodnot funkce.

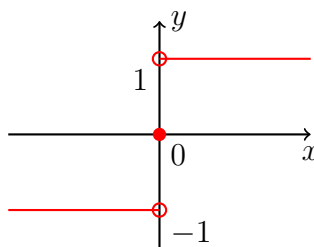
Definiční obor funkce je množina všech hodnot, pro které je funkce definována.

Obor hodnot funkce je množina všech hodnot, kterých funkce na svém definičním oboru nabývá.

Poznámka. [5] U jednodušších funkcí namalovat graf lze, u některých je to ale prakticky nemožné. Jednu z každé této „kategorie“ si ukážeme.

Funkce signum (graf lze bez problému namalovat):

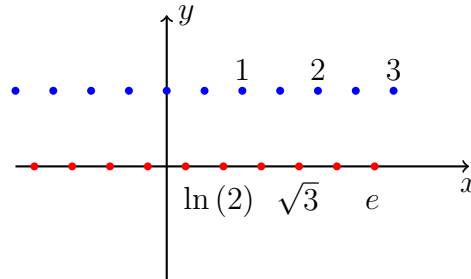
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{za podmínky } x < 0, \\ 0 & \text{za podmínky } x = 0, \\ 1 & \text{za podmínky } x > 0. \end{cases}$$



Obrázek 1: Funkce $\operatorname{sgn} x$.

Dirichletova funkce (graf prakticky nelze namalovat):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{za podmínky } x \in \mathbb{Q} \text{ (pokud } x \text{ je racionální číslo),} \\ 0 & \text{za podmínky } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ (pokud } x \text{ je iracionální číslo).} \end{cases}$$



Obrázek 2: Dirichletova funkce.

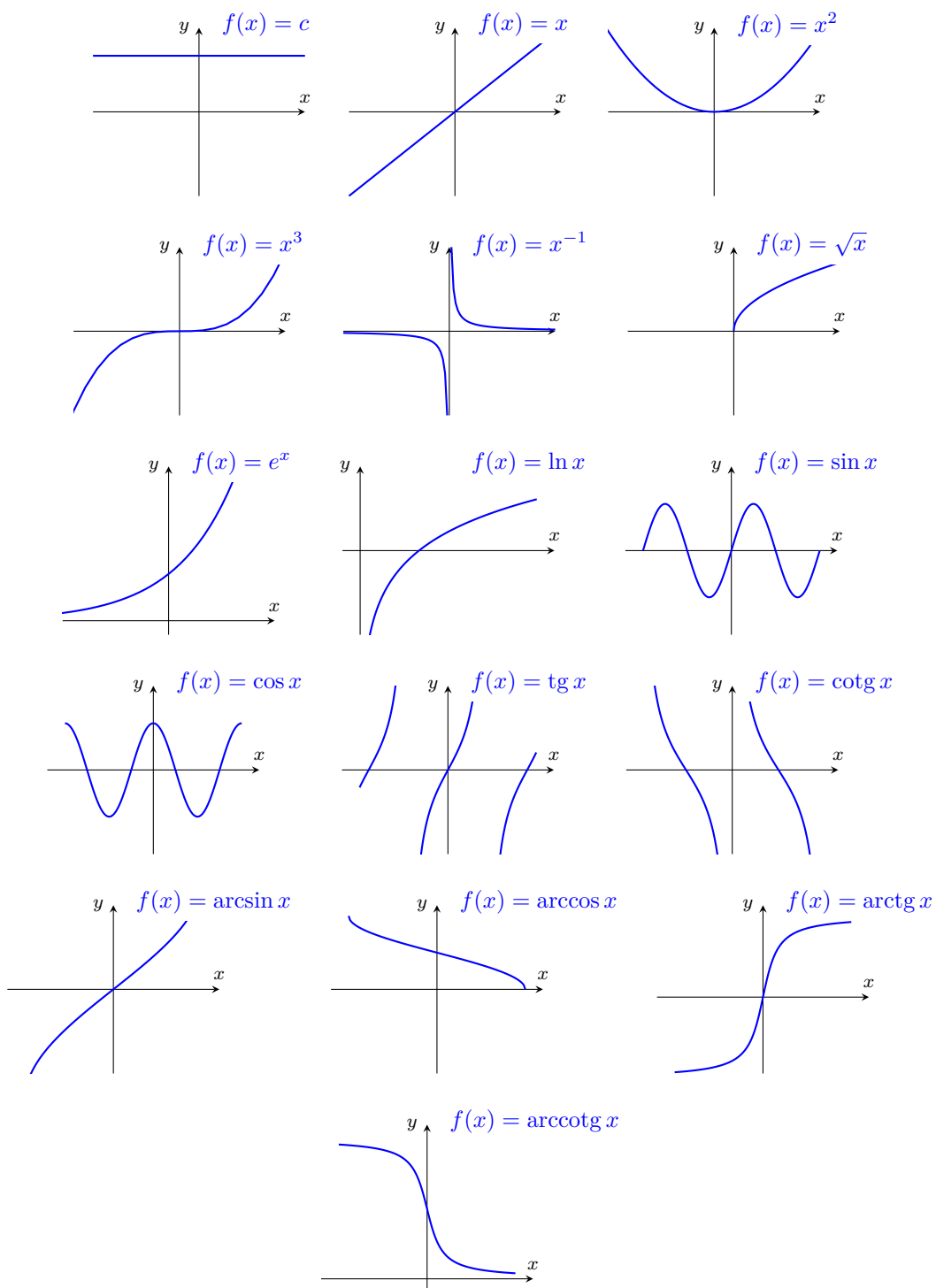
Definice 1.1.2. [5, 10] Necht f je reálnou funkcí reálné proměnné. Funkce f

- (i) je **shora omezená**, pokud $(\exists A \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in D_f)(f(x) \leq A)$,
- (ii) je **zdola omezená**, pokud $(\exists a \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in D_f)(f(x) \geq a)$,
- (iii) je **omezená**, pokud platí (i) a (ii),
- (iv) je **rostoucí**, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D_f)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$,
- (v) je **klesající**, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D_f)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$,
- (vi) je **neklesající**, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D_f)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$,
- (vii) je **nerostoucí**, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D_f)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$,
- (viii) je **monotónní**, pokud platí (iv), (v), (vi) nebo (vii),
- (ix) je **prostá**, pokud platí $(\forall x_1, x_2 \in D_f)(f(x_1) \neq f(x_2))$,
- (x) má **maximum** v bodě $M \in D_f$, pokud platí $(\forall x \in D_f)(f(M) \geq f(x))$,
- (xi) má **minimum** v bodě $m \in D_f$, pokud platí $(\forall x \in D_f)(f(m) \leq f(x))$.

Definice 1.1.3. [19] Mějme funkce f a g s definičními obory D_f a D_g . Pokud pro $\forall x$ platí $x \in D_g$ a $g(x) \in D_f$, pak funkci $f(g(x))$ označujeme jako **funkci složenou**.

Definice 1.1.4. [9] Necht f je funkce f prostá. Potom f^{-1} nazveme **inverzní funkcí** k funkci f , pro kterou platí

- $D_{f^{-1}} = H_f$ a
- pro $\forall y \in D_{f^{-1}}$ je přiřazeno právě to $x \in D_f$, pro které je $f(x) = y$.



Obrázek 3: Grafy elementárních funkcí.

1.2 Limita funkce

Definice 1.2.1. [5] Pro $x \in \mathbb{R}^*$ definujeme:

- $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$, kde $a \in \mathbb{R}$,
- $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$, kde $a \in \mathbb{R}$,
- $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$, kde $a \in \mathbb{R}^+$,
- $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$, kde $a \in \mathbb{R}^-$,
- $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$, kde $a \in \mathbb{R}^+$,
- $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$, kde $a \in \mathbb{R}^-$,
- $\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$,
- $\frac{1}{\pm\infty} = 0$,
- $|\pm\infty| = +\infty$.

Poznámka. [5] Zbývá se podívat na výrazy s $\pm\infty$, které se nedefinují:

- $\pm\infty - (\pm\infty)$,
- $0 \cdot (\pm\infty)$,
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$,
- $\frac{x}{0}$, kde $x \in \mathbb{R}^*$,
- 1^∞ ,
- 0^0 ,
- 0^∞ .

Abychom mohli limitu funkce korektně definovat, je potřeba zavést si několik pojmů.

Definice 1.2.2. [2, 24] Necht $a \in \mathbb{R}$ a $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

ϵ -okolím bodu a nazveme otevřený interval $I_o(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Prstencovým ϵ -okolím bodu a nazveme množinu $I_p(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon) \setminus \{a\}$.

Poznámka. [24] Předchozí Definice nám přinesla zajímavá zjištění:

$$x \in I_o(a) \Leftrightarrow |x - a| < \epsilon,$$

$$x \in I_p(a) \Leftrightarrow |x - a| < \epsilon.$$

Jinak řečeno, x patří do ϵ -okolí bodu nebo prstencového ϵ -okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ právě, když je jeho vzdálenost od a menší než ϵ .

Definice 1.2.3. [2, 24] Necht $a \in \mathbb{R}$ a $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

Pravým, resp. **levým**, ϵ -**okolím** bodu a nazveme otevřený interval

$$I_o^+(a) = \langle a, a + \epsilon \rangle,$$

resp.

$$I_o^-(a) = \langle a - \epsilon, a \rangle.$$

Pravým, resp. **levým**, **prstencovým** ϵ -**okolím** bodu a nazveme otevřený interval

$$I_p^+(a) = (a, a + \epsilon),$$

resp.

$$I_p^-(a) = (a - \epsilon, a).$$

Definice 1.2.4. [6] Necht je funkce f definována na nějakém prstencovém ϵ -okolí určitého bodu a . Řekneme, že číslo $c \in \mathbb{R}^*$ je **limita funkce** f pro x jdoucí k $a \in \mathbb{R}^*$, pokud pro $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ tak, aby pro $\forall x \in D_f$ splňující $0 < |x - a| < \delta$ platilo $|f(x) - c| < \epsilon$ (jinak řečeno $x \in I_p(a) \Rightarrow f(x) \in I_o(c)$).

Zapisujeme:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c.$$

Pokud

$$c \begin{cases} \neq \pm\infty, & \text{pak tuto limitu nazveme } \mathbf{vlastní limitou}, \\ = \pm\infty, & \text{pak tuto limitu nazveme } \mathbf{nevlastní limitou}. \end{cases}$$

Poznámka. [12] K předchozí Definici dodejme zajímavý poznatek.

- Limita funkce v bodě a závisí na chování funkce v bodech, které jsou blízké bodu a , nikoliv však v samotném bodě a . Zda je funkce f v bodě a definována, nemá na limitu funkce v bodě a žádný vliv, ani případná hodnota $f(a)$.
- Limitu funkce lze zkoumat ve vlastním bodě (v reálném čísle), ale také v bodech nevlastních $+\infty$ nebo $-\infty$. V obou případech může být limita vlastní, nevlastní nebo limita nemusí existovat.

Definice 1.2.5. [6] Necht je funkce f definována na nějakém pravém, resp. levém, prstencovém ϵ -okolí určitého bodu a . Řekneme, že číslo $c \in \mathbb{R}^*$ je **limita funkce** f pro x jdoucí k $a \in \mathbb{R}^*$ **zprava**, resp. **zleva**, pokud pro $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ tak, aby pro $\forall x \in D_f$ splňující $x \in (a, a + \delta)$, resp. $x \in (a - \delta, a)$, platilo $|f(x) - c| < \epsilon$. Zapisujeme:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c,$$

resp.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = c.$$

Věta 1.2.1. [13] Funkce f má v daném bodu a **nanejvýš jednu limitu** a také **nanejvýš jednu limitu zprava** a **nanejvýš jednu limitu zleva**.

Věta 1.2.2. [14] Necht je $a \in \mathbb{R}$. Potom platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

Věta 1.2.3. [14] Necht mají funkce f a g vlastní limity

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c_1 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c_2$$

a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Potom platí:

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c_1 \pm c_2$,
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c_1 \cdot c_2$,
- $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{c_1}{c_2}$, kde $c_2 \neq 0$,
- $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = c_1$.

1.3 Spojitost funkce

Definice 1.3.1. [2] Funkce f je **spojitá v bodě** $a \in D_f$, pokud pro $\forall I_o(f(a))$ existuje $I_o(a) \subset D_f$ tak, že $f(I_o(a)) \subset I_o(f(a))$.

Věta 1.3.1. [5] Necht je bod $a \in D_f$. Funkce f je pak **spojitá** v bodě a právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Věta 1.3.2. [28] Řekneme, že je funkce f **spojitá v bodě** a **zprava**, resp. **zleva**, pokud

$$\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = f(a),$$

resp.

$$\lim_{x \rightarrow a_-} f(x) = f(a).$$

Do této chvíle jsme se bavili o spojitosti v nějakém bodu funkce. Podívejme se na to, jak vypadá definice pro spojitost na intervalu.

Definice 1.3.2. [28] Funkce f je **spojitá na intervalu**

- (a, b) právě, když je funkce f spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$,
- $\langle a, b \rangle$ právě, když je funkce f spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava,
- $(a, b]$ právě, když je funkce f spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě b je spojitá zleva,
- $\langle a, b \rangle$ právě, když je funkce f spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

1.4 Derivace

Definice 1.4.1 (Derivace). [23] Nechť je na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ definována funkce f . Dále za podmínky, že existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

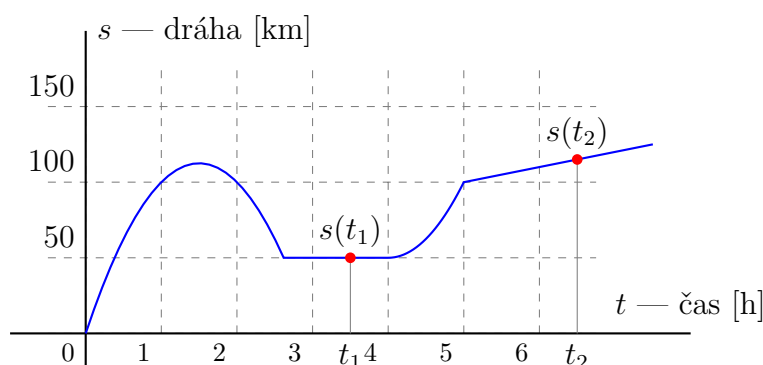
je hodnota této limity **derivací**¹ funkce f v bodě a se značením $f'(a)$. Pokud je tato limita vlastní, resp. nevlastní, pak mluvíme o **derivaci vlastní**, resp. **nevlastní**.

Poznámka. [23] Ukažme si na ilustračním příkladu, jak limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ vznikla. Graf na Obrázku 4 znázorňuje uraženou dráhu vozidla v kilometrech v závislosti na čase v hodinách. Průměrná rychlost mezi okamžiky t_1 a t_2 je popsána vztahem

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Čím blíže jsou hodnoty t_1 a t_2 k sobě blíže, tím lépe odpovídá průměrná rychlost rychlosti okamžité. V čase t_1 se vozidlo pohybuje okamžitou rychlostí, která je dána vztahem

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$



Obrázek 4: Význam derivace.

Příklad. Na jednoduchých příkladech si ukažme, jak lze pomocí limity zderivovat konstantní funkci a funkci $y = x$.

Mějme v oboru $\mathbb{R}$ funkci $f(x) = c$ pro $\forall x$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = 0$$

pro $\forall a$.

¹Derivace $f'(a)$ je hodnota (vyjde tedy nějaká konstanta — **číslo**) $\tan \alpha$, kde α reprezentuje úhel, který svírá tečna grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ s horizontální osou (osou x). Jedná se o tzv. **sklon tečny** grafu funkce f . [3] Tedy první důležitou věcí k zapamatování — **derivace je v konečném důsledku reálné číslo** nebo také **sklon tečny grafu funkce**.

Mějme v oboru $\mathbb{R}$ funkci $f(x) = x$ pro $\forall x$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

pro $\forall a$.

Poznámka. Protože se bude vlastní limita a vlastní derivace v následujícím textu vyskytovat daleko častěji než nevlastní, budeme v dalším textu pojmem derivace a limita označovat vlastní derivaci a vlastní limitu.

Věta 1.4.1. [23] Nechť má funkce f v bodě a **derivaci**. Pak f je **spojitá** v bodě a . Matematicky řečeno:

$$f'(a) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Poznámka. [5] K předchozí Větě je potřeba dodat důležitý fakt.

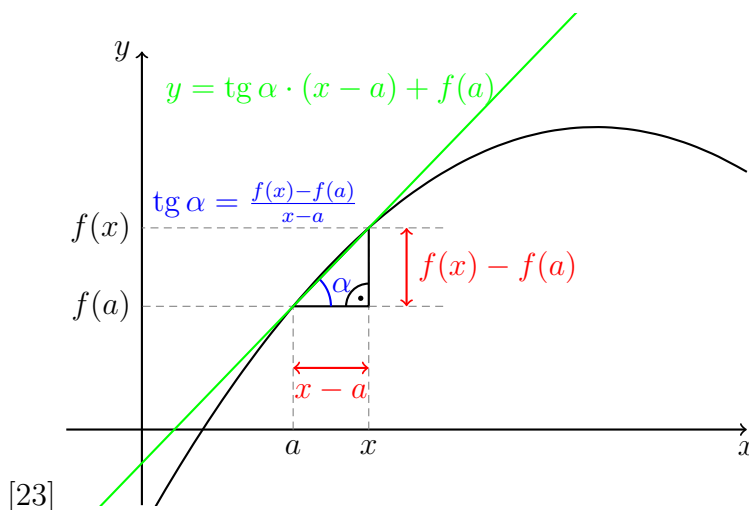
Nezaměňujme uvedenou implikaci. Neplatí totiž obecně, že když je funkce v nějakém svém bodě spojitá, nalezneme v něm i derivaci. Jako příklad můžeme uvést funkci $f(x) = |x|$ (v bodě $a = 0$ je tato funkce spojitá, v tomto bodě ale neexistuje derivace).

