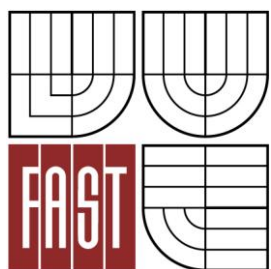




VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ  
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING  
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

## VYPRACOVÁNÍ ALGORITMU A PŘÍSLUŠNÉHO PROGRAMOVÉHO MODULU PRO STATICKÉ A DYNAMICKÉ ŘEŠENÍ LAN NA KLADKÁCH

DEVELOPMENT OF ALGORITHM AND PERTINENT PROGRAM MODULE FOR STATICAL AND  
DYNAMICAL ANALYSIS OF CABLES ON PULLEYS

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
DIPLOMA THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Bc. HYNEK ŠTEKBAUER

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

doc. Ing. IVAN NĚMEC, CSc.



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

<b>Studijní program</b>	N3607 Stavební inženýrství
<b>Typ studijního programu</b>	Navazující magisterský studijní program s prezenční formou studia
<b>Studijní obor</b>	3607T009 Konstrukce a dopravní stavby
<b>Pracoviště</b>	Ústav stavební mechaniky

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

<b>Diplomant</b>	Bc. Hynek Štekbauer
<b>Název</b>	Vypracování algoritmu a příslušného programového modulu pro statické a dynamické řešení lan na kladkách
<b>Vedoucí diplomové práce</b>	doc. Ing. Ivan Němec, CSc.
<b>Datum zadání diplomové práce</b>	31. 3. 2014
<b>Datum odevzdání diplomové práce</b>	16. 1. 2015
V Brně dne 31. 3. 2014	

.....  
prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.  
Vedoucí ústavu

.....  
prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA  
Děkan Fakulty stavební VUT

**Podklady a literatura**

Ivan Němec et al.: Finite Element Analysis of Structures.

**Zásady pro vypracování**

Výstupem je počítačový program.

**Předepsané přílohy**

Licenční smlouva o zveřejňování vysokoškolských kvalifikačních prací

.....  
doc. Ing. Ivan Němec, CSc.  
Vedoucí diplomové práce

## **Abstrakt**

Cílem této práce je vypracování algoritmu pro řešení lan na kladkách, který by byl výkonnější a přesnější, než stávající algoritmus použitý v programu RFEM. Vypracovaný algoritmus byl ve formě příslušného programového modulu včleněn do programu pro statickou a dynamickou analýzu konstrukcí. Součástí této práce je také vypracování několika příkladů využívajících tento algoritmus. Závěrem je provedeno porovnání očekávaných výsledků s výstupy z programu, a určení zda bylo dosaženo dostatečné přesnosti ve výsledcích, pro využití tohoto algoritmu pro běžnou praxi. Na příkladech bylo prokázáno, že nové řešení lan na kladkách je výkonnější i přesnější, než v současné době používaná řešení a s největší pravděpodobností nemá v současnosti ve světě rovnocennou konkurenci.

## **Klíčová slova**

Kladky, RFEM, velké rotace, statika, dynamika, nelinearita.

## **Abstract**

The goal of this master thesis is to develop an algorithm for solving cables on pulleys, which would be more efficient and accurate than existing algorithm used in software RFEM. This algorithm was integrated to the program for static and dynamic analysis of structures, in the form of particular program module. This work also contains examples of using this algorithm. The comparison of expected results with outcomes from the program is presented. The suitability for common practise is examined based on this comparison. The examples showed that the new algorithm for solving of cables on pulleys is more powerful and more accurate than existing solutions and most likely does not has equivalent competition.

## **Keywords**

Pulleys, RFEM, large rotations, statics, dynamics, nonlinearity.

## **Bibliografická citace VŠKP**

Bc. Hynek Štekbauer *Vypracování algoritmu a příslušného programového modulu pro statické a dynamické řešení lan na kladkách*. Brno, 2015. 83 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce doc. Ing. Ivan Němec, CSc.

**Prohlášení:**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 10.1.2015

.....  
podpis autora  
Bc. Hynek Štekbauer

**Poděkování:**

Chtěl bych poděkovat především vedoucímu mé diplomové práce doc. Ing. Ivanu Němcovi, CSc. za ochotu, rady a čas věnovaný při konzultacích i mimo ně. Také bych rád poděkoval celému kolektivu FEM consulting za přátelský přístup a ochotu pomoci při řešení odborných problémů, především pak Ing. Ivanu Ševčíkovi, Ph.D.

## OBSAH

<b>1.</b>	<b>ÚVOD</b> .....	<b>10</b>
<b>2.</b>	<b>MOTIVACE K VÝVOJI NOVÉHO ALGORITMU PRO ŘEŠENÍ LAN NA KLADKÁCH</b> .....	<b>13</b>
<b>3.</b>	<b>TRANSFORMACE A ROTACE</b> .....	<b>14</b>
3.1.	ROTACE KOLEM PEVNÝCH OS .....	17
3.2.	EULEROVY ÚHLY.....	18
3.3.	RODRIGUEZŮV VZOREC PRO URČENÍ TENZORU ROTACE.....	20
<b>4.</b>	<b>NELINEÁRNÍ MECHANIKA</b> .....	<b>23</b>
4.1.	GEOMETRICKÁ NELINEARITA .....	25
4.1.1.	<i>Deformace</i> .....	25
4.1.2.	<i>Deformační gradient</i> .....	26
4.1.3.	<i>Míry deformace</i> .....	28
4.1.3.1.	Deformační gradient .....	28
4.1.3.2.	Green–Lagrangeův tenzor deformace .....	28
4.1.3.3.	Euler–Almansiho tenzor deformace .....	29
4.1.3.4.	Logaritmická míra deformace .....	29
4.1.3.5.	Seth–Hillova rodina tenzorů deformace .....	30
4.1.4.	<i>Míry napjatosti</i> .....	30
4.1.4.1.	Cauchyho napětí .....	31
4.1.4.2.	První napětí Piola–Kirchhoff .....	31
4.1.4.3.	Druhé napětí Piola–Kirchhoff.....	32
4.1.5.	<i>Formulace geometrické nelinearity</i> .....	32
4.1.5.1.	Updated Lagrangian.....	32
4.1.5.2.	Total Lagrangian .....	32
4.1.6.	<i>Tečná matice tuhosti</i> .....	33
4.1.6.1.	Materiálová matice tuhosti.....	33
4.1.6.2.	Geometrická matice tuhosti .....	33
4.2.	MATERIÁLOVÁ NELINEARITA .....	34
<b>5.</b>	<b>NEWTON-RAPHSONOVA ITERAČNÍ METODA</b> .....	<b>37</b>
<b>6.</b>	<b>EXPLICITNÍ DYNAMICKÁ METODA</b> .....	<b>40</b>
6.1.	METODA CENTRÁLNÍCH DIFERENCÍ.....	41
<b>7.</b>	<b>LAGRANGEOVY MULTIPLIKÁTORY</b> .....	<b>43</b>

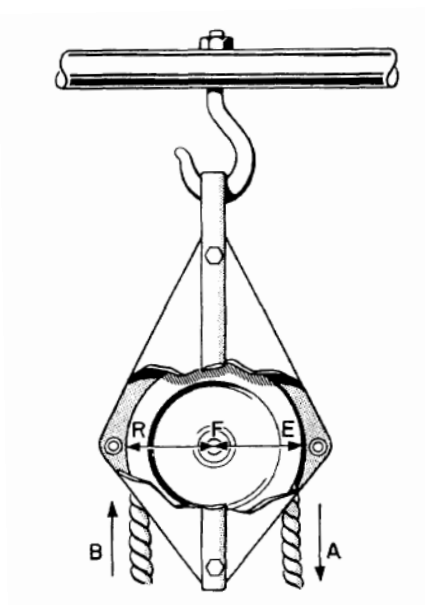


---

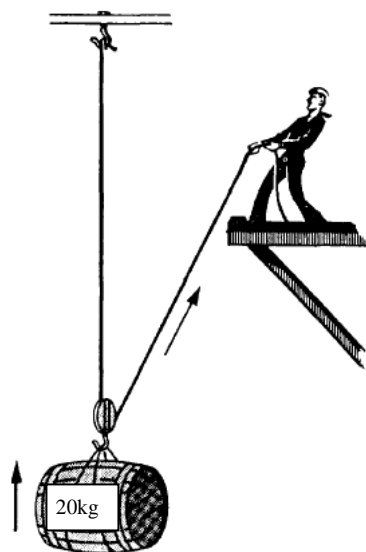
<b>8.</b>	<b>ALGORITMIZACE ŘEŠENÍ LAN NA KLADKÁCH .....</b>	<b>46</b>
8.1.	STÁVAJÍCÍ ALGORITMY PRO ŘEŠENÍ LAN NA KLADKÁCH .....	46
8.1.1.	<i>Super element soustavy kladek na laně .....</i>	<i>46</i>
8.1.2.	<i>Současný algoritmus pro řešení lan na kladkách.....</i>	<i>47</i>
8.1.3.	<i>Jiné algoritmy pro řešení lan na kladkách .....</i>	<i>48</i>
8.2.	NOVÝ ALGORITMUS PRO ŘEŠENÍ LAN NA KLADKÁCH .....	51
8.2.1.	<i>Předpoklady nového algoritmu .....</i>	<i>51</i>
8.2.2.	<i>Umístění programového modulu.....</i>	<i>52</i>
8.2.3.	<i>Popis základního algoritmu .....</i>	<i>52</i>
8.2.4.	<i>Rozšíření možností programového modulu pro řešení lan na kladkách.....</i>	<i>61</i>
8.2.4.1.	<i>Tření v čepu kladky .....</i>	<i>61</i>
8.2.4.2.	<i>Přecházení uzlů přes kladku.....</i>	<i>63</i>
8.2.4.2.1.	<i>Koncepce přecházení uzlů .....</i>	<i>63</i>
8.2.4.2.2.	<i>Sestavení matice tuhosti .....</i>	<i>65</i>
<b>9.</b>	<b>PŘÍKLADY .....</b>	<b>67</b>
9.1.	PŘÍKLAD Č.1.....	67
9.1.1.	<i>Výpočet původním algoritmem .....</i>	<i>68</i>
9.1.2.	<i>Výpočet novým algoritmem .....</i>	<i>70</i>
9.1.3.	<i>Porovnání obou řešení.....</i>	<i>72</i>
9.2.	PŘÍKLAD Č.2.....	72
9.2.1.	<i>Výpočet původním algoritmem .....</i>	<i>73</i>
9.2.1.	<i>Výpočet novým algoritmem .....</i>	<i>74</i>
9.2.1.	<i>Porovnání obou řešení.....</i>	<i>75</i>
<b>10.</b>	<b>ZÁVĚR .....</b>	<b>76</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....</b>	<b>77</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK .....</b>	<b>79</b>
	<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>	<b>81</b>

## 1. ÚVOD

Kladka je velmi užitečným vynálezem, umožňujícím efektivní využití síly. S jedinou pevnou kladkou je síla A vyvinutá směrem dolů rovna síle působící na druhé straně kladky směrem vzhůru B. [1]



Obr. 1: Pevná kladka [1]

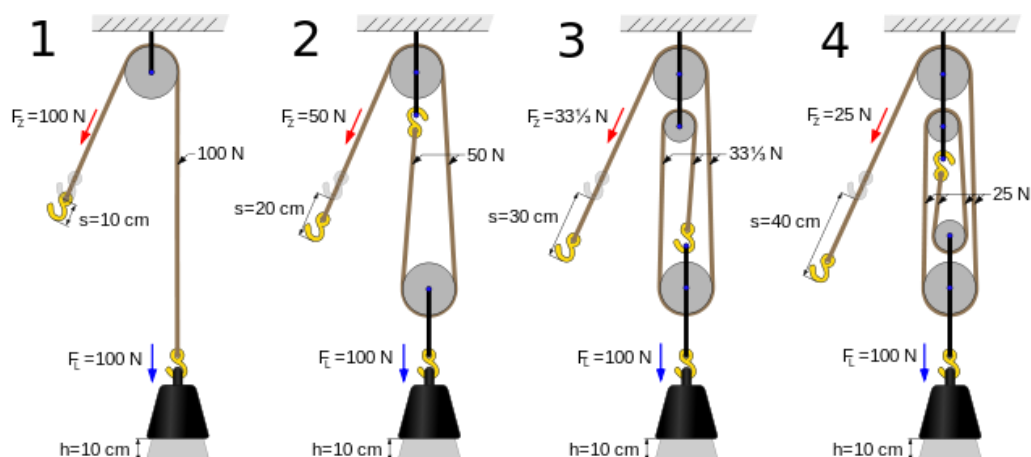


Obr. 2: Volná kladka [2]

Jedna kladka tedy nezvětšuje sílu ani rychlost otáčení kladky. Použijeme-li však volnou kladku, jsme schopni s výhodou zvýšit sílu námi vynaloženou (Obr. 2). Síla působící na sud proti směru gravitace je zdvojnásobena. Každá strana kladky nese polovinu zatížení 20kg sudu, takže v laně je síla odpovídající 10kg (tedy 100N). [2]

Při správných kombinacích kladek jsme tak schopni dosáhnout stejného výsledku, avšak s využitím menší vstupní síly (Obr. 3).

Jsou-li dvě pevné kladky na jednom laně, je poměr pootočení jedné a druhé kladky  $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$  nepřímo úměrný podílu poloměrů těchto dvou kladek  $\frac{R_2}{R_1}$ .



Obr. 3 Efektivnost využití kladek [3]

Vzhledem k jasným výhodám které kladky přináší, našly si kladky uplatnění v širokém spektru všemožných strojů. U stavebních a strojních konstrukcí se tak principu kladek využívá například u konstrukcí jeřábů (Obr. 4), lanovek (Obr. 5), ale lze ho najít i v motoru automobilu (Obr. 6).



Obr. 4 Využití kladek v jeřábech [4]



Obr. 5 Využití kldky na lanových drahách [5]



Obr. 6 Využití kldky v motoru automobilu [6]

---

## 2. MOTIVACE K VÝVOJI NOVÉHO ALGORITMU PRO ŘEŠENÍ LAN NA KLADKÁCH

U řady stavebních a strojních konstrukcí tvoří součást konstrukce lana na kladkách. Soustava těchto kladek představuje mnohdy systém složitý na ruční výpočet, a proto je snaha umožnit výpočet takovýchto konstrukcí za pomoci počítačových programů.

Kromě jednoduchých simulátorů pro znázornění soustavy kladek jako je například MapleSim, které však neumožňují detailnější statický či dynamický výpočet takovýchto soustav a k nim připojených konstrukcí, je v současné době možné lana na kladkách řešit dvěma přístupy.

Prvním přístupem je spojení kladek lanovými 1D prvky pouze ve středech těchto kladek a různými přístupy definovat chování takovéto soustavy tak, aby bylo nalezeno odpovídající řešení.

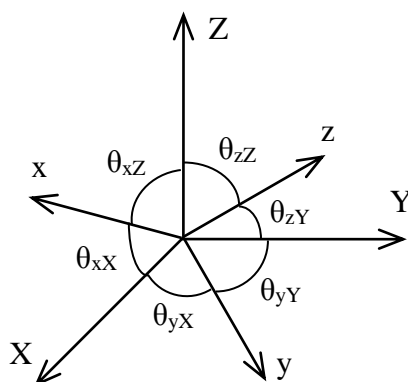
Druhý přístup představuje vymodelování každé kladky a i lan z 3D prvků a mezi tyto prvky přidat další kontaktní prvky pro správné chování takovéto soustavy těles. Takovéto řešení je sice při správném modelu přesné, ale zároveň velmi pracné a výpočet je také časově náročný.

Současný algoritmus pro výpočet lan na kladkách používaný v programu RFEM využívá první přístup a potřebuje k výpočtu při určitých vstupních parametrech k nalezení řešení příliš mnoho iterací, což vede k dlouhým výpočetním časům. Právě proto byly zaznamenány požadavky ze strany zákazníků, o zrychlení výpočtu lan na kladkách. To vedlo k myšlence vypracování lepšího, rychlejšího a přesnějšího řešení, které by využívalo výhod obou přístupů. Těmito výhodami je jednoduchost zadání a rychlost výpočtu v prvním případě a přesnost s lepším vystižením geometrie v případě druhém.

### 3. TRANSFORMACE A ROTACE

V této práci, i v nelineární mechanice všeobecně, hraje významnou roli rotace tělesa jako tuhého celku. Rotace je vyjádřena tenzorem (nebo maticí) rotace  $\mathbf{R}$ , který v sobě obsahuje směrové kosiny. S rotací přímo souvisí i transformace souřadnic, k čemuž se využívá transformační matice  $\mathbf{T}$ .

Mějme pravoúhlý souřadný systém  $\{X, Y, Z\}$  a oproti němu pootočený souřadný systém  $\{x, y, z\}$ .



Obr. 7 Pootočení souřadného systému (vyznačeny jsou pouze některé úhly)

Polohu každé osy  $\{x, y, z\}$  lze popsat třemi úhly, které daná osa svírá s osami  $\{X, Y, Z\}$ . Vznikne tak transformační matice  $\mathbf{T}$ , obsahující v sobě směrové kosiny os.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos_{xX} & \cos_{xY} & \cos_{xZ} \\ \cos_{yX} & \cos_{yY} & \cos_{yZ} \\ \cos_{zX} & \cos_{zY} & \cos_{zZ} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Jednotlivé prvky matice mají význam kosinů úhlů mezi jednotlivými osami souřadného systému  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{x}$ . Tedy například prvek  $\cos_{yz}$  je kosinus úhlu mezi osami  $\mathbf{y}$  a  $\mathbf{Z}$ . Každý řádek tak lze chápat jako vyjádření nové osy v původním souřadném systému. Představíme-li si jednotlivé osy souřadného systému  $\{X, Y, Z\}$  jako jednotkové vektory

$\{X_x, X_y, X_z\}$ , a osy souřadného systému  $\{x, y, z\}$  jako jednotkové vektory  $\{x_x, x_y, x_z\}$ . Pro dva vektory  $u$  a  $v$ , svírající úhel  $\theta_{uv}$ , platí vztah

$$u \cdot v = |u||v|\cos\theta_{uv}. \quad (2)$$

Při použití jednotkových vektorů tak lze na místo směrových kosinů v matici  $[T]$ , dosadit skalární součiny

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} x_x \cdot X_x & x_x \cdot X_y & x_x \cdot X_z \\ x_y \cdot X_x & x_y \cdot X_y & x_y \cdot X_z \\ x_z \cdot X_x & x_z \cdot X_y & x_z \cdot X_z \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Běžně se místo indexů  $\{x_x, x_y, x_z\}$  využívají k popisu čísla  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , matici tak lze zapsat zkráceně jako

$$T_{ij} = x_i \cdot X_j, \quad (4)$$

kde  $i, j = 1, 2, 3$ .

Libovolný vektor  $\mathbf{w}$  lze vyjádřit jako

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^3 w_j \mathbf{X}_j, \quad (5)$$

kde

$$w_j = \mathbf{w} \cdot \mathbf{X}_j. \quad (6)$$

Protože je vektor  $\mathbf{w}$  libovolný, může jím být i vektor  $\mathbf{x}_i$ . Vektor  $\mathbf{x}_i$  lze tedy získat i dosazením do (5).

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} \mathbf{X}_j, \quad (7)$$

kde

$$T_{ij} = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{X}_j. \quad (8)$$

Protože skalární součin je komutativní, lze vypočítat i  $\mathbf{X}_i$ :

$$\mathbf{X}_i = \sum_{j=1}^3 T_{ji} \mathbf{x}_j, \quad (9)$$

kde

$$T_{ji} = \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{X}_i. \quad (10)$$

Ze vztahů (7) a (9) vyplývá ortogonalita  $\mathbf{T}$ , což znamená, že její inverze je rovna její transpozici [7]:

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T. \quad (11)$$

Toho lze využít pro transformaci libovolného vektoru  $\mathbf{w}$  vyjádřeného v souřadném systému  $\{X_1, X_2, X_3\}$ , k vyjádření  $\tilde{\mathbf{w}}$  v druhém souřadném systému  $\{x_1, x_2, x_3\}$ .

