UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Přírodovědecká fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

2012

Mgr. Petra Pirklová

Metrizovatelnost afinní konexe

Disertační práce v oboru Algebra a geometrie

Mgr. Petra Pirklová

Univerzita Palackého v Olomouci

Přírodovědecká fakulta

červen 2012

Téma disertační práce: Metrizovatelnost afinní konexe

Disertant: Mgr. Petra Pirklová

Studijní program: P1101 Matematika

Studijní obor: Algebra a geometrie

Pracoviště: Katedra algebry a geometrie
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

Školitel: doc. RNDr. Alena Vanžurová, CSc.

Sazba provedena autorem v systému LaTeX 2_ε

Prohlášení

Tuto disertační práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucí disertační práce.

Datum:

Podpis:

Anotace

Metrizovatelnost afinní konexe

Mgr. Petra Pirklová

Tato dizertační práce je věnována afinním konexím na varietách, problému jejich metrizovatelnosti a přehledu různých metod, jichž lze použít k řešení této otázky. Všechny metody jsou demonstrovány na vybraných příkladech. Pro dimenzi dva je dána vyčerpávající odpověď pro případ, že konexe nemá ploché body, s využitím vlastností Ricciho tenzoru. Pro reálně analytické konexe na reálně analytických varietách je prezentován rozhodovací algoritmus, postavený na de Rhamově rozkladu, rozpracovaný O. Kowalskim. V případě kladné odpovědi na otázku existence metrik je předvedena následná konstrukce všech metrik kompatibilních s danou konexí. Postup v podstatě může být implementován do počítače.

Inspirací pro hlubší studium této klasické problematiky byla možnost využití metrizačních metod ve variačním počtu pro rozhodování o variačnosti jistých systémů parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu, jak opět uvádíme na příkladech. Rovněž rozebíráme příklady obstrukcí, které metrizovatelnosti brání.

Dále je zmíněna rekonstrukce metrik nebo konexí ve speciálních souřadnicích s použitím tenzoru křivosti.

Poslední část se zabývá Riemannovými nebo afinními prostory, které jsou v jistém smyslu „v okolí všech bodů stejné”, tedy homogenní.

Klíčová slova: afinní konexe, tenzor křivosti, Ricciho tenzor, varieta, metrizovatelnost, metrika, variační počet, rekonstrukce metriky, rekonstrukce konexe, homogenní prostor, algebra holonomií.

Annotation

Metrizability of affine connection

Mgr. Petra Pirklová

This thesis deals with affine connections on manifolds, the problem of their metrization and the summary of different techniques for solving the problem. All the techniques are demonstrated on selected examples. A full and complete answer is provided in respect of dimension two in case, the connection does not have flat points, with the use of the characteristics of the Ricci tensor. The decision algorithm based on the de Rham decomposition deduced by O. Kowalski is presented for real analytic connections on real analytic manifolds. For affirmative answers regarding the existence of metrics a subsequent construction of all compatible metrics with the given connection is demonstrated. This process can be effectively implemented into a computer.

An inspiration for studying these classical issues was the use of the metrization technique in the calculus of variation in decision-making about the variationality of certain systems of partial differential equations of second order as shown on examples again. We again analyse examples of obstructions preventing metrizability.

In addition, reconstruction of metrics or connections in special coordinates using the curvature tensor is outlined.

The last chapter deals with the Riemannian and affine spaces which are, in a specific sense, the "same in the neighbourhood of all points", i.e. - homogeneous.

Key Words: affine connection, curvature tensor, Ricci tensor, manifold, metrizability, metric, calculus of variation, reconstruction of metric, reconstruction of connection, homogenous space, algebra of holonomies.

Obsah

Poděkování

Moje poděkování směřuje ke všem, kteří mi pomohli při řešení úkolů a to jak po stránce odborné, organizační, administrativní, ale i po stránce morální podpory.

V první řadě bych chtěla poděkovat své školitelce doc. RNDr. Aleně Vanžurové, CSc. za odborné vedení a neocenitelnou pomoc při celém doktorandském studiu i mimo něj. Také bych chtěla poděkovat prof. RNDr. Josefu Mikešovi, DrSc.

Nakonec bych ráda poděkovala manželovi, celé své i manželově rodině za duševní podporu a velikou pomoc při hlídání dcery během mého studia.

V Liberci, červen 2012

Seznam použitých symbolů

f	zobrazení
$\mathbf{R}$	reálná čísla
p, q, x, y	bod
O	okolí bodu
φ, μ, ψ	mapa
M, N, E	varieta
A	tenzorové pole, (diferencovatelná) struktura (2.1)
m, n	dimenze, přirozené číslo
(J^i_a)	Jakobiho matice
$\mathcal{F}$	množina funkcí
T_pM	tečný prostor variety M v bodě p
X, Y, Z	vektorové pole
U	otevřená množina
V^*	duální prostor k prostoru V
$\pi, proj, p$	projekce
v, w	vektor
$(x^i), (v^i)$	souřadnice, n-tice čísel
ϕ	lineární forma
F	fibr
τ	translace
∇	kovariantní derivování, konexe
Γ	Christoffelovy symboly
γ, c	křivka
I, J	interval
a, b, c, d, s, t	parametr
$GL(n, \mathbf{R})$	obecná lineární grupa
$;$	kovariantní derivace

T	tenzorové pole torze, torze
R	tenzororvé pole křivosti, křivost
$[,]$	Lieova závorka
g	metrika
Tr	stopa lineárního zobrazení
R_{ij}	Ricciho tenzor
x^i	proměnné
$\exp$	exponenciální zobrazení
N_p	normální okolí bodu p
$,$	derivace
ω	1-forma
$\cdot$	skalární součin
r	stupeň derivace
(r, s)	typ/stupeň tenzorového pole
ρ	skalární křivost
Ric	Ricciho tenzor
K	Gaussova křivost
$SO(n)$	speciální ortogonální grupa
X_p	tečný vektor v bodě p
$\otimes$	tenzorový součin
S	podvarieta
L	Lagrangeova funkce, Lagrangián
λ	1-forma
$E_i(L)$	Euler-Lagrangeovy operátory
E_λ	Euler-Lagrangeova forma
ε	reálný parametr
$\tilde{\nabla}$	symetrická část konexe ∇
$\tilde{\Gamma}^i_{jk}$	komponenty $\tilde{\nabla}$
$\mathcal{R}$	tenzor křivosti typu $(0, 4)$
$\phi(x)$	grupa holonomie
M_i	maximální integrální varieta

$\hat{h}$	regulární forma
S^{ℓ}	endomorfismus
C_x	komutant
N_x	nulový prostor
$\hat{N}_x$	ortogonální doplněk N_x

1 Úvod

Původní motivací k sepsání tohoto textu byla možnost využití metrizovatelných symetrických konexí ve variačním počtu. Proto je převážná část této práce věnována přehledu metod, které je možno použít k zodpovězení otázky, zda daná lineární konexe na diferencovatelné varietě vzniká jako Riemannova konexe nějaké metriky. Metody jsou řazeny převážně chronologicky, přibližně podle doby svého vzniku. Lze však říci, že skutečným ústředním tématem je tenzor křivosti afinní variety a jeho vlastnosti.

Nejdříve jsme však ve druhé kapitole uvedli a definovali různé základní pojmy, které dále v textu používáme.

Zodpovězení otázky metrizovatelnosti lineární konexe a nalezení metriky v pozitivním případě vede na řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic, v nichž jako koeficienty vystupují komponenty tenzoru křivosti a jeho kovariantních derivací, obecně vyšších řádů (viz kapitola 3). Ve velmi jednoduchých případech je možno odpovídající soustavu řešit přímo. Což je na několika příkladech ukázáno v kapitole 4. Obecně však mohou vznikat poměrně komplikované soustavy rovnic.

Poměrně jednoduchá je situace pouze v dimenzi dva. Tam podáme přehlednou odpověď, formulovanou v řeči Ricciho tenzoru příslušné afinní variety (kapitola 6). V kapitole 5 předvedeme klasickou metodu Eisenharta a Veblena, která využívá vlastností tenzoru křivosti v kombinaci s teorií diferenciálních rovnic. Metodu předvedeme na několika příkladech. Modernější přístup je postaven na vlastnostech grupy holonomie příslušné variety. V kapitole 8 se objevuje rovněž úvaha o použití algebry holonomie. Prozatím jediný zcela algoritmický dosud známý postup byl odvozen a popsán pro analytické konexe na analytických varietách prof. O. Kowalskim, [37], který umožňuje efektivně rozhodnout, jestli daná analytická konexe na analytické varietě vyhovující dodatečným podmínkám je Riemannovská, a v kladném případě ukazuje metodu konstrukce všech odpovídajících Riemannových metrik kompatibilních s danou konexí. Rovněž tento přístup demonstrujeme na příkladech. Se zvyšující se dimenzí je poměrně pracný, ale účinný.

V kapitole 9 se zabýváme úzkým vztahem mezi variačností v zúženém smyslu a metrizovatelností lineární konexe variety. V dimenzi dva uvádíme také částečné řešení opět doplněná o příklady.

Následující desátá kapitole uvádí, jak lze zrekonstruovat, nebo sestrojit, symetrickou lineární konexi v jistém souřadnicovém okolí na základě znalosti „počátečních podmínek” (ze zúžení konexe na pevnou $(n-1)$-rozměrnou podvarietu a z vhodně vybraných komponent tenzoru křivosti R v souřadnicovém okolí). V Riemannově prostoru užijeme speciálního případu tzv. semigeodetických souřadnic.

Užitím podobných metod lze také rekonstruovat, nebo sestrojit, metrický tenzor typu $(0,4)$ pseudo-Riemannovy variety v definičním oboru semigeodetických souřadnic, je-li dáno zúžení metriky na nějakou neizotropickou nadplochu a jisté komponenty tenzoru křivosti v „objemu”.

Kapitola jedenáct se věnuje křivostně homogenním prostorům. Nejdříve se zabývá vlastnostmi globálně a lokálně homogenních prostorů. Dále v následujících podkapitolách se hovoří o křivostně homogenních prostorech typu $(1,3)$ a jejich příkladech.

Poslední dvanáctá kapitole se zabývá homogenností na afinních varietách. Pomocí metod z kapitoly 7 jsme hledali odpověď na otázku metrizovatelnosti konexí typu A (s konstantními Christoffelovými symboly) a typu B, které uvedla B. Opozda v [41].

V práci je uvedena řada ilustrativních příkladů, na kterých jsou demonstrovány uváděné metody. Některé příklady jsou řešeny více metodami k porovnání různých postupů. Pro dimanzi dva se jeví jako nejefektivnější metoda Eisenharta a Veblena. Pro obecnou dimenzi je to však jistě algoritmus prof. O. Kowalského.

2 Základní pojmy afinní diferenciální geometrie

V této kapitole uvedeme několik základních pojmů, které budeme potřebovat v dalším textu.

2.1 Diferencovatelná varieta

Máme-li dáno zobrazení $f\colon V \to \mathbf{R}^n$, kde $V \subset \mathbf{R}^n[x^1,\dots,x^n]$ je otevřená množina, a má-li f ve V spojité všechny parciální derivace až do řádu k, pak je nazýváme *zobrazením třídy* C^k. Pokud je $k = 0$, říkáme mu *spojité*, pro $k = 1$ *diferencovatelné*, pro $k = \infty$ *hladké*, a pokud se dá v okolí libovolného bodu $p \in V$ rozvinout v konvergentní mocninnou řadu, nazýváme je *analytické* a označujeme je C^ω.

Pro třídy diferencovatelnosti zřejmě platí: $C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \dots \supset C^\infty \supset C^\omega$, kde všechny inkluze jsou ostré.

Řekneme, že Hausdorffův topologický prostor M je *topologická varieta dimenze* n (někdy též *lokálně eukleidovský prostor*), jestliže ke každému jeho bodu existuje otevřené okolí homeomorfní s otevřenou podmnožinou v $\mathbf{R}^n$. Homeomorfismu $\varphi\colon O_p \to W \subset \mathbf{R}^n$ otevřeného okolí $O_p \subset M$ bodu p topologické variety M na otevřenou podmnožinu W pak říkáme *(lokální) mapa* při bodu p. V klasické terminologii se přiřazení $q \mapsto (x^1,\dots,x^n)$, $q \in O_p$ říká *soustava lokálních souřadnic*, o množině O_p pak mluvíme jako o *oboru lokálních souřadnic*. Soustavu map $A \equiv \{(O_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in \Lambda\}$ nazýváme *atlasem* na M, jestliže jejich definiční obory tvoří pokrytí variety M, $\bigcup_\alpha O_\alpha = M$.

Máme-li na M dvě mapy $\varphi\colon U \to \mathbf{R}^n$, $\mu\colon V \to \mathbf{R}^n$, pak jsou-li zobrazení $\varphi \circ \mu^{-1}$ a $\mu \circ \varphi^{-1}$ třídy C^k, nazývají se mapy C^k*-příbuzné*. Každé dvě mapy jsou C^0-příbuzné. Jestliže jsou v daném atlasu všechny mapy C^k-příbuzné, pak ho nazýváme C^k-atlasem. Dále mapa je *slučitelná* s C^k-atlasem, jestliže je s tímto atlasem C^k-příbuzná. Atlas nazveme *úplný*, jestliže k němu patří všechny s ním slučitelné mapy. Úplný C^k-atlas také označujeme jako C^k*-strukturu*; pokud $k \geq 1$, jako *diferencovatelnou* C^k*-strukturu*.

Dvojici (M, A), kde A je C^k-struktura, nazýváme *varieta*. Pokud je A diferencovatelná struktura, nazýváme (M, A) *diferencovatelnou varietou*.

Jsou-li dány dvě variety M, N s dimenzemi po řadě m, n, $f\colon M \to N$ je spojité zobrazení a $\varphi\colon O \to \mathbf{R}^m$, $\mu\colon U \to \mathbf{R}^n$ jsou lokální mapy po řadě variet M, N, pak složené zobrazení

$$\mu \circ f \circ \varphi^{-1} \colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$$

je *souřadnicové vyjádření zobrazení f vzhledem k dvojici map φ, μ.*

Definice 2.1 Spojité zobrazení $f \colon M \to N$ variet aspoň třídy C^k je *třídy C^k*, jestliže jeho souřadnicová vyjádření vzhledem k libovolné dvojici map φ, μ příslušných atlasů jsou třídy C^k.

Definice 2.2 Mají-li dvě variety stejnou dimenzi $\dim M = \dim N = n$, zobrazení $f \colon M \to N$ je bijekce a zobrazení f, f^{-1} jsou třídy C^k, pak zobrazení f budeme říkat *difeomorfismus třídy C^k variety M na varietu N.*

Je-li $f \colon M \to N$ zobrazení třídy C^k, variety M, N jsou třídy C^k s dimenzemi $\dim M = m \leq \dim N = n$ a zobrazuje-li se v zobrazení f bod $x \in M$ do bodu $y \in N$, pak f nazýváme *vnoření*, jestliže v okolí $U \subset M$ každého bodu $y \in f(M) \subset N$ existuje soustava lokálních souřadnic $(y^1, \dots, y^n)$ taková, že pro okolí V bodu x platí:

$$f(V) \text{ je dáno rovnicemi } y^{m+1} = \ldots = y^n = 0.$$

Je-li navíc zobrazení f prosté, pak mu říkáme *vložení*.

Platí také tato věta:

Věta 2.3 *Zobrazení $f \colon M \to N$ je vnoření právě tehdy, když hodnost jeho Jacobiho matice $(J_i^a) = \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\right)$ na $f(M)$ je maximální (tedy m).*

Je-li zobrazení $f \colon M \to N$ vložení, pak podmnožina $f(M) \subset N$ má strukturu variety a nazýváme ji m-rozměrná *podvarieta* variety N. Jednorozměrné podvarietě říkáme *křivka*.

Následující věta ukazuje, že každou abstraktně zavedenou varietu vlastně můžeme, až na difeomorfismus, považovat za podvarietu eukleidovského (číselného) prostoru. Umožní nám to varietu si lépe představit. Na druhé straně, konkrétní vložení do číselného prostoru nemusí mít žádný přirozený geometrický význam, a naopak abstraktní přístup může být užitečný.

Věta 2.4 *(Whitneyova věta o vložení) Každá C^1 varieta dimenze n je difeomorfní s některou analytickou podvarietou C^ω prostoru $\boldsymbol{R}^{2n+1}$.*

V dalším budeme zpravidla předpokládat, že všechny uvažované objekty a zobrazení jsou třídy C^∞, tedy hladké.

2.2 Tečný prostor

Definice 2.5 Nechť M je hladká varieta a $\mathcal{F}(p, M)$ je množina všech hladkých funkcí definovaných v otevřených okolích bodu $p \in M$. Dále nechť T_pM je množina zobrazení $v\colon \mathcal{F}(p, M) \to \mathbf{R}$, která splňuje tyto podmínky:

1. jestliže $f, g \in \mathcal{F}(p, M)$ mají stejnou hodnotu v okolí bodu p, pak $v(f) = v(g)$,
2. $v(af + bg) = av(f) + bv(g), a, b \in \mathbf{R}$,
3. $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$.

Pak T_pM se nazývá *tečný prostor variety M v bodě p* a jeho prvky *tečné vektory*.

Připomeňme, že tečný prostor $T(\mathbf{R}^n)_q$ k eukleidovskému prostoru $\mathbf{R}^n$ v bodě q je složený z dvojic tvaru (q, v), kde $v \in \mathbf{R}^n$, příslušné lineární operace jsou $r \cdot (q, v) = (q, rv)$, $(q, v) + (q, w) = (q, v + w)$. $T(\mathbf{R}^n)_q$ můžeme zřejmě identifikovat s $\mathbf{R}^{2n}$ pomocí zobrazení $(q, v) \mapsto (q_1, \dots, q_n, v_1, \dots, v_n)$. V $T(\mathbf{R}^n)_q$ zpravidla volíme standardní kanonickou bázi $\langle (q, (1, 0, \dots, 0)), \dots, (q, (0, 0, \dots, 1)) \rangle$.

Je-li M hladká varieta, $\dim M = n$ a $p \in M$ je bod, pak lokální mapa $\mu\colon U \to \mathbf{R}^n$ v okolí bodu p určuje lineární izomorfismus tečného prostoru T_pM na tečný prostor $T(\mathbf{R}^n)_{\mu(p)}$, který tzv. *souřadnicové bázi* $\langle \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p \rangle$ tečného prostoru T_pM přiřazuje standardní kanonickou bázi v $T(\mathbf{R}^n)_{\mu(p)}$. Proto $\dim T_pM = n$. Prvky souřadnicové báze se nazývají *souřadnicové vektory v bodě p*.

2.3 Vektorové a tenzorové pole

Definice 2.6 Zobrazení X, které každému bodu p variety M přiřazuje tečný vektor X_p z T_pM, se nazývá *vektorové pole* na varietě M.

Vektorové pole můžeme také interpretovat jako zobrazení, pokud aplikujeme vektorové pole X na funkci f tak, že v každém bodě $p \in M$ se na f aplikuje vektor $X_p \in T_pM$.

Definice 2.7 Vektorové pole X se nazývá *hladké*, jestliže toto zobrazení přiřadí hladké funkci opět hladkou funkci.

Prostor všech hladkých vektorových polí na M (vzhledem k lineárním operacím definovaným bod po bodu) značíme $\mathcal{X}(M)$.

Stejně tak jako vektorům, tak také vektorovému poli můžeme přiřadit komponenty. Nechť M je hladká varieta. V otevřené množině $U \subset M$ se souřadnicemi $(x^1, \ldots, x^n)$ se dá vektorové pole X jednoznačně zapsat takto:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

kde funkce $X^i(x)$ jsou *souřadnicové složky* vektorového pole V a vektorová pole $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ tvoří *souřadnicovou bázi* prostoru vektorových polí.

Věta 2.8 [39] *Vektorové pole X je hladké právě tehdy, když jeho souřadnicové složky vzhledem k libovolné lokální souřadnicové soustavě na M jsou hladké funkce.*

Nyní označme n-rozměrný lineární prostor nad polem $\mathbf{R}$ písmenem V a k němu *duální* prostor, tj. prostor lineárních forem na V, označíme V^*. Prvky tohoto duálního prostoru nazýváme *kovektory*. Pro tyto dva prostory platí, že jejich dimenze se rovnají.

Definice 2.9 Nechť V je n-rozměrný lineární (vektorový) prostor a V^* duální prostor. Potom *tenzor typu* (r, s) nad V je zobrazení lineární vzhledem ke všem argumentům

$$t \colon V \times \ldots \times V \times V^* \times \ldots \times V^* \to \mathbf{R},$$

kde počet faktorů V v součinu je s a počet V^* je r.

Množina všech tenzorů typu (r, s) nad V tvoří opět lineární prostor, který značíme $T^r_s(V)$.

Některé tenzory mají speciální název. Značení je zvoleno tak, že vektor je tenzor typu $(1, 0)$. Lineární forma je tenzor typu $(0, 1)$, lineární zobrazení je tenzor typu $(1, 1)$, skalární součin patří mezi tenzory typu $(0, 2)$.

Pokud v předcházející definici nahradíme V tečným prostorem T_pM, získáme tenzory v bodě p variety. Duální prostor T^*_pM k T_pM nazveme *kotečným prostorem* v p, jeho prvky jsou *kovektory* (lineární formy na T_pM).

Definice 2.10 *Tenzorové pole typu* (r, s) na hladké varietě M je zobrazení, které každému bodu $p \in M$ přiřazuje tenzor typu (r, s) na tečném prostoru T_pM. Množinu všech tenzorových polí na M typu (r, s) označujeme $T^r_s(M)$.

2.4 Tečný bandl a fibrovaná varieta

Nechť M je hladká varieta a T_xM tečný prostor v bodě $x \in M$. Pak můžeme zavést množinu

$$TM\colon = \bigcup_{x\in M} T_xM,$$

kde prvky této množiny jsou vektory v různých bodech $x \in M$. Pokud každému vektoru v z T_xM přiřadíme příslušný bod $x \in M$, pak získáme projekci $\pi(v) = x$,

$$\pi\colon TM \to M.$$

Výše zmiňovaná množina TM má strukturu hladké variety. Pokud chceme na TM zavést atlas, lze k tomu využít atlasu na varietě M. Nechť $\psi_\alpha\colon O_\alpha \to \mathbf{R}^n[x^1, \ldots, x^n]$ je mapa patřící atlasu $\{(O_\alpha, \psi_\alpha), \alpha \in \Lambda\}$ na M, tj. (x^i) jsou lokální souřadnice na otevřené množině O_α. Uvažujme úplný vzor $\hat{O}_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(O_\alpha) \subset TM$. Na této množině zavedeme mapu (adaptované, též kanonické souřadnice) takto. Je-li $v \in \hat{O}$ s $\pi(v) = x$ (tj. $v \in T_xM$ pro jisté $x \in O$), máme $\psi_\alpha(x) = (x^1, \ldots, x^n)$ a dále s využitím (pohyblivé) lokální souřadnicové báze při bodu x lze psát $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x$, kde $(v^1, \ldots, v^n) \in \mathbf{R}^n$. Zobrazení $\hat{\psi}_\alpha(v) = (x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n)$, $\hat{\psi}_\alpha\colon \hat{O}_\alpha \to \mathbf{R}^{2n}$, je mapa na $\hat{O}_\alpha \subset TM$, tzv. mapa indukovaná mapou ψ_α na O_α. Tedy $2n$-tice čísel $(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n)$ jednoznačně udává libovolný bod $v \in \hat{O}$. Potom $\{(\hat{O}_\alpha, \hat{\psi}_\alpha), \alpha \in \Lambda\}$ je tzv. adaptovaný atlas na TM.

Uvedená konstrukce má obecnější platnost, lze ji s výhodou použít na varietách, které mají podobný charakter, tj. jsou rozloženy na jednotlivá „vlákna” natažená nad „bázovými” body.

Podobně jako se chová TM, chová se také soubor všech kotečných vektorů, varieta T^*M:

$$T^*M\colon = \bigcup_{x\in M} T_x^*M,$$

kde $\phi \in T_x^*M$ je lineární forma (kovektor) na tečném prostoru T_xM v bodě $x \in M$. Nyní budeme kanonickou projekci označovat písmenem τ

$$\tau\colon T^*M \to M.$$

Opět jako výše, atlas na M indukuje atlas na T^*M. Je-li $\phi \in T_x^*M$, $\psi(x) = (x^1, \ldots, x^n)$ vzhledem k pevně zvolené mapě při bodu x patřící danému atlasu na M, a je-li rozklad vůči souřadnicové bázi tvaru $\phi = \phi_a dx^a|_x$, $(\phi_1, \ldots, \phi_n) \in \mathbf{R}^n$, pak zobrazení, které bodu $\phi \in \hat{O} \equiv \tau^{-1}(O)$ přiřazuje $2n$-tici $(x^1, \ldots, x^n, \phi_1, \ldots, \phi_n)$, je mapa variety T^*M definovaná na otevřené množině $\hat{O} \subset T^*M$, indukovaná mapou ψ na O.

Variety TM a T^*M jsou příklady tzv. *vektorových bandlů*, *fibrovaných bandlů*, a obecněji také příklady *fibrovaných variet.* Každému bodu $x \in M$ lze přiřadit varietu F_x a přitom všechny takové variety jsou navzájem difeomorfní s jednou společnou varietou F. Této varietě F se říká *standardní fibr* nebo *standardní vlákno*, varietě F_x *fibr (vlákno) v bodě* x, M je báze a

$$\mathbf{B} \colon = \bigcup_{x \in M} F_x$$

je *totální prostor.* Takto získáme onu *fibrovanou varietu.*

Obecně, fibrovaná varieta (E, π, M) se skládá ze dvou variet E, M a jednoho zobrazení $\pi \colon E \to M$, zvaného kanonická projekce. E je *totální prostor*, M je *báze*, podmnožině $\pi^{-1}(p)$ říkáme *fibr* nebo *vlákno* v daném bodě $p \in M$, značíme např. E_p.

Jednoduchým příkladem je tzv. *triviální fibrovaná varieta* $(M \times F, \mathrm{proj}_1, M)$, kde M, F jsou variety a proj_1 je projekce na první složku.

Je-li (E, π, M) fibrovaná varieta, $p \in M$ její bod, pak *lokální trivializací projekce* π *při bodu* p rozumíme trojici (W_p, F_p, ϕ_p), kde W_p je okolí bodu, F_p je varieta a $\phi_p \colon \pi^{-1}(W_p) \to W_p \times F_p$ je difeomorfismus splňující podmínku $\mathrm{proj}_1 \circ \phi_p = \pi|_{\pi^{-1}(W_p)}$.

Bandl, nebo též *lokálně triviální fibrovaná varieta*, je taková fibrovaná varieta, která má lokální trivializaci v okolí každého svého bázového bodu.

Poznamenejme, že existence lokální trivializace v okolí každého bodu má za důsledek, že projekce π je submerze. Dále lze dokázat, že všechny variety E_p jsou navzájem difeomorfní, tedy existuje pevný *typový fibr* F *bandlu*, difeomorfní se všemi E_p. Existence lokální součinové struktury umožňuje zavést na totálním prostoru fibrované variety speciální lokální systém souřadnic, zvaný *adaptované souřadnice*, který vzniká v podstatě užitím souřadnic na bázi a ve standardním fibru, jak jsme se o tom již zmínili ve speciálních případech.

Jestliže všechny fibry E_p jsou reálné vektorové (lineární) prostory stejné dimenze n, standardní fibr bandlu $F = \mathbf{R}^n$, a příslušné lokální trivializace jsou lineární, [68, str.

27-28], mluvíme o *vektorovém bandlu*. S použitím zmíněné terminologie můžeme zavést (ověření příslušných předpokladů lze najít např. v [68]):

Definice 2.11 Trojice (TM, M, π) se nazývá *tečný bandl* na M a zobrazení $\pi\colon TM \to M$ *přirozená projekce tečného bandlu.*

Definice 2.12 Trojice (T^*M, M, τ) se nazývá *kotečný bandl* na M.

2.5 Lineární konexe a paralelní přenos

V eukleidovském nebo afinním prostoru $\mathbf{R}^n$ máme k dispozici grupu posunutí (translací), která je podgrupou v grupě izometrií. Pro každou dvojici bodů $p, q \in \mathbf{R}^n$ existuje translace $\tau\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ taková, že $\tau(p) = q$; každý vektor (tečný k $\mathbf{R}^n$) v bodě p se při ní posune do vektoru (tečného k $\mathbf{R}^n$) v bodě q. Tím je přirozeným způsobem dáno rovnoběžné posouvání tečných vektorů z jednoho bodu do druhého, zprostředkované grupou posunutí; přitom při přenosu se zachovává skalární součin vektorů, a tedy i norma (velikost) vektoru. Dále je známo, že dráha rovnoměrného přímočarého pohybu v eukleidovském (v afinním) prostoru je částí přímky. Nejprve byla tato struktura známa na varietách s metrikou, později byla axiomaticky zavedena obecněji, bez pomocné metriky.

Na obecné hladké varietě nemáme k dispozici žádnou přirozenou cestu, jak svázat tečné vektory ve dvou různých bodech. Dlouhodobým vývojem se došlo ke konstrukci geometrické struktury, která na varietě umožňuje paralelně přenášet vektory podél křivek a zavést tzv. geodetické křivky. Ty hrají analogickou roli jako přímky v eukleidovském prostoru.

Definice 2.13 *Lineární (též afinní) konexe* na hladké varietě M je takové zobrazení ∇, které uspořádané dvojici hladkých vektorových polí $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ přiřazuje hladké vektorové pole $\nabla_X Y$ a pro každou hladkou funkci f na M splňuje následující:

1. zobrazení ∇ je lineární vzhledem k oběma argumentům;

2. $\nabla_{fX} Y = f(\nabla_X Y)$;

3. $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f(\nabla_X Y)$.

Dvojici (M, ∇) budeme stručně nazývat *afinní varieta.*

Každému vektorovému poli X na M je tím přiřazen operátor ∇_X, tzv. *kovariantní derivování* ve směru pole X, který má výše uvedené vlastnosti.

Věta 2.14 [39], [5] *Nechť X, Y jsou hladká vektorová pole na M. Pak pro každý bod $x \in M$ závisí hodnota $(\nabla_X Y)_x \in T_xM$ jen na hodnotě T_xM vektorového pole X a na hodnotách vektorového pole Y v libovolně malém okolí bodu x.*

Důkaz. Viz [39, str. 46].

Je-li dána varieta (M, ∇) s lineární konexí, dá se dokázat, že pro pevný bod $p \in M$, tečný vektor v něm $w \in T_pM$ a každé hladké vektorové pole $Y \in \mathcal{X}(M)$ v okolí bodu p je jednoznačně definován vektor $\nabla_w(Y) \in T_pM$, kterému říkáme *kovariantní derivace vektorového pole Y podle tečného vektoru w*. Využije se při tom předchozí věty a možnosti rozšířit lokální vektorové pole Y na globální pole zadané na celé varietě, resp. vektor $w \in T_pM$ daný v bodě se rozšíří na lokální vektorové pole definované na okolí bodu:

Důsledek 2.15 [39], [5] *Nechť je na hladké varietě M dána lineární konexe ∇ a nechť $p \in M$. Pak pro každý tečný vektor $w \in T_pM$ a každé hladké vektorové pole Y v okolí bodu p je jednoznačně definován vektor $\nabla_w Y \in T_pM$.*

Důkaz. Viz [39, str. 47].

Věta 2.16 *Na každé hladké varietě existuje alespoň jedna afinní konexe.*

Důkaz. Viz [39, str. 49]

Je-li dána afinní varieta (M, ∇) a je-li $U \subset M$ obor lokálních souřadnic $(x^1, \dots, x^n)$, pak pro kovariantní derivaci souřadnicových vektorových polí získáme vztah:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \qquad i, j = 1, \dots, n. \tag{2.1}$$

Funkcím Γ_{ij}^k říkáme *komponenty*, *složky*, někdy také *Christoffelovy symboly* konexe ∇ v lokální souřadnicové soustavě $(x^1, \dots, x^n)$. Těmito funkcemi je dána úplná informace o konexi. Poznamenejme, že se nechovají jako tenzory, což je zřejmé z příslušných transformačních vztahů při přechodu od jedné lokální mapy k druhé na společném neprázdném definičním oboru:

$$\Gamma'^h_{ij}(x') = \left(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(x(x'))\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} + \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^i \partial x'^j}\right)\frac{\partial x^h}{\partial x'^\gamma}\,. \tag{2.2}$$

Jsou-li komponenty lineární konexe na afinní varietě symetrické vůči dolním indexům, $\Gamma^k_{ij} = \Gamma'^k_{ji}$ (tj. má-li nulovou torzi, viz dále), říkáme jí *konexe bez torze* nebo *symetrická konexe.*

Na varietě je často vhodnější a praktičtější zavést křivku jako křivku parametrizovanou, tedy jako funkci. Lze ji chápat jako matematický popis fyzikálního pohybu hmotného bodu v prostoru a v čase. Tento postup nám umožní užít aparátu matematické analýzy. Okamžitá rychlost pohybu je dána derivací příslušné parametrizující funkce, ta spolu s bodem určí tečnu k dráze pohybu. Křivka jakožto podmnožina bodů je pak dána obrazem definičního oboru při dané funkci.

Definice 2.17 *Parametrizovaná křivka* na varietě M (stručně křivka, nebo hladký pohyb, v [36] *dráha*) je (hladké) zobrazení $\gamma\colon I \to M$, kde I je otevřený interval v $\mathbf{R}$.

Toto zobrazení vystihuje dráhu i s jejím kinematickým vytvořením. Výsledné trajektorii, obrazu $\gamma(I) \subset M$ při parametrizaci, můžeme říkat např. *geometrický obraz* parametrizované křivky.

Máme-li dánu parametrizovanou křivku $\gamma(t)\colon I \to U \subset M$ a hladké vektorové pole X definované v U, pak v lokálních souřadnicích můžeme psát, jak již bylo zmíněno, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, a pro kovariantní derivaci vektorového pole X podél γ platí

$$\nabla_{\frac{d\gamma(t)}{dt}} X = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{d(X^k \circ \gamma)}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} (\Gamma^k_{ij} X^j)_{\gamma(t)} \frac{d\gamma^i}{dt} \right\} \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\gamma(t)}, \qquad t \in I. \tag{2.3}$$

Přitom hodnota $\nabla_{\frac{d\gamma(t)}{dt}} X$ závisí pouze na hodnotách vektorového pole podél křivky γ.

Definice 2.18 Nechť M je hladká varieta a $\gamma\colon I \to M$ regulární hladká křivka, tj. $\gamma'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in I$. *Vektorová funkce X podél křivky γ* je zobrazení, které každému číslu $t \in I$ přiřazuje tečný vektor X_t z $T_{\gamma(t)}M$. Tato vektorová funkce se nazývá *hladká*, jestliže vzhledem k libovolné soustavě lokálních souřadnic $(x^1, \ldots, x^n)$ jsou její složky hladké funkce parametru t.

Definice 2.19 Vektorová funkce X podél křivky γ se nazývá *paralelní*, jestliže platí $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} X = 0$ pro všechna $t \in I$.

