UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Andrea Fofová

Body, přímky a kružnice v trojúhelníku

Olomouc 2018

vedoucí práce: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Poděkování

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce za vedení, zájem, připomínky a čas, který mi věnoval. Mé poděkování patří též mé rodině a blízkým přátelům za pomoc a podporu během studia.

Obsah

Úvod

Cílem mé práce je seznámit sebe a čtenáře nejen se základními a všeobecně známými geometrickými body v trojúhelníku, ale i s některými méně častými a méně známými geometrickými místy trojúhelníku. V práci jsem se zaměřila na významné body, přímky a kružnice trojúhelníku. V této práci předpokládám základní znalosti z geometrie.

V kapitole „Základní geometrické prvky trojúhelníku“ si zopakujeme, co o trojúhelníku známe již ze základní školy. Kapitolu jsem zařadila, jelikož všechny v ní uvedené pojmy je potřeba znát a jsou využívány k vysvětlení a definování ostatních bodů, přímek a kružnic v trojúhelníku.

Během vyhledávání a studia materiálů jsem zjistila, že je jen málo publikací zabývajících se více než základními informacemi o trojúhelníku.

Cílem této mé práce je srozumitelným způsobem přiblížit, co vše jsem k tématu vyhledala, nastudovala a zpracovala. Byla bych ráda, kdyby má práce byla srozumitelná i pro žáky nižších stupňů škol.

Za důležité prvky mé práce považuji obrázky (konstrukce), které dokáží nejlépe ilustrovat, kde dané body, přímky, kružnice leží a jak vypadá jejich určování a jejich vzájemná interakce.

Trojúhelník

Trojúhelník je základní konvexní útvar v rovině, takřka všechny rovinné obrazce se dají rozdělit na trojúhelníky.

Konvexní útvar K afinního prostoru A_n = <A, V_n> je geometrický útvar, pro který platí: je-li $X \in K \wedge Y \in K \Rightarrow XY \subset K$.

A tedy znalost trojúhelníků, jeho bodů, přímek a kružnic nám umožňuje pracovat i s ostatními obrazci. Pomáhá nám nejen při konstrukcích, ale také výpočtech obsahů, délek, apod.

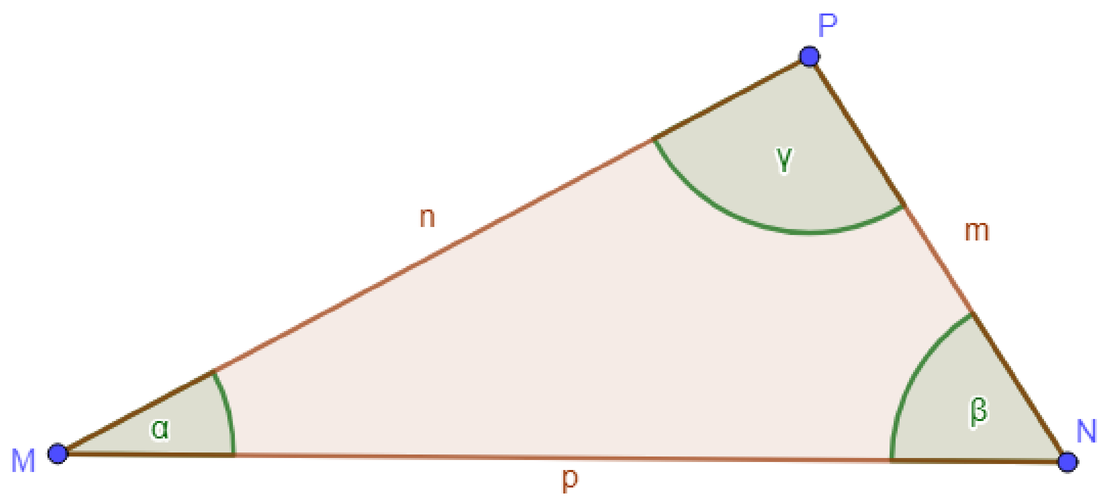
Příklady definic trojúhelníku:

Definice: Nechť *M, N, P* jsou tři různé nekolineární body v A_2. Trojúhelník *MNP* je průnikem tří polorovin $\rightarrow(MNP) \cap \rightarrow(MPN) \cap \rightarrow(NPM)$. [10]

Definice: Nechť *M, N, P* jsou tři různé nekolineární body v A_2. Trojúhelník *MNP* je podmnožinou nositelky afinního prostoru A_2 = <A, V_2> definovanou:

$\triangle MNP = \{X \in A: X = M + t_1(N - M) + t_2(P - M);\ t_1 \in \langle 0; 1\rangle \wedge t_2 \in \langle 0; 1 - t_1\rangle;\ t_1, t_2 \in \Re\}$. [10]

Trojúhelník má tři vrcholy (značí se velkými písmeny např. *A, B, C* nebo *M, N, P* apod.), tři strany (každá strana leží naproti odpovídajícímu vrcholu), tři vnitřní úhly (α, β, γ)



Obrázek 1 - Trojúhelník

Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je vždy 180°. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Druhy trojúhelníků:

1) Dle stran
    a. Rovnostranný – všechny strany jsou stejně dlouhé
    b. Rovnoramenný – dvě strany jsou stejně dlouhé
    c. Různostranný – každá strana je jiné délky
2) Dle úhlů
    a. Ostroúhlý – všechny vnitřní úhly jsou ostré
    b. Pravoúhlý – jeden vnitřní úhel je pravý, dva ostré
    c. Tupoúhlý - jeden vnitřní úhel je tupý, dva ostré

Úhly

Konvexní úhel: Nechť *M, N, P* jsou tři různé nekolineární body v A_2. Konvexní úhel (označení ∠MPN) je průnikem polorovin →(PMN) ∩ →(PNM).

Je zřejmě $\angle MPN = \{X \in A_2 : X = P + t(M - P) + s(N - P),\ t \geq 0,\ s \geq 0\}$.[10]

Nekonvexní úhel: Úhel, který není konvexní, je nekonvexní.

Druhy úhlů:

- Úhel α je nekonvexní, pokud platí: $180° < \alpha \leq 360°$
- Úhel α je konvexní, pokud platí: $0° \leq \alpha \leq 180°$

Konvexní úhly dělíme:

- Úhel α je nulový, pokud platí: $\alpha = 0°$
- Úhel α je ostrý, pokud platí: $0° < \alpha < 90°$
- Úhel α je pravý, pokud platí: $\alpha = 90°$
- Úhel α je tupý, pokud platí: $90° < \alpha < 180°$
- Úhel α je přímý, pokud platí: $\alpha = 180°$

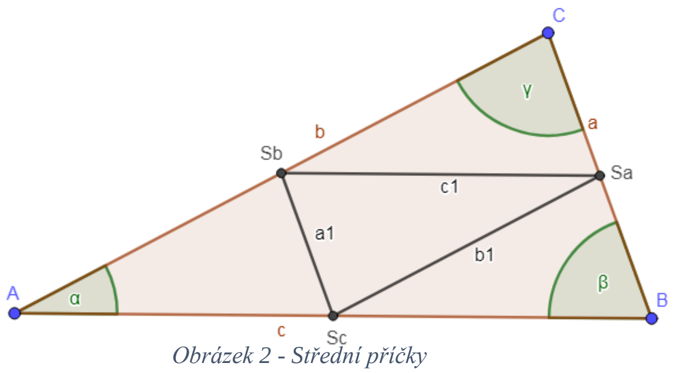
Základní geometrické prvky trojúhelníku

Střední příčky

Střední příčky jsou úsečky spojující středy stran v trojúhelníku. Rozdělením trojúhelníku středními příčkami vzniknou 4 shodné trojúhelníky, tyto trojúhelníky jsou podobné s původním trojúhelníkem.

Každá střední příčka je rovnoběžná se stranou, jejíž střed nespojuje a její délka je poloviční vůči délce této strany. S touto stranou je též stejnolehlá se středem stejnolehlosti v protilehlém vrcholu a s koeficientem stejnolehlosti rovným $\frac{1}{2}$.

- $a \parallel a_1$,
- $b \parallel b_1$,
- $c \parallel c_1$



Obrázek 2 - Střední příčky

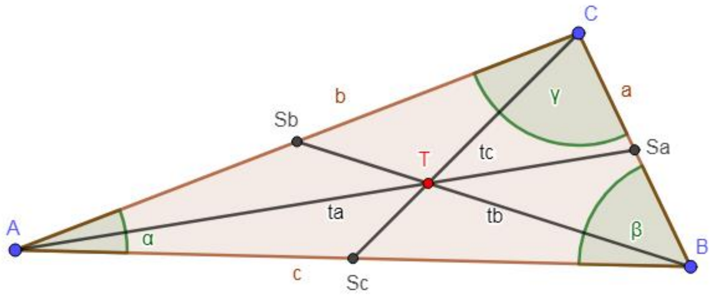
$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot a, \qquad b_1 = \frac{1}{2} \cdot b, \qquad c_1 = \frac{1}{2} \cdot c$$

Těžnice trojúhelníku

Těžnice jsou úsečky spojující vrchol se středem protější strany.

Těžnice se protnou vždy uvnitř trojúhelníku. Bod, ve kterém se těžnice protnou, se nazývá **těžiště**, značíme *T*. Těžiště je bod rovnováhy.

Těžiště dělí těžnici v poměru 1:2. $|AT| = 2 \cdot |TS_a|$, $|AT| = \frac{2}{3} t_a$, $|TS_a| = \frac{1}{3} t_a$,



Obrázek 3 - Těžnice

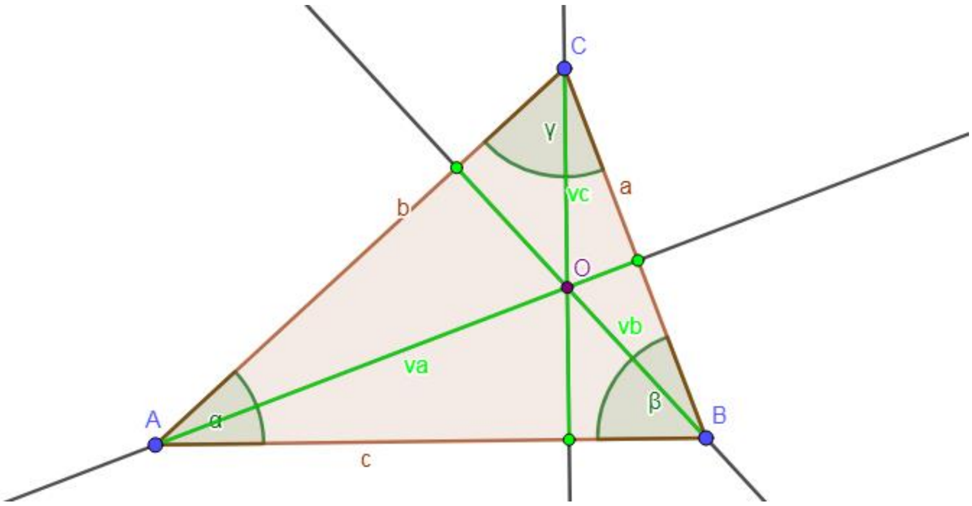
Výšky v trojúhelníku

Výška je kolmice z vrcholu na protější stranu trojúhelníku.