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{T} \mathbf{w} \quad (12)$$

a

$$\mathbf{w} = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{w}} \quad (13)$$

Je důležité si uvědomit rozdíl mezi transformací souřadnic a rotací. Při transformaci se nemění poloha tělesa, ale mění se postavení „pozorovatele“. Naopak při rotaci zůstává postavení „pozorovatele“ neměnné, a mění se pouze poloha tělesa. Z toho vyplývá, že transponováním transformační matice, získáme matici rotace a naopak. Rotace  $\mathbf{R}$  a transformace  $\mathbf{T}$  tak vyjadřují stejnou velikost pootočení, avšak opačného směru [8]. Platí tedy

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}^T, \quad (14)$$



a lze napsat

$$\begin{aligned}x &= TX, \\ X &= Rx.\end{aligned}\tag{15}$$

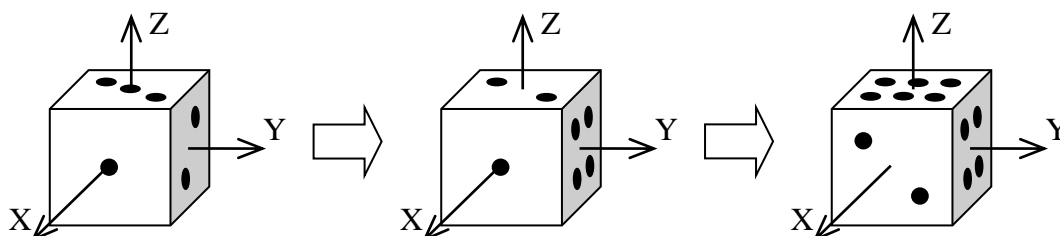
### 3.1. Rotace kolem pevných os

Pokud tuhé těleso pootočíme nejprve rotací  $R_1$  a poté rotací  $R_2$ , je výsledná rotace dána

$$R = R_2 \cdot R_1.\tag{16}$$

Libovolná rotace může být vyjádřena třemi postupnými rotacemi kolem os  $\{X, Y, Z\}$  za pomoci úhlů rotace kolem těchto os  $\{\theta_X, \theta_Y, \theta_Z\}$ .

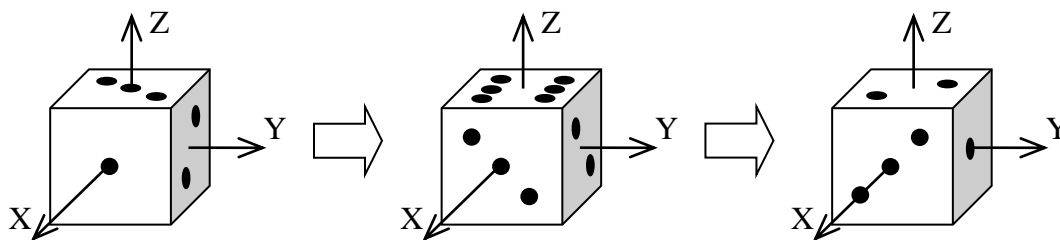
Pootočíme-li napřed kostku kolem osy X o  $90^\circ$  ( $R_1$ ) a poté kolem osy Y opět o  $90^\circ$  ( $R_2$ ) dle Obr. 8. Tato rotace je vyjádřena dle rovnice (16) v rovnici (17).



Obr. 8 Rotace kolem pevných os 1 [5]

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{17}$$

Prohodíme-li však pořadí rotací  $R_1$  a  $R_2$ ,



Obr. 9 Rotace kolem pevných os 2

vznikne tenzor rotace

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Můžeme vidět na Obr. 9 i z porovnání (17) s (18), že  $\mathbf{R} \neq \tilde{\mathbf{R}}$ . Rotace tedy není komutativní a záleží na jejím pořadí.

### 3.2. Eulerovy úhly

Na rozdíl od rotace kolem pevných os, Eulerovy úhly využívají pootočený souřadný systém  $\{x, y, z\}$  jehož osy rotují společně s tělesem. Eulerovy úhly  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  udávají rotaci kolem těchto os. [8]

Existuje mnoho konvencí Eulerových úhlů podle toho, k jakým osám a v jakém pořadí se vztahují dané úhly. Nejběžněji se používá pořadí z-x-z (původně definován pro gyroskop). Jiné běžně používané je pořadí x-y-z, také známo jako Bryantovy úhly. [9]

Všeobecně tak můžeme napsat předpis pro rotaci kolem každé z os [10]: pro rotaci kolem osy x o úhel  $\theta$

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (19)$$

pro rotaci kolem osy  $y$  o úhel  $\theta$

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (20)$$

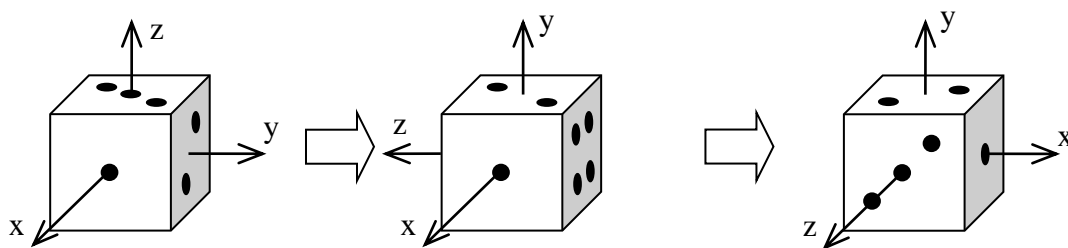
a pro rotaci kolem osy  $z$  o úhel  $\theta$

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Rotace se v tomto případě řadí chronologicky. Provádíme-li nejprve rotaci  $\mathbf{R}_1$ , poté rotaci  $\mathbf{R}_2$  a nakonec rotaci  $\mathbf{R}_3$ . Je výsledná rotace dána

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_3. \quad (22)$$

Pokusíme-li se provést rotaci kolem osy  $x$  a poté kolem osy  $y$ , pokaždé o  $90^\circ$ , vznikne rovnice (23) popisující Obr. 10.



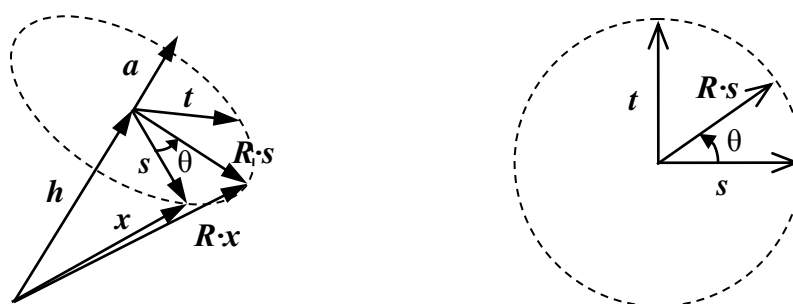
Obr. 10 Rotace za pomoci Eulerových úhlů

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

### 3.3. Rodriguezův vzorec pro určení tenzoru rotace

Rodriguezův vzorec vychází z předpokladu, že každá rotace lze vyjádřit osou procházející nehybným bodem a rotací kolem této osy. Tato osa rotace  $\mathbf{a}$  je jednotkový vektor, a rotace kolem této osy je definována úhlem  $\theta$ , dle pravidla pravé ruky vzhledem k ose  $\mathbf{a}$ . [8]

Pro jednoduchost popisu je nehybný bod umístěn do počátku souřadnic, stejně jako začátek vektoru  $\mathbf{x}$ .



Obr. 11 Rotace kolem osy [5]

Vektor  $\mathbf{h}$  na Obr. 11 je část vektoru  $\mathbf{x}$  ve směru  $\mathbf{a}$ , dá se tedy vypočítat jako

$$\mathbf{h} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}. \quad (24)$$

Vektor  $\mathbf{s}$  je část vektoru  $\mathbf{x}$ , která je kolmá na  $\mathbf{a}$ . Vypočítá se jako

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{x} - \mathbf{h} \\ &= \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} \end{aligned} \quad (25)$$

Vektor  $\mathbf{t}$  je kolmý na dva vektory  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{s}$ . zároveň.

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \mathbf{a} \times \mathbf{s} \\ &= \mathbf{a} \times (\mathbf{x} - \mathbf{h}) \\ &= \mathbf{a} \times \mathbf{x}\end{aligned}\tag{26}$$

Popíšeme-li novou polohu  $\mathbf{s}$  na pravé části Obr. 11, tedy v rovině rotace, je nová poloha dána rovnicí

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{s} = (\cos\theta)\mathbf{s} + (\sin\theta)\mathbf{t}.\tag{27}$$

Po dosazení (24), (25) a (26) do rovnice (27), získáme

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{s} = (\cos\theta)[\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}] + (\sin\theta)[\mathbf{a} \times \mathbf{x}].\tag{28}$$

Výsledný vektor  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}$  je dán součtem jeho složek  $\mathbf{h}$  a  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{s}$ :

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{h} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{s}.\tag{29}$$

Dosazením (24) a (28) do (29), získáme vzorec

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{x} = (\cos\theta)[\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}] + \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) + (\sin\theta)[\mathbf{a} \times \mathbf{x}].\tag{30}$$

Vektorový součin  $[\mathbf{a} \times \mathbf{x}]$  lze nahradit maticí splňující

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x},\tag{31}$$

přičemž  $\mathbf{A}$  má tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.\tag{32}$$

Dosazením (31) do (30) a prostým derivováním obou stran podle  $\mathbf{x}$ , získáme rovnici pro rotaci [8]

$$\mathbf{R} = (\cos\theta)[\mathbf{I} - \mathbf{aa}] + \mathbf{aa} + (\sin\theta)\mathbf{A}. \quad (33)$$

Kde lze její části rozepsat jako (32) a

$$\mathbf{aa} = \begin{bmatrix} a_1 a_1 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2 a_2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3 a_3 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Dosazením (32) a (34) do (33) získáme rozepsanou formu Rodriguezeva vzorce [8]:

$$\mathbf{R} = \cos\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos\theta) \begin{bmatrix} a_1 a_1 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2 a_2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3 a_3 \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

## 4. NELINEÁRNÍ MECHANIKA

Lineární analýza nabízí řadu výhod a vychází z předpokladu, že deformace jsou infinitezimálně malé a materiál se chová lineárně elasticky. Dále se předpokládá neměnnost okrajových podmínek během výpočtu. Za těchto předpokladů aplikujeme rovnici pro statickou analýzu

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u}, \quad (36)$$

kde je  $\mathbf{K}$  matice tuhosti konstrukce,  
 $\mathbf{u}$  vektor neznámých, obvykle vektor uzlových parametrů deformace,  
 $\mathbf{f}$  je vektor pravých stran, obvykle uzlových sil [7].

Tato rovnice odpovídá lineární analýze, protože posunutí  $\mathbf{u}$  je lineární funkce zatěžovacího vektoru  $\mathbf{f}$ . Změníme-li velikost zatížení na  $n\mathbf{f}$ , kde  $n$  je konstanta, je odpovídající posunutí rovno  $n\mathbf{u}$  [11]. Z toho také vyplývá princip superpozice. Navzdory veškerým výhodám, daným předpokladem linearit v inženýrské analýze, je zjevné, že v mnoha situacích není rovnice (36) platná a je potřeba uvážit nelineární chování.

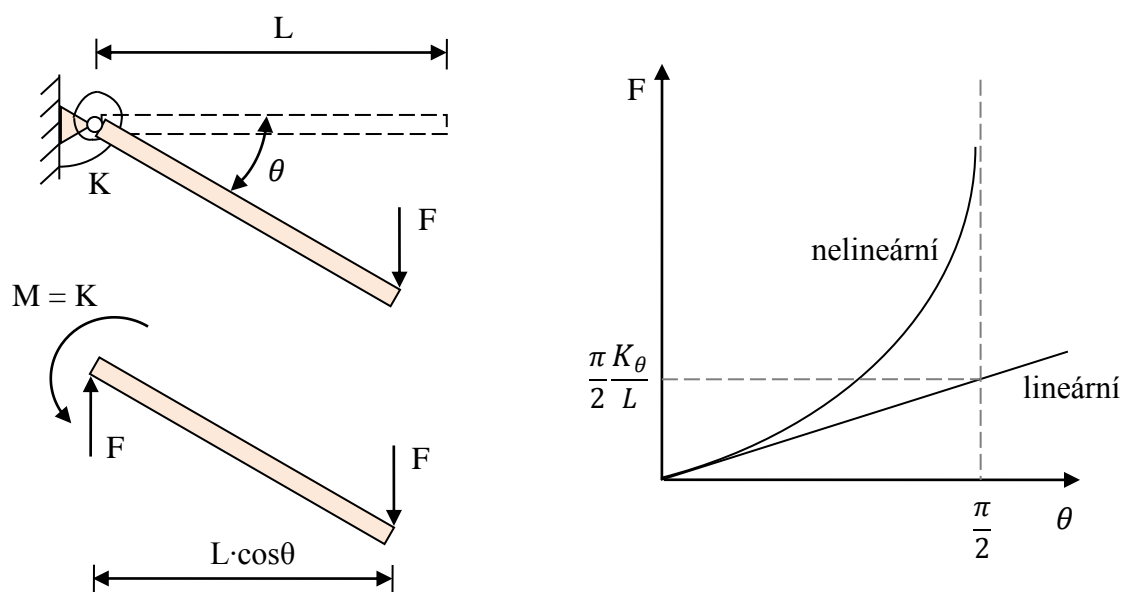
Nelinearita nastává při nesplnění podmínek pro linearitu. Tedy dochází-li k větším posunům (větším než k infinitezimálním), nechová-li se materiál lineárně elasticky, nebo se v průběhu výpočtu mění okrajové podmínky [11]. Základní rovnici pro výpočet pak lze popsat rovnicí

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u}. \quad (37)$$

V mechanice těles existují dva zdroje nelinearity, podle toho zda nelineární jsou geometrické rovnice (tedy míra deformace), nebo konstitutivní vztahy (vztahy mezi deformací a napjatostí). Jsou-li zdrojem nelinearity geometrické rovnice, hovoříme o geometrické nelinearitě, jsou-li zdrojem nelinearity konstitutivní vztahy, hovoříme o materiálové nelinearitě. Často se jedná o nelinearitu geometrickou i materiálovou

současně. Tato práce předpokládá při řešení problematiky kladek geometrickou nelinearitu jako fundamentální předpoklad a bere v potaz i odpor v ložiscích kladek, který je nelineární. Třecí síla v ložiscích je závislá na síle, působící kolmo k ose kladky.

Materiálovou i geometrickou nelinearitu lze ukázat na ideálně tuhém prutu, pružně vetknutém na jednom konci a zatíženém svislou silou bez uvážení vlastní tíhy na konci druhém, dle Obr. 12 vlevo.



Obr. 12 Ukázka nelinearity na tuhém prutu [10], [15]

Výsledný moment ve vetknutí je dán

$$M = FL\cos\theta. \quad (38)$$

Pokud je tuhost pružného vetknutí lineární, tak  $M = K\theta$  a vztah mezi silou a pootočením je dán

$$F = \frac{K\theta}{L\cos\theta}. \quad (39)$$

Přičemž v linearitě bychom dostali vztah



$$F = \frac{K_\theta \theta}{L}. \quad (40)$$

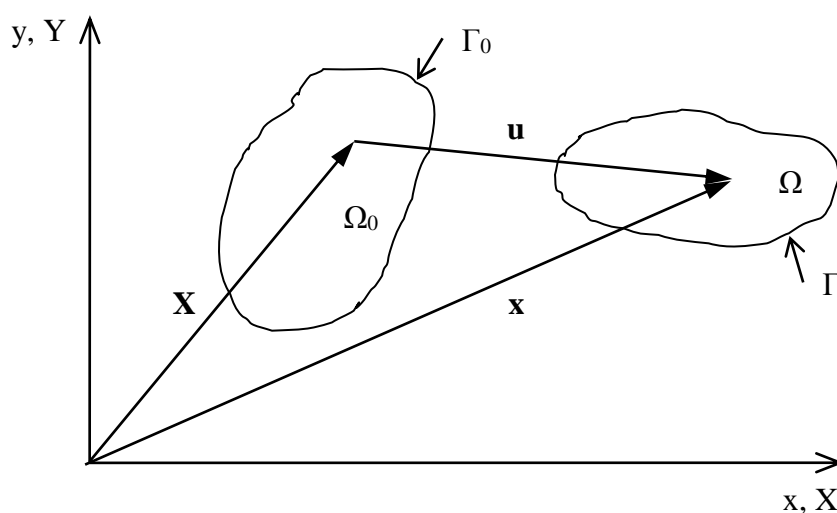
Porovnání (39) s (40) můžeme vidět na Obr. 12 vpravo.

## 4.1. Geometrická nelinearita

Zdrojem této nelinearity jsou geometrické rovnice, tedy vztah mezi posunutím a přetvořením [12].

### 4.1.1. Deformace

Mějme těleso v počáteční konfiguraci, značené na Obr. 13 symbolem  $\Omega_0$  (také označována jako nedeformovaná konfigurace). K popisu deformace potřebujeme konfiguraci, ke které jsou rovnice vztaženy (vztažná soustava). Pokud není uvedeno jinak, je k popisu použita počáteční konfigurace. K popisu mohou být ovšem použity i jiné konfigurace. Na Obr. 13 je znázorněna aktuální konfigurace s označením  $\Omega$  (také označována jako deformovaná konfigurace). [13]



Obr. 13 Deformovaná (aktuální) a nedeformovaná (počáteční) konfigurace tělesa [9]

Posunutí bodu je definováno jako

$$\mathbf{u} = \mathbf{X} - \mathbf{x}. \quad (41)$$

#### 4.1.2. Deformační gradient

Deformace tělesa je určena deformačním gradientem, definovaným [11]:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (42)$$

který lze v rozepsané formě zapsat [12]

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Determinant  $\mathbf{F}$  bývá označován  $J$  (Jacobiho determinant [13]).