Je-li křivka na varietě M s afinní konexí ∇ regulární ($\frac{d\gamma}{dt} \neq 0$) a její obraz leží v oboru lokálních souřadnic $U(x^1, \dots, x^n)$, lze ukázat, že vektorová funkce X podél křivky je paralelní právě tehdy, když její souřadnicové složky X^k splňují soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{dX^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\Gamma_{ij}^k \circ \gamma\right) X^j \frac{d\gamma^i}{dt} = 0, \qquad k = 1, \dots, n. \tag{2.4}$$

Pomocí afinní konexe ∇ (nebo odpovídající kovariantní derivace) můžeme zavést *paralelní přenos* vektoru po křivce.

Věta 2.20 [39] *Nechť $\gamma\colon I \to M$ je regulární hladká křivka na varietě s afinní konexí. Potom pro každé $t_0 \in I$ a každý vektor $w \in T_{\gamma(t_0)}M$ existuje právě jedna paralelní vektorová funkce W podél γ s počáteční hodnotou $W(t_0) = w$. Všechny paralelní vektorové funkce podél γ tvoří n-rozměrný vektorový prostor.*

Důkaz. viz [39, str. 55]

Z předchozího plyne, že jsou-li X, Y paralelní vektorové funkce podél regulární křivky $\gamma\colon I \to M$ s počátečními hodnotami $X(t_0) = u$, $Y(t_0) = w$, pak pro každá dvě reálná čísla c, d je $cX + dY$ paralelní vektorová funkce s počáteční hodnotou $cu + dw$. Je-li $\langle a, b\rangle \subset I$, $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$, kde $\gamma\colon I \to M$ je regulární hladká křivka na varietě s afinní konexí, je možno definovat (jednoznačně určený) lineární izomorfismus mezi tečnými prostory v odpovídajících bodech

$$P_{a,b}^{\gamma}\colon T_xM \to T_yM,$$

který nazveme *paralelním přenosem podél křivky* γ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Každému vektoru $w = W(a)$ v bodě x je jednoznačně přiřazen vektor v bodě y jako hodnota $W(b)$ příslušné paralelní vektorové funkce W podél γ.

Paralelní přenos podél dvou křivek (definovaných na uzavřených intervalech), jejichž geometrický obraz má týž počáteční a koncový bod, je obecně různý.

Podívejme se na paralelní přenos ještě z klasičtějšího hlediska. Je-li $\gamma(t)$ křivka a $W(t)$ je podél ní definované vektorové pole, pak pro "derivaci" tohoto vektorového pole podél křivky budeme porovnávat dva blízké vektory $W(t)$ a $W(t+\epsilon)$, abychom zjistili změnu pole podél křivky. Tyto vektory jsou v různých bodech. Nejprve paralelně přeneseme po křivce γ vektor $W(t+\epsilon)$ z bodu $\gamma(t+\epsilon)$ zpět do bodu $\gamma(t)$ a poté tento přenesený vektor, označený $W_\epsilon(t)$, „porovnáme" s vektorem původním.

Přesněji, zavedeme *absolutní derivaci* vektorového pole W ve směru křivky γ takto:

$$\frac{\nabla W(t)}{dt} := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{W_\epsilon(t) - W(t)}{\epsilon}.$$

Absolutní derivace se dá využít k rekonstrukci pravidla paralelního přenosu požadavkem, aby derivace byla *nulová*.

2.6 Grupa holonomie

Paralelní přenosy (vzhledem k dané ∇) podél všech regulárních křivek $\gamma\colon \langle a,b\rangle \to M$, pro které je počáteční i koncový bod stejný, $\gamma(a) = \gamma(b) = p$, tvoří spolu s operací skládání grupu lineárních automorfismů Hol_p^∇ tečného prostoru T_pM, která se nazývá *grupa holonomie* variety (M,∇) v bodě p. Každý jednotlivý paralelní přenos (lineární izomorfismus) podél uzavřené smyčky se nazývá *holonomie*, a můžeme jej reprezentovat lineárním invertibilním operátorem $T_pM \to T_pM$, tedy elementem grupy $GL(T_xM) \cong GL(n,\mathbf{R})$. Grupu holonomie tedy můžeme ztotožnit s podgrupou grupy $GL(n,\mathbf{R})$.

Je-li varieta M souvislá a pro některé $p \in M$ je grupa Hol_p^∇ triviální, pak je konexe plochá (tj. má nulový tenzor torze i křivosti, viz dále).

2.7 Kovariantní derivování tenzorových polí

Obecně, pro tenzorové pole A typu (r,s) na (M,∇) zavádíme jeho *kovariantní derivaci* ∇A vzhledem k dané konexi jako tenzorové pole typu $(r,s+1)$ dané vztahem [34]

$$(\nabla A)(X_1,\dots,X_s;W) = (\nabla_W A)(X_1,\dots,X_s), \qquad W, X_i \in T_xM.$$

Platí

$$(\nabla A)(X_1,\dots,X_s;W) = \nabla_W(A(X_1,\dots,X_s)) - \sum_{i=1}^{s} A(X_1,\dots,\nabla_W X_j,\dots,X_s).$$

V daných lokálních souřadnicích, v komponentách vychází

$$A^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q;k} = \nabla_k A^{i_1\dots i_p}_{j_1,\dots,j_q}(x) = \partial_k A^{i_1\dots i_p}_{j_1,\dots,j_q} + \sum_{s=1}^{p} \Gamma^{h_s}_{\alpha k}\cdot A^{i_1\dots i_{s-1}\alpha i_{s+1}\dots i_p}_{j_1 j_2\dots j_q} - \sum_{s=1}^{q} \Gamma^{\alpha}_{j_s k}\cdot A^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_{s-1}\alpha j_{s+1}\dots i_q}.$$

Speciálně, kovariantní derivace tenzorového pole A typu $(0, s)$ má tento tvar:

$$(\nabla_W A)(X_1, \ldots, X_s) = WA(X_1, \ldots, X_s) - \sum_{i=1}^{s} A(X_1, \ldots, \nabla_W X_i, \ldots, X_s).$$

Nejčastěji ji budeme potřebovat pro tenzorové pole typu $(0, 2)$:

$$(\nabla_W A)(X_1, X_2) = WA(X_1, X_2) - A(\nabla_W X_1, X_2) - A(X_1, \nabla_W X_2).$$

Pro tenzorové pole A typu $(1, s)$ pak má tento tvar:

$$(\nabla_W A)(X_1, \ldots, X_s) = \nabla_W(A(X_1, \ldots, X_s)) - \sum_{i=1}^{s} A(X_1, \ldots, \nabla_W X_i, \ldots, X_s).$$

Zde se můžeme také zmínit o paralelním přenosu *tenzorů*. Nenulové tenzorové pole F na (M, ∇) se nazývá *paralelní*, nebo *kovariantně konstantní* (vzhledem ke konexi ∇), jestliže $\nabla F = 0$; ekvivalentně, tenzorové pole se zachovává při paralelním přenosu podél všech křivek v M, $\nabla_X F = 0$, pro každé $X \in \mathcal{X}(M)$.

Vektorové pole W na křivce γ nazýváme *paralelní*, jestliže má nulovou absolutní derivaci podél γ:

$$\frac{\nabla W(t)}{dt} :\; = \nabla_{\dot\gamma} W = 0.$$

Je-li v bodě x na křivce vektor v a chceme ho paralelně přenést do bodu y, pak sestrojíme na křivce paralelní pole generované vektorem v a pak odečteme jeho hodnotu v bodě y. Tuto hodnotu nazveme *paralelně přenesený vektor*. O tomto paralelním přenosu se opět můžeme přesvědčit, že je lineární a "tranzitivní". Stejně jako u paralelního přenosu vektorů závisí paralelní přenos tenzorů jen na křivce, ne na parametrizaci.

2.8 Tenzor torze a křivosti

Afinní konexe na varietě sama o sobě tenzorovým polem není. Můžeme z ní však některá důležitá tenzorová pole odvodit.

Definice 2.21 Nechť je dána varieta (M, ∇) a na ní jsou dány operace $T\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ a $R\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ takto:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]\,,$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

T se nazývá *tenzorové pole torze* typu $(1,2)$ a R *tenzorové pole křivosti* nebo také *Riemannův tenzor* typu $(1,3)$.

V této definici užité označení $[,]$ je tzv. *Lieova závorka vektorových polí.* Jsou-li X, Y dvě hladká vektorová pole na varietě M, pak *Lieova závorka těchto vektorových polí v bodě* $p \in M$ je zobrazení $[X,Y]_p \colon F(M,p) \to \mathbf{R}$ definované: $[X,Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$. Potom *Lieovu závorku dvou hladkých vektorových polí* X, Y *na* M definujeme jako vektorové pole $[X,Y]$ generované Lieovými závorkami $[X,Y]_p, p \in M$. Čemuž odpovídá vzorec: $[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$. [39]

Tenzor torze je antisymetrický, tedy platí: $T(U,V) = -T(V,U)$ $(T^i_{jk} = -T^i_{kj})$. Pokud je tenzor torze nulový, pak Christoffelovy symboly konexe jsou symetrické vůči dolním indexům, $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, takové konexi se pak říká *konexe symetrická.*

Komponenty tenzoru torze $T = T^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k$ můžeme vyjádřit v lokálních souřadnicích pomocí komponent konexe takto: $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jk}$.

Nyní zavedeme pojmy plochá, neplochá a nikde plochá konexe, které budeme v následujícím textu používat.

Definice 2.22 Nechť je dána symetrická konexe ∇. Tuto konexi nazýváme konexí *plochou*, jestliže její křivost R je všude nulová, $R = 0$. Ve vhodných souřadnicích má plochá konexe nulové Christoffelovy symboly $\Gamma^i_{jk} = 0$. Pokud však existuje takové x, pro které je $R(x) \neq 0$, pak je konexe *neplochá.* A nakonec konexe je na $U \subset M$ *nikde plochá*, jestliže je $R(x) \neq 0$ pro každé $x \in U$. Pseudo-Riemannova varieta má některou ze zmíněných vlastností, jestliže ji má její Riemannova konexe.

Pro tenzor torze Levi-Civitovy konexe platí tato věta:

Věta 2.23 [39] *Pro Levi-Civitovu konexi* ∇ *na podvarietě* $M \subset \boldsymbol{R}^d$ *je tenzor torze vždy nulový.*

Důkaz. Zvolíme si bod $x \in M$, tečné vektory $v, u \in T_x M$, vektorová pole X, Y na M taková, že $X_x = v, Y_x = u$ a vektorová pole $\tilde{X}, \tilde{Y}$ v okolí U bodu x v $\mathbf{R}^d$, která hladce rozšiřují vektorová pole X, Y z $U \cap M$ na U. Pak máme:

$$T(v,u) = \nabla_v Y - \nabla_u X - [X,Y]_x = proj_{T_xM}(\nabla_v \tilde{Y} - \nabla_u \tilde{X} - \left[\tilde{X}, \tilde{Y}\right]_x) = proj_{T_xM}(T^0(v,u)) = 0,$$

kde T^0 je nulový tenzor torze eukleidovské konexe v $\mathbf{R}^d$.

Závislost paralelního přenosu na cestě je zanesena v *tenzoru křivosti* R^i_{jkl}. Tento tenzor je antisymetrický vůči poslední dvojici indexů, tedy $R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}$. V lokálních souřadnicích má pomocí komponent konexe toto vyjádření:

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{ml}, \tag{2.5}$$

kde přes index m sčítáme a čárka před indexem znamená, že se podle příslušné proměnné kovariantně derivuje.

Na (pseudo-) Riemannově varietě (M, g) s tenzorem metriky g můžeme kromě tenzoru křivosti R typu $(1,3)$ vzít v úvahu tenzor

$$\tilde{R}(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$$

typu $(0,4)$, obvykle také nazývaný tenzor křivosti (platí $\tilde{R}(X,Y,Z,W) = \tilde{R}(Z,W,X,Y) = -\tilde{R}(Y,X,Z,W) = -\tilde{R}(X,Y,W,Z)$). V souřadnicovém systému $(U, \varphi = (x^i))$, kolem bodu $x \in M$, komponenty R^ℓ_{ijk} křivosti R a R_{hijk} křivosti $\tilde{R} = R_{hijk} dx^j \otimes dx^k \otimes dx^i \otimes dx^h$ spolu souvisí takto: $R_{hijk} = g_{hs} R^s_{ijk}$ a $g^{\ell h} R_{hijk} = R^\ell_{ijk}$.

Pokud jsou jak tenzor torze, tak tenzor křivosti nulové, říkáme, že příslušná konexe je *plochá*. Jak známo, konexe ∇ je plochá právě tehdy, když v okolí každého bodu existují lokální souřadnice takové, že platí $\Gamma^i_{jk} = 0$.

Připomeňme také, že lineárně nezávislými tečnými vektory $X, Y \in T_xM$ je dána sekcionální křivost dvourozměrného prostoru P

$$K(X \wedge Y) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2} = \frac{\tilde{R}(X,Y,Y,X)}{||X \wedge Y||^2}, \tag{2.6}$$

kde $||X \wedge Y||$ je plošný obsah rovnoběžníka určeného X a Y, [15, str. 94], [16, str. 327] atd. Sekcionální křivost plně určuje tenzor křivosti $\tilde{R}$ typu (0,4), [31, str. 137].

Riemannova varieta (M, g) se nazývá *izotropní v bodě* $x \in M$, jestliže křivost $K(x)$ je konstantní na každém (dvourozměrném) řezu a *izotropní*, jestliže je izotropní v každém bodě, [5]. Jestliže x je izotropní bod (M, g), pak následující rovnice platí v bodě x v libovolných lokálních souřadnicích v okolí x:

$$R_{hijk} = K(x)(g_{hj}g_{ik} - g_{hi}g_{jk}). \tag{2.7}$$

Toho použijeme u dvoudimenzionálních variet.

2.9 Ricciho tenzor, ekviafinní prostor

Ricciho tenzor Ric typu $(0, 2)$ můžeme zavést jako stopu lineárního zobrazení,

$$Ric\,(Y, Z) = \mathrm{Tr}\,\{X \mapsto R(X, Y)Z\}.$$

Jinak lze jeho vznik vysvětlit úžením (kontrakcí) Riemannova tenzoru: komponenty R_{jl} Ricciho tenzoru získáme jako $R_{jl} = \sum_i R^i_{jil}$. A pomocí komponent konexe je můžeme vyjádřit následovně:

$$R_{jl} = \sum\nolimits_i R^i_{jil} = \sum_i \left(\frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{ij}}{\partial x^l} \right) + \sum_{i,s} \left(\Gamma^i_{is}\Gamma^s_{lj} - \Gamma^i_{ls}\Gamma^s_{ij} \right). \tag{2.8}$$

Tento Ricciho tenzor nám bude užitečný u dvourozměrných variet.

Díky tzv. první Bianchiho identitě

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0, \tag{2.9}$$

lokálně $R^i_{[hjk]} = 0$, a díky antisymetrii tenzoru křivosti dostáváme

$$R_{jk} - R_{kj} = \sum_i \left(R^i_{kij} + R^i_{jki} \right) = R^i_{ikj} = \mathrm{Tr}\ \mathrm{R}_{kj} = \sum_s \frac{\partial \Gamma^s_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^s_{sk}}{\partial x^j}. \tag{2.10}$$

Tedy obecně, Ricciho tenzor obecně nemusí být symetrický, a to ani pro symetrickou konexi. Snadno ověříme následující:

Lemma 2.24 *Ricciho tenzor splňuje* [60, str. 14]

$$Ric(Z, Y) - Ric(Y, Z) = \mathrm{Tr}\, R(Y, Z).$$

Označme jako

$$\psi_i = \sum_s \Gamma^s_{is} \tag{2.11}$$

funkce (vlastně „stopy”), které se vyskytují ve vztahu (2.10). Protože funkce Γ^i_{jk} nejsou složkami tenzoru, ani funkce ψ_i se při změně lokálních souřadnic netransformují jako složky tenzoru, konkrétně 1-formy, ale jejich užitečnost v dalším a jejich roli vysvětluje následující:

Lemma 2.25 (Lokální nutná a postačující podmínka pro symetričnost tenzoru *Ric*) *Na* (M, ∇) *jsou následující podminky ekvivalentní:*

(i) Ricciho tenzor Ric je symetrický na M*.*

(ii) Tenzor křivosti R *je „bezestopý”, tedy má nulovou stopu,* $\operatorname{Tr} R = 0$.

(iii) V každém souřadnicovém okolí splňují komponenty konexe vztahy:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \psi_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \Gamma^s_{is}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^s_{js}}{\partial x^i} = 0, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.12}$$

Poznámka 2.26 Rovnice (2.12) říkají, že funkce ψ_i jsou na pevném souřadnicovém okolí složkami „gradientu”: na souřadnicovém okolí, tj. oboru U dané mapy, existuje funkce f^U taková, že $\psi_i = \sum_s \Gamma^s_{is} = \frac{\partial f^U}{\partial x^i}$ pro $i = 1, \ldots, n$. Tedy jestliže definujeme 1-formu (pouze) na U vztahem $\psi^U = \sum_i \psi_i dx_i = \Gamma^s_{is} dx^i$, pak platí $\psi^U = df^U$. Splnění vztahů (2.12) je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby forma ψ^U byla na U uzavřená, $d\psi^U = d^2 f^U = 0$.

Symetrie Ricciho tenzoru je úzce spjatá s pojmem paralelního elementu objemu. Řekneme, že varieta (M, ∇) s dimenzí $\dim M = n$ je *lokálně ekviafinní*, nebo že *zachovává objemy*, jestliže lokálně, v okolí libovolného bodu $x \in M$, existuje všude nenulová a kovariantně konstantní n-forma ω, tj. $\nabla \omega = 0$. Jestliže tomu tak je, formě ω říkáme (lokální) *element objemu*. Platí následující, [60]:

Lemma 2.27 *Varieta* (M, ∇) *s* $T \equiv 0$ *je lokálně ekviafinní, právě když Ricciho tenzor je symetrický.*

(M, ∇) se symetrickou konexí je *ekviafinní*, jestliže pro ni globálně existuje paralelní element objemu. Jestliže M je jednoduše souvislá a (M, ∇) je lokálně ekviafinní, pak (M, ∇) je ekviafinní [60, str. 15]. Tedy symetrická lineární konexe s bezestopým tenzorem křivosti na jednoduše souvislé varietě je ekviafinní. Ekvivalentně, konexe se symetrickým Ricciho tenzorem *Ric* na jednoduše souvislé varietě je ekviafinní.

Pseudo-Riemannovy variety se symetrickým Ricciho tenzorem, pro které je Ricciho tenzor úměrný metrickému tenzoru ($Ric = \lambda g$) jsou tzv. *Einsteinovy prostory*, [49, str. 263], [67], [72]. V Einsteinově obecné teorii relativity jsou významné Lorentzovy typy (rovnice Einsteinova prostoru je dynamická rovnice popisující, jaký význam mají změny geometrie časoprostoru; ve vakuu je toto dáno podmínkou $Ric = 0$). Koeficient úměrnosti je možné spočítat takto $\lambda = \frac{1}{n}\varrho$, proto pro Einsteinovy prostory platí:

$$Ric = \frac{1}{n}\varrho g. \tag{2.13}$$

2.10 Geodetické křivky

Nyní se zaměříme na speciální typ parametrizovaných křivek definovaných na varietách s lineární konexí, které jsou zobecněním přímek eukleidovského prostoru.

Definice 2.28 Regulární hladké parametrizované křivce $\gamma(s)\colon I \to M$ na varietě (M, ∇) s lineární konexí budeme říkat *geodetická dráha* lineární konexe, jestliže tečné vektorové pole $\frac{d\gamma}{ds}$ je podél křivky γ paralelní. Někdy se jí též říká *kanonicky parametrizovaná geodetika.*

Je tedy γ geodetická dráha právě tehdy, když je splněna rovnice:

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{ds}} \frac{d\gamma}{ds} = 0, \qquad \forall s \in I. \tag{2.14}$$

Ekvivalentně to znamená, že v každém oboru lokálních souřadnic $U(x^1, \ldots, x^n)$ příslušné složky křivky vyhovují soustavě obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(\gamma) \frac{(x^i \circ \gamma)}{ds} \frac{(x^j \circ \gamma)}{ds} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n$$

nebo stručně

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{2.15}$$

Je-li $\gamma(s)$ geodetická dráha, je i $\gamma(as + b)$ (pro reálná a, b) geodetická dráha, tedy geodetičnost dráhy se nemění lineární reparametrizací. Geometrickému obrazu geodetické dráhy zde budeme říkat *geodetika.*

Poznamenejme, že pro některé úvahy je vhodnější užít obecnější definici, [56], a za geodetické považovat dráhy $\gamma(t)$ splňující pro jistou funkci $\theta(t)$ (definovanou na intervalu I) podmínku

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = \theta(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt}, \qquad \forall t \in I, \tag{2.16}$$

jinak řečeno, předpokládá se, že tečné vektorové pole je podle křivky rekurentní, nikoliv paralelní (naznačili jsme to označením parametru). V tomto případě se někdy též užívá názvu *pregeodetika*, nebo *neparametrizovaná geodetika*, aby se zdůraznilo, že parametr nemusí být kanonický.

My vystačíme s definicí, kterou jsme původně zavedli výše.

Z vět o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic vyplývají následující geometrické důsledky.

Věta 2.29 [39] *Nechť Γ_{ij}^k jsou hladké funkce proměnných $x^1, \dots, x^n$ definované v oboru $V \subset \boldsymbol{R}^n$, s_0 reálné číslo a $(x_0^1, \dots, x_0^n) \in V$, $(v^1, \dots, v^n) \in \boldsymbol{R}^n$ n-tice čísel. Pak v libovolně malém intervalu $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ existuje právě jedno řešení $(x^1(s), \dots, x^n(s))$ výše zmíněné soustavy, splňující počáteční podmínky*

$$x^k(s_0) = x_0^k, \quad \frac{dx^k}{ds}(s_0) = v^k, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Geometričtěji:

Věta 2.30 [39] *Nechť (M, ∇) je varieta s afinní konexí a $U(x^1, \dots, x^n)$ souřadnicový obor na M. Zvolme $s_0 \in \boldsymbol{R}$, bod $p \in U$ a nenulový tečný vektor $w \in T_pM$. Pak v libovolně malém intervalu $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ existuje právě jedna geodetická dráha $\gamma(s)$ ležící v U a splňující počáteční podmínky*

$$\gamma(s_0) = p, \qquad \frac{d\gamma(s_0)}{ds} = w.$$

Geodetickou dráhu $\gamma(s)$ variety (M, ∇) definovanou na intervalu I nazveme *maximální*, jestliže její definiční obor nemůžeme rozšířit na větší interval $J \neq I$, kde $I \subset J$.

Věta 2.31 [39, str. 57] *Nechť (M, ∇) je varieta s afinní konexí. Nechť $p \in M$ a $w \in T_pM$. Pak existuje jediná maximální geodetická dráha $\gamma\colon I \to M$ definovaná na otevřeném intervalu $I \ni 0$ taková, že $\gamma(0) = p$ a má v 0 předepsaný počáteční tečný vektor, $\gamma'(0) = w$.*

Jako důsledek získáme: Ke každému směru $[w]$ v tečném prostoru T_pM $(w \in T_pM)$ existuje jediná maximální geodetika, která se ho dotýká [36, str. 102].

S užitím pojmu geodetické křivky nyní názorně uvedeme interpretaci tenzorů torze a křivosti na varietě s afinní konexí. Máme dánu varietu s konexí a v jejím bodě p jsou dány dva nekolineární tečné vektory u, v. Dále je dáno kladné číslo s_0 a $s \in \langle 0, s_0)$. Nyní zkonstruujeme geodetický rovnoběžník. Nejprve sestrojíme geodetickou křivku γ_u ve směru vektoru u a ukončíme ji v bodě $\gamma_u(s)$. Oba dané vektory paralelně přeneseme podél této křivky do koncového bodu. Nyní sestrojíme křivku γ_v ve směru již přeneseného vektoru v a ukončíme ji v bodě $\gamma_v(s)$. Do tohoto koncového bodu opět paralelně přeneseme již jednou přenesené vektory u, v. Třetí křivkou bude geodetika γ_{-u} ve směru vektoru $-u$. Její koncový bod je $\gamma_{-u}(s)$. Do něj znovu přeneseme vektory u, v. Poslední křivkou bude geodetika γ_{-v} s koncovým bodem $\gamma_{-v}(s)$. Hodnotu tenzoru torze $T(u, v)$ pak můžeme interpretovat jako míru „neuzavřenosti" výsledného geodetického rovnoběžníka. Je-li neuzavřený, pak torze je nenulová a naopak, je-li uzavřený, torze je nulová.

Vezmeme-li nyní třetí tečný vektor w a budeme-li ho přenášet podél uzavřené křivky výše popsané čtyřmi geodetickými křivkami, pak hodnotou tenzoru křivosti $R(u, v)w$ je vektor, který je rozdílem mezi koncovou a počáteční polohou vektoru v základním bodě při paralelním přenosu vektoru w podél již zmíněné uzavřené křivky.

Další užitečný pojem, který je možno zavést s pomocí geodetik, je exponenciální zobrazení, které převádí přímky jdoucí dotykovým bodem p v tečném prostoru T_pM do geodetik na varietě M procházejících zvoleným bodem T_pM, [62], [39]. Uvažujme tedy na varietě M pevný bod p. Označme jako D_p podmnožinu těch vektorů tečného prostoru T_pM, pro který je příslušná maximální geodetická dráha určená bodem p a tímto vektorem definována na intervalu obsahujícím alespoň $\langle 0, 1\rangle$ (předpokládáme tedy počáteční hodnoty $\gamma(0) = p$ a $\gamma'(0) = v$, startujeme v čase 0 rychlostí v). *Exponenciální zobrazení při bodu p* je zobrazení

$$\exp_p : D_p \to M, \qquad \exp_p(v) = \gamma_v(1) \ \text{ pro všechny vekory } \quad v \in D_p,$$

tedy vektoru přiřadíme bod, do kterého po příslušné geodetice dorazíme v čase 1. Lze ukázat [62, str. 71], že pro každý bod $p \in M$ existuje okolí V nulového vektoru 0 z T_pM, na němž je exponenciální zobrazení $\exp_p$ difeomorfismem na jisté okolí U bodu p variety M.

Za normální okolí nulového vektoru 0 v T_pM na varietě s afinní konexí budeme považovat otevřené okolí N_0, které je hvězdicovité vzhledem k počátku [39, str. 62] a $\exp_p$ difeomorfismem na jisté okolí N_p bodu p; příslušný obraz N_p se nazývá *normální okolí bodu* $p \in M$.

2.11 Pseudo-Riemannovy a Riemannovy variety

Připomeňme, že (zobecněný) skalární součin je nedegenerovaná symetrická bilineární forma na (netriviálním) reálném vektorovém prostoru konečné dimenze. *Indexem* symetrické bilineární formy se rozumí dimenze maximálního podprostoru, na němž je zúžení formy negativně definitní. Pro skalární součin v užším smyslu se ještě předpokládá, že odpovídající kvadratická forma je pozitivně definitní (a tedy indexu 0). Nejdůležitějším příkladem je přirozený (standardní) skalární součin na $\mathbf{R}^n$, pro který $u \cdot v = \langle u, v \rangle = \sum u^i v^i$. Pokud skalární součin pozitivně definitní není, přenáší se na něj mnoho vlastností pozitivně definitního součinu, [62, str. 47], např. existence ortonormální báze, vzhledem k níž je pak matice skalárního součinu diagonální (a počet záporných znamének na diagonále je roven indexu), ale objevují se i zcela nové rysy (např. existují degenerované podprostory, tj. všechny vektory kolmé k danému podprostoru už nemusí tvořit podprostor k němu komplementární, apod.). Prostorům $\mathbf{R}^n$ vybaveným skalárním součinem indexu aspoň 1 říkáme *pseudo-eukleidovské*. Speciálně prostor $\mathbf{R}^n$ se součinem $u \cdot v = -u^1 v^1 + \sum_2^n u^i v^i$ se nazývá *Minkovského* n-prostor, pro $n = 4$ dostáváme nejjednodušší případ relativistického prostoročasu.

Geometrie eukleidovského prostoru $\mathbf{R}^3$, nebo obecněji $\mathbf{R}^n$, je založena do značné míry právě na jeho přirozeném skalárním součinu. Užijeme-li přirozeného izomorfismu $T_p(\mathbf{R}^n) \approx \mathbf{R}^n$, $p \in \mathbf{R}^n$, přeneseme skalární součin na všechny tečné prostory v jednotlivých bodech. Pak máme možnost měřit např. délky a odchylky vektorů.

V pracích K. F. Gausse (kolem r. 1827) je vyložena vnitřní geometrie ploch vnořených do $\mathbf{R}^3$ odvozená pouze ze skalárního součinu a jeho zúžení na jednotlivé tečné prostory (první základní forma plochy).

Kolem r. 1854 si B. Riemann uvědomil, jak využít předchozí speciální případy, aby se dala zavést geometrie na libovolné n-dimenzionální varietě: zhruba řečeno, na každém tečném prostoru je třeba mít k dispozici skalární součin.

Pod vlivem Einsteinovy obecné teorie relativity (kolem r. 1915) došlo k dalšímu zobecnění, spíše technickému, ale s dalekosáhlými důsledky: podmínka pozitivní definitnosti skalárního součinu byla oslabena na nedegenerovanost.

Definice 2.32 *Pseudo-Riemannova metrika* na hladké varietě M je hladké tenzorové pole g typu $(0,2)$ takové, že pro každý bod $p \in M$ je příslušná bilineární forma g_p definovaná na tečném prostoru T_pM symetrická, nedegenerovaná a má konstantní index. Pokud je g_p také pozitivně definitní pro všechny body p, je g *Riemannova metrika.*

Pomocí metrického tenzoru můžeme počítat normu (délku) tečného vektoru, odchylku dvou křivek, dále zavádíme pojem délka (geometrického obrazu) křivky na varietě (M,g). Na úseku mezi body $P=\gamma(a)$ a $Q=\gamma(b)$ křivky γ, $a,b \in I$, je délka dána jako Riemannův integrál $\int_b^a \sqrt{g(\dot\gamma,\dot\gamma)}\,dt$. Tento výraz nezávisí na parametrizaci křivky.

Definice 2.33 Diferencovatelná varieta M spolu s pseudo-Riemannovou metrikou (Riemannovou metrikou) g, tedy dvojice (M,g), se nazývá *pseudo-Riemannova varieta (Riemannova varieta).*

Poznamenejme, že pro fyzikální aplikace jsou důležité tzv. *Lorentzovské* variety, které mají index 1 (a dimenzi $n \geq 2$).

My se dále zaměříme většinou na Riemannovy variety.

Jedním z nejjednodušších příkladů Riemannovy variety je *eukleidovská Riemannova varieta* $\mathbf{R}^n$. Ztotožníme tečný prostor $T_p(\mathbf{R}^n)$ v bodě p s původním prostorem $\mathbf{R}^n$ pomocí zobrazení

$$(p_1,\ldots,p_n,v^1,\ldots,v^n) \mapsto (v^1,\ldots,v^n).$$

Pro dvě vektorová pole $X=\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $Y=\sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial u^j}$ na $\mathbf{R}^n$ pak definujeme metrický tenzor g (typu $(0,2)$) pomocí přirozeného skalárního součinu

$$g(X,Y) :\, = \sum_{i=1}^n X^i Y^i. \tag{2.17}$$

Věta 2.34 [39] *Nechť g je libovolná pseudo-Riemannova metrika na varietě M a nechť $U(x^1,\ldots,x^n)$ je obor lokálních souřadnic. Pak můžeme metriku g vyjádřit v lokálních souřadnicích takto:*

$$g = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j, \tag{2.18}$$

kde $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$, *popř. duálně jako* $g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Důkaz. [39], [62, str. 55] Důkaz je zřejmý po dosazení dvojic souřadnicových vektorových polí $\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}$ do obou stran vzorce a využití symetričnosti metriky g.

Je-li $M \subset \mathbf{R}^n$ m-rozměrná hladká vlastní (vnořená) podvarieta eukleidovského prostoru, lze na M přenést, zúžit Riemannovu metriku, tedy zavést *indukovanou metriku* g takto: máme dán bod $p \in M$ a dva tečné vektory $u, v \in T_pM$, pak vektory u, v lze pokládat za tečné vektory z $T_p(\mathbf{R}^n)$ a můžeme definovat

$$g_p(u, v) = \langle u, v \rangle$$

kde lomené závorky $\langle\,,\,\rangle$ značí přirozený skalární součin.

2.12 Riemannova konexe

Jestliže je dáno (M, ∇) a víme, že g je nějaká metrika na M, pro kterou platí $\nabla g = 0$, říkáme, že konexe ∇ a metrika g jsou *vzájemně kompatibilní.* Podmínka $\nabla g = 0$ má v lokálních souřadnicích tvar $g_{ij;k} = 0$, kde „;" značí příslušné kovariantní derivování vzhledem k dané konexi. Pokud je daná konexe kompatibilní s metrikou navíc symetrická, říkáme jí *metrická konexe.*

Připomeňme, že uvedená terminologie úzce souvisí s tzv. základní větou Riemannovy geometrie:

Věta 2.35 [39] *Nechť* (M, g) *je pseudo-Riemannova varieta. Pak na* M *existuje právě jedna afinní konexe* ∇ *s vlastnostmi:*

1. ∇ *má nulovou torzi;*

2. *skalární součin vektorů vzhledem ke* g *se zachovává při všech paralelních přenosech vzhledem k* ∇ *podél všech křivek, ekvivalentně* $\nabla g = 0$.

Afinní konexe určená touto větou se nazývá *Riemannova konexe* (někdy též *Levi-Civitova konexe*) pseudo-Riemannovy variety (M, g). Riemannova konexe na Riemannově varietě je právě jediná s metrikou kompatibilní lineární konexe, která je symetrická.

Někdy se Levi-Civitovou konexí míní spíše konexe příslušná indukované metrice na vnořené podvarietě.

Důsledkem předchozí věty je, že na každé pseudo-Riemannově varietě lze zavést paralelní přenos vektorů a geodetické křivky. Pro Riemannovu konexi platí, že se při paralelním přenosu zachovávají délky přenesených vektorů.

K důkazu je potřeba uvést následující lemma.

Lemma 2.36 [39] *Nechť M je hladká varieta, g pseudo-Riemannova metrika a ∇ afinní konexe na této varietě. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *pro každou regulární křivku $\gamma\colon I \to M$ a každou dvojici paralelních vektorových funkcí X_γ, Y_γ podél křivky platí, že $g(X_\gamma, Y_\gamma) = konst.$;*

2. *pro trojici libovolných vektorových polí X, Y, Z platí: $Z(g(X,Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$ (jiná formulace: $\nabla g = 0$).*

Důkazy předchozí věty a lemmatu jsou uvedeny v [39, str. 75].