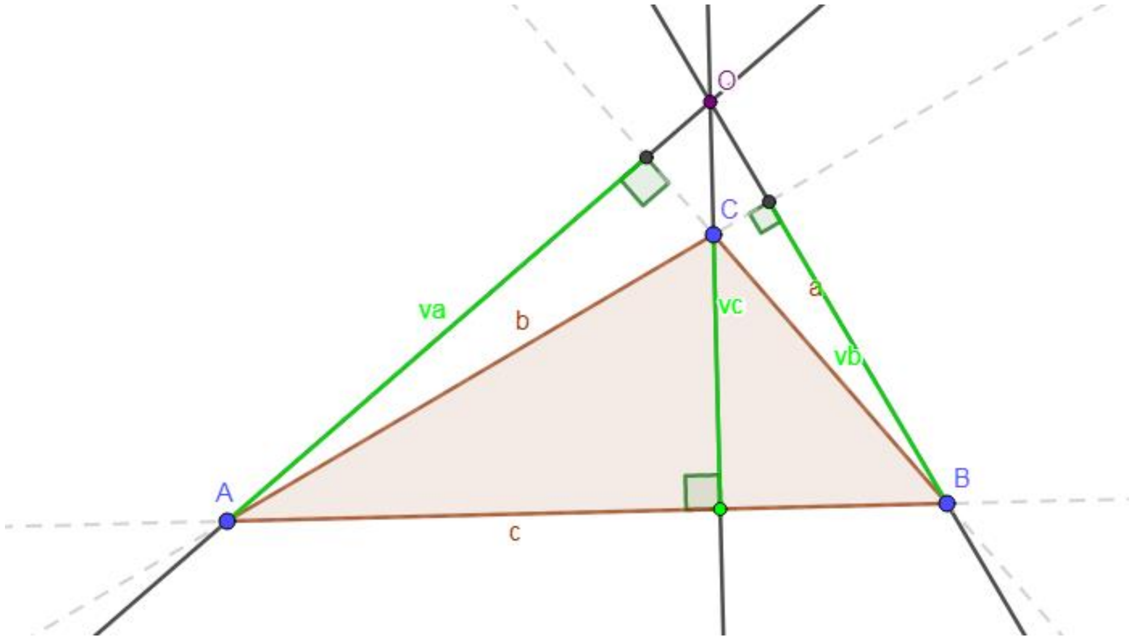
Pro výpočty se uvažuje vzdálenost od vrcholu k přímce, na které leží strana trojúhelníku. Výšky používáme pro jednu z možností výpočtu obsahu trojúhelníku.

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

Průsečík přímek, na kterých leží výšky, se nazývá **ortocentrum**, značíme ***O***. Ortocentrum leží u ostroúhlého trojúhelníku uvnitř trojúhelníku, u tupoúhlého vně trojúhelníku a u pravoúhlého ve vrcholu s pravým úhlem.



Obrázek 4 - Výšky v ostroúhlém trojúhelníku



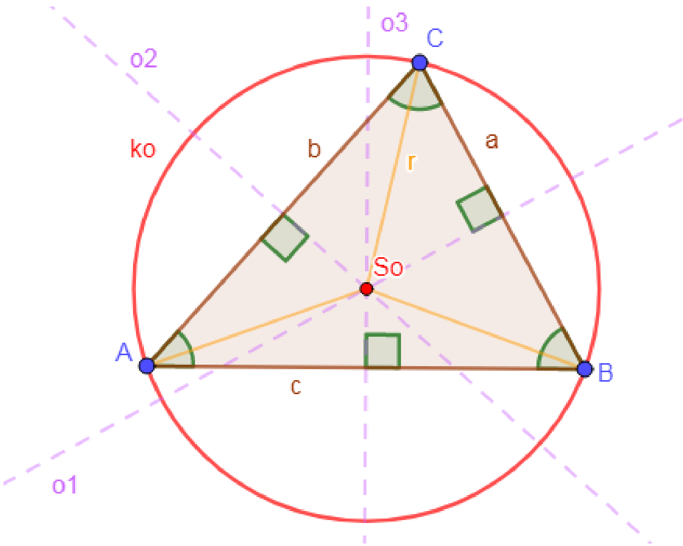
Obrázek 5 - Výšky v tupoúhlém trojúhelníku

Kružnice opsaná trojúhelníku

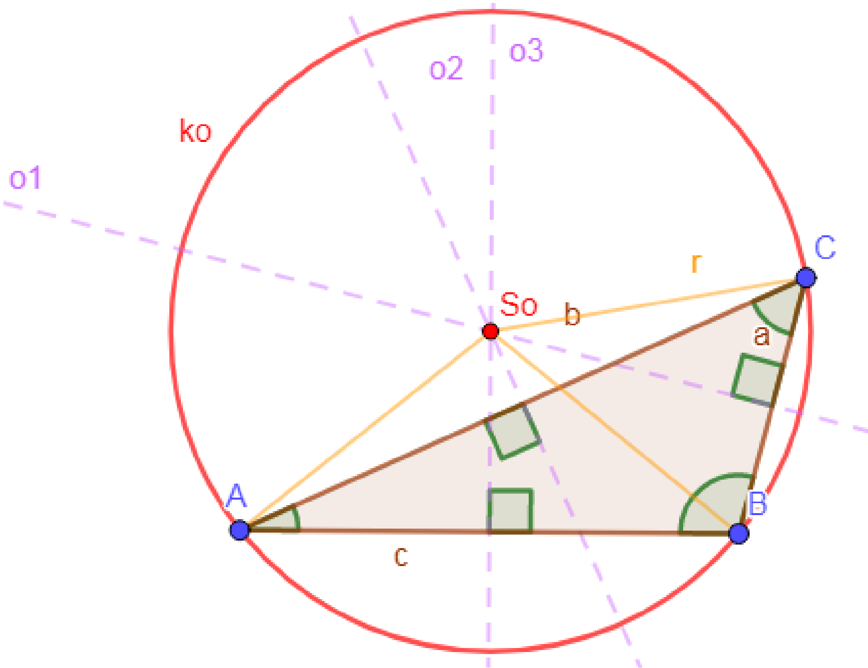
Kružnice trojúhelníku opsaná je taková kružnice, na níž leží všechny vrcholy trojúhelníku.

Střed kružnice opsané tvoří průsečík os stran. Značíme S_O. Střed kružnice opsané leží u ostroúhlého trojúhelníku uvnitř trojúhelníku, u tupoúhlého vně trojúhelníku a u pravoúhlého uprostřed nejdelší strany, strany naproti pravému úhlu (Thaletova věta).

Poloměr kružnice trojúhelníku opsané je vzdálenost průsečíku os stran a vrcholu trojúhelníku.



Obrázek 6 - Kružnice opsaná - ostroúhlý trojúhelník.

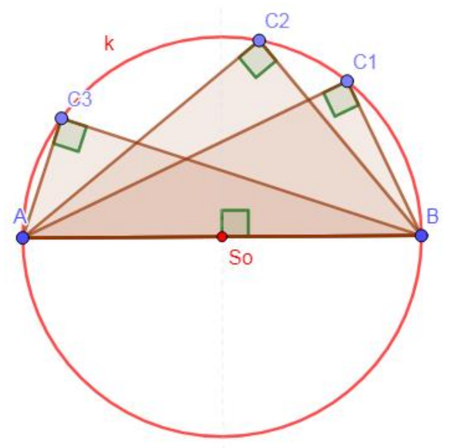


Obrázek 7 - Kružnice opsaná - tupoúhlý trojúhelník

Thaletova věta (kružnice)

Thaletova kružnice je kružnice opsaná pravoúhlému trojúhelníku.

Máme-li úsečku AB a sestrojíme-li kružnici, jejíž střed leží uprostřed úsečky AB a poloměr kružnice je $r = \frac{1}{2}|AB|$, pak všechny body na dané kružnici (kromě bodu A a B) tvoří vrcholy pravoúhlého trojúhelníku ABC.



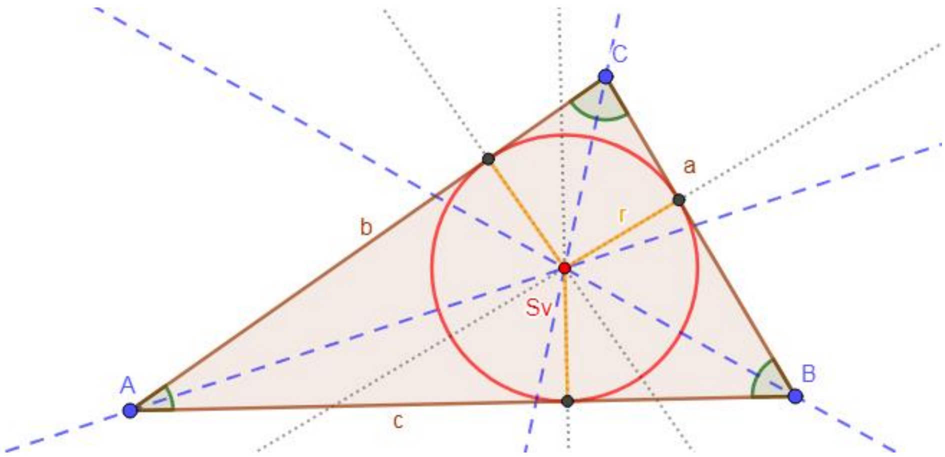
Obrázek 8 - Thaletova kružnice

Kružnice vepsaná trojúhelníku

Kružnice trojúhelníku vepsaná je kružnice, která leží uvnitř trojúhelníku a dotýká se všech tří jeho stran. Strany trojúhelníku mají s kružnicí jeden dotyk, jsou tedy tečnami kružnice.

Střed kružnice trojúhelníku vepsané tvoří průsečík os vnitřních úhlů trojúhelníka. Značíme $\boldsymbol{S_v}$.

Poloměr kružnice trojúhelníku vepsané je kolmice ze středu S_v na strany trojúhelníka.



Obrázek 9 - Kružnice vepsaná

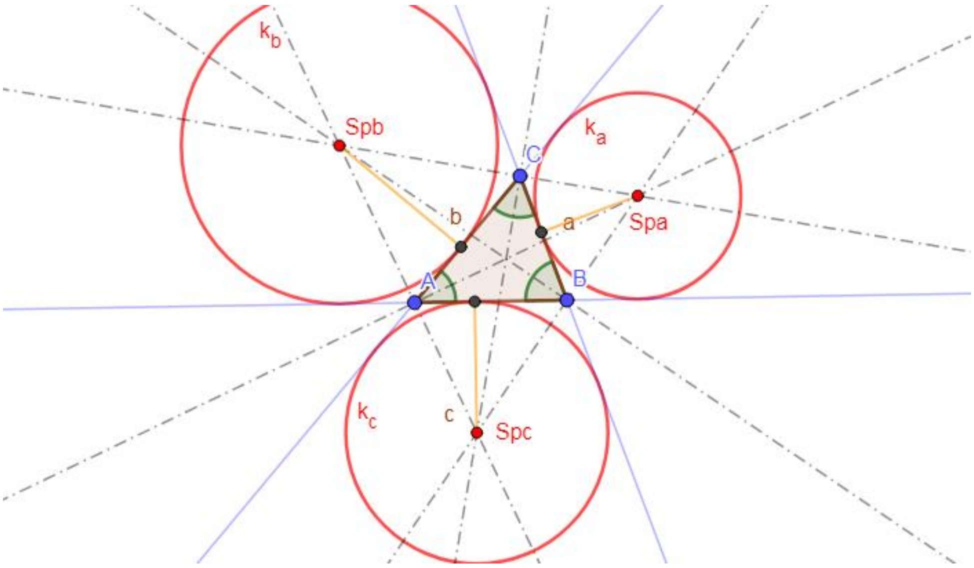
Kružnice připsaná trojúhelníku

Kružnice trojúhelníku připsaná je kružnice, která se dotýká strany trojúhelníku „zvenku“ a přímek, na kterých leží zbývající dvě strany trojúhelníku.

Každý trojúhelník má tři připsané kružnice.

Střed kružnice trojúhelníku připsané je průsečík os vnitřních úhlů trojúhelníka a úhlů těmto úhlům připsaných (osy úhlů a kolmice na tyto osy ve vrcholech trojúhelníku).

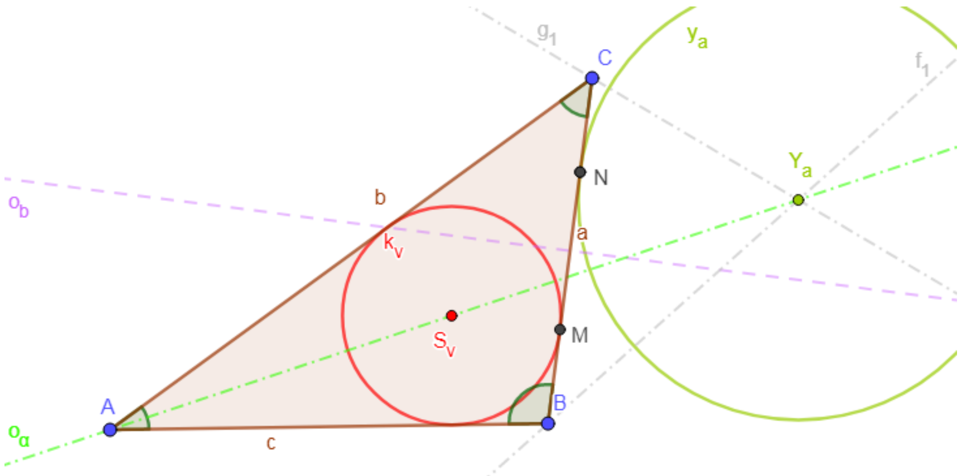
Poloměr kružnice trojúhelníku připsané je kolmice ze středu kružnic na strany trojúhelníku.