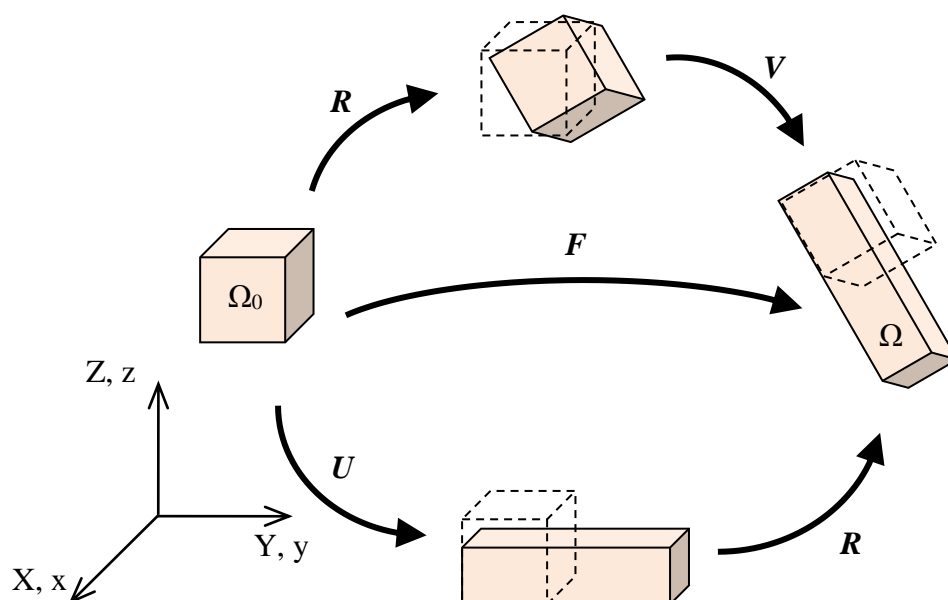
$$J = \det(\mathbf{F}) \quad (44)$$

Determinant deformačního gradientu může být použit k popisu vztahu mezi počáteční a deformovanou konfigurací [13]

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega = \int_{\Omega_0} f J \, d\Omega_0. \quad (45)$$

Deformační gradient lze rozdělit zvlášť na rotaci a deformaci. Rotace je určena tenzorem rotace  $\mathbf{R}$  (popsán v kapitole 3) a deformace je určena pravým stretch tenzorem

$U$  nebo levým stretch tenzorem  $V$ . Jejich pořadí je dáno stejně jako v kapitole 3.1 a popsáno na Obr. 14 a rovnicí (46). [14]



Obr. 14 Polární dekompozice deformačního gradientu [16]

$$F = R \cdot U = V \cdot R. \quad (46)$$

Tenzory  $U$  a  $V$  jsou symetrické, a platí

$$U = \sqrt{F^T F} = \sqrt{C} \quad (47)$$

$$V = \sqrt{F F^T} = \sqrt{B} \quad (48)$$

kde je  $C$  a  $B$  pravý a levý Cauchy-Greenův deformační tenzor,  
 $U$  a  $V$  pravý a levý stretch tenzor. [12]

### 4.1.3. Míry deformace

Na rozdíl od lineární elasticity, pro nelineární mechaniku je uváděno mnoho měř deformace. V této práci jsou popsány pouze některé.

Míra deformace musí být nulová při pohybu tělesa jako tuhého celku, např. při rotaci tuhého tělesa. Pokud některá míra deformace nesplňuje toto kritérium, může pak taková míra vést k nenulovým přetvořením a tím vytvořit nenulová napětí pouhou rotací prvku jako tuhého celku bez původního napětí. [13]

#### 4.1.3.1. Deformační gradient

Deformační gradient  $\mathbf{F}$  lze také použít jako míru deformace. A protože platí  $\mathbf{F} = \mathbf{1}$  pro nedeformované těleso, je přetvoření definováno jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{F} - \mathbf{I} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{I} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (49)$$

#### 4.1.3.2. Green–Lagrangeův tenzor deformace

Tato míra deformace je vztažena k původní konfiguraci, derivuje se tedy podle  $\mathbf{X}$ . Green–Lagrangeův tenzor deformace lze zapsat jako

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right). \quad (50)$$

S využitím deformačního gradientu  $\mathbf{F}$ , lze tento tenzor zapsat jako

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right), \quad (51)$$

kde je  $\mathbf{C}$  pravý Cauchy–Greenův deformační tenzor (viz. kapitola 4.1.2). [7]

## 4.1.3.3. Euler–Almansiho tenzor deformace

Tato míra deformace je vztažena k deformované konfiguraci, derivuje se tedy podle  $\mathbf{x}$ . Euler–Almansiho tenzor deformace lze zapsat jako

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (52)$$

S využitím deformačního gradientu  $\mathbf{F}$ , lze tento tenzor zapsat jako

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad (53)$$

kde je  $\mathbf{B}$  levý Cauchy–Greenův deformační tenzor (viz. kapitola 4.1.2). [12]

## 4.1.3.4. Logaritmická míra deformace

Logaritmická míra deformace (anglicky označována také jako true strain) je vhodná zejména pro velké deformace. Tato míra deformace je definována po přírůstcích. V každém přírůstku se vztahuje k aktuální konfiguraci [7]. Lze definovat jako

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \ln \mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} \quad (54)$$

kde je  $\mathbf{U}$  pravý stretch tenzor (viz. kapitola 4.1.2).

V 1D úloze je dána

$$\varepsilon_n = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l_0} = [\ln l]_{l_0}^l = \ln l - \ln l_0 = \ln \left( \frac{l}{l_0} \right). \quad (55)$$

#### 4.1.3.5. Seth–Hillova rodina tenzorů deformace

Tato rodina tenzorů deformace je definována jednotným vzorcem ve tvaru

$$\mathbf{E}(m) = \frac{1}{2m}(\mathbf{U}^{2m} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2m}(\mathbf{C}^m - \mathbf{I}). \quad (56)$$

Pro jednotlivé hodnoty  $m$  dostáváme:

Green–Lagrangeův tenzor,  $m = 1$

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (57)$$

Biotův tenzor,  $m = 1/2$

$$\mathbf{E}(1/2) = \mathbf{U} - \mathbf{I} = \mathbf{C}^{1/2} - \mathbf{I}. \quad (58)$$

Logaritmický, Henckyho, opravdový, přirozený tenzor,  $m = 0$  [15]

$$\mathbf{E}(0) = \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{C}. \quad (59)$$

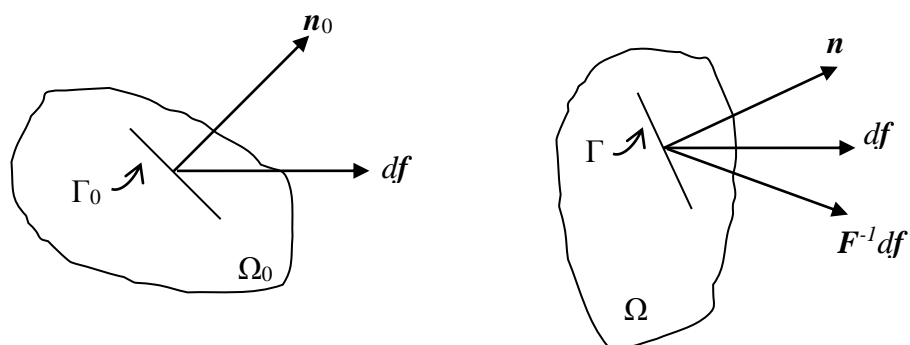
$m = -1$

$$\mathbf{E}(-1) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{U}^{-2}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}). \quad (60)$$

Tento tenzor je jiný, než Euler–Almansiho tenzor  $\mathbf{e} = 1/2(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})$ .

#### 4.1.4. Míry napjatosti

Stejně jako u měř deformace, existuje i několik měř napjatosti. Ty se liší v závislosti na tom, ke které konfiguraci jsou vztaženy.



Obr. 15 Znáornění původní a aktuální konfigurace [9]

Mezi silou  $d\mathbf{f}$  a vektory napětí  $\mathbf{t}$  a  $\mathbf{t}_0$  platí vztah [12]

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}d\Gamma = \mathbf{t}_0d\Gamma_0. \quad (61)$$

#### 4.1.4.1. Cauchyho napětí

Cauchyho napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  je definováno Cauchyho zákonem. Ten zahrnuje normálu na aktuální povrch  $\mathbf{n}$  a napětí na aktuální plošku  $\mathbf{t}$ . Z tohoto důvodu je Cauchyho napětí často nazýváno jako fyzikální napětí, anglicky true stress. [13]

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}d\Gamma = d\mathbf{f} = \mathbf{t}d\Gamma \quad (62)$$

Tenzor napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  je symetrický.

#### 4.1.4.2. První napětí Piola–Kirchhoff

Definice prvního napětí Piola–Kirchhoff (označováno také jako nominální napětí) je podobná jako u Cauchyho napětí, akorát je na rozdíl od něj definován na ploše a normále vztažených k původní (nedeformované) konfiguraci. [13]

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{P} d\Gamma_0 = d\mathbf{f} = \mathbf{t}_0 d\Gamma_0 \quad (63)$$

Tenzor napětí  $\mathbf{P}$  není symetrický.

#### 4.1.4.3. Druhé napětí Piola–Kirchhoff

Na rozdíl od prvního napětí Piola–Kirchhoff je druhé napětí Piola–Kirchhoff přepočítáno pomocí  $\mathbf{F}^{-1}$  ze zdeformované konfigurace na nezdeformovanou. Tento přepočet má jasný důvod, a tím je, že dělá druhé napětí Piola–Kirchhoff symetrickým a je také energeticky konjugentní s Green–Lagrangeovým tenzorem deformace. [13]

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{S} d\Gamma_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t}_0 d\Gamma_0 \quad (64)$$

#### 4.1.5. Formulace geometrické nelinearity

Existují dvě běžně používané formulace: updated Lagrangian a total Lagrangian. Tyto dvě formulace se liší v tom, k jaké konfiguraci jsou vztaženy.

##### 4.1.5.1. Updated Lagrangian

Tato formulace je vztažena k aktuální (deformované) konfiguraci, běžně se používá Cauchyho napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  a některá z měr deformace formulována na stejné konfiguraci (např. Euler–Almansiho tenzor deformace  $\mathbf{e}$  nebo logaritmičká míra deformace  $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ )

##### 4.1.5.2. Total Lagrangian

Formulace total Lagrangian je vztažena k nedeformované (původní) konfiguraci, běžně se používá druhé napětí Piola–Kirchhoff  $\mathbf{S}$  a Green–Lagrangeův tenzor deformace  $\mathbf{E}$ .



#### 4.1.6. Tečná matice tuhosti

Tečná matice tuhosti  $\mathbf{K}_T$  charakterizuje aktuální tuhost v daném okamžiku a je dána součtem materiálové matice tuhosti  $\mathbf{K}_M$  a geometrické matice tuhosti  $\mathbf{K}_\sigma$ .

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_\sigma \quad (65)$$

##### 4.1.6.1. Materiálová matice tuhosti

Materiálová matice tuhosti je dána vztahem

$$\mathbf{K}_M = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^\sigma \mathbf{B} d\Omega, \quad (66)$$

kde je  $\mathbf{B}$  matice prostorových derivací báзовých funkcí,  
 $\mathbf{C}^\sigma$  matice daná pružností materiálu v závislosti na napětí [12].

##### 4.1.6.2. Geometrická matice tuhosti

Ačkoliv je v literatuře často uváděn tento název, má na tuto tuhost vliv pouze stav napjatosti tělesa.

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \Sigma \mathbf{G} d\Omega, \quad (67)$$

kde je  $\Sigma$  dáno tenzorovým součinem  $\Sigma = \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{I}$ ,  
 $\mathbf{G}$  matice tvořená submaticemi  $\mathbf{g}_i$  (viz.(68)).

Pro  $\mathbf{G}$  platí

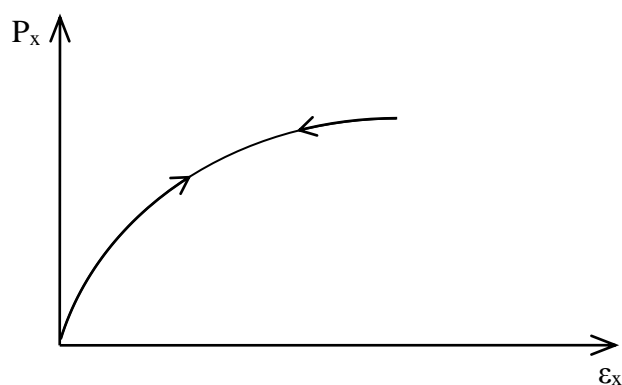
$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_i, \dots, \mathbf{g}_n], \quad (68)$$

kde matice  $\mathbf{g}_i$  v sobě obsahují první derivace báзовých funkcí.

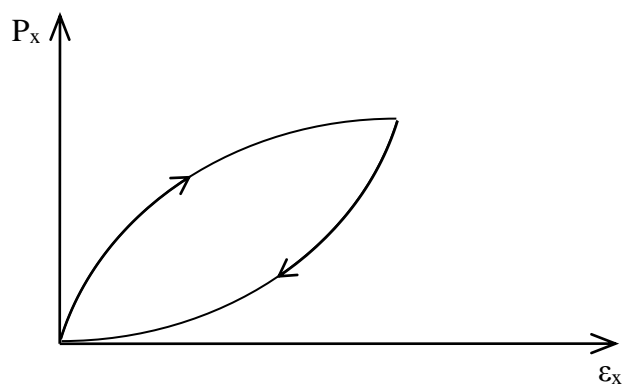
## 4.2. Materiálová nelinearita

V geometrické nelinearitě je uvážena pouze lineární závislost mezi napětím a přetvořením. To je dobré zjednodušení pro řadu materiálů, ale platné pouze za určitých předpokladů, jako například malé přetvoření. To ovšem není vždy pravda. Například u kovového drátu můžeme pozorovat plastickou deformaci po jeho zohnutí díky jeho elasto-plastickému materiálu. V tomto příkladu trvalá deformace nastává, pokud je dosaženo limitního napětí [15]. Poté hovoříme o materiálové (fyzikální) nelinearitě.

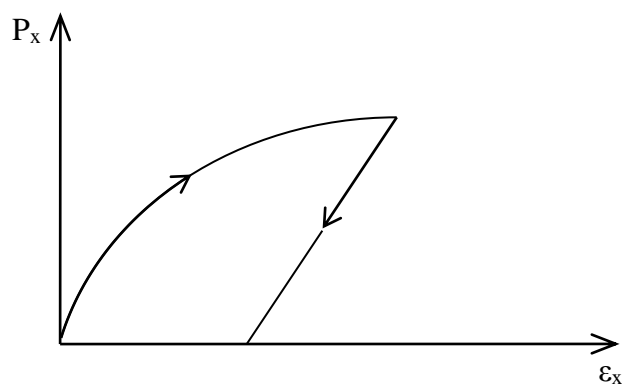
Závislost mezi napětím a přetvořením lze znázornit grafem. Zde je uvedeno několik příkladů pracovních diagramů pro přitížení a odtížení [12]:



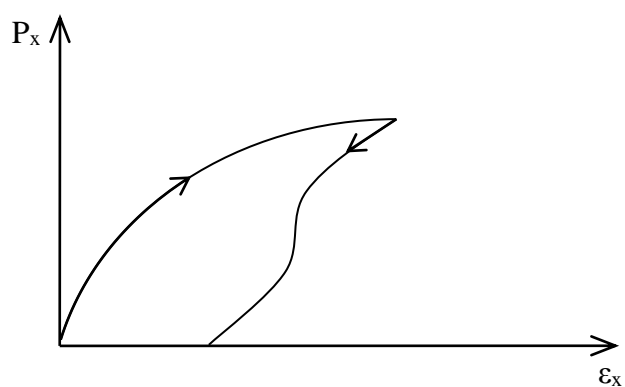
Obr. 16 Pružný pracovní diagram



Obr. 17 Pracovní diagram pružný s mikrotrhlinami



Obr. 18 Pružnoplastický pracovní diagram



Obr. 19 Obecný pracovní diagram

Pro přehlednost je zde uvedena tabulka s přehledem možností analýzy [11]

Typ analýzy	Popis	Typicky používaná formulace	Míry napětí a deformace
Pouze materiálová nelinearita	Infinitezimální posunutí a přetvoření; nelineární vztah mezi přetvořením a napětím	Pouze materiálová nelinearita	Inženýrská napjatost a přetvoření
Velká posunutí, velké rotace, ale malá přetvoření	Posunutí a rotace jsou velké, ale protažení vláken a změna úhlu mezi nimi jsou malé; vztah mezi přetvořením a napětím může být lineární i nelineární	Total Lagrangian  Updated Lagrangian	Druhé napětí Piola-Kirchhoff, Green - Lagrangeův tenzor deformace  Cauchyho stres, Euler - Almansiho tenzor deformace
Velká posunutí, velké rotace, a velké přetvoření	Protažení vláken a změna úhlu mezi nimi jsou velké, posunutí a rotace mohou být také velké; vztah mezi přetvořením a napětím může být lineární i nelineární	Total Lagrangian  Updated Lagrangian	Druhé napětí Piola-Kirchhoff, Green - Lagrangeův tenzor deformace  Cauchyho stres, Logaritmičká míra deformace

## 5. NEWTON-RAPHSONOVA ITERAČNÍ METODA

Jedná se o jednu z nejpoužívanějších iteračních metod pro řešení nelineárních rovnic. V (37) vidíme, že  $\mathbf{K}$  je funkcí  $\mathbf{u}$ . Proto nelze tuto soustavu řešit přímo, užívá se k jejímu řešení iteračních metod. Iterační metody jsou založeny na postupném zpřesňování řešení, přičemž každý krok výpočtu je lineární.

Řešíme-li krok  $i$ , potom lze rovnici (37) přepsat ve tvaru

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}(\mathbf{u}_i) \mathbf{u}_{i+1}. \quad (69)$$

Abychom našli správné řešení, hledáme ho ve tvaru

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{K}(\mathbf{u}_i) \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{f}, \quad (70)$$

kde je  $\mathbf{r}$  nevyvážené zatížení, a hledáme řešení kdy je  $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = 0$ .

Posuny jsou dány rovnicí

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}_i, \quad (71)$$

a tečná matice tuhosti

$$\mathbf{K}_{i-1} = \left. \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \right) \right|_{\mathbf{u}_{i-1}}. \quad (72)$$

Rozvojem Taylorovy řady a zanedbáním členů 2. a vyššího řádu získáme

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{r}(\mathbf{u}_{i-1}) + \left. \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \right) \right|_{\mathbf{u}_{i-1}} \Delta \mathbf{u}_i. \quad (73)$$

Přestože teoreticky je možné dosáhnout řešení pro daný zatěžovací stav přímo, je praktičtější zvážit postupné přitěžování

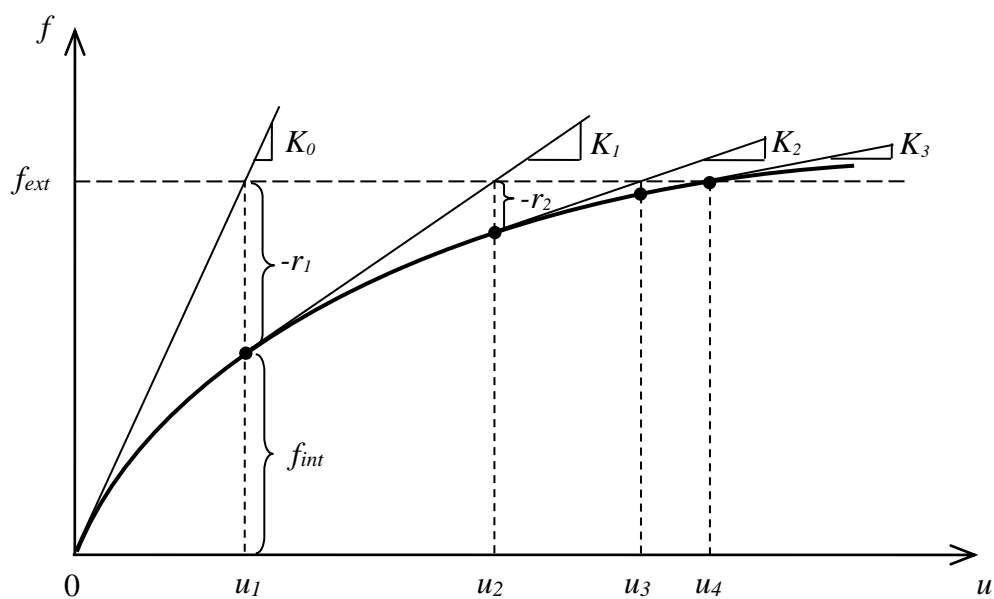
$$f = \sum_{i=1}^n \Delta f_i \quad (74)$$

kde  $n$  je počet přírůstků zatížení. Všeobecně lze říci, že čím více je přírůstků, tím je jednodušší najít řešení splňující konvergenční kritéria pro každý přírůstek.