Složky Riemannovy konexe ∇ (Christoffelovy symboly) pseudo-Riemannovy variety (M, g) můžeme v soustavě lokálních souřadnic $(x^1, \ldots, x^n)$ vyjádřit vzorcem:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} g^{il} \left(g_{kl,j} - g_{jl,k} + g_{jk,l} \right), \tag{2.19}$$

kde jsme pro parciální derivace $\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}$ použili zkráceného značení $g_{kl,j}$.

Věta 2.37 [39] *Nechť $\Phi\colon (M,g) \to (N,h)$ je izometrie pseudo-Riemannových variet. Potom obrazem Riemannovy konexe ∇^M v tomto zobrazení je konexe ∇^N. Platí také, že obraz paralelní vektorové funkce podél křivky γ v M je paralelní vektorová funkce podél křivky $\Phi \circ \gamma$ v N. Je-li křivka geodetikou v (M,g), pak jejím obrazem je geodetika v (N,h).*

Důkaz. Viz [39].

Pokud chceme spočítat komponenty kovariantní derivace metrického tenzoru ∇g, použijeme vzorec:

$$(\nabla g)_{ijk} = g_{ij;k} = g_{ij,k} - \Gamma^l_{ik} g_{lj} - \Gamma^l_{jk} g_{il}. \tag{2.20}$$

Při použití kovariantní derivace lze základní větu Riemannovy geometrie uvést takto:

Na každé pseudo-Riemannově varietě (M, g) existuje právě jedna symetrická afinní konexe ∇ taková, že $\nabla g = 0$.

Některé vlastnosti tenzoru křivosti R (pseudo-)Riemannovy variety jsou uvedeny v následující větě.

Věta 2.38 *Nechť R je tenzorové pole křivosti pseudo-Riemannovy variety (M, g). Pak platí:*

1. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$;
2. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(první Bianchiho identita);*
3. $g(R(X,Y)Z,U) = g(R(Z,U)X,Y)$.

Důkaz. První vlastnost již byla zmiňována. K důkazu druhé vlastnosti použijeme nulovost torze vyjádřenou takto:

$$\nabla_U V - \nabla_V U = [U,V]\,.$$

Z definice tenzoru křivosti dostaneme:

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = [\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X]\,Z + [\nabla_Y\nabla_Z - \nabla_Z\nabla_Y]\,X +$$

$$+ [\nabla_Z\nabla_X - \nabla_X\nabla_Z]\,Y - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y = \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) +$$

$$+\nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y - \nabla_{[X,Y]}Z =$$

$$= (\nabla_X[Y,Z] - \nabla_{[Y,Z]}X) + (\nabla_Y[Z,X] - \nabla_{[Z,X]}Y) + (\nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z) =$$

$$= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

Pro důkaz třetí vlastnosti užijeme vzorec:

$$Ug(V,W) = g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_U W).$$

Po dosazení získáme:

$$g(R(X,Y)Z,U) = g(\nabla_X\nabla_Y Z, U) - g(\nabla_Y\nabla_X Z, U) - g(\nabla_{[X,Y]}Z, U) =$$

$$= (Xg(\nabla_Y Z, U) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X U)) - (Yg(\nabla_X Z, U) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y U)) -$$

$$-([X,Y]g(Z,U)-g(Z,\nabla_{[X,Y]}U)) = X[Yg(Z,U)-g(Z,\nabla_Y U)]-Y[Xg(Z,U)-g(Z,\nabla_X U)]-$$

$$-[X,Y]g(Z,U) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X U) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y U) + g(Z, \nabla_{[X,Y]}U) =$$

$$= [-Xg(Z,\nabla_Y U) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y U)] + [Yg(Z,\nabla_X U) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X U)] + g(Z, \nabla_{[X,Y]}U) =$$

$$= -g(Z, \nabla_X \nabla_Y U) + g(Z, \nabla_Y \nabla_X U) + g(Z, \nabla_{[X,Y]}U) = -g(Z, R(X,Y)U).$$

Tím obdržíme

$$g(R(X,Y)Z,U) + g(R(X,Y)U,Z) = 0.$$

Nyní zavedeme označení:

$$S(X,Y,Z,U) = g(R(X,Y)Z,U) + g(R(Y,Z)X,U) + g(R(Z,X)Y,U).$$

Podle druhé vlastnosti z dokazované věty je tenzor S nulový. Můžeme tedy přímo zjistit, že

$$S(X,Y,Z,U) - S(Y,Z,U,X) - S(Z,U,X,Y) + S(U,X,Y,Z) =$$

$$2g(R(U,X)Y,Z) + 2g(R(Y,Z)X,U).$$

Protože je levá strana rovna nule, je také pravá strana rovna nule. Z vlastnosti první pak získáme

$$g(R(X,U)Y,Z) = g(R(Y,Z)X,U),$$

což je právě třetí dokazovaná vlastnost.

2.13 Rekurentnost tenzorových polí

V této podkapitole ještě zmíníme rekurentnost tenzorových polí, což budeme potřebovat v následujících kapitolách o metrizovatelnosti. Čerpali jsem z článku [82].

Nenulové tenzorové pole A na M je *rekurentní*, jestliže existuje 1-forma ω taková, že

$$\nabla A = \omega \otimes A. \tag{2.21}$$

Lemma 2.39 *Nechť tenzorové pole A typu (r,s) na (M,∇) je rekurentní; $\nabla A = \omega \otimes A$ pro 1-formu. Nechť A je nenulové na M. Pak 1-forma ω je uzavřená.*

Důkaz. Rekurentnost znamená, že pro libovolná vektorová pole $Y_1, \dots, Y_s$ a 1-formy $\omega^1, \dots, \omega^r$ na M, platí

$$(\nabla_X A)(Y_1, \dots, Y_s, \omega^1, \dots, \omega^r) = \omega(X) \cdot A(Y_1, \dots, Y_s, \omega^1, \dots, \omega^r).$$

Nechť v lokálních souřadnicích při bodu $p \in M$ je $\omega = \omega_k \, dx^k$. Označme $\nabla_k = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}$. Pak $\nabla_k A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \omega_k \cdot A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ pro $k = 1, \dots, n$; $n = \dim M$. Nechť jistá komponenta $A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ (pro pevné indexy) je nenulová v p a díky spojitosti také v jistém okolí U bodu p (opět ze spojitosti, komponenta je buď kladná, nebo záporná na nějakém okolí bodu). Pak komponenty 1-formy můžeme vyjádřit v U jako

$$\omega_k = \frac{1}{F^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}} \cdot \nabla_k F^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \nabla_k \left(\ln |F^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}|\right) = \frac{\partial}{\partial x^k} (\ln |F^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}|), \ k = 1, \dots, n.$$

Tedy, v okolí bodu $p \in M$ je $\omega = d(\ln |A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}|)$; tj. ω je lokálně exaktní a $d\omega = d(df) = 0$.

Lemma 2.40 *Nechť A je tenzorové pole typu (r, s) na (M, ∇). Nechť $\alpha \in \mathcal{F}(M)$ je nenulová reálná funkce; $\alpha(x) \neq 0$ pro $x \in M$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *$\alpha \otimes A$ je paralelní vzhledem ke konexi ∇,*
2. *$\nabla A = d(-\ln |\alpha|) \otimes A$.*

Důkaz. Z $\nabla(\alpha \otimes A) = (\nabla\alpha) \otimes A + \alpha \otimes (\nabla A)$ a $\alpha \neq 0$ máme $\nabla(\alpha \otimes A) = 0$ právě tehdy, když $\nabla A = -(\frac{1}{\alpha} \cdot \nabla\alpha) \otimes A = -d(\ln |\alpha|) \otimes A$. Proto $\alpha \otimes A$ je paralelní tehdy a jen tehdy, když $\nabla A = df \otimes A$, kde $f = -\ln |\alpha|$.

Lemma 2.41 *Jestliže tenzorové pole A typu (r, s) na (M, ∇) je rekurentní, $\nabla A = \omega \otimes A$, a 1-forma je exaktní, $\omega = df$, pak jistý násobek pole A, konkrétně $e^{-f} \otimes A$, je paralelní vzhledem k ∇.*

Důkaz. Jestliže $\nabla A = df \otimes A$ označíme $\alpha = e^{-f}$, pak $f = -\ln \alpha$ a $\nabla(\alpha \otimes A) = d\alpha \otimes A + \alpha \cdot d(-\ln \alpha) \otimes A = d\alpha \otimes A + \alpha \cdot (-\frac{1}{\alpha}) \cdot d\alpha \otimes A = 0$. Proto $\alpha \otimes A = e^{-f} \otimes A$ je paralelní.

3 Metrizovatelnost

Tato kapitola se již zabývá metrizací lineárních konexí a byla čerpána z [82] a [84]. Problém metrizace lineárních konexí je problém najít nutnou a postačující podmínku pro danou symetrickou konexi na n-dimenzionální varietě (hladké nebo analytické) tak, aby byla Riemannovou (Levi-Civitovou) konexí nějaké metriky. Můžeme požadovat, aby metrika byla klasicky Riemannovská (tj. pozitivně definitní) nebo pseudo-Riemannovská (tj. nedegenerovaná).

V příznivém případě řešení tohoto problému metrizace existuje. Záleží i na dimenzi n variety; pouze případ pro $n = 2$ je jednoduchý.

Základní věta Riemannovy geometrie uvádí, že každá pseudo-Riemannova varieta (M, g) má jedinou lineární konexi $\tilde{\nabla}$, nazvanou Riemannova (nebo Levi-Civitova) konexe, nebo metrická konexe, charakterizovanou párem podmínek $T \equiv 0$, $\tilde{\nabla} g = 0$ (paralelní přenos podél křivky vzhledem k $\tilde{\nabla}$ zachovává skalární součin tečných vektorů definovaných pomocí g). Na (M, g), komponenty Γ^i_{jk} Levi-Civitovy konexe souvisejí s komponentami g_{ij} metriky známým vzorcem

$$\Gamma^\ell_{ik} = \frac{1}{2} g^{\ell j} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \right).$$

Naopak, je-li dána varieta s lineární konexí (M, ∇), můžeme se zajímat o metriky, se kterými je daná konexe kompatibilní. Jestliže je ∇ bez torze, znamená to najít metriku g na M takovou, že ∇ je právě Levi-Civitova konexe (M, g). Říkáme, že varieta (M, ∇) se symetrickou konexí je *(lokálně) metrizovatelná*, jestliže (lokálně) existuje metrika kompatibilní s konexí.

V podstatě stejný problém může být formulován ekvivalentním způsobem takto: *Jestliže je dána* (M, ∇)*, nalezněte všechna geodetická zobrazení (tj. difeomorfismy, které zobrazí geodetiky na obecně parametrizované geodetiky)* (M, ∇) *na (všechny možné) pseudo-Riemannovy variety* $(\bar{M}, g)$ (díky difeomorfismu, můžeme předpokládat $\bar{M} = M$).

V lokálních souřadnicích má rovnice $\nabla g = 0$ tento tvar:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{sj} \Gamma^s_{ik} + g_{is} \Gamma^s_{jk}. \tag{3.1}$$

Vyřešit otázku (lokální) metrizovatelnosti konexe vlastně znamená vyřešit soustavu (3.1), což lze v jednoduchých případech provést přímo. Použitím křivosti může být nutná podmínka integrability pro metrizovatelnost dána ve formě nekonečného systému lineárních rovnic $\frac{1}{2}n(n+1)$ funkcí g_{ij} (s koeficienty, které jsou funkcemi Γ a jejich parciálních derivací), [19]; bez použití souřadnic mají tento tvar:

$$g(R(X,Y)Z,W) + g(Z,R(X,Y)W) = 0, \tag{3.2}$$

$$g(\nabla^r R(X,Y;Z_1;\ldots;Z_r)(Z),W) + g(Z,\nabla^r R(X,Y;Z_1;\ldots;Z_r)(W)) = 0, \tag{3.3}$$

pro každé $X,Y,Z,W,Z_1,\ldots,Z_r \in \mathcal{X}(M)$, $1 \leq r < \infty$. Aby metrika existovala, musí mít soustava (3.2), (3.3) netriviální řešení, tj. musí mít alespoň 1-dimenzionální prostor řešení (nad okruhem $\mathcal{F}(M)$ hladkých funkcí); výše zmíněné lineární podmínky musí platit pro nějaké celé číslo r.

Obecně platí $0 \leq \operatorname{hodnost}(g_{ij}) \leq n$. Může se stát, že maximum q hodností ze všech možných řešení soustavy (3.2)-(3.3) je menší než n; pokud se to stane, pak (M,∇) je nemetrizovatelná (dokonce by mohl nastat případ $q=0$). Existují nemetrizovatelné n-dimenzionální variety s lineární konexí pro $n \geq 2$. Ve skutečnosti existuje více nemetrizovatelných (M,∇) než metrizovatelných. Problém existence kompatibilních metrik byl zkoumán různými autory, např. [23], [28] ($n=2$), [29], [30] ($n=4$), [48, str. 75] ($n=2$) atd., a byly použity různé metody. Pro 2-variety byl problém metrizace vyřešen např. v [10], [73], [76].

Pokud je tenzor křivosti nulový, pak je konexe určitě metrizovatelná.

Plochá konexe je vždy (globálně) metrizovatelná s $\frac{1}{2}n(n+1)$ - parametrickým prostorem řešení; dokonce může být vybrána signatura. Tedy věnujme pozornost situaci, kdy tenzor křivosti (nebo ekvivalentně, tenzor Ricci) je nenulový v bodě $x_0 \in M$ a díky spojitosti také v okolí bodu x_0.

Zřejmá podmínka existence nedegenerovaných kompatibilních metrik je, že soustava pro kovariantní derivace až do r-tého stupně by měla mít alespoň 1-dimenzionální prostor řešení. V kapitole 5 ukážeme, že někdy stačí vzít $r=1$.

Další nutná podmínka metrizovatelnosti plyne z následujícího:

Lemma 3.1 *Ricciho tenzor Levi-Civitovy konexe (pseudo-) Riemannovy variety* (M,g) *je vždy symetrický,* [16, str. 331].

Obecně nese Ricciho tenzor metriky nebo konexe méně informací než její tenzor křivosti. Jak uvidíme, výjimkou je dimenze 2, kde tenzor křivosti můžeme z Ricciho tenzoru plně rekonstruovat.

Na (M, g) je Ricciho tenzor typu $(1, 1)$ zaveden zvýšením indexu pomocí metriky, tedy v komponentách je $R^i_j = g^i_s R_{sj}$, a skalární křivost ϱ pak jako jeho stopa, tedy vychází $\varrho = \operatorname{Tr} Ric = R^s_s = g^{ij} R_{ij}$.

Všechny dvoudimenzionální pseudo-Riemannovy variety jsou Einsteinovy prostory, viz. [49, str. 263], [67, str. 101].

4 Přímá metoda

Soustavu $\nabla g = 0$ lze v jednoduchých případech řešit také přímo, což ukážeme na několika příkladech.

Příklad 4.1 [19]

Na varietě $\mathbf{R}^2(x^1, x^2)$ je dána symetrická lineární konexe ∇ s těmito jedinými nenulovými složkami:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = x^1 - x^2.$$

Nyní chceme zjistit, jestli je tato konexe metrizovatelná, tedy zda existuje symetrické tenzorové pole g typu $(0, 2)$ takové, že platí

$$\nabla g = 0, \quad \partial_k g_{ij} = g_{in}\Gamma^n_{jk} + g_{jn}\Gamma^n_{ik}.$$

Systém diferenciálních rovnic pro (hladké) funkce $g_{ij}(x^1, x^2)$, které jsou komponentami symetrické regulární funkcionální matice $G = (g_{ij})$, budeme řešit přímo:

$$\begin{aligned} \partial_1 g_{11} &= (x^1 - x^2)g_{11}, & \partial_2 g_{11} &= 0, \\ \partial_1 g_{12} &= 0, & \partial_2 g_{12} &= (x^1 - x^2)g_{12}, \\ \partial_1 g_{22} &= 0, & \partial_2 g_{22} &= (x^1 - x^2)g_{22}. \end{aligned}$$

Z první rovnice prvního řádku vidíme, že $g_{11}(x^1, x^2)$ závisí na obou proměnných. Druhá rovnice však ukazuje, že $g_{11}(x^1)$ nezávisí na x^2. Z prvních dvou rovnic tedy vyplývá, že $g_{11} = 0$. Tato úvaha je obdobná u dalších rovnic, a proto také $g_{12} = g_{21} = 0$ a $g_{22} = 0$.

Tím jsme zjistili, že jediné možné řešení soustavy je triviální,

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$g_{ij} = 0$ pro všechny indexy i, j. Tedy konexe není metrizovatelná.

Příklad 4.2 Na $\mathbf{R}^2(x^1, x^2)$ uvažujeme symetrickou lineární konexi ∇, jejíž jediné nenulové Christoffely jsou:

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1,$$

tedy při označení $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, 2$ je dána vztahy:

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_2} e_1 = e_2. \tag{4.1}$$

Poznamenejme, že podobně můžeme vztahem (4.1) definovat konexi v adaptované mapě na cylindru $\mathbf{R} \times S^1$ nebo na toru $T^2 = S^1 \times S^1$. Ptejme se, zda konexe vzniká z nějaké metriky.

Soustava odpovídající podmínce $\nabla g = 0$ má v tomto případě tvar:

$$\begin{aligned} \partial_1 g_{11} &= 0, & \partial_2 g_{11} &= 2g_{12}, \\ \partial_1 g_{12} &= g_{12}, & \partial_2 g_{12} &= g_{22}, \\ \partial_1 g_{22} &= 2g_{22}, & \partial_2 g_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Z posledních dvou rovnic je vidět, že funkce $g_{22} = c(x^2)e^{2x^1}$, kde $c(x^2)$ je funkce závislá na x^2, ale g_{22} na x^2 záviset nemůže. Tedy $c \in \mathbf{R}$ je konstanta a $g_{22} = ce^{2x^1}$.

Z rovnice $\partial_1 g_{12} = g_{12}$ dostaneme, že $g_{12} = b(x^2)e^{x^1}$. Do rovnice $\partial_2 g_{12} = g_{22}$ dosadíme za nám již známé g_{22} a g_{12}.

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(b(x^2) \cdot e^{x^1}\right) = ce^{2x^1}$$

Označíme si $\frac{\partial b}{\partial x^2} = b'(x^2)$. Musí tedy platit

$$b'(x^2) \cdot e^{x^1} = ce^{2x^1}.$$

Vynásobíme-li celou rovnici výrazem e^{-x^1}, pak získáme

$$b'(x^2) = ce^{x^1},$$

kde pravá strana rovnice je funkcí pouze x^1 a levá funkcí pouze x^2. To však může nastat jedině v případě, že $b'(x^2) = 0$ a $c = 0$. Z toho vyplývá, že $b(x^2)$ je konstantní funkce $b \in \mathbf{R}$. Navíc pro $c = 0$ dostaneme, že $g_{22} = 0$.

Nyní dosadíme do rovnice $\partial_2 g_{11} = 2g_{12}$ za $g_{12} = b \cdot e^{x^1}$, tedy pravá strana závisí na x^1. Toto porovnáme s první původní rovnicí $\partial_1 g_{11} = 0$. Z té plyne, že $g_{11}(x^2)$ závisí na x^2. To nám však ukazuje, že $b = 0$ a tím pádem také $g_{12} = 0$.

Pokud teď porovnáme první dvě rovnice $\partial_1 g_{11} = 0$ a $\partial_2 g_{11} = 0$ (po dosazení), pak g_{11} nemůže záviset ani na x^1 ani na x^2, tedy musí být konstantou $g_{11} = a \in \mathbf{R}$.

Napíšeme-li vše do matice

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $g_{11} = a \in \mathbf{R}$, vidíme, že konexe vzniká ze „skalárního součinu", který je singulární a degenerovaný. My však toto neuvažujeme. Tedy konexe není metrizovatelná.

Příklad 4.3 Na $\mathbf{R}^2(x^1, x^2)$ je dána symetrická lineární konexe ∇, která je dána těmito nenulovými Christoffelovými symboly:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = 1 \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 2.$$

Soustava PDR odpovídající $\nabla g = 0$ vypadá takto:

$$\begin{aligned} \partial_1 g_{11} &= g_{11}, & \partial_2 g_{11} &= 2g_{12}, \\ \partial_1 g_{12} &= 0, & \partial_2 g_{12} &= g_{11} + 2g_{22}, \\ \partial_1 g_{22} &= 2g_{22}, & \partial_2 g_{22} &= g_{12}. \end{aligned}$$

Z rovnice $\partial_1 g_{12} = 0$ vyplývá, že funkce g_{12} nezávisí na proměnné x^1. Z tohoto a z rovnice $\partial_2 g_{22} = g_{12}$ získáme, že také funkce g_{22} nezávisí na x^1. Zároveň z $\partial_1 g_{22} = 2g_{22}$ zjistíme, že $g_{22} = c(x^2) \cdot e^{2x^1}$. Z předchozího však vidíme, že na funkci e^{2x^1} záviset g_{22} nemůže, tedy celý koeficient se musí rovnat 0 a tím pádem je funkce $g_{22} = 0$. To ovšem znamená, že $\partial_2 g_{22} = 0$ a proto $g_{12} = g_{21} = 0$.

Po dosazení do rovnice $\partial_2 g_{12} = g_{11} + 2g_{22}$ za g_{12} a g_{22} vypočteme, že funkce $g_{11} = 0$.

Tedy soustava má pouze triviální řešení

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proto není tato konexe metrizovatelná.

Příklad 4.4 Symetrická lineární konexe ∇ na $\mathbf{R}^2(x^1, x^2)$ má tyto Christoffelovy symboly:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = 1, \quad \Gamma^k_{ij} = 0.$$

Soustava diferenciálních rovnic pro funkce $g_{ij}(x^1, x^2)$ má tvar:

$$\begin{aligned} \partial_1 g_{11} &= 2g_{11}, & \partial_2 g_{11} &= 0, \\ \partial_1 g_{12} &= g_{12}, & \partial_2 g_{12} &= g_{12}, \\ \partial_1 g_{22} &= 0, & \partial_2 g_{22} &= 2g_{22}. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic získáme g_{11}. První rovnice ukazuje, že $g_{11} = a(x^2) \cdot e^{2x^1}$, kde $a(x^2)$ je funkce závislá na proměnné x^2. Z druhé rovnice však vidíme, že g_{11} závisí pouze na proměnné x^1. Tedy $a \in \mathbf{R}$ musí být funkce konstantní a $g_{11} = a \cdot e^{2x^1}$.

Obdobným způsobem ze dvou posledních rovnic vypočítáme $g_{22} = b \cdot e^{2x^2}$, kde $b \in \mathbf{R}$ je konstanta.

Třetí rovnice $\partial_1 g_{12} = g_{12}$ udává, že $g_{12} = c_1(x^2) \cdot e^{x^1}$ a čtvrtá rovnice $\partial_2 g_{12} = g_{12}$ pak $g_{12} = c_2(x^1) \cdot e^{x^2}$. Když tyto dvě rovnice porovnáme, zjistíme, že $c_1(x^2) = c \cdot e^{x^2}$ a $c_2(x^1) = c \cdot e^{x^1}$. Tedy po dosazení do jedné z rovnic pro g_{12} získáme $g_{12} = c \cdot e^{x^1} \cdot e^{x^2} = c \cdot e^{x^1+x^2}$.

Matice $G = (g_{ij})$ má po dosazení tvar:

$$G = \begin{pmatrix} a \cdot e^{2x^1} & c \cdot e^{x^1+x^2} \\ c \cdot e^{x^1+x^2} & b \cdot e^{2x^2} \end{pmatrix},$$

kde $a, b, c \in \mathbf{R}$ jsou konstanty. Konexe je tedy metrizovatelná.

Při přímém výpočtu soustavy parciálních diferenciálních rovnic však není zřejmé, v čem je obstrukce metrizovatelnosti. Při použití tenzorových metod, kterými se zabýváme v dalších částech textu, lépe vidíme, co vlastně metrizovatelnosti konexe brání.

5 Metoda Eisenharta a Veblena

Ve dvacátých letech 20. století, L. P. Eisenhart a O. Veblen začali studovat geometrie, které vzniknou na C^ω n-varietě, když je dán systém geodetických drah („paths”); motivace pochází z gravitační teorie, trajektorie volného pádu jsou takovou soustavu křivek.

Autoři v [19] také zmiňují dřívější pokusy H. Weyla [80] a A.S. Eddingtona [18], kteří preferují „zobecnění Levi-Civitova způsobu infinitezimálního posunu před přirozenou myšlenkou drah”.

Klasický přístup má analytický charakter: diskutují se všechna možná řešení systému diferenciálních rovnic pro neznámé g_{ij}, který odpovídá podmínce $\nabla g = 0$. Podmínka má v lokálních souřadnicích tvar

$$g_{ij;k} = \tfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{sj}\Gamma^s_{ik} - g_{is}\Gamma^s_{jk} = 0, \tag{5.1}$$

tedy

$$\partial_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{sj}\Gamma^s_{ik} + g_{is}\Gamma^s_{jk}. \tag{5.2}$$

Hledáme nedegenerované metriky, proto předpokládáme $\det(g_{ij}) \neq 0$. Aplikování kovariantních derivací vyššího řádu a tenzorových metod dává podmínky integrability (podmínky nutné pro řešitelnost vzniklých parciálních diferenciálních rovnic) v následující formě nekonečného systému lineárních rovnic pro $\frac{1}{2}n(n+1)$ funkcí g_{ij}:

$$g_{sj}R^s_{ik\ell} + g_{is}R^s_{jk\ell} = 0, \tag{5.3}$$

$$g_{sj}R^s_{ik\ell;m_1;\ldots;m_r} + g_{is}R^s_{jk\ell;m_1;\ldots;m_r} = 0 \quad 1 \leq r, \tag{5.4}$$

kde R^i_{hjk} jsou komponenty tenzoru křivosti, viz kapitola 3. Dále již můžeme používat algebraické postupy.

Zřejmá nutná podmínka existence nedegenerovaných kompatibilních metrik je, že soustava pro kovariantní derivace až do r-tého řádu by měla mít alespoň 1-dimenzionální prostor řešení. Následující věta dává návod, jak postupovat v příznivých případech, kde stačí uvažovat pouze $r = 1$.

Věta 5.1 [19, str. 23] *Nechť je dána afinní varieta* (M, ∇) *s lokálními souřadnicemi* (x^i), *kde* ∇ *je symetrická konexe. Pokud soustava* (5.3) *připouští netriviální řešení* (g_{ij})

a všechny funkce prostoru řešení vyhovují také soustavě

$$g_{sj}R^s_{ik\ell;m} + g_{is}R^s_{jk\ell;m} = 0, \tag{5.5}$$

(tj. platí (5.4) *pro* $r = 1$*), pak* (g_{ij}) *lokálně definují kovariantně konstantní tenzorové pole* g *typu* $(0, 2)$*.*

Důkaz. Připomeňme si hlavní tvrzení použitá v důkazu, která poskytují metodu, jak najít kompatibilní metriku v konkrétních příkladech. Připusťme, že soustava (5.3) je řešitelná a že každé řešení (5.3) vyhovuje (5.4). Nechť $\langle G^{(1)}, \ldots, G^{(p)}\rangle$ je báze prostoru řešení. Libovolné řešení g může být psáno ve formě

$$g = \sum_{\alpha=1}^{p} \varphi^{(\alpha)} G^{(\alpha)}, \tag{5.6}$$

kde $\varphi^{(\alpha)}$ jsou funkce na M. Díky (5.5) platí $G^{(\alpha)}_{sj;m}R^s_{ik\ell} + G^{(\alpha)}_{is;m}R^s_{jk\ell} = 0$, $\alpha = 1, \ldots, p$. Proto kovariantní derivace $G^{\alpha}_{sj;m}$ také vyhovují (5.3), a tedy mohou být vyjádřeny pomocí generátorů (koeficienty jsme schopni spočítat jako řešení soustavy diferenciálních rovnic)

$$G^{(\alpha)}_{ij;k} = \sum_{\beta=1}^{p} \mu_k^{(\alpha\beta)} G^{(\beta)}_{ij}, \quad \alpha = 1, \ldots, p. \tag{5.7}$$

Protože druhé kovariantní derivace vyhovují tzv. Ricciho indentitě

$$G^{(\alpha)}_{ij;k\ell} - G^{(\alpha)}_{ij;\ell k} = G^{(\alpha)}_{sj} R^s_{ik\ell} + G^{(\alpha)}_{is} R^s_{jk\ell},$$

a pravá strana se anuluje pro $G^{(\alpha)}_{ij}$, dostaneme $G^{(\alpha)}_{ij;k\ell} - G^{(\alpha)}_{ij;\ell k} = 0$, a dále (po výpočtech)

$$\frac{\partial \mu_k^{(\alpha\beta)}}{\partial x^\ell} - \frac{\partial \mu_\ell^{(\alpha\beta)}}{\partial x^k} + \sum_{\gamma=1}^{p} \left(\mu_k^{(\alpha\gamma)} \mu_\ell^{(\gamma\beta)} - \mu_\ell^{(\alpha\gamma)} \mu_k^{(\gamma\beta)} \right) = 0. \tag{5.8}$$

Jestliže g z formule (5.6) má vyhovovat podmínce $\nabla g = 0$, pak φ musí vyhovovat rovnicím

$$\frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial x^k} + \sum_{\beta=1}^{p} \varphi^{(\beta)} \mu_k^{(\alpha\beta)} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, p, \quad k = 1, \ldots n, \tag{5.9}$$

ale podle (5.8), soustava (5.9) je úplně integrovatelná, proto existují funkce $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(p)}$, které pomocí (5.6) určují kompatibilní (pseudo-)Riemannovu metriku.

Důkaz věty 5.1 vlastně dává i návod, jak postupovat při řešení konkrétních příkladů. Jako důsledek výše zmíněných úvah dostáváme:

Věta 5.2 *Nechť* (M, ∇) *je varieta se symetrickou konexí a tenzorem křivosti* $R\,(R^i_{hjk})$. *Jestliže existuje nedegenerované řešení soustavy (5.3) a každé řešení systému (5.3) vyhovuje také rovnici (5.5), potom* ∇ *je lokálně metrizovatelná.*

Příklad 5.3 [79] Na varietě $(\mathbf{R}^2, \mathrm{id})$ s globálními souřadnicemi (x, y) je dána symetrická lineární konexe ∇, jejímiž jedinými nenulovými komponentami jsou

$$\Gamma^1_{11} = \frac{x}{x^2+1}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{y}{y^2+1}. \tag{5.10}$$

Tenzor křivosti je všude nulový, $R = 0$, konexe je plochá, a tedy je jistě metrizovatelná, a soustava podmínek integrability, tedy rovnic k řešení, je prázdná. Nicméně na procvičení, abychom demonstrovali předchozí metodu, najdeme všechny příslušné metriky touto cestou. Prostor řešení může být např. generován nezávislými globálně analytickými symetrickými tenzorovými poli typu $(0,2)$ $G^{(1)} = dx \otimes dx$, $G^{(2)} = dy \otimes dy$, $G^{(3)} = dx \otimes dy + dy \otimes dx$. Jejich kovariantní derivace, které musí vyhovovat soustavě (5.3), mohou být vyjádřeny jako kombinace generátorů, s koeficienty, které jsou nejvýše funkcemi v x. Dostaneme

$$G^{(1)}_{ij;1} = -\frac{2x}{x^2+1} G^{(1)}_{ij}, \quad G^{(1)}_{ij;2} = G^{(2)}_{ij;1} = 0,$$

$$G^{(2)}_{ij;1} = -\frac{2y}{y^2+1} G^{(2)}_{ij}, \quad G^{(3)}_{ij;1} = -\frac{x}{x^2+1} G^{(3)}_{ij}, \quad G^{(3)}_{ij;2} = -\frac{y}{y^2+1} G^{(3)}_{ij}.$$

Proto

$$\mu^{(11)}_1 = -\frac{2x}{x^2+1}, \quad \mu^{(22)}_2 = -\frac{2y}{y^2+1}, \quad \mu^{(33)}_1 = -\frac{x}{x^2+1}, \quad \mu^{(33)}_2 = -\frac{y}{y^2+1}$$

jsou nenulové koeficienty a všechny kompatibilní metriky jsou ve tvaru $g = \varphi^{(1)} G^{(1)} + \varphi^{(2)} G^{(2)} + \varphi^{(3)} G^{(3)}$, kde funkce φ řeší systém

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+1}\varphi^{(1)}, & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x} = 0, & \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x} = \frac{x}{x^2+1}\varphi^{(3)}, \\ \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} = 0, & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial y} = \frac{2y}{y^2+1}\varphi^{(2)}, & \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial y} = \frac{y}{y^2+1}\varphi^{(3)}; \end{array}$$

získáme $\varphi^{(1)} = 2(x^2+1), \varphi^{(2)} = 2(y^2+1), \varphi^{(3)} = 2\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}$. Všechny kompatibilní metriky g jsou popsány v řeči tenzorových součinů takto: $g = 2b_2(x^2+1)dx \otimes dx + b_1\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}dx \otimes dy + b_1\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}dy \otimes dx + 2b_3(y^2+1)dy \otimes dy$, tj. v klasickém zápisu všechny přípustné Riemannovy metriky jsou

$$ds^2 = 2b_2(x^2+1)dx^2 + 2b_1\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}dxdy + 2b_3(y^2+1)dy^2.$$

Poznámka 5.4 Speciálně, za předpokladu, že řešení (5.3) je právě „jednodimenzionální" nad $\mathcal{F}(M)$ (tj. určeno jednoznačně až na násobek funkcí v lokálních souřadnicích), jinak řečeno, jestliže všechna řešení jsou ve tvaru

$$g = \varphi(x^1, \ldots, x^n) \cdot G, \tag{5.11}$$

kde G je pevné (určité) netriviální řešení, pak ukážeme, jak lze postup řešení výrazně zjednodušit. Místo (5.7) máme nyní podmínky $G_{ij;k} = \mu_k G_{ij}$ pro vhodné funkce $\mu_k(x^i)$, $k = 1, \ldots, n$. To znamená, že G musí být rekurentní, tj. musí existovat určitá 1-forma μ s komponentami μ_k taková, že $\mu \otimes G = \nabla G$. Místo (5.8) pak máme podmínku integrability ve tvaru $(k, \ell = 1, \ldots, n)$

$$\frac{\partial \mu_k}{\partial x^\ell} - \frac{\partial \mu_\ell}{\partial x^k} + \mu_k \mu_\ell - \mu_\ell \mu_k = 0. \tag{5.12}$$

Soustava (5.9) se redukuje na tvar

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \varphi \mu_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5.13}$$

Jestliže podmínka (5.12) platí, pak existují funkce $f(x^1, \ldots, x^n)$ takové, že pro $k = 1, \ldots, n$ je $\frac{\partial f}{\partial x^k} = \mu_k$. Tedy μ je exaktní (tj. gradientní), $\mu = df$, a (5.13) dává

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \varphi(x^1, \ldots, x^n) \frac{\partial f}{\partial x^k} = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5.14}$$

Potom (5.14) je úplně integrabilní a všechna řešení jsou právě tvaru

$$\varphi = e^{-f}, \qquad \text{kde} \quad df = \mu. \tag{5.15}$$

Dále, každá forma $g = e^{-f} \cdot G$ je kovariantně konstantní, tedy $\nabla g = 0$ platí.