Věta 1.4.2. [2] Mějme funkci $y = f(x)$ a derivaci $f'(a)$ v bodě a . Funkce f je pak spojitá v bodě a a zároveň lze bodem $[a, f(a)]$ vést **tečnu** ke **grafu funkce** f . Rovnice tečny grafu se dá zapsat jako

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a),$$

kde $f'(a)$ **reprezentuje směrnici tečny** (derivaci funkce f v bodě a). Rovnice může mít alternativní zápis (inspirovme se poznámkou pod čarou číslo 1):

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot (x - a) + f(a).$$



Obrázek 5: Tečna ke grafu funkce.

Poznámka. Z dřívějšíka možná znáte rovnici pro tečnu

$$y = kx + q.$$

Proměnná k reprezentuje směrnici tečny nebo také hodnotu $\operatorname{tg} \alpha$. Navíc teď již víme, že jde o první derivaci v určitém bodě $A = [a, f(a)]$. Situaci znázorňuje Obrázek 5.

Věta 1.4.3. [2] Pokud má funkce $y = f(x)$ derivaci v každém bodě otevřeného intervalu I , mluvíme o nové funkci $y' = f'(x)$ (případně f' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ nebo třeba $\frac{d}{dx}f(x)$), kterou označíme jako **derivaci funkce f v intervalu I** .²

Věta 1.4.4 (Techniky derivování). [2, 3] Abychom mohli správně derivovat dané funkce, je potřeba znát několik klíčových technik.:

1. **derivace k-násobku:**

$$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x) \quad (\text{vyplývá z 4), kde } k \in \mathbb{R},$$

2. **derivace součtu:**

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x),$$

3. **derivace rozdílu:**

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x),$$

4. **derivace součinu:**

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

$$[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x),$$

5. **derivace podílu:**

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \text{ za podmínky } g(x) \neq 0,$$

6. **derivace složené funkce:**

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Věta 1.4.5 (Základní vzorce pro derivování). [3] V předchozí Větě jsme si ukázali techniky derivování, v této se zaměříme na pravidla derivování elementárních funkcí.

²Věta nám přinesla jedno zajímavé zjištění. Můžeme totiž mluvit o tom, že jsme funkci f zderivovali podle x (což často říkáme při praktické práci s derivacemi), a také to znamená, že má funkce f na intervalu I derivaci.

$f(x)$	$f'(x)$	za podmínky
c	0	$c \in \mathbb{R}$
x	1	$x \in \mathbb{R}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}_{\neq 0}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
c^x	$c^x \cdot \ln c$	$x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^+$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}^+$
$\log_c x$	$\frac{1}{x \cdot \ln c}$	$x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^+$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\operatorname{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arccotg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Tabulka 1: Základní vzorce pro derivování.

Věta 1.4.6 (Derivace vyšších řádů). [23] Zderivováním funkce f dostáváme novou funkci, kterou následně můžeme opět derivovat. Tento proces (tedy opakované derivování) nazýváme **derivací vyšších řádů**. Derivaci vyšších řádů můžeme rekurentně popsat takto:

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x) \text{ za podmínky } n \geq 1.$$

Poznámka. [3] V souvislosti s předchozí Větou uvedu pár příkladů značení derivace vyšších řádů.

$y'' = \frac{d^2 x}{dx^2} = f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$	druhá derivace funkce f podle x
$y''(a) = f''(a) = \frac{d^2 f}{dx^2}(a)$	hodnota druhé derivace funkce f v bodě a
$y^{(k)} = \frac{d^k x}{dx^k} = f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}$	k -tá derivace funkce f podle x
$y^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) = \frac{d^k f}{dx^k}(a)$	hodnota k -té derivace funkce f v bodě a

Příklad. Mějme funkci $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 10$.

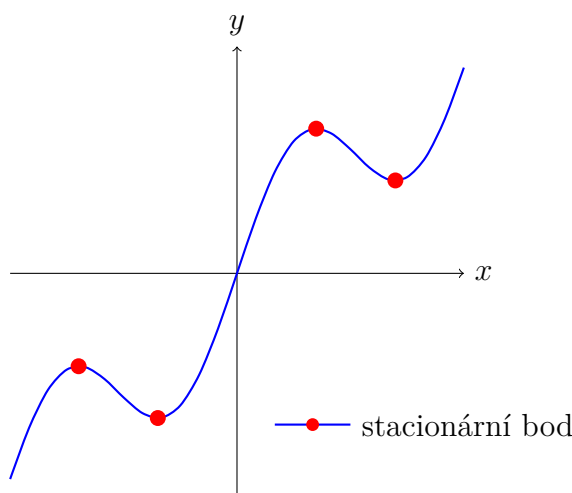
$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 1, \quad f''(x) = 12x - 10,$$

$$f'''(x) = 12, \quad f^{(n)} = 0, \text{ kde } n \geq 4.$$

1.5 Aplikace derivací

1.5.1 Extrémy funkce

Věta 1.5.1. Stacionárním bodem funkce f označíme takový bod $a \in D_f$, kde platí $f'(a) = 0$.



Obrázek 6: Stacionární body.

Poznámka. Protože platí ve stacionárním bodě

$$f'(a) = 0,$$

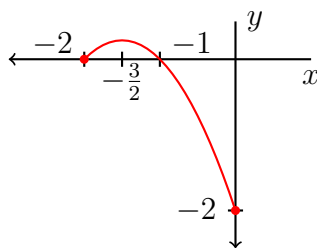
je tečna grafu funkce vedená bodem $[a, f(a)]$ rovnoběžná s osou x .

Věta 1.5.2 (Existence lokálního extrému). [27] Pokud má funkce f v bodě a lokální extrém, pak platí $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Poznámka. Předchozí Věta nám svou nutnou podmínkou pro existenci lokálního extrému řekla, kde lokální extrém určitě nenastává. Nenajdeme ho tam, kde derivace v bodě a existuje a zároveň $f'(a) \neq 0$.

Věta 1.5.3 (Existence globálního extrému). [3, 27] Funkce f , která je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, má **globální** (absolutní) **extrém**. Ten se může vyskytnout pouze v bodech a, b , stacionárních bodech nebo bodech, kde derivace neexistuje.

Poznámka. Z předchozí Věty je zvlášť důležitá poslední informace. Smysl hledat globální extrém spojitě funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ má jen v uvedených bodech.

Obrázek 7: Funkce $-(x+1)(x+2)$.

Např. mějme funkci $f(x) = -(x+1)(x+2)$ na uzavřeném intervalu $\langle -2, 0 \rangle$. Body podezřelé z globálního extrému:

x	-2	$-\frac{3}{2}$	0
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	-2

Z těchto tří výsledků vybereme nejmenší, resp. největší, hodnotu jakožto globální minimum, resp. maximum. Globálním minimem je v našem případě bod $[0, -2]$, globálním maximem bod $[-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}]$.

1.5.2 Monotonie funkce

Definice 1.5.1. [5, 16] Nechť je funkce f spojitá na otevřeném intervalu (a, b) (nazveme jej intervalem I) a pro každé $x \in I$ existuje $f'(x)$. Potom platí následující tvrzení (v závorce alternativní pojmenování):

- (i) $(\forall x \in I)(f'(x) > 0) \Rightarrow f$ **je rostoucí** na I ,
- (ii) $(\forall x \in I)(f'(x) < 0) \Rightarrow f$ **je klesající** na I ,
- (iii) $(\forall x \in I)(f'(x) = 0) \Leftrightarrow f$ **je konstantní** na I ,
- (iv) funkce f je funkcí **monotónní** na I , pokud platí jedna z prvních dvou podmínek,

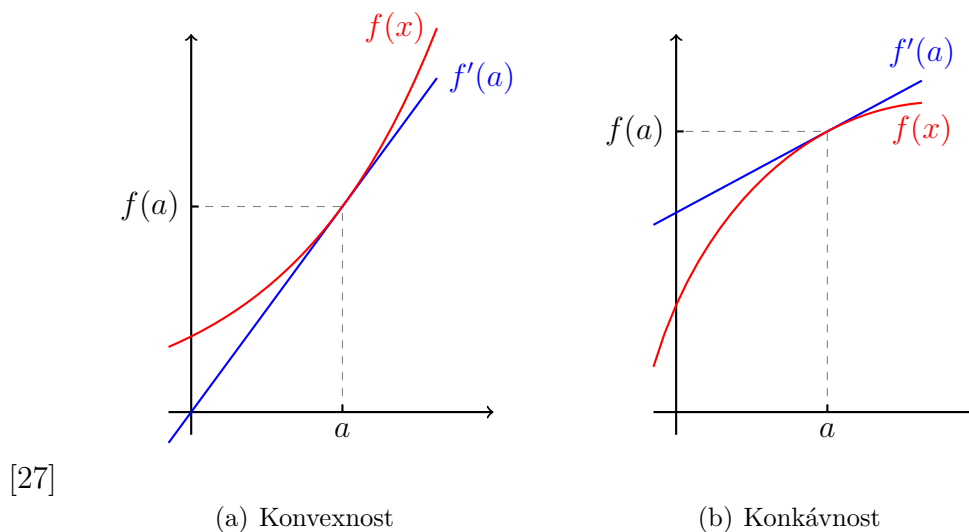
Poznámka. [27] K předchozí Definici je potřeba dodat důležitý fakt.

- Pokud má funkce f derivaci, pak o **monotonii** funkce (tedy o tom, zda roste/klesá) rozhoduje **znaménko** její **derivace**.

1.5.3 Konvexnost a konkávnost funkce

Definice 1.5.2. [27] Nechť má funkce f v bodě $a \in D_f$ derivaci. **Existuje-li ϵ -okolí bodu a takové, že pro $\forall x \in \epsilon \setminus \{a\}$ leží všechny body $[x, f(x)]$ nad, resp.**

pod tečnou (její rovnici jsme si uvedli ve Větě 1.4.2) grafu funkce f v bodě a , je funkce f **konvexní**, resp. **konkávní**, v bodě a .



Obrázek 8: Konvexnost a konkávnost funkce.

Věta 1.5.4. [5] Mějme funkci f spojitou na intervalu $I = \langle a, b \rangle$. Pro každé $x \in I^0$ (I^0 představuje otevřený interval (a, b)) navíc existuje $f'(x) \in \mathbb{R}$. Pro tyto předpoklady platí následující tvrzení:

- Je-li funkce f' **rostoucí** na I^0 , f je **konvexní** na I .
- Je-li funkce f' **klesající** na I^0 , f je **konkávní** na I .

Předchozí Větou jsme si ukázali, jak souvisí monotonie s konvexností a konkávností funkce. Dalším způsobem, jak zjistit konvexnost a konkávnost funkce, je použití druhé derivace.

Definice 1.5.3. [5] Mějme funkci f spojitou na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pro každé $x \in (a, b)$ (tedy vnitřní bod intervalu) navíc existuje $f''(x) \in \mathbb{R}$. Pro tyto předpoklady platí následující tvrzení:

- Pokud pro $\forall x \in (a, b)$ platí $f''(x) > 0$, f je **konvexní** na I .
- Pokud pro $\forall x \in (a, b)$ platí $f''(x) < 0$, f je **konkávní** na I .

S konvexností a konkávností souvisí další pojem, který nám přiblíží následující definice.

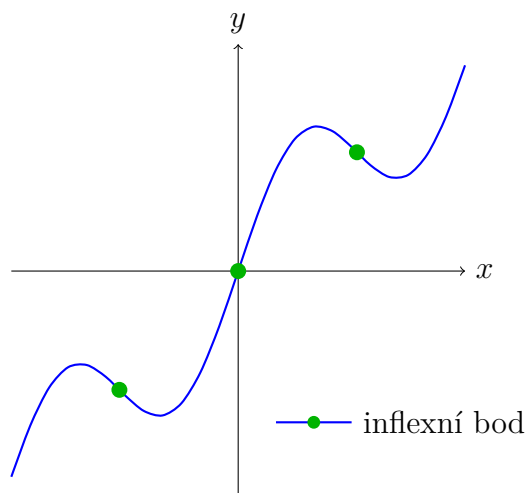
Definice 1.5.4. [27] Bod i nazveme **inflexním bodem**³, právě když $\exists \delta > 0$ takové, že je funkce f **konvexní** na intervalu $(i - \delta, i)$ a **konkávní** na intervalu $\langle i, i + \delta \rangle$ či naopak.

³Jinak řečeno, v **inflexním bodě** se nachází jakási **hranice přechodu funkce z konvexního tvaru na konkávní** či naopak.[11]

Věta 1.5.5. [3] Pokud pro bod $a \in D_f$ platí

$$f''(a) = 0 \wedge f'''(a) \neq 0,$$

pak **má funkce f v bodě a inflexní bod.**

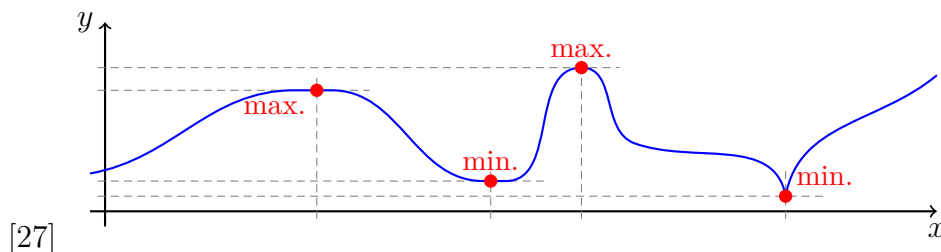


Obrázek 9: Inflexní body.

Protože jsme se podívali, jak druhá derivace souvisí s konvexností/konkávností funkce, zmíníme se i o tom, jak druhá derivace souvisí s monotonií.

Věta 1.5.6. [8] Jiným způsobem, jak lze najít lokální maximum či minimum v bodě a , je nalezení $f''(a)$, tedy druhou derivaci v bodě a . Je-li bod a stacionárním bodem funkce f a zároveň

- $f''(a) < 0$, potom má funkce f **lokální maximum** v bodě a ,
- $f''(a) > 0$, potom má funkce f **lokální minimum** v bodě a .



Obrázek 10: Lokální extrémy.

1.5.4 Další aplikace

Definice 1.5.5. [27] Funkce f **má** v bodě a vertikální **asymptotu** $x = a$ právě, když **platí alespoň jedna** z následujících rovnic:

- $\lim_{x \rightarrow a-} = \pm\infty$,
- $\lim_{x \rightarrow a+} = \pm\infty$.

Definice 1.5.6. [27] Přímka $y = kx + q$ je **asymptotou** funkce f v

(i) $+\infty$,

(ii) $-\infty$,

pokud platí

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - q) = 0,$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - q) = 0.$$

Poznámka. [27] Přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f v $+\infty$, proto

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - k \\ &\Rightarrow k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \\ &\Rightarrow q = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx. \end{aligned}$$

Poznámka. Speciálním případem je horizontální asymptota $y = q$, kde $k = 0$.

Věta 1.5.7 (Taylorův polynom). [20] Má-li funkce f v bodě $a \in D_f$ konečné derivace až do řádu n , **Taylorovým polynonem** řádu n funkce f v bodě a **nazveme polynom**

$$\begin{aligned} T(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x - a)^k \end{aligned}$$

Poznámka. [20] Je potřeba si říci, k čemu vlastně Taylorův polynom slouží. Dokáže aproximovat hodnoty funkce, která má v daném bodě derivaci. Jinak řečeno, pokud chceme aproximovat hodnotu $f(a)$ v bodě a , použitím Taylorova polynomu takovou hodnotu získáme. Taylorův polynom dává v určitém ϵ -okolí bodu často lepší aproximaci než rovnice tečny grafu funkce.

Věta 1.5.8 (L'Hospitalovo pravidlo). [15] Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a je splněna jedna z podmínek

- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty$.

Potom existuje-li $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, existuje také $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$, přičemž **platí**

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Poznámka. [5] Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

- definiční obor funkce f , průsečíky grafu s osami, symetrii (sudost, lichost, periodicitu),
- spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot,
- existenci derivace f' , monotonii funkce, lokální a globální extrémy,
- existenci f'' , konvexnost a konkávnost.

Pomocí získaných výsledků pak načrtneme graf funkce (pokud je funkce f „rozumná“).

Integrální počet

2.1 Neurčitý integrál

Definice 2.1.1 (Primitivní funkce). [4, 26] Nechť je funkce f definována v intervalu (a, b) za podmínky $-\infty \leq a < b \leq \infty$. **Primitivní funkcí** k funkci f v intervalu (a, b) pak nazveme funkci F , která splňuje podmínku

$$(\forall x \in (a, b)) (F'(x) = f(x)).$$

Poznámka. [4, 26] Předchozí Definice nám mimo jiné prozradila dvě důležitá fakta.

- Všimněme si, že jsme k definování primitivní funkce využili interval. Primitivní funkce není lokální pojem, a tak o ní bez udání intervalu nemá smysl vůbec hovořit.
- Z definice plyne, že primitivní funkce F má v každém bodě daného intervalu derivaci (Definice 1.4.1), a tudíž je i spojitá (Věta 1.4.1).