Postup výpočtu je následující [16]:

- VSTUPY geometrie, materiálové vlastnosti a parametry výpočtu
- INICIALIZACE  $f = 0$ ,  $x = X$ ,  $r = 0$
- CYKLUS přes přírůstky zatížení
  - $f = f + \Delta f$
  - $r = r - \Delta f$
  - CYKLUS dokud (konvergenční kritéria nejsou splněna)
    - NALEZENÍ  $K$
    - ŘEŠENÍ  $Ku = -r$
    - PŘEPOČET  $x = x + u$
    - NALEZENÍ  $\varepsilon, \sigma, f$
    - NALEZENÍ  $r = f_{int} - f_{ext}$
  - KONEC CYKLU
- KONEC CYKLU

Tento postup lze také znázornit na Obr. 20, kde je uveden případ s jedním přírůstkem zatížení.



Obr. 20 Princip Newton-Raphsonovy metody [10]

Vedle klasické Newton-Raphsonovy metody existují ještě její různé varianty. Modifikovaná metoda Newton-Raphson využívá k nalezení řešení pouze počáteční matici tuhosti, není tak potřeba sestavovat matici tuhosti v každém iteračním kroku. Tato metoda však většinou potřebuje k nalezení řešení více iterací.

Kromě metody Newton-Raphson a jejích variant se využívají i jiné metody pro řešení rovnic. Patří mezi ně například Picardova metoda a Riksova metoda.

## 6. EXPLICITNÍ DYNAMICKÁ METODA

Systém pohybových rovnic diskrétního modelu konstrukce lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (75)$$

kde je  $\mathbf{M}$  matice hmotnosti,  
 $\mathbf{C}$  matice tlumení,  
 $\mathbf{K}$  matice tuhosti,  
 $\mathbf{F}$  vektor zatížení,  
 $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$  vektor posunutí a jeho první a druhá derivace podle času. [7]

Všeobecně jsou matice v (75) proměnné v čase, a proto může být systém (75) vyřešen pouze využitím metod přímé numerické integrace. Za podmínky, že matice hmotnosti a matice tuhosti jsou konstantní a matice tlumení splňuje jisté podmínky, lze systém (75) řešit metodou rozkladu podle vlastních tvarů kmitů.

Základní myšlenka numerické metody přímé integrace spočívá v řešení systému (75) pouze v konečném počtu časových okamžiků  $t_0, t_1, \dots, t_m$ . Délka mezi jednotlivými časovými kroky

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \quad (76)$$

je nazývána délka integračního kroku. Délka integračního kroku  $\Delta t_i$  ovlivňuje přesnost, stabilitu a rychlost řešení. Na počátku řešení je nutno zohlednit počáteční podmínky řešení. Čas  $t = 0$  je považován za počáteční bod, ve kterém jsou počáteční podmínky známy

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t_0) &= \mathbf{u}_0, \\ \dot{\mathbf{u}}(t_0) &= \dot{\mathbf{u}}_0. \end{aligned} \quad (77)$$

Systém pohybových rovnic (75) tak může být zapsán jako



$$M\ddot{\mathbf{u}}_i + C\dot{\mathbf{u}}_i + K\mathbf{u}_i = \mathbf{F}_i. \quad (78)$$

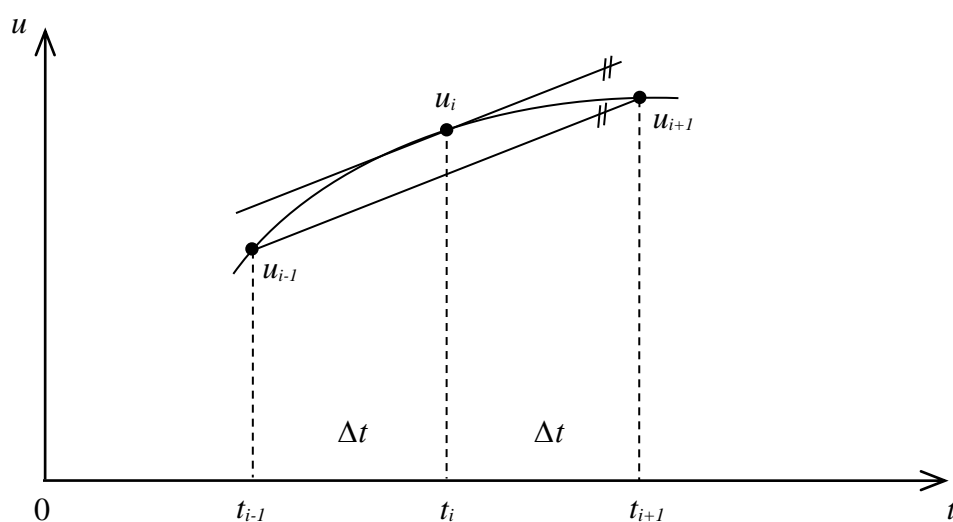
Metody numerického řešení se dělí na explicitní a implicitní. Explicitní jsou vhodné pro řešení rychlých dynamických jevů, implicitní zase pro řešení pomalých dynamických jevů.

Explicitní metoda využívá předpokladu o rozdělení  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$  v intervalu  $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$  a znalosti těchto veličin v čase  $t_i$ . Prove se výpočet  $\mathbf{u}_{i+1}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$  ze soustavy (87).

### 6.1. Metoda centrálních diferencí

Při numerické integraci diferenciálních rovnic metodou centrálních diferencí se využívá náhrada derivací podle času diferencemi. Dá se využít diferenční náhrady

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_i &= \frac{1}{2\Delta t_i} (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}) \\ \ddot{\mathbf{u}}_i &= \frac{1}{\Delta t_i^2} (\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}). \end{aligned} \quad (79)$$



Obr. 21 Schéma centrální diference

Po dosazení (88) do (87) vznikne rovnice (80) [7]

$$\left(\frac{1}{\Delta t_i^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t_i} \mathbf{C}\right) \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{F}_i - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t_i^2} \mathbf{M}\right) \mathbf{u}_i - \left(\frac{1}{\Delta t_i^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t_i} \mathbf{C}\right) \mathbf{u}_{i-1}. \quad (80)$$

Tato metoda je nejefektivnější, pokud je matice  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$  nebo  $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M}$  a zároveň je matice  $\mathbf{M}$  diagonální. Tato metoda je podmíněně stabilní. Stabilita je dána podmínkou

$$\Delta t_i \leq \frac{T_n}{\pi}. \quad (81)$$

kde je  $T_n$  nejmenší perioda kmitání.

Podmínka (90) vyjadřuje nutnost mít časový krok při výpočtu menší, než je doba, kdy dorazí vzruch z libovolného uzlu do uzlu s ním sousedícím. Podmínka maximálního časového kroku tak lze vyjádřit za pomoci využití rovnice rychlosti zvuku

$$v_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (82)$$

kde je  $E$  modul pružnosti materiálu,  
 $\rho$  hustota materiálu,  
 $v_s$  rychlost šíření zvuku v materiálu.

Vzruchu tak trvá urazit vzdálenost mezi dvěma nejbližšími uzly stejný čas, jenž je zároveň maximální možný pro stabilitu této metody

$$\Delta t_i \leq \frac{l_{min}}{v_s}. \quad (83)$$

kde je  $l_{min}$  minimální vzdálenost mezi dvěma uzly spojenými materiálem zohledněným při výpočtu (91).

Nachází-li se v konstrukci více druhů materiálů, vybere se vždy minimální  $\Delta t_i$  v celém modelu.

## 7. LAGRANGEOVY MULTIPLIKÁTORY

Lagrangeovy multiplikátory jsou v metodě konečných prvků využívány ke svázání dvou či více různých stupňů volnosti v modelu. Zatím co potenciální energie běžné soustavy v lineární metodě konečných prvků je dána vztahem

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}, \quad (84)$$

k dosažení svázání vazeb je třeba rozšířit tuto soustavu o  $m$  Lagrangeových multiplikátorů obsažených ve vektoru  $\boldsymbol{\lambda}$  a vytvořit tak Lagrangeán [17]

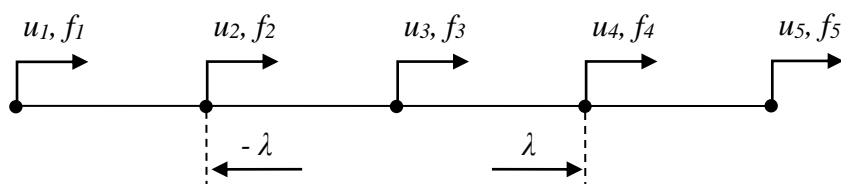
$$L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \Pi + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{b}). \quad (85)$$

Nalezení extrému  $L$  vzhledem k  $\mathbf{u}$  a  $\boldsymbol{\lambda}$  tak vytvoří soustavu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}, \quad (86)$$

kde je  $\mathbf{K}$  hlavní matice tuhosti,  
 $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{A}^T$  matice vyjadřující vazbu mezi stupni volnosti,  
 $\mathbf{f}$  vektor zatížení,  
 $\mathbf{b}$  vektor vyjadřující vazbu mezi stupni volnosti,  
 $\mathbf{u}$  a  $\boldsymbol{\lambda}$  vektor hledaných členů. [17]

Tento koncept je dobře pochopitelný na ukázkovém příkladu tyče, rozdělené na pět konečných prvků. Svážeme stupně volnosti  $u_2$  s  $u_4$  tak, že platí  $u_2 = u_4$ .



Obr. 22 Schéma tyče dělené na 4 konečné prvky [17]

Soustava rovnic tak vypadá následovně

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{23} & K_{33} & K_{34} & 0 \\ 0 & 0 & K_{34} & K_{44} & K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & K_{45} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 - \lambda \\ f_3 \\ f_4 + \lambda \\ f_5 \end{Bmatrix}. \quad (87)$$

Neznámou  $\lambda$  převedeme na levou stranu, čímž vznikne soustava

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & K_{23} & K_{33} & K_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{34} & K_{44} & K_{45} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & K_{45} & K_{55} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (88)$$

V této soustavě je ovšem pět rovnic a šest neznámých, proto se doplní šestá rovnice s podmínkou  $u_2 - u_4 = 0$ .

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & K_{23} & K_{33} & K_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{34} & K_{44} & K_{45} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & K_{45} & K_{55} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (89)$$

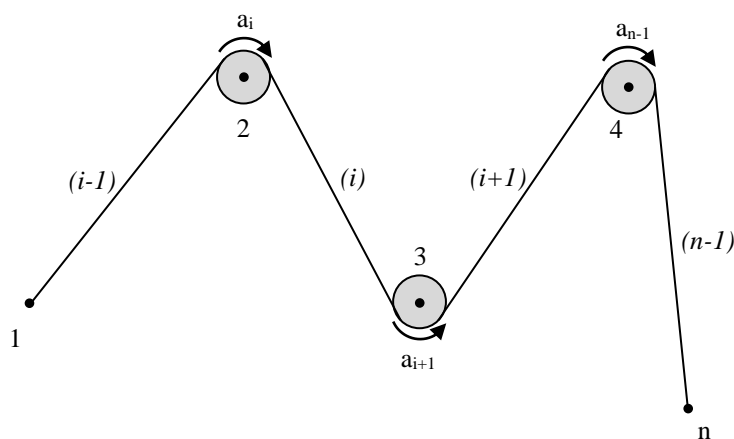
Soustava rovnic (89) tak odpovídá schématu soustavy rovnic (86).

Lagrangeovy multiplikátory jsou velmi účinné a používají se k definování vazeb mezi uzly v metodě konečných prvků jako alternativa k Penalty metodě nebo Master-Slave metodě. Její nevýhodou je, že takto rozšířená matice již není pozitivně definitní. [17]

## 8. ALGORITMIZACE ŘEŠENÍ LAN NA KLADKÁCH

### 8.1. Stávající algoritmy pro řešení lan na kladkách

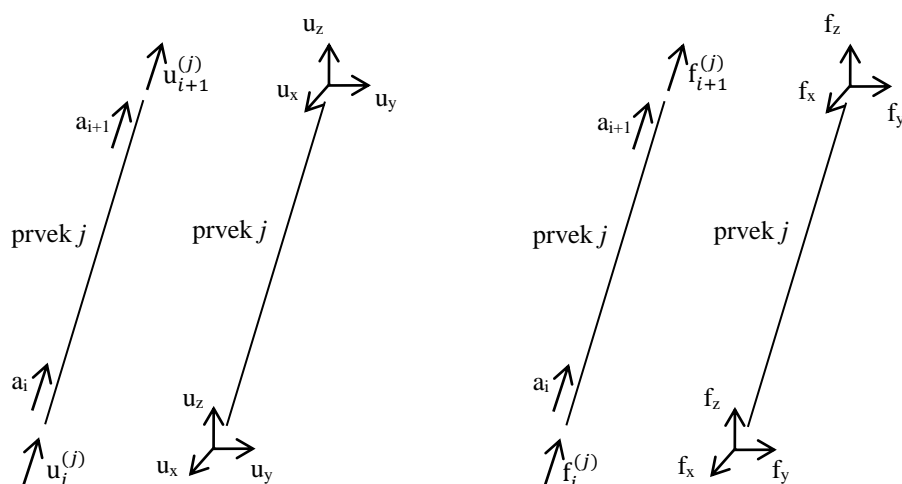
Do této doby používané způsoby výpočtu spočívá v přerozdělení napětí mezi jednotlivými lanovými úseky nebo zavedení dalšího stupně volnosti.



Obr. 23 Super element lana na kladkách

#### 8.1.1. Super element soustavy kladek na laně

Super element tvoří soustava, která je složena z kladek, které jsou kontinuálně spojeny lanovými prvky. Kladky mohou být umístěny libovolně na konstrukci, a v těchto bodech jsou vypočítány posuny. Lano může díky koncepci kladek přecházet z jedné strany kladky na druhou a obráceně. Lanové prvky přenášejí pouze tah, a tak je deformace tohoto prvku určena pouze osovou silou.



Obr. 24 Přemístění a síly na jednom prvku super elementu

Pro zjednodušení je zanedbán rozměr kladky, kladky jsou tak přímo spojeny pouze lanovými prvky bez jakékoli excentricity.

### 8.1.2. *Současný algoritmus pro řešení lan na kladkách*

Současný algoritmus používaný v programu RFEM vychází ze dvou základních předpokladů. Prvním předpokladem je, že síla v prutech, které mají společnou kladku se rovná

$$N^{(j)} + dN^{(j)} = N^{(j+1)} + dN^{(j+1)}. \quad (90)$$

Druhým předpokladem je neměnnost délky celé soustavy

$$\sum dL^{(j)} = 0. \quad (91)$$

Vztah (91) lze zapsat jako

$$\sum (dN^{(j)} \cdot L^{(j)}) = 0. \quad (92)$$

Upravením rovnice (90) získáme

$$N^{(j)} - N^{(j+1)} = dN^{(j+1)} - dN^{(j)}. \quad (93)$$

Rovnice (97) a (98) se zapíší do soustavy rovnic

$$\begin{Bmatrix} N^{(j)} - N^{(j+1)} \\ 0 \end{Bmatrix}_{((n-1) \times 1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L^{(j)} & L^{(j+1)} \end{bmatrix}_{((n-1) \times (n-1))} \begin{Bmatrix} dN^{(j)} \\ dN^{(j+1)} \end{Bmatrix}_{((n-1) \times 1)}, \quad (94)$$

Takto vypočítaná změna vnitřní síly se převede do globálních souřadnic a připočte se k aktuální vnitřní síle.

Toto řešení však vyžaduje při malých silách a velkých tuhostech v lanových prvcích kladky mnoho iterací k nalezení rovnovážného stavu, protože velikost částí lan přecházejících přes kladku na vedlejší lanový prvek v jednotlivých iteracích je dána protažením lan od nerovnovážných sil. V případě tuhých lan a malých sil jsou pak možné posuvy lan na kladkách velmi malé, což způsobuje nutnost velkého počtu iterací.

### 8.1.3. Jiné algoritmy pro řešení lan na kladkách

Tento koncept je uveden například v článku [18], [19], [20].

Vztah pro sílu na jednom lanovém prvku tak lze zapsat jako

$$\begin{Bmatrix} f_i^{(j)} \\ f_{i+1}^{(j)} \end{Bmatrix} = k^{(j)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ a_i \\ a_{i+1} \end{Bmatrix}, \quad (95)$$

kde

$$k^{(j)} = \frac{E^{(j)} A^{(j)}}{L^{(j)}}, \quad (96)$$



kde je  $A$  průřezová plocha,  
 $E$  modul pružnosti,  
 $L$  délka prvku.

Nyní se položí síla  $f_i^{(j)}$  do vztahu se silou  $f_i^{(j+1)}$ , čímž dostaneme

$$f_i^{(j)} = -f_i^{(j+1)}. \quad (97)$$

V některých zdrojích se provádí převod takovéto soustavy do globálního souřadného systému [20]

$$\begin{Bmatrix} f_i^{(j)} \\ f_{i+1}^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(j)} & 0 \\ 0 & \mathbf{t}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i^{(j)} \\ \mathbf{f}_{i+1}^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (98)$$

a

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ a_i \\ a_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(j)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{t}^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_{i+1} \\ a_i \\ a_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (99)$$

kde je  $\mathbf{f}_i^{(j)}$  a  $\mathbf{f}_{i+1}^{(j)}$  globální uzlové síly,  
 $\mathbf{u}_i$  a  $\mathbf{u}_{i+1}$  globální uzlové přemístění,  
 $\mathbf{t}^{(j)}$  matice směrových kosinů prvku.

Matice směrových kosinů prvku je dána

$$\mathbf{t}^{(j)} = [t_x^{(j)}, t_y^{(j)}, t_z^{(j)}], \quad (100)$$

kde jsou jednotlivé členy určena z prostorových souřadnic uzlů  $i$  a  $i+1$

$$t_x^{(j)} = \frac{x_{i+1} - x_i}{L^{(j)}}, \quad (101)$$

$$t_y^{(j)} = \frac{y_{i+1} - y_i}{L^{(j)}},$$

$$t_z^{(j)} = \frac{z_{i+1} - z_i}{L^{(j)}}.$$

S využitím těchto vztahů jsme schopni vyjádřit soustavu rovnic v globálním souřadném systému pro výpočet super elementu.

Máme-li základní soustavu rovnic pro uzly spojené lanovými prvky super elementu ve 3D prostoru s pouze translačními stupni volnosti v uzlech

$$\mathbf{f}_{(3n \times 1)} = \mathbf{K}_{(3n \times 3n)} \mathbf{u}_{(3n \times 1)}. \quad (102)$$

Rozšířením této soustavy o členy vyjadřující vztah mezi posunutím jednotlivých uzlů spojených jedním super elementem, získáme

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}_{((4n-2) \times 1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{K}_{au}^T \\ \mathbf{K}_{au} & \mathbf{K}_a \end{bmatrix}_{((4n-2) \times (4n-2))} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix}_{((4n-2) \times 1)}. \quad (103)$$

V případě konstrukce s jednou kladkou (č.1 na Obr. 3) tak mají matice  $\mathbf{K}_{au}$  a  $\mathbf{K}_a$  tvar

$$\mathbf{K}_{au}^T = \begin{bmatrix} -k_{1x} \\ -k_{1y} \\ -k_{1z} \\ k_{1x} + k_{2x} \\ k_{1x} + k_{2y} \\ k_{1x} + k_{2z} \\ -k_{2x} \\ -k_{2y} \\ -k_{2z} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{K}_a = [k_1 + k_2]. \quad (104)$$

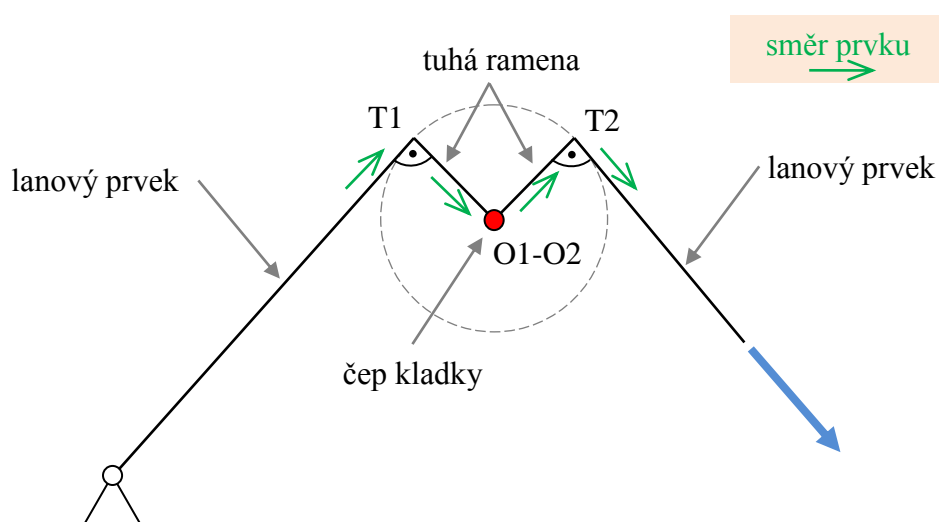
V tomto ani předchozím řešení lan na kladkách není zohledněn poloměr kladek, takže není možné vypočítat konstrukce, které využívají soustavy kladek s různými poloměry k přenosu síly (např. Obr. 6). Zároveň dochází k nepřesnostem v geometrii lan, která ve skutečnosti nevedou do středů kladek. Z těchto důvodů bylo přistoupeno k vytvoření nového algoritmu.