Následující tři příklady uvádějí vždy metrizovatelné konexe, protože forma g splňuje podmínku $\nabla g = 0$ a je též regulární.

Příklad 5.5 Na varietě $(\mathbf{R}^2, \mathrm{id})$ s (globálními) souřadnicemi (x, y), je dána symetrická lineární konexe ∇, jejímiž jedinými nenulovými komponentami jsou

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{y}, \qquad \Gamma^2_{11} = \frac{-y}{\left(1 + \frac{4y^2}{a^2}\right)}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{\frac{4y}{a^2}}{1 + \frac{4y^2}{a^2}}. \tag{5.16}$$

Tenzor křivosti má tyto nenulové složky:

$$R^1_{212} = \frac{\frac{4}{a^2}}{1 + \frac{4y^2}{a^2}}, \qquad R^2_{121} = \frac{\frac{4y^2}{a^2}}{\left(1 + \frac{4y^2}{a^2}\right)^2}. \tag{5.17}$$

Řešením rovnice (5.3), kde $k = 1$, $l = 2$ je bilineární forma s maticí

$$G = \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{4y^2}{a^2} \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

Podmínka (5.5) je také splněna. Platí $\nabla G = 0$ a řešením rovnice $G_{ij;k} = \mu_k G_{ij}$ získáme funkce $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Proto výše uvedená funkce φ je konstantní a množinu všech kompatibilních bilineárních forem g lze zapsat ve tvaru $\{cG\,;\, c \in R\}$.

Příklad 5.6 Mějme dánu konexi s těmito (jedinými) nenulovými komponentami:

$$\Gamma^1_{12} = \frac{a^2 y}{a^2y^2 + b^2}, \qquad \Gamma^2_{11} = -y,$$

kde a, b jsou reálné konstanty. Její tenzor křivosti má tyto nenulové složky:

$$R^1_{212} = -\frac{a^2b^2}{(a^2y^2 + b^2)^2}, \qquad R^2_{121} = -\frac{b^2}{a^2y^2 + b^2}.$$

Výše popsaným podmínkám vyhovuje bilineární forma s maticí

$$G = \begin{pmatrix} a^2y^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

pro kterou platí $\nabla G = 0$. Funkce μ_1, μ_2 jsou rovny nule, a tedy $\varphi = \text{konst.}$ Proto dostáváme, že každé řešení je tvaru $g = cG$, kde c je reálná (jinak libovolná) konstanta.

Příklad 5.7 Nechť je na varietě $(\mathbf{R}^2, \mathrm{id})$ zvolena lineární konexe ∇ s nenulovými složkami

$$\Gamma^1_{22} = \frac{(a + b\cos x)\sin x}{b}, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{-b\sin x}{a + b\cos x},$$

kde a, b jsou reálné konstanty. Tenzor křivosti má nenulové složky

$$R^1_{212} = \frac{1}{b}\,(a + b\cos x)\cos x, \qquad R^2_{121} = \frac{b\cos x}{a + b\cos x}$$

a jeho všechny kovariantní derivace jsou nulové. Uvedeným podmínkám vyhovuje bilineární forma s maticí

$$G = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a + b\cos x)^2 \end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

s vlastností $\nabla G = 0$. Dále platí, že $\mu_1 = \mu_2 = 0$, tedy $\varphi = \text{konst.}$ a řešením je tedy každá metrika $g = cG$, kde c je konstanta.

Uvedená metoda dává návod k řešení, ale nedává přímou odpověď v řeči vstupních dat. Proto někteří autoři zkoušeli, alespoň v malých dimenzích, vyjádřit nutné a postačující podmínky metrizovatelnosti na základě komponent dané konexe a jejích parciálních derivací.

6 Tenzorové metody v dimenzi dva

Detailními analýzami podmínek integrability soustavy (5.3), (5.4) najdeme, že pro nikde ploché variety druhého řádu s lineární konexí mohou být nutné a postačující podmínky pro existenci kompatibilní metriky formulovány na základě komponent Ricciho tenzoru.

Poznamenejme, že v podstatě stejný klasický přístup použili Kuo-Shung Cheng a Wei-Tou Ni v [10], bez jakýchkoliv odkazů na výsledky Veblena a Eisenharta. Dále poznamenejme, že v [10] jsou sice dány nutné a postačující podmínky, ale bez jakéhokoliv vysvětlení jejich geometrických interpretací ve vztahu k vlastnostem dané konexe nebo základní variety. Některé odpovědi, které pracují s různými tenzory souvisejícími s tenzorem křivosti, lze nalézt také v [48].

Komponenty kovariantní derivace ∇g mají v lokálních souřadnicích tvar uvedený v (5.1). Tedy rovnice $\nabla g = 0$ má tvar (5.2). Jestliže $n = 2$, soustava (5.2) se skládá z šesti parciálních diferenciálních rovnic o třech neznámých g_{11}, g_{12}, g_{22}

$$\begin{aligned} \partial_1 g_{11} = {} & 2\left(\Gamma^1_{11} g_{11} + \Gamma^2_{11} g_{12}\right), \quad & \partial_1 g_{22} = {} & 2\left(\Gamma^1_{12} g_{12} + \Gamma^2_{12} g_{22}\right), \\ \partial_2 g_{11} = {} & 2\left(\Gamma^1_{12} g_{11} + \Gamma^2_{12} g_{12}\right), \quad & \partial_2 g_{22} = {} & 2\left(\Gamma^1_{22} g_{12} + \Gamma^2_{22} g_{22}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_1 g_{12} = {} & \Gamma^1_{12} g_{11} + \left(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\right) g_{12} + \Gamma^2_{11} g_{22}, \\ \partial_2 g_{12} = {} & \Gamma^1_{22} g_{11} + \left(\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22}\right) g_{12} + \Gamma^2_{12} g_{22}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Parciální derivování (6.1) a dosazení za parciální derivace $\partial_k g_{ij}$ z (5.1) dává

$$\frac{\partial^2 g_{sk}}{\partial x^r \partial x^j} = g_{s\ell}\left(\frac{\partial \Gamma^\ell_{rk}}{\partial x^j} + \Gamma^\ell_{jt}\Gamma^t_{rk}\right) + g_{k\ell}\left(\frac{\partial \Gamma^\ell_{rs}}{\partial x^j} + \Gamma^\ell_{jt}\Gamma^t_{rs}\right) + g_{\ell t}\left(\Gamma^t_{jk}\Gamma^\ell_{rs} + \Gamma^\ell_{rk}\Gamma^t_{js}\right).$$

Nahradíme-li komponenty tenzoru křivosti a vezmeme-li v úvahu zaměnitelnost druhých parciálních derivací, dostaneme jako nutnou podmínku, že g_{ij} musí vyhovovat homogenní soustavě lineárních algebraických rovnic (5.3). V dimenzi dva má Ricciho tenzor $R_{hj} = \sum_k R^k_{hjk}$ komponenty

$$\begin{aligned} R_{11} &= -R^2_{121} = R^2_{112}, \qquad & R_{12} &= -R^1_{112} = R^1_{121}, \\ R_{21} &= -R^2_{221} = R^2_{212}, \qquad & R_{22} &= -R^1_{212} = R^1_{221} \end{aligned}$$

a je úměrný metrickému tenzoru,

$$Ric = K \cdot g. \tag{6.2}$$

Použitím Ricciho tenzoru dostaneme homogenní systém tří lineárních algebraických rovnic o třech neznámých g_{11}, g_{12}, g_{22},

$$\begin{aligned} R_{12}g_{11} - R_{11}g_{12} &= 0, \\ R_{22}g_{11} + (R_{12} - R_{21})g_{12} - R_{11}g_{22} &= 0, \\ R_{22}g_{12} - R_{21}g_{22} &= 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Soustava (6.3) má netriviální řešení právě tehdy, když její matice má nulový determinant na M, tj. tehdy a jen tehdy, když je splněno následující:

$$0 = \begin{vmatrix} R_{12} & -R_{11} & 0 \\ R_{22} & R_{12} - R_{21} & -R_{11} \\ 0 & R_{22} & -R_{21} \end{vmatrix} = (R_{12} - R_{21}) \cdot \det(R_{ij}). \tag{6.4}$$

Jestliže $R = 0$, pak i $R_{ij} = 0$ a (6.4) platí identicky, nedostaneme žádnou novou podmínku pro složky metriky g_{ij}; (6.3) má pak tříparametrický systém řešení.

Lemma 6.1 *Tenzor křivosti dvoudimenzionální pseudo-Riemannovy variety (M_2, g) splňuje*

$$R^i_{hjk} = K(\delta^i_k g_{hj} - \delta^i_j g_{hk}) \tag{6.5}$$

a Ricciho tenzor je úměrný metrickému tenzoru,

$$Ric = K \cdot g = \frac{1}{2}\varrho \cdot g. \tag{6.6}$$

Důkaz. Můžeme použít buď fakt, že M_2 je triviálně izotropní [5, str. 374] a platí (2.13), nebo vyjít přímo z výpočtu: $R^t_{hij} = R^s_{hij}\delta^t_s = R^s_{hij}g_{sk}g^{kt} = R_{hijk}g^{kt} = K(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij})g^{kt} = K(\delta^t_i g_{hj} - \delta^t_h g_{ij})$. Z toho ihned pro Ricciho tenzor plyne, že $R_{hj} = \Sigma_i R^i_{hij} = K \cdot \Sigma_i(\delta^i_i g_{hj} - \delta^i_h g_{ij}) = K \cdot g_{hj}$, proto $Ric = Kg$ a $\varrho = R_{hj}g^{hj} = 2K$.

Jestliže $R(x) \neq 0$ v jednom bodě $x \in M$ („x je regulární bod R"), pak ze spojitosti platí $R \neq 0$ na nějakém otevřeném okolí $U \subset M_2$ bodu x. Tedy množina bodů s nenulovou křivostí tvoří otevřenou podmnožinu v M. V následujícím tedy budeme zkoumat tuto nikde plochou část.

Předpokládejme, že $R \neq 0$ na M (varieta je nikde plochá), pak také Ricciho tenzor je všude nenulový.

Regularita Ricciho tenzoru je podle (6.2) další nutnou podmínkou metrizovatelnosti nikde ploché 2-variety [76].

Další nutnou podmínkou vyplývající z úměrnosti (6.2) metrického a Ricciho tenzoru je symetričnost Ric ($R_{12} = R_{21}$). Dosazením této podmínky nabývá soustava (6.3) tvaru

$$\begin{pmatrix} R_{12} & -R_{11} & 0 \\ R_{22} & 0 & -R_{11} \\ 0 & R_{22} & -R_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

Jestliže $x \in M_2$ je takový pevný bod, že $R(x) \neq 0$, $\det(R_{ij}(x)) \neq 0$, pak mohou nastat následující případy:

(a) $R_{11}(x) = 0$ (nebo $R_{22}(x) = 0$, nebo oba dva jsou rovny nule), ale $R_{12}(x) \neq 0$,

(b) $R_{12}(x) = 0$, ale $R_{11}(x) \cdot R_{22}(x) \neq 0$,

(c) $R_{ij}(x) \neq 0$ pro $i, j \in \{1, 2\}$.

Ve všech třech podpřípadech existuje nenulový subdeterminant druhého stupně, proto koeficient matice je stupně dva. Tedy podle předpokladu $R \neq 0$, Ric symetrický, matice koeficientů má stupeň dva a obecné řešení (6.7) je jednodimenzionální (nad $\mathcal{F}(M_2)$), $g_{ij}(x) = k(x) \cdot R_{ij}(x)$, $k(x) : M \to \mathbf{R} - \{0\}$, nebo krátce

$$g_{11} : g_{12} : g_{22} = R_{11} : R_{12} : R_{22}. \tag{6.8}$$

Toto řešení vyhovuje soustavě diferenciálních rovnic (6.1). Zvolíme-li počáteční podmínky $x_o \in M$, $K(x_o) \neq 0$ a položíme $k(x) = \frac{1}{K(x_o)}$, pak jediné řešení je $g_{ij} = \frac{1}{K(x_o)} R_{ij}$ (výběr konstanty má geometrický význam „konstantní změny měřítka"). V případě (c), a pouze v tomto případě, můžeme postupovat jako v [10]. Můžeme spočítat poměry

$$\frac{\partial_k g_{ij}}{g_{ij}} = \frac{\partial \ln |g_{ij}|}{\partial x^k} = \Gamma^s_{ik} \frac{R_{sj}}{R_{ij}} + \Gamma^s_{jk} \frac{R_{is}}{R_{ij}} \tag{6.9}$$

a z (6.1) odvodíme (nutnou a postačující) podmínku integrability pro první čtyři z těchto rovnic (a to s $i = j = 1$ a $i = j = 2$),

$$\begin{aligned} \partial_2(\Gamma^1_{11} + \tfrac{R_{12}}{R_{11}} \Gamma^2_{11}) - \partial_1(\Gamma^1_{12} + \tfrac{R_{12}}{R_{11}} \Gamma^2_{12}) &= 0, \\ \partial_1(\Gamma^2_{12} + \tfrac{R_{12}}{R_{22}} \Gamma^1_{12}) - \partial_2(\Gamma^2_{22} + \tfrac{R_{12}}{R_{22}} \Gamma^1_{22}) &= 0. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Kromě symetrie Ricciho tenzoru ($R_{12} = R_{21}$) se v [10] vypočítají další nutné podmínky, v originále formulované v komponentách tenzoru křivosti, které můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned} R_{12} R_{11;1} &= R_{11} R_{12;1}, \quad R_{12} R_{11;2} = R_{11} R_{12;2}, \\ R_{12} R_{22;1} &= R_{22} R_{12;1}, \quad R_{12} R_{22;2} = R_{22} R_{12;2}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Tato množina podmínek může být zapsána ve tvaru

$$\begin{aligned}\varrho_1 &= R_{11;1} : R_{11} = R_{12;1} : R_{12} = R_{22;1} : R_{22},\\ \varrho_2 &= R_{11;2} : R_{11} = R_{12;2} : R_{12} = R_{22;2} : R_{22}.\end{aligned} \tag{6.12}$$

(6.12) je zřejmě ekvivalentní s rekurentností: $\nabla Ric = \varrho \otimes Ric$, $\varrho = \varrho_i dx^i$, $i = 1, 2$, [73], [76]. Jestliže jsou splněny podmínky integrability $R_{12} = R_{21}$ a (6.11), tedy jestliže Ricciho tenzor je nedegenerovaný, symetrický a rekurentní, (6.11) platí, pak původní systém (6.10) má řešení, a libovolné řešení systému (6.1) může být dáno v následující (spíše komplikované) formě, [10]:

$$\begin{aligned} g_{11} = {}& \exp(2\textstyle\int_{(x_0^1,x_0^2)}^{(x^1,x^2)}(\Gamma^1_{11} + \frac{R_{12}}{R_{11}}\Gamma^2_{11})dx^1 \\ &+(\Gamma^1_{12} + \frac{R_{12}}{R_{11}}\Gamma^2_{12})dx^2 + c_1),\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned} g_{12} = {}& \exp(2\textstyle\int_{(x_0^1,x_0^2)}^{(x^1,x^2)}(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \frac{R_{11}}{R_{12}}\Gamma^1_{12} - \frac{R_{22}}{R_{12}}\Gamma^2_{11})dx^1 \\ &+(\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22} + \frac{R_{11}}{R_{12}}\Gamma^1_{22} - \frac{R_{22}}{R_{12}}\Gamma^2_{12})dx^2 + c_2),\end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} g_{22} = {}& \exp(2\textstyle\int_{(x_0^1,x_0^2)}^{(x^1,x^2)}(\Gamma^2_{12} + \frac{R_{12}}{R_{22}}\Gamma^1_{12})dx^1 \\ &+(\Gamma^2_{22} + \frac{R_{12}}{R_{22}}\Gamma^1_{22})dx^2 + c_3),\end{aligned} \tag{6.15}$$

kde konstanty c_1, c_2, c_3 musí být vybrány tak, aby splňovaly (6.3); výběr c_2 je libovolný a odpovídá mu konstantní změna měřítka kompatibilní metriky, c_1 a c_3 závisí na c_2.

Poznamenejme, že dostatečnost systému získaných podmínek $R_{12} = R_{21}$, (6.11) je v [10] pouze uveden, bez jakéhokoliv detailního důkazu, a možnosti (a), (b) nejsou vůbec diskutovány.

Částečná odpověď, týkající se nikde ploché 2-variety s lineární konexí, může být formulována následovně:

Věta 6.2 *Lokální nutné a postačující podmínky pro metrizovatelnost nikde ploché symetrické konexe ∇ na M_2 jsou: Ricciho tenzor $Ric\,(R_{ij})$ konexe ∇ musí být*

nedegenerovaný ($\det R_{ij} \neq 0$),

symetrický ($R_{ij} = R_{ji}$),

rekurentní, $\nabla Ric = \omega \otimes Ric$ *pro jistou 1-formu* ω.

Jestliže ω je exaktní, tj. $\omega = df$ pro jistou funkci f, pak kompatibilní metriky existují globálně, jeden z reprezentantů je $g = e^{-f}\,Ric$, ostatní se liší až na násobek skalárem, a v tomto smyslu je g „jednoznačný"). Jestliže M_2 je jednoduše souvislá, kompatibilní g existuje globálně.

V případě „regulární” křivosti R jsou důležité také výsledky z [39].

Příklad 6.3 Na $\mathbf{R}^2(x^1, x^2)$ uvažujeme symetrickou lineární konexi ∇, jejíž jediné nenulové Christoffely jsou:

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1.$$

Tuto úlohu jsme již řešili v kapitole „Přímá metoda” (viz Příklad 4.2). Nyní ji budeme řešit jiným postupem s využitím tenzoru Ricci.

Pro konexi určíme složky tenzoru křivosti R^i_{jkl} a Ricciho tenzoru. Využijeme vztahů (2.5) a (7.2) z další kapitoly. Složky Ricciho tenzoru jsou:

$$R^2_{112} = R_{11} = 1, \quad R^1_{112} = -R_{12} = 0, \quad R^2_{212} = R_{21} = 0, \quad R^1_{212} = -R_{22} = 0.$$

Tedy Ricciho tenzor je sice symetrický, ale je degenerovaný. Ric má toto maticové vyjádření:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proto tato konexe neodpovídá žádné (pseudo-)Riemannově metrice.

Příklad 6.4 [19, str. 122] Na $\mathbf{R}^2$ se souřadnicemi $x = (x^1, x^2)$ je dána lineární konexe ∇ s těmito nenulovými komponentami $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = x^1 - x^2$.

Nyní použijeme argumentaci, která užívá tenzor Ricci (nebo křivosti). Komponenty tenzoru Ricci vypočítáme pomocí komponent konexe. Výsledkem jsou tyto hodnoty:

$$R_{11} = -R^2_{121} = 0, \quad R_{12} = -R^1_{112} = -1, R_{21} = -R^2_{221} = 1, \quad R_{22} = -R^1_{212} = 0.$$

Zapíšeme-li složky Ricciho tenzoru do matice

$$Ric = (R_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

vidíme, že Ricci tenzor není symetrický a lineární konexe tedy není metrizovatelná (ani lokálně).

Mohli bychom také užít kritérium z Lemmatu 2.25 (iii). Při výpočtu zjistíme, že $\psi_1 = \psi_2 = x^1 - x^2$, $\partial_1\psi_2 = 1$, zatímco $\partial_2\psi_1 = -1$ a dojdeme tedy ke stejnému výsledku jako výše.

Příklad 6.5 Na $\mathbf{R}^2$ je zadána lineární konexe bez torze komponentami

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = 1, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0, \quad \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 2.$$

Pokud vypočteme komponenty Ricciho tenzoru a zapíšeme je do matice

$$(R_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

zjistíme, že je symetrický.

Konexe však přesto není metrizovatelná, protože Ricciho tenzor není rekurentní. Zjistíme to pomocí soustavy lineárních rovnic pro funkce $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ takové, že $R_{ij;k} = \alpha_k R_{ij}$:

$$\begin{aligned} 4 &= R_{11;1} = \alpha_1 R_{11} = -2\alpha_1, & 0 &= R_{11;2} = \alpha_2 R_{11} = -2\alpha_2, \\ 4 &= R_{22;1} = \alpha_1 R_{22} = -\alpha_1, & 4 &= R_{22;2} = \alpha_2 R_{22} = -\alpha_2 \ \text{ atd.} \end{aligned}$$

Řešením této soustavy zjistíme, že je rozporná.

Příklad 6.6 [11] Na $M_2 = \mathbf{R}^2$ je dána symetrická lineární konexe s Christoffelovými symboly

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = 1, \qquad \text{jinak} \quad \Gamma^k_{ij} = 0.$$

Pokud určíme komponenty tenzoru křivosti R, zjistíme, že je nulový (ekviv. $Ric = 0$). Z toho vyplývá, že konexe ∇ je plochá, a proto (lokálně) metrizovatelná.

Příklad 6.7 Konexe je zadána těmito nenulovými komponentami

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2}, \qquad \Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2}e^{x^2}.$$

Po výpočtu získáme tento Ricciho tenzor:

$$Ric = \frac{1}{4}e^{x^2} dx^1 \otimes dx^1 + \frac{1}{4} dx^2 \otimes dx^2.$$

Dalšími výpočty zjistíme, že je kovariantně konstantní ($\nabla Ric = 0$). Proto je rekurentní s nulovou (exaktní) 1-formou $\omega = 0 = d\,(\text{konst.})$ na $\mathbf{R}^2$.

Vidíme, že je také symetrický a regulární a tedy konexe je metrizovatelná.

Na závěr této kapitoly uveďme na dokreslení situace dva příklady neplochých metrických konexí na 2-varietě, z nichž každá má právě jeden izolovaný bod.

Příklad 6.8 První z nich je Levi-Civitova konexe na rotační ploše, která vznikne rotací křivky

$$z = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

kolem osy $o = z$. Křivku parametrizujeme funkcí

$$c(u) = \begin{cases} (u, 0, e^{-\frac{1}{u^2}}) & , u \neq 0, \\ (0,0,0) & , u = 0. \end{cases}$$

Potom parametrické vyjádření této rotační plochy je:

$$\begin{cases} p(u,v) = (u \cdot \cos v, u \cdot \sin v, e^{-\frac{1}{u^2}}), & (u,v) \in (\mathbf{R} - \{0\}, \mathbf{R}), \\ p(0,v) = (0,0,0), & (u,v) \in (0, \mathbf{R}). \end{cases}$$

Nyní proto, aby byla konexe neplochá musíme nalézt takové (u,v), pro které platí, že $R(u,v) \neq 0$. Tedy pomocí první a druhé základní formy plochy nejprve vypočítáme Gaussovu křivost, kterou položíme rovnu nule. Výsledkem může být plochý nebo parabolický bod. Pro ověření plochého bodu dosadíme výsledné hodnoty do tenzoru křivosti. Pokud je tenzor křivosti v podezřelém bodě roven nule, pak víme, že tento bod je skutečně plochý.

První základní forma zadané plochy má tyto komponenty:

$$g_{11} = \begin{cases} 1 + \frac{4e^{\frac{-2}{u^2}}}{u^6}, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0, \end{cases} \qquad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \begin{cases} u^2, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0. \end{cases}$$

Konexe má nenulové Christoffelovy symboly pro $u \neq 0$:

$$\Gamma^1_{11} = \begin{cases} \frac{4e^{-2/u^2}(2/u^2-3)}{u^7+4ue^{-2/u^2}}, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0, \end{cases} \qquad \Gamma^1_{22} = \begin{cases} \frac{-u^7}{u^6+4e^{-2/u^2}}, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0, \end{cases}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \begin{cases} \frac{1}{u}, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0, \end{cases}$$

a složky Ricciho tenzoru

$$R_{11} = \begin{cases} -\frac{4e^{-2/u^2}(2/u^2-3)}{u^8+4u^5e^{-2/u^2}}, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0, \end{cases}$$

$$R_{12} = R_{21} = 0,$$

$$R_{22} = \begin{cases} \frac{7u^6}{u^6+4e^{-2/u^2}} - \frac{6u^{12}+16u^4e^{-2/u^2}}{(u^6+4e^{-2/u^2})^2} - \frac{u^6}{u^6+4e^{-2/u^2}} + \frac{4e^{-2/u^2}u^7(2/u^2-3)}{u(u^6+4e^{-2/u^2})^2}, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0. \end{cases}$$

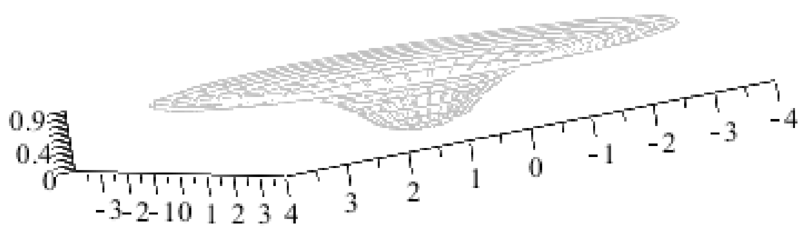
Poznamenejme, že plocha má složky druhé základní formy tyto:

$$b_{11} = \begin{cases} \frac{2e^{-1/u^2}(2/u^2-3)}{u^5\sqrt{4e^{-2/u^2}+u^6}}, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0, \end{cases} \qquad b_{12} = 0, \quad b_{22} = \begin{cases} \frac{2ue^{-1/u^2}}{\sqrt{4e^{-2/u^2}+u^6}}, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0. \end{cases}$$

a Gaussovu křivost

$$K(u,v) = \begin{cases} \frac{4e^{\frac{-2}{u^2}}\left(\frac{2}{u^2}-3\right)}{\left(4e^{\frac{-2}{u^2}}+u^6\right)^2}, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0. \end{cases}$$

Pro hodnoty parametru $u = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ vyjde Gaussova křivost také nulová, odpovídající body však jsou parabolické (viz obrázek 6.1).



Obrázek 6.1: Plocha z příkladu 6.8.

Příklad 6.9 Druhým příkladem je plocha, která vznikne rotací křivky $c(u) = (u, 0, u^4)$. Její parametrické vyjádření je

$$p(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^4), \quad (u,v) \in \mathbf{R}.$$

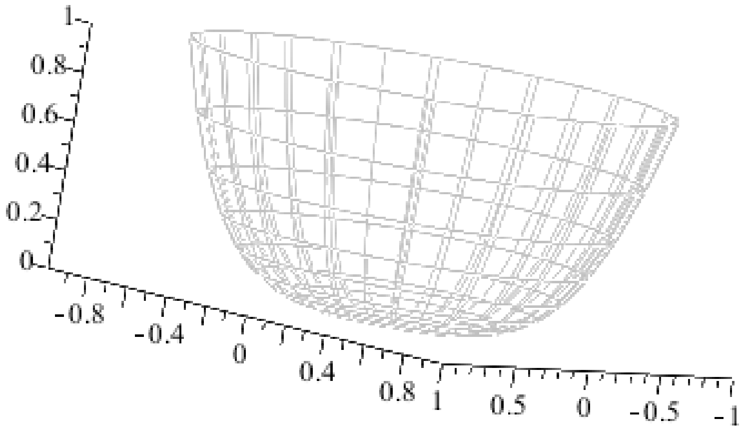
Zjistíme, že Gaussova křivost je

$$K = 48u^4.$$

Položíme-li ji rovnu nule, pak potenciální plochý bod můžeme získat jedině pro $u = 0$. Ricciho tenzor vypadá v maticovém vyjádření takto:

$$(R_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{-48u^5}{1+16u^6} & 0 \\ 0 & \frac{-48u^6}{(1+16u^6)^2} \end{pmatrix}.$$

Po dosazení za $u = 0$ je $Ric(0, v) = 0$, a proto je bod s parametrem $u = 0$ plochý. Protože žádný jiný bod plochý být nemůže, je daná konexe neplochá s jediným izolovaným plochým bodem v počátku $(0, 0, 0)$, který odpovídá parametrům $u = 0, v \in \mathbf{R}$ (viz obrázek 6.2).



Obrázek 6.2: Plocha z příkladu 6.9.

7 Metrizovatelnost dvoudimenzionálních variet

Nyní se budeme zabývat lineárními (= afinními) konexemi na dvoudimenzionálních varietách, [82].

Zavedeme-li systém (x^1, x^2) lokálních souřadnic v oblasti $U \subset M_2$ variety, je konexe ∇ na U jednoznačně určena svými komponentami (Christoffelovými symboly), které v tomto případě pro zjednodušení označíme takto:

$$A = \Gamma^1_{11},\ B = \Gamma^2_{11},\ C = \Gamma^1_{12},\ \tilde{C} = \Gamma^1_{21},\ D = \Gamma^2_{12},\ \tilde{D} = \Gamma^2_{21},\ E = \Gamma^1_{22},\ F = \Gamma^2_{22}.$$

Speciálně pro symetrickou konexi $\tilde{C} = C, \tilde{D} = D$. Symetrickou konexi ∇ lze tedy lokálně zadat pomocí šesti funkcí A, B, C, D, E, F proměnných x^1, x^2, definujeme-li:

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = A\partial_1 + B\partial_2, \quad \nabla_{\partial_1}\partial_2 = C\partial_1 + D\partial_2 = \nabla_{\partial_2}\partial_1, \quad \nabla_{\partial_2}\partial_2 = E\partial_1 + F\partial_2, \tag{7.1}$$

kde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, 2$.

V případě dvoudimenzionálních variet určuje Ricciho tenzor plně tenzor křivosti R typu $(1,3)$ vztahem

$$R(X,Y)Z = Ric(Y,Z)X - Ric(X,Z)Y,$$

v komponentách pak

$$R^i_{hjk} = \partial^i_j R_{hk} - \partial^i_k R_{jh}.$$

Podrobněji platí $R^i_{hij} = R_{jh}$ pro $j \neq i$, tedy

$$\begin{aligned} R_{11} &= -R^2_{112} = R^2_{121}, \qquad & R_{21} &= -R^1_{121} = R^1_{112}, \\ R_{12} &= -R^2_{212} = R^2_{221}, \qquad & R_{22} &= -R^1_{221} = R^1_{212}, \end{aligned} \tag{7.2}$$

ostatní složky $R^i_{hjj} = 0$.

Zejména platí:

Lemma 7.1 *$R = 0$ právě tehdy, když $Ric = 0$.*

Důkaz. Plyne bezprostředně z předchozího.

Lemma 7.2 *Pro (M_2, ∇) je Ric rekurentní právě tehdy, když R je rekurentní.*

Důkaz. Nechť Ric je rekurentní, $\nabla Ric = \omega \otimes Ric$. Jestliže (v lokálních souřadnicích) $\omega = \omega_j dx^j$, pak $\nabla_\ell R^i_{hjk} = \delta^i_j \nabla_\ell R_{kh} - \delta^i_k \nabla_\ell R_{jh} = \delta^i_j \omega_\ell R_{kh} - \delta^i_k \omega_\ell R_{jh} = \omega_\ell R^i_{hjk}$, proto $\nabla R = \omega \otimes R$. Naopak jestliže platí $\nabla R = \omega \otimes R$, pak $\nabla_\ell R_{jk} = \omega_\ell R^i_{kij} = \omega_\ell R_{jk}$ a $\nabla Ric = \omega \otimes Ric$.

Komponenty Ricciho tenzoru symetrické konexe jsou:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= Ric(\partial_1, \partial_1) = B(F - C) + D(A - D) + B_2 - D_1, \\
R_{12} &= Ric(\partial_1, \partial_2) = CD - BE + D_2 - F_1, \\
R_{21} &= Ric(\partial_2, \partial_1) = CD - BE + C_1 - A_2, \\
R_{22} &= Ric(\partial_2, \partial_2) = E(A - D) + C(F - C) + E_1 - C_2,
\end{aligned} \tag{7.3}$$

kde index i u paty značky znamená parciální derivaci podle proměnné x^i.

Důsledek 7.3 *(M_2, g) je vždy Einsteinův prostor. Pro nikde plochou (M_2, g) je Ricciho tenzor symetrický a nedegenerovaný.*

Uveďme, že podle [35, I, str. 280], každá nikde plochá Riemannova 2-varieta má rekurentní křivost, pokud její sekcionální křivost není nulová. Můžeme ověřit:

Lemma 7.4 *Ricciho tenzor nikde ploché pseudo-Riemannovy variety (M_2, g) je rekurentní a odpovídající 1-forma je exaktní (tj. gradientní, a tedy uzavřená).*

Důkaz. $R(x) \neq 0$ je ekvivalentní s $K(x) \neq 0$ na M (ze spojitosti, K je buď pozitivní, nebo negativní). Z $g = \alpha(x) \cdot Ric$, $\alpha(x) = \frac{1}{K(x)} \neq 0$ a $\nabla g = 0$ jednoduše dostaneme, že $\alpha(x) \cdot Ric$ je paralelní. Podle Lemmatu 2.40 platí $\nabla Ric = d(-\ln|\alpha|) \otimes Ric$.

Z výše uvedené diskuse o pseudo-Riemannových varietách vyplývá, že dvě podmínky jsou nutné pro lokální metrizovatelnost (symetrické) konexe na 2-varietě: Ricciho tenzor musí být symetrický a také musí být rekurentní s odpovídající uzavřenou 1-formou. Ric může být degenerovaný pouze v případě, že $R = 0$ a pak platí $Ric = 0$. Kromě toho, z podmínky rekurentnosti pro globální metrizovatelnost, musí být 1-forma dokonce exaktní.

Věta 7.5 (Existence lokálních metrik na 2-varietách) *Nechť je dána 2-dimenzionální varieta (M_2, ∇) se symetrickou lineární konexí taková, že Ricciho tenzor je regulární, tj. $|R_{ij}| \neq 0$, symetrický, tj. $R_{ij} = R_{ji}$, a rekurentní, tedy platí $\nabla Ric = \varrho \otimes Ric$ pro jistou 1-formu ϱ. Pak lokálně existuje metrika kompatibilní s konexí.*

Důkaz. Nechť $x_0 \in M$, pak z podmínky $|R_{ij}(x_0)| \neq 0$ plyne existence páru indexů (i, j) takových, že $R_{ij} \neq 0$ v nějakém okolí x_0. Rekurentnost společně s regularitou zaručuje, že $d\varrho = 0$ (Lemma 2.39). Proto v okolí x_0 existuje funkce f taková, že $\varrho = df$. Tedy $e^{-f} \cdot Ric$ je paralelní v okolí x_0. Proto $g = e^{-f} \cdot Ric$ je lokální metrika kompatibilní s ∇ v okolí x_0.

Samozřejmě funkce f z důkazu není jediná. Každá funkce $\tilde{f}$ se stejným diferenciálem ($d\tilde{f} = df$) také dává jistou metriku; funkce se liší konstantou, $\tilde{f} = f + a$, $a \in \mathbf{R}$ a odpovídající metriky se pak liší až na násobek.