Obrázek 10 - Kružnice připsané

Pro body dotyku kružnice připsané (N) a kružnice vepsané (M) platí:

$$|BM| = |NC|$$



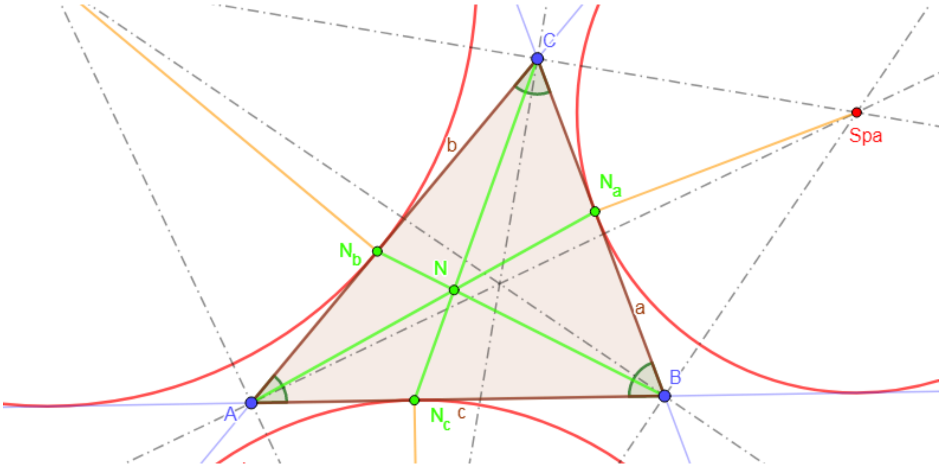
Obrázek 11 - Kružnice připsaná a vepsaná

Významné body a přímky

Nagelův bod

Mějme body dotyku kružnic připsaných trojúhelníku *ABC*. Nazveme je N_a, N_b, N_c.

Spojíme-li tyto body s protilehlými vrcholy, pak bod, kde se spojnice protnou, nazýváme Nagelův bod. Značíme ***N***. Leží vždy uvnitř trojúhelníku.

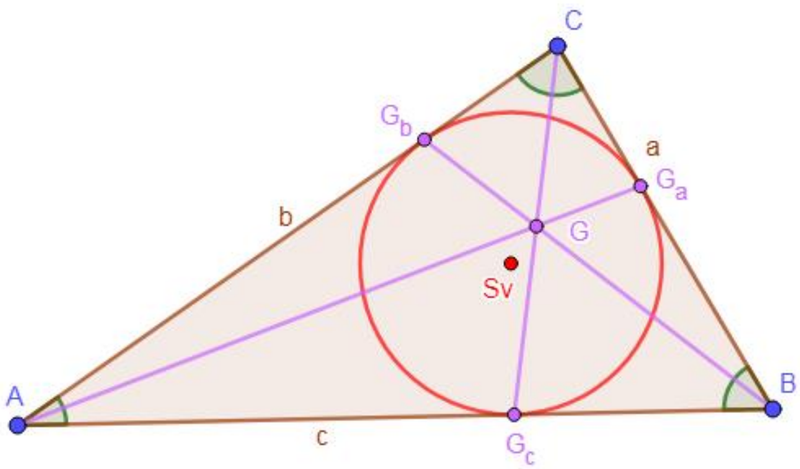


Obrázek 12 - Nagelův bod

Gergonnův bod

Mějme body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku *ABC* s jeho stranami. Nazveme je G_a, G_b, G_c. Spojíme-li tyto body s protilehlými vrcholy, pak bod, kde se spojnice protnou, nazýváme Gergonův bod. Značíme ***G***. Leží vždy uvnitř trojúhelníku.

- Pro Gergonův bod platí: $|A\ G_b| = |A\ G_c|,\ |B\ G_a| = |B\ G_c|,\ |C\ G_a| = |C\ G_b|$

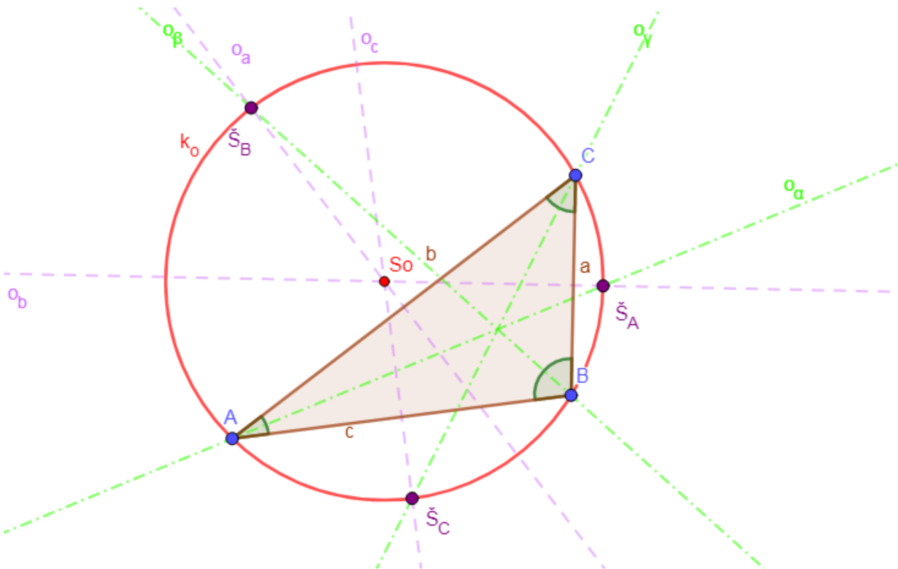


Obrázek 13 - Gergonnův bod

Švrčkův bod

Švrčkův bod je průsečík kružnice trojúhelníku opsané s osou strany a osou úhlů protilehlého dané straně. Trojúhelník má 3 Švrčkovy body - $Š_A$, $Š_B$, $Š_C$.

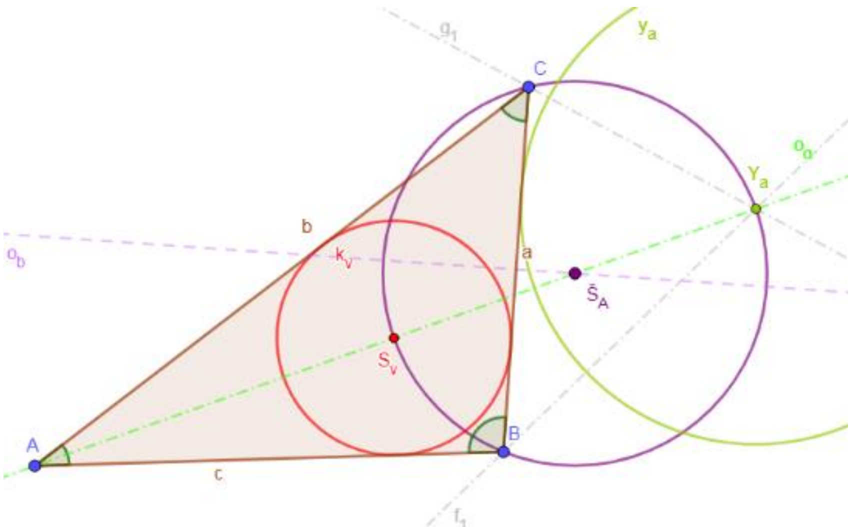
- $Š_A$ je průsečík kružnice opsané, osy na stranu a, a osy úhlu α.
- $Š_B$ je průsečík kružnice opsané, osy na stranu b, a osy úhlu β.
- $Š_C$ je průsečík kružnice opsané, osy na stranu c, a osy úhlu γ.



Obrázek 14 - Švrčkův bod

Pro Švrčkův bod platí, že jeho vzdálenost od středu kružnice trojúhelníku vepsané je stejná jako od kružnice trojúhelníku připsané.

$$|S_v Š_A| = |Y_a Š_A|$$

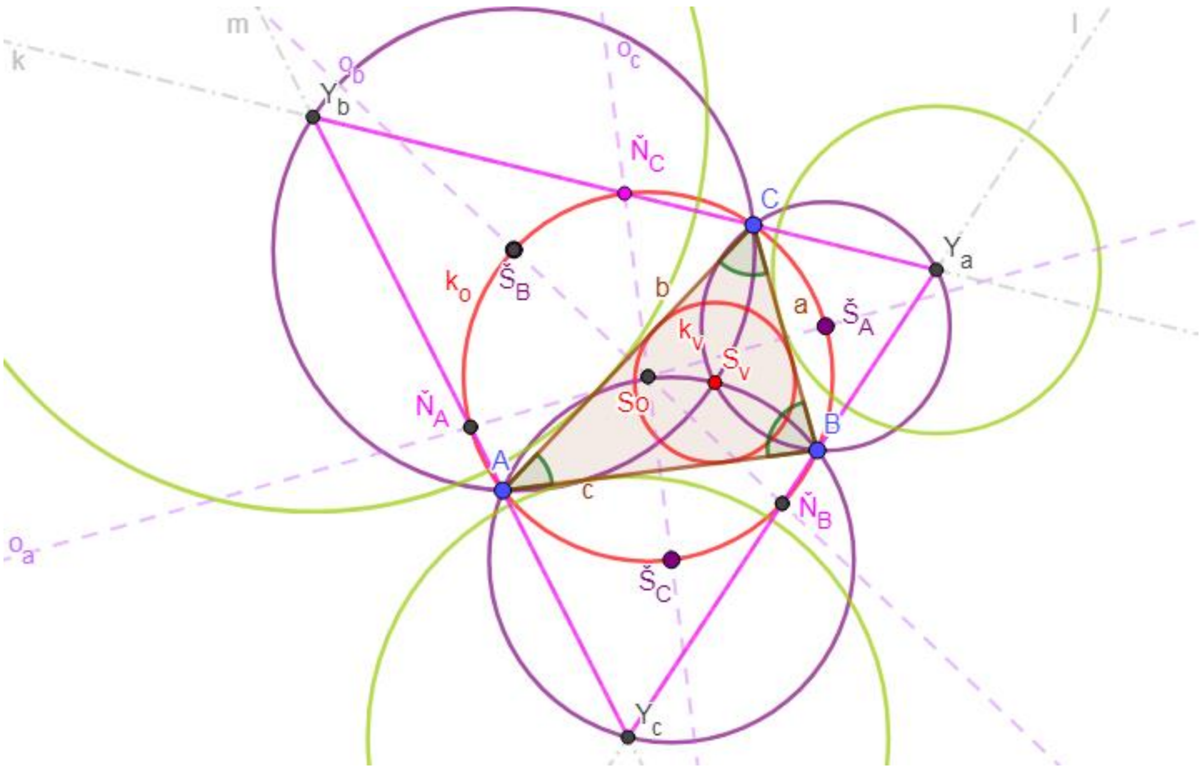


Obrázek 15 - Poloha Švrčkova bodu

Antišvrk (bod)

Tento bod je obdobou Švrčkova bodu, vznikne, pokud místo vnitřní osy úhlu vezmeme tu vnější. Trojúhelník má 3 antišvrky - $Ň_A$, $Ň_B$, $Ň_C$.