## 8.2. Nový algoritmus pro řešení lan na kladkách

Pro vytvoření programového modulu, který má za úkol umožnit výpočet lan na kladkách, bylo nejprve potřeba určit, co se od tohoto modulu přesně očekává. Cílem je vytvořit algoritmus, který bude přesně respektovat vedení lan v prostoru a současně bude maximálně výkonný. Dále s ohledem na požadovanou funkci modulu určit jeho potřebné vstupy a od toho se odvíjející jeho umístění v programu.

### 8.2.1. Předpoklady nového algoritmu

Každá kladka je tvořena dvěma částmi. Těmito částmi jsou čep kladky a její rotující část (kolečko kladky). Kladka je definována středem, poloměrem, dotykovými body lan a transformační maticí, která je spjata s osou (bod O1). Osa kladky je zároveň osou otáčení. Bod O2 je soumězný s bodem O1 a je spojen s otáčejícím se kolečkem kladky. Mezi body O1 a O2 může být definováno tření. Bod O1 je podepřen nebo je součástí jiné konstrukce. Kolečko kladky je modelováno tuhými rameny T1-O2 a O2-T2 kde body T1 a T2 jsou dotykovými body lan. Tuhá ramena kladky by vždy měla být kolmá na lanové prvky. Lanové prvky nebudou ovinuty kolem kladky, ale pro zjednodušení budou tyto lanové prvky pouze v částech mezi kladkami a případně mezi kladkou a další částí konstrukce. V programu je zajištěno, že prvky kladky i přilehlé lanové prvky mají jeden směr.



Obr. 25 Definice kladky

### 8.2.2. Umístění programového modulu

Jelikož úkolem vypracovaného algoritmu je umožňovat otáčení kladky, jako nejvhodnější pozice pro tento modul bylo vybráno místo po dopočítání prutů. V tomto místě je již známa momentální poloha i vnitřní síly všech uzlů. Modul tak nebude zasahovat do již zaběhnutého funkčního systému nikterak významným způsobem (ve smyslu zásahů do aktuálního kódu). Zachová se tak přehlednost zdrojového kódu. Zároveň tak bude jednodušší opravovat případné chyby a nedostatky.

### 8.2.3. Popis základního algoritmu

Po specifikaci všech proměnných, které jsou v modulu používány, se nejprve určí hodnoty společné pro všechny kladky. Konkrétně se jedná o parametr NDIM, který nabývá hodnoty 2 nebo 3 podle toho zda se jedná o 2D nebo 3D úlohu. Parametr JF udávající počet stupňů volnosti v uzlu, hodnota K0 představující počet čísel v poli KOD před daným druhem prvku (v případě kladek se jedná o pruty). Hodnoty IJKD, WDZ a LRES\_P slouží k úpravě deformací, které jsou po skončení výpočtu zobrazovány.

```

NDIM = CF.NDIM           ! dimenze ulohy
JF   = CF.JF            ! pocet parametru v uzlu
K0   = ish1(CF.NELEM,2) ! pocet cisel v poli KOD pred danym druhem prvku

IJKD = CF.POLE_INT(PI_RES_DEF) ! deformace - pristup k vysledkum v souboru
WDZ   = CF.POLE_INT(PI_EQT_DEF) ! deformace - pristup k vysledkum v RAM
LRES_P = CF.N_RES_OUT_P      ! indikace zda je soubor k dispozici

```

Pro účely čtení a zápisu transformačních matic jsou určeny příslušné indexy v závislosti na rozměru řešené úlohy.

```

TUH.TYP   = 0
TUH.TYP_EL = 0
TUH.ETYP  = 0

if (NDIM==3) then ! 3D
  K1 = 1
  K2 = 27
else !2D
  K1 = 10
  K2 = 27
endif

```

Veškerý další kód je obsažen v cyklu, který je závislý na čísle zrovna vypočítávané kladky.

---

```
klad: do I = 1, I1.NKLAD_NEW      ! cyklus pro kladky
```

Na začátku cyklu se načtou transformační matice prutů na kladce, se kterými bude manipulováno. Jedná se celkem o 5 transformačních matic příslušící lanovým prvkům, tuhým ramenům a čepu kladky (TLN\_L1, TLN\_L2, TLN\_R1, TLN\_R2, TLN\_O). Transformační matice prvku má tvar

$$T = \begin{bmatrix} R & \Delta R \\ \mathbf{0} & R \end{bmatrix} \quad (105)$$

kde je  $R$  matice rotace,  
 $\Delta$  je matice ve tvaru

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & e_z & -e_y \\ -e_z & 0 & e_x \\ e_y & -e_x & 0 \end{bmatrix} \quad (106)$$

kde jsou  $e_x, e_y, e_z$  excentricity připojení.

Načítání těchto matic se provádí naráz, protože je to lepší pro rychlost algoritmu.

```
! ----- nacteni transformacnich matic -----
TUH.NEL = KL1(I).L1      ! první prut na kladce
call ELEM_READ_TR (CF, 2, TUH, IERR)
TLN_L1 = TUH.TR(K1:K1+8)

TUH.NEL = KL1(I).R1      ! druhý prut na kladce
call ELEM_READ_TR (CF, 2, TUH, IERR)
TLN_R1 = TUH.TR(K1:K1+8)

TUH.NEL = KL1(I).KONT    ! osa kladky
call ELEM_READ_TR (CF, 2, TUH, IERR)
TLN_O = TUH.TR(K1:K1+8)

TUH.NEL = KL1(I).R2      ! třetí prut na kladce
call ELEM_READ_TR (CF, 2, TUH, IERR)
TLN_R2 = TUH.TR(K1:K1+8)

TUH.NEL = KL1(I).L2      ! čtvrtý prut na kladce
call ELEM_READ_TR (CF, 2, TUH, IERR)
TLN_L2 = TUH.TR(K1:K1+8)
```

Také se určí další hodnoty potřebné pro danou kladku. Těmi jsou poloměr kladky  $R$ , čísla uzlů a indexy pro práci s deformacemi uzlů. Čísla všech uzlů jsou uložena v jenom jednorozměrném poli KOD. Aby bylo možné s nimi jednoduše pracovat, načtou se nejprve indexy uzlů, které leží před těmi hledanými, do K. Pomocí takto nalezených uzlů zapsaných v KODC se získají indexy D1 a D2 pro získání deformace z pole EQT. Dále se využívá KODC pro získání indexů v poli souřadnic XYZ. Uzly v KODC jsou znázorněny na Obr. 26.

```

R = DL1(KL1(I).R1).DL_OR           ! polomer kladky

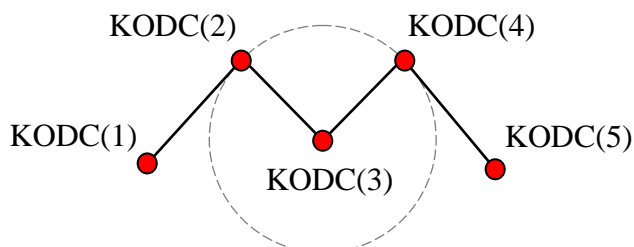
K(1) = K0 + ish1((KL1(I).L1-1),1)
K(2) = K0 + ish1((KL1(I).R1-1),1)
K(3) = K0 + ish1((KL1(I).L2-1),1)

KODC(1:2) = KOD(K(1)+1:K(1)+2)
KODC( 3 ) = KOD(K(2)+2)
KODC(4:5) = KOD(K(3)+1:K(3)+2)

D1 = WDZ + (KODC(2)-1)*JF
D2 = WDZ + (KODC(4)-1)*JF

do J = 1, 5
  JK(J) = (KODC(J)-1) * NDIM
end do

```

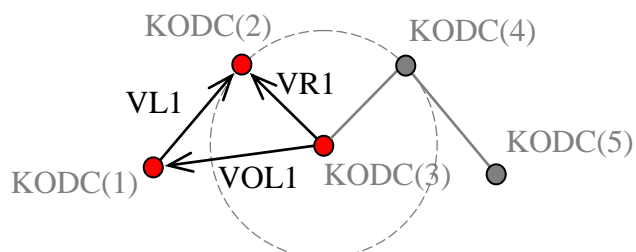


Obr. 26 Uzly kladky

Další výpočet je rozdělen zvlášť pro každé tuhé rameno, a to z toho důvodu, že pootočení těchto dvou ramen se může lišit. K výpočtu vektorů představujících prvky kladky a dalších pomocných vektorů, se využijí indexy uložené v JK a parametr NDIM. Konkrétně se jedná o vektory VL1 (vektor lano 1), VR1 (vektor rameno 1) a VOL1 (vektor osa-lano 1) vyčíslených ze souřadnic uložených v XYZ, viz Obr. 27.

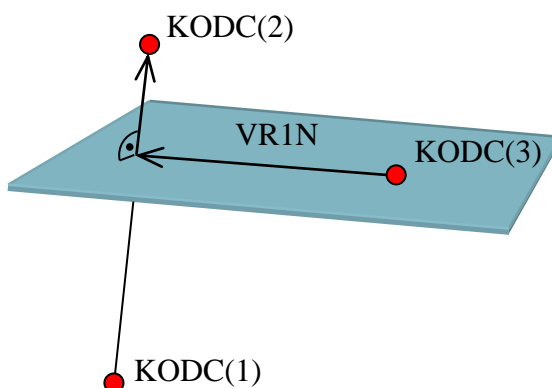
! --- prepocet prvni poloviny kladky VL1 a VR1 -----

```
VL1 (:Ndim) = XYZ(JK(2)+1:JK(2)+NDIM) -XYZ(JK(1)+1:JK(1)+NDIM)
VR1 (:NDIM) = XYZ(JK(2)+1:JK(2)+NDIM) -XYZ(JK(3)+1:JK(3)+NDIM)
VOL1(:NDIM) = XYZ(JK(1)+1:JK(1)+NDIM) -XYZ(JK(3)+1:JK(3)+NDIM)
```



Obr. 27 Pomocné vektory na kladce

Poloha VR1N (nový vektor rameno 1), je vypočítána za pomoci roviny, která je kolmá na přímkou  $p$  určenou lanovým prvkem a zároveň prochází osou kladky.



Obr. 28 Nalezení nového vektoru VR1N

Normálový vektor roviny kolmé na přímkou  $p$  je směrovým vektorem této přímky, tedy VL1. Do obecné rovnice roviny (107) se dosadí souřadnice bodu KODC(3) a jednotlivé složky vektoru VL1(108), čímž získáme rovnici (109). Z rovnice (109) se jednoduše vyjádří neznámá  $e$  (110).

$$ax + by + cz + e = 0 \quad (107)$$

$$\begin{aligned}
 a &= VL1_x \\
 b &= VL1_y \\
 c &= VL1_z
 \end{aligned}
 \tag{108}$$

$$VL1_x \cdot KODC(3)_x + VL1_y \cdot KODC(3)_y + VL1_z \cdot KODC(3)_z + e = 0 \tag{109}$$

$$e = -VL1_x \cdot KODC(3)_x - VL1_y \cdot KODC(3)_y - VL1_z \cdot KODC(3)_z \tag{110}$$

Rovnici (107) musí splňovat i bod průniku přímky  $p$  s touto rovinou. Rovnice přímky  $p$  (111) je vyjádřena za pomoci souřadnic bodu na této přímce (KODC(1)) a vektoru VL1:

$$\begin{aligned}
 x &= KODC(1)_x + VL1_x \cdot t, \\
 y &= KODC(1)_y + VL1_y \cdot t, \\
 z &= KODC(1)_z + VL1_z \cdot t.
 \end{aligned}
 \tag{111}$$

Rovnice (111) je dosazena do (107), čímž získáme rovnici

$$\begin{aligned}
 &VL1_x \cdot (KODC(1)_x + VL1_x \cdot t) \\
 &+ VL1_y \cdot (KODC(1)_y + VL1_y \cdot t) \\
 &+ VL1_z \cdot (KODC(1)_z + VL1_z \cdot t) + e = 0,
 \end{aligned}
 \tag{112}$$

ze které se vyjádří neznámá  $t$  (113).

$$t = \frac{-e - VL1_x \cdot KODC(1)_x - VL1_y \cdot KODC(1)_y - VL1_z \cdot KODC(1)_z}{VL1_x^2 + VL1_y^2 + VL1_z^2} \tag{113}$$

Výsledek tedy získáme dosazením (113) a (110) do (111). V kódu je toto vše shrnuto do pár řádků. Kde pole Z v sobě obsahuje souřadnice nového bodu.

```

A = 0.d0
do J = 1, NDIM
  A = A + VL1(J) * (XYZ(JK(3)+J) - XYZ(JK(1)+J))
end do
A = A / sum(VL1(:NDIM)**2)
do J = 1, NDIM

```



```
Z(J) = XYZ(JK(1)+J) + VL1(J)*A
end do
```

Dále se vypočítá VR1N ze souřadnic nového bodu a středu kladky. Upraví se jeho délka tak aby byla rovna R, protože délka se může změnit nejen vlivem zatížení, ale také vlivem pootočení. Vypočítá se i nový lanový prvek VL1N a jeho délka VL1\_D.

```
VR1N(:NDIM) = Z(:NDIM) - XYZ(JK(3)+1:JK(3)+NDIM)
VR1N(:NDIM) = R / dsqrt(sum(VR1N(:NDIM)**2)) * VR1N(:NDIM)

XYZ(JK(2)+1:JK(2)+NDIM) = VR1N(:NDIM) + XYZ(JK(3)+1:JK(3)+NDIM) ! nové sour.
VL1N(:NDIM) = XYZ(JK(2)+1:JK(2)+NDIM) - XYZ(JK(1)+1:JK(1)+NDIM)
VL1N_D = dsqrt(sum(VL1N(:NDIM)**2)) ! velikost |VL1N|
```

Po přepočtu geometrie je nutno přepočítat také transformační matici ramene (TLN\_R1), která byla načtena na začátku. Pro zjištění potřebného pootočení je potřeba vypočítat úhel svíraný VR1 a VRN1. Z tohoto důvodu je aplikován vzorec pro výpočet úhlu svíraný dvěma vektory [21]

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right), \quad (114)$$

kde je  $\vec{u}$  první vektor,  
 $\vec{v}$  druhý vektor,  
 $\theta$  úhel svíraný vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ .

Protože je funkce cosinus sudou funkcí, vyjdou úhly vypočítané pomocí (114) při úhlu do velikosti  $\frac{\pi}{2}$  kladné.

```
A = dot_product(VR1(:NDIM),VR1N(:NDIM))
+ /dsqrt(sum(VR1(:NDIM)**2)*sum(VR1N(:NDIM)**2))
ALFA = dacos(A) ! uhel mezi VR1 a V0L1
```

Aby mohla být transformační matice ramene kladky přepočítána o vypočítaný úhel, musí být také definován tenzor rotace. Zde již se způsob jejího výpočtu liší v závislosti na rozměru úlohy, princip je však stále stejný. Vypočítá se vektorový součin vektorů VR1 s VR1N. Takto spočítaný vektor pootočení se pro 3D úlohu převede na jednotkový vektor, odpovídající úhlu mezi nimi (a směru osy kladky TLN\_O), který slouží jako vstup do subrutiny využívající Rodriguezův rotační vzorec (viz. kapitola 3.3) pro

výpočet matice rotace RR. Pro 3D úlohu se převede osa rotace do lokálních souřadnic prostým vynásobením TLN\_R1 se Z. K násobení se využívá subrutina GMPRD, což je zkratka pro „general matrix product“. Jestliže násobíme transponovanou matici zprava, využívá se subrutina GMPRDT. Lokální osa otáčení P umožňuje vznik matice rotace RR, která se využije k výpočtu nové transformační matice. Tento výpočet se nachází v samostatné subrutině, která byla vytvořena bokem z důvodu zpřehlednění kódu. Pro 2D úlohu je postup obdobný, avšak kratší. Matice rotace RR se zde tvoří stejným způsobem jako pro 3D, ale vzniká pouze matice o rozměru 2x2.

```

if (NDIM==3) then ! 3D
  Z(1) = VR1(2) * VR1N(3) - VR1(3) * VR1N(2)
  Z(2) = VR1(3) * VR1N(1) - VR1(1) * VR1N(3)
  Z(3) = VR1(1) * VR1N(2) - VR1(2) * VR1N(1)
  do J = 1, 3 ! zmena Z na velikost rotace mezi VR1 a VR1N
    Z(J) = sign(TLN_0(3*J-2), Z(J)) * ALFA
  end do
  call GMPRD (TLN_R1,Z,P,3,3,1)
  call RODRIGUES (P,RR)
else ! 2D
  A = VR1(1) * VR1N(2) - VR1(2) * VR1N(1)
  A = sign(1.d0, A) * ALFA
  RR(1) = dcos(A)
  RR(3) = -dsin(A)
  RR(2) = -RR(3)
  RR(4) = RR(1)
endif

```

Po získání potřebných vstupů je možno přejít k samotnému přepočtu transformační matice TLN\_R1. Matice je nejprve zkopírována do pracovního pole TLN. Nová matice přímo přepisuje původní transformační matici TLN\_R1. Pro 2D se pracuje pouze s částí transformační matice (viz. rovnice (115)), protože výpočet s celou maticí by byl časově náročnější, zvláště při násobení matic.

$$TLN = \begin{bmatrix} 2D & 2D & 3D \\ 2D & 2D & 3D \\ 3D & 3D & 3D \end{bmatrix} \quad (115)$$

```

if (NDIM==3) then ! 3D
  TLN = TLN_R1
  call GMPRDT (RR,TLN, TLN_R1,NDIM,NDIM,NDIM)! vypocet nove trans. matice
else ! 2D
  TLN2D(1) = TLN_R1(1)
  TLN2D(2) = TLN_R1(2)
  TLN2D(3) = TLN_R1(4)
endif

```

```

    TLN2D(4) = TLN_R1(5)
    call GMPRDT (RR, TLN2D, TLN2DN, NDIM, NDIM, NDIM) ! vyp. nove trans. matice
    TLN_R1(1) = TLN2DN(1)
    TLN_R1(2) = TLN2DN(2)
    TLN_R1(4) = TLN2DN(3)
    TLN_R1(5) = TLN2DN(4)
endif