Jestliže R je všude nenulová, pak podobný důkaz zaručuje existenci globální metrizovatelnosti nikde ploché dvoudimenzionální afinní variety:

Věta 7.6 *Nechť (M_2, ∇) je dvoudimenzionální varieta se symetrickou lineární konexí. Jestliže Ricciho tenzor konexe ∇ je regulární, symetrický a rekurentní, $\nabla Ric = \varrho \otimes Ric$, a 1-forma ϱ je exaktní, tj. $\varrho = df$ pro nějakou funkci $f \in \mathcal{F}(M)$, pak $g = e^{-f} \cdot Ric$ je (globální) metrický tenzor kompatibilní s ∇.*

Věta 7.7 (Globální metrizovatelnost nikde plochých konexí na 2-varietách) *Nikde plochá symetrická lineární konexe na M_2 je metrizovatelná právě tehdy, když její tenzor Ricci je regulární, symetrický, rekurentní a odpovídající 1-forma je exaktní. Jestliže máme tento případ a $\nabla Ric = df \otimes Ric$ platí pro nějakou hladkou funkci $f \in \mathcal{F}(M)$, pak všechny globální metriky kompatibilní s ∇ určují 1-parametrickou množinu popsanou rovnicí*

$$g_b = \exp(-f + b) \cdot Ric, \qquad b \in \boldsymbol{R}, \tag{7.4}$$

tj. každá z nich vzniká jako násobek Ricciho tenzoru hladkou funkcí. Kromě toho, libovolné dvě kompatibilní metriky se liší až na skalární násobek.

„Jednoznačnost" g [73] musí být chápána právě v tomto smyslu.

Jako přímý důsledek Věty 7.7 získáme:

Důsledek 7.8 *Dvě pseudo-Riemannovy metriky g_1, g_2 kompatibilní s toutéž nikde plochou symetrickou lineární konexí na M_2 jsou homotetické.*

Pro pozitivně definitní metriky je to speciální případ výsledku O. Kowalského z [39, str. 131] Věta 1 (připomeňme, že dvě metriky g_1, g_2 na varietě se nazývají *konformně ekvivalentní*, jestliže existuje funkce κ na M taková, že $g_2 = \kappa g_1$):

Nechť g, g' *jsou dvě Riemannovy metriky na hladké varietě* M *se stejným tenzorem Riemannovy křivosti* R*. Pak* g, g' *jsou konformně ekvivalentní na uzávěru množiny regulárních bodů tenzoru* R*.*

8 Metrizace pomocí algebry holonomií

8.1 Holonomie

Metoda popsaná v kapitole 5 nedává dostatečně jasnou představu o geometrickém významu podmínek integrability ani o omezeních plynoucích z nich pro konexi nebo varietu. Geometričtější a sofistikovanější přístup k interpretaci nutných a postačujících podmínek metrizovatelnosti můžeme podat s použitím paralelního přenosu a grup holonomie.

Holonomie afinní variety (M, ∇) v $x \in M$ podél po částech diferencovatelné (třída C^1 je postačující [35, str. 85]) smyčky (viz kapitola 2.9) je automorfismus tečného prostoru T_xM, který je dán paralelním přenosem vektorů podél dané smyčky. Vzhledem k vlastnostem paralelního přenosu podél křivek tvoří všechny holonomie v bodě x společně se skládáním tzv. (úplnou lineární) *grupu holonomie* $\Phi(x) := \mathrm{Hol}_x^\nabla$ variety (M, ∇) v bodě x, která je transformační Lieovou grupou; $\Phi(x)$ je podgrupa v grupě $GL(T_xM)$. Jak známo, na souvislé varietě jsou grupy holonomie v různých bodech izomorfní. Jestliže se omezíme na smyčky, které jsou homotopické nule (stažitelné do bodu), pak podobná konstrukce vede k (lineární) *zúžené grupě holonomie* $\Phi^0(x)$ konexe ∇ se základním bodem x, která je souvislou Lieovou transformační grupou a hraje roli komponenty jednotky ve $\Phi(x)$.

Jako $\underline{h}(x) := \underline{\mathrm{Hol}}_x^\nabla$ označme odpovídající Lieovu algebru grupy $\Phi(x)$. Můžeme dále zavést ve $\Phi(x)$ jisté Lieovy podgrupy, lineární *lokální grupu holonomie* $\Phi^*(x)$ a *infinitezimální grupu holonomie* $\Phi'(x)$. Platí $\Phi'(x) \subset \Phi^*(x) \subset \Phi^0(x)$, tedy pro odpovídající Lieovy algebry holonomie platí $\underline{h}'(x) \subset \underline{h}^*(x) \subset \underline{h}(x)$, [35, str. 94, 95]. Inkluze mohou být obecně ostré. Pro hladkou konexi můžeme infinitezimální algebru holonomie $\underline{h}'(x)$ spočítat z tenzoru křivosti a jeho kovariantních derivací:

Lemma 8.1 ([35, str. 152, Lemma 1, Věta 9.2.]) *Pro hladké (C^∞) konexe je Lieova algebra $\underline{h}'(x)$, jako vektorový prostor, generována lineárními zobrazeními*

$$\nabla^k R(X, Y; Z_1, \ldots, Z_k), \qquad X, Y, Z_1, \ldots, Z_k \in T_xM, \quad 0 \leq k < \infty. \tag{8.1}$$

Lemma 8.2 ([35, str. 101]) *Grupy holonomie reálně analytické konexe na reálně analytické varietě splňují $\Phi'(x) = \Phi^*(x) = \Phi^0(x)$, $x \in M$.*

Důsledek 8.3 *V reálně analytickém případě splývá algebra holonomie s infinitezimální algebrou holonomie, $\underline{h}(x) = \underline{h}'(x)$, tedy komponentu jednotky $\Phi^0(x)$ můžeme získat z $\underline{h}'(x)$. Navíc zúžená grupa holonomie spojité reálně analytické variety (M, ∇) s analytickou konexí je plně určena tenzorem křivosti R a jeho kovariantními derivacemi $\nabla^k R$, $k \in \boldsymbol{N}$.*

8.2 Hol_x^{∇}-invariantní bilineární formy

Možnost užití grupy holonomie k řešení problému metrizace pro lineární konexe je uvedena např. v [69], [1]. Grupa holonomie „rozhoduje”, jestli je konexe metrizovatelná nebo ne. Je-li dána konexe na souvislé, jednoduše souvislé varietě, je $\Phi(x)$ souvislá Lieova podgrupa grupy automorfismů (transformační grupy) $GL(T_xM)$ fibru, tedy je jednoznačně určena svou Lieovou algebrou. Jestliže je konexe indukovaná určitou metrikou, pak skalární součin definovaný pomocí g na jednotlivých tečných prostorech se zachovává paralelním přenosem. Proto prvky grupy holonomie jsou izometrie tečného prostoru a $\Phi^0(x)$ splývá s podgrupou grupy $SO(T_xM)$, tj. s podgrupou v $SO(n)$ nebo v $SO(p, q)$, $p + q = n$, podle signatury metriky. Jestliže je naopak $\Phi^0(x)$ podgrupou speciální ortogonální grupy fibru v jednom „pěkném”, generickém bodě, můžeme definovat skalární součin na tomto jednom prostoru T_xM a kompatibilní metriku vytvoříme použitím paralelního přenosu, [1], [69], [37]. V jednoduchých příkladech postup funguje přímo, [79].

V dalším ukážeme, jak v řeči algebry holonomie charakterizovat kvadratické formy invariantní vzhledem ke grupě holonomie.

Lemma 8.4 *Nechť (M, ∇) je jednoduše souvislá hladká varieta s konexí ∇ bez torze a $x \in M$ je pevný bod. Dále nechť je dána bilineární symetrická forma G na T_xM, $G \in S^2(T_x^*M)$. Pak platí následující: G je invariantní vzhledem k $\Phi(x)$ tehdy a jen tehdy, když*

$$G(AX, Y) + G(X, AY) = 0 \quad \text{pro každé } A \in \underline{h}(x),\ X, Y \in T_xM. \tag{8.2}$$

Důkaz. Ověřme, že prvky algebry holonomie vyhovují (8.2). Pro libovolný prvek $A \in \underline{h}(x)$ uvažujme odpovídající jednoparametrickou podgrupu $s^A : \mathbf{R} \to \Phi(x)$, $t \mapsto s^A(t)$, plně určenou počátečními podmínkami $s^A(0) = 1$, $(s^A)'(0) := (\frac{d}{dt})_{t=0}\, s^A(t) = A$. Nechť G je invariantní při grupě holonomie (tedy $G(\tau X, \tau Y) = G(X, Y)$ pro $\tau \in \Phi(x)$) . Pak dostaneme $G(s^A(t)X, s^A(t)Y) = G(X,Y)$ pro $X, Y \in T_xM$. Derivujeme podle t použitím formule pro derivaci skalárního součinu, $G'(u(t), v(t)) = G(u'(t), v(t)) + G(u(t), v'(t))$, a položme $t \to 0$:

$$G((s^A)'(0)(X), s^A(0)(Y)) + G(s^A(0)(X), (s^A)'(0)(Y)) = 0.$$

Tedy (8.2) je splněno. Druhá implikace také platí, ale není tak jednoduchá.

Obecně nelze vypočítat grupu holonomie z tenzoru křivosti a jeho kovariantních derivací. Může být dokonce obtížné najít samotnou grupu holonomie i invariantní kvadratickou formu. Tato situace se zjednoduší v reálně analytickém případě: předpoklady na $\Phi(x)$ můžou být přeformulovány jako předpoklady pro $\underline{h}(x)$. Nyní tedy máme přirozenou motivaci pro zavedení vektorového podprostoru $H(x)$, $x \in M$, do něhož patří všechny symetrické bilineární formy vyhovující podmínce Lemmatu 8.4:

$$\begin{aligned} H(x) := \{G_x \in S^2(T^*_xM) \,|\, G_x(AX, Y) + G_x(X, AY) = 0, \\ A \in \underline{h}(x),\ X, Y \in T_xM\}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Jestliže ∇ je Riemannova konexe, pak pro každý bod $x \in M$ obsahuje $H(x)$ pozitivně definitní formu. Při splnění dodatečných podmínek platí také obrácená věta:

Věta 8.5 [37] *Nechť je dána souvislá, jednoduše souvislá (M, ∇), $x \in M$, a nechť existuje pozitivně definitní forma $G_{x_0} \in H(x)$. Pak ∇ je Riemannova konexe.*

Mohlo by být obtížné ověřit, zda existuje v $H(x)$ pozitivně definitní forma. Dosud není znám žádný přímý rozhodovací algoritmus založený pouze na lineární algebře. Zde uvedeme efektivní algoritmus založený na jistých geometrických vlastnostech Riemannovy konexe, totiž na kanonickém de Rhamově rozkladu tečného prostoru T_xM Riemannovy variety (M, g) vzhledem ke grupě holonomie $\Phi(x)$, [37].

8.3 Rozhodovací algoritmus

V [37] O. Kowalski navrhl algoritmus založený na vlastnostech algebry holonomie, který umožňuje efektivně rozhodnout, zda daná analytická konexe na analytické varietě vyhovující dodatečným podmínkám je Riemannovská, a v kladném případě ukazuje metodu konstrukce všech odpovídajících Riemannových metrik.

Nechť je (M, ∇) souvislá, jednoduše souvislá a analytická. Označme

$$\begin{aligned} \underline{h}_r(x) = \operatorname{span}\{&\nabla^k R(X, Y; Z_1, \ldots, Z_k), \\ &X, Y, Z_1, \ldots, Z_k \in T_x M, \quad x \in M, \quad 0 \leq k \leq r\}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Bodu x budeme říkat Φ-*regulární* (regulární, generický), jestliže dimenze $\dim \underline{h}_r(x)$ podprostoru dosáhne svého maxima v okolí U_x bodu x pro každé $r \in \mathbf{N}$.

Množina Φ-regulárních bodů je hustá otevřená podmnožina v M. V regulárním bodě je posloupnost podprostorů konstantní od nějakého N ($\underline{h}_N(x) = \underline{h}_{N+1}(x)$) a totéž musí platit v jeho okolí. Použitím kovariantní derivace dostaneme $\underline{h}(y) = \underline{h}_N(y)$ v libovolném bodě $y \in U_x$. Proto najdeme-li podprostory $\underline{h}_r(y)$ na souřadnicovém okolí bodu x, jsme schopni rozhodnout, jestli x je regulární nebo ne; v okolí regulárního bodu můžeme spočítat algebru $\underline{h}(y)$ v daném souřadnicovém systému.

Věta 8.6 [79] *Nechť (M, g) je Riemannova varieta, ∇ Levi-Civitova konexe g. Dále $T_x M = T_x^0 \oplus T_x^1 \oplus \ldots \oplus T_x^k$ je kanonický rozklad tečného prostoru $T_x M$ vzhledem ke grupě holonomií $\Phi(x)$, T^i je involutivní distribuce, kterou získáme paralelním přenosem prostoru $T_x^i, i = 1, \ldots, k$. Nechť $y \in M$ je libovolný bod, jako M_i označíme maximální integrální varietu distribuce $T^i, i = 1, \ldots, k$, která prochází bodem y. Potom*

1. *bod y má otevřené okolí $V = V_0 \times V_1 \times \ldots \times V_k$, $V_i, i = 1, \ldots, k$ je otevřené okolí bodu y v M_i, Riemannova metrika na V je přímým součinem Riemannových metrik na V_i;*

2. *maximální integrální varieta M_0 je lokálně eukleidovská (každý bod v M_0 má otevřené okolí izometrické s nějakou otevřenou podmnožinou n_0-rozměrného eukleidovského prostoru), $n_0 = dim M_0$;*

3. *je-li M jednoduše souvislá, je grupa holonomií $\Phi(x)$ přímým součinem normálních podgrup $\Phi^0(x) \otimes \Phi^1(x) \otimes \ldots \otimes \Phi^k(x)$,$\Phi^i(x)$ je triviální na $T_x^j, j \neq i$, a je ireducibilní na $T_x^i, i = 1, \ldots, k$; $\Phi^0(x)$ obsahuje pouze identickou transformaci;*

4. *je-li varieta M jednoduše souvislá, je kanonický rozklad $T_x M$ jednoznačný až na pořadí.*

Lemma 8.7 *Podprostor $H(x) \subset S^2(T_x^*M)$ je tvořen všemi bilineárními formami*

$$G_x = G_0 + \lambda_1 G_1 + \ldots + \lambda_p G_p,$$

kde $\lambda_i \in \boldsymbol{R}, i = 1, \ldots, p$ a G_0 je libovolná symetrická bilineární forma na T_xM, jejíž nulový podprostor obsahuje podprostor $\overset{\perp}{T_x^0}$ (ortogonální doplněk prostoru T_x^0 vzhledem k formě g) a pro každé $i = 1, \ldots, s$ je G_i zvolená pozitivně definitní bilineární forma na T_x^i, jejímž nulovým prostorem je $\hat{T}_x^i$.

Nyní budeme hledat kanonický rozklad prostoru T_xM bez použití metriky g. Jsou-li $G^1, \ldots, G^p$ báze prostoru $H(x)$ a libovolná regulární (nemusí být pozitivně definitní) forma $\hat{h} \in H(x)$. Dále na T_xM zavedeme endomorfismy S^ℓ:

$$\hat{h}(S^\ell u, v) = G^\ell(u, v), \qquad \alpha = 1, \ldots p; u, v \in T_xM. \tag{8.5}$$

C_x je komutant (podprostor prostoru všech endomorfismů na T_xM, generovaný komutátory $[S^\ell, S^k]$). N_x je nulový prostor C_x.

Věta 8.8 *Je-li $C(x) \neq 0$, pak $\hat{N}_x$ je ortogonální doplněk prostoru N_x v T_xM vzhledem k $\hat{h}$ shodný s prostorem T_x^0 (maximálním podprostorem v T_xM, na němž je grupa holonomií triviální). Pro $C(x) = 0$ je buď $dim T_x^0 = 0$ nebo $dim T_x^0 = 1$. Restrikce $G^\ell | T_x^0, \ell = 1, \ldots, p$ generují prostor $S^2(T_x^0)$. $\hat{h}|N_x$ je regulární a prostor $H(x)|N_x \subset S^2(N_x^*)$ je generován pozitivně semidefinitními formami $h_1, \ldots, h_s$, jejichž nulové prostory $N_1, \ldots, N_s$ splňují ortogonální rozklad (vzhledem k $\hat{h}|N_x$):*

$$N_x = \hat{N}_1 \oplus \ldots \oplus \hat{N}_s.$$

Pokud si zvolíme regulární formu $\hat{h} \in H(x)$, můžeme (pokud $C(x) \neq 0$) najít rozklad $T_xM = T_x^0 \oplus N_x$. Výše napsaná věta 8.8 dává také návod jak rozložit prostor N_x, pokud známe pozitivně semidefinitní formy $H(x)|N_x$. Jsou-li $(G^1, \ldots, G^p)$ báze prostoru $H(x)$, pak $G^i|N(x)$ generují prostor $H(x)|N(x)$, ale tyto restrikce nemusí být pozitivně semidefinitní.

Následující věta uvádí jak najít rozklad prostoru $N(x)$ pro obecnou bázi $g^{(1)}, \ldots, g^{(r)}$.

Věta 8.9 *Nechť* $\hat{N}_1 \oplus \ldots \oplus \hat{N}_s$ *je ortogonální rozklad* N_x *z věty 8.8,* $g^{(1)}, \ldots, g^{(r)}$ *báze* $H(x)|N_x$*,* $S^{(1)}, \ldots, S^{(r)}$ *endomorfismy* N_x *určené vztahem* $\hat{g}(S^{(\ell)}u, v) = g^{(\ell)}(u, v), \ell = 1, \ldots, r; u, v \in N_x$*. Dále nechť* $\left\{Z_1^{(1)}, \ldots, Z_{p_1}^{(1)}, Z_1^{(2)}, \ldots, Z_{p_2}^{(2)}, Z_1^{(r)}, \ldots, Z_{p_r}^{(r)}\right\}$ *je množina všech vlastních podprostorů operátorů* $S^{(1)}, \ldots, S^{(r)}$*. Pak každý podprostor* $\hat{N}_1, \ldots, \hat{N}_s$ *můžeme zapsat jako průnik* $Z_{\alpha_1}^{(1)} \cap \ldots \cap Z_{\alpha_r}^{(r)}; \alpha_\ell = 1, \ldots, p_j; j = 1, \ldots, r$ *a každý vlastní prostor* $Z_{\alpha_i}^{(i)}$ *lze zapsat jako přímý součet prostorů* $\hat{N}_1, \ldots, \hat{N}_s$*. Dále* $r = s$ *a* $g^{(\ell)}|\hat{N}_i$ *je násobek příslušné* $g_i|\hat{N}_i$*.*

Nyní můžeme pomocí vět 8.8, 8.9 uvést algoritmus, díky němuž zjistíme, že je daná konexe metrizovatelná.

Algoritmus

1. Vybíráme lokální souřadnice na otevřené podmnožině $U \subset M$ v okolí bodu x a počítáme tenzor křivosti, jeho kovariantní derivace v x a podprostory $\underline{h}_o(x) \subset \underline{h}_1(x) \subset \ldots$ v x (krok za krokem). Jestliže existuje přirozené N takové, že $\underline{h}_N(x) = \underline{h}_{N+1}(x)$, pak x je Φ-regulární. Jestliže ne, zkusíme jiný bod.

2. Jestliže x je regulární, pak podle Frobeniovy věty spočítáme prostor $H(x)$ jako prostor řešení homogenního systému algebraických rovnic získaných z (8.3), kde položíme postupně $A = \nabla^r R$, $r = 0, \ldots, N$. Tedy najdeme řešení rovnic z (3.2), (3.3) odpovídající indexům $r \leq N$.

   Dále najdeme $\dim H(x)$. Jestliže $p = \dim H(x) = 0$, ∇ není Riemannovsky metrizovatelná a proces UKONČÍME.

   Jestliže $p = \dim H(x) \geq 1$, vybereme bázi $\langle G^1, \ldots, G^p \rangle$ v $H(x)$; každý prvek z $H(x)$ má pak jednoznačné vyjádření ve tvaru $G = \lambda_1 G^1 + \cdots + \lambda_p G^p$. Lokální komponenty $G_{k\ell}^m$ forem báze jsou racionální funkce komponent kovariantních derivací $R^i_{k\ell m; s_1, \ldots, s_k}$.

3. Ke zjištění, zda v $H(x)$ existuje regulární forma nebo ne, vypočítáme determinant $\det(\sum_m \lambda_m G_{k\ell}^m)$, $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$, který je složen z nezávislých proměnných λ_ℓ. Jestliže výsledný mnohočlen je nenulový, ∇ není Riemannovsky metrizovatelná, proces UKONČÍME.

   Máme-li nenulový polynom, pak v $H(x)$ existuje regulární forma a můžeme pokračovat v našem hledání. Postupně vybíráme celá čísla $\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_p$ tak, abychom získali jednu konkrétní regulární formu $\hat{h} \in H(x)$.

4. V našich lokálních souřadnicích spočítáme lineární operátory $S^1, \dots, S^p$ odpovídající příslušným elementům báze $G^1, \dots, G^p$ definované pomocí regulární formy $\hat{h}$ vztahy:
$$\hat{h}(S^\ell X, Y) = G^\ell(X, Y), \quad X, Y \in T_x M, \quad \ell = 1, \dots, p. \tag{8.6}$$
Každý S^ℓ je $\hat{h}$-symetrický endomorfismus prostoru $(T_x M, \hat{h})$.

   Utvořme podprostor v End $(T_x M)$ generovaný všemi komutátory výše zmíněných endomorfismů, tzv. *komutant* $C_x = \operatorname{span}\{[S^\ell, S^k]; \ell, k = 1, \dots, p\}$ množiny $\{S^1, \dots, S^p\}$. Najdeme společný nulový prostor N_x komutantu C_x. Jestliže N_x není invariantní vyhledem k $S^1, \dots, S^p$, nebo jestliže restrikce $\hat{h}|N_x$ není regulární, pak ∇ není Riemannovská, proces UKONČÍME. Pokud je, pokračujeme.

5. Pokud $C_x \neq (0)$, najdeme ortogonální doplněk $\hat{N}_x$ k N_x v $T_x M$ vzhledem k formě $\hat{h}$. Spočítáme restrikce $G^\ell|\hat{N}_x$, $\ell = 1, \dots, p$. Jestliže negenerují prostor $S^2(\hat{N}_x^*)$ všech symetrických bilineárních forem na $\hat{N}_x$, pak ∇ není Riemannovská, proces UKONČÍME. Jestliže generují $S^2(\hat{N}_x^*)$, pak pokračujeme; jestliže $C_x = (0)$, pokračujeme rovnou.

6. V množině restrikcí $S^1|N_x, \dots, S^p|N_x$ najdeme množinu nezávislých generátorů $S^{(1)}, \dots, S^{(s)}$ prostoru $H(x)|N_x$. Spočítáme všechny vlastní prostory endomorfismů $S^{(1)}, \dots, S^{(s)}$ a všechny možné průniky $Z_\alpha^{(1)} \cap \dots \cap Z_\gamma^{(s)}$ těchto vlastních prostorů patřících k $S^{(1)}, \dots, S^{(s)}$. Nechť $\{(0), L_1, \dots, L_r\}$ je možina všech průniků. Pak nutné podmínky pro to, aby ∇ byla Riemannovská, jsou $r = s$ a $N_x = L_1 \oplus \dots \oplus L_r$ (ortogonální rozklad vzhledem k $\hat{h}$). Pokud podmínky nejsou splněny, proces UKONČÍME. Pokud jsou, pokračujeme.

7. Jestliže každá restrikce $\hat{h}|L_j$ je buď pozitivně nebo negativně definitní, pak ∇ je Riemannovská (a $\hat{N}_x := T_x^0 \subset T_x M$ je podprostor, na kterém $\Phi(x)$ působí triviálně). Jestliže toto neplatí, pak ∇ není Riemannovská, proces UKONČÍME.

Všimněme si, že když $n = 2$ a varieta (M_2, ∇) je reálně analytická, souvislá a jednoduše souvislá, pak rozhodovací procedura může být zjednodušena. Konexe ∇ je Riemannovská pouze ve dvou případech, buď v daném Φ-regulárním bodě x platí $p = \dim H(x) = 1$

a prostor $H(x)$ je generován pozitivně definitní formou, nebo $p = 3$ (což se stane právě tehdy, když $R = 0$) a pak je konexe ∇ eukleidovská.

Příklad 8.10 Pomocí algoritmu, který jsme uvedli výše, vyřešíme příklad 5.3. Vybereme obecný bod $x{=}(x_0, y_0)$; v našem případě je jistě regulární; všechny objekty budou počítané ve skutečnosti nejen v závislosti na x, ale na celé varietě.

Nezávisle na bodě je algebra holonomie (resp. zúžená grupa holonomie) triviální, $\underline{h} = (0)$, $\Phi^0(x) = (\mathrm{id}\,)$. Dále, protože v (8.3) máme uvažovat pouze nulový morfismus $A = 0$, je podmínka zřejmě splněna pro jakoukoliv symetrickou bilineární formu na tečném prostoru v bodě x.

Proto podprostor $H(x) \subset S^2(T_x^*\mathbf{R}^2)$, $x \in \mathbf{R}^2$ vyhovující (8.3) má maximální dimenzi $p = 3$ a může být zadán např. následujícími generátory: $H(x) = \mathrm{span}\,\{G^1(x), G^2(x), G^3(x)\}$, kde $G^i(x)$ (vyhovující (8.3) pro jakýkoliv bod x variety) jsou stejné jako v příkladě 5.3.

Zřejmě $G^1{+}G^2 \in H(x)$ je pozitivně definitní. Nicméně pro ilustraci vybereme regulární formu $\hat{g} = G^3$, která není pozitivně definitní (a má na varietě konstantní komponenty). Symetrické operátory z (8.6) a komutant množiny $\{S^1, S^2, S^3\}$ mají v libovolném bodě $x \in \mathbf{R}^2$ maticová vyjádření

$$S^1_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; S^2_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; S^3_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C_x = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Komutant není triviální, proto určíme ještě ortogonální doplněk $\hat{N}_x$ jeho nulového prostoru $N_x = \{(0,0)\}$ vzhledem k naší formě $\tilde{g} = G^3$, který by měl splývat s maximálním podprostorem, na kterém se Hol_x chová triviálně: $T^0 = \hat{N}_x = T_x\mathbf{R}^2$. Prostor $S^2(\hat{N}_x^*) = S^2(T_x^*\mathbf{R}^2)$ je generován zúženími $G^\ell|\tilde{N}_x = G^\ell|T^0 = G^\ell$.

Zbývající podmínky jsou automaticky splněny díky triviálnosti N_x. Proto Riemannovy metriky existují. Jejich konkrétní tvar odvodíme v další části textu.

8.4 Konstrukce metrik

Následující výsledky umožňují sestrojit konkrétní metriky.

Věta 8.11 [37, str. 8] *Mějme dánu souvislou, jednoduše souvislou analytickou varietu M s analytickou konexí ∇. Nechť U_x je otevřené okolí bodu $x \in M$ tvořené pouze Φ-regulárními body. Nechť ∇ je Riemannovská (tj. metrizovatelná a pozitivně definitní)* *konexe a nechť $\hat{g} \in H(x)$ je regulární na U. Nechť $H^{(1)}, \dots, H^{(t)}$ jsou analytická tenzorová pole na U taková, že pro jakýkoliv bod $y \in U$ jsou symetrické bilineární formy $H_y^{(1)}, \dots, H_y^{(t)}$ lineárně nezávislé na T_yM a mají stejný nulový prostor rovný N_y. Nechť restrikce $H^{(1)}|\hat{N}_y, \dots, H^{(t)}|\hat{N}_y$ na doplněk $\hat{N}_y$ prostoru N_y generují prostor $S^2(\hat{N}_y^*)$. Pak existují 1-formy ω_j^i na U takové, že $H^{(i)} = \sum \omega_j^i \otimes H^{(j)}$, $1 \le i, j \le t$. Navíc systém lineárních homogenních parciálních diferenciálních rovnic $d\lambda_i + \lambda_k \omega_i^k = 0$, $1 \le i \le t$, je úplně integrabilní.*

Věta 8.12 [37, str. 9] *Za stejných předpokladů a označení jako výše předpokládáme, že pro jakékoliv $y \in U_x$ je $N_y = L_{1,y} \oplus \dots \oplus L_{s,y}$ ortogonální rozklad vzhledem k $\hat{g}$. Nechť h_i je tenzorové pole na U takové, že jeho nulový prostor v $y \in U$ splývá s ortogonálním doplňkem $L_{i,y}$ v $(T_yM, \hat{g})$, a na $L_{i,y}$ se shoduje s $\hat{g}$ pro každé $y \in U$. Pak existují exaktní 1-formy ω_i (první integrály $\omega_i = df_i$) takové, že $\nabla h_i = \omega_i \otimes h_i$, $1 \le i \le s$ (tj. formy h_i jsou rekurentní).*

Věta 8.13 *Za stejných předpokladů jako výše s $H^{(i)}$ a h_i analytickými na U jsou všechny přípustné Riemannovy metriky tvaru*

$$g = \sum_{i,k=1}^{t} b_i \lambda_k^i H^{(k)} + \sum_{k=1}^{s} c_k e^{-f_k} h_k,$$

kde f_j je nějaká primitivní funkce exaktní diferenciální formy ω_j, $1 \le j \le s$, funkce $(\lambda_1^i, \dots, \lambda_t^i)$, $1 \le i \le t$ tvoří bázi prostoru řešení úplně integrabilního systému z věty 8.11 a reálné parametry b_i, c_k jsou vybrané tak, že g je pozitivně definitní.

Nyní dokončíme příklad 8.10 a nalezneme kompatibilní metriky.

Příklad 8.14 Podle vět (8.11), (8.12), (8.13) mají hledané metriky tvar $g = b_i \lambda_k^i H^{(k)}$, $1 \le i, k \le 3$ (druhý sčítanec je roven nule kvůli tomu, že N_y je na okolí triviální). Jako tenzorová pole $H^{(i)}$ můžeme zvolit

$$H^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; H^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; H^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a jejich kovariantní derivace jsou

$$\begin{aligned}
\nabla H^{(1)} &= -\tfrac{x}{x^2+1}(dx \otimes dy + dy \otimes dx) \otimes dx - \tfrac{y}{y^2+1}(dx \otimes dy + dy \otimes dx) \otimes dy, \\
\nabla H^{(2)} &= -\tfrac{2x}{x^2+1} dx \otimes dx \otimes dx - \tfrac{2y}{y^2+1} dy \otimes dy \otimes dy, \\
\nabla H^{(3)} &= -\tfrac{2x}{x^2+1} dx \otimes dx \otimes dx + \tfrac{2y}{y^2+1} dy \otimes dy \otimes dy.
\end{aligned}$$

Proto formy vyhovují $\nabla H^{(i)} = \omega^i_j \otimes H^{(i)}$ s

$$\begin{aligned}
\omega^1_1 &= -\tfrac{x}{x^2+1}dx - \tfrac{y}{y^2+1}dy, & \omega^1_2 &= \omega^1_3 = \omega^2_1 = \omega^3_1 = 0, \\
\omega^2_2 &= -\tfrac{x}{x^2+1}dx - \tfrac{y}{y^2+1}dy, & \omega^2_3 &= -\tfrac{x}{x^2+1}dx + \tfrac{y}{y^2+1}dy, \\
\omega^3_2 &= -\tfrac{x}{x^2+1}dx + \tfrac{y}{y^2+1}dy, & \omega^3_3 &= -\tfrac{x}{x^2+1}dx - \tfrac{y}{y^2+1}dy.
\end{aligned}$$

Prostor řešení soustavy linárních PDR

$$\begin{aligned}
d\lambda_1 &= \lambda_1 \tfrac{x}{x^2+1}dx + \lambda_1 \tfrac{y}{y^2+1}dy, \\
d\lambda_2 &= (\lambda_2 + \lambda_3)\tfrac{x}{x^2+1}dx + (\lambda_2 - \lambda_3)\tfrac{y}{y^2+1}dy, \\
d\lambda_3 &= (\lambda_2 + \lambda_3)\tfrac{x}{x^2+1}dx - (\lambda_2 - \lambda_3)\tfrac{y}{y^2+1}dy
\end{aligned}$$

má bázi $\langle \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3 \rangle$ určenou jako trojici funkcí $\lambda^i = (\lambda^i_1, \lambda^i_2, \lambda^i_3)$, $1 \leq i \leq 3$,

$$\lambda^1 = (\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}, 0, 0), \quad \lambda^2 = (0, x^2+1, x^2+1), \quad \lambda^3 = (0, y^2+1, y^2+1).$$

Maticové vyjádření kompatibilních Riemannových metrik je:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2b_2(x^2+1) & b_1\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1} \\ b_1\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1} & 2b_3(y^2+1) \end{pmatrix},$$

kde (reálné) parametry b_1, b_2, b_3 můžeme vybrat tak, aby g byla pozitivně definitní. V tenzorovém zápisu jsou všechny kompatibilní metriky vyjádřeny takto $g = 2b_2(x^2+1)dx \otimes dx + b_1\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}dx \otimes dy + b_1\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}dy \otimes dx + 2b_3(y^2+1)dy \otimes dy$, tj. v klasickém vyjádření jsou všechny přípustné Riemannovy metriky (při správné volbě parametrů b_i)

$$ds^2 = 2b_2(x^2+1)dx^2 + 2b_1\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}dxdy + 2b_3(y^2+1)dy^2.$$

Následující příklady již nebudou rozděleny na části.

Příklad 8.15 [79] Na $(\mathbf{R}^3, id)$ máme dánu symetrickou konexi ∇ s nenulovými složkami

$$\Gamma^1_{13} = \frac{z}{z^2+1}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{y}{y^2+1}, \qquad \Gamma^3_{11} = -z. \tag{8.7}$$

Naším úkolem je najít Riemannovu metriku, jejíž Levi-Civitova konexe je stejná jako konexe zadaná.

Nejdříve určíme tenzor křivosti a jeho kovariantní derivace. Jediné jejich nenulové složky jsou tyto:

$$R^1_{313} = -\frac{1}{(z^2+1)^2}, \qquad R^1_{313;3} = \frac{4z}{(z^2+1)^3},$$
$$R^3_{113} = \frac{1}{z^2+1}, \qquad R^3_{113;3} = -\frac{4z}{(z^2+1)^2}.$$

Endomorfizmy $R(e_1, e_3), \nabla R(e_1, e_3; e_3)$ mají maticové vyjádření

$$\left(R^l_{k13}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{(z^2+1)^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{z^2+1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(R^l_{k13;3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{4z}{(z^2+1)^3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4z}{(z^2+1)^2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

proto $\Phi^0(x, y, z) = \Phi^1(x, y, z) = \{(R(e_1, e_3))\}$ pro jakýkoliv bod $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, a tedy kovariantní derivace vyšších řádů není nutné hledat. Nyní zvolíme libovolný regulární bod (x_0, y_0, z_0) např. $0 = (0, 0, 0)$. Tím dostaneme

$$\Phi^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Jako další krok určíme bilineární formy G^1, G^2, které generují prostor $H(0) \subset S^2(T_0^*\mathbf{R}^3)$:

$$G^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jako další zvolíme regulární formu $\hat{g} \in H(0) = \mathit{span}\,\{G^1, G^2\}$ a to tak, aby nebyla pozitivně definitní $(G^1 + (-1)G^2)$, i když jistě pozitivně definitní formy obsahuje.