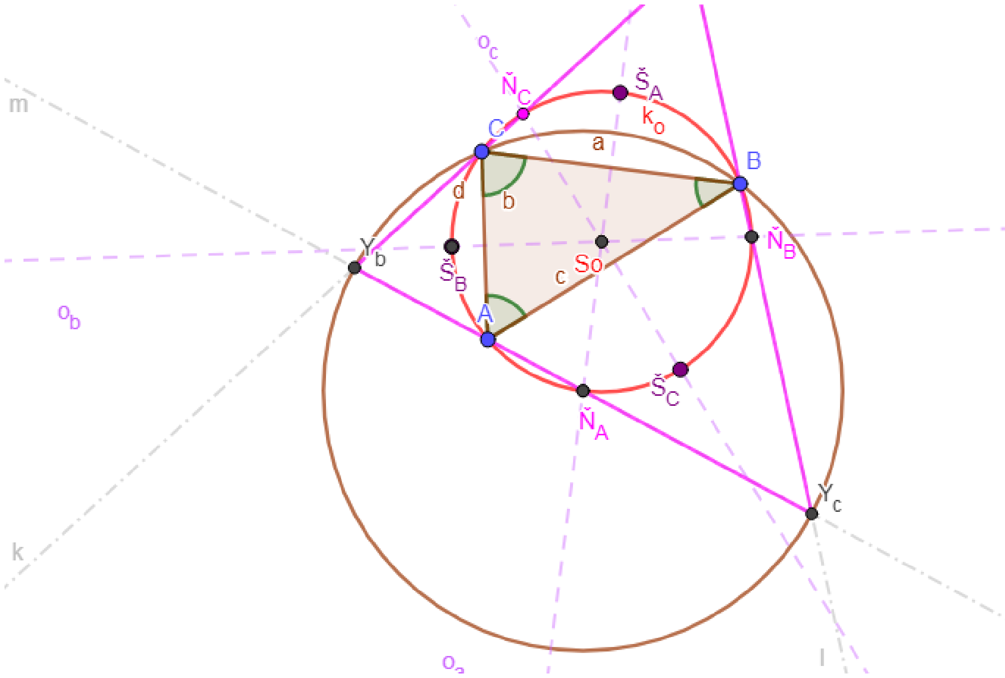
- $Ň_A$ je průsečík kružnice opsané, osy na stranu a, a vnější osy úhlu α.
- $Ň_B$ je průsečík kružnice opsané, osy na stranu b, a vnější osy úhlu β.
- $Ň_C$ je průsečík kružnice opsané, osy na stranu c, a vnější osy úhlu γ.



Obrázek 16 – Antišvrk

Antišvrk leží v rámci kružnice opsané trojúhelníku *ABC* vždy naproti Švrčkova bodu. Platí tedy že: $|Š_A Ň_A| = |Š_B Ň_B| = |Š_C Ň_C| = průměr\ kružnice\ opsané\ \triangle ABC$

Antišvrk je vždy na spojnici dvou středů kružnic připsaných a je uprostřed mezi nimi. Zároveň je středem kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku, který je tvořen dvěma středy kružnic připsaných a dvěma vrcholy trojúhelníku (třetí vrchol leží na spojnici středů kružnic připsaných). $|Y_b Ň_A| = |Y_c Ň_A| = |C Ň_A| = |B Ň_A|$



Obrázek 17 - Antišvrk poloha

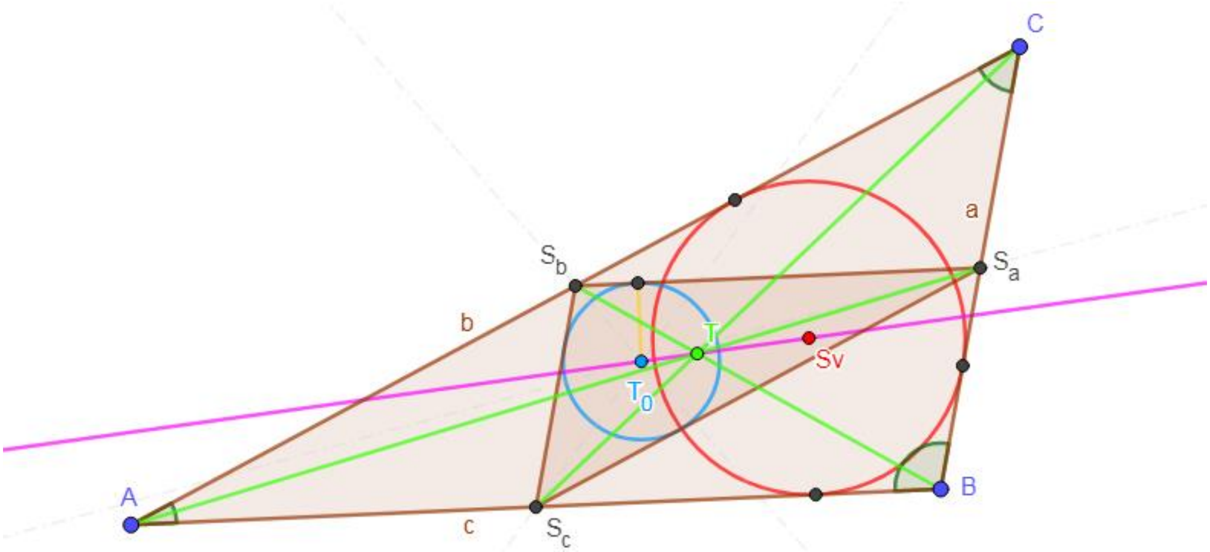
Spiekerův bod

Spiekerův bod je střed kružnice vepsané do trojúhelníku ze středních příček, značíme $\boldsymbol{T_o}$.

Jiná definice říká, že Spiekerův bod je těžiště z obvodu trojúhelníka *ABC*.

Platí, že střed kružnice vepsané, těžiště a Spiekerův bod (S_v, T, T_o), leží na jedné přímce.

Pro S_v, T, T_o platí: T leží mezi S_v a T_o. $|T\,S_v| = 2 \cdot |T\,T_o|$



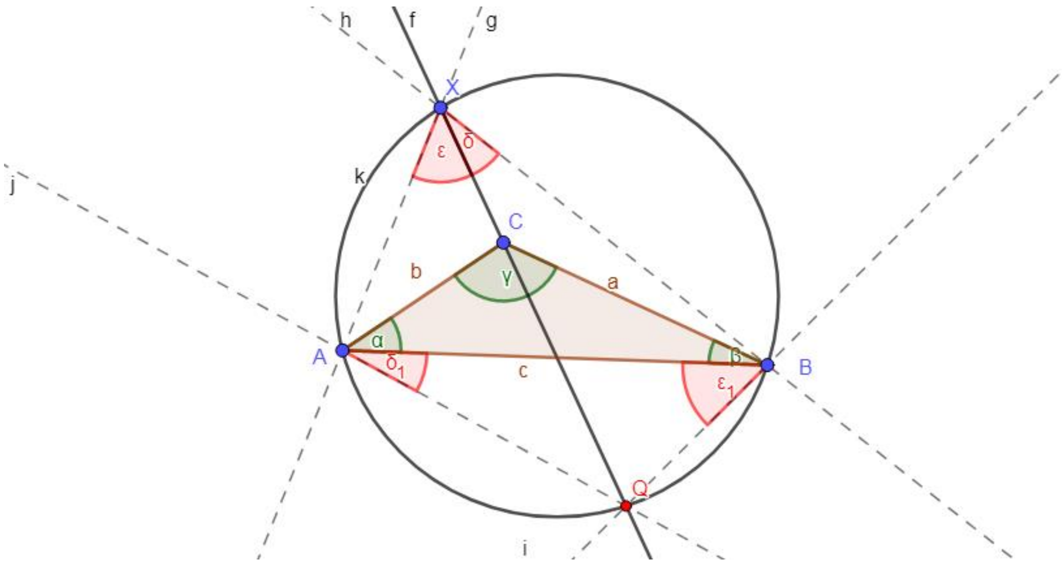
Obrázek 18 - Spiekerův bod

Collinsův bod

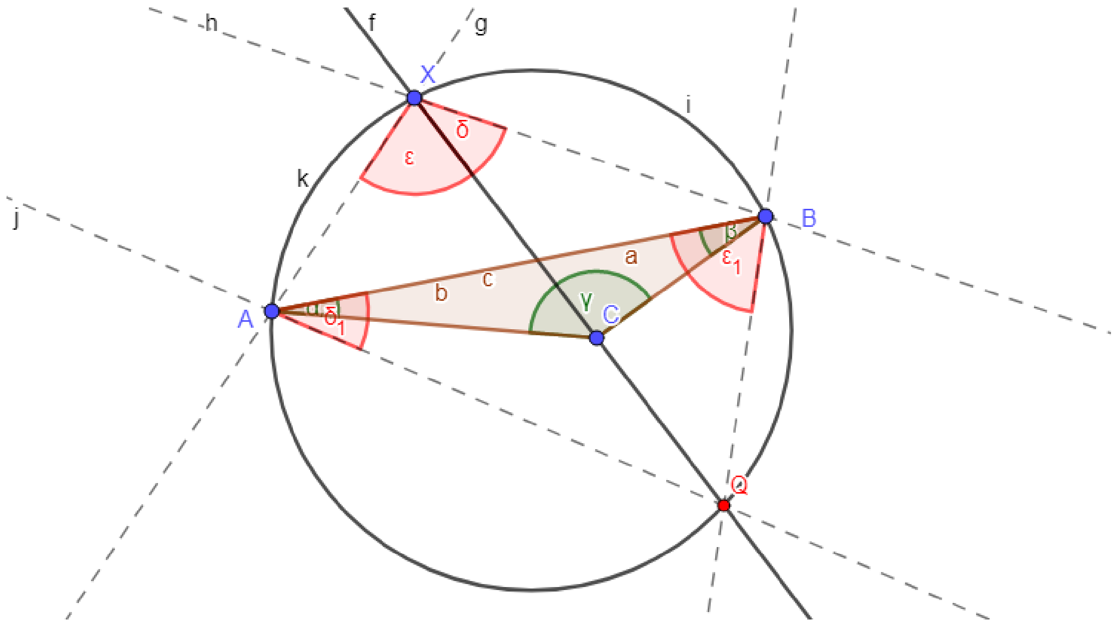
Vlastností Collinsova bodu se využívá u zpětného promítání a při určování souřadnic neznámého bodu *X*. Collinsův bod je na obrázku označen ***Q***.

Známe-li polohu bodů *A*, *B*, *C* a úhly $\sphericalangle AXC,\ \sphericalangle AXB, \sphericalangle CXB$, pak můžeme najít bod *Q*, jelikož platí:

1) $\sphericalangle AXC = \sphericalangle ABQ, \sphericalangle CXB = \sphericalangle BAQ$
2) Body *Q*, *C*, *X* leží na jedné přímce



Obrázek 19 - Collinsův bod

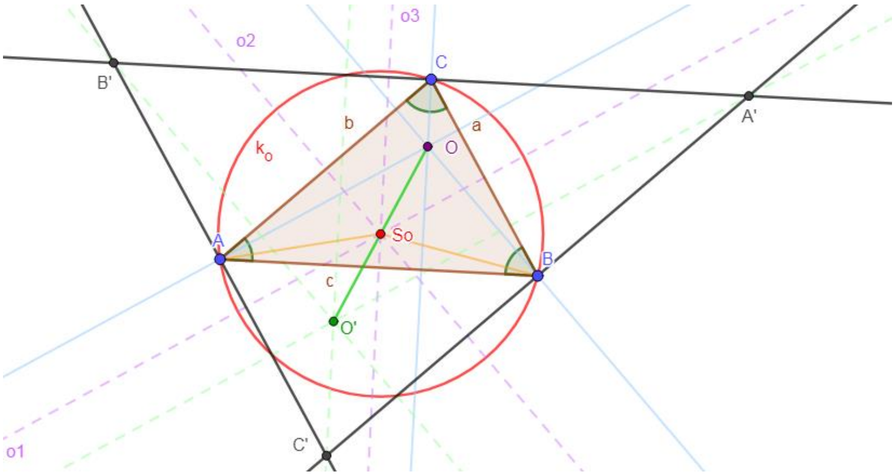


Obrázek 20 - Collinsův bod 2

Longchampův bod

Longchampův bod je bod středově souměrný k ortocentru (průsečík výšek), kde středem souměrnosti je střed kružnice opsané (průsečík os stran). Značíme ***O´***.

Longchampův bod je tedy ortocentrem pro trojúhelník, jehož střední příčky tvoří původní trojúhelník *ABC*.