Příklad. Funkce $F(x) = 2x$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 2$ na každém intervalu (a, b) , platí totiž $F(x)' = f(x)$ pro všechna x .

Věta 2.1.1. [4, 26] Nechť je funkce F primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b) . Funkce G je pak primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b) tehdy a jen tehdy, když existuje taková konstanta $c \in \mathbb{R}$, že pro $\forall x \in (a, b)$ platí

$$G(x) = F(x) + C.$$

Poznámka. Vzhledem k tomu, že za konstantu C lze dosadit jakoukoliv hodnotu z oboru reálných čísel, každá funkce, pro kterou existuje primitivní funkce, má zároveň těchto primitivních funkcí nekonečně mnoho.

Definice 2.1.2. [4] Nechť existuje k funkci f primitivní funkce v intervalu (a, b) . Množinu všech primitivních funkcí k funkci f v intervalu (a, b) nazveme **neurčitým integrálem** a zapíšeme takto:

$$\int f(x) dx.$$

Poznámka (Terminologie). [4, 26] Jestliže najdeme k funkci f primitivní funkci F v intervalu (a, b) , obvykle zapíšeme rovnici takto:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

$\int$	operační symbol pro integrování
f	integrovaná funkce
x	integrační proměnná
dx	symbolické označení proměnné, podle které se integruje
C	integrační konstanta ($C \in \mathbb{R}$)

Úkolu určit $\int f(x) dx$ říkáme „integrovat f “, „vypočítat integrál z f “ či „najít primitivní funkci k funkci f “.

Věta 2.1.2. [26] Uvedme si důležitý fakt předtím, než vyřkneme postačující podmínku pro existenci primitivní funkce.

- Má-li funkce f derivaci na intervalu (a, b) , pak

$$\int f'(x) dx = f(x) + C, \quad x \in (a, b).$$

Poznámka. Je vidět, že se derivace a integrace funkce navzájem „vyruší“. Pokud funkci zderivujeme a pak tuto zderivovanou funkci budeme integrovat nebo pokud funkci zintegrujeme a pak tuto primitivní funkci zderivujeme, vyjde nám vždy původní funkce.

Po integraci funkce ve výsledku figuruje krom výsledné funkce i konstanta C . Pokud budeme „zpět“ derivovat tuto výslednou funkci, nezáleží na tom, jakou hodnotu bude konstanta C mít, protože podle Věty 1.4.5 víme, že $C' = 0$.

Věta 2.1.3 (Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce). [4, 26] Je-li funkce f **spojitá** na intervalu (a, b) , **má** funkce f v tomto intervalu **primitivní funkci**.

Stejně jako jsme si u derivace funkce uvedli techniky derivování, i integrování funkcí se řídí jistými pravidly.

Věta 2.1.4 (Techniky integrování). [26] Integrování funkcí se řídí těmito pravidly¹ (f a g jsou funkce):

1. **integrování k-násobku:**

$$\int (k \cdot f(x)) dx = k \cdot \int f(x) dx, \quad \text{kde } k \in \mathbb{R},$$

¹Je třeba si uvědomit, že pro součin a podíl integrování platí jiná pravidla než u derivace, k těm se v dalším textu ještě dostaneme.

2. integrování součtu:

$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx,$$

3. integrování rozdílu:

$$\int f(x) - g(x) \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx.$$

Věta 2.1.5 (Základní vzorce pro integrování). [4, 26] V předchozí Větě jsme si ukázali, jak integrovat funkce jako větší celky, v této se zaměříme na pravidla integrování pro jednotlivé dílčí funkce.

$f(x)$	$\int f(x) \, dx$	za podmínky
0	C	–
k	$kx + C$	$k \in \mathbb{R}$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{N} \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \leq -2 \\ x \in (0, \infty), \alpha \notin \mathbb{Z} \end{array} \right.$
e^x	$e^x + C$	$x \in \mathbb{R}$
c^x	$\frac{c^x}{\ln c} + C$	$x \in \mathbb{R}, c > 0, c \neq 1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$x \neq 0$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cotg x + C$	$x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tg x + C$	$x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	$x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctg(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

Tabulka 2: Základní vzorce pro integrování.

2.2 Metody výpočtu primitivní funkce

V této kapitole se zaměříme na dvě nejčastěji používané metody hledání primitivní funkce. **Metoda integrace per partes** (integrace po částech) je odvozena na základě vzorce pro derivaci součinu dvou funkcí (4. bod Věty 1.4.4). **Substituční metoda**

je založena na vzorci pro derivaci složené funkce (6. bod Věty 1.4.4).

2.2.1 Metoda per partes

Věta 2.2.1. [4] Necht mají funkce f a g derivaci v intervalu (a, b) , dále necht je funkce H primitivní funkcí k funkci $f \cdot g'$ v intervalu (a, b) . Funkce

$$f \cdot g - H$$

je pak v intervalu (a, b) primitivní funkcí k funkci $f' \cdot g$.
Obvykle metodu zapisujeme:

$$\int (f'g) = fg - \int (fg').$$

Důkaz. [26] Platnost $\int (f'g) = fg - \int (fg')$ si jednoduše můžeme ověřit. Derivace pravé strany rovnice je rovna integrované funkci $f'g$ na levé straně rovnice:

$$\left(fg - \int (fg')\right)' = (fg)' - \left(\int (fg')\right)' = f'g + fg' - (fg') = f'g.$$

Poznámka. Volba funkcí f' a g není nahodilá. Aby došlo ke správné volbě, je potřeba zkušenost s integrováním, která u „rutinního“ derivování není potřeba.

Příklad. Na příkladu $\int x \cdot \sin(x) dx$ si ukážeme, jak může být špatná volba funkcí kontraproduktivní.

$$\begin{aligned}\int x \cdot \sin(x) dx &= \left| \begin{array}{ll} u'(x) = x & u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v(x) = \sin(x) & v'(x) = \cos(x) \end{array} \right| \\ &= u(x) \cdot v(x) - \int (u(x) \cdot v'(x)) \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \sin(x) - \int \left(\frac{x^2}{2} \cdot \cos(x)\right) dx\end{aligned}$$

Při této volbě jsme se po prvním integrování nedostali k výsledku. Zkusme teď funkce volit jinak.

$$\begin{aligned}\int x \cdot \sin(x) dx &= \left| \begin{array}{ll} u'(x) = \sin(x) & u(x) = -\cos(x) \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{array} \right| \\ &= u(x) \cdot v(x) - \int (u(x) \cdot v'(x)) \\ &= -\cos(x) \cdot x - \int (-\cos(x) \cdot 1) dx \\ &= -x \cos(x) + \int \cos(x) dx \\ &= \underline{-x \cos(x) + \sin(x) + C}\end{aligned}$$

Můžeme vidět, že nám metoda per partes může pomoci, ale také přidělat práci.

2.2.2 Metoda substituční

Věta 2.2.2. [4] Necht pro funkce f a g platí:

- funkce f má primitivní funkci F v intervalu (a, b) ,
- funkce g má v intervalu (α, β) derivaci,
- $g(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ (tedy funkce g zobrazuje interval (α, β) do intervalu (a, b)).

Funkce $F(g(x))$ je pak v intervalu (α, β) primitivní funkcí k funkci $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Poznámka. Pro větu můžeme uvést alternativní vzorec:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt,$$

přičemž $t = g(x)$ a $dt = g'(x) dx$.

2.3 Určitý integrál a jeho vlastnosti

Věta 2.3.1 (Newtonova formule). [4] Necht funkce F je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a pro $\forall x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$. Potom definujeme Newtonův určitý integrál funkce f v mezích a, b (a nazýváme dolní mez, b nazýváme horní mez)

$$\int_a^b f =: [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Věta 2.3.2 (Multiplikativita integrálu). [29] Necht je funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a $k \in \mathbb{R}$. Pro Riemannův integrál funkce $k \cdot f$ potom platí:

$$\int_a^b (k \cdot f)(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Věta 2.3.3 (Aditivita integrálu). [29] Necht jsou funkce f a g spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pro Riemannův integrál funkce $f + g$ potom platí:

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Věta 2.3.4 (Nerovnost integrálů). [29] Necht jsou funkce f a g spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $f(x) \leq g(x)$ pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$. Pro jejich Riemannovy integrály potom platí:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

2.3.1 Metoda per partes pro určitý integrál

Věta 2.3.5. [4] Necht jsou funkce f a g spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$ a mají na intervalu (a, b) derivaci. Pokud existují integrály $\int_a^b f'g$ a $\int_a^b fg'$, platí

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

2.3.2 Metoda substituční pro určitý integrál

Věta 2.3.6. [4] Necht pro funkce f a g platí:

- funkce g je spojitá na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a má v intervalu (α, β) derivaci,
- funkce f je spojitá na intervalu $g\langle \alpha, \beta \rangle$.

Potom platí

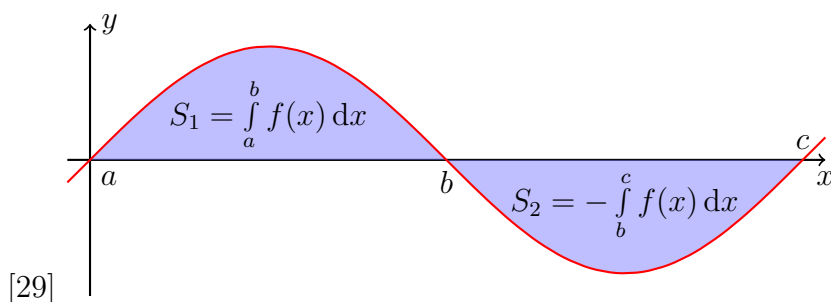
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t) dt$$

za předpokladu existence integrálu na levé straně rovnice, přičemž $t = g(x)$ a $dt = g'(x) dx$.

2.4 Aplikace integrálů

Než se dostaneme k samotným aplikacím a použití integrálů, podíváme se na některé zajímavé poznatky.

Poznámka. [29] Určitý integrál je interpretován jako obsah plochy, kterou ohraničuje graf funkce a osa x .



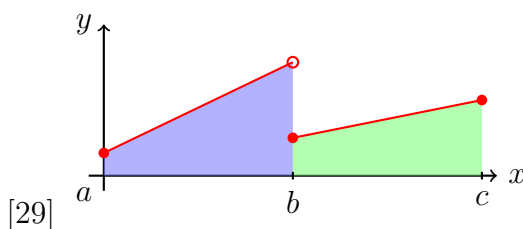
Obrázek 11: Obsah plochy ohraničující graf funkce a osa x .

Poznámka. [29] Pokud existuje funkce f , která není na intervalu $\langle a, c \rangle$ spojitá, a pokud existuje bod $b \in (a, c)$ takový, že

- je funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a (b, c) ,
- v bodě b existují jednostranné limity funkce f ,

definujeme

$$\int_a^c f(x) dx := \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Obrázek 12: Obsah plochy ohraničující nespojitá funkce, osa x a integrační meze.

Věta 2.4.1. [4] Uvažujme funkci f , která je na uvedených intervalech spojitá.

1. Pokud je funkce f na intervalu $\langle -a, a \rangle$ **sudá**, potom platí

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

2. Pokud je funkce f na intervalu $\langle -a, a \rangle$ **lichá**, potom platí

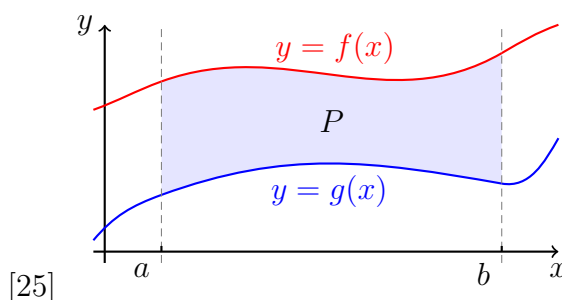
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

3. Pokud je funkce f na $\mathbb{R}$ **periodická** s periodou T , potom platí pro $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx.$$

Věta 2.4.2 (Plocha útvaru ohraničeného dvěma funkcemi). [25] Mějme dvě spojitě funkce f a g , pro něž pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(x) \geq g(x)$. Potom obsah plochy, která vznikne ohraničením přímkou $x = a$, $x = b$ a grafy funkcí f , g , je roven

$$S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|.$$



Obrázek 13: Obsah plochy mezi dvěma funkcemi.

Věta 2.4.3 (Objem rotačního tělesa). [25] Mějme funkci f , která je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom objem rotačního tělesa, který vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x , je roven

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2) dx.$$

Věta 2.4.4 (Délka grafu funkce). [25] Pokud má funkce f derivaci, **délkou grafu funkce f** označíme

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx.$$

Věta 2.4.5. [2] Mějme spojitou funkci f , která je modelem vyjadřujícím měnící se proměnnou v závislosti na čase $t \in \langle a, b \rangle$. Pokud chceme hodnoty $f(t)$ „nasčítat“ (tedy akumulovat), použijeme určitý integrál. **Akumulaci hodnot** tedy vypočteme podle vzorce:

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

Střední hodnota $f(t)$ se v období $\langle a, b \rangle$ vypočte

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \, dx.$$

Věta 2.4.6. [25] Mějme funkci f , která má na intervalu $\langle a, b \rangle$ derivaci. Právě derivaci $f'(t)$ interpretujeme jako **okamžitou změnu funkce f** v čase t . **Celkovou změnu funkce f** mezi okamžiky $t = a$ a $t = b$ reprezentuje integrál

$$\int_a^b f'(t) \, dt.$$

Poznámka. V předchozím textu jsme se zabývali integrálem **vlastním**, tzn. krajní body intervalu, na kterém byl určitý integrál počítán, měly konečnou hodnotu. Zobecnění, které zavedeme, připustí, aby tyto hodnoty mohly být i $\pm\infty$.

Definice 2.4.1. [2] Nechť má funkce f primitivní funkci na otevřeném intervalu. Za předpokladu, že uvedená limita existuje, definujeme pro a náležící do otevřeného intervalu

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) \, dx$$

a

$$\int_{-\infty}^a f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) \, dx.$$

Poznámka. [2] Jedná se o tzv. **nevlastní integrály**. Jestliže limita neexistuje nebo je rovna $\pm\infty$, řekneme, že integrál **diverguje**. V opačném případě řekneme, že integrál **konverguje**.

Věta 2.4.7. [2] Má-li funkce f primitivní funkci $F \in \mathbb{R}$, platí:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) \, dx + \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) \, dx.$$

Integrály lze využít i při určování konvergence/divergence číselné řady.

Věta 2.4.8 (Integrální kritérium). [22] Mějme kladnou číselnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takovou, že na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ existuje spojitá a monotónní funkce $f(n) = a_n$ pro $\forall n$. Potom platí, že pokud integrál

$$\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$$

konverguje, resp. **diverguje**, číselná řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

konverguje, resp. **diverguje**.

Sbírka řešených úloh

3.1 Řešené úlohy — diferenciální počet

Řešená úloha 3.1.1. Zderivujte funkce.

$$(a) \ y = x^3 - 5x + 9$$

$$(b) \ y = \sin(x) \cdot 2x$$

$$(c) \ y = \operatorname{tg}(\operatorname{cotg}(x))$$

$$(d) \ y = \sqrt[3]{x^2} + x\sqrt{1+x^3}$$

$$(e) \ y = \sqrt{x^2 \cdot \sqrt[3]{e^x}}$$

$$(f) \ y = \cos(\pi) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$(g) \ y = \ln(e^x \cdot \operatorname{tg}(x))$$

$$(h) \ y = \frac{4x \cdot \operatorname{cotg}(x)}{\sin(3x)}$$

$$(i) \ y = \frac{\log_{10} x}{\operatorname{tg}(x^2 + \frac{x}{2})}$$

Řešení:

(a)

$$y = x^3 - 5x + 9$$

$$y' = [x^3 - 5x + 9]' \tag{1}$$

$$= (x^3)' - (5x)' + (9)' \tag{2}$$

$$= 3 \cdot x^{3-1} - 5 + 0 \tag{3}$$

$$= \underline{3x^2 - 5} \tag{4}$$

Ve druhém kroku jsme si nejprve celou funkci rozdělili na dílčí výrazy. Ty jsme již v kroku (3) mohli zderivovat podle Tabulky 1. Konkrétně jsme využili vzorec pro derivaci x^n , k -násobku a konstanty.

Maple

```
diff(x^3-5*x+9,x);
```

(b)

$$y = \sin(x) \cdot 2x$$
$$y' = [\sin(x) \cdot 2x]' \quad (1)$$

$$= (\sin(x))' \cdot 2x + \sin(x) \cdot (2x)' \quad (2)$$

$$= \cos(x) \cdot 2x + \sin(x) \cdot 2 \quad (3)$$

$$= \underline{2(\sin(x) + x \cos(x))} \quad (4)$$

Ve druhém kroku jsme využili vzorec pro derivaci součinu dvou funkcí, přičemž jednou funkcí byla funkce $f(x) = \sin(x)$, druhou funkce $g(x) = 2x$. Ve třetím kroku bylo potřeba zderivovat funkci f , její zderivovanou funkcí je $f'(x) = \cos(x)$, funkci g jsme zderivovali na konstantní funkci $g'(x) = 2$. Krok (4) nám přinesl už jen finální úpravu výsledku.

(c)

$$y = \operatorname{tg}(\cotg(x))$$
$$y' = [\operatorname{tg}(\cotg(x))]' \quad (1)$$

$$= \frac{1}{\cos^2(\cotg(x))} \cdot (\cotg(x))' \quad (2)$$

$$= \underline{\frac{1}{\cos^2(\cotg(x))} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2(x)}\right)} \quad (3)$$

Ve druhém kroku jsme zderivovali složenou funkci $f(g(x))$ podle vzorce $\operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, vnitřní funkcí je v našem případě funkce $g(x) = \cotg(x)$. V kroku třetím zbylo zderivovat už jen funkci g .