```

Pro vektory VL1 a VL1N se určí jejich velikost. Dále se určí úhel mezi těmito vektory pomocí vzorce (114). Stejně jako pro pootočení ramene, je-li pootočení lanového prvku téměř nulové, výpočet nové transformační matice je přeskočen.

```

    VL1_D = dsqrt(sum(VL1 (:NDIM)**2)) ! velikost |VL1|
    VL1N_D = dsqrt(sum(VL1N(:NDIM)**2)) ! velikost |VL1N|
    A = dot_product(VL1(:NDIM), VL1N(:NDIM))
+   /dsqrt(sum(VL1(:NDIM)**2)*sum(VL1N(:NDIM)**2))
    FI = dacos(A) ! uhel mezi VR1 a VR1N
    if (FI < 1.d-12) goto 1

```

Podle velikosti úhlu pootočení lanového prvku se přepočítá transformační matice prvku. Následující část kódu by již pro čtenáře měla být lehce srozumitelná, protože se jedná o kombinaci již dříve použitých vzorců a principů.

```

if (NDIM==3) then ! 3D
    TLN = TLN_L1
    Z(1) = VL1(2) * VL1N(3) - VL1(3) * VL1N(2) ! Z = VL1 x VL1N
    Z(2) = VL1(3) * VL1N(1) - VL1(1) * VL1N(3)
    Z(3) = VL1(1) * VL1N(2) - VL1(2) * VL1N(1)
    A0 = dsqrt(sum(Z**2)) ! velikost |Z|
    if (A0 < 1.d-12) goto 1
    do J = 1, 3 ! zmena Z na velikost rotace mezi VL1 a VL1N
        Z(J) = Z(J)/A0*FI
    end do
    call GMPRD (TLN, Z, P, 3, 3, 1)
    call RODRIGUES (P, RR) ! vypocet tenzoru rotace pro prepocet TLN na TLNN
    call GMPRDT (RR, TLN, TLN_L1, NDIM, NDIM, NDIM) ! nova trans. matice prutu
else ! 2D
    A = VL1(1) * VL1N(2) - VL1(2) * VL1N(1)
    A = sign(1.d0, A) * FI
    RR(1) = dcos(A)
    RR(3) = -dsin(A)
    RR(2) = -RR(3)
    RR(4) = RR(1)
    TLN2D(1) = TLN_L1(1)
    TLN2D(2) = TLN_L1(2)
    TLN2D(3) = TLN_L1(4)
    TLN2D(4) = TLN_L1(5)
    call GMPRDT (RR, TLN2D, TLN2DN, NDIM, NDIM, NDIM) ! nova trans. matice prutu
    TLN_L1(1) = TLN2DN(1)
    TLN_L1(2) = TLN2DN(2)
    TLN_L1(4) = TLN2DN(3)
    TLN_L1(5) = TLN2DN(4)
endif

```

1 continue

Z důvodu změny délky v průběhu výpočtu, bychom nyní nemohli používat logaritmickou míru deformace. Aby nedošlo k tomuto omezení, přepočítává se originální délka prutu tak, aby byl poměr mezi originální a aktuální délkou prvku zachován stejný. Až po tomto přepočtu se uloží nyní vypočítané aktuální délky prvků.

```
! --- prepocet orig. delky lan na kladce (z duvodu log. miry def.)
DL1(L1).DL_OR = VL1N_D * DL1(L1).DL_OR / DL1(L1).DL_AKT

! --- vypocet novych delek prutu kladky
DL1(KL1(I).R1).DL_AKT = R      ! velikost |VR1N|
DL1(KL1(I).L1).DL_AKT = VL1N_D ! velikost |VL1N|
```

11 continue

Nyní je v subrutině obsažen kód pro druhou polovinu kladky. Tento kód je velmi podobný již uvedenému kódu, a proto zde již nebude podrobně popsán. Po vypočtení také druhé poloviny kladky následuje zápis vypočítaných transformačních matic.

```
! ----- zapis novych transformacnich matic -----

TUH.NEL = KL1(I).L1
do J = 1, (4-NDIM)
  TUH.TR(K1+(J-1)*9:K1+8+(J-1)*9) = TLN_L1
end do
call ELEM_WRITE_TR (CF, 2, TUH, IERR)

TUH.NEL = KL1(I).R1
do J = 1, (4-NDIM)
  TUH.TR(K1+(J-1)*9:K1+8+(J-1)*9) = TLN_R1
end do
call ELEM_WRITE_TR (CF, 2, TUH, IERR)

TUH.NEL = KL1(I).R2
do J = 1, (4-NDIM)
  TUH.TR(K1+(J-1)*9:K1+8+(J-1)*9) = TLN_R2
end do
call ELEM_WRITE_TR (CF, 2, TUH, IERR)

TUH.NEL = KL1(I).L2
do J = 1, (4-NDIM)
  TUH.TR(K1+(J-1)*9:K1+8+(J-1)*9) = TLN_L2
end do
call ELEM_WRITE_TR (CF, 2, TUH, IERR)
```

Nyní už je potřeba pouze přepočet deformací. Upraví se hodnoty deformací obsažené jak v paměti RAM, tak hodnoty zapsané v souborech. Se soubory je manipulováno pouze v případě, že se nejedná a výpočet dynamické relaxace a musí být ošetřen pro

případnou paralelizaci. V opačném případě se pracuje pouze s hodnotami v RAM, protože práce se soubory je časově nákladná a proto se při dynamické relaxaci výrazně projevuje snaha ji minimalizovat.

```
! --- prepocet deformaci -----
      EQT(D1+1:D1+NDIM)= EQT(D1+1:D1+NDIM) +VR1N(:NDIM) - VR1(:NDIM)
      EQT(D2+1:D2+NDIM)= EQT(D2+1:D2+NDIM) +VR2N(:NDIM) - VR2(:NDIM)
      if (.not.CF.DYNRELAX) then
          ZAPI8(:JF) = EQT(D1+1:D1+JF)
!$OMP CRITICAL
          write (FN_DEF_GLOB, rec=KODC(2), err=31) ZAPI8(1:JF)
          goto 301
31         continue
          IERR = -1
301        continue
!$OMP END CRITICAL

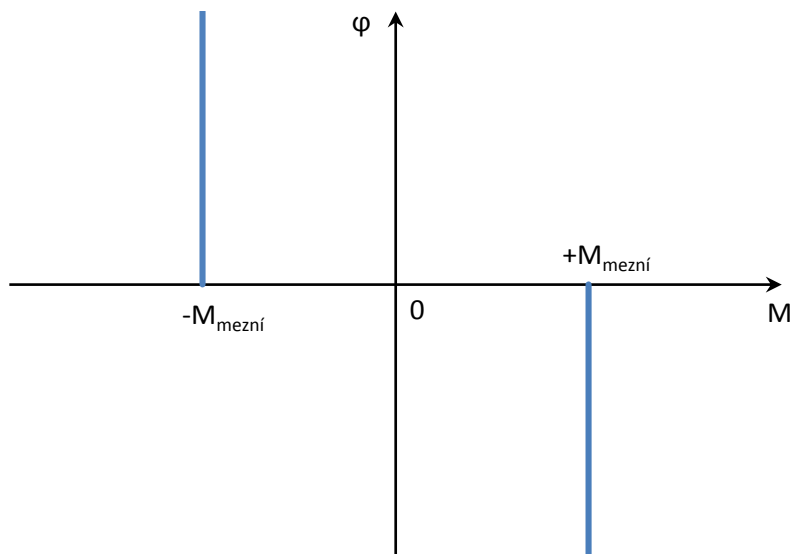
          ZAPI8(:JF) = EQT(D2+1:D2+JF)
!$OMP CRITICAL
          write (FN_DEF_GLOB, rec=KODC(4), err=32) ZAPI8(1:JF)
          goto 302
32         continue
          IERR = -1
302        continue
!$OMP END CRITICAL
      end if
```

#### 8.2.4. Rozšíření možností programového modulu pro řešení lan na kladkách

Pro co nejkompaktnější výpočet kladek byly rozšířeny algoritmy tak, aby mohli uživatelé poskytnout co nejpřesnější možnosti zadání. Tyto vlastnosti jsou popsány v následujících podkapitolách.

##### 8.2.4.1. Tření v čepu kladky

Tření je vlastnost závislá na přitlačné síle. Aby mohla být tato funkcionální zahrnuta ve výpočtu kladek, je na konci čepu umístěn nelineární kloub. Chování tohoto kloubu lze popsat grafem na Obr. 29.



Obr. 29 Tření v čepu kladky

Kloub se chová jako dokonale tuhý, dokud není dosaženo hodnoty mezního momentu. Po jeho překročení v kloubu stále působí moment, roven velikosti mezního momentu, avšak kloub již umožňuje pootočení. Do výpočtu vstupuje hodnota  $M_{mezní}$ , jenž je závislá na přítláčné síle v čepu kladky (116).

$$M_{mezní} = V \cdot \text{součinitel} \quad (116)$$

kde je *součinitel* hodnota vypočtena ze součinitele tření a poloměru kladky.

Velikost přítláčné síly se vypočítá s využitím Pythagorovy věty (117).

$$V = \sqrt{V_y^2 + V_z^2} \quad (117)$$

Moment v kloubu od tření vždy působí proti směru pootočení kloubu kolem osy čepu kladky.

```

if (NF(I) == -1) then ! trení v kloubu
! =====
V_Y = FORCL(JF+2)
V_Z = FORCL(JF+3)

```

```

V = sqrt(V_Y**2 + V_Z**2)

FMOM = abs(FMOM) ! dosazeny moment v kloubu, zde se pocita s abs. hodnotou
PMEZ = abs(V * PMEZ) ! mezni moment, v PMEZ byl souc. treni

if (FMOM>PMEZ) then ! mezni moment prekrocen
  FMOM = PMEZ
  PK = PKMIN ! minimalni tuhost kloubu
  FMOM = -sign(FMOM,DISPLLAST) ! vraceni znamenska dle smeru deformace
else ! mezni moment neprekrocen, nemeni se moment
  if (PK>0.d0) PK = 1.d12 ! jestliže nebyl mezni moment prekrocen
  FMOM = sign(FMOM,FMOMOLD) ! vraceni znamenska
end if

end if

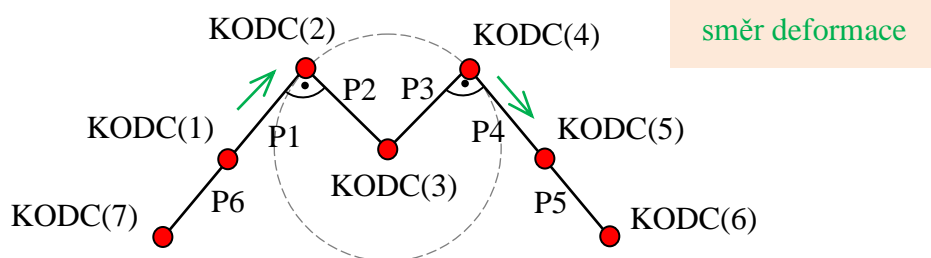
```

#### 8.2.4.2. Přecházení uzlů přes kladku

Algoritmus popsany v kapitole 8.2.3 má jisté omezení. Tím je velká závislost na dělení lanových částí. Pokud se vnitřní uzel posune až k tuhému ramenu kladky, nemůže už se dále posouvat a výpočet se zhroutí. Aby nebyl výpočet takto omezen, musí být umožněn přechod uzlů dělení přes kladku.

##### 8.2.4.2.1. Koncepce přecházení uzlů

Předpokládejme směr deformace lanových uzlů ve směru prvků kladky (viz. Obr. 31). Zároveň rozšíříme sledované prvky o jeden na každém lanovém úseku. V tomto případě prvek P5 a P6.



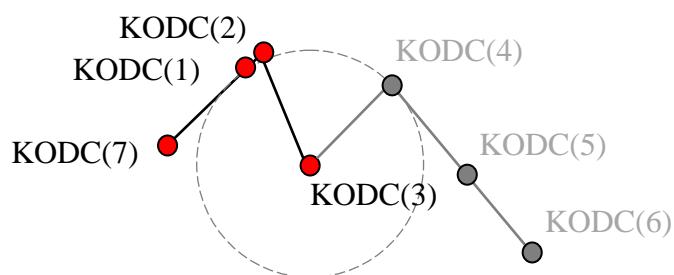
Obr. 30 Rozšířená definice kladky a uzlů (výchozí stav)

Jednotlivé prvky P1 až P6 jsou definovány pomocí počátečního a konečného uzlu, které spojují.

Tabulka 1 Počáteční konfigurace prvků

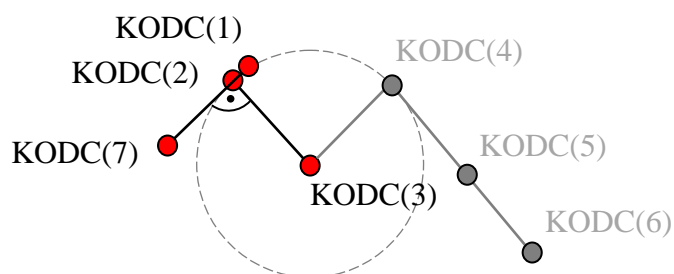
Prvek	Uzel 1	Uzel 2
P1	KODC(1)	KODC(2)
P2	KODC(2)	KODC(3)
P3	KODC(3)	KODC(4)
P4	KODC(4)	KODC(5)
P5	KODC(5)	KODC(6)
P6	KODC(7)	KODC(1)

Vlivem zatížení se uzel KODC(1) posunuje směrem k KODC(2), až se dostane do polohy, kdy uzel přechází na kladku.



Obr. 31 Pozice uzlů při vstupu do subrutiny

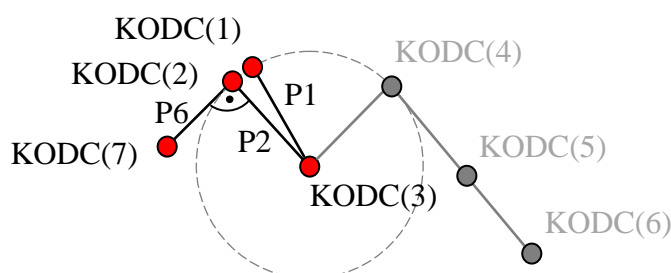
Při výpočtu nové polohy tuhého ramene P2 se zjistí, že uzel KODC(1) se nachází na kladce.



Obr. 32 Nová poloha uzlu KODC(2)



Nyní se změní definice konečného prvku P1 a P6, změnou uzlů kterými jsou definovány. Prvek P1 se zároveň předefinuje na ideálně tuhý prut.



Obr. 33 Nová definice prvku P1

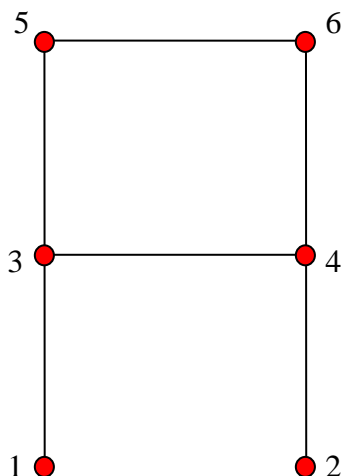
Tabulka 2 Nová definice vybraných prvků

Prvek	Uzel 1	Uzel 2
P1	KODC(1)	KODC(3)
P6	KODC(7)	KODC(2)

Při přechodu uzlu z kladky na lanový úsek se opět předefinují 2 konečné prvky, akorát obráceně než je tomu při přechodu z lanového úseku na kladku. Z tuhého prutu se opět stane lanový prvek a připojí se na okraj příslušného lanového úseku.

#### 8.2.4.2.2. Sestavení matice tuhosti

Při řešení úloh metodou konečných prvků, se zpravidla pracuje s řídkými a symetrickými maticemi tuhosti. To umožňuje při použití správných algoritmů ušetřit místo pro jejich uložení, protože je potřeba ukládat pouze nenulové prvky. Užití formátu zápisu pro řídké matice také zrychluje operace s maticí, a proto je tento přístup efektivnější, než pracovat se všemi členy řídké matice. Máme-li například zadanou úlohu rámu (Obr. 34), můžeme v matici tuhosti vyčlenit pouze místo, které bude využito (Obr. 35).



Obr. 34 Příklad modelu rámu

		čísla sloupců					
		{ 1. 2. 3. 4. 5. 6. }					
čísla řádků	{ 1.	■	0	■	0	0	0
	2.		■	0	■	0	0
	3.			■	■	■	0
	4.				■	0	■
	5.	<i>sym.</i>				■	■
	6.						■

Obr. 35 Znázornění potřebných členů matice tuhosti

V paměti se tedy vyčlení místo pouze pro nenulové prvky matice. Z důvodu rychlosti se toto sestavení provádí pouze na začátku úlohy, a hodnoty nově vypočítané v průběhu výpočtu se uloží na předem definované místo v paměti. Ovšem jak je uvedeno v kapitole 8.2.4.2.1, konečné prvky mění v průběhu výpočtu svou definici, čímž vznikají vazby, které nejsou v paměti definovány.

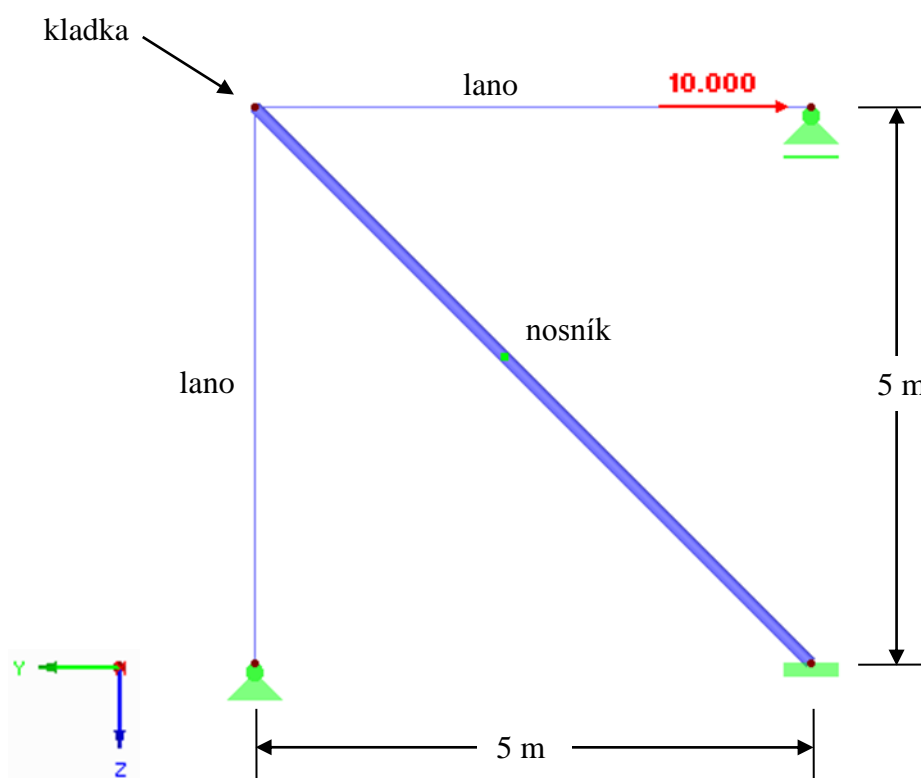
Tento problém je tedy ošetřen hned na začátku výpočtu, kdy se určí všechny možnosti potenciálních vazeb, které mohou v průběhu výpočtu vzniknout, a definuje se pro ně příslušné místo v matici tuhosti.

## 9. PŘÍKLADY

V této kapitole jsou řešeny příklady konstrukcí, jejichž součástí je také lano na kladkách. Všechny příklady jsou řešeny za pomoci metody analýzy velkých deformací a k řešení rovnic je použita metoda Newton-Raphson.