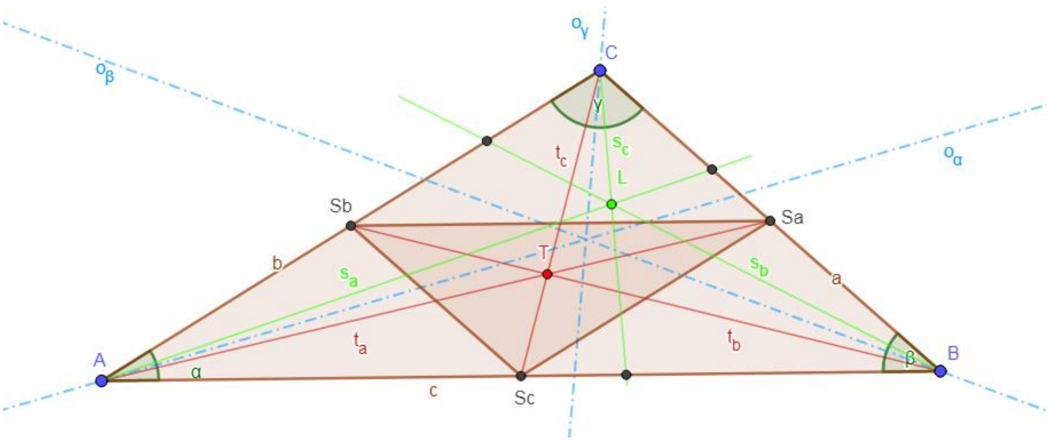
Obrázek 21 - Longchampův bod

Lemoinův bod

Lemoinův bod je průsečík symedián v trojúhelníku. Leží vždy uvnitř trojúhelníku. Značíme ***L***. Pro Lemoinův bod platí, že součet čtverců vzdáleností od stran trojúhelníku je nejmenší.

Symediána

- Je úsečka, která vznikne jako osově souměrný obraz těžnice podle osy příslušného úhlu (těžnice na stranu *a*, dle osy úhlu α, atd.).



Obrázek 22 - Lemoinův bod

Eulerova přímka

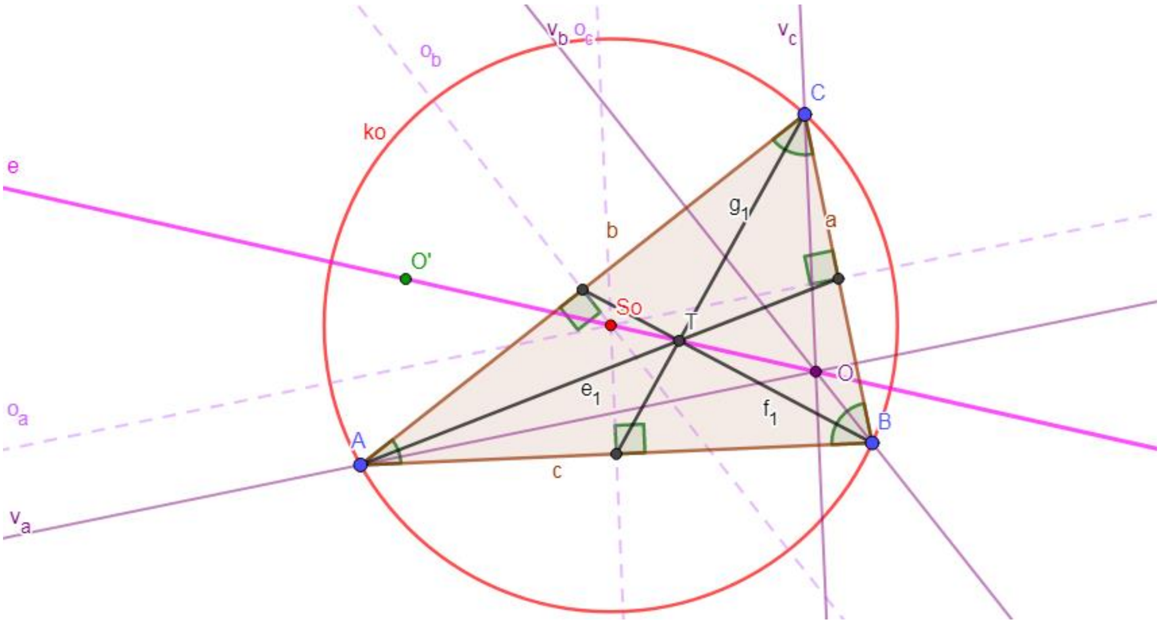
Eulerova přímka je definována jako přímka, na které leží ortocentrum (průsečík výšek), těžiště (průsečík těžnic) a střed kružnice opsané.

Na Eulerově přímce leží také Londchampův bod ($O´$) a střed kružnice devíti bodů (D). Body leží v pořadí: $O, D, T, S_o, O´$.

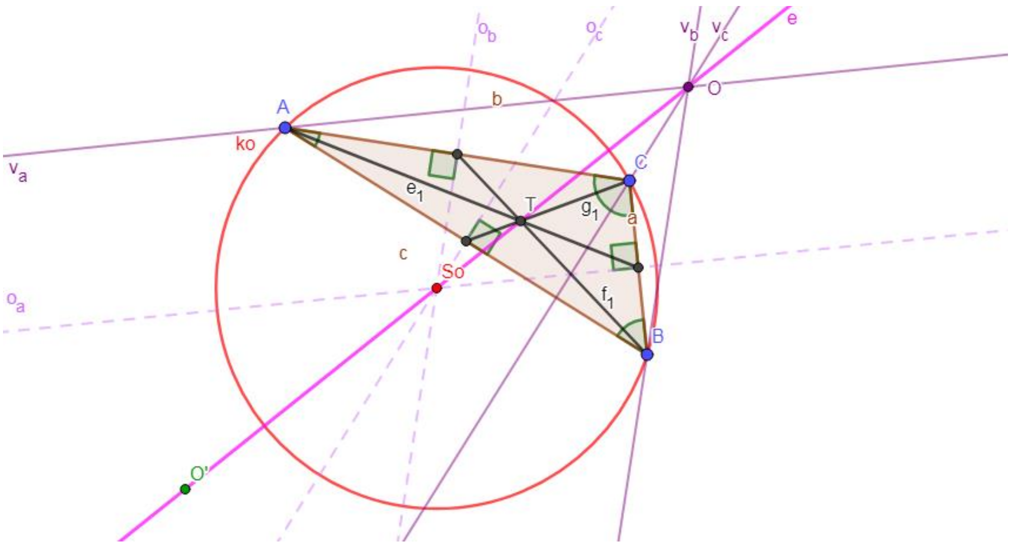
V rovnostranném trojúhelníku všechny tyto body splývají, a proto přímka neexistuje.

Pro body na Eulerově přímce platí:

$$|O´S_o| = |OS_o|, \quad 3 \cdot |TS_o| = |OS_o|, \quad 6 \cdot |DT| = |OS_o|$$



Obrázek 23 - Eulerova přímka

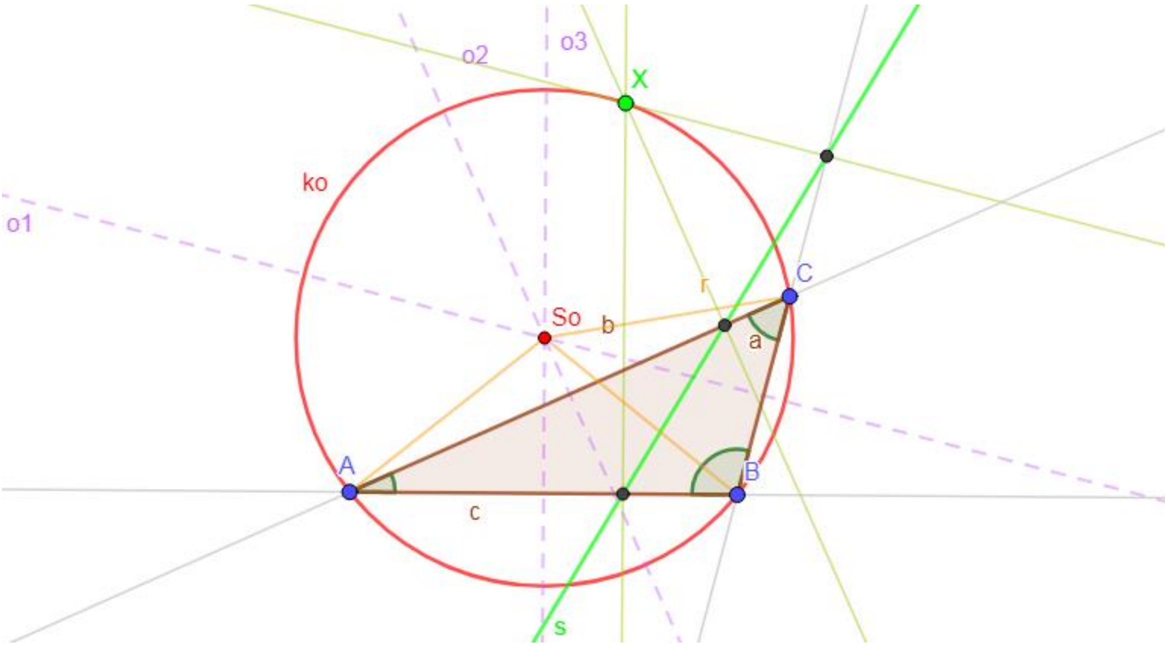


Obrázek 24 - Eulerova přímka v tupoúhlém trojúhelníku

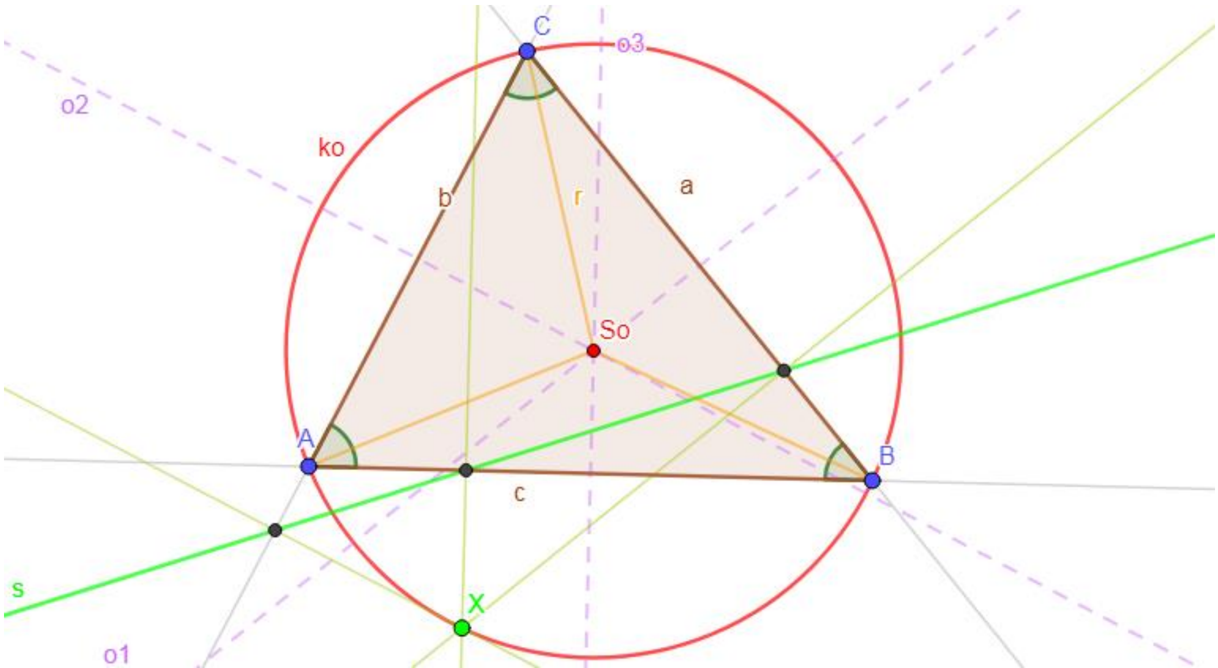
Simsonova přímka nebo též Wallaceova přímka

Každý trojúhelník může mít nekonečně mnoho těchto přímek, Simsonova přímka je vždy vztažena k určitému bodu ***X***, který náleží kružnici trojúhelníku opsané.

Zvolme si na kružnici trojúhelníku opsané libovolný bod *X*. Z bodu *X* sestrojíme kolmice na strany trojúhelníku, pak paty těchto kolmic leží na jedné přímce. Tato přímka je Simsonova přímka pro daný bod *X*.



Obrázek 25 - Simsonova přímka v tupoúhlém trojúhelníku



Obrázek 26 - Simsonova přímka v ostroúhlém trojúhelníku

Významné kružnice v trojúhelníku

Feuerbachova kružnice nebo též kružnice devíti bodů

Feuerbachova kružnice je kružnice, na níž leží následujících devět bodů:

- středy stran S_a, S_b, S_c
- paty výšek P_a, P_b, P_c
- středy spojnic vrcholů s ortocentrem A_0, B_0, C_0

Tato kružnice má body dotyku s kružnicí vepsanou (*F*) a kružnicemi připsanými trojúhelníku (*K*, *L*, *M*). Což jako první dokázal německý matematik Karl Wilhelm Feuerbach, proto Feuerbachova kružnice.