(d)

$$y = \sqrt[3]{x^2} + x\sqrt{1+x^3}$$
$$y' = [\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt{1+x^3}]' \quad (1)$$

$$= (\sqrt[3]{x^2})' + (x\sqrt{1+x^3})' \quad (2)$$

$$= (x^{\frac{2}{3}})' + \left(x' \cdot (1+x^3)^{\frac{1}{2}} + x \cdot ((1+x^3)^{\frac{1}{2}})'\right) \quad (3)$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}\right) + 1 \cdot (1+x^3)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (1+x^3)^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot (1+x^3)' \quad (4)$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) + \sqrt{1+x^3} + \left(\frac{x}{2\sqrt{1+x^3}}\right) \cdot (3x^2) \quad (5)$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \sqrt{1+x^3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^3)}} \quad (6)$$

V druhém kroku jsme si funkci rozdělili podle vzorce pro derivaci součtu funkcí. V kroku třetím jsme použili vzorec pro derivaci součinu funkcí. Ve čtvrtém kroku jsme využili vzorec pro derivaci složené funkce. V pátém a šestém kroku jde již pouze o finální úpravy s výjimkou jednodušší derivace funkce $1+x^3$.

(e)

$$y = \sqrt{x^2 \cdot \sqrt[3]{e^x}}$$

$$y' = \left[\sqrt{x^2 \cdot \sqrt[3]{e^x}} \right]' \quad (1)$$

$$= \left(\left(x^2 \cdot (e^x)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)' \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 \cdot (e^x)^{\frac{1}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(x^2 \cdot (e^x)^{\frac{1}{3}} \right)' \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 \cdot (e^x)^{\frac{1}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left((x^2)' \cdot (e^x)^{\frac{1}{3}} + x^2 \cdot \left((e^x)^{\frac{1}{3}} \right)' \right) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 \cdot (e^x)^{\frac{1}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(2x \cdot (e^x)^{\frac{1}{3}} + x^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (e^x)^{-\frac{2}{3}} \cdot e^x \right) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 \cdot \sqrt[3]{e^x}}} \cdot \left[2x\sqrt[3]{e^x} + \frac{x^2 \cdot e^x}{3\sqrt[3]{(e^x)^2}} \right] \quad (6)$$

Ve druhém kroku jsme odmocniny „převodili“ do tvaru mocniny. Ve třetím kroku jsme využili vzorec pro derivaci mocniny x a také vzorec pro derivaci složené funkce $f(g(x))$. V kroku čtvrtém jsme použili vzorec pro derivaci součinu funkcí. V pátém kroku jsme provedli potřebné derivace a v kroku šestém můžeme vidět zderivovanou původní funkci.

(f) Pojdme si ukázat dva způsoby řešení. Nejdříve využijeme vzorce pro derivaci součinu funkcí, poté se podíváme na mnohem jednodušší postup.

$$y = \cos(\pi) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$y' = \left[\cos(\pi) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right]' \quad (1)$$

$$= \left(\cos(\pi) \right)' \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \cos(\pi) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)' \quad (2)$$

$$= \left(\cos(\pi) \right)' \cdot x^{-\frac{1}{3}} + \cos(\pi) \cdot \left(x^{-\frac{1}{3}} \right)' \quad (3)$$

$$= \left(-\sin(\pi) \right) \cdot x^{-\frac{1}{3}} + \cos(\pi) \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}-1} \right) \quad (4)$$

$$= \left(-\sin(\pi) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \cos(\pi) \cdot \left(-\frac{x^{-\frac{4}{3}}}{3} \right) \quad (5)$$

$$= -\frac{\sin(\pi)}{\sqrt[3]{x}} - \frac{\cos(\pi)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (6)$$

$$= -\frac{0}{\sqrt[3]{x}} - \frac{-1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} \quad (8)$$

Jako v předchozím případě jsme použili ve druhém kroku vzorec pro derivaci součinu dvou funkcí. V kroku (3), (5) a (6) jsme výraz pouze upravovali, přičemž ve třetím kroku jsme si „šikovně“ výraz $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ upravili na výraz $x^{-\frac{1}{3}}$, abychom následně mohli použít vzorec pro derivaci $y = x^n$. V kroku čtvrtém jsme zderivovali funkci $f(x) = \cos(\pi)$ na $f'(x) = -\sin(\pi)$ a $g(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ na $g'(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}-1}$. Protože jsme v sedmém kroku získali konstanty v čitatelích zlomků, mohli jsme výraz dále upravit. Konkrétně $\sin(\pi) = 0$ a $\cos(\pi) = -1$. K výsledku se dopracujeme i tak, že funkci $f(x) = \cos(\pi)$ budeme brát ihned jako konstantu (a je to i způsob jednodušší).

$$\begin{aligned} y &= \cos(\pi) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \\ y' &= \cos(\pi) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right]' \\ &= -1 \cdot \left[x^{-\frac{1}{3}} \right]' \\ &= -1 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) (x^{-\frac{4}{3}}) \\ &= -1 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} \right) \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} \end{aligned}$$

(g) Opět si ukážeme dva různé postupy řešení.

$$\begin{aligned} y &= \ln(e^x \cdot \operatorname{tg}(x)) \\ y' &= \left[\ln(e^x \cdot \operatorname{tg}(x)) \right]' \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{e^x \cdot \operatorname{tg}(x)} \cdot \left[(e^x \cdot \operatorname{tg}(x)) \right]' \quad (2)$$

$$= \frac{1}{e^x \cdot \operatorname{tg}(x)} \cdot ((e^x)' \cdot \operatorname{tg}(x) + e^x \cdot \operatorname{tg}(x)') \quad (3)$$

$$= \frac{1}{e^x \cdot \operatorname{tg}(x)} \cdot \left(e^x \cdot \operatorname{tg}(x) + e^x \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} \right) \quad (4)$$

$$= \frac{e^x \cdot \operatorname{tg}(x)}{e^x \cdot \operatorname{tg}(x)} + \frac{e^x}{e^x \cdot \operatorname{tg}(x) \cdot \cos^2(x)} \quad (5)$$

$$= 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} \quad (6)$$

Ve druhém kroku jsme použili vzorec pro derivaci složené funkce. Funkce $f(g(x)) = \ln(e^x \cdot \operatorname{tg}(x))$ obsahuje vnější funkci f a vnitřní $g(x) = e^x \cdot \operatorname{tg}(x)$. Nejdříve jsme tedy zderivovali funkci f podle vzorce pro derivaci funkce $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, v našem případě $f'(x) = \frac{1}{e^x \cdot \operatorname{tg}(x)}$. Podle vzorce pro derivaci složené funkce dále následuje součin s derivací funkce g . Na tu jsme ve třetím kroku aplikovali vzorec pro derivaci součinu funkcí. Ve čtvrtém kroku došlo k derivaci, v pátém k roznásobení závorky, krok (6) přinesl „pokračení“ zlomku a finální výsledek. Dalším způsobem je využití vzorce pro logaritmus.

$$\begin{aligned} y &= \ln(e^x \cdot \operatorname{tg}(x)) \\ y' &= \left[\ln(e^x \cdot \operatorname{tg}(x)) \right]' \\ &= \left[\ln(e^x) + \ln(\operatorname{tg}(x)) \right]' \\ &= (\ln(e^x))' + (\ln(\operatorname{tg}(x)))' \\ &= \frac{1}{e^x} \cdot e^x + \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} \\ &= 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned} y &= \frac{4x \cdot \cotg(x)}{\sin(3x)} \\ y' &= \left[\frac{4x \cdot \cotg(x)}{\sin(3x)} \right]' \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \frac{(4x \cdot \cotg(x))' \cdot \sin(3x) - 4x \cdot \cotg(x) \cdot (\sin(3x))'}{\sin^2(3x)} \quad (2)$$

$$(4x \cdot \cotg(x))' = (4x)' \cdot \cotg(x) + 4x \cdot (\cotg(x))' \quad (3)$$

$$= \frac{\left(4 \cotg(x) - \frac{4x}{\sin^2(x)}\right) \cdot \sin(3x) - 4x \cotg(x) \cdot (3 \cos(3x))}{\sin^2(3x)} \quad (4)$$

Ve druhém kroku jsme podle vzorce pro derivace podílu dvou funkcí celý výraz zderivovali. Jednou z funkcí je funkce v čitateli, druhou funkcí je funkce ve jmenovateli. Dále už zbývá zderivovat funkci $h(x) = 4x \cdot \cotg(x)$, jejíž derivace je rozepsána ve třetím kroku pomocí vzorce pro součin dvou funkcí. Ve čtvrtém kroku jsme výraz ze třetího kroku zderivovali, stejně jako složenou funkci $f(g(x)) = \sin(3x)$, její derivace je rovna výrazu $f'(g(x)) = 3 \cdot \cos(3x)$. Výraz samozřejmě můžeme dále upravovat, nám ale bude postačovat tento.

(i)

$$y = \frac{\log_{10} x}{\operatorname{tg}\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)}$$
$$y' = \left[\frac{\log_{10} x}{\operatorname{tg}\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)} \right]' \quad (1)$$

$$= \frac{(\log_{10} x)' \cdot \operatorname{tg}\left(x^2 + \frac{x}{2}\right) - \log_{10} x \cdot \left(\operatorname{tg}\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)\right)'}{\left(\operatorname{tg}\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)\right)^2} \quad (2)$$

$$= \frac{\left(\frac{\operatorname{tg}\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)}{x \cdot \ln 10}\right) - \log_{10} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)} \cdot \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)'\right)}{\left(\operatorname{tg}\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)\right)^2} \quad (3)$$

$$= \frac{\left(\frac{\operatorname{tg}\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)}{x \cdot \ln 10}\right) - \log_{10} x \cdot \left(\frac{2x + \frac{1}{2}}{\cos^2\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)}\right)}{\left(\operatorname{tg}\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)\right)^2} \quad (4)$$

V druhém kroku jsme využili vzorec pro derivaci podílu dvou funkcí. Ve třetím kroku jsme dospěli k tomu, že $f'(x) = (\log_{10} x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 10}$. Ve čtvrtém kroku vidíme derivaci původní funkce.

Řešená úloha 3.1.2. Vypočtěte velikost úhlu, který svírá v bodě $a = -2$ tečna grafu funkce $y = \cos(x) \cdot e^{-\frac{5}{2}x}$ s osou x .

Řešení:

Zadanou funkci nejprve zderivujeme. Využijeme přitom vzorec pro derivaci součinu funkcí a složené funkce.

$$y = \cos(x) \cdot e^{-\frac{5}{2}x}$$
$$y' = \left[\cos(x) \cdot e^{-\frac{5}{2}x} \right]'$$
$$= \cos(x)' \cdot e^{-\frac{5}{2}x} + \cos(x) \cdot \left(e^{-\frac{5}{2}x}\right)'$$
$$= -\sin(x) \cdot e^{-\frac{5}{2}x} + \cos(x) \cdot e^{-\frac{5}{2}x} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)'$$
$$= -\sin(x) \cdot e^{-\frac{5}{2}x} - \frac{5}{2} \cdot \cos(x) \cdot e^{-\frac{5}{2}x}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{e^{5x}}} \cdot \left(\sin(x) + \frac{5}{2} \cdot \cos(x)\right)$$
$$= -\frac{\sin(x) + \frac{5}{2} \cdot \cos(x)}{\sqrt{e^{5x}}}$$

Vzpomeňme si na Větu 1.4.2, kde $\operatorname{tg}(\alpha) = f'(a) = y'(a)$. Dalším krokem tedy bude vypočtení hodnoty $f'(a)$.

$$\begin{aligned}
 y'(-2) &= -\frac{\sin(-2) + \frac{5}{2} \cdot \cos(-2)}{\sqrt{e^{5 \cdot (-2)}}} \\
 &\doteq 289.365
 \end{aligned}$$

$\operatorname{tg}(\alpha) = 289.365$, teď už zývá jen vypočtení hodnoty α .

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\alpha) &= 289.365 \\
 \alpha &= \operatorname{arctg}(289.365) \\
 &\doteq \underline{89.85^\circ}
 \end{aligned}$$

Úhel, který svírá v bodě $a = -2$ tečna grafu funkce $y = \cos(x) \cdot e^{-\frac{5}{2}x}$ s osou x , je 89.85° .

Maple

```

tg_alfa:=fdiff(cos(x)*exp(-5*x/2), x=-2);
arctan(tg_alfa);
evalf(convert(%, degrees));

```

Řešená úloha 3.1.3. Najděte stacionární body funkce $f(x) = e^{x^5+4x^3+2}$.

Řešení:

Pro nalezení stacionárních bodů použijeme rovnici $f'(x) = y' = 0$.

$$\begin{aligned}
 y' &= (e^{x^5+4x^3+2})' \\
 &= (e^{x^5+4x^3+2}) \cdot (x^5 + 4x^3 + 2)' \\
 &= (e^{x^5+4x^3+2}) \cdot (5x^4 + 12x^2)
 \end{aligned}$$

Výraz $e^{x^5+4x^3+2}$ bude vždy kladný díky kladné konstantě e , zbývá tedy vyšetřit výraz $5x^4 + 12x^2$.

$$\begin{aligned}
 5x^4 + 12x^2 &= 0 \\
 x^2 \cdot (5x^2 + 12) &= 0
 \end{aligned}$$

Dále abychom zjistili nulové body, musí platit

$$x^2 = 0 \quad \vee \quad 5x^2 + 12 = 0.$$

Z první rovnice vyplývá, že prvním stacionárním bodem je 0, druhá rovnice nemá řešení, protože $5x^2 \neq -12$ pro žádné x .

Jediným stacionárním bodem je tedy bod $x_1 = 0$.

Maple

```
f:= x -> e^(x^5+4*x^3+2);
df:= diff(f(x), x);
solve(df, x);
```

Řešená úloha 3.1.4. Najděte derivaci třetího řádu funkce $y = 12x^4 + x \cdot (-\cos(2x)) + \frac{1}{x}$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(12x^4 + x \cdot (-\cos(2x)) + \frac{1}{x} \right)' \\
 &= 48x^3 + \left(x' \cdot (-\cos(2x)) + x \cdot (-\cos(2x))' \right) + (x^{-1})' \\
 &= 48x^3 + \left(-\cos(2x) + x \cdot (2 \cdot \sin(2x)) \right) - x^{-2} \\
 &= 48x^3 - \cos(2x) + 2x \sin(2x) - x^{-2} \\
 y'' &= (48x^3)' - (\cos(2x))' + (2x \sin(2x))' - (x^{-2})' \\
 &= 144x^2 + 2 \sin(2x) + (2x)' \cdot \sin(2x) + 2x \cdot (\sin(2x))' + 2x^{-3} \\
 &= 144x^2 + 2 \sin(2x) + 2 \sin(2x) + 4x \cos(2x) + 2x^{-3} \\
 &= 144x^2 + 4 \sin(2x) + 4x \cos(2x) + 2x^{-3} \\
 y''' &= (144x^2)' + (4 \sin(2x))' + (4x \cos(2x))' + (2x^{-3})' \\
 &= 288x + 8 \cos(2x) + ((4x)' \cdot \cos(2x) + 4x \cdot (\cos(2x))') - 6x^{-4} \\
 &= 288x + 8 \cos(2x) + 4 \cos(2x) - 8x \cdot \sin(2x) - 6x^{-4} \\
 &= \underline{288x + 12 \cos(2x) - 8x \sin(2x) - 6x^{-4}}
 \end{aligned}$$

Maple

```
f:= x -> 12*x^4+x*(-cos(2*x))+(1/x);
diff(f(x), x$3);
```

Řešená úloha 3.1.5. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Řešení:

Nejprve se podíváme, jak je to s definičním oborem funkce.

Protože se nachází ve funkčním předpisu funkce zlomek, ve jmenovateli nesmí být 0. Tedy

$$x^2 - 1 \neq 0.$$

Platí

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \pm 1.$$

Maple

```
f:=x->x^3/(x^2-1);
body_nespojitosti:=solve(denom(f(x))=0,x);
```

V bodech $x = \pm 1$, které nám indikují nespojitost funkce, zjistíme, jak se „chová“ zadaná funkce.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= \frac{-1}{0_+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= \frac{-1}{0_-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= \frac{1}{0_-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= \frac{1}{0_+} = +\infty\end{aligned}$$

```
Limit(f(x), x=-1, left):%=value(%);
Limit(f(x), x=-1, right):%=value(%);
Limit(f(x), x=1, left):%=value(%);
Limit(f(x), x=1, right):%=value(%);
```

Zjistíme také limity v nevlastních bodech. Využijeme L'Hospitalova pravidla.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^3)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2} = +\infty\end{aligned}$$

```
Limit(f(x), x=-infinity):%=value(%);
Limit(f(x), x=infinity):%=value(%);
```

Dále si můžeme všimnout, že je funkce f lichá, jelikož pro $\forall x \in D_f$ platí

$$\begin{aligned}f(-x) &= \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} \\ &= -\frac{x^3}{x^2 - 1} \\ f(-x) &= -f(x)\end{aligned}$$

```
f(-x);  
-f(x);
```

Zjistíme průsečíky grafu funkce s osami.

$$\begin{aligned}x &= 0 \\ \frac{0^3}{0^2 - 1} &= 0 \\ \Rightarrow y &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ \frac{x^3}{x^2 - 1} &= 0 \\ x^3 &= 0 \\ \Rightarrow x &= 0\end{aligned}$$

```
prusecik_s_osou_y:=f(0);  
prusecik_s_osou_x:=solve(f(x)=0);
```

Na jakých intervalech funkce nabývá kladných/záporných hodnot, to zjistíme dosazením čísla z daného intervalu do funkce. Intervaly získáme pomocí bodů nespojitosti a průsečíků s osou x .