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dále určíme endomorfizmy S^1, S^2, komutant $C_0 = span\{S^1, S^2\}$ a nulový prostor komutantu N_0.

$$S^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_0 = \{0\}, \qquad N_0 = T_0\mathbf{R}^3.$$

Vzhledem k tomu, že $C_0 = \{0\}$, je $\hat{N}_0 = \{(0,0,0)\}$.

Protože dále $N_0 = T_0\mathbf{R}^3$, pak $S^{(1)} = S^1, S^{(2)} = S^2$. Teď určíme vlastní podprostory $Z^{(1)}_\alpha, Z^{(2)}_\beta$ operátorů $S^{(1)}, S^{(2)}$ (kde α, β jsou vlastní čísla operátorů) a všechny nenulové průniky $L_1, ..., L_r$ podprostorů. Proto, aby konexe byla metrizovatelná, je nutné, aby $r = 2$ a $N_0 = L_1 \oplus L_2$.

$$Z^{(1)}_0 = \{(0,1,0)\}, \quad Z^{(2)}_0 = \{(1,0,0),(0,0,1)\},$$

$$Z^{(1)}_1 = \{(1,0,0),(0,0,1)\}, \quad Z^{(2)}_{-1} = \{(0,1,0)\},$$

$$Z^{(1)}_0 \cap Z^{(2)}_0 = \{0\}, \quad Z^{(1)}_0 \cap Z^{(2)}_{-1} = \{(0,1,0)\} = L_1,$$

$$Z^{(1)}_1 \cap Z^{(2)}_0 = \{(1,0,0),(0,0,1)\} = L_2, \quad Z^{(1)}_1 \cap Z^{(2)}_{-1} = \{0\}.$$

Nyní určíme zúžení bilineární formy $\hat{g}^{(1)} = \hat{g}|L_1$ (negativně definitní), $\hat{g}^{(2)} = \hat{g}|L_2$ (pozitivně definitní). Lineární konexe ∇ je tedy metrizovatelná.

$$\left(\hat{g}^{(1)}_{ij}\right) = (-1), \quad \left(\hat{g}^{(2)}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalším krokem je již konstrukce metriky. Víme, že všechny metriky musí být ve tvaru $g = \sum_{i,k=1}^{t} b_i \lambda^i_k H^{(k)} + \sum_{k=1}^{s} c_k e^{-f_k} h_k, 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq s$. Všechno výše spočítané v bodě $(0,0,0)$ určíme v obecných souřadnicích (x,y,z) na okolí U_0:

$$\Phi_{(x,y,z)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{z^2+1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$(G^1_{ij}) = \begin{pmatrix} z^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (G^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\hat{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} z^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(S^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (S^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_{(x,y,z)} = \{0\}, \qquad N_{(x,y,z)} = T_{(x,y,z)}\mathbf{R}^3,$$

$$\hat{N}_{(x,y,z)} = \{(0,0,0)\}, \qquad N_{(x,y,z)} = \{(0,1,0)\} \oplus \{(1,0,0),(0,0,1)\}.$$

Protože $\hat{N}_{(x,y,z)} = \{(0,0,0)\}$, je $H^{(k)} = 0$, a proto první sčítanec ve výrazu pro metriku je roven nule.

Dále určíme bilineární formy h_k podle věty (8.12), což jsou tenzorová pole h_1, h_2 s maticovým vyjádřením

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} z^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále určíme funkce f_1, f_2:$f_1 = -\ln(y^2+1)$, $f_2 = konst.$

Konečně všechny výsledné metriky lze maticově zapsat jako

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} b(z^2+1) & 0 & 0 \\ 0 & -a(y^2+1) & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

kde a, b jsou takové konstanty, aby byla metrika pozitivně definitní.

Příklad 8.16 [79] Na $(\mathbf{R}^3, id)$ máme dánu symetrickou konexi ∇ s nenulovými složkami

$$\Gamma^1_{13} = \frac{z}{z^2+1}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{y}{y^2+1}, \qquad \Gamma^3_{11} = z. \tag{8.8}$$

Naším úkolem je najít Riemannovu metriku, jejíž Levi-Civitova konexe je stejná jako konexe zadaná.

Všimněme si, že zadání je téměř shodné s předchozím příkladem až na jediné znaménko. Zde jsou nenulové složky tenzoru křivosti a jeho kovariantní derivace:

$$\begin{aligned} R^1_{313} &= -\tfrac{1}{(z^2+1)^2}, & \qquad R^1_{313;3} &= \tfrac{4z}{(z^2+1)^3}, \\ R^3_{113} &= -\tfrac{1}{z^2+1}, & \qquad R^3_{113;3} &= \tfrac{4z}{(z^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Řešení rovnic $g_{im}R^m_{jkl} + g_{jm}R^m_{ikl} = 0$ je v obecném bodě generováno formami

$$(G^1_{ij}) = \begin{pmatrix} z^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (G^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Splňují také podmínky pro kovariantní derivace tenzoru křivosti. Vidíme, že neexistuje pozitivně definitní metrika, pro kterou by platilo $\nabla g = 0$. Podle algoritmu bychom získali bilineární formy

$$(\hat{g}^{(1)}_{ij}) = (-1), \quad (\hat{g}^{(2)}_{ij}) = \begin{pmatrix} z^2+1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tedy $\hat{g}^{(2)}$ je indefinitní. Konstrukcí metriky bychom získali metriku

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} A(z^2+1) & 0 & 0 \\ 0 & B(y^2+1) & 0 \\ 0 & 0 & -A \end{pmatrix},$$

přičemž konstanty A, B nelze nikdy zvolit tak, aby byla g Riemannovou metrikou.

9 Aplikace metrizovatelnosti ve variačním počtu

V různých odvětvích fyziky se ukazuje, že řešení řady problémů se značně zjednoduší, jestliže základní rovnice popisující uvažovanou situaci lze zapsat ve tvaru tzv. variačního principu, [26].

Budeme uvažovat systém diferenciálních rovnic druhého řádu na varietě M. Pro geometrický popis takové soustavy rovnic lze užít aparátu fibrovaných variet (viz kapitola 2.4). Užijeme následujícího značení. Pro n-dimenzionální diferencovatelnou varietu M bude $T^r_s(M)$ označovat prostor (bandl) tenzorových polí typu (r,s) na M, $p\colon TM \to M$ je tečný bandl variety M s přirozenou projekcí p, $p^2\colon T^2M \to M$ je bandl dva-rychlostí, [22]. Vektorový bandl $\mathbf{R} \times TM \to \mathbf{R}$ můžeme kanonicky ztotožnit s prvním jetovým prodloužením $J^1\pi = \pi_1\colon J^1(\mathbf{R} \times M) \to \mathbf{R}$ fibrované variety $\pi\colon \mathbf{R} \times M \to \mathbf{R}$, a $\mathbf{R} \times T^2M \to \mathbf{R}$ je kanonicky ztotožněn s druhým jetovým prodloužením projekce $J^2\pi = \pi_2\colon J^2(\mathbf{R} \times M) \to \mathbf{R}$.

Jsou-li (x^i) lokální souřadnice na $U \subset M$ a t je (globální) souřadnice na $\mathbf{R}$, užijeme na TM fibrovaných souřadnic (x^i, u^i) adaptovaných vzhledem k projekci p_M, na T^2M fibrovaných souřadnic (x^i, u^i, z^i) adaptovaných vzhledem k projekci p^2, kde jsme označili $u^i = \dot{x}^i$, $z^i = \ddot{x}^i$ pro $1 \leq i \leq n$. Podobně užijeme souřadnic (t, x^i, u^i) na $\mathbf{R} \times TM \to \mathbf{R}$, a (t, x^i, u^i, z^i) na $\mathbf{R} \times T^2M \to \mathbf{R}$.

Hladkou, nebo aspoň C^2-diferencovatelnou funkci $L\colon \mathbf{R} \times TM \to \mathbf{R}$ zde nazveme *Lagrangeovou funkcí* (prvního řádu) nebo krátce *Lagrangiánem.* V lokálních souřadnicích je $L = L(t, x, u)$.

Poznamenejme, že Lagrangiánem se někdy míní π_1-horizontální 1-forma λ na $\mathbf{R} \times TM$, ta má v adaptovaných souřadnicích na $\mathbf{R} \times TM$ vyjádření $\lambda = L\,dt$, kde $L(t, x^i, u^i)$ je právě Lagrangeova funkce.

Euler-Lagrangeovými operátory nebo *výrazy* Lagrangiánu L nazveme funkce $E_i(L)\colon \mathbf{R} \times T^2M \approx J^2(\mathbf{R} \times M) \to \mathbf{R}$,

$$E_i(L) = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u^i}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{9.1}$$

Zde $\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} + x^j \frac{\partial}{\partial u^j} + \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial z^j}$ značí „operátor totální derivace”. *Eulerovy* nebo *Euler-Lagrangeovy rovnice* odpovídající operátorům (9.1) mají tvar $E_i(L) = 0$, tedy

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u^i} = 0. \tag{9.2}$$

Výrazy $E_i(L)$ jsou komponenty Euler-Lagrangeovy formy $E_\lambda = E_i dx^i \wedge dt$ Lagrangiánu prvního řádu $\lambda = L\,dt$.

9.1 Variační problém

Nechť M je n-dimenzionální varieta a nechť $\gamma\colon\ I \to M$ je regulární křivka na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$ definovaná (v lokálních souřadnicích) parametrizací $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, $t \in I$. Nechť

$$\frac{d\gamma}{dt} = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = (\dot{x}^1(t), \ldots, \dot{x}^n(t))$$

je odpovídající tečné vektorové pole podél γ, předpokládejme, že platí $\dot{x}(t) \neq 0$ pro $t \in I$. V dalším předpokládáme, že všechny indexy jsou v mezích 1 až n. Nechť $A = \gamma(a)$, $B = \gamma(b)$ jsou dva pevné body na γ odpovídající parametrům a a $b \in I$. Máme-li dány diferencovatelné funkce $\omega^i\colon M \to \mathbf{R}$, v lokálních souřadnicích $\omega^i(x^1, \ldots, x^n)$ takové, že $\omega^i(A) = \omega^i(B) = 0$ a reálný parametr $\varepsilon \in \mathbf{R}$, potom parametrizace

$$\bar{x}^i(t) = x^i(t) + \varepsilon \cdot \omega^i(x^1(t), \ldots, x^n(t))$$

určuje novou křivku $\bar{\gamma}$: $\bar{x}(t) = (\bar{x}^1(t), \ldots, \bar{x}^n(t))$, která opět prochází danými body A a B a pro malé ε se „příliš neliší” od křivky dané.

Uvažujme integrál

$$I(\gamma) = \int\limits_a^b L(t, x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \dot{x}^2(t), \ldots, \dot{x}^n(t))\, dt, \tag{9.3}$$

kde L je analytická funkce s danými argumenty (Lagrangeova funkce).

Variační problém asociovaný s L znamená najít takové křivky $x(t)$, které minimalizují základní integrál (9.3) vzhledem k zadaným podmínkám na hranici $A = \gamma(a)$, $B = \gamma(b)$, [56].

Jestliže $\bar{I} = I(\bar{\gamma})$ je podobný integrál pro křivku $\bar{\gamma}$, pak rozvineme-li funkci L v Taylorovu řadu v mocninách ε, dostaneme

$$\bar{I} = I + \varepsilon \cdot \int\limits_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\omega^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial \omega^i}{\partial x^j}\dot{x}^j \right) dt + \ \cdots\ ,$$

kde „tečky" zastupují členy řádu ε^2 a vyšších. Koeficienty u ε, ε^2 atd. v předchozím rozvoji značíme δI, $\delta^2 I$ atd., a říkáme jim *první*, *druhá* atd. *variace* integrálu I. Speciálně, první variace

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \omega^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \omega^i}{\partial x^j} \dot{x}^j \right) dt$$

se často zapisuje v následujícím tvaru (integrujeme per partes ve druhém sčítanci a užijeme vlastností funkcí $\omega^i(x)$)

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right) \omega^i dt. \tag{9.4}$$

Integrálu (9.3) říkáme *stacionární*, jestliže jeho první variace je nulová, $\delta I = 0$, pro libovolnou volbu funkcí ω^i (tzv. Hamiltonův variační princip, $\delta \int L(t, x^i(t), \dot{x}^i(t)) dt = 0$). Křivce, pro kterou je to splněno, říkáme *extremála* příslušného integrálu. Jak plyne z (9.4), integrál (9.3) je stacionární, právě když jsou splněny Euler-Lagrangeovy rovnice (9.2).

Funkce $x^i(t)$, pro které integrál dosahuje svého minima nebo maxima, musí splňovat Euler-Lagrangeovy rovnice, a každé řešení $x = x(t)$ rovnic (9.2) je extremální křivkou integrálu (9.3). H. Cartan přesně formuloval tento variační problém pro Lagrangeovskou funkci L třídy C^2 [9]. V tom případě zní formule pro první variaci takto: $\delta I = dI(\bar{\gamma})/d\epsilon|_{\epsilon=0}$, a příslušné extremály γ třídy aspoň C^2 jsou řešení Euler-Lagrangeových rovnic (9.2). Problém může být formulován i poněkud obecněji, [54].

9.2 Inverzní problém a diferenciální rovnice druhého řádu

Obecný tvar systému obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, které obecně mohou záviset na čase, pro funkce $t \mapsto x^k(t)$; $k = 1, \ldots, n$ s definičním oborem, jenž je částí $\mathbf{R}^n$, nebo na souřadnicovém okolí $U \subset M$ nějaké n-dimenzionální variety M, má tvar

$$E_i\left(t, x^k, \dot{x}^k, \ddot{x}^k\right) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{9.5}$$

a říká se mu někdy „Helmholtzův systém", podle H. Helmholtze, který jako první provedl zkoumání v tomto směru. Poznamenejme, že ve skutečnosti Helmholtz sám neuvažoval explicitní závislost na čase. Řešit takový systém znamená najít lokální křivky $\gamma\colon I \to M$

na M, kde $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval, $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, takové, že platí

$$E_i\left(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt^2}\right) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{9.6}$$

Pokud je soustava vyřešena vzhledem k druhým derivacím, nabývá tvaru

$$a_{ij}\left(t, x^k, \dot{x}^k\right) \cdot \ddot{x}^j + b_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{9.7}$$

kde se užije Einsteinova sumace. Podle [26, str. 367] E_i mohou obsahovat druhé derivace pouze lineárně, tudíž (9.6) může být zapsána ve tvaru (9.7) bez ztráty obecnosti.

Rovnice kanonicky parametrizovaných geodetik na varietě (M, ∇) s lineární konexí

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \tag{9.8}$$

jsou přirozeným příkladem takového systému, který je ve speciálním tvaru, tedy vyřešený vzhledem k druhým derivacím, což obecně můžeme psát ve tvaru

$$\ddot{x}^i - f^i(t, x^k, \dot{x}^k) = 0, \qquad i, k = 1, \ldots, n. \tag{9.9}$$

Také naopak, pokud jsou funkce f^i v (9.9) kvadratickými formami v prvních derivacích, „komponentách rychlostí", s koeficienty závislými pouze na souřadnicích x^k, „složkách polohového vektoru", rovnice (9.9) představují geodetické dráhy.

Může tedy být užitečné vědět, jestli systém tvaru (9.6), případně (9.7), je možné vyjádřit ve tvaru odpovídajícím variačnímu principu, nebo zda alespoň nějaká lineární kombinace původních rovnic má tvar Lagrangeových rovnic nějakého Lagrangiánu. Přesněji [26], tzv. silný inverzní problém variačního počtu znamená řešit otázku:

Existuje funkce $L(t, x^k, u^k)$ dostatečně diferencovatelná a taková, že $E_i = 0$ jsou právě Euler-Lagrangeovy rovnice variačního principu $\delta \int L(t, x, \dot{x})dt = 0$, $E_i = E_i(L)$?

Tedy ptáme se, zda existují funkce L vyhovující rovnicím (9.1). Jestliže je odpověď kladná, chceme najít všechny takové funkce L.

V dimenzi $n = 2$ byla úplná odpověď na inverzní problém v reálně analytickém případě formulována Jessem Douglasem v [17].

Okruh použitelnosti Lagrangeova formalizmu může být rozšířen, [26]. Např. můžeme zkusit místo původních rovnic dosadit jejich lineární kombinace: Helmholtzova soustava (9.5) je nahrazena

$$\sum_j g_{ij}(t, x, u)E_i = 0. \tag{9.10}$$

Tzv. slabý inverzní problém variačního počtu, nebo problém multiplikátorů, znamená:

Určete všechny dvojice $((g_{ij}), L)$*, kde* $L(t, x^k, \dot{x}^k)$ *je Lagrangián a* $(g_{ij}(t, x^k, \dot{x}^k))$ *je nedegenerovaná matice funkcí (všechny objekty dostatečně diferencovatelné) taková, že*

$$\sum_j g_{ij} E_j = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u^i}. \tag{9.11}$$

Pokud je odpověď kladná, najděte všechny L *a* g_{ij}.

Funkcím g_{ij} se obvykle říká (Lagrangeovy) *multiplikátory.*

Problém je ve své obecné verzi obtížný a zatím otevřený. Jsou známy jen některé speciální nebo částečné odpovědi; např. rovnice geodetik v pseudo-Riemannově prostoru jsou vždy variační v tomto slabém smyslu.

9.3 Helmholtzovy podmínky

Klasický výsledek formuluje následující nutné a postačující podmínky.

Lemma 9.1 *Systém funkcí* $E_i \colon J^2(\boldsymbol{R} \times M) \to \boldsymbol{R}$ *(závislých obecně na* t, x^i, u^i, z^i*),* $i = 1, \dots, n$*, můžeme považovat za Euler-Lagrangeovy výrazy pro nějakou Lagrangeovu funkci* $L \colon J^1(\boldsymbol{R} \times M) \to \boldsymbol{R}$ *právě tehdy, když platí tzv. Helmholtzovy podmínky* [26]*:*

Vzhledem k libovolné adaptované mapě, následující vztahy platí identicky pro všechna $i, k = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial E_i}{\partial z^k} - \frac{\partial E_k}{\partial z^i} = 0, \tag{9.12}$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial u^k} + \frac{\partial E_k}{\partial u^i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_i}{\partial z^k} + \frac{\partial E_k}{\partial z^i}\right), \tag{9.13}$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial x^k} - \frac{\partial E_k}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_i}{\partial u^k} - \frac{\partial E_k}{\partial u^i}\right). \tag{9.14}$$

Pokud se rovnice dají zapsat v nějakém speciálním tvaru, příslušné podmínky se odpovídajícím způsobem modifikují.

První pokus zkoumat tyto rovnice učinil Helmholtz. V [27] formuloval nutné a postačující podmínky, ale dokázal pouze jejich nutnost. Důkaz, že jsou i postačující, podal později Mayer [52].

9.4 Konexe variační v zúženém smyslu na afinních varietách

Jak víme, důležitá věta (pseudo-)Riemannovy geometrie říká, že je-li dána nedegenerovaná metrika g na M, existuje jediná symetrická konexe ∇ na M „kompatibilní" s metrikou v tom smyslu, že metrika je kovariantně konstantní vzhledem ke konexi, $\nabla g = 0$. Geometricky řečeno, skalární součin indukovaný na jednotlivých tečných prostorech kvadratickým metrickým tenzorem se rovnoběžně posouvá podél všech křivek. Takové konexi říkáme Riemannova, nebo také Levi-Civitova (viz kapitola 2.12).

Problém metrizovatelnosti je obrácená úloha: pro danou konexi ∇ na varietě M máme formulovat nutné a postačující podmínky na konexi (v pojmech dané variety a konexe) pro to, aby byla právě Levi-Civitovou konexí nějaké metriky, v kladném případě všechny takové metriky najít.

Jak jsme se zmínili, systém nutných podmínek integrability podali již Eisenhart a Veblen, [19]. Jsou známy některé částečné odpovědi, a také ekvivalentní formulace, např. v řeči geodetických zobrazení. Např. v [53] je nalezen systém diferenciálních rovnic, který kontroluje tuto otázku. Ale úplné řešení problému v řeči vstupních dat dosud formulováno nebylo.

Řekneme, že lineární konexe na M je *variační v zúženém smyslu*, [32], [33], [75], jestliže existuje (aspoň třídy dva, nebo hladká) funkce $L\colon \mathbf{R} \times TM \to \mathbf{R}$, v lokálních fibrovaných souřadnicích $L = L(t, x, u)$, a nesingulární tenzorové pole $g\colon M \to T^0_2(M)$ typu $(0, 2)$ na M takové, že v libovolné lokální fibrované mapě splývají funkce

$$E_i = -g_{ik}(x)(z^k + \Gamma^k_{rs}(x)u^r u^s), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{9.15}$$

právě s Euler-Lagrangeovými výrazy $E_i(L)$ pro nějaký Lagrangián L; zde Γ^i_{jk} jsou složky konexe ∇.

Ukažme úzký vztah mezi variačností v zúženém smyslu a metrizovatelností lineární konexe na M [75]):

Věta 9.2 *Na varietě (M, ∇) s lineární konexí jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) ∇ je variační v zúženém smyslu;

(ii) symetrická část $\tilde{\nabla}$ konexe ∇ je metrizovatelná;

(iii) existuje nesingulární symetrické tenzorové pole g typu $(0,2)$ na M takové, že

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\ell} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\ell} \right); \tag{9.16}$$

$\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ jsou komponenty (symetrické) konexe $\tilde{\nabla}$, a $g^{i\ell}$ jsou složky tenzoru g^* duálního ke g v přirozeném sdružování, tj. $g^{i\ell}(x)$ je inverzní matice k matici $g_{i\ell}(x)$, $x \in M$;

(iv) existuje regulární symetrické tenzorové pole g typu $(0,2)$ na M takové, že rovnice

$$g_{ik}(x)(z^k + \Gamma^k_{rs}(x) u^r u^s) = 0 \tag{9.17}$$

jsou variační.

Důkaz. Ekvivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iv) plyne přímo z definice. Ekvivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) je klasická: jestliže symetrická konexe $\tilde{\nabla}$ na M je metrizovatelná a g je jedna z kompatibilních metrik, pak $\tilde{\nabla}$ je právě Riemannova konexe pseudo-Riemannovy variety (M, g); podmínka $\tilde{\nabla} g = 0$ je ekvivalentní vztahu (9.16) pro libovolnou symetrickou konexi. Nechť je nyní ∇ lineární (obecně nesymetrická) konexe na M a nechť $\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^i_{kj}$ značí komponenty její symetrické části $\tilde{\nabla}$.

Předpokládejme, že $\tilde{\nabla}$ je metrizovatelná, g je metrický tenzor kompatibilní s $\tilde{\nabla}$, tj. platí $\tilde{\nabla} g = 0$. Zaveďme (globálně) funkci L, $L(u) = \frac{1}{2} g_x(u,u)$, $u \in T_x M$; v lokálních fibrovaných souřadnicích je

$$L = \frac{1}{2} g_{rs}(x) u^r u^s. \tag{9.18}$$

Abychom ověřili, že L je Lagrangeova funkce, musíme vyjádřit odpovídající výrazy $E_i(L)$ a ověřit, že splňují Helmholtzovy podmínky. Dostáváme

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \partial_i g_{rs} u^r u^s, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u^i}\right) = u^j \partial_j g_{is} u^s + z^j g_{is} \delta^s_j, \tag{9.19}$$

tedy

$$\begin{aligned} E_i(L) &= \tfrac{1}{2} \partial_i g_{rs} u^r u^s - g_{is} z^s - \partial_r g_{is} u^r u^s \\ &\quad - \left[g_{is} z^s + \tfrac{1}{2} \left(\partial_s g_{ir} + \partial_r g_{is} - \partial_i g_{rs} \right) \right] u^r u^s. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Zkráceně,

$$E_i(L) = -\left(g_{is} z^s + \tilde{\Gamma}_{irs} u^r u^s \right) = -\left(g_{is} z^s + g_{i\ell} \tilde{\Gamma}^\ell_{rs} u^r u^s \right), \tag{9.21}$$

kde

$$2\tilde{\Gamma}_{irs} = 2g_{i\ell}\tilde{\Gamma}^{\ell}_{rs} = \partial_s g_{ir} + \partial_r g_{is} - \partial_i g_{rs}. \tag{9.22}$$

Ověřme podmínky (9.12)–(9.14). Díky symetrii tenzoru g, výrazy (9.1) $E_i(L)$, splňují Helmholtzovy podmínky (9.12):

$$\frac{\partial E_i}{\partial z^k} - \frac{\partial E_k}{\partial z^i} = -g_{is}\delta^s_k + g_{ks}\delta^s_i = -g_{ik} + g_{ki} = 0. \tag{9.23}$$

Pro ověření (9.13) užijme podmínku $\tilde{\nabla} g = 0$ a symetričnost g:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial E_i}{\partial u^k} + \tfrac{\partial E_k}{\partial u^i} - \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial E_i}{\partial z^k} + \tfrac{\partial E_k}{\partial z^i}\right) \\ &= 2\left(\tilde{\Gamma}_{iks} + \tilde{\Gamma}_{kis} + \tfrac{\partial g_{ki}}{\partial x^s}\right) u^s = 2(\tilde{\nabla} g)\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}; u^s \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) = 0. \end{aligned} \tag{9.24}$$

Užijeme formuli (9.20) a dostaneme

$$\frac{\partial E_i}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{is}}{\partial x^k} z^s + \left(\frac{\partial^2 g_{is}}{\partial x^k \partial x^r} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{rs}}{\partial x^k \partial x^r}\right) u^r u^s, \tag{9.25}$$

a konečně (9.14), což dokazuje implikaci (ii) $\Rightarrow$ (i).

Naopak, je-li konexe variační v zúženém smyslu, tj. platí-li Helmholtzovy podmínky, potom symetričnost g vyplývá z (9.12); (9.13) spolu s (9.12) dávají $\tilde{\nabla} g = 0$; jestliže g je symetrický a kovariantně konstantní vzhledem ke konexi $\tilde{\nabla}$, pak (9.14) nedává novou podmínku. Tedy (i) $\Rightarrow$ (ii).

Jestliže je systém diferenciálních rovnic druhého řádu ve speciálním tvaru, kdy druhé derivace jsou kvadratické formy v prvních derivacích,

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{rs}(x)\dot{x}^r\dot{x}^s = 0, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{9.26}$$

můžeme užít věty 9.2 pro posouzení, zda je systém odvoditelný z nějakého Lagrangiánu. Budeme předpokládat, že funkce $\Gamma^k_{rs}(x)$ jsou komponentami symetrické lineární konexe ∇ na nějakém okolí $U \subset \mathbf{R}^n$. Je-li ∇ (lokálně) metrizovatelná a $g_{ij}(x)$ (splňující $\det(g_{ij}(x)) \neq 0$ v každém bodě $x \in U$) jsou komponenty nějaké nedegenerované metriky g kompatibilní s ∇ na U, pak systém rovnic (9.26) je ekvivalentní systému

$$g_{ik}\left(\ddot{x}^k + \Gamma^k_{rs}(x)\dot{x}^r\dot{x}^s\right) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{9.27}$$

tedy funkce $g_{ik}(x)$ jsou hledané variační multiplikátory. Naopak, je-li dán systém diferenciálních rovnic tvaru (9.26) a existují-li Lagrangeovy multiplikátory nezávislé na čase i rychlostech, pak jsou právě složkami metriky, jejíž geodetiky jsou určeny rovnicemi (9.26) (viz kapitola 2.10).

9.5 Konexe variační v zúženém smyslu v dimenzi $n = 2$

V dimenzi dva dostáváme následující výsledky.

Věta 9.3 *Mějme dánu 2-dimenzionální varietu* (M_2, ∇) *se symetrickou lineární konexí* ∇. *Jestliže v okolí každého bodu* x *z* M_2 *nastane jedna z následujících možností:*

- *tenzor křivosti* R *konexe* ∇ *je nulový,*
- *Ricciho tenzor je nesingulární, symetrický a rekurentní,*

potom ∇ *je (lokálně) variační a (lokálně) metrizovatelná na nějakém okolí každého bodu.*

Následující příklad lokálně metrizovatelné konexe ukazuje možné obstrukce, které mohou bránit globální metrizovatelnosti, a tedy i globální variačnosti v zúženém smyslu ve třídě diferencovatelnosti C^∞.

Příklad 9.4 [69] Na varietě $M_2 = \mathbf{R}^2$ s atlasem $(\mathbf{R}^2, \mathrm{id})$ a s globálními souřadnicemi (x^1, x^2) studujme (globální) symetrickou lineární konexi ∇ definovanou komponentami takto:

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \begin{cases} \frac{h'(x^2)}{h(x^2)} & \text{pro } x^2 > 0, \\ 0 & \text{pro } -1 \leq x^2 \leq 0, \\ \frac{f'(x^2)}{f(x^2)} & \text{pro } x^2 < -1, \end{cases}$$

$$\Gamma^2_{11} = \begin{cases} h'(x^2) \cdot h(x^2) & \text{pro } x^2 > 0, \\ 0 & \text{pro } -1 \leq x^2 \leq 0, \\ f'(x^2) \cdot f(x^2) & \text{pro } x^2 < -1, \end{cases}$$

jinak $\Gamma^i_{jk} = 0$, kde $f, g \in C^\infty(\mathbf{R})$ jsou hladké reálné funkce jedné proměnné splňující (v [69] je vynechána podmínka $a \neq -1$)

$$\begin{aligned} &h(t) \neq 0 \text{ pro } t > 0, && \lim_{t \to 0} h(t) = 1, \\ &f(t) \neq 0 \text{ pro } t < -1, && \lim_{t \to -1} f(t) = a \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}, \\ &\lim_{t \to 0} \frac{d^s h(t)}{dt^s} = 0 \text{ pro } s \in \mathbf{N}, && \lim_{t \to 0} \frac{d^s f(t)}{dt^s} = 0. \end{aligned}$$

Komponenty křivosti a Ricciho tenzoru jsou

$$R^1_{112} = -R^1_{121} = R_{12} = 0, \qquad R^2_{221} = -R^2_{212} = R_{21} = 0,$$

$$R^1_{212} = -R^1_{221} = R_{22} = \begin{cases} \frac{-h''(x^2)}{h(x^2)} & \text{pro } x^2 > 0, \\ 0 & \text{pro } -1 \le x^2 \le 0, \\ \frac{-f''(x^2)}{f(x^2)} & \text{pro } x^2 < -1, \end{cases}$$

$$R^2_{121} = -R^2_{112} = R_{11} = \begin{cases} h''(x^2) \cdot h(x^2) & \text{pro } x^2 > 0, \\ 0 & \text{pro } -1 \le x^2 \le 0, \\ f''(x^2) \cdot f(x^2) & \text{pro } x^2 < -1. \end{cases}$$

Ricciho tenzor je zřejmě symetrický na M. Uvažujme disjunktní rozklad $M = N_I \cup N_{II} \cup N_{III}$ (odpovídající definičním oborům jednotlivých předpisů pro komponenty konexe), kde

$$N_I = \{(x^1, x^2); -1 \le x^2 \le 0\},$$

$$N_{II} = \{(x^1, x^2); x^2 > 0\}, \qquad N_{III} = \{(x^1, x^2); x^2 < -1\}.$$

Na N_I je $R = Ric = 0$, zúžení konexe $\nabla|N_I$ je ploché, a tedy metrizovatelné; můžeme si dokonce zvolit signaturu. Na N_{II} je zúžený Ricciho tenzor rekurentní. Protože $R_{11;1} = R_{22;1} = 0$, položme $\varrho_1(x) = 0$.

Dále počítejme $R_{11;2} = (h^{(3)} \cdot h - h'' \cdot h')(x^2)$, $R_{22;2} = -\frac{h^{(3)} \cdot h - h'' \cdot h'}{h^2}(x^2)$, a volme $\varrho_2(x) = \frac{h^{(3)} \cdot h - h'' \cdot h'}{h'' \cdot h}(x^2)$. Pak $\varrho = \varrho_2(x) dx^2$ splňuje $\nabla Ric = \varrho \otimes Ric$. Nechť $\beta \in \mathbf{R} - \{0\}$, $g_{II} = (h(x^2))^2 (dx^1)^2 - (dx^2)^2$; obecný tvar pro kompatibilní metriky na $(N_{II}, \nabla|N_{II})$ je βg_{II} (Lorentzovské metriky).

Díky vlastnostem h, pro každé $\beta \neq 0$ existuje jediné spojité rozšíření βg_{II} na N_I, tvaru $\beta((dx^1)^2 - (dx^2)^2)$ takové, že ∇ je Levi-Civitova konexe rozšířené metriky na $N_I \cup N_{II}$. Podobně Ric je rekurentní na N_{III}; kompatibilní metriky jsou γg_{III}, $\gamma \neq 0$, $g_{III} = (f(x^2))^2 (dx^1)^2 - (dx^2)^2$; každé γg_{III} má spojité rozšíření $\gamma(a^2 (dx^1)^2 - (dx^2)^2)$ na N_I takové, že zúžení ∇ je Levi-Civitova konexe rozšířené metriky na $N_I \cup N_{III}$. Ale platí $a^2 \neq 1$ (protože $a \neq -1$, $a \neq 1$); tedy nelze najít žádnou globální metriku na celé varietě M, která by byla kompatibilní s danou konexí ∇.

Příklad 9.5 [19, str. 122] Na $\mathbf{R}^2$ se souřadnicemi $x = (x^1, x^2)$ uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$$(\ddot{x}^1)^2 + (x^1 - x^2)(\dot{x}^1)^2 = 0, \quad (\ddot{x}^2)^2 + (x^1 - x^2)(\dot{x}^2)^2 = 0. \tag{9.28}$$

Křivky $c(s) : I \to \mathbf{R}^2$ (parametrizované obloukem), které jsou řešením soustavy, určují soustavu geodetik (symetrické) lineární konexe ∇ s komponentami $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = x^1 - x^2$, jinak $\Gamma^i_{jk} = 0$. Požadujeme, aby konexe (lineární, bez torze) byla metrizovatelná, tj. chceme najít symetrické tenzorové pole g typu $(0,2)$ s $\nabla g = 0$. Odpovídající soustavu

$$\begin{aligned} &\partial_1 g_{11} = (x^1 - x^2) g_{11}, \quad \partial_1 g_{12} = 0, \quad \partial_1 g_{22} = 0, \\ &\partial_2 g_{11} = 0, \quad \partial_2 g_{12} = (x^1 - x^2) g_{12}, \quad \partial_2 g_{22} = (x^1 - x^2) g_{22} \end{aligned}$$

jsme v kapitole „Přímá metoda” vyřešili přímo (Příklad 4.1). Zjistili jsme, že jediné řešení je triviální: $g_{ij} = 0$ pro každé i, j. Pro soustavu (9.28) se nám tedy nepodařilo najít multiplikátory tvaru $g_{ij}(x)$ (to ale nevylučuje možnost, že by mohly existovat obecnější funkce tvaru $g_{ij}(t, x, u)$, které by danou soustavu převedly na variační v slabém smyslu).