Poloměr kružnice devíti bodů (r_f)je polovinou poloměru kružnice opsané (r_o).

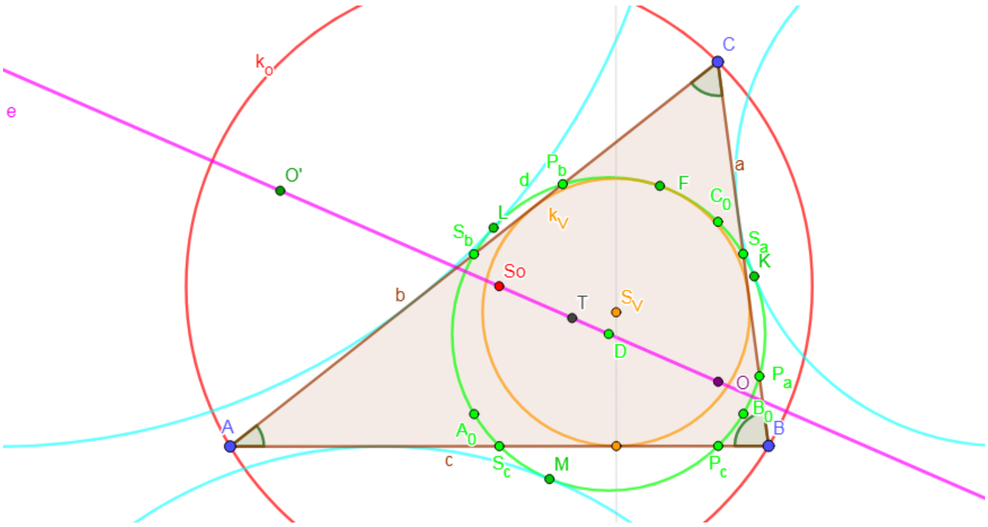
$$r_f = \frac{1}{2} r_o$$

Feuerbachův bod

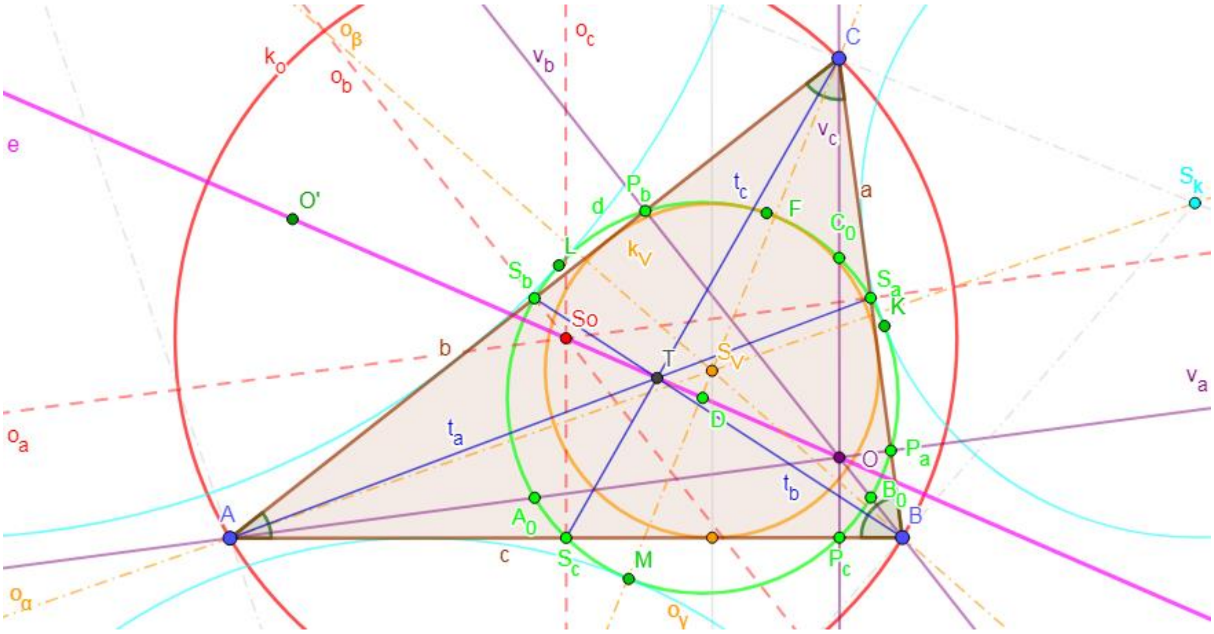
- Bod dotyku kružnice devíti bodů a kružnice trojúhelníku vepsané. Značíme ***F***.

Střed kružnice devíti bodů

- Leží uprostřed mezi ortocentrem (*O*) a středem kružnice trojúhelníku opsané (S_O). Značíme ***D***.
- Střed kružnice devíti bodů leží na Eulerově přímce.
- $|DO| = |DS_O| = 3 \cdot |DT|$

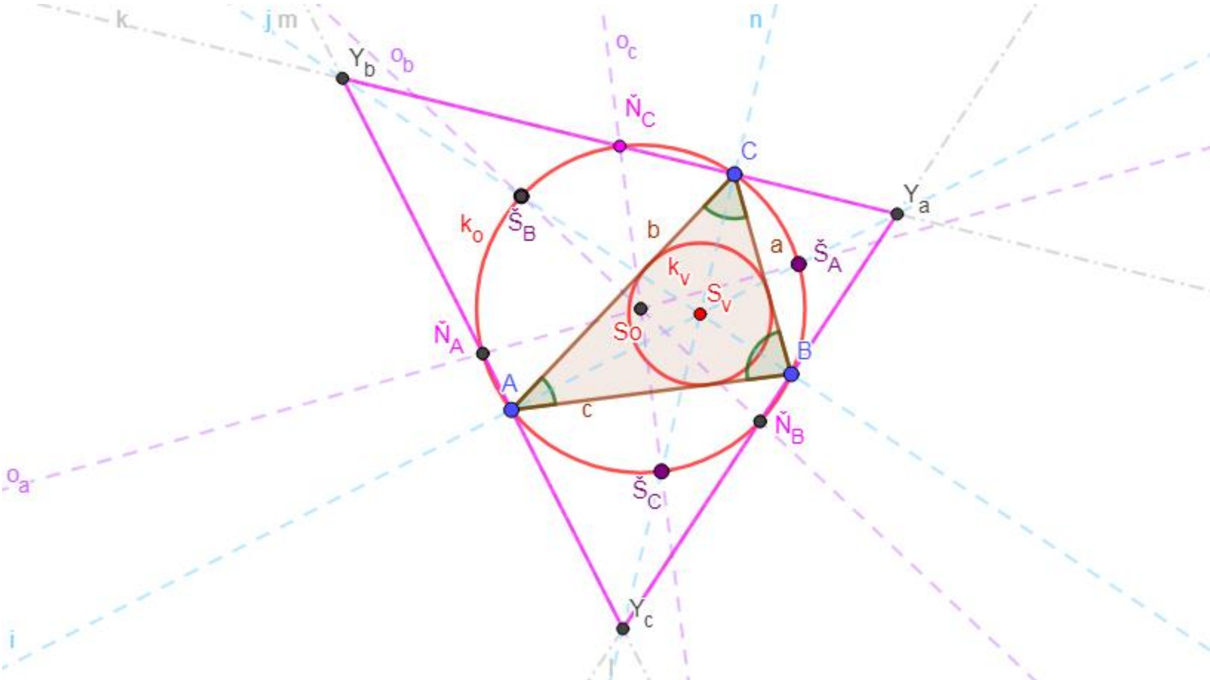


Obrázek 27 - Kružnice devíti bodů1



Obrázek 28 - Kružnice devíti bodů2

Švrčkův bod, antišvrk a kružnice devíti bodů



Obrázek 29 - Švrčkův bod, antišvrk a Feuerbachova kružnice

Feuerbachova kružnice je kružnice, na níž leží následujících devět bodů:

- středy stran S_a, S_b, S_c v našem případě antišvrky $\check{\mathrm{N}}_A$, $\check{\mathrm{N}}_B$, $\check{\mathrm{N}}_C$
- paty výšek P_a, P_b, P_c v našem případě vrcholy trojúhelníku A, B, C
- středy spojnic vrcholů s ortocentrem A_0, B_0, C_0 v našem případě Švrčkovy body $\check{\mathrm{S}}_A$, $\check{\mathrm{S}}_B$, $\check{\mathrm{S}}_C$.

Tuckerovy kružnice

Tuckerovy kružnice prochází šesti body. Vždy dva body leží na přímce, na které leží i strana trojúhelníku.

Budeme-li uvažovat polopřímky *AB, AC, BA, BC, CA, CB,* a na každou polopřímku umístíme jeden bod *K, L, M, N, O, P* (po řadě) a to tak, aby platilo, že:

- úsečka KL je antirovnoběžná se stranou trojúhelníku a vzhledem k ose úhlu α,
- úsečka MN je antirovnoběžná se stranou trojúhelníku b vzhledem k ose úhlu β
- úsečka OP je antirovnoběžná se stranou trojúhelníku c vzhledem k ose úhlu γ
- $|KL| = |MN| = |OP|$

pak platí, že body *K, L, M, N, O, P* leží na Tuckerově kružnici.

Ke každému trojúhelníku existuje nekonečně mnoho Tuckerových kružnic.

(Antirovnoběžná úsečka vzhledem k úhlu je úsečka, která je osově souměrná dle tohoto úhlu.)

Nejznámější Tuckerovy kružnice jsou:

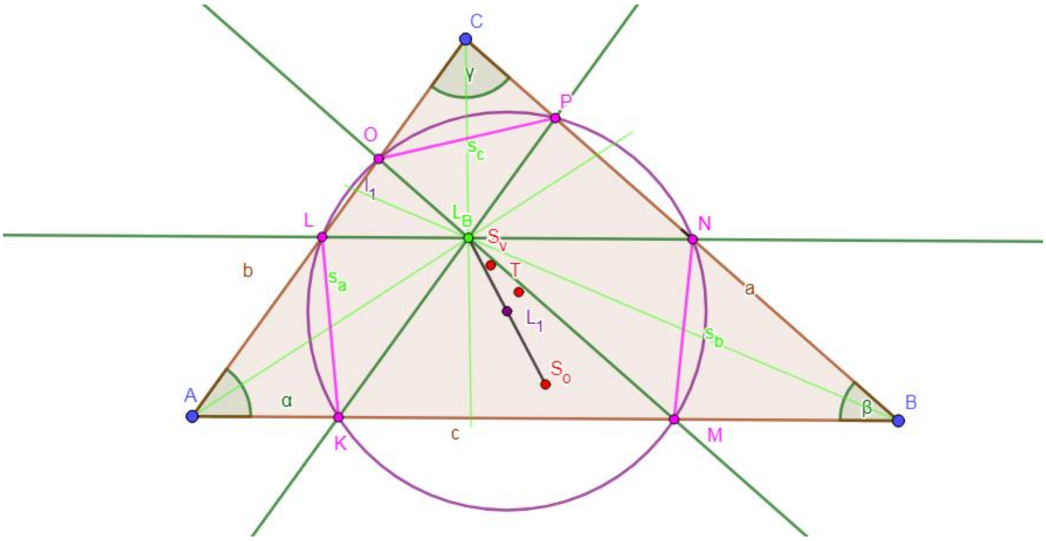
- První Lemoinova kružnice
- Druhá Lemoinova kružnice
- Taylorova kružnice

První Lemoinova kružnice

První Lemoinova kružnice vychází z Lemoinova bodu.

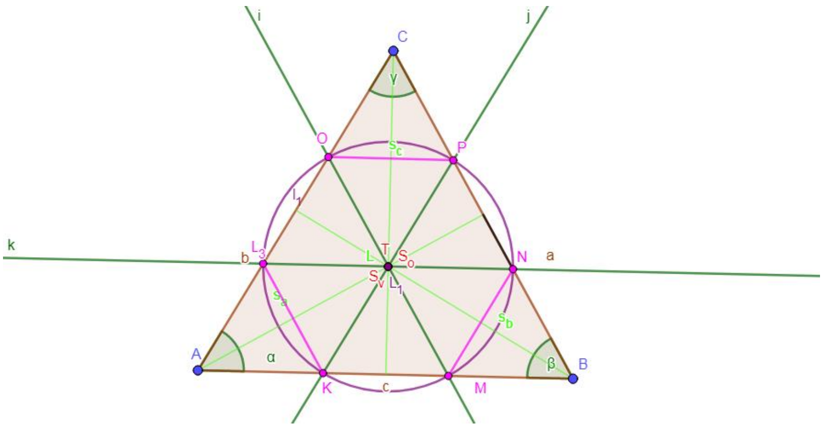
Nechť je dán trojúhelník a v něm Lemoinův bod. Vedeme-li Lemoinovým bodem rovnoběžky se stranami trojúhelníku, pak body, ve kterých nám tyto rovnoběžky protnou strany, nazveme *K, L, M, N, O, P*. Jsou to body, kterými prochází první Lemoinova kružnice.