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
	-	+	-	+

```
zaporne_hodnoty_na_intervalech:=solve(f(x)<0,x);  
kladne_hodnoty_na_intervalech:=solve(f(x)>0,x);
```

Pomocí derivace zjistíme monotonii a konvexnost/konkávnost funkce.

$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right)' \\ &= \frac{(x^3)' \cdot (x^2 - 1) + x^3 \cdot (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 1) + x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 \cdot (x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}, \quad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}\end{aligned}$$

$$\frac{x^2 \cdot (x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0$$

$$x^2 \cdot (x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{3}, \quad x_3 = -\sqrt{3}$$

x_1, x_2 a x_3 jsou stacionární body funkce. Pomocí nich a bodů nespojitosti opět rozdělíme definiční obor na intervaly a zjistíme lokální extrémy.

```
df:=diff(f(x),x);
stacionarni_body:=solve(df,x);
```

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Z tabulky můžeme zjistit, na kterých intervalech je funkce klesající/rostoucí. Tak např. pokud chceme zjistit monotonii pro interval $(0, 1)$, z tohoto intervalu dosadíme jednu hodnotu do první derivace funkce.

$$y' = \frac{x^2 \cdot (x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$x = 0.5$$

$$\frac{0.5^2 \cdot (0.5^2 - 3)}{(0.5^2 - 1)^2} = -\frac{11}{9}$$

$$-\frac{11}{9} < 0 \Rightarrow \text{na intervalu } (0, 1) \text{ je funkce klesající}$$

Z tabulky můžeme rovněž vyčíst, v jakých bodech nabývá funkce lokálních extrémů. V bodě $x = -\sqrt{3}$ má funkce lokální maximum, v bodě $x = \sqrt{3}$ lokální minimum.

```
klesajici_na_intervalech:=solve(df<0,x);
stoupajici_na_intervalech:=solve(df>0,x);
```

Dalším krokem ve vyšetřování průběhu funkce je zjištění konvexnosti/konkávnosti funkce na jednotlivých intervalech. K tomu nejdříve spočítáme inflexní body.

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{x^2 \cdot (x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} \right)' \\ &= \left(\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} \right)' \\ &= \left((x^4 - 3x^2) \cdot \frac{1}{(x^2 - 1)^2} \right)' \\ &= (x^4 - 3x^2)' \cdot (x^2 - 1)^{-2} + (x^4 - 3x^2) \cdot ((x^2 - 1)^{-2})' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^2} + (x^4 - 3x^2) \cdot (-2 \cdot (x^2 - 1)^{-3} \cdot 2x) \\
&= \frac{4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^2} - \frac{4x(x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^3}, \quad D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}
\end{aligned}$$

$$\frac{4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^2} - \frac{4x(x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

```
dff:=diff(df,x);
dff:=normal(%);
inflexni_bod:=solve(dff,x);
```

Po dalších úpravách rovnice jsme dospěli k tomu, že jediným inflexním bodem je bod $x_1 = 0$. Ke zjištění konvexnosti/konkávnosti funkce na různých intervalech si definiční obor opět rozdělíme podle bodů nespojitosti a inflexního bodu.

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Například jsme tedy zjistili, že je funkce na intervalu $(-\infty, -1)$ konkávní. Podívejme se, jak jsme k tomu došli. Z tohoto intervalu dosadíme libovolnou hodnotu do druhé derivace funkce. Podle znaménka poznáme, zda se jedná o konvexnost či konkávnost.

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^2} - \frac{4x(x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^3} \\
x &= -5 \\
&\frac{4 \cdot (-5)^3 - 6 \cdot (-5)}{((-5)^2 - 1)^2} \\
&-\frac{4 \cdot (-5) \cdot ((-5)^4 - 3 \cdot (-5)^2)}{((-5)^2 - 1)^3} = -\frac{35}{1728} \\
&-\frac{35}{1728} < 0 \Rightarrow \text{na intervalu } (-\infty, -1) \text{ je funkce konkávní}
\end{aligned}$$

```
konkavni_na_intervalech:=solve(dff<0,x);
konvexni_na_intervalech:=solve(dff>0,x);
```

Z limit vypočítaných na začátku řešení plyne, že funkce má dvě vertikální asymptoty bez směrnice, a to $x = -1$ a $x = 1$. Zkusme najít asymptoty se směrnicí. Připomeňme, že asymptota se směrnicí má tvar $y = kx + q$.

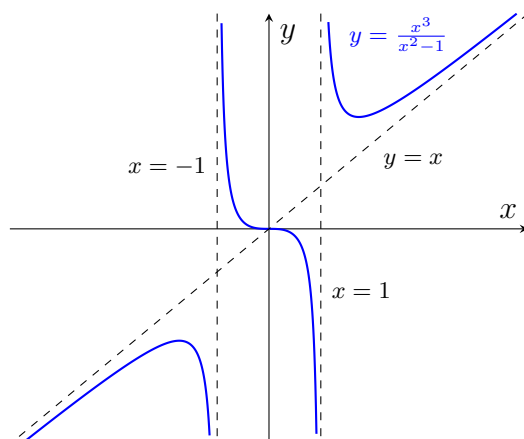
$$\begin{aligned}k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-0} \\&= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - 1 \cdot x \right) \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{x^2-1} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{0}{1-0} \right) \\&= 0\end{aligned}$$

```
k1:=limit ( f(x)/x,x=-infinity );  
q1:=limit ( f(x)-k1*x,x=-infinity );  
k2:=limit ( f(x)/x,x=infinity );  
q2:=limit ( f(x)-k2*x,x=infinity );
```

Zjistili jsme, že kromě dvou asymptot bez směrnice můžeme nalézt v grafu funkce i asymptotu se směrnicí ve tvaru $y = 1 \cdot x + 0 = x$.

Nyní již můžeme funkci nakreslit.

Obrázek 14: Funkce $\frac{x^3}{x^2-1}$.

```
with(plots, display):
g1:=plot(f(x), x=-5..5, y=-5..5, discont=true):
g2:=plot(x, x=-5..5, y=-5..5, linestyle=3):
g3:=plot([-1, t, t=-infinity..infinity], y=-5..5):
g4:=plot([1, t, t=-infinity..infinity], y=-5..5):
display([g1, g2, g3, g4], axesfont=[TIMES, ROMAN, 10]);
```

Řešená úloha 3.1.6. Nalezněte Taylorův polynom stupně 2 v bodě $a = 5$ funkce $y = \sqrt{x^4 - 1}$.

Řešení:

Protože je potřeba najít Taylorův polynom stupně 2, provedeme postupně první a druhou derivaci zadané funkce.

$$\begin{aligned}
 y' &= (\sqrt{x^4 - 1})' \\
 &= ((x^4 - 1)^{\frac{1}{2}})' \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (x^4 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^4 - 1)' \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (x^4 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x^3 \\
 &= 2x^3 \cdot (x^4 - 1)^{-\frac{1}{2}} \\
 y'' &= (2x^3 \cdot (x^4 - 1)^{-\frac{1}{2}})' \\
 &= (2x^3)' \cdot (x^4 - 1)^{-\frac{1}{2}} + 2x^3 \cdot ((x^4 - 1)^{-\frac{1}{2}})' \\
 &= 6x^2 \cdot (x^4 - 1)^{-\frac{1}{2}} - 4x^6 \cdot (x^4 - 1)^{-\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

Funkci jsme dvakrát zderivovali, zbývá sestavit Taylorův polynom podle vzorce

$$T(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n.$$

V našem případě bude vypadat vzorec takto:

$$T(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x - a)^2.$$

$$\begin{aligned} f(a) &= \sqrt{5^4 - 1} \\ &= 4\sqrt{39} \\ f'(a) &= 2 \cdot 5^3 \cdot (5^4 - 1)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{125\sqrt{39}}{78} \\ f''(a) &= 6^2 \cdot 5 \cdot (5^4 - 1)^{-\frac{1}{2}} - 4 \cdot 5^6 \cdot (5^4 - 1)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{7775\sqrt{39}}{24336} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(x) &= 4\sqrt{39} + \frac{\frac{125\sqrt{39}}{78}}{1!} \cdot (x - 5) + \frac{\frac{7775\sqrt{39}}{24336}}{2!} \cdot (x - 5)^2 \\ &= \underline{4\sqrt{39} + \frac{125\sqrt{39}}{39} \cdot (x - 5) + \frac{7775\sqrt{39}}{48672} \cdot (x - 5)^2} \end{aligned}$$

Maple

```
T(x):=taylor(sqrt(x^4-1),x=5,3);
```

Řešená úloha 3.1.7. Josef si chce na zahradě postavit bazén se čtvercovou podstavou, poté ho bude chtít naplnit vodou, přičemž počítá se spotřebou 500 hektolitrů vody. Navíc přemýšlí, jak by ušetřil na barvě, kterou bude (zevnitř) bazén natírat. Vypočtete rozměry bazénu tak, aby Josef použil co nejméně barvy na jeho natření.

Řešení:

Bazén má čtvercové dno o straně x , jeho hloubka má velikost h . Pro plochu P , kterou bude Josef natírat, platí

$$P = x^2 + 4x \cdot h.$$

Proměnnou h můžeme vypočítat ze vzorce pro objem bazénu. Pro ten platí

$$V = x^2 \cdot h,$$

tzn.

$$h = \frac{V}{x^2},$$

přičemž

$$V = 500 \text{ hl} = 50000 \text{ l} = 50 \text{ m}^3,$$

tedy

$$h = \frac{50}{x^2}.$$

Dále hledáme lokální minimum funkce P .

$$\begin{aligned}P &= x^2 + 4x \cdot \frac{50}{x^2} \\P'(x) &= \left(x^2 + 4x \cdot \frac{50}{x^2}\right)' \\&= \left(x^2 + \frac{200}{x}\right)' \\&= \left(x^2 + 200x^{-1}\right)' \\&= 2x - \frac{200}{x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P'(x) &= 0 \\2x - \frac{200}{x^2} &= 0 \\2x^3 - 200 &= 0 \\x^3 &= 100 \\x &= \sqrt[3]{100} \doteq 4.64 \text{ metru}\end{aligned}$$

Ještě ověříme, zda je tato hodnota skutečně lokálním minimem funkce P .

$$\begin{aligned}P''(x) &= \left(2x - \frac{200}{x^2}\right)' \\&= 2 + 2 \cdot \frac{200}{x^3} \\&= 2 + \frac{400}{4.64^3} \doteq 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{hodnota } 4.64 \text{ je lokálním minimem}\end{aligned}$$

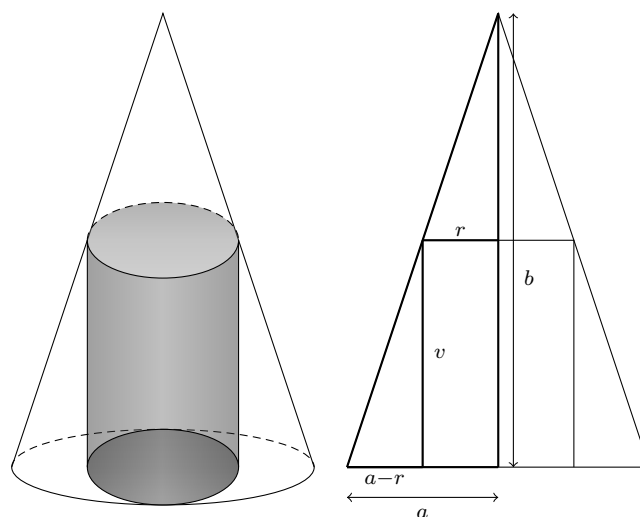
Rozměr dna bazénu tedy bude cca 4.64 metru.

Hloubka bazénu bude $h = \frac{50}{x^2} = \frac{50}{4.64^2} \doteq 2.32$ metru.

Maple

```
df:=diff(x^2+4*x*(50/x^2),x);
rozmer:=evalf(solve(df=0,x));
hloubka:=50/4.64^2;
```

Řešená úloha 3.1.8. [1] Do rotačního kužele s poloměrem a a výškou b je vepsán rotační válec s poloměrem r a výškou v . Jaký je objem největšího rotačního válce, který může být vepsán do rotačního kužele?



(a) 3D pohled

(b) Pohled ze strany

Obrázek 15: Rotační válec vepsaný do rotačního kužele.

Řešení:

Objem rotačního válce zapíšeme jako:

$$V = \pi r^2 v.$$

Musíme zjistit, jak vhodně zvolit hodnoty r a v tak, abychom maximalizovali V . Bohužel je objem limitován rozměry rotačního kužele. Jak přesně, to nám ukazuje následující rovnice. Využijeme podobnosti trojúhelníků.

$$\begin{aligned} \frac{a-r}{v} &= \frac{a}{b} \\ v &= \frac{b(a-r)}{a} \end{aligned}$$

Následně v dosadíme do rovnice objemu.

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 \cdot \frac{b(a-r)}{a} \\ &= \frac{\pi b}{a} (ar^2 - r^3) \end{aligned}$$

Tímto krokem jsme se šikovně zbavili jedné nezávislé proměnné a v maximalizační funkci máme už jen jednu. Pomocí první derivace najdeme lokální extrém.

$$\begin{aligned} V' &= \left(\frac{\pi b}{a} (ar^2 - r^3) \right)' \\ &= \frac{\pi b}{a} (2ar - 3r^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi b}{a}(2ar - 3r^2) &= 0 \\ \frac{\pi b}{a}(2a - 3r) \cdot r &= 0 \Rightarrow \\ (2a - 3r) \cdot r &= 0\end{aligned}$$

Hodnota r musí být nenulová, takže dále hledáme takové r , kde platí

$$\begin{aligned}2a - 3r &= 0 \\ r &= \frac{2}{3}a\end{aligned}$$

Zjistili jsme, že aby byl objem rotačního válce co největší, jeho poloměr musí mít dvoutřetinovou délku poloměru rotačního kužele. Ze vzorce po dosazení r

$$v = \frac{b(a - \frac{2}{3}a)}{a} = \frac{1}{3}b$$

dále vyplývá, že rotační válec o poloměru $\frac{2}{3}a$ bude mít výšku $\frac{1}{3}b$. Získané hodnoty dosadíme do vzorce pro objem rotačního válce.

$$\begin{aligned}V &= \pi r^2 v \\ &= \pi \left(\frac{2}{3} \cdot a\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot b \\ &= \underline{\underline{\frac{4}{27}\pi a^2 b}}\end{aligned}$$

Objem největšího rotačního válce, který může být vepsán do rotačního kužele, je roven $\frac{4}{27}\pi a^2 b$.

Řešená úloha 3.1.9. Vojenská helikoptéra, která je přivolána do akce, se přímočaře pohybuje ze základny do místa s vojenským cílem. Vzdálenost v kilometrech, kterou urazí za daný čas, je dána vztahem

$$s(t) = 1200(t^4 - 2t^3 + t^2),$$

přičemž proměnná $t \in \langle 0, 0.5 \rangle$ představuje čas v hodinách. Vypočítejte vzdálenost helikoptéry od základny a její okamžitou rychlost po 24 minutách letu.

Řešení:

Nejprve je potřeba převést minuty na hodiny, neboť t je proměnná s jednotkou hodiny. Víme, že 24 minut je $\frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0.4$ hodiny.

Zadaný čas dosadíme do funkce.

$$\begin{aligned} s(t) &= 1200(t^4 - 2t^3 + t^2) \\ &= 1200(0.4^4 - 2 \cdot 0.4^3 + 0.4^2) \\ &= \underline{69.12 \text{ km/h}} \end{aligned}$$

Okamžitou rychlost zjistíme podle první derivace funkce.

Zadaný čas dosadíme do zderivované funkce s .

$$\begin{aligned} s'(t) &= (1200(t^4 - 2t^3 + t^2))' \\ &= 1200(4t^3 - 6t^2 + 2t) \end{aligned}$$

$$1200(4 \cdot 0.4^3 - 6 \cdot 0.4^2 + 2 \cdot 0.4) = \underline{115.2 \text{ km/h}}$$

Po 24 minutách letu je helikoptéra od základny vzdálena 69.12 km a letí rychlostí 115.2 km/h.

Maple

```
s(t):=(1200*(0.4^4-2*0.4^3+0.4^2));  
okamzita_rychlost:=diff(1200*(t^4-2*t^3+t^2),t=0.4);
```

Řešená úloha 3.1.10. Na zahradní stůl byla postavena sklenice s vodou, která se začala ihned odpařovat. Odpařování vody je popsáno funkcí

$$o(t) = 5(-t^2 + e^t - 1),$$

přičemž o je množství odpařené vody v ml a proměnná $t \in \langle 0, 4 \rangle$ představuje čas v hodinách. Vypočítejte množství odpařené vody a okamžitou rychlost odpařování po 2.5 hodinách.