Příklad 9.6 [11] Rovnice

$$\ddot{x}^1 = -(\dot{x}^1)^2, \qquad \ddot{x}^2 = -(\dot{x}^2)^2 \tag{9.29}$$

určují na $M_2 = \mathbf{R}^2$ symetrickou lineární konexi $\nabla_{X_1} X_1 = X_1 = 0$, $\nabla_{X_2} X_2 = X_2$, jinak $\nabla_{X_i} X_j = 0$, $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, s Christoffelovými symboly

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = 1, \qquad \text{jinak} \quad \Gamma^k_{ij} = 0.$$

Pokud vypočteme tenzor křivosti R, zjistíme, že je nulový (ekvivalentně $Ric = 0$) a tedy konexe ∇ je plochá, proto (lokálně) metrizovatelná, a zadaný systém je variační. Ke zjištění komponent metriky, nebo jinak řečeno, variačních multiplikátorů g_{ij}, jsme řešili soustavu PDR (viz Příklad 4.4)

$$\begin{aligned} &\partial_1 g_{11} = 2 g_{11}, \qquad \partial_1 g_{12} = g_{12}, \qquad \partial_1 g_{22} = 0, \\ &\partial_2 g_{11} = 0, \qquad \partial_2 g_{12} = g_{12}, \qquad \partial_2 g_{22} = 2 g_{22}. \end{aligned}$$

Je-li dáno $x_0 \in M$, nesingulární matice 2×2 (g^0_{ij}) a počáteční podmínky $g_{ij}(x_0) = g^0_{ij}$, je řešením $g_{11} = g^0_{11} e^{2x^1}$, $g_{12} = g^0_{12} e^{x^1 + x^2}$, $g_{22} = g^0_{22} e^{2x^2}$, proto získáme tuto (globální) metriku na $\mathbf{R}^2$ a odpovídající Lagrangián:

$$g_{ij} = g^0_{ij} \cdot e^{x^i + x^j}, \qquad L = \frac{1}{2} g^0_{ij} e^{x^i + x^j} u^i u^j.$$

Poznámka 9.7 Pokud zavedeme v podstatě stejnou konexi na „nekonečném válci" $S^1 \times \mathbf{R}$, nebo na anuloidu $T^2 = S^1 \times S^1$, tak konexe není globálně metrizovatelná. Budeme-li uvažovat (souvislou, dokonce hladkou) funkci $f(t) = |X_1(\gamma(t))|$, $t \in (0,1)$, pak délka (hladkého a globálně definovaného) souřadnicového vektorového pole X_1 podél „křivky toku vektorového pole" (což je kružnice bez jednoho bodu) splňuje $f' = 2f$; metrika se tedy chová „exponenciálně". Musíme očekávat problémy s úspěšným „spojováním" metriky na překrývání okolí.

Příklad 9.8 Soustava

$$\ddot{x}^1 + \dot{x}^1\dot{x}^2 = 0, \qquad \ddot{x}^2 - \frac{1}{2}\exp(x^2)(\dot{x}^1)^2 = 0 \tag{9.30}$$

zadává právě systém kanonicky parametrizovaných geodetik symetrické lineární konexe, jejímiž jedinými nenulovými komponentami jsou $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2}$, $\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2}e^{x^2}$. V příkladu 6.7 je již uvedeno (pomocí Ricciho tenzoru), že konexe je metrizovatelná. Všechny její (globální) kompatibilní metriky na $\mathbf{R}^2$ tvoří jednoparametrickou soustavu

$$g_b = \exp\left(x^2 + b\right) dx^1 \otimes dx^1 + \exp\left(b\right) dx^2 \otimes dx^2, \quad b \in \mathbf{R}, \tag{9.31}$$

která poskytuje Lagrangiány $L = \frac{1}{2}e^{x^2+b}(u^1)^2 + \frac{1}{2}e^b(u^2)^2$.

10 Rekonstrukce konexe nebo metriky

Nyní vyjdeme z výsledků uvedených v [57]. Zavedeme speciální tzv. pre-semigeodetické mapy, které budeme charakterizovat jak geometricky, tak v řeči zadané konexe. Za tím účelem formulujeme verzi věty typu Peano-Picard-Cauchyovy o existenci a jednoznačnosti řešení problému se zadanými počátečními podmínkami pro systém obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Zavedený aparát se pak užije v pevné pre-semigeodetické mapě variety se zadanou lineární symetrickou konexí: rekonstruujeme, nebo sestrojíme (doplníme), symetrickou lineární konexi v jistém souřadnicovém okolí na základě znalosti „počátečních podmínek", totiž ze zúžení konexe na pevnou $(n-1)$-rozměrnou podvarietu S a z vhodně vybraných komponent tenzoru křivosti R v souřadnicovém okolí.

V Riemannově prostoru užijeme speciálního případu tzv. semigeodetických souřadnic. Užitím podobných metod jsme schopni také rekonstruovat, nebo sestrojit, metrický tenzor typu $(0,4)$ pseudo-Riemannovy variety v definičním oboru semigeodetických souřadnic, je-li dáno zúžení metriky na nějakou neizotropickou nadplochu a jisté komponenty tenzoru křivosti v „objemu".

Připomeňme, že postupy vedoucí k vyřešení problému o nalezení Riemannovy metriky z těch či oněch podmínek či informací může být zajímavé jak z hlediska teoretického, tak z hlediska praktického. Jak jsme viděli, řada autorů se zabývala možností nalezení metrického tenzoru ze znalosti tenzoru křivosti, [38, str. 135-136], nebo dokázala existenci metriky s předepsaným Ricciho tenzorem, [13], [77] apod. Obecně, řešit takový problém znamená řešit relativně komplikovaný systém nelineárních parciálních diferenciálních rovnic, jejichž koeficienty jsou vyjádřeny jako funkce komponent Riemannova tenzoru křivosti. Jednou z možností, jak zjednodušit situaci, je najít vhodný souřadnicový systém, vzhledem k němuž se soustava původně zadaných rovnic výrazně zjednoduší. Naším cílem je ukázat takový systém souřadnic a jeho použití.

V článku [25], v souřadnicovém okolí Riemannova prostoru (s pozitivně definitní metrikou), na kterém jsou dány speciální, semigeodetické souřadnice, jsou komponenty metrického tenzoru vyjádřeny pomocí hodnot, kterých nabývají na jisté nadploše a dále z některých komponent tenzoru křivosti typu $(1,3)$ v daném souřadnicovém okolí. Podejme stručné vysvětlení tohoto přístupu.

Předpokládejme, že $\gamma\colon I \to M$ je geodetika na n-dimenzionální Riemannově varietě M, a p je bod na γ. Pak existují lokální souřadnice $(t, x^2, \ldots, x^n)$ v okolí bodu p takové, že pro malá t, $\gamma(t, 0, \ldots, 0)$ představuje geodetiku v okolí p; na γ je metrickým tenzorem eukleidovská metrika. Na γ (a pouze na ní) se všechny Christoffelovy symboly anulují (tedy všechny zmíněné vlastnosti jsou splněny pouze na vybrané geodetice). Zde budeme uvažovat obecnější situaci. Zavedeme speciální pre-semigeodetické souřadnice, které indukují, v jistém tubulárním okolí, speciální parametrizace na všech kanonických geodetikách současně, a charakterizujeme je geometricky i v řeči příslušné konexe. Zmíněné Fermiho souřadnice jsou pak speciálním případem. Poznamenejme, že Fermiho souřadnice, nazvané podle italského fyzika Enrico Fermi, [21], jsou široce použitelné v Riemannově geometrii i v teoretiké fyzice, [4], [52], [51] apod.

Jako hlavního prostředku užijeme vět z teorie diferenciálních rovnic. Formulujeme větu o existenci a jednoznačnosti řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu se zadanými počátečními podmínkami (Peano-Picard-Cauchy), a tohoto aparátu využijeme v pevně daném definičním oboru (pre-semigeodetické) mapy $(U, (x^i))$ zadané variety (M, ∇) se symetrickou lineární konexí. Naším cílem bude rekonstruovat, případně sestrojit symetrickou lineární konexi v jistém okolí daného bodu ze znalosti „počátečních podmínek”, jimiž jsou zúžení konexe na pevnou $(n-1)$-rozměrnou podvarietu S a některé vhodné komponenty tenzoru křivosti R v „objemu” (v souřadnicovém okolí).

Podobně, týmiž metodami dosáhneme rekonstrukce, nebo konstrukce, metrického tenzoru pseudo-Riemannovy variety v definičním oboru semigeodetických souřadnic, je-li dáno zúžení metriky na nějakou neizotropickou nadplochu a jisté komponenty tenzoru křivosti typu $(0, 4)$ v „objemu”. Na rozdíl od autorů zmíněné publikace [25], předkládáme mnohem kratší důkazy konstruktivního charakteru, založené na klasických výsledcích z teorie obyčejných diferenciálních rovnic.

10.1 Pre-semigeodetická mapa

Nechť (M, ∇) je (diferencovatelná nebo hladká) n-dimenzionální varieta M se symetrickou lineární konexí ∇. Nechť Γ^h_{ij} značí komponenty konexe ∇ v pevné mapě $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ variety M, kde $U \subseteq M$ je otevřené okolí.

Jestliže ve vybraných souřadnicích $(U, (x^i))$ platí $\Gamma^h_{11}(x) = 0$ pro všechny indexy $h =$

$1, \dots, n$, řekneme, že $(U, (x^i))$ je *pre-semigeodetická mapa* vzhledem k souřadnici x^1 a ke konexi ∇, nebo že x^1 je *geodetická souřadnice* v U. Preferovat první souřadnici je vcelku přirozené, a není to zřejmě na újmu obecnosti.

Připomeňme, že podobné souřadnice byly použity v [67], kde byly nazvány „skoro semigeodetickými".

Ukažme geometrickou interpretaci pre-semigeodetických map. Připomeňme, že rovnice $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$ kanonicky parametrizovaných geodetik $c\colon I \to U$ zúžené konexe $\nabla|U$ mají v lokálních souřadnicích tvar (zde $k = 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2c^1}{ds^2} + \Gamma^1_{11}\left(\tfrac{dc^1}{ds}\right)^2 + \textstyle\sum_{j=2}^n \Gamma^1_{1j}\tfrac{dc^1}{ds}\tfrac{dc^j}{ds} + \textstyle\sum_{i,j=2}^n \Gamma^1_{ij}\tfrac{dc^i}{ds}\tfrac{dc^j}{ds} = 0, \\ \tfrac{d^2c^k}{ds^2} + \Gamma^k_{11}\left(\tfrac{dc^1}{ds}\right)^2 + \textstyle\sum_{j=2}^n \Gamma^k_{1j}\tfrac{dc^1}{ds}\tfrac{dc^j}{ds} + \textstyle\sum_{i,j=2}^n \Gamma^k_{ij}\tfrac{dc^i}{ds}\tfrac{dc^j}{ds} = 0. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Lemma 10.1 *Podmínky $\Gamma^h_{11} = 0$, $h = 1, \dots, n$ jsou na U splněny právě tehdy, když parametrizované křivky*

$$c\colon I \to U, \qquad c(s) = (s, a_2, \dots, a_n), \quad s \in I,\ a_i \in \boldsymbol{R}, \quad i = 2, \dots, n \tag{10.2}$$

jsou kanonicky parametrizované geodetiky zúžené konexe $\nabla|U$. Zde I je interval a a_k jsou vhodné konstanty vybrané tak, že $c(I) \subset U$.

Důkaz. Nechť $\Gamma^h_{11} = 0$ platí pro všechny indexy $h = 1, \dots, n$. Pak lokální křivky s parametrizacemi (10.2) splňují

$$\frac{dc(s)}{ds} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{c(s)}, \qquad \frac{d^2c(s)}{ds^2} = 0, \tag{10.3}$$

a tedy jsou řešeními systému (10.1). Naopak, jestliže křivky (10.2) patří mezi řešení rovnic (10.1), pak díky (10.3) dostáváme $\Gamma^h_{11} = 0$ ze vztahů (10.1).

Tedy pre-semigeodetická mapa je plně určena podmínkou, že křivky $x^1 = s$, $x^i =$ konst., $i = 2, \dots, n$, patří mezi geodetiky dané konexe v daném souřadnicovém okolí. Definiční obor U takové mapy má tvar tuby sestrojené podél geodetik, je „tubulární".

10.2 Rekonstrukce konexe

Nyní ukážeme, jak symetrická lineární konexe může být v oboru U pre-semigeodetických souřadnic (vzhledem k x^1) jednoznačně doplněna (rekonstruována), nebo sestrojena, v jisté otevřené podmnožině souřadnicového okolí U, jestliže známe zúžení komponent Γ^h_{1k} hledané konexe na podvarietu S definovanou rovnicí $x^1 = 0$ a máme předepsané komponenty R^h_{i1k} tenzoru křivosti v daném tubulárním okolí U.

Nejprve pro tento účel modifikujme větu o existenci a jednoznačnosti řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu se zadanými počátečními podmínkami. V $\mathbf{R}^n$ se standardními souřadnicemi $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ztotožníme lineární podprostor (nadrovinu) zadanou rovnicí $x^1 = 0$ s prostorem $\mathbf{R}^{n-1}$, tedy $(\tilde{x}) = (x^2, \dots, x^n)$ budou standardní souřadnice v $\mathbf{R}^{n-1}$. Nechť $\mathcal{J} = (0, 1)$ je otevřený jednotkový interval a označme jako $K_m = \mathcal{J}^m$ otevřenou standardní m-krychli. Dále označme

$$D_n(\delta) = \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n \mid 0 \le x^1 \le \delta,\ 0 < x^i < 1,\ i = 2, \dots, n\} \subset \mathbf{R}^n.$$

Otevřená $(n-1)$-krychle $K_{n-1} = \mathcal{J}^{n-1}$, chápaná jako

$$K_{n-1} = \{\tilde{x} = (x^2, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^{n-1} \mid 0 < x^i < 1,\ i = 2, \dots, n\} \subset \mathbf{R}^{n-1},$$

se dá ztotožnit s podvarietou S v $D_n(\delta)$ určenou rovnicí $x^1 = 0$.

Nechť tedy v dalším S značí podvarietu v $D_n(\delta)$ určenou rovnicí $x^1 = 0$.

Věta 10.2 *Nechť $\tilde{\nabla}$ je symetrická lineární konexe na S (třídy aspoň C^2) se složkami*

$$\tilde{\Gamma}^h_{ij}(\tilde{x}), \qquad h, i, j \in \{2, \dots, n\}, \quad \tilde{x} \in S.$$

Nechť $\tilde{\Gamma}^h_{1j}(\tilde{x})$, $h, j \in \{1, \dots, n\}$ jsou funkce třídy aspoň C^2 na S, kde $\tilde{\Gamma}^h_{11}(\tilde{x}) = 0$ pro $h = 1, \dots, n$. Nechť dále $A^h_{ij}(x)$, $h, i, j \in \{1, \dots, n\}$ jsou funkce (aspoň C^0) v $D_n(\delta)$ a takové, že A^h_{1k} jsou aspoň třídy C^1 v každé z proměnných $x^2, \dots, x^n$ a aspoň C^0 v x^1. Dále, nechť na S platí podmínky $\tilde{R}^h_{i1k}(x^2, \dots, x^n) = A^h_{ik}(x^2, \dots, x^n)$. Potom existuje reálné číslo $\hat{\delta}$, $0 < \hat{\delta} \le \delta$ a existuje jediná symetrická lineární konexe ∇ v okolí $D_n(\hat{\delta})$ s komponentami $\Gamma^h_{ij}(x)$, $x \in D_n(\hat{\delta})$, $h = 1, \dots, n$ tak, že platí: $\Gamma^h_{11}(x) = 0$ na $D_n(\hat{\delta})$ pro $h = 1, \dots, n$ (tedy souřadnice jsou semigeodetické), $\Gamma^h_{11}(0, \tilde{x}) = \tilde{\Gamma}^h_{11}(\tilde{x})$ pro všechna $\tilde{x} \in S$, $h, i, j \in \{1, \dots, n\}$ (a tedy $\nabla | S = \tilde{\nabla}$) a $R^h_{i1k}(x) = A^h_{ik}(x)$ pro všechna $x \in D_n(\hat{\delta})$v $D_n(\hat{\delta})$, $h, i, k \in \{1, \dots, n\}$.

Důkaz. Jestliže ∇ je daná konexe na nějakém oboru $D_n(\delta)$ se složkami $\Gamma^h_{ij}(x)$, $x \in D_n(\delta)$, jsou komponenty jejího tenzoru křivosti vázány s komponentami konexe klasickým vztahem

$$R^h_{ijk} = \partial_j \Gamma^h_{ik} - \partial_k \Gamma^h_{ij} + \Gamma^m_{ik} \Gamma^h_{mj} - \Gamma^m_{ij} \Gamma^h_{mk}. \tag{10.4}$$

Předpokládejme, že platí $\Gamma^h_{11} = 0$. Položme $i = j = 1$. Dostáváme vztahy

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^h_{1k} + \sum_m \Gamma^m_{1k}\Gamma^h_{1m} - R^h_{11k} = 0. \tag{10.5}$$

Podobně pro $j = 1$ a $i \in \{2, \dots, n\}$ získáme systém rovnic

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^h_{ik} + \sum_m \Gamma^m_{ik}\Gamma^h_{m1} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^h_{i1} - R^h_{i1k} = 0. \tag{10.6}$$

Předpokládejme nyní, že jsou splněny podmínky věty 10.2. Uvažujme systém

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^h_{1k} = -\sum_m \Gamma^m_{1k}\Gamma^h_{1m} + A^h_{1k}, \tag{10.7}$$

který budeme považovat za systém obyčejných diferenciálních rovnic v jedné proměnné x^1 pro neznámé funkce Γ^h_{1k}, ostatní souřadnice $(\tilde{x}) = (x^2, \dots, x^n) \in K_{n-1} = S$ považujeme za parametry. Zadáme-li počáteční podmínky

$$\Gamma^h_{1k}(0, x^2, \dots, x^n) = \tilde{\Gamma}^h_{1k}(x^2, \dots, x^n) \quad \text{pro} \quad (x^2, \dots, x^n) \in S,$$

pak podle vět z teorie diferenciálnich rovnic existuje číslo δ_1, $0 < \delta_1 \leq \delta$ a existují jednoznačně určené funkce $\Gamma^h_{1k}(x^1, \dots, x^n)$ (třídy aspoň C^1) na definičním oboru $D_n(\delta_1)$, které vyhovují počátečním podmínkám

$$\Gamma^h_{1k}(0, \tilde{x}) = \tilde{\Gamma}^h_{1k}(\tilde{x}), \qquad \tilde{x} \in S. \tag{10.8}$$

Tyto funkce a jejich derivace použijeme v dalším. Uvažujme systém

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^h_{ik} = -\sum_m \Gamma^m_{ik}\Gamma^h_{m1} + \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^h_{i1} + A^h_{ik} = 0, \tag{10.9}$$

kde jsme za funkce Γ^h_{i1} dosadili z předchozího. Máme tedy opět systém obyčejných diferenciálních rovnic v jedné proměnné x^1. Podle vět o existenci a jednoznačnosti systému obyčejných diferenciálních rovnic existuje $\hat{\delta}$, $0 < \hat{\delta} \leq \delta_1$ a existují jednoznačně určené funkce třídy aspoň C^1 na oboru $D_n(\hat{\delta})$

$$\Gamma^h_{ik}(x^1, \dots, x^n), \qquad i \neq 1 \neq k,$$

které vyhovují počátečním podmínkám

$$\Gamma^h_{ik}(0, x^2, \dots, x^n) = \tilde{\Gamma}^h_{ik}(x^2, \dots, x^n), \qquad (x^2, \dots, x^n) \in S. \tag{10.10}$$

Dále, snadno zjistíme, že díky vztahům (10.5), (10.6), (10.7), (10.9) dostaneme:

$$R^h_{i1k}(x) = A^h_{ik}(x), \qquad x \in D_n(\hat{\delta}), \quad h, i, k = 1, \ldots, n. \tag{10.11}$$

Jako důsledek dostaneme: jestliže $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ je mapa na varietě M, uvažujme podvarietu $S \subset U$ v U definovanou rovnicí $x^1 = 0$ a symetrickou lineární konexi $\tilde{\nabla}$ na S třídy aspoň C^2 se složkami $\tilde{\Gamma}^h_{ij}$. Zvolme funkce A^h_{ij} na U takové, že A^h_{ik} jsou třídy aspoň C^0 pro $i = 2, \ldots, n$, funkce A^h_{1k} jsou spojité v x^1, a A^h_{1k} jsou aspoň C^1 ve zbývajících proměnných $x^2, \ldots, x^n$. Potom existuje jediná symetrická lineární konexe ∇ na U s komponentami splňujícími $\Gamma^h_{11} = 0$ pro $h = 1, \ldots, n$, která je rozšířením konexe $\tilde{\nabla}$, tj. platí $\nabla|S = \tilde{\nabla}$. Daná mapa je pak pre-semigeodetická vzhledem ke konexi ∇ a na U platí $R^h_{j1k} = A^h_{jk}$.

10.3 Semigeodetické souřadnice

Řekneme, že mapa $(U, (x^i))$ pseudo-Riemannovy variety (M, g) je *semigeodetická* (nebo že (x^i) jsou semigeodetické souřadnice), jestliže vzhledem k této mapě má metrický tenzor komponenty

$$g = e dx^1 \otimes dx^1 + \tilde{g}_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n) dx^i \otimes dx^j, \quad i, j = 2, \ldots, n, \tag{10.12}$$

kde $e = \pm 1$ (znamení plus nebo minus souvisí s druhou mocninou integrálu tečného vektoru ke křivce dané souřadnicí x^1).

Geometrická interpretace je následující, [67, str. 55].

Lemma 10.3 *Lokální souřadnice (x^i) na pseudo-Riemannově varietě jsou semigeodetické, právě když 1-síť x^1-souřadnicových křivek je tvořena právě všemi geodetikami parametrizovanými obloukem, které jsou kolmé k neizotropické nadrovině definované rovnicí $x^1 = \text{konst.}$*

Poznamenejme, že souřadnicové nadplochy definované rovnicí $x^j = \text{konst.}$ pro $j = 2, \ldots, n$ jsou ortogonální k takto vybranému systému geodetik. Dále, semigeodetické souřadnice jsou zřejmě pre-semigeodetické.

Klasické semigeodetické souřadnice mohou být zavedeny v dostatečně malém okolí libovolného bodu libovolné Riemannovy variety (tentokrát míníme s pozitivně definitní metrikou), a jsou plně charakterizovány souřadnicovým vyjádřením metriky:

$$g_{ij} = dx^1 \otimes dx^1 + \tilde{g}_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^i \otimes dx^j, \quad i, j = 2, \dots, n. \tag{10.13}$$

Tedy na cylindru můžeme semigeodetické souřadnice zavést globálně.

Výhody takových souřadnic jsou známy od dob K.F. Gausse ([47, str. 201], „Geodätische Parallelkoordinaten"), a často je používáme zejména v dimenzi 2 v různých aplikacích, aniž se o tom zmiňujeme, [59], [78] apod. Např. geodetické polární souřadnice, „Geodätische Polarkoordinaten," [47, str. 197-204], mohou být interpretovány jako „limitní případ" semigeodetických souřadnic. Všechny geodetické souřadnicové křivky $\phi = x^2 =$ konst. procházejí jedním bodem nazývaným pól, který odpovídá rovnici $r = x^1 = 0$. Křivky odpovídající rovnicím $r = x^1 =$ konst. jsou geodetické kružnice.

10.4 Rekonstrukce metriky v semigeodetických souřadnicích

Věta 10.4 *Nechť a_{ij} je (aspoň) spojitá funkce v $D_n(\delta)$, nechť $\tilde{g}_{ij}$ je funkce třídy (aspoň) C^2 v K_{n-1} a $\tilde{G}_{ij}$ jsou funkce třídy (aspoň) C^1 v K_{n-1}, $i, j = 2, \dots, n$, takové, že matice $(\tilde{g}_{ij})$ a $(\tilde{G}_{ij})$ jsou symetrické, $\tilde{g}_{ji} = \tilde{g}_{ij}$, $\tilde{G}_{ji} = \tilde{G}_{ij}$, a platí $\det(\tilde{g}_{ij}) \neq 0$ v K_{n-1}. Zvolme pevně $e \in \{-1, 1\}$. Potom existuje $\hat{\delta}$, $0 < \hat{\delta} \leq \delta$ a existuje jednoznačně určený metrický tenzor g třídy (aspoň) C^2 v $D_n(\hat{\delta})$, který je nedegenerovaný, tedy $\det(g_{ij}) \neq 0$ na $D_n(\hat{\delta})$, a pro jeho komponenty platí $g_{11} = e$, $g_{1j} = 0$ pro $j = 2, \dots, n$, a pro $i, j = 2, \dots, n$ je*

$$g_{ij}(0, \tilde{x}) = \tilde{g}_{ij}(\tilde{x}), \quad \frac{\partial^+}{\partial x^1} g_{ij}(0, \tilde{x}) = \tilde{G}_{ij}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in K_{n-1}, \tag{10.14}$$

kde $\frac{\partial^+}{\partial x^1}$ značí parciální derivaci zprava, a je splněna podmínka

$$a_{ij}(x) = R_{1ij1}(x), \qquad x \in D_n(\hat{\delta}). \tag{10.15}$$

Důkaz. Složky tenzoru křivosti R typu $(0, 4)$ pseudo-Riemannovy variety $V_n = (M, g)$ jsou se složkami metriky vázány takto:

$$R_{hijk} = \frac{1}{2}(\partial_{ij} g_{hk} + \partial_{hk} g_{ij} - \partial_{ik} g_{hj} - \partial_{ij} g_{hk}) + g^{rs}(\Gamma_{hkr}\Gamma_{ijs} - \Gamma_{hjr}\Gamma_{kjs}), \tag{10.16}$$

kde $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$ jsou Christoffelovy symboly prvního typu ve V_n, a g^{rs} jsou komponenty duálního tenzoru ke g. Tedy g^{ij} jsou funkce racionální v komponentách g_{ij} metriky, $g^{ij} = 1/\det(g_{ij}) \cdot A_{ji}$, kde A_{ji} je algebraický doplněk prvku g_{ji} matice metrického tenzoru.

Položme $h = k = 1$ a užijme předpokladu $g_{11} = e$, $g_{1j} = 0$. Pomocí (10.16) dostaneme

$$R_{1ij1} = \frac{1}{2}\partial_{11} g_{ij} - \frac{1}{4} g^{rs} \partial_1 g_{ir} \partial_1 g_{js}. \tag{10.17}$$

Můžeme předpokládat, že pro indexy je $i, j, r, s > 1$. Dosaďme

$$G_{ij} = \partial_1 g_{ij}. \tag{10.18}$$

Pak můžeme psát (10.17) ve tvaru

$$R_{1ij1} = \frac{1}{2}\partial_1 G_{ij} - \frac{1}{4} g^{rs} G_{ir} G_{js}. \tag{10.19}$$

Označme $R_{1ij1}(x) = a_{ij}(x)$. Máme tedy řešit systém

$$\begin{aligned} \partial_1 g_{ij} &= G_{ij}, \\ \partial_1 G_{ij} &= \tfrac{1}{2} g^{rs} G_{ir} G_{js} + 2a_{ij} \end{aligned} \tag{10.20}$$

pro počáteční podmínky

$$g_{ij}(0, \tilde{x}) = \tilde{g}_{ij}(\tilde{x}), \quad \frac{\partial^+}{\partial x^1} g_{ij}(0, \tilde{x}) = \tilde{G}_{ij}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in K_{n-1}, \quad i, j = 2, \ldots, n. \tag{10.21}$$

Protože determinant i algebraické doplňky jsou spojité funkce složek g_{ij} a požadujeme, aby $\det(\tilde{g}_{ij})(0, \tilde{x}) = \det(\tilde{g}_{ij})(\tilde{x}) \neq 0$, máme zaručeno, že g^{rs} budou dobře definované a rozumně se chovající funkce v g_{ij}, podobně jako v [25]. Tedy na (10.20) můžeme nahlížet jako na systém obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu v proměnné x^1 pro neznámé funkce g_{ij} a G_{ij}, s počátečními podmínkami (10.21); ostatní souřadnice $x^2, \ldots, x^n \in K_{n-1}$ považujeme za parametry. Pravé strany v rovnici (10.20) splňují podmínky věty o existenci a jednoznačnosti řešení systému diferenciálních rovnic [14, str. 263] na oboru $D_n(\tilde{\delta})$ a mají spojité derivace vzhledem ke g_{ij} a G_{ij}. Problém s počátečními podmínkami (10.20) a (10.21) má jediné řešení $g_{ij}(x)$. Funkce g_{ij} jsou komponentami metrického tenzoru v oboru $D_n(\tilde{\delta})$, a porovnáním (10.20) a (10.19) snadno zjistíme, že složky tenzoru křivosti této metriky splňují $R_{1ij1}(x) = a_{ij}(x)$, jak jsme měli ukázat.

Protože matice (g_{ij}) a (G_{ij}) jsou symetrické, můžeme předpokládat, že $i \leq j$ v (10.20) a v (10.21).

Jako důsledek dostáváme

Věta 10.5 *Nechť a_{ij} jsou spojité funkce v jistém spuřadnicovém okolí U, $\tilde{g}_{ij}$ jsou C^2-funkce v $\tilde{S} = U \cap S$, kde S je nadrovina $S\colon x^1 = 0$ v $\boldsymbol{R}^n$, a $\tilde{G}_{ij}$ jsou C^1-funkce v $\tilde{S}$ pro $i, j = 2, \ldots, n$ takové, že matice $(\tilde{g}_{ij})$ a $(\tilde{G}_{ij})$ jsou symetrické a platí $\det(\tilde{g}_{ij}) \neq 0$ v $\tilde{S}$. Zvolme $e \in \{-1, 1\}$. Pak existuje $\hat{\delta} > 0$ a existuje jediná nedegenerovaná ($\det(g_{ij}) \neq 0$) metrika g třídy C^2 v $\tilde{U} = \langle -\hat{\delta}, \hat{\delta} \rangle \times \tilde{S}$, pro kterou $g_{11} = e$, $g_{1j} = 0$, $j = 2, \ldots, n$ (tj. $\tilde{U}$ je semigeodetické okolí) a pro $i, j = 2, \ldots, n$ platí*

$$g_{ij}(0, \tilde{x}) = \tilde{g}_{ij}(\tilde{x}), \qquad \frac{\partial^+}{\partial x^1} g_{ij}(0, \tilde{x}) = \tilde{G}_{ij}(\tilde{x}), \qquad \tilde{x} \in \tilde{S} \tag{10.22}$$

a

$$a_{ij}(x) = R_{1ij1}(x), \qquad x \in \tilde{U}. \tag{10.23}$$

Položíme-li speciálně $a_{ij}(x) = R_{1ij1}(x)$, dává řešení systému (10.20) odpověď na problém o nalezení metriky s předepsanými složkami $R_{1ij1}(x)$ Riemannova tenzoru křivosti v typu $(0, 4)$. Dosadíme-li za získané složky metriky, dostaneme následující vztah pro komponenty tenzoru křivosti v typu $(1, 3)$:

$$R_{1ij1} = eR^1_{ij1} = -eR^1_{i1j} = g_{im}R^m_{11j} = -g_{im}R^m_{1j1}. \tag{10.24}$$

Tento výsledek je tedy zobecněním výsledků z [24] a [25].

11 Křivostně homogenní prostory

Náš další zájem bude věnován prostorům, které jsou zobecněním homogenních a lokálně homogenních prostorů. Připomeňme tedy nejprve tyto klasické třídy Riemannových variet.

11.1 Riemannův globálně homogenní prostor

Je-li G Lieova grupa (s jednotkou 1) a H její kompaktní podgrupa, vzniká faktorizací na nosiči $G/H = \{gH \,|\, g \in G\}$ tzv. homogenní prostor. Topologický faktorprostor $\tilde{M} = G/H$ má strukturu analytické variety. Algebraicky vzniká faktorgrupa s operací $(aH) \cdot (bH) = (ab)H$, její jednotkový vektor bývá označován jako o, tedy $o = 1 \cdot H = H$. Původní grupa operuje na třídách takto:

$$G \times G/H \to G/H, \qquad (a, bH) \mapsto (ab)H.$$

Lze ukázat, že akce Lieovy grupy G na $\tilde{M} = G/H$ je reálně analytická. Také přirozená projekce $\pi\colon G \to G/H$ je reálně analytická.

V bodě $o \in G/H$ faktorprostoru uvažujme tečný prostor $T_o(G/H)$ a (kompaktní) grupu isotropie $\tilde{H}$ v bodě o, složenou ze všech takových lineárních zobrazení tečného prostoru, která jsou indukována zobrazeními fixujícími bod o. Lze ukázat, že na $T_o(G/H)$ existuje pozitivně definitní skalární součin g_o invariantní vzhledem k $\tilde{H}$.

Jestliže $x \in G/H$ je libovolný prvek, definujeme skalární součin na $T_x(G/H)$ vztahem $g_x(X, Y) = g_o(TL_{a^{-1}}X, TL_{a^{-1}}Y)$ pro $X, Y \in T_x(G/H)$, kde $a \in G$ je prvek takový, že $a(0) = x$ (na konkrétní volbě takového prvku výsledek nezávisí). $L_{a^{-1}}$ je levý zdvih prvkem a^{-1}, $x \mapsto a^{-1}x$ a $TL_{a^{-1}}$ je jeho tečné zobrazení (diferenciál). Potom $x \mapsto g_x$ je Riemannova metrika invariantní vzhledem ke grupě G.

G/H spolu s takto sestrojenou G-invariantní pozitivně definitní Riemannovou metrikou je *homogenní prostor*. Homogennost je možno charakterizovat v řeči grupy izometrií prostoru:

Věta 11.1 *Riemannova varieta (M, g) je homogenní právě tehdy, když úplná grupa izometrií $Iso(M)$ variety (M, g) operuje na M tranzitivně.*

Tím je vysvětlena volba názvu této třídy prostorů: takové Riemannovy prostory mají stejnorodé vlastnosti v okolí všech svých bodů, izometrií se (při volbě adaptovaných souřadnic, indukovaných difeomorfismem) přetáhnou Christoffely Riemannovy konexe a z nich odvozené objekty jako např. tenzor křivosti.

11.2 Lokálně homogenní prostor

Postupně byla věnována pozornost širší třídě prostorů, v nichž chování křivosti a torze lze považovat za „podobné" na jistých okolích libovolných dvou bodů a mezi něž patří Riemannovy homogenní variety jako speciální podtřída: jejich charakteristickou vlastností je, že příslušná Riemannova konexe je „invariantní vůči paralelismu".

Definice 11.2 *Lokálně homogenní prostor* je Riemannova varieta, na níž její pseudogrupa lokálních izometrií operuje tranzitivně [34, I, str. 11].