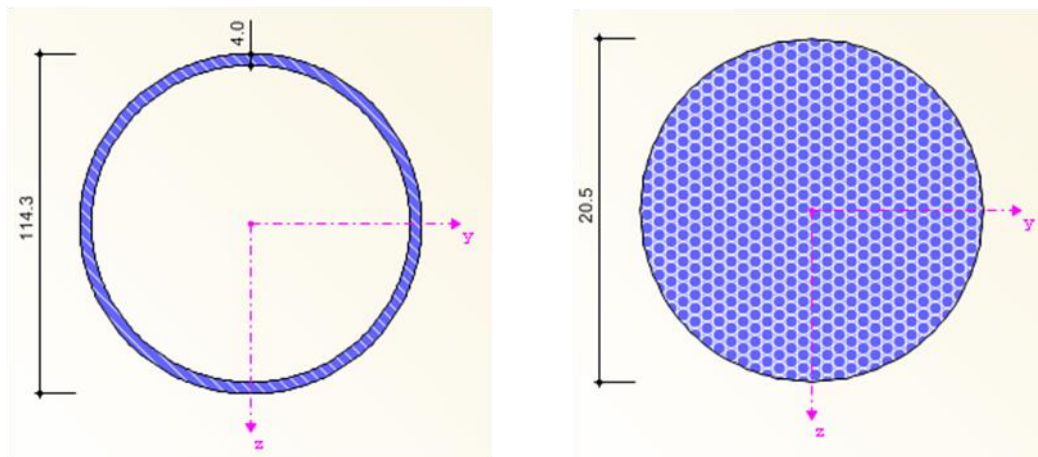
### 9.1. Příklad č.1

Jako první byl zvolen příklad s jednou kladkou, umístěnou na konci vetknutého nosníku kruhového průřezu. Toto lano je posléze zatíženo silou 10 kN ve vodorovném směru na jednom konci (viz. Obr. 36).



Obr. 36 PŘ.1 - Zadání

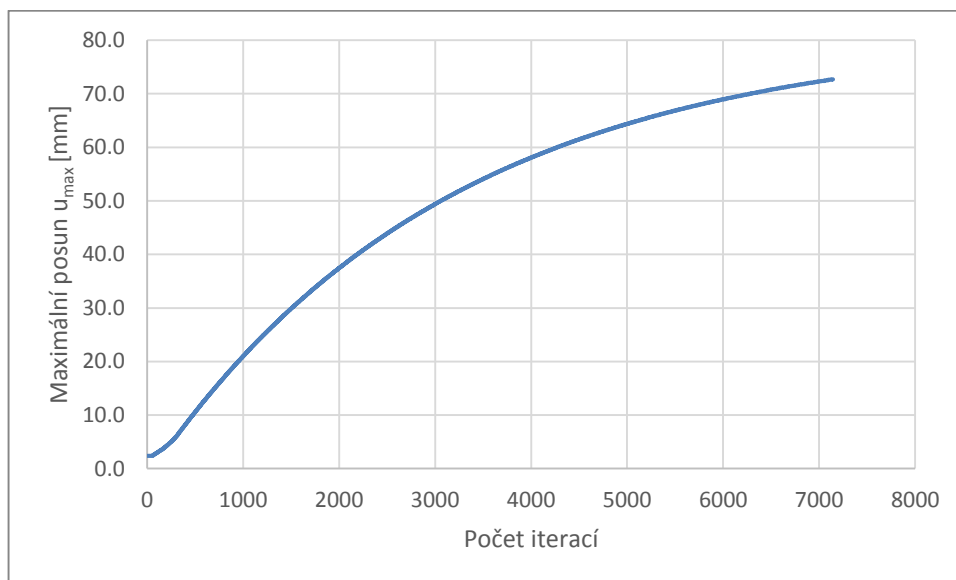
Nosník má průřez RO 114.3x4 a je znázorněn na Obr. 37 vlevo, lano má průřez PE 30 a je znázorněno na Obr. 37 vpravo. V celé konstrukci je použito oceli S 235.



Obr. 37 Př.1 - Použité průřezy [mm]

### 9.1.1. Výpočet původním algoritmem

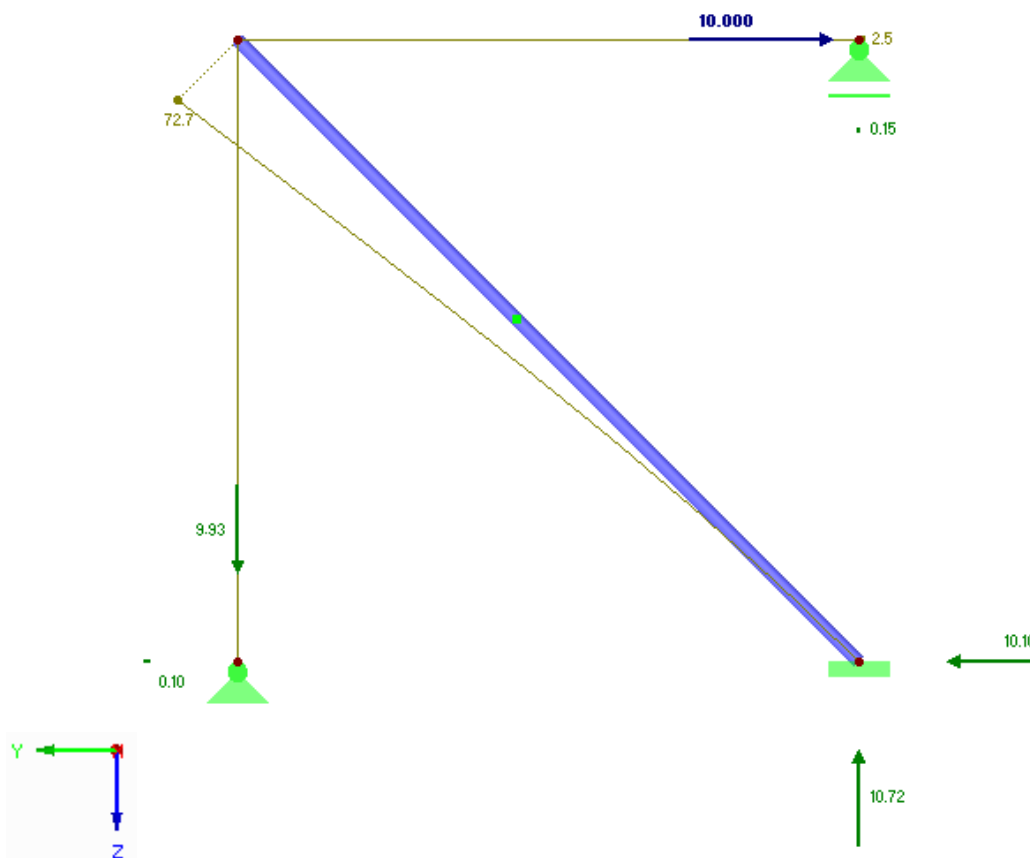
Průběh výpočtu za pomoci původního algoritmu je znázorněn na Obr. 38.



Obr. 38 Př.1 - Průběh výpočtu původního algoritmu

Počet iterací je 7148 a maximální posun 72.7 mm na konci prutu s kladkou. Výpočet přitom trval 217.26 sekund.

Výsledky reakcí v podporách a posunutí uzlů je znázorněno na Obr. 39.



Obr. 39 Př.1 - Výsledky původního algoritmu [kN, mm]

Zároveň je vhodné zobrazit tabulku s kontrolou výpočtu.

Tabulka 3 Př.1 - Kontrola původního algoritmu

Stav výpočtu	Součet zatížení a součet podporových sil ve směru Z není v rovnováze (odchylka 2.14%).		
Součet zatížení ve směru X	10.00	kN	
Součet podporových sil ve směru X	10.00	kN	Odchylka: 0.00 %
Součet zatížení ve směru Z	0.96	kN	
Součet podporových sil ve směru Z	0.94	kN	Odchylka: 2.14 %

Výslednice reakcí okolo X	0.000	kNm	V těžišti modelu (X: 18.249, Y: 0.000, Z: -2.751 m)
Výslednice reakcí okolo Y	-22.519	kNm	V těžišti modelu
Výslednice reakcí okolo Z	0.000	kNm	V těžišti modelu

### 9.1.2. Výpočet novým algoritmem

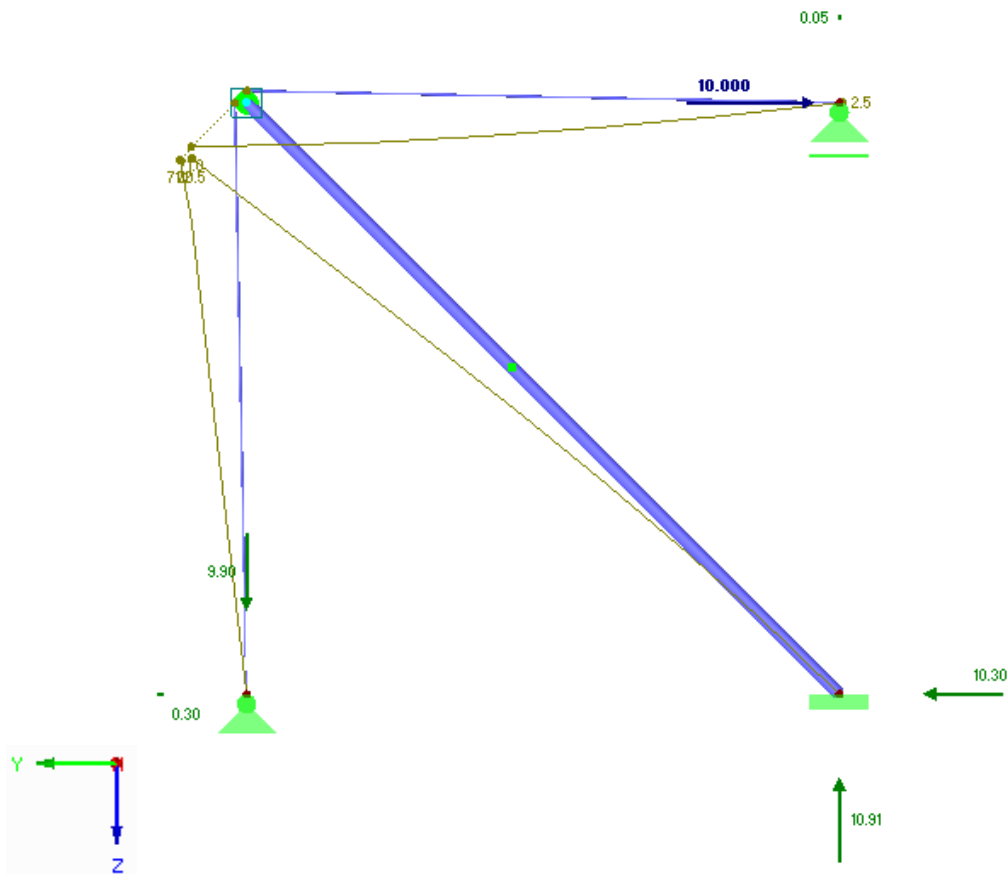
Na rozdíl od předchozího řešení je nyní kladka definována kolečkem s daným poloměrem, vzhledem k rozměrům konstrukce byla zvolena kladka s poloměrem 10cm. Konstrukce je tak trochu odlišná od předchozí, vlivem rozměru kolečka, ale lépe tak vystihuje realitu. Takto vytvořená konstrukce je vyobrazena společně s výslednou deformací a reakcemi na Obr. 41.

Průběh výpočtu je znázorněn v Obr. 40.



Obr. 40 Př.1 - Průběh výpočtu nového algoritmu

Počet iterací je 10 a maximální posun na konci prutu s kladkou je 70.5mm. Výpočet přitom trval 0.19 sekund.



Obr. 41 Př.1 - Výsledky nového algoritmu [kN, mm]

Tabulka 4 Př.1 - Kontrola nového algoritmu

Stav výpočtu	Maximální natočení modelu v uzlu č. 1 (501.1 mrad, směr -Y) překročilo nastavenou mezní hodnotu 87.3 mrad.		
Součet zatížení ve směru X	10.00	kN	
Součet podporových sil ve směru X	10.00	kN	Odchylka: 0.00 %
Součet zatížení ve směru Z	0.96	kN	
Součet podporových sil ve směru Z	0.96	kN	Odchylka: 0.00 %
Výslednice reakcí okolo X	0.000	kNm	V těžišti modelu (X: 18.244, Y: 0.000, Z: -2.756 m)
Výslednice reakcí okolo Y	-22.426	kNm	V těžišti modelu
Výslednice reakcí okolo Z	0.000	kNm	V těžišti modelu

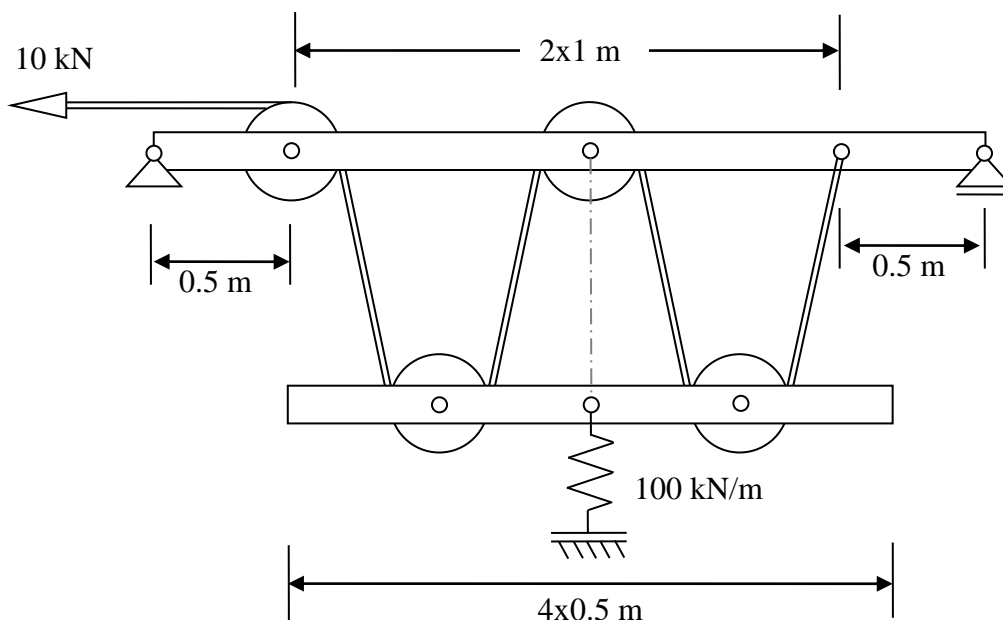
### 9.1.3. Porovnání obou řešení

Řešení příkladu první i druhou variantou dává velmi podobné výsledky, z kontroly výsledků ovšem vyplývá, že řešení za pomoci původního algoritmu dává výsledky s odchylkou 2.14 % ve směru osy Z. Nový algoritmus přitom dokonvergoval s nulovou odchylkou.

Kromě malé odchylky ve výsledcích se zde projevila hlavní výhoda nového algoritmu, a tou je jeho rychlost. Zatím co původní algoritmus potřeboval k nalezení rovnováhy 7148 iterací, nový algoritmus to zvládl během 10 iterací. Počet potřebných iterací přímo ovlivňuje výpočetní čas úlohy, a tak došlo při této úloze ke zrychlení nového řešení oproti původnímu cca 1000 krát.

## 9.2. Příklad č.2

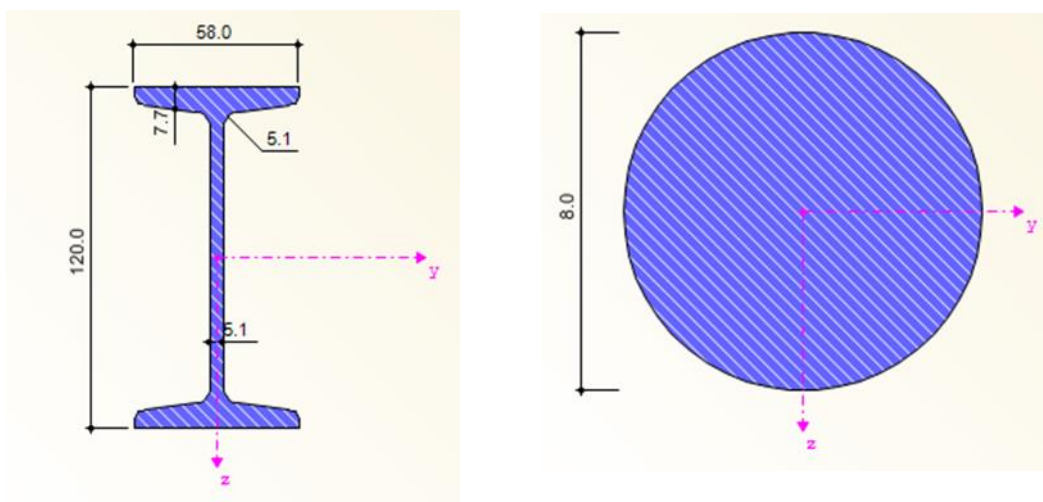
V druhém příkladu je vymodelována konstrukce demonstrující především rozdíl, který vznikne zanedbáním poloměru kladky. Konstrukci tvoří dvojice nosníků spojených lany na kladkách (Obr. 42). V pružné podpoře je zároveň zabráněno rotaci v rovině.



Obr. 42 Příklad č.2 - Schéma modelu



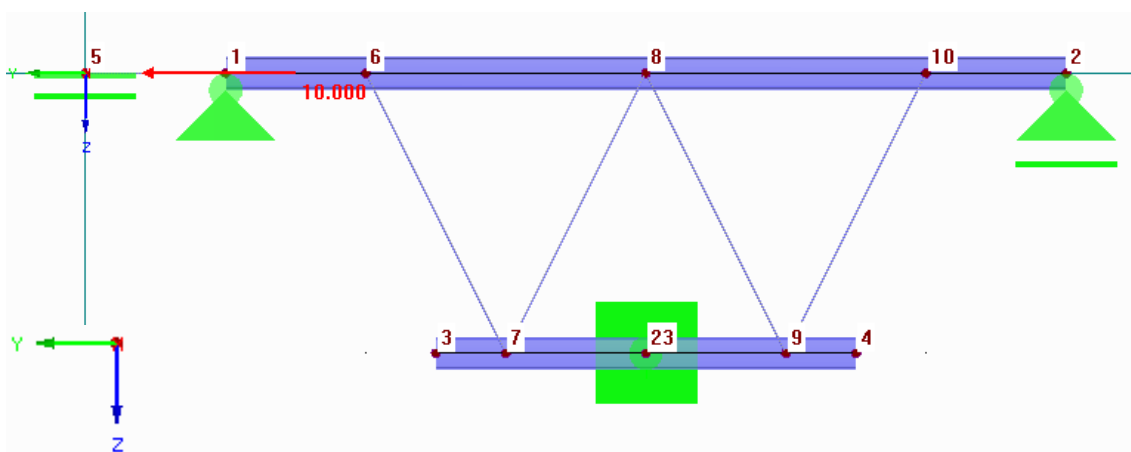
Nosníky jsou tvořeny průřezem I 120 (Obr. 42 vlevo) a lana průřezem R 8 (Obr. 42 vpravo). Jako materiál je využita ocel S 235.