Řešení:

Množství odpařené vody spočteme dosazením hodnoty 2.5 do zadané funkce.

$$\begin{aligned} o(t) &= 5(-t^2 + e^t - 1) \\ &= 5(-(2.5)^2 + e^{2.5} - 1) \\ &= \underline{24.66 \text{ ml}} \end{aligned}$$

Okamžitou rychlost odpařování zjistíme podle první derivace funkce. Zadaný čas dosadíme do zderivované funkce o .

$$\begin{aligned}o'(t) &= \left(5(-t^2 + e^t - 1)\right)' \\&= 5(-2t + e^t)\end{aligned}$$

$$5(-2 \cdot 2.5 + e^{2.5}) \doteq \underline{35.91 \text{ ml}}$$

Po 2.5 hodinách se odpařilo cca 24.66 ml, přičemž se v tomto momentu odpařuje voda rychlostí cca 35.91 ml za hodinu.

Řešená úloha 3.1.11. Nezodpovědný zaměstnanec nechal v restauraci otevřené dveře od chladicí místnosti s jídlem. Teplota se má v chladicí místnosti udržovat v rozmezí $2\text{--}6^\circ$, přičemž byla před otevřením dveří zaměstnancem 3°C . Dále se vyvíjí podle funkce

$$y(t) = e^{1.63t} + 2,$$

kde proměnná t představuje čas v hodinách. V jakém čase od otevření dveří se spustí alarm, pokud je aktivován při dosažení horní hranice povoleného rozmezí? Jakou rychlostí narůstá teplota v chladicí místnosti v okamžiku půl hodiny od otevření dveří?

Řešení:

Abychom zjistili čas spuštění alarmu, je potřeba zadanou funkci invertovat. Vyjádříme tedy t jako funkci y .

$$\begin{aligned}y &= e^{1.63t} + 2 \\y - 2 &= e^{1.63t} \\\ln(y - 2) &= \ln(e^{1.63t}) \\\ln(y - 2) &= 1.63t \\\frac{\ln(y - 2)}{1.63} &= t\end{aligned}$$

Horní hranicí je 6° .

$$\begin{aligned}t &= \frac{\ln(6 - 2)}{1.63} \\&\doteq 0.85 \text{ hodiny}\end{aligned}$$

$0.85 \cdot 60 = \underline{51}$ minut, tzn. alarm se spustí po cca 51 minutách.

Rychlost růstu teploty v daný okamžik zjistíme pomocí derivace funkce (dosazená hodnota 0.5 znamená 30 minut = 0.5 hodiny).

$$\begin{aligned} y'(t) &= (e^{1.63t} + 2)' \\ &= 1.63 \cdot e^{1.63t} \end{aligned}$$

$$1.63 \cdot e^{1.63 \cdot 0.5} \doteq \underline{3.68^\circ\text{C/hod.}}$$

30 minut po otevření dveří stoupá teplota v chladicí místnosti tempem cca 3.68°C/hod.

Řešená úloha 3.1.12. Nákladovou funkci firmy určuje vztah

$$TC(q) = 2x + 11\sqrt{x} + 4.$$

Náklady jsou v tisících Kč. Vypočítejte mezní náklady, které přinese vyrobení 100., 150. a 500. jednotky.

Řešení:

Funkci pro mezní náklady získáme pomocí derivace funkce nákladů celkových.

$$\begin{aligned} MC &= TC' \\ &= (2x + 11\sqrt{x} + 4)' \\ &= \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{q}} + 2 \end{aligned}$$

Dosazením hodnot 99, 149 a 499 získáme mezní náklady pro 100., 150. a 500. jednotku produkce.

$$\begin{aligned} MC(99) &= \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{99}} + 2 \doteq \underline{2.55 \text{ tis. Kč}} \\ MC(149) &= \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{149}} + 2 \doteq \underline{2.45 \text{ tis. Kč}} \\ MC(499) &= \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{499}} + 2 \doteq \underline{2.25 \text{ tis. Kč}} \end{aligned}$$

Řešená úloha 3.1.13. Firma na výrobu malých součástek produkuje své výrobky, přičemž její náklady jsou dány funkcí

$$TC(q) = 2q^3 - 3q^2 + 10q,$$

kde q je v tisících ks a náklady jsou v tisících Kč. Jaké jsou minimální průměrné náklady (AC) firmy?

Řešení:

Využijeme znalosti, že aby byly průměrné náklady minimální, musí být rovny nákladům mezním.

$$AC(q) = MC(q)$$

$$\frac{TC(q)}{q} = TC'(q)$$

$$2q^2 - 3q + 10 = 6q^2 - 6q + 10$$

$$-4q^2 + 3q = 0$$

$$-q \cdot (4q - 3) = 0$$

$$-q \cdot (4q - 3) = 0$$

Řešení $q_1 = 0$ nebereme v potaz, a tak v bodě $q_2 = \frac{3}{4}$ by mělo být lokální minimum funkce AC . Ověříme, zda je tomu opravdu tak. Musí platit $AC''(q_2) > 0$.

$$AC'(q) = (2q^2 - 3q + 10)'$$

$$AC'(q) = 4q - 3$$

$$AC''(q) = (4q - 3)'$$

$$AC''(q) = 4$$

$$AC''(q_2) > 0 \Rightarrow \text{hodnota } q_2 \text{ je lokálním minimem}$$

Tedy vypočteme zbývá vypočítat minimální průměrné náklady firmy.

$$AC(q_2) = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{4} + 10$$

$$AC(q_2) = \underline{8.875 \text{ tis. Kč}}$$

Minimální průměrné náklady firmy jsou 8875 Kč.

Řešená úloha 3.1.14. Maloobchodní firma získává svůj příjem podle funkce $R(q) = 1200q$ v Kč. Její náklady jsou ovlivňovány funkcí $C(q) = 4q^3 + 3000$ v Kč. Při výrobě jakého množství jednotek bude firma maximalizovat svůj zisk a jaký bude celkový zisk při úrovni této produkce?

Řešení:

Zisková funkce firmy vypadá takto:

$$P(q) = TR(q) - TC(q) = 1200q - (4q^3 + 3000).$$

Zisk je maximalizován, když se rovnají mezní příjmy a mezní náklady. Mezní příjmy získáme derivací celkových příjmů, mezní náklady derivací celkových nákladů.

$$\begin{aligned} TR'(q) &= TC'(q) \\ (1200q)' &= (4q^3 + 3000)' \\ 1200 &= 12q^2 \\ q &= \pm 10 \end{aligned}$$

Vypočítali jsme lokální extrém ziskové funkce, řešení -10 nebudeme brát v potaz. Teď musíme ověřit, zda se skutečně jedná o lokální maximum. Vypočtenou hodnotu dosadíme do druhé derivace ziskové funkce.

$$\begin{aligned} P'(q) &= (1200q - (4q^3 + 3000))' \\ &= 1200 - 12q^2 \\ P''(q) &= -24q \end{aligned}$$

$$P''(10) = -240 < 0 \Rightarrow \text{hodnota } 10 \text{ je lokálním maximem}$$

Zbývá spočítat, jakého celkového zisku firma dosáhne při tomto množství výroby.

$$\begin{aligned} P &= TR - TC \\ &= 1200 \cdot 10 - (4 \cdot 10^3 + 3000) \\ &= 12000 - (4000 + 3000) \\ P &= \underline{5000 \text{ Kč}} \end{aligned}$$

Firma maximalizuje svůj zisk při množství 10 jednotek výroby, její zisk je při tomto množství produkce 5000 Kč.

Řešená úloha 3.1.15. V divadle se bude hrát premiéra nové činohry. Sál má kapacitu 420 sedadel. Ten bude zaplněn při ceně vstupenky 200 Kč. Každé zdražení vstupenky o 10 Kč přinese snížení počtu prodaných vstupenek na představení o 20. Při jakém počtu prodaných vstupenek divadlo maximalizuje svůj příjem z představení?

Řešení:

Nejdříve nalezneme poptávkovou funkci pro náš případ. V obecném tvaru vypadá takto:

$$q = -ap + b,$$

kde q je množství a p je cena.

Množství a cenu známe. Naopak neznáme sklon funkce a a vertikální průsečík b . Sklon funkce jsme schopni vypočítat ze zadaných údajů. Víme totiž, jak se změní poptávané množství, když se změní cena.

$$\begin{aligned} a &= \frac{q - q_1}{p - p_1} \\ &= \frac{420 - (420 - 20)}{200 - (200 + 10)} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$a = -2$, tzn.

$$420 = -2 \cdot 200 + b \quad \Rightarrow \quad b = 820.$$

Poptávková funkce na toto představení je tedy $q = -2p + 820$. Příjem R spočteme jako součin $p \cdot q$, tedy

$$R = p \cdot (-2p + 820) = -2p^2 + 820p.$$

Dále zjistíme, při jaké ceně vstupenky získá divadlo maximální příjem — položíme derivaci rovnou nule.

$$\begin{aligned} R' &= (-2p^2 + 820p)' \\ &= -4p + 820 \end{aligned}$$

$$-4p + 820 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 205$$

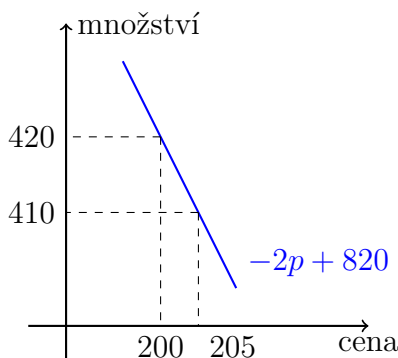
Druhou derivací ověříme, zda se skutečně jedná o maximum.

$$R'' = (-4p + 820)'$$

$$= -4 \Rightarrow \text{jedná se o maximum}$$

Zbývá spočítat, při jakém počtu prodaných vstupenek při ceně $p = 205$ divadlo maximalizuje svůj příjem z představení. Cenu dosadíme do poptávkové funkce.

$$\begin{aligned} q = -2p + 820 &= -2 \cdot 205 + 820 \\ &= \underline{410 \text{ vstupenek}} \end{aligned}$$



Obrázek 16: Množství prodaných vstupenek v divadle v závislosti na ceně.

Divadlo maximalizuje svůj příjem z představení, pokud prodá 410 vstupenek. Z tohoto pohledu je tedy ideální obsazenost sálu 410 ze 420 míst.

Řešená úloha 3.1.16. Zjistěte, zda se firmě vyplatí vyrábět 800 ks výrobků denně, pokud je její denní zisk (v Kč), který je popsán funkcí

$$P(q) = 150q \cdot e^{-\frac{1}{1000}q},$$

závislý na počtu vyrobených jednotek q . Pokud se podle výpočtu výroba v takovém množství nevyplatí, vyzkoumejte, zda a o kolik jednotek by měla firma výrobu rozšířit či zredukovat.

Řešení:

Zadanou funkci nejdříve zderivujeme a dosadíme hodnotu 800.

$$\begin{aligned} P'(q) &= \left(150q \cdot e^{-\frac{1}{1000}q}\right)' \\ &= \left((150q)' \cdot e^{-\frac{1}{1000}q} + 150q \cdot (e^{-\frac{1}{1000}q})'\right) \\ &= \left(150 \cdot e^{-\frac{1}{1000}q} + 150q \cdot \left(-\frac{1}{1000} \cdot e^{-\frac{1}{1000}q}\right)\right) \\ &= e^{-\frac{1}{1000}q} \cdot (150 - 0.15q) \end{aligned}$$

$$e^{-\frac{1}{1000} \cdot 800} \cdot (150 - 0.15 \cdot 1500) \doteq 13.48$$

Protože je výsledkem kladná hodnota, zjišťujeme, že s každou další vyrobenou jednotkou bude zisk růst.

Abychom zjistili, kdy bude výroba z pohledu zisku nejefektivnější, položíme derivaci ziskové funkce rovnu nule.

$$P'(q) = 0$$

$$e^{-\frac{1}{1000}q} \cdot (150 - 0.15q) = 0$$

Výraz $e^{-\frac{1}{1000}q}$ se nerovná nule pro žádné q , zkoumáme tedy jen $150 - 0.15q = 0$.

$$150 - 0.15q = 0$$

$$q = \underline{1000}$$

Vidíme, že výroba je nejefektivnější při výrobě 1000 jednotek. Firma by tedy měla zvýšit počet vyrobených kusů o 200.

3.2 Řešené úlohy — integrální počet

Řešená úloha 3.2.1. Vypočtete.

$$(a) \int (3x^4 - 2x^3 - 8) dx \quad (b) \int (\sin(x) + 2x) dx \quad (c) \int (3e^x) dx$$

$$(d) \int ((3^x - 4^x)^2) dx \quad (e) \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx \quad (f) \int (x \cdot \cos(x)) dx$$

$$(g) \int ((x^2 - 3) \cdot e^{-2x}) dx \quad (h) \int (e^x \cdot \cos(x)) dx \quad (i) \int (\ln(x)) dx$$

$$(j) \int ((5x + 4)^9) dx \quad (k) \int \left[\frac{\sin(x)}{(\cos(x) - 1)^3} \right] dx$$

(V dalším textu berme v potaz, že se symbolické označení pro proměnnou, podle které se integruje, váže na celý výraz mezi znakem integrálu a dx .)

Řešení:

(a)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int 3x^4 - 2x^3 - 8 dx \\ &= \int 3x^4 dx - \int 2x^3 dx - \int 8 dx \end{aligned} \quad (5)$$

$$= 3 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} - 2 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} - 8x \quad (6)$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{5} \cdot x^5 - \frac{1}{2} \cdot x^4 - 8x + C}} \quad (7) \quad (, +C " \text{ dále nebudeme psát})$$

V prvním kroku jsme využili vzorec pro integraci součtu funkcí. Funkci jsme rozdělili na dílčí funkce, které pak již snadno můžeme podle Tabulky 2 integrovat. V druhém kroku jsme mimo jiné využili vzorce $\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Maple

```
int (3*x^4-2*x^3-8,x);
```

(b)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sin(x) + 2x dx \\ &= \int \sin(x) dx + \int 2x dx \end{aligned} \quad (1)$$

$$= -\cos(x) + 2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} \quad (2)$$

$$= \underline{-\cos(x) + x^2} \quad (3)$$

V prvním kroku jsme opět využili vzorec pro integraci součtu funkcí. V druhém kroku jsme využili dvou vzorců přímo z Tabulky 2.

(c)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int 3e^x \, dx \\ &= 3 \int e^x \, dx \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \underline{3e^x} \quad (2)$$

V prvním kroku jsme použili vzorec pro integraci k -násobku, třetí krok přinesl integraci funkce podle Tabulky 2.

(d)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (3^x - 4^x)^2 \, dx \\ &= \int (3^{2x} - 2 \cdot 3^x \cdot 4^x + 4^{2x}) \, dx \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \int 3^{2x} \, dx - \int 2 \cdot 3^x \cdot 4^x \, dx + \int 4^{2x} \, dx \quad (2)$$

$$= \int 9^x \, dx - 2 \cdot \int 12^x \, dx + \int 16^x \, dx \quad (3)$$

$$= \underline{\frac{9^x}{\ln 9} - 2 \cdot \frac{12^x}{\ln 12} + \frac{16^x}{\ln 16}} \quad (4)$$

V prvním kroku jsme upravili zadaný výraz. Ten jsme ve druhém kroku poté rozdělili na několik dílčích funkcí podle vzorce pro integraci součtu funkcí. Ve třetím kroku jsme výraz upravili, ve čtvrtém jsme integrovali.

(e)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx \\ &= \int x^{-\frac{1}{3}} \, dx \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \quad (2)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}} \quad (3)$$

$$= \underline{\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2}} \quad (4)$$

Zlomek jsme v prvním kroku upravili do „stravitelnější“ podoby, abychom ve druhém kroku mohli použít vzorec $\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

(f)

$$F(x) = \int x \cdot \cos(x) \, dx \quad (1)$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u'(x) = \cos(x) & u(x) = \sin(x) \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{array} \right| \quad (2)$$

$$= u(x) \cdot v(x) - \int (u(x) \cdot v'(x)) \, dx \quad (3)$$

$$= \sin(x) \cdot x - \int (\sin(x) \cdot 1) \, dx \quad (4)$$

$$= x \sin(x) - \int \sin(x) \, dx \quad (5)$$

$$= \underline{x \sin(x) + \cos(x)} \quad (6)$$

V prvním kroku jsme zvolili $u'(x) = \cos(x)$ a $v(x) = x$, tedy $u(x) = \sin(x)$ (protože $\int u'(x) \, dx = u(x) = \sin(x)$) a $v'(x) = 1$. V druhém kroku je vypsán vzorec. V třetím a čtvrtém kroku jsme do vzorce dosadili a výraz upravili. Pátý krok přináší výsledek.

(g)

$$F(x) = \int (x^2 - 3) \cdot e^{-2x} \, dx \quad (1)$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u'(x) = e^{-2x} & u(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ v(x) = x^2 - 3 & v'(x) = 2x \end{array} \right| \quad (2)$$

$$= u(x) \cdot v(x) - \int (u(x) \cdot v'(x)) \, dx \quad (3)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (x^2 - 3) - \int \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot 2x \right) \, dx \quad (4)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (x^2 - 3) + \int e^{-2x} \cdot x \, dx \quad (5)$$

$$\int e^{-2x} \cdot x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u'(x) = e^{-2x} & u(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{array} \right| \quad (6)$$

$$= u(x) \cdot v(x) - \int (u(x) \cdot v'(x)) \, dx \quad (7)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot x - \int \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot 1 \right) \, dx \quad (8)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \int e^{-2x} \, dx \quad (9)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \right) \quad (10)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot e^{-2x} \quad (11)$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot e^{-2x} \cdot (2x + 1) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 3) \cdot e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (x^2 - 3) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{4} \cdot e^{-2x} \cdot (2x + 1) \right) \end{aligned} \quad (13)$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot e^{-2x} \cdot (2(x^2 - 3) + (2x + 1)) \quad (14)$$

$$= \underline{-\frac{1}{4} \cdot e^{-2x} \cdot (2x^2 + 2x - 5)} \quad (15)$$

V prvních čtyřech krocích dosadíme zvolené funkce do vzorce. Funkci $u'(x) = e^{-2x}$ jsme zintegrovali pomocí substituční metody. Ve čtvrtém kroku můžeme vidět nový integrál, na který je potřeba opět aplikovat metodu per partes. V pátém až jedenáctém kroku počítáme nově vzniklý integrál. Ve dvanáctém kroku výrazy „sloučíme“ a ve čtrnáctém získáme výsledek.