Středem Lemoinovy kružnice je bod L_1, je to střed úsečky spojující Lemoinův bod (L_B) a střed kružnice opsané (S_O)



Obrázek 30 - První Lemoinova kružnice

Speciální případ nastane u rovnostranného trojúhelníku, kde se nám překryjí: střed kružnice opsané, střed kružnice vepsané, těžiště, Lemoinův bod a střed 1. Lemoinovy kružnice. Úsečky KL, MN, OP jsou kolmé na symediány, které jsou zároveň těžnicemi, osami stran i osami úhlů. U rovnostranného trojúhelníku nám vznikne pravidelný šestiúhelník. Platí: $|KL| = |MN| = |OP| = r$



Obrázek 31 - První Lemoinova kružnice v rovnostranném trojúhelníku

Druhá Lemoinova kružnice

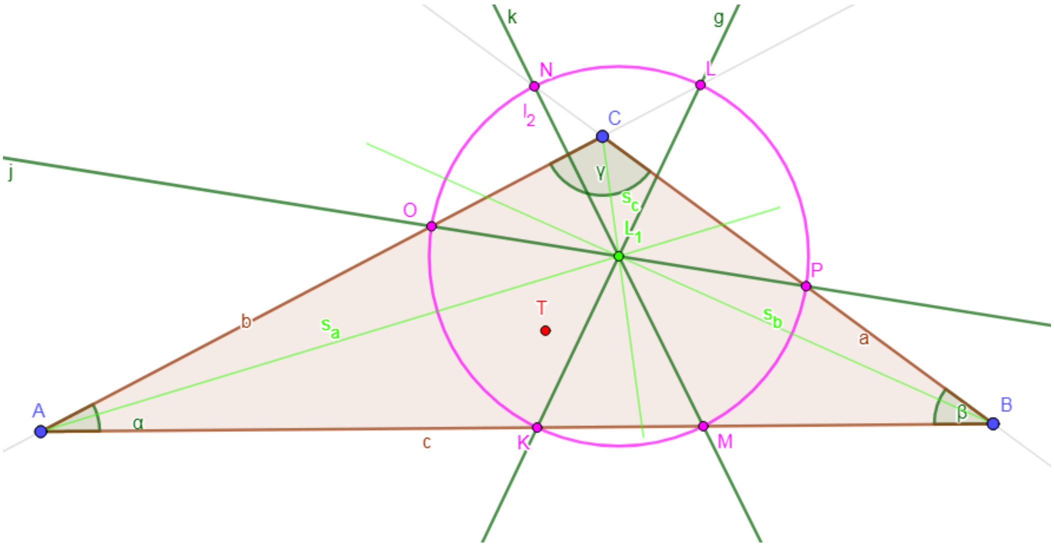
Druhá Lemoinova kružnice vychází z Lemoinova bodu.

Nechť je dán trojúhelník a v něm Lemoinův bod. Lemoinovým bodem vedeme přímky (*g*, *k*, *j*), které jsou antirovnoběžné se stranami trojúhelníku. Body, ve kterých nám přímky protnou přímky, na kterých leží strany trojúhelníka, nazveme *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*.

Body *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P* splňují podmínky pro Tuckerovy kružnice.

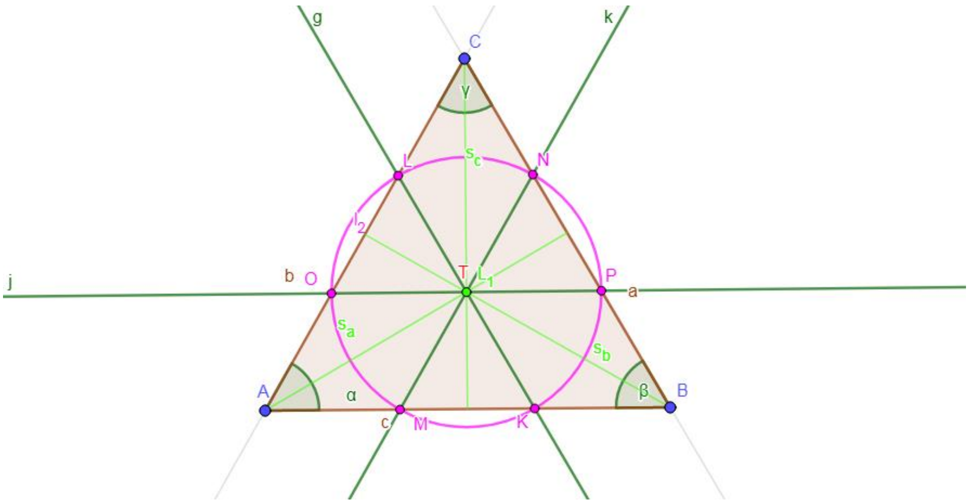
Středem druhé Lemoinovy kružnice je Lemoinův bod.

Poloměr druhé Lemoinovy kružnice je vzdálenost bodu L_1 od bodů *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*.



Obrázek 32 - Druhá Lemoinova kružnice

Speciální případ nastane u rovnostranného trojúhelníku, kde můžeme říct, že druhá Lemoinova kružnice překryje první Lemoinovu kružnici.



Obrázek 33 - Druhá Lemoinova kružnice v rovnostranném trojúheníku

Taylorova kružnice

Nechť je dán trojúhelník a v něm paty výšek $P_{a,} P_{b,} P_c$ a průsečík výšek – ortocentrum *O*.

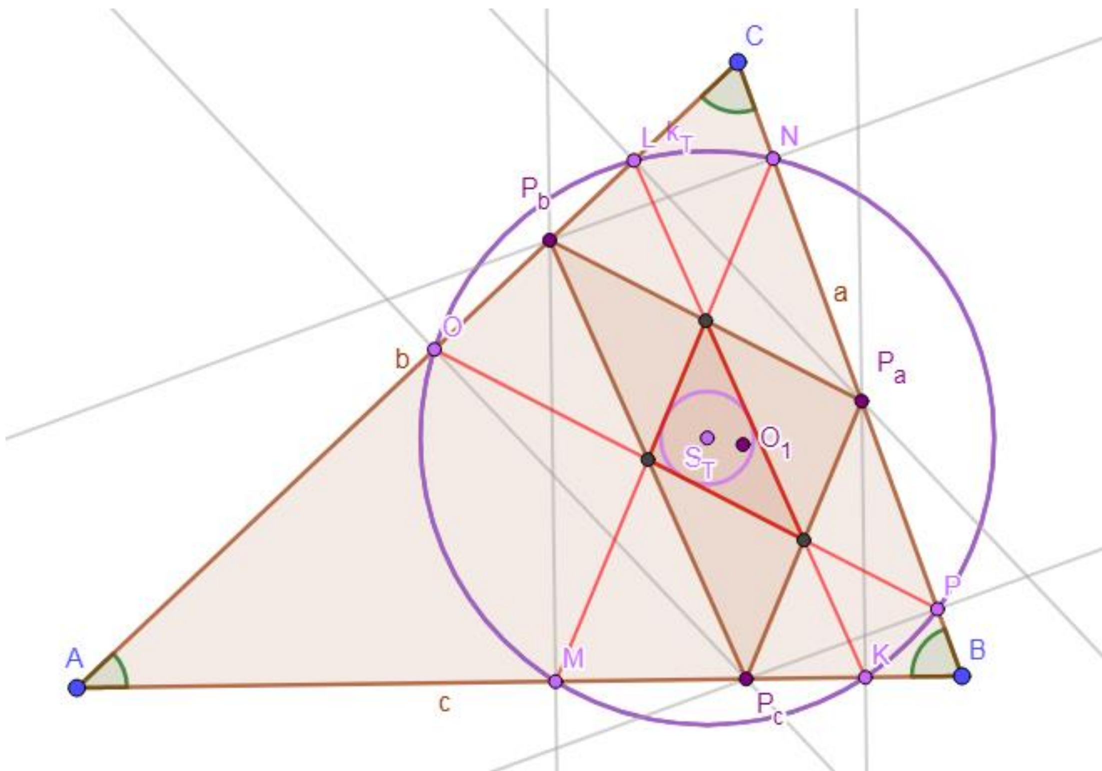
Body *K*, *L* jsou patami kolmic spuštěnými z bodu P_a na strany *b* a *c*.

Body *M*, *N* jsou patami kolmic spuštěnými z bodu P_b na strany *a* a *c*.

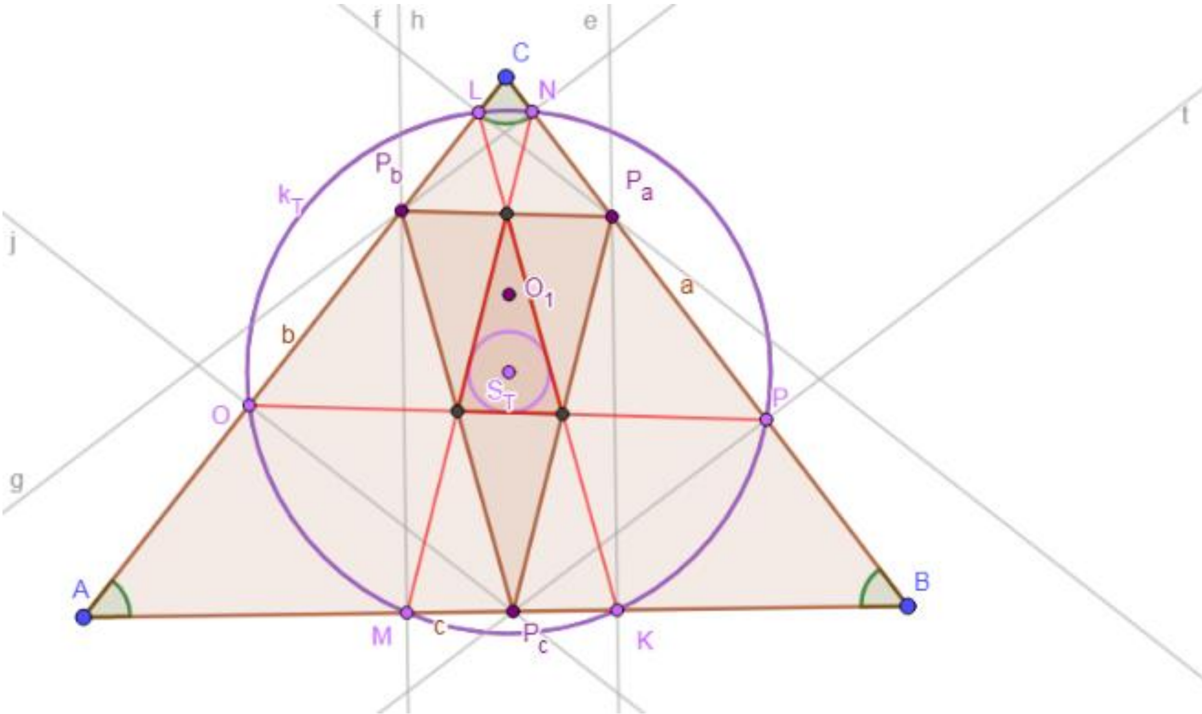
Body *O*, *P* jsou patami kolmic spuštěnými z bodu P_c na strany *a* a *b*.

Body *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P* splňují podmínky pro Truckerovu kružnici.