Obr. 43 Př.2 - Použité průřezy [mm]

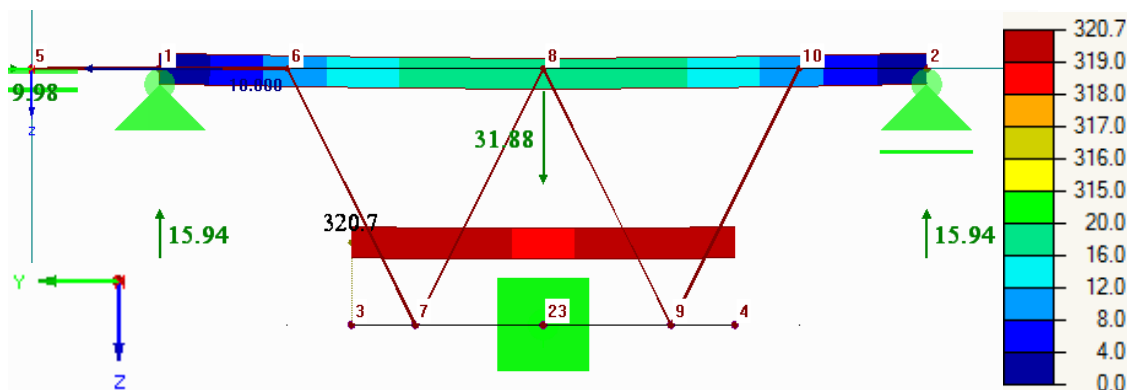
### 9.2.1. Výpočet původním algoritmem

Z důvodu zavedeného zjednodušení jsou lanovými prvky spojeny pouze středy kladek, z toho důvodu bylo působiště zatížení přesunuto do osy nosníku, aby mohla být síla v lanových prvcích přesně 10 kN.



Obr. 44 Př.2 – Zadání pro původní algoritmus

S takto zadanou konstrukcí byl spuštěn výpočet a výsledné deformace a reakce jsou vyobrazeny na Obr. 45.

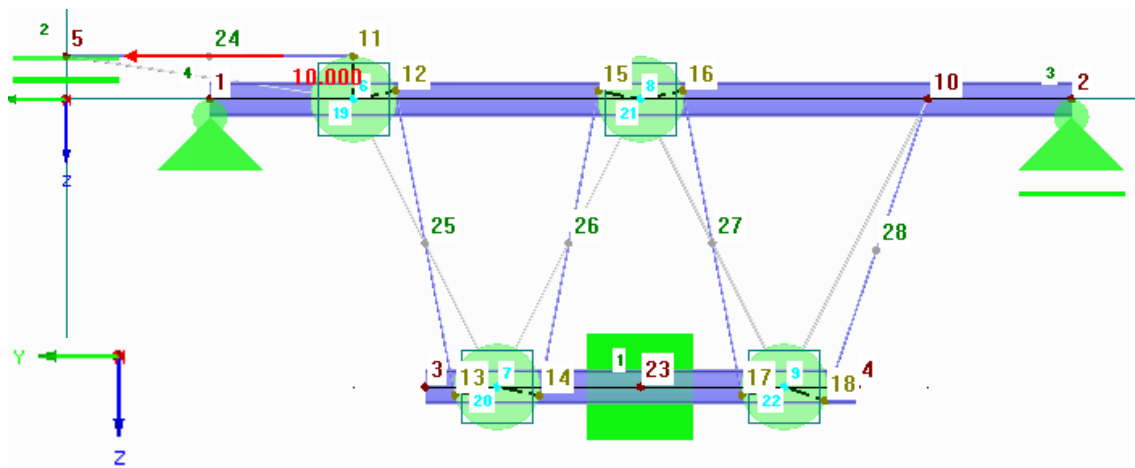


Obr. 45 Př.2 - Výsledky původního algoritmu [kN, mm]

Krajní podpory nosníku jsou zatíženy symetricky. V lanových prvcích je síla 9.98 kN, což je odchylka 2 ‰ oproti předpokládaným výsledkům. Posun podpory v bodě 5 je 1147.9 mm.

### 9.2.1. Výpočet novým algoritmem

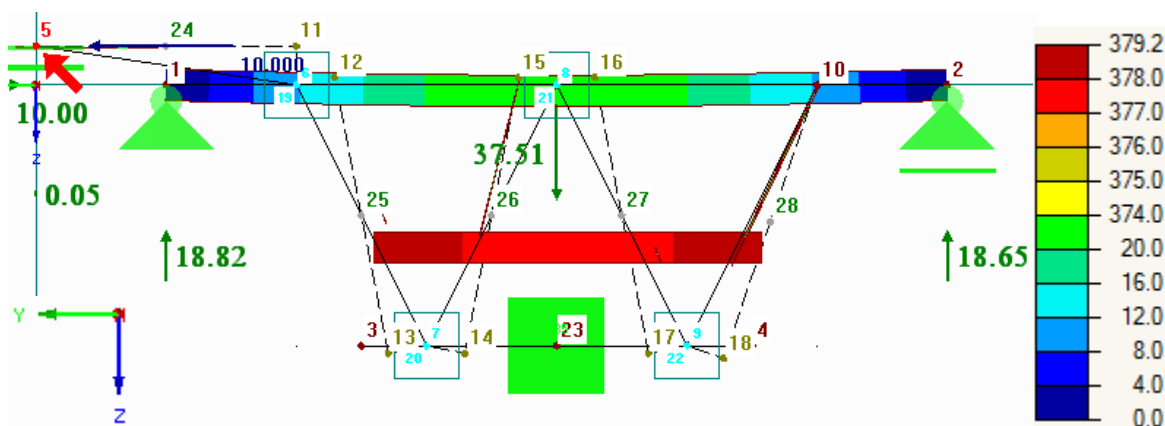
Zadání úlohy pro výpočet novým algoritmem více odpovídá schématu na Obr. 42.



Obr. 46 Př.2 – Zadání pro nový algoritmus

Na Obr. 46 můžeme vidět vygenerování většího množství uzlů, jak však bylo prokázáno v prvním příkladu, nový algoritmus je rychlejší a tak větší množství uzlů v modelu na Obr. 46 nezpůsobuje jakékoliv pozorovatelné zpomalení času výpočtu.

Výsledky nového algoritmu jsou vyobrazeny na Obr. 47, kde jsou znázorněny posunutí a reakce.



Obr. 47 PŘ.2 - Výsledky nového algoritmu [kN, mm]

Krajní podpory nosníku jsou zatíženy téměř symetricky. Nesymetrie je vyvolána momentem v podpoře uzlu 23. V lanových prvcích je síla přesně 10 kN, což přesně odpovídá předpokládaným výsledkům. Posun podpory v bodě 5 je 1519.3 mm.

### 9.2.1. Porovnání obou řešení

Z porovnání výsledků obou řešení vyplývá markantní rozdíl při využití starého a nového algoritmu. Tento rozdíl je dán zohledněním poloměrů kladky. Z důvodu zapracování těchto poloměrů v novém algoritmu dochází k jiné geometrii na vstupu. V tomto příkladu se především jedná o jiné sklonu lanových prvků, které vedou ke strmějšímu sklonu lanových prvků. To má za následek působení větších sil ve směru Z.

## 10. ZÁVĚR

Cílem této práce bylo vypracování algoritmu pro řešení lan na kladkách, který by byl výkonnější a přesnější, než stávající algoritmus použitý v programu RFEM. V práci byl ukázán stávající princip výpočtu lan na kladkách používaný v programu RFEM, a také podobný přístup nalezený v odborné literatuře. Následně byl navržen nový algoritmus, jako výkonnější a přesnější alternativa ke stávajícímu řešení, umožňující zároveň zahrnout vliv velikosti poloměru kladky. Tento modul byl implementován v programovém systému RFEM. Toto nové řešení bylo následně rozšířeno o další vlastnosti, jako je tření v čepu kladky a přecházení uzlů dělení lanových prvků přes kladku. Tyto nové vlastnosti tak umožňují komplexnější výpočet soustavy lan na kladkách. Na závěr jsou vypracovány příklady, v nichž je provedeno porovnání původního a nového řešení dané problematiky. V těchto příkladech bylo dokázáno, že nový algoritmus výrazně rychleji konverguje, a také důležitý vliv zohlednění poloměru kladek při zadávání a výpočtu. Zatím jediným omezením nového algoritmu lan na kladkách je maximální rotace v jedné iteraci z důvodu linearizace každého výpočtového kroku. Toto je ovšem nutnou daní pro umožnění respektovat skutečné poloměry kladek. Ze srovnání nového algoritmu, prezentovaného v této diplomové práci, se stávajícím algoritmem v programu RFEM i s algoritmy publikovanými v literatuře je možno učinit závěr, že nově navržený algoritmus je jednak přesnější, ve srovnání s ostatními algoritmy, neboť jako jediný respektuje poloměry kladek a tím i přesnou polohu lan v prostoru, a současně je i mimořádně efektivní, protože každá iterace umožňuje maximální možné pootočení kladek vzhledem k linearizaci řešení v každé iteraci. Výhodou navrženého řešení ve srovnání s konkurenčními programy je umožnění přejíždění bodů lan přes kolečka kladek a tím například i umožnění průjezdu břemene, například kabiny lanovky, přes kladky, což ostatní algoritmy neumožňují. Pokud se podařilo zjistit, nemá navržené řešení co do přesnosti a výkonu v současnosti ve světě konkurenci.

---

**SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY**

- [1] Naval Education and Training Professional Development and Technology Center, *Navy Basic Machines (NAVEDTRA 14037) - Nonresident Training Course*. Naval Education And Training Professional Development And Technology Center, 1994.
- [2] Naval Education., *Basic Machines and How They Work*. Dover Publications, 2012.
- [3] Wikipedia, 'Kladka', 2014. [Online]. Dostupné z:  
[http://cs.wikipedia.org/wiki/Kladka#mediaviewer/File:Four\\_pulleys.svg](http://cs.wikipedia.org/wiki/Kladka#mediaviewer/File:Four_pulleys.svg).  
[Cit.: 24.10.2014].
- [4] Liebherr.com, 'Tower Cranes', 2014. [Online]. Dostupné z:  
[http://www.liebherr.com/CC/en-GB/region-CZ/default\\_cc.wfw/layout-PopupTabWide/item-ImageGalleryImage132110/measure-metric/tab-27717](http://www.liebherr.com/CC/en-GB/region-CZ/default_cc.wfw/layout-PopupTabWide/item-ImageGalleryImage132110/measure-metric/tab-27717).  
[Cit.: 6.12.2014].
- [5] Autoorb.com, 2014. [Online]. Dostupné z:  
[http://www.autoorb.com/-switzerland-ski-winter-sport-alps-vintage-poster-repro-free-sh/marketplaceadvisor.channeladvisor.com\\*hi\\*81\\*81347\\*24Y112.jpg/](http://www.autoorb.com/-switzerland-ski-winter-sport-alps-vintage-poster-repro-free-sh/marketplaceadvisor.channeladvisor.com*hi*81*81347*24Y112.jpg/).  
[Cit.: 30.11.2014].
- [6] Wallpoper.com, 2014. [Online]. Dostupné z:  
[http://wallpoper.com/images/00/43/69/56/audi-v6-fsi-engine\\_00436956.jpg](http://wallpoper.com/images/00/43/69/56/audi-v6-fsi-engine_00436956.jpg).  
[Cit.: 30.11.2014].
- [7] I. Němec, M. Burkartová, V. Kolář, I. Ševčík, Z. Vlk, J. Blaauwendraat, J. Buček, B. Teplý, D. Novák and V. Štembera, *Finite element analysis of structures*. Aachen: Shaker, 2010.

- [8] R. Brannon, *ROTATION: A review of useful theorems involving proper orthogonal matrices referenced to threedimensional physical space.*, 1st ed. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 2012.
- [9] *Lesson 8-A: Euler Angles*, 1st ed. Tucson: University of Arizona, 2014.
- [10] D. Ederby, *Euler Angle Formulas*, 1st ed. Geometric Tools, LLC, 1999.
- [11] K. Bathe, *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1982.
- [13] T. Belytschko, W. Liu and B. Moran, *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Chichester: Wiley, 2000.
- [12] I. Němec, *Nelineární mechanika*, studijní opora, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Ústav stavební mechnaiky, Brno, 2006
- [14] J. Oden, *An introduction to mathematical modeling*. Hoboken, N.J.: Wiley, 2011.
- [15] P. Wriggers, *Nonlinear finite element methods*. Berlin: Springer, 2008.
- [16] J. Bonet and R. Wood, *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [17] Felippa, C. (2004). INTRODUCTION to FINITE ELEMENT METHODS. 1st ed. [ebook] Colorado: Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado. Dostupné z: <http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/> [Cit.: 9.11.2014].
- [18] F. Ju and Y. Choo, 'Dynamic Analysis of Tower Cranes', *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 131, no. 1, pp. 88-96, 2005.
- [19] F. Ju and Y. Choo, 'Super element approach to cable passing through multiple pulleys', *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, no. 11-12, pp. 3533-3547, 2005.
- [20] M. Aufaure, 'A finite element of cable passing through a pulley', *Computers & Structures*, vol. 46, no. 5, pp. 807-812, 1993.

- [21] G. Korn and T. Korn, *Mathematical handbook for scientists and engineers*. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [22] Wikipedia, 'Finite strain theory', 2014. [Online]. Dostupné z: [http://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_strain\\_theory#mediaviewer/File:Polar\\_decomposition\\_of\\_F.png](http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_strain_theory#mediaviewer/File:Polar_decomposition_of_F.png). [Cit.: 25.11.2014].

## SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

$\Sigma$	tenzorový součin napětí a jednotkové matice
$\mathbf{a}$	jednotkový vektor osy rotace
$\mathbf{A}$	matice reprezentující vektorový součin $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$
$A$	plocha
$a$	posunutí lana přes kladku
$\mathbf{B}$	levý Cauchy-Greenův deformační tenzor
$\mathbf{B}$	matice prostorových derivací bázových funkcí
$\mathbf{C}$	pravý Cauchy-Greenův deformační tenzor
$\mathbf{C}\sigma$	matice daná pružností materiálu v závislosti na napětí
$\mathbf{E}$	Green–Lagrangeův tenzor deformace
$\mathbf{e}$	Euler–Almansiho tenzor deformace
$E$	modul pružnosti
$\mathbf{E}(m)$	jeden ze Seth–Hillovy rodiny tenzorů deformace
$\mathbf{f}$	vektor uzlových sil
$F$	síla
$\mathbf{F}$	deformační gradient
$\mathbf{G}$	matice tvořená submaticemi $\mathbf{g}$
$\mathbf{g}$	matice obsahující první derivace bázových funkcí
$\mathbf{h}$	vektor osy rotace
$\mathbf{I}$	jednotková matice
$\mathbf{J}$	Jacobián deformačního gradientu
$\mathbf{K}$	matice tuhosti
$k$	tuhost
$\mathbf{K}(\mathbf{u})$	matice tuhosti závislá na vektoru posunutí
$\mathbf{K}_M$	materiálová matice tuhosti
$\mathbf{K}_T$	tečná matice tuhosti

---

$\mathbf{K}_\sigma$	geometrická matice tuhosti
$L$	délka prutu
$l$	aktuální délka
$l_0$	počáteční délka
$M$	moment
$M_{\text{mezní}}$	mezní moment v čepu kladky
$\mathbf{n}$	normála na aktuální povrch
$\mathbf{P}$	první napětí Piola-Kirchhoff
$\mathbf{R}$	matice rotace
$\mathbf{r}$	vektor nevyvážených vnitřních sil
$R$	poloměr
$\mathbf{s}$	vektor kolmý na osy rotace
$\mathbf{S}$	druhé napětí Piola-Kirchhoff
$\mathbf{T}$	transformační matice
$\mathbf{t}$	vektor kolmý na osu rotace i vektor $\mathbf{s}$
$\mathbf{t}$	napětí na aktuální plošku
$\mathbf{t}$	vektor smerových cosinů
$\mathbf{u}$	libovolný vektor
$\mathbf{u}$	vektor uzlových posunutí
$\mathbf{U}$	pravý stretch tenzor
$\mathbf{v}$	libovolný vektor
$\mathbf{V}$	levý stretch tenzor
$\mathbf{V}, \mathbf{V}_x, \mathbf{V}_y$	posouvací síla
$\mathbf{w}$	libovolný vektor
$\mathbf{x}$	prostorové souřadnice
$\mathbf{X}$	materiálové souřadnice
$X, Y, Z$	materiálové souřadnice
$x, y, z$	prostorové souřadnice
$\Gamma$	hranice tělesa v aktuální konfiguraci
$\Gamma_0$	hranice tělesa v počáteční konfiguraci
$\varepsilon$	míra deformace
$\varepsilon_n$	Logaritmičká míra deformace
$\theta$	úhel pootočení
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchyho napětí
$\Omega$	deformovaná (aktuální) konfigurace
$\Omega_0$	nedeformovaná (počáteční) konfigurace

---



---

**SEZNAM OBRÁZKŮ**

Obr. 1: Pevná kladka [1] .....	10
Obr. 2: Volná kladka [2] .....	10
Obr. 3 Efektivnost využití kladek [3].....	11
Obr. 4 Využití kladek v jeřábech [4].....	11
Obr. 5 Využití kladek na lanových drahách [5] .....	12
Obr. 6 Využití kladek v motoru automobilu [6] .....	12
Obr. 7 Pootočení souřadného systému (vyznačeny jsou pouze některé úhly) .....	14
Obr. 8 Rotace kolem pevných os 1 [5].....	17
Obr. 9 Rotace kolem pevných os 2 .....	18
Obr. 10 Rotace za pomoci Eulerových úhlů .....	19
Obr. 11 Rotace kolem osy [5] .....	20
Obr. 12 Ukázka nelinearity na tuhém prutu [10], [15].....	24
Obr. 13 Deformovaná (aktuální) a nedeformovaná (počáteční) konfigurace tělesa [9] .	25
Obr. 14 Polární dekompozice deformačního gradientu [16].....	27
Obr. 15 Znárodnění původní a aktuální konfigurace [9].....	31
Obr. 16 Pružný pracovní diagram .....	34
Obr. 17 Pracovní diagram pružný s mikrotrhlinami .....	35
Obr. 18 Pružnoplastický pracovní diagram.....	35
Obr. 19 Obecný pracovní diagram .....	35

---

Obr. 20 Princip Newton-Raphsonovy metody [10] .....	39
Obr. 21 Schéma centrální diference .....	41
Obr. 22 Schéma tyče dělené na 4 konečné prvky [17].....	44
Obr. 23 Super element lana na kladkách.....	46
Obr. 24 Přemístění a síly na jednom prvku super elementu .....	47
Obr. 25 Definice kladky .....	51
Obr. 26 Uzly kladky .....	54
Obr. 27 Pomocné vektory na kladce .....	55
Obr. 28 Nalezení nového vektoru VR1N .....	55
Obr. 29 Tření v čepu kladky .....	62
Obr. 30 Rozšířená definice klady a uzlů (výchozí stav) .....	63
Obr. 31 Pozice uzlů při vstupu do subrutiny.....	64
Obr. 32 Nová poloha uzlu KODC(2) .....	64
Obr. 33 Nová definice prvku P1 .....	65
Obr. 34 Příklad modelu rámu.....	66
Obr. 35 Znázornění potřebných členů matice tuhosti .....	66
Obr. 36 Př.1 - Zadání.....	67
Obr. 37 Př.1 - Použité průřezy [mm].....	68
Obr. 38 Př.1 - Průběh výpočtu původního algoritmu.....	68
Obr. 39 Př.1 - Výsledky původního algoritmu [kN, mm].....	69

Obr. 40 PŘ.1 - Průběh výpočtu nového algoritmu .....	70
Obr. 41 PŘ.1 - Výsledky nového algoritmu [kN, mm] .....	71
Obr. 42 PŘ.2 - Schéma modelu .....	72
Obr. 43 PŘ.2 - Použité průřezy [mm].....	73
Obr. 44 PŘ.2 – Zadání pro původní algoritmus .....	73
Obr. 45 PŘ.2 - Výsledky původního algoritmu [kN, mm] .....	74
Obr. 46 PŘ.2 – Zadání pro nový algoritmus .....	74
Obr. 47 PŘ.2 - Výsledky nového algoritmu [kN, mm] .....	75