(h)

$$F(x) = \int e^x \cdot \cos(x) dx \quad (1)$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u'(x) = e^x & u(x) = e^x \\ v(x) = \cos(x) & v'(x) = -\sin(x) \end{array} \right| \quad (2)$$

$$= u(x) \cdot v(x) - \int (u(x) \cdot v'(x)) dx \quad (3)$$

$$= e^x \cdot \cos(x) + \int (e^x \cdot \sin(x)) dx \quad (4)$$

$$\int (e^x \cdot \sin(x)) dx = \left| \begin{array}{ll} u'(x) = e^x & u(x) = e^x \\ v(x) = \sin(x) & v'(x) = \cos(x) \end{array} \right| \quad (5)$$

$$= e^x \cdot \sin(x) - \int (e^x \cdot \cos(x)) dx \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot \cos(x) dx &= e^x \cdot \cos(x) \\ &\quad + \left(e^x \cdot \sin(x) - \int (e^x \cdot \cos(x)) dx \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot \cos(x) dx &= e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \sin(x) \\ &\quad - \int (e^x \cdot \cos(x)) dx \end{aligned} \quad (8)$$

$$2 \cdot \int e^x \cdot \cos(x) \, dx = e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \sin(x) \quad (9)$$

$$\int e^x \cdot \cos(x) \, dx = \frac{e^x \cdot (\cos(x) + \sin(x))}{2} \quad (10)$$

V příkladu jsme museli dvakrát použít metodu per partes. V sedmém kroku jsme zjistili, že se na pravé straně rovnice vyskytuje stejný integrál jako na straně levé. Proto jsme ho v osmém kroku přičetli na obě strany rovnice. Devátý krok nám přinesl výsledek zintegrované funkce.

(i)

$$F(x) = \int \ln(x) \, dx \quad (1)$$

$$= \int (\ln(x) \cdot 1) \, dx \quad (2)$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u'(x) = 1 & u(x) = x \\ v(x) = \ln(x) & v'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right| \quad (3)$$

$$= u(x) \cdot v(x) - \int (u(x) \cdot v'(x)) \, dx \quad (4)$$

$$= x \cdot \ln(x) - \int \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) \, dx \quad (5)$$

$$= x \cdot \ln(x) - \int (1) \, dx \quad (6)$$

$$= x \cdot \ln(x) - x \quad (7)$$

$$= \underline{x \cdot (\ln(x) - 1)} \quad (8)$$

Abychom mohli funkci $f(x) = \ln(x)$ zintegrovat, můžeme si ji představit jako funkci $f(x) = \ln(x) \cdot 1$. Poté již můžeme provést integraci metodou per partes.

(j)

$$F(x) = \int (5x + 4)^9 \, dx \quad (1)$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = 5x + 4 \\ dt = 5 \, dx \end{array} \right| \quad (2)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \int (t^9) \, dt \quad (3)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{t^{10}}{10} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x + 4)^{10}}{10} \quad (5)$$

$$= \underline{\frac{(5x + 4)^{10}}{50}} \quad (6)$$

V prvním kroku jsme použili substituční metodu. Protože $dt = 5 dx$ a na levé straně rovnice se nachází pouze výraz dx , musíme celý výraz vynásobit hodnotou $\frac{1}{5}$. Výraz zintegrujeme a potom za t dosadíme výraz $5x + 4$.

(k)

$$F(x) = \int \frac{\sin(x)}{(\cos(x) - 1)^3} dx \quad (1)$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \cos(x) - 1 \\ dt = -\sin(x) dx \end{array} \right| \quad (2)$$

$$= - \int \left(\frac{1}{t^3} \right) dt \quad (3)$$

$$= - \int (t^{-3}) dt \quad (4)$$

$$= - \left(\frac{t^{-2}}{-2} \right) \quad (5)$$

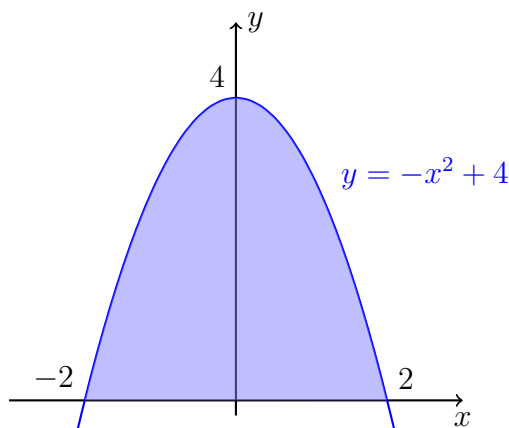
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2} \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\cos(x) - 1)^2} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{2(\cos(x) - 1)^2} \quad (8)$$

V prvním kroku jsme použili substituční metodu. Protože $dt = -\sin(x) dx$ a na levé straně rovnice se nachází pouze výraz $\sin(x) dx$, musíme celý výraz vynásobit hodnotou -1 . Výraz zintegrujeme a potom za t dosadíme výraz $\cos(x) - 1$.

Řešená úloha 3.2.2. Vypočtete obsah plochy, kterou ohraničuje funkce $f(x) = -x^2 + 4$ a osa x .



Obrázek 17: Obsah plochy ohraničující graf funkce $y = -x^2 + 4$ a osa x .

Řešení:

K vypočítání obsahu plochy použijeme určitý integrál, nejdříve ale pro něj musíme určit interval. Ten zjistíme tak, že najdeme průsečíky funkce f s osou x .

Položíme zadanou funkci rovnou nule.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x^2 + 4 &= 0 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Budeme tedy integrovat v intervalu $\langle -2, 2 \rangle$.

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{-2}^2 -x^2 + 4 \, dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 \right| \\ &= \left| \left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2) \right) \right| \\ &= \underline{\underline{\frac{32}{3}}} \end{aligned}$$

Obsah plochy je roven $\frac{32}{3}$.

Maple

```
plocha:=int(-x^2+4,x=-2..2);
```

Řešená úloha 3.2.3. Vypočtete obsah plochy, kterou ohraničuje graf funkce $f(x) = x^2 - x + 1$ a $g(x) = -x^2 + 3x$.

Řešení:

K vypočítání obsahu plochy použijeme určitý integrál, nejdříve ale pro něj musíme určit interval. Ten zjistíme tak, že najdeme průsečíky obou funkcí. Funkce dáme do rovnosti.

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) \\x^2 - x + 1 &= -x^2 + 3x \\2x^2 - 4x + 1 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\x_2 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Budeme tedy integrovat v intervalu $\langle 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$.

$$\begin{aligned}S &= \left| \int_{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}^{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \left((x^2 - x + 1) - (-x^2 + 3x) \right) dx \right| = \left| \int_{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}^{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} 2x^2 - 4x + 1 dx \right| \\&= \left| \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x \right]_{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}^{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right| \\&= \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Obsah plochy je roven $\frac{2\sqrt{2}}{3}j^2$.

Maple

```
f1 := x -> x^2-x+1;
f2 := x -> -x^2+3*x;
solve(f1(x)=f2(x), {x});
plot({f1, f2}, 1+(1/2)*sqrt(2)..1-(1/2)*sqrt(2));
plocha:=evalf(abs(Int(f1(x)-(f2(x)), x=1-(1/2)*sqrt(2)..1
+(1/2)*sqrt(2))));
```

Řešená úloha 3.2.4. Vypočtete objem tělesa, který vznikne rotací kolem osy x v místě pod grafem funkce $f(x) = \frac{1}{x^3}$ mezi body $a = \frac{1}{2}$ a $b = 1$.

Řešení:

K vypočítání objemu tělesa použijeme opět určitý integrál, konkrétně vzorec:

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2) dx.$$

Do vzorce dosadíme hodnoty ze zadání.

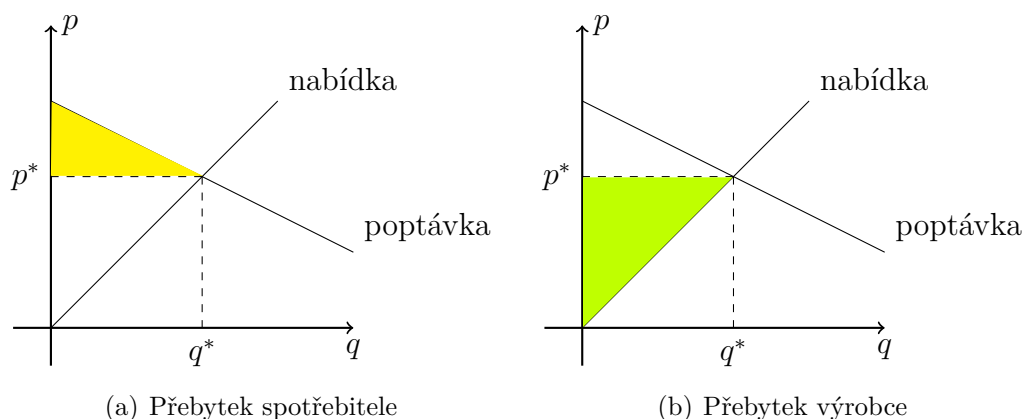
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 dx \\ &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{-6} dx \\ &= \pi \left[-\frac{x^{-5}}{5} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \pi \left[\left(-\frac{1^{-5}}{5} \right) - \left(-\frac{(\frac{1}{2})^{-5}}{5} \right) \right] \\ &= \frac{31}{5} \pi \end{aligned}$$

Objem tělesa je roven $\frac{31}{5}\pi$.

Maple

```
objem:=Pi*int((1/x^3)^2,x=1/2..1);
```

Řešená úloha 3.2.5. Po výrobcích firmy X je poptávka, kterou charakterizuje poptávková funkce $D(q) = 50e^{-0.1q}$. Její nabídku určuje nabídková funkce $S(q) = 2.906q + 10$. Proměnná p je cena a q je množství. Vypočítejte přebytek výrobce a spotřebitele, když víte, že rovnovážné množství je 6 jednotek.



Obrázek 18: Přebytek spotřebitele a výrobce.

Řešení:

Abychom mohli spočítat přebytek výrobce a spotřebitele, potřebujeme znát nejen rovnovážné množství (q^*), ale také rovnovážnou cenu (p^*). Například do nabídkové funkce dosadíme hodnotu 6.

$$\begin{aligned} S(6) &= 2.906 \cdot 6 + 10 \\ p^* &= 27.436 \end{aligned}$$

Prostor mezi oběma grafy a osou y rozděluje přímkou $y = p^*$. Ploše „nad“ přímkou $y = p^*$ (tedy ploše, kterou ohraničuje graf poptávkové funkce, přímkou $y = p^*$ a osou y) označujeme jako přebytek spotřebitele. Ploše „pod“ přímkou $y = p^*$ (tedy ploše, kterou ohraničuje graf nabídkové funkce, přímkou $y = p^*$ a osou y) označujeme jako přebytek výrobce.

Přebytek spotřebitele tedy vypočítáme podle vztahu

$$\begin{aligned} \int_0^{q^*} (D(q) dq) - p^* q^* &= \int_0^6 (50e^{-0.1q} dq) - 27.436 \cdot 6 \\ &= 50 \left[-10 \cdot e^{-0.1q} \right]_0^6 - 164.616 \\ &= 50 \left[-10 \cdot e^{-0.1 \cdot 6} - (-10 \cdot e^{-0.1 \cdot 0}) \right] - 164.616 \\ &\doteq \underline{\underline{60.98 \text{ Kč}}} \end{aligned}$$

Přebytek výrobce vypočítáme podle vztahu

$$p^* q^* - \int_0^{q^*} (S(q) dq).$$

$$\begin{aligned} 27.436 \cdot 6 - \int_0^6 2.906q + 10 dq &= 164.616 - [1.453q^2 + 10q]_0^6 \\ &= 164.616 - [1.453 \cdot 6^2 + 10 \cdot 6 - (1.453 \cdot 0^2 + 10 \cdot 0)] \\ &\doteq \underline{52.308 \text{ Kč}} \end{aligned}$$

Přebytek spotřebitele je 60.98 Kč a přebytek výrobce 52.308 Kč.

Řešená úloha 3.2.6. Vypočítejte celkové náklady na výrobu 250 výrobků, když znáte funkci mezních nákladů

$$MC(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

v Kč a víte, že náklady na výrobu 100 výrobků jsou rovny 4500 Kč.

Řešení:

Protože známe funkci mezních nákladů a platí $MC = TC'$, kde TC jsou celkové náklady, zintegrujeme funkci mezních nákladů a dostaneme funkci pro náklady celkové.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{2} dx &= \frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) + C \\ TC(x) &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{x^3} + C \end{aligned}$$

Abychom mohli vypočítat konstantu C , využijeme informaci ze zadání.

$$\begin{aligned} TC(100) &= 4500 \\ \frac{1}{3} \cdot \sqrt{100^3} + C &= 4500 \\ C &\doteq 4166.67 \end{aligned}$$

Funkce pro celkové náklady vypadá takto:

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{x^3} + 4166.67.$$

Zbývá vypočítat celkové náklady na výrobu 250 výrobků.

$$\begin{aligned} TC(250) &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{250^3} + 4166.67 \\ &\doteq \underline{5484.29 \text{ Kč}} \end{aligned}$$

Celkové náklady na výrobu 250 výrobků jsou rovny 5484.29 Kč.

Řešená úloha 3.2.7. Celkové náklady firmy jsou popsány funkcí

$$TC(q) = 4q^2 + 3q + 1,$$

kde q je počet vyrobených jednotek v tisících.

Na intervalu $\langle 3, 6 \rangle$ nalezněte střední hodnotu této funkce a bod, ve kterém se nachází.

Řešení:

Naleznout střední hodnotu zadané funkce nám pomůže vzorec

$$\overline{TC(q)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b TC(q) \, dq.$$

Do vzorce dosadíme zadané hodnoty.

$$\begin{aligned} \overline{TC(q)} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b TC(q) \, dq = \frac{1}{6-3} \cdot \int_3^6 4q^2 + 3q + 1 \, dq \\ &= \frac{1}{6-3} \cdot \left[\frac{4}{3} \cdot q^3 + \frac{3}{2} \cdot q^2 + q \right]_3^6 \\ &= \frac{1}{6-3} \cdot \left[\left[\frac{4}{3} \cdot 6^3 + \frac{3}{2} \cdot 6^2 + 6 \right] - \left[\frac{4}{3} \cdot 3^3 + \frac{3}{2} \cdot 3^2 + 3 \right] \right] \\ &= 98.5 \end{aligned}$$

Střední hodnota je tedy rovna 98.5. Bod, ve kterém tuto hodnotu najdeme, vypočteme podle rovnice

$$4q^2 + 3q + 1 = 98.5.$$

Rovnici splňují hodnoty $q_1 \doteq -5.33$ a $q_2 \doteq 4.58$, v intervalu $\langle 3, 6 \rangle$ se nachází pouze řešení q_2 .

Střední hodnota funkce $TC(q)$ se nachází v bodě $q_2 \doteq 4.58$.

Maple

```
f:=4*q^2+3*q+1;
stredni_hodnota:=evalf((1/(6-3))*int(f,q=3..6));
str_hodn_v_bode:=solve(f=stredni_hodnota);
```

Řešená úloha 3.2.8. Majitel bytu se rozhodne pronajímat bytový prostor. Jaký bude jeho celkový příjem v Kč od konce šestého do konce osmého roku, pokud známe funkci (proměnná t představuje čas — měsíce) pro hustotu toku příjmu:

$$h(t) = 5000 + \frac{50}{t-1}.$$

Řešení:

Zajímá nás celkový příjem v Kč od konce šestého do konce osmého roku, tedy od konce 72. měsíce do konce 96. měsíce.

$$\begin{aligned} TR(72, 96) &= \int_{72}^{96} 5000 + \frac{50}{t-1} dt \\ &= \left[5000t + 50 \ln |t-1| \right]_{72}^{96} \\ &= \left[[5000 \cdot 96 + 50 \ln |96-1|] - [5000 \cdot 72 + 50 \ln |72-1|] \right] \\ &\doteq \underline{120014.56 \text{ Kč}} \end{aligned}$$

Celkový příjem majitele bytu od konce šestého do konce osmého roku bude cca 120000 Kč.

Řešená úloha 3.2.9. Firma investovala 750000 Kč do nových výkonnějších strojů, které budou vyrábět produkty v její továrně. Úspory, které vzniknou nasazením nových strojů, jsou dány vztahem

$$S(t) = 400000 \cdot e^{-0.4t}$$

kde t je čas v rocích a $S(t)$ v Kč. Za jak dlouho se firmě investice vrátí?