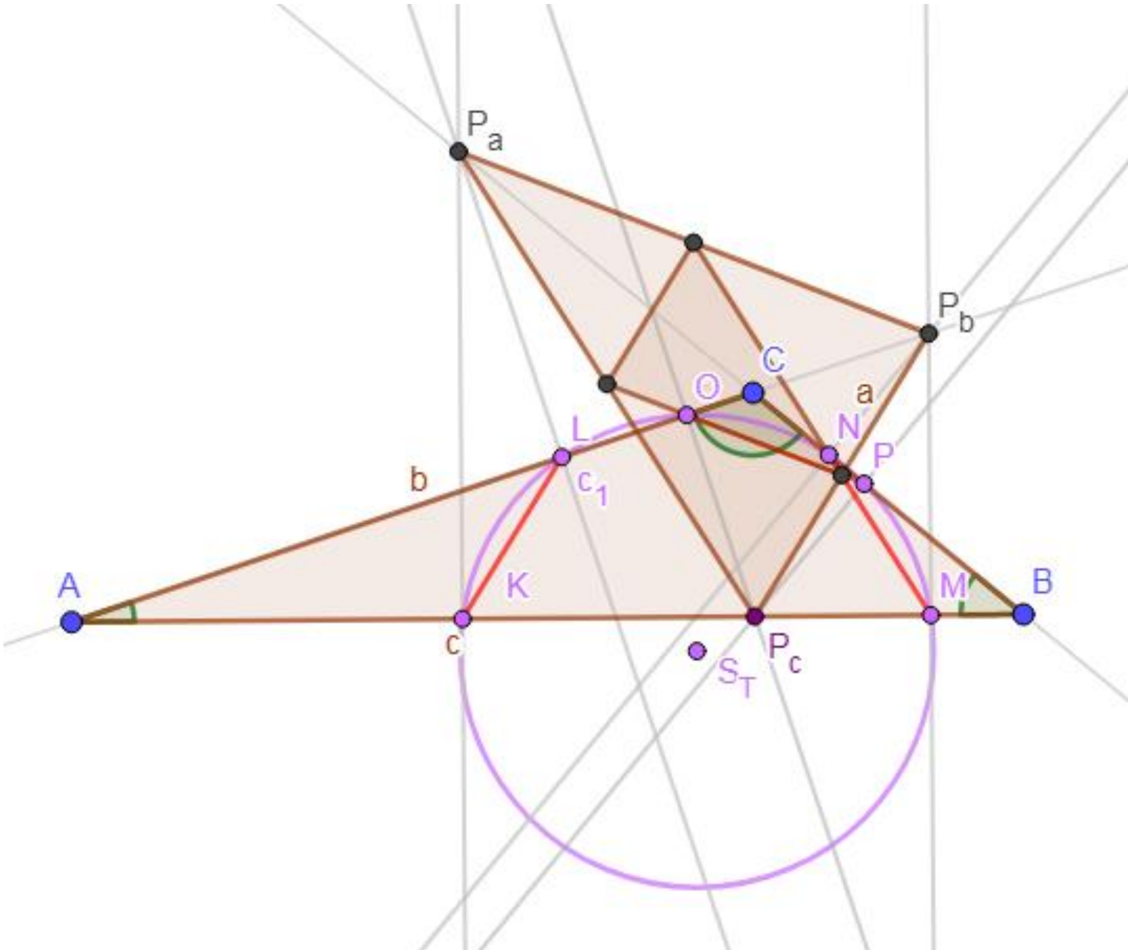
Pro ostroúhlý trojúhelník platí, že střed Taylorovy kružnice je totožný se středem kružnice vepsaná příčkovému trojúhelníku ortického trojúhelníku P_a P_b P_c .



Obrázek 34 - Taylorova kružnice v ostroúhlém trojúhelníku



Obrázek 35 - Taylorova kružnice v ostroúhlém trojúhelníku 2



Obrázek 36 - Taylorova kružnice v tupoúhlém trojúhelník

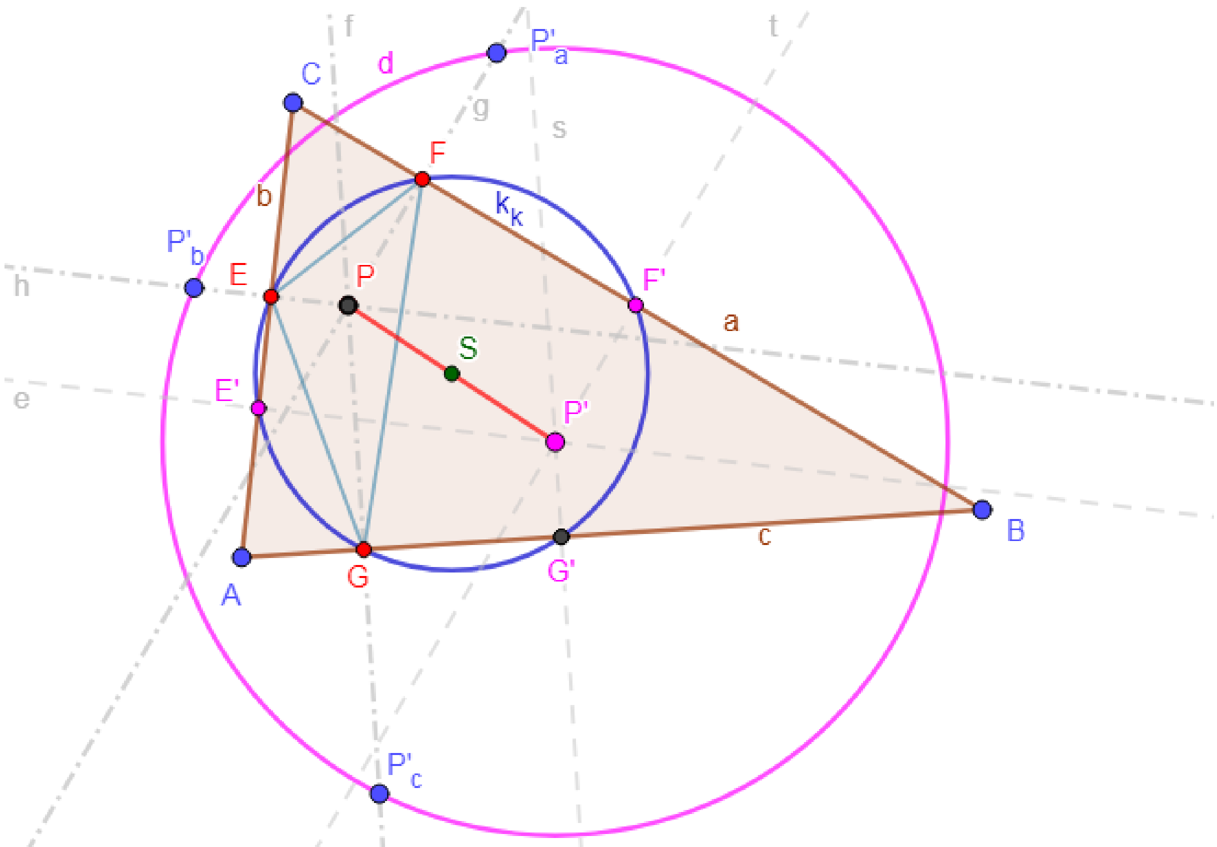
Kružnice kamarádů

Kružnice kamarádů je příslušná určitému bodu *P*, takovému, že *P* je vnitřním bodem trojúhelníku *ABC*.

Na kružnici leží paty kolmic bodu *P* na strany trojúhelníku (*E*, *F*, *G*) a paty kolmic jeho kamaráda *P'* na strany trojúhelníku (*E'*, *F'*, *G'*).

Střed kružnice kamarádů (*S*) je zároveň středem kružnice opsané pro trojúhelník, jehož vrcholy jsou paty kolmic bodu *P* (*E*, *F*, *G*).

P' je kamarád bodu *P* a zároveň je to střed kružnice opsané trojúhelníku $P'_a\ P'_b P'_c$. Kde P'_a, P'_b, P'_c jsou obrazy bodu *P* v osové souměrnosti přes strany.



Obrázek 37 - Kružnice kamarádů

Závěr

V této práci jsem se věnovala významným bodům, přímkám a kružnicím v trojúhelníku.

Některá tato geometrická místa trojúhelníku jsou více známá, některá méně. Cílem mé práce bylo seznámit se a také čtenáře s těmito zajímavými geometrickými místy trojúhelníku.

V první kapitole jsme si zopakovali základní pojmy a základní prvky v geometrii trojúhelníku.

V dalších kapitolách jsme se seznámili s body, přímkami a kružnicemi, které se běžně nevyučují na středních ani vysokých školách.

Především vztahy, které platí mezi jednotlivými body, přímkami a kružnicemi v trojúhelníku, jsou velmi zajímavé a otvírají tak možnosti pro zajímavé konstrukční úlohy.

Všechny obrázky jsem konstruovala v programu GeoGebra. Při konstrukcích a následném pohybu díky dynamičnosti a interaktivně s hotovými obrazci jsem si mohla ověřit platnost všech uváděných informací, definic a vztahů.

Jednotlivé konstrukce jsem prováděla a ukládala na online účet na webové stránce www.geogebra.org. Čtenář si může sám veškeré uvedené jak polohové, tak metrické vztahy ověřit. Obrázky jsou dostupné pod tímto odkazem: https://ggbm.at/PfGW5mwG.

Literatura

[1] KADLEČEK, Jiří. *Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy*. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-017-9.

[2] HRUŠA, Karel. *Přehled elementární matematiky*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1957. Řada theoretické literatury.

[3] KRAEMER, Emil. *Branné prvky v matematice: pomocná kniha pro učitele škol všeobecně vzdělávacích*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1954.

[4] *Geometrie trojúhelníka I – Základní středy* [online]. [cit. 2018-03-19]. Dostupné z: https://mks.mff.cuni.cz/archive/36/uvod1s.pdf

[5] *Geometrie trojúhelníka II – Konstrukce pokračuje* [online]. [cit. 2018-03-19]. Dostupné z: https://mks.mff.cuni.cz/archive/36/uvod2s.pdf

[6] *Geometrie trojúhelníka 3 – Trojúhelník vrací úhel* [online]. [cit. 2018-03-19]. Dostupné z: https://mks.mff.cuni.cz/archive/36/uvod3s.pdf

[7] MACHOVCOVÁ, Lucie. *Vztahy mezi prvky trojúhelníku* [online]. Praha, 2011 [cit. 2018-03-19]. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/51182/BPTX_2009_2__0_258432_0_89302.pdf?sequence=1. (Bakalářská práce. UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE. Vedoucí práce RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.)

[8] ŠRUBAŘ, Jiří. *VLASTNOSTI TROJÚHELNÍKA A JEJICH ANALOGIE PRO ČTYŘSTĚN* [online]. [cit. 2018-03-19]. Dostupné z: http://mat.fsv.cvut.cz/gcg/sbornik/srubar.pdf

[9] ROLÍNEK, Michal „Kenny". *Antirovnoběžnost* [online]. [cit. 2018-03-19]. Dostupné z: https://mks.mff.cuni.cz/library/AntirovnobeznostMR/AntirovnobeznostMR.pdf

[10] KOPECKÝ, Milan a Radka DOFKOVÁ. *GEOMETRIE 1* [online]. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2007 [cit. 2018-03-13]. Dostupné z: http://katmat.upol.cz/images/Documents/Opory/geo1_prac_verze_pro_studenty.pdf

[11] NOCAR, D. - ZDRÁHAL, T. The Potential of Dynamic Geometry for Inquiry Based Education. In *EDULEARN15 Proceedings*. Barcelona: IATED, 2015. ISBN 978-84-606-8243-1 / ISSN 2340-1117

Seznam obrázků:

Anotace

Jméno a příjmení:	Andrea Fofová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D.
Rok obhajoby:	2018

Název práce:	Body, přímky a kružnice v trojúhelníku
Název v angličtině:	Triangle points, lines and circles
Anotace práce:	Cílem práce je zaměřit se na významné body, přímky a kružnice trojúhelníku. A srozumitelným způsobem je přiblížit i ostatním studentům. Za důležitý prvek mé práce považuji obrázky, které dokáží nejlépe ilustrovat, kde dané body, přímky, kružnice leží. Jak vypadá jejich určování. A jaká je jejich vzájemná interakce.
Klíčová slova:	Trojúhelník, bod, přímka, kružnice
Anotace v angličtině:	The aim of the thesis is to focus on the important points, lines, and circles of the triangle. And to describe them it to the other students in a comprehensible way. As an important element of my work. I consider images which best illustrate where the points, lines and circle lie. How their identification looks like. And what their mutual interaction is.
Klíčová slova v angličtině:	Triangle, point, line, circle
Rozsah práce:	33 stran
Jazyk práce:	Český jazyk