Řešení:

Počítáme dobu od investice, ve kterou se firmě vrátí vynaložené prostředky. Položíme tedy určitý integrál funkce roven investici. Dolní mezí a bude 0, jelikož se jedná o čas, od kterého začínáme počítat dobu. Horní mezí bude konstanta b , kterou prozatím neznáme, ale bude pro výpočet důležitá, jelikož právě b udává dobu splacení investice.

$$\begin{aligned}\int_0^b 400000 \cdot e^{-0.4t} dt &= 750000 \\ 400000 \cdot \int_0^b e^{-0.4t} dt &= \\ 400000 \cdot (-2.5) \cdot \left[e^{-0.4t} \right]_0^b &= \\ -1000000 \cdot \left[e^{-0.4b} - e^{-0.4 \cdot 0} \right] &= \\ -1000000 \cdot \left[e^{-0.4b} - 1 \right] &= \\ e^{-0.4b} - 1 &= -0.75 \\ \ln(e^{-0.4b}) &= \ln(0.25) \\ -0.4b &= -1.39 \\ b &\doteq \underline{3.475 \text{ roku}}\end{aligned}$$

Investice se vrátí za cca tři a půl roku.

Řešená úloha 3.2.10. Na dobročinnou sbírku přispívají lidé podle funkce

$$TR(t) = \frac{55}{\sqrt[5]{t}},$$

kde proměnná t reprezentuje čas ve dnech (funkce TR je celkový příjem v tis. Kč za období t). Jaký je celkový zisk dobročinné sbírky za období od druhého do devátého dne, pokud se každý den vynaloží 8500 Kč na potřebné výdaje?

Řešení:

Nejdříve vypočítáme celkové náklady za zadané období. Jedná se o akumulaci hodnot, kterou spočteme pomocí určitého integrálu.

$$\begin{aligned}\int_2^9 \frac{55}{\sqrt[5]{t}} dt &= 55 \cdot \int_2^9 t^{-\frac{1}{5}} dt \\ &= 55 \cdot \left[\frac{5}{4} \cdot t^{\frac{4}{5}} \right]_2^9 \\ &= 55 \cdot \left[\frac{5}{4} \cdot 9^{\frac{4}{5}} - \left(\frac{5}{4} \cdot 2^{\frac{4}{5}} \right) \right]\end{aligned}$$

$$\doteq 279.02 \text{ tis. Kč}$$

Celkový zisk dostaneme pomocí vzorce $P = TR - TC$. Tedy:

$$P = 279020 - (9 - 2) \cdot 8500 = \underline{219520 \text{ Kč.}}$$

Celkový zisk dobročinné sbírky za období od druhého do devátého dne je cca 220000 Kč.

Maple

```
TR:=evalf(int(55/(t^(1/5)),t=2..9));
TC:=(9-2)*8500;
P:=TR*1000-TC;
```

Řešená úloha 3.2.11. Student si chce našetřit 100000 Kč za 5 let, přičemž bude na spořicí účet ukládat stejnou částku každý rok. Spojitý úrok je roven 1.2 %. Kolik peněz by měl student na účet ukládat, aby dodržel plánovanou ušetřenou částku, když víme, že při stejných podmínkách by jednorázově musel vložit na účet cca 94176.45 Kč, aby plánované částky dosáhl.

Řešení:

Podle vzorce[21]

$$\text{současná hodnota} = \int_0^n S \cdot e^{-rt} dt,$$

přičemž n je počet let v budoucnosti, S je vložená roční částka, r je úroková sazba a t je čas (v letech od současnosti).

$$\begin{aligned} \text{současná hodnota} &= \int_0^n S \cdot e^{-rt} dt \\ &= S \cdot \int_0^5 e^{-0.012t} dt \\ &= S \cdot \left(-\frac{1}{0.012} \right) \cdot \left[e^{-0.012t} \right]_0^5 \\ &\doteq 4.85 \cdot S \end{aligned}$$

Jelikož musí být současná hodnota průběžných vkladů rovna jednorázovému vkladu, získáme následující rovnice.

$$4.85 \cdot S = 94176.45$$

$$S \doteq \underline{19417.82 \text{ Kč}}$$

Student by měl na účet ročně ukládat cca 19417.82 Kč, aby si za pět let našetřil 100000 Kč.

Řešená úloha 3.2.12. Nový student ve třídě, který byl poté po 30 dnech opět přesunut na jinou školu, měl u ostatních spolužáků v průběhu od pátého do dvaadvacátého dne od nástupu do třídy oblíbenost (v %) popsanou funkcí

$$O(d) = \frac{1300d}{d^2 + 250}.$$

Jaká byla v daném období studentova průměrná oblíbenost?

Řešení:

Vypočítáme střední hodnotu spojitě funkce na intervalu $\langle 5, 22 \rangle$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b O(d) \, dd &= \frac{1}{22-5} \int_5^{22} \frac{1300d}{d^2+250} \, dd \\ &= \frac{1}{22-5} \cdot 1300 \cdot \int_5^{22} \frac{d}{d^2+250} \, dd \\ &= \frac{1}{22-5} \cdot 1300 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_5^{22} \frac{1}{t} \, dt \\ &= \frac{1}{22-5} \cdot 1300 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\ln |d^2+250| \right]_5^{22} \\ &= \frac{1}{22-5} \cdot 1300 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\ln |22^2+250| - \ln |5^2+250| \right) \\ &\doteq \underline{37.54 \, \%} \end{aligned}$$

Studentova průměrná oblíbenost v období od pátého do dvaadvacátého dne od nástupu do třídy byla cca 38 %.

Neřešené úlohy

Úloha 4.1. Zderivujte funkce.

(a) $y = 2x^4 + x + 9 \cdot \frac{1}{x}$

(b) $y = 3x \cdot (-2 \cos(x)) + 5 \ln(x)$

(c) $y = \cos(\sin(2x))$

(d) $y = \sqrt[3]{x^{-4}} - x \cdot \frac{1}{\cos(x)}$

(e) $y = \sqrt{e^x \cdot \sqrt{x^{-3}}}$

(f) $y = \frac{\operatorname{tg}(x) \cdot e^{3x-2}}{4x}$

Výsledky:

(a) $8x^3 + 1 - 9 \cdot \frac{1}{x^2}$

(b) $\frac{5}{x} + 6x \sin(x) - 6 \cos(x)$

(c) $-2 \sin(\sin(2x)) \cdot \cos(2x)$

(d) $-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}} - \frac{1}{\cos(x)} (1 - x \cdot \operatorname{tg}(x))$

(e) $\frac{e^x \cdot (\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{x^5}})}{2\sqrt{\frac{e^x}{\sqrt{x^3}}}}$

(f) $\frac{e^{3x-2} \cdot ((3x-1) \cdot \operatorname{tg}(x) + x \cdot \frac{1}{\cos^2(x)})}{4x^2}$

Úloha 4.2. [27] Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^3 - x^3}.$$

Výsledky:

$D_f, H_f \in \mathbb{R}$, průsečíky $x_1 = 0$ a $x_2 = 3$, $y = -x + 1$ asymptotou v $+\infty$ i $-\infty$, minimum v bodě 0, maximum v bodě 2.

Kladné/záporné hodnoty funkce:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
	+	+	-

Monotonie:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Konvexnost/konkávnost:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
	$\cap$	$\cap$	$\cup$

Úloha 4.3. Nalezněte Taylorův polynom stupně 2 v bodě $a = \frac{\pi}{2}$ funkce $y = -\sin(3x)$.

Výsledky:

$$T(x) = 1 - \frac{9}{2} \cdot (x - \frac{\pi}{2})^2.$$

Úloha 4.4. Vypočtěte.

(a) $\int \cos^2(x) \, dx$

(b) $\int \frac{\ln(x)}{x} \, dx$

(c) $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)-3} \, dx$

(d) $\int x^2 - \frac{x}{\cos^2(x)} \, dx$

Výsledky:

(a) $\frac{1}{2} \cdot (x + \sin(x) \cos(x))$

(b) $\frac{\ln^2(x)}{x}$

(c) $-\frac{1}{\sin(x)-3}$

(d) $\frac{x^3}{3} - x \cdot \operatorname{tg}(x) - \ln |\cos(x)|$

Úloha 4.5. Vypočtěte objem tělesa, který vznikne rotací kolem osy x v místě pod grafem funkce $f(x) = -x^2 + 4$.

Výsledky:

$$\frac{512}{15} \pi.$$

Úloha 4.6. Na koncert kapely přicházeli diváci podle funkce $u(t) = -2t^3 + 33t^2 + 15000$, kde t je čas v minutách a $u(t)$ značí množství přichozích lidí. Jaká bude maximální rychlost růstu počtu lidí?

Výsledky:

$$u'(t) \text{ je rychlost růstu, tedy } u''(t) = 66 - 12t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{11}{2} \\ \Rightarrow u'(\frac{11}{2}) = 181.5 \text{ lidí/min.}$$

Úloha 4.7. Zisk obchodu je vyjádřen jako funkce počtu pokladen ve firmě $P(x) = 43000x \cdot e^{-0.1x}$, kde x je počet pokladen a $P(x)$ zisk v Kč. Při jakém počtu pokladen je maximalizován zisk a kolik činí?

Výsledky:

$x = 10$, maximální zisk činí cca 158188 Kč.

Úloha 4.8. Rybník je kontaminován odpadní vodou z továrny. Množství ryb, které v důsledku havárie uhynou za čas $t \in \langle 0, 30 \rangle$ v minutách, je vyjádřeno funkcí $p(t) = 0.1t^2 \cdot e^{-0.05t}$. Kolik ryb se otrávil během prvních 20 minut?

Výsledky:

Cca 254 ryb.

Úloha 4.9. Funkce poptávky je dána ve tvaru $P(q) = 100 - \frac{q}{8}$, přičemž q je počet ks a $P(q)$ je cena v Kč závislá na poptávaném množství. Jaká je průměrná cena v rozmezí poptávky mezi 85 a 105 ks?

Výsledky:

Cca 88 Kč.

Závěr

Studenti se často setkávají s otázkou, k čemu budou potřebovat to, co se v hodinách matematiky naučili. Psaní bakalářské práce na téma diferenciálního a integrálního počtu mne (a snad i studenty) přesvědčilo o tom, že má toto téma široké využití i v praxi.

Práce obsahuje teorii nutnou k pochopení příkladů, dále řešené příklady, které studentům pomohou pochopit užitečnost dané problematiky v praxi, a také neřešené příklady s výsledky, díky nimž si budou moci zopakovat a procvičit nastudovanou látku. Sbírku bude možno využívat nejen při hodinách matematiky, ale i pro samostatnou práci studenta, k dalšímu procvičení a lepšímu pochopení probírané látky.

Čtenář by měl po důkladném prostudování práce rozumět základním pojmům a umět je aplikovat na řešení reálných problémů nejen v ekonomii. K tomu mu z této práce zcela jistě pomohla celá řada teoretických definic, ale hlavně praktické příklady, obrázky nebo tabulky, které teorii velice dobře ilustrují a které se týkají elementárních funkcí, limit funkce, spojitosti funkce, derivací a jejich aplikací, neurčitého i určitého integrálu a jeho aplikací.

Summary

Students often face the question what is mathematics knowledge from school lessons good for. Writing a bachelor thesis with the topic of differential and integral calculus persuaded me (and hopefully the students) that this subject has wide application in practice.

The work includes the theory which is necessary for students to understand the examples, then solved examples to help students to understand the usefulness of the issue in practice. There are also unsolved examples with results that help them to revise and exercise more deeply the learned matter. The collection will be not available only when mathematics lessons, but also for independent student work, for further practising and better understanding of learned matter.

After having properly studied the collection, readers should understand the basic concepts and be able to apply them for solving real problems, not only in economics. A lot of theoretical definitions, practical examples, images or tables that illustrate the theory very well, should help students. These examples, images and tables are related to elementary functions, limits of functions, continuity of functions, derivations and their applications, indefinite and definite integral and its applications.

Keywords mathematics, calculus, function, derivation, integral

Literatura

- [1] NEILL, H.; QUADLING, D.: *Pure Mathematics 1*. Cambridge: Cambridge University Press, sedmé vydání, 2007, ISBN 978-0-521-53011-8.
- [2] NÝDL, V.; KLUFOVÁ, R.: *Matematika*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, Zemědělská fakulta, druhé opravené vydání, 2000, ISBN 80-7040-388-8.
- [3] NÝDL, V.; ŠULISTA, M.; WHITE-BARAVALLE, V.: *Matematický seminář pro ekonomy*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, Ekonomická fakulta, 2008, ISBN 978-80-7394-129-1.
- [4] PELANTOVÁ, E.: *Matematická analýza II*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2007, ISBN 978-80-01-03661-7.
- [5] PELANTOVÁ, E.; VONDRÁČKOVÁ, J.: *Matematická analýza 1*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004, ISBN 80-01-03011-3.
- [6] *Definice limity*. [cit. 2013-09-07]. Dostupné z: <http://math.feld.cvut.cz/mt/txtb/5/txc3ba5a.htm>
- [7] *Definiční obor*. [cit. 2013-09-07]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Defini%C4%8Dn%C3%AD_obor
- [8] *Derivace a monotonie*. [cit. 2013-09-07]. Dostupné z: <http://math.feld.cvut.cz/mt/txtc/2/txc3ca2c.htm>
- [9] *Funkce inverzní*. [cit. 2013-09-07]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jaroslav_richter/kap0/kap0.php?sec=inverze
- [10] *Funkce omezená*. [cit. 2013-09-07]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jaroslav_richter/kap0/kap0.php?sec=omezena
- [11] *Inflexní body tabulkovou metodou*. [cit. 2013-09-07]. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/karel.trnka/derivace/?page=43ibtm>
- [12] *Limita*. [cit. 2013-09-07]. Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Limita>

- [13] *Limita a spojitost funkce*. [cit. 2013-09-07]. Dostupné z: <http://user.mendelu.cz/pospisi2/limita.pdf>
- [14] *Limity - vzorce*. [cit. 2013-09-07]. Dostupné z: <http://www.aristoteles.cz/matematika/limity/limity-vzorce.php>
- [15] *l'Hospitalovo pravidlo*. [cit. 2013-09-07]. Dostupné z: <http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/lhospitalovo-pravidlo.html>
- [16] *Monotonie reálných funkcí*. [cit. 2013-09-07]. Dostupné z: <http://math.feld.cvut.cz/mt/txtb/3/txc3ba3e.htm>
- [17] *Monotónní funkce*. [cit. 2013-09-07]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Monot%C3%B3nn%C3%AD_funkce
- [18] *Obor hodnot*. [cit. 2013-09-07]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Obor_hodnot
- [19] *Skládání funkcí*. [cit. 2013-09-07]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Skl%C3%A1d%C3%A1n%C3%AD_funkc%C3%AD
- [20] *Taylorova řada*. [cit. 2013-09-07]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Taylorova_%C5%99ada
- [21] JEŽKOVÁ, M.: Integrální počet v ekonomii. 2008. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/151154/prif_b/
- [22] KALVODA, T.; MILOTA, J.: Další aplikace integrálu. 2012, přednáška na FIT ČVUT v Praze.
- [23] KALVODA, T.; MILOTA, J.: Derivace. 2012, přednáška na FIT ČVUT v Praze.
- [24] KALVODA, T.; MILOTA, J.: Posloupnosti. 2012, přednáška na FIT ČVUT v Praze.
- [25] KALVODA, T.; MILOTA, J.: Použití integrálu. 2012, přednáška na FIT ČVUT v Praze.
- [26] KALVODA, T.; MILOTA, J.: Primitivní funkce. 2012, přednáška na FIT ČVUT v Praze.
- [27] KALVODA, T.; MILOTA, J.: Průběh funkce. 2012, přednáška na FIT ČVUT v Praze.
- [28] KALVODA, T.; MILOTA, J.: Spojitost funkce. 2012, přednáška na FIT ČVUT v Praze.
- [29] KALVODA, T.; MILOTA, J.: Určitý integrál. 2012, přednáška na FIT ČVUT v Praze.

Seznam obrázků

1	Funkce $\operatorname{sgn} x$	5
2	Dirichletova funkce.	6
3	Grafy elementárních funkcí.	7
4	Význam derivace.	11
5	Tečna ke grafu funkce.	12
6	Stacionární body.	15
7	Funkce $-(x+1)(x+2)$	16
8	Konvexnost a konkávnost funkce.	17
9	Inflexní body.	18
10	Lokální extrém.	18
11	Obsah plochy ohraničující graf funkce a osa x	26
12	Obsah plochy ohraničující nespojitá funkce, osa x a integrační meze.	27
13	Obsah plochy mezi dvěma funkcemi.	27
14	Funkce $\frac{x^3}{x^2-1}$	44
15	Rotační válec vepsaný do rotačního kužele.	47
16	Množství prodaných vstupenek v divadle v závislosti na ceně.	55
17	Obsah plochy ohraničující graf funkce $y = -x^2 + 4$ a osa x	63
18	Přebytek spotřebitele a výrobce.	66

Seznam tabulek

1	Základní vzorce pro derivování.	14
2	Základní vzorce pro integrování.	23

Seznam použitých zkratek

$\in$	symbol pro příslušnost prvku k množině
$\cap$	průnik množin
$\cup$	sjednocení množin
$\subset$	podmnožina
$\exists$	existenční kvantifikátor
$\forall$	obecný kvantifikátor
$\sum$	suma, součet
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^*$	rozšířená množina reálných čísel ($\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{R}^-$	množina záporných reálných čísel
$\mathbb{R}_{\neq 0}$	množina nenulových reálných čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\setminus$	množinový rozdíl
$\wedge$	konjunkce
$\vee$	disjunkce
$\Rightarrow$	implikace
$\Leftrightarrow$	ekvivalence
$:=, =:$	rovnost definující nový objekt

Obsah přiloženého CD

BP_Vojtech_Kozelka.pdf..... text práce ve formátu PDF