Je možno dokázat:

Věta 11.3 *Riemannova varieta (M, g) je lokálně homogenní právě tehdy, když existuje lineární konexe Γ na M, která je v našem smyslu kompatibilní s metrikou, tj. $\Gamma g = 0$, a má paralelní také tenzor křivosti i torze, tedy splňuje $\Gamma T = 0 = \Gamma R$.*

V [74] je pro každou lokálně homogenní Riemannovu varietu sestrojena tzv. kanonická AS-konexe (Ambrose-Singerova), která má právě požadované vlastnosti; naopak, jestliže existuje konexe s těmito vlastnostmi, pak paralelní přenos vzhledem ke konexi podél křivky spojující libovolně dané body $p, q \in M$ je možno rozšířit do izometrie f s vlastností $f(p) = q$.

Připomeňme, že *infinitesimální model* na reálném eukleidovském prostoru se skalárním součinem $(V(R), \langle\, , \,\rangle)$ je dvojice tenzorů (T, R) na V,

$$T\colon V \to End(V),\ X \to T(X, .), \qquad R\colon V \times V \to End(V),\ (X, Y) \to R(X, Y)$$

takové, že platí:

$$T(X, Y) = -T(Y, X), \quad R(X, Y) = -R(Y, X), \tag{11.1}$$

$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle + \langle R(X, Y)W, Z\rangle = 0, \tag{11.2}$$

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y + T(T_X Y, Z) + T(T_Y Z, X) + T(T_Z X, Y) = 0, \quad (11.3)$$

$$R(T_X Y, Z) + R(T_Y Z, X) + R(T_Z X, Y) = 0, \quad (11.4)$$

$$R(X,Y) \cdot T = R(X,Y) \cdot R = 0 \quad (11.5)$$

($R(X,Y)$ operuje jako derivování na tenzorech).

Dva infinitesimální modely (T, R) na V a (T', R') na V' budeme považovat za *izomorfní*, jestliže existuje izometrie $F\colon V \to V'$ taková, že platí:

$$T'(FX, FY) = F(T(X,Y)), \quad R'(FX, FY)FZ = F(R(X,Y)Z). \quad (11.6)$$

Infinitesimální model asociovaný s AS-konexí ∇ je definován tak, že vezmeme $V = T_pM, \langle\cdot,\cdot\rangle = g_p, T = T_p, R = R_p$. Vlastnosti (11.1) a (11.2) jsou splněny triviálně, (11.3) a (11.4) plynou z Bianchiho identit, (11.5) plyne z Ricciho identity. Při volbě jiného bodu $p \in M$ dostáváme model, který je s předchozím izomorfní.

Ukazuje se, že ke každé AS-konexi existuje algebraický objekt, tzv. infinitesimální model, a naopak, infinitesimálnímu modelu odpovídá lokálně homogenní Riemannova varieta, určená jednoznačně až na lokální izometrie.

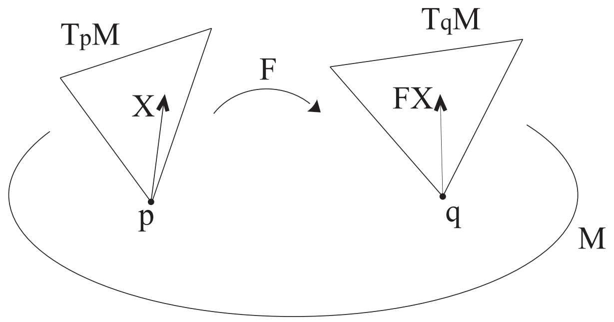
Je-li varieta (M, g) lokálně homogenní a úplná, pak její univerzální Riemannovské nakrytí je globálně homogenní, a proto je (M, g) lokálně izometrická jistému Riemannovu homogennímu prostoru G/H. Existují však lokálně homogenní variety, nikoli úplné, které nejsou lokálně izometrické žádnému homogennímu prostoru.

Věta 11.4 *Dvoudimenzionální lokálně homogenní Riemannovy variety jsou právě ty, které mají křivost konstantní, tedy sféry $\boldsymbol{S}^2(r), r \in \boldsymbol{R}$ a hyperbolická rovina $\boldsymbol{H}^2$.*

11.3 Klasické křivostně homogenní prostory

Definice 11.5 Řekneme, že Riemannova varieta (M, g) je *křivostně homogenní*, jestliže pro každé dva body p, q z M existuje lineární izometrie $F\colon T_pM \to T_qM$ tečných prostorů v těchto bodech, která zachovává tenzor křivosti $\mathcal{R}$ typu $(0,4)$, tj. splňuje

$$F^*(\mathcal{R}_q) = \mathcal{R}_p. \quad (11.7)$$



Obrázek 11.1: K definici 11.7.

Připomeňme, že pull-back tenzoru $\mathcal{R}$ je dán takto [20]:

$$F^*(\mathcal{R}_q)(X, Y, Z, W) = \mathcal{R}_q(FX, FY, FZ, FW)$$

pro všechny tečné vektory $X, Y, Z, W \in T_pM$. Lineární izometrie je lineární zobrazení, pro které $F^*(g_q) = g_p$, kde pull-back $F^*(g_q)$ je definován pro každé $X, Y \in T_pM$ takto

$$F^*(g_q)(X, Y) = g_q(FX, FY).$$

Rovnice $F^*(g_q) = g_p$ detailně znamená, že pro všechny tečné vektory $X, Y \in T_pM$ platí $g_p(X, Y) = F^*(g_q)(X, Y)$. Ekvivalentně v lokálních souřadnicích adaptovaných vzhledem k difeomorfismu složky metriky v p a q jsou stejné, $g_{ij}(p) = g_{ij}(q)$. Podmínku (11.7) lze vyjádřit v lokálních souřadnicích adaptovaných k zobrazení F^* takto:

$$R_{ijkl}(p) = R_{ijkl}(q).$$

Studiu křivostně homogenních prostorů se věnovala řada autorů. Základní byl článek F.M. Singera [71], který navazoval na starší studii Charlese Ehresmanna z roku 1936, ale místo Ehresmannova předpokladu, že lokální grupa izometrií v okolí bodu je lokální Lieova grupa (tzv. lokálně homogenní prostor) předpokládá splnění jiné podmínky ekvivalentní s (11.7).

11.4 Křivostně homogenní prostory typu $(1, 3)$

V poslední době byla věnována pozornost také příbuznému tématu, a to Riemannovým křivostně homogenním prostorům typu $(1, 3)$. Ukazuje se, že „klasické" křivostně homogenní prostory patří mezi $(1, 3)$-křivostně homogenní, ale ne naopak. Jak uvidíme z konstrukcí příkladů, třída $(1,3)$-křivostně homogenních variet má mnohem větší mohutnost.

Nejprve připomeňme následující známou skutečnost z teorie Riemannových prostorů. Dvě metriky jsou *homotetické*, je-li jedna z nich konstantním nenulovým násobkem druhé.

Lemma 11.6 *Homotetické metriky (na téže varietě) mají stejný tenzor křivosti typu* $(1,3)$.

Důkaz. Připomeňme hlavní kroky důkazu:

- R^i_{jkl} vyjádříme pomocí Γ^r_{uv} (a jejich derivací),
- Γ^r_{uv} vyjádříme pomocí g_{ij} (jejich derivací a inverzní matice),
- prvky inverzní matice g^{ij} se vyjádří pomocí algebraických doplňků matice (g_{ij}) a determinantu $\det(g_{ij})$.

Definice 11.7 Riemannovu varietu (M,g) nazveme $(1,3)$-*křivostně homogenní*, jestliže pro každou dvojici p,q bodů z M existuje lineární homotetie $f\colon T_pM \to T_qM$ zachovávající tenzor R křivosti typu $(1,3)$, tj. splňující

$$f^*(R_q) = R_p. \tag{11.8}$$

Připomeňme, že lineární homotetie f je zobrazení složené z lineární izometrie F a z homotetie H tečného bandlu s kladným koeficientem $\lambda > 0$,

$$H\colon TM \to TM, \quad H(Y) = \lambda Y$$

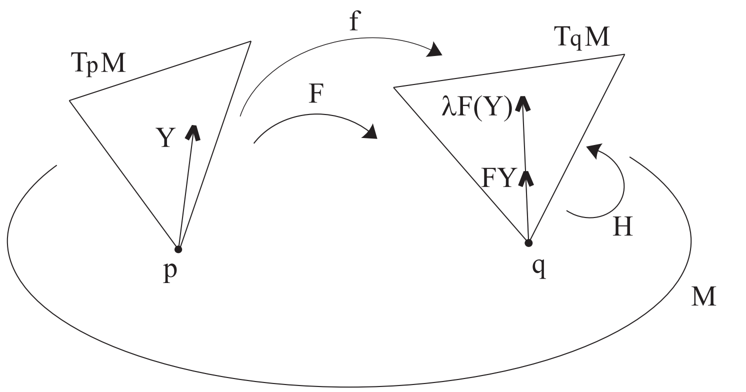
pro libovolný tečný vektor $Y \in T_qM$ a libovolný bod $q \in M$ viz Obrázek 11.2. Situaci popisuje komutativní diagram na obr. 11.3.

Příslušný pull-back je definován takto: $(f^*(R_q))(X,Y,Z) = f^{-1}(R_q(fX,fY,fZ))$ pro $X,Y,Z \in T_pM$.

Podmínku (11.8) můžeme také ekvivalentně psát jako

$$f(R_p(X,Y)Z) = R_q(fX,fY)fZ, X,Y,Z \in T_pM.$$

V lokálních souřadnicích („adaptovaných k f") podmínka znamená, že $R^i_{jkl}(p) = R^i_{jkl}(q)$.



Obrázek 11.2: Lineární homotetie f.

$$\begin{tikzcd} TpM \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "f"'] & TqM \arrow[d, "H"] \\ & TqM \end{tikzcd}$$

Obrázek 11.3: Diagram.

Věta 11.8 [46] Je-li Riemannova varieta (M, g) křivostně homogenní, pak je také $(1,3)$-křivostně homogenní.

Důkaz. [46] Nechť (M, g) je křivostně homogenní. Nechť $p, q \in M$ jsou dva pevně zvolené body a nechť $F\colon T_pM \to T_qM$ je lineární izometrie tečných prostorů, která zachovává tenzor křivosti typu $(0,4)$, $F^*(\mathcal{R}_q) = \mathcal{R}_p$. Nejprve uveďme důkaz ve složkách.

Zvolme pevně ortonormální bázi $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ v T_pM a uvažujme odpovídající ortonormální bázi $\langle Fe_1, \ldots, Fe_n \rangle$ v T_qM. Zaveďme komponenty metriky v bodě p:

$$g_p(e_i, e_j) = g_{ij}(p) = \delta_{ij},$$

analogicky pro bod q:

$$g_q(Fe_i, Fe_j) = g_{ij}(q) = \delta_{ij}.$$

Obdobně postupujeme při zavedení komponent křivosti:

$$R_p(e_k, e_l)e_j = \sum_m R^m_{jkl}(p) e_m,$$

$$R_{ijkl}(p) = g_p\left(R_p(e_k, e_l)e_j, e_i\right),$$

podobně v bodě q:

$$R_q(Fe_k, Fe_l)Fe_j = \sum_m R^m_{jkl}(q)Fe_m,$$

$$R_{ijkl}(q) = g_q\left(R_q(Fe_k, Fe_l)Fe_j, Fe_i\right).$$

Z vlastnosti izometrie F dostaneme $R_{ijkl}(p) = R_{ijkl}(q)$, tedy

$$\sum_m R^m_{jkl}(p)\overbrace{g_p(e_m, e_i)}^{g_{mi}(p)} = g_p\left(R^m_{jkl}(p)e_m, e_i\right) = g_p\left(R_p(e_k, e_l)e_j, e_i\right) =$$

$$= g_q\left(R_q(Fe_k, Fe_l)Fe_j, Fe_i\right) = g_q\left(R^m_{jkl}(q)Fe_m, Fe_i\right) = \sum_m R^m_{jkl}(q)\overbrace{g_q(Fe_m, Fe_i)}^{g_{mi}(q)}$$

(všude se sčítá přes index m). Tedy

$$\sum_m R^m_{jkl}(p)\delta_{mi} = \sum_m R^m_{jkl}(p)\delta_{mi},$$

kde $\delta_{mi} = 1$ pro $m = i$ a $\delta_{mi} = 0$ pro $m \neq i$, proto

$$R^i_{jkl}(p) = R^i_{jkl}(q).$$

Tedy F zachovává tenzor křivosti typu $(1, 3)$, a protože body p, q byly zvoleny libovolně, je (M, g) $(1, 3)$-křivostně homogenní.

Nyní uvedeme invariantní důkaz:

Důkaz. Nechť (M, g) je křivostně homogenní, $p, q \in M$ dva body a $F\colon T_pM \to T_qM$ lineární izometrie tečných prostorů, která zachovává křivost $(0, 4)$, tj. $F^*(g_q) = g_p$ a $F^*(\mathcal{R}_q) = \mathcal{R}_p$. Pro libovolné $X, Y, Z, W \in T_pM$ platí

$$g_q\left(R_q(FX, FY)FZ, FW\right) = \mathcal{R}_q\left(FX, FY, FZ, FW\right) = \mathcal{R}_p\left(X, Y, Z, W\right) =$$

$$= g_p\left(R_p(X, Y)Z, W\right) = F^*(g_q)\left(R_p(X, Y)Z, W\right) = g_q\left(F\left(R_p(X, Y)Z\right), FW\right).$$

Protože metrická forma g_q je regulární, lineární formy $g_q\left(R_q(FX, FY)FZ, -\right)$ a $g_q\left(F\left(R_p(X, Y)Z\right), -\right)$ se rovnají právě tehdy, pokud uvedené vektory jsou stejné. Proto $F^*(R_q) = R_p$ a (M, g) je $(1, 3)$-křivostně homogenní.

Věta 11.9 [46] Nechť (M, g) je hladká Riemannova varieta, $p \in M$, R resp. $\mathcal{R}$ označuje její tenzor křivosti typu $(1, 3)$ resp. $(0, 4)$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. Pro každé $q \in M$ existuje lineární homotetie $f_q \colon T_pM \to T_qM$ taková, že $R_p = f_q^*(R_q)$, tj. (M,g) je $(1,3)$-křivostně homogenní.

2. Existuje hladká funkce $\varphi \colon M \to \mathbf{R}$ taková, že $\varphi(p) = 0$ a pro každé $q \in M$ existuje lineární izometrie $F_q \colon T_pM \to T_qM$ splňující $\mathcal{R}_p = \exp(2\varphi(q))F_q^*(\mathcal{R}_q)$.

Důkaz. [46] 1. $\Rightarrow$ 2. Předpokládejme, že pro pevný bod p a další bod q $(p, q \in M)$ platí $R_p = f^*(R_q)$, kde $f = H \circ F \colon T_pM \to T_qM$ je lineární homotetie s koeficientem $\lambda_q = \lambda, \lambda > 0$. Dostaneme $f^*(g_q) = \lambda^2 g_p$. Pak $g_q\left(f(R_p(X,Y)Z), fW\right) = \lambda^2 g_p\left(R_p(X,Y)Z, W\right) = \lambda^2 \mathcal{R}_p(X,Y,Z,W)$. Na druhé straně $f(R_p(X,Y)Z) = R_q(fX, fY)fZ$ pro všechna X, Y, Z, a proto

$$g_q\left(f(R_p(X,Y)Z), fW\right) = g_q\left(R_q(fX,fY)fZ, fW\right) =$$

$$= \mathcal{R}_q(fX, fY, fZ, fW) = \lambda^4 \mathcal{R}_q(FX, FY, FZ, FW).$$

Konečně

$$\mathcal{R}_p(X,Y,Z,W) = \lambda^2 \mathcal{R}_q(FX,FY,FZ,FW) = \lambda^2\left(F^*\left(\mathcal{R}_q\right)\right)(X,Y,Z,W)$$

pro každé X, Y, Z, W, a tedy $\mathcal{R}_p = \lambda^2\left(F^*\left(\mathcal{R}_q\right)\right)$. Koeficient $\lambda > 0$ je určen jednoznačně a hladce závisí na q, protože tenzorové pole $\mathcal{R}$ je hladké. Když se q mění, zřejmě vzniká hladká kladná funkce $q \mapsto \lambda_q$, kterou můžeme zapsat ve tvaru $\lambda_q = e^{\varphi(q)}$. Zřejmě $\lambda_p = e^{\varphi(p)} = 1$, a tedy $\varphi(p) = 0$.

2. $\Rightarrow$ 1. Uvažujme body p a q, $p, q \in M$. Předpokládejme existenci lineární izometrie F s příslušnou vlastností $F_q \colon T_pM \to T_qM$ a konstanty $\lambda > 0$ takové, že pro $\lambda = e^{\varphi(q)}$ platí $\mathcal{R}_p = \lambda^2 F_q^*\left(\mathcal{R}_q\right)$. Pak $g_p = F^*(g_q)$. Uvažujme homotetii $H \colon T_qM \to T_qM$ s koeficientem λ a složené zobrazení $f = H \circ F \colon T_pM \to T_qM$. Pak $f(U) = \lambda F(U)$ pro každé $U \in T_pM$. Pro každé $W \in T_pM$ platí

$$g_q\left(f\left(R_p(X,Y)Z\right), fW\right) = \lambda^2 g_q\left(F\left(R_p(X,Y)Z\right), FW\right) =$$

$$= \lambda^2 g_p\left(R_p(X,Y)Z, W\right) = \lambda^2 \mathcal{R}_p(X,Y,Z,W) = \lambda^4 \mathcal{R}_q(FX,FY,FZ,FW) =$$

$$= \mathcal{R}_q(fX,fY,fZ,fW) = g_q\left(R_q(fX,fY)fZ, fW\right).$$

Proto se stejným argumentem jako v důkazu věty 11.8 získáme $R_p = f^*(R_q)$.

Vidíme, že každý $(1,3)$-křivostně homogenní prostor dimenze n určuje hladkou funkci φ o n proměnných. Poznamenejme, že lineární izometrie z části 1. věty 11.9 nemusí být jednoznačně určena, ale není ani zcela libovolná (musí být „kompatibilní" s vlastností složeného zobrazení f z části 2.).

Dále si nachystáme následující poněkud technické tvrzení.

Lemma 11.10 [46] Nechť (M, g) je n-dimenzionální hladká Riemannova varieta, $p \in M$ její pevný bod, (U, ϕ) lokální mapa při bodu p a $\langle E_1, \ldots, E_n \rangle$ pohyblivý ortonormální repér na U. Nechť existuje hladká kladná funkce $\psi\colon U \to \mathbf{R}$ na U taková, že

$$R_{ijkl}(q) = \psi(q) R_{ijkl}(p)$$

pro všechny indexy $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$. Potom existuje hladká funkce $\varphi\colon U \to \mathbf{R}$ taková, že $\varphi(p) = 0$ a pro každý bod $q \in U$ existuje lineární izometrie $F_q\colon T_pM \to T_qM$ s vlastností

$$\mathcal{R}_p = \exp(2\varphi(q)) F_q^*(\mathcal{R}_q).$$

Důkaz. [46] Podmínka výše znamená, že

$$\mathcal{R}_q \left(E_{iq}, E_{jq}, E_{kq}, E_{lq}\right) = \psi(q) \mathcal{R}_p \left(E_{ip}, E_{jp}, E_{kp}, E_{lp}\right)$$

pro každé q a všechny indexy. Zobrazení $F = F_q\colon T_pM \to T_qM$, které zobrazuje ortonormální repér $\langle E_{1p}, \ldots, E_{np} \rangle$ v bodě p na ortonormální repér $\langle E_{1q}, \ldots, E_{nq} \rangle$ v bodě q, je lineární izometrie. Pak můžeme psát

$$\mathcal{R}_q \left(E_{iq}, E_{jq}, E_{kq}, E_{lq}\right) = \mathcal{R}_q \left(F E_{ip}, F E_{jp}, F E_{kp}, F E_{lp}\right) =$$

$$= \left(F^* \mathcal{R}_q\right) \left(E_{ip}, E_{jp}, E_{kp}, E_{lp}\right).$$

Toto platí pro každou volbu indexů, a tedy $F^* \left(\mathcal{R}_q\right) = \psi(q) \mathcal{R}_p$. Protože je funkce ψ hladká a všude kladná, výsledek je již zřejmý.

11.5 Příklady křivostně homogenních prostorů typu (1,3) v libovolné dimenzi

Uvažujme prostor $\mathbf{R}^{n+1}$ se standardmími souřadnicemi $(w, x^1, \ldots, x^n)$. Na otevřené podmnožině U v dvourozměrném prostoru $\mathbf{R}^2[w, x^1]$ mějme dánu všude nenulovou hladkou funkci $f\colon U \to \mathbf{R}$ a antisymetrickou hladkou $(n \times n)$-maticovou funkci $A(w) = (A^i_j(w))$ jedné proměnné. Zaveďme metriku $g_{f,A(w)}$ na otevřené podmnožině $\tilde{U}$ v $\mathbf{R}^{n+1}$ vztahem

$$g_{f,A(w)} = \sum_{j=0}^{n+1} \omega^j \otimes \omega^j,$$

kde

$$\omega^0 = f(w, x^1)dw, \qquad \omega^i = dx^i + \sum_{j=1}^{n} A^i_j(w) x^j dw, \quad i = 1, \ldots, n$$

je ortonormální ko-repér. Nechť $\langle X_0, X_1, \ldots, X_n \rangle$ je odpovídající ortonormální báze vektorových polí. Podle [7, str. 51-52] (viz též [44] a [45]) je tato metrika zobecněním příkladu K. Sekigawy [70]. Výpočtem provedeným ve formách se dá ukázat, že Riemannův tenzor křivosti v typu (0,4) je dán vztahem

$$\mathcal{R} = 4f^{-1} f''_{x^1x^1}\, \omega^0 \wedge \omega^1 \otimes \omega^0 \wedge \omega^1. \tag{11.9}$$

Jediné nenulové komponenty jsou $R_{0101} = R_{1010} = -R_{1001} = -R_{0110} = -f^{-1}f''_{x^1x^1}$. Uvedená metrika $g_{f,A(w)}$ není plochá a přitom je křivostně homogenní právě tehdy, když $f^{-1}f''_{x^1x^1} = k$, neboli $f''_{x^1x^1} = kf$, kde $k \neq 0$ je konstanta. Odtud lze odvodit, že f musí mít jeden z tvarů

$$\begin{aligned} f(w, x^1) &= a(w) \exp(\sqrt{k} x^1) + b(w) \exp(-\sqrt{k} x^1)\ , \text{ jestliže } k > 0, \\ f(w, x^1) &= a(w) \cos(\sqrt{-k} x^1) + b(w) \sin(\sqrt{-k} x^1)\ , \text{ jestliže } k < 0, \end{aligned} \tag{11.10}$$

kde $a(w)$ a $b(w)$ jsou diferencovatelné funkce takové, že $f(w, x^1) > 0$ v U. Obor U může být roven celé rovině v případě $k > 0$, a otevřené pásce v rovině pro $k < 0$.

Tato třída prostorů zahrnuje všechny nerozložitelné křivostně homogenní prostory, které nejsou lokálně homogenní a jejichž tenzor křivosti $\mathcal{R}$ „je stejný" jako tenzor křivosti jistého symetrického Riemannova prostoru, [6].

Zvolme nyní libovolnou hladkou funkci f na $\mathbf{R}^2$ tak, aby f a $f^{-1}f''_{x^1x^1}$ byly nenulové ve všech bodech a aby $f''_{x^1x^1}/f$ nebyla konstantní na žádné otevřené podmnožině v $\mathbf{R}^2$. Pak má odpovídající metrika $\bar{g} = g_{f,A(w)}$ definovaná na $\mathbf{R}^{n+1}$ tenzor křivosti daný vztahem (11.9) a pro jeho komponenty $\overline{R}_{ijk\ell}$ platí:

$$\overline{R}_{ijk\ell}(q) = (f^{-1}(q) f''_{x^1x^1}(q))/(f^{-1}(p) f''_{x^1x^1}(p))\overline{R}_{ijk\ell}(p),$$

kde $p, q \in \mathbf{R}^{n+1}$ jsou libovolné.

Bod p nyní zvolme pevně. Potom jsou předpoklady Lemmatu 11.10 splněny, když odpovídající funkce $\psi(q)$ je definovaná jako

$$\psi(q) = f^{-1}(q) f''_{x^1 x^1}(q) / (f^{-1}(p) f''_{x^1 x^1}(p))$$

a je zřejmě kladná. Vyplývá tedy, že prostor $(\mathbf{R}^{n+1}, \bar{g})$ je (1,3)-křivostně homogenní, ale není (0,4)-křivostně homogenní.

Poznamenejme, že v [46] jsou klasifikovány (až na lokální izometrie) všechny reálně analytické (1,3)-křivostně homogenní Riemannovy variety v dimenzi 3, pro které jsou vlastní čísla Ricciho tenzoru ve všech bodech různá.

V předchozí části jsme studovali křivostně homogenní Riemannovy konexe. Obdobný pojem lze zavést také na afinní varietě, ale jak se ukazuje, je obecnější a má poněkud jiné vlastnosti.

Jak jsme se zmínili, lokálně homogenní Riemannovy struktury začal studovat I. M. Singer v 60. letech 20. století a teorii postupně rozšiřovala nebo zobecňovala řada dalších autorů.

Rozdíly v obou teoriích lze pozorovat již v dimenzi dva. Na rozdíl od Riemannovské situace popsané ve Větě 11.4, na 2-dimenzionálních varietách existuje celá řada lokálně homogenních afinních struktur.

Úplnou lokální klasifikaci lokálně homogenních lineárních konexí s libovolnou torzí na 2-varietách podali T. Arias-Marco a O. Kowalski v [3].

12 Lokálně homogenní afinní konexe

Homogennost je jedním z důležitých pojmů v geometrii. Jeho význam není jednoznačný, může být zaveden v různých souvislostech a na různých úrovních obecnosti.

Budeme se zabývat homogenností na afinních varietách. Zde homogennost geometricky znamená, že pro každé dva body variety s lineární konexí existuje afinní zobrazení, které jeden z nich převede v druhý. Tento požadavek je příliš silný, proto se zpravidla studuje lokální homogennost, kdy se existence afinní transformace vyžaduje pouze na nějakých okolích dvojice bodů.

V [66] B. Opozda zavádí následující. Afinní varieta (M, ∇), kde M je souvislá a ∇ symetrická, je *křivostně homogenní*, jestliže pro libovolné body $p, q \in M$ existuje lineární izomorfismus $F\colon T_pM \to T_qM$ takový, že

$$(F^*R)(q) = R(p). \tag{12.1}$$

Byly studovány také křivostně homogenní prostory v řádu r, v nichž je podmínka (12.1) nahrazena podmínkou pro zachování kovariantních derivací až do řádu r:

$$F^*(\hat{\nabla}^j R)(p) = (\hat{\nabla}^j R)(p), \text{ pro } j = 0, \dots, r. \tag{12.2}$$

12.1 K lokální homogennosti v dimenzi 2

Na počáteční výsledky B. Opozdy v tomto směru, [66], [63], navázali i další autoři, [42], [43], [41], [65], [64], [3].

Zdánlivě snadný problém klasifikovat všechny lokálně homogenní symetrické konexe definované na oblastech U v rovině $\mathbf{R}^2$ byl vyřešen poměrně nedávno [65], některé částečné výsledky je možno najít v [40], [41]. Poznamenejme, že tatáž úloha v dimenzi tři představuje skutečně obtížný problém.

B. Opozda našla obecný tvar vyjadřující všechny symetrické lokálně homogenní lineární konexe na dvourozměrných varietách ve vhodných lokálních souřadnicích. Dokázala:

Věta 12.1 *Nechť ∇ je symetrická lokálně homogenní lineární konexe na 2-dimenzionální varietě M. Potom buď je ∇ Levi-Civitovou konexí prostoru s konstantní křivostí, nebo* *v okolí každého bodu $p \in M$ existuje mapa $\varphi = (U_p, (x^1, x^2))$ a reálné konstanty A, B, C, D, E, F takové, že ∇ je na U_p vyjádřena z následujících formulí:*

Typ A:

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = A\partial_1 + B\partial_2, \nabla_{\partial_1}\partial_2 = C\partial_1 + D\partial_2, \nabla_{\partial_2}\partial_2 = E\partial_1 + F\partial_2, \qquad (12.3)$$

Typ B:

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = \frac{1}{x^1}\left(A\partial_1 + B\partial_2\right), \nabla_{\partial_1}\partial_2 = \frac{1}{x^1}\left(C\partial_1 + D\partial_2\right), \nabla_{\partial_2}\partial_2 = \frac{1}{x^1}\left(E\partial_1 + F\partial_2\right). \qquad (12.4)$$

Zde je označeno $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

„Levi-Civitova konexe" zahrnuje i Lorentzovský případ. V [41] byl stejný problém řešen jiným způsobem, totiž metodou grupově-teoretickou, zkoumáním a rozborem možných Lieových algeber afinních Killingových vektorových polí.

Definice 12.2 Říkáme, že lineární konexe ∇ na otevřené oblasti $U \subseteq R^n$ je *konexí s konstantními Christoffelovými symboly*, jestliže všechny komponenty Γ^i_{jk}, $i, j, k \in 1, \ldots, n$ jsou konstantní na U.

12.2 Killingova vektorová pole

Definice 12.3 Vektorové pole X na afinní varietě (M, ∇) je *Killingovo*, splňuje-li rovnici

$$[X, \nabla_Y Z] - \nabla_Y [X, Z] - \nabla[X, Y]\, Z = 0 \qquad (12.5)$$

pro všechna $Y, Z \in X(M)$.

V [41] byly klasifikovány všechny symetrické lokálně homogenní (hladké) lineární konexe na 2-varietách metodou využívající skutečnosti, že Killingova vektorová pole afinní variety tvoří afinní Killingovu algebru, což je Lieova algebra.

Lieovy algebry vektorových polí na $\mathbf{R}^2$ byly prozkoumány a klasifikovány P. J. Olverem v [61]. V důkazu se vyjde od jednotlivých tranzitivních Lieových algeber vektorových polí z Olverova seznamu a zjišťuje se, pro které lineární konexe na 2-varietách může být afinní Killingovou algebrou (pokud daná konexe může mít různé afinní Killingovy algebry, hledá se ta maximální). Přitom některým Lieovým algebrám polí neodpovídá žádná konexe.

Poznamenejme, že se užívá zcela jiných „kanonických" souřadnic než v původních pracích B. Opozdy. Důkaz se opírá o následující:

Věta 12.4 [40] *Hladká konexe ∇ na hladké varietě M je lokálně homogenní právě tehdy, když každý bod má okolí, na němž existují aspoň dvě lineárně nezávislá afinní Killingova vektorová pole.*

Uvažujme souřadnicovou mapu $(U, (x^1, x^2))$ variety $M, \dim M = 2$. Splnění podmínky (12.5) zřejmě stačí prověřit pro dvojici vektorových polí

$$(Y, Z) \in (\partial_1, \partial_1), (\partial_1, \partial_2), (\partial_2, \partial_2).$$

Pro volbu (∂_2, ∂_1) totiž základní identity pro torzi a Lieovy závorky dají stejné podmínky jako volba (∂_1, ∂_2). Píšeme-li

$$X = a(x^1, x^2)\partial_1 + b(x^1, x^2)\partial_2$$

je podmínka (12.5) ekvivalentní systému šesti lineárních parciálních diferenciálních rovnic (6.1) pro neznámé funkce a, b, [40]:

$$\begin{aligned}
&a_{uu} + Aa_u - Ba_v + 2Cb_u + A_u a - A_v b = 0,\\
&b_{uu} + 2Ba_u + (2D - A)b_u - Bb_v + B_u a + B_v b = 0,\\
&a_{uv} + (A - D)a_v + Eb_u + Cb_v + C_u a + C_v b = 0,\\
&b_{uv} + Da_u + Ba_v + (F - C)b_u + D_u a + D_v b = 0,\\
&a_{vv} - Ea_u + (2C - F)a_v + 2Eb_v + E_u a + E_v b = 0,\\
&b_{vv} + 2Da_v - Eb_u + Fb_v + F_u a + F_v b = 0.
\end{aligned} \tag{12.6}$$

Ukazuje se následující souvislost Killingových vektorových polí a vlastností dané konexe ∇:

Věta 12.5 *Pro lokálně symetrickou konexi na 2-varietě platí:*

1. *Je-li ∂_2 Killingovo pole pro konexi ∇, pak její Christoffely jsou funkce závislé pouze na x^2.*

2. *Jestliže ∂_1 i ∂_2 jsou Killingova vektorová pole, pak Christoffelovy symboly dané konexe jsou v příslušných souřadnicích konstantní.*

3. *Jestliže má ∇ Killingova vektorová pole $\partial_1, \partial_2, (px^1 + qx^2)\partial_1 + (vx^1 + sx^2)\partial_2$ pro jisté konstanty $p, q, r, s \in \boldsymbol{R}$, pak jsou v daných souřadnicích Christoffelovy symboly nulové, tj. ∇ je (lokálně) plochá.*

4. *Má-li v daných souřadnicích (x^1, x^2) konexe ∇ nulové Christoffely, pak má šestidimenzionální algebru afinních Killingových vektorových polí s generátory*

$$\partial_1, \partial_2, x^1\partial_1 + x^2\partial_2, x^1\partial_2, x^2\partial_1$$

a naopak nemá Killingova pole tvaru $\alpha(x^1, x^2)\partial_1 + \beta(x^1, x^2)\partial_2$, kde α, β jsou vlastní kvadratické polynomy v x^1 a x^2.

V důkazu se použije vztahů (12.6). V [41] se nejprve vytřídí Lieovy algebry, které vedou na konexe s nulovými Christoffely [41, Lemma 3.1, str. 91] a pak ty, které nevedou na žádnou invariantní lineární konexi. Značná část článku je věnována zbývajícím, poněkud komplikovaným případům.

Dále se mj. ukazuje, že konexe s konstantními Christoffely je lokálně symetrická právě v následujících případech:

1. $E \neq 0, A = (ED - CF + C^2)/E, B = CD/E$,
2. $E \neq 0, B = AF/E, D = CF/E$,
3. $C \neq 0, E = F = 0, B = AD/C$,
4. $C = E = F = 0, A = D$,
5. $A = C = E = 0$,
6. $F \neq 0, C = E = 0, B = D(D - A)/F$,
7. $D = E = 0, F = C$,

přičemž právě v případech 2. a 3. není plochá (zde $A, \ldots, F$ jsou funkce).

Dále je v [41, Věta 6.4., str. 99] podán úplný výčet případů, pro které je příslušná lokálně homogenní (hladká) lineární konexe ∇ metrizovatelná, tj. když *Ric* je pseudo-Riemannova metrika a ∇ je právě Riemannovou konexí této metriky. Ve všech čtyřech případech je ∇ zároveň lokálně symetrická:

1. Konexe s Christoffely tvaru

$$\begin{aligned} A(x^1) &= C_1x^1 + C_2, \\ B(x^1) &= C_1, \\ C(x^1) &= -C_1(x^1)^2 + (C_3 - C_2)x^1 + C_4, \\ D(x^1) &= -C_1x^1 + C_3, \\ E(x^1) &= C_1(x^1)^3 + (C_2 - 2C_3)(x^1)^2 + (C_5 - 2C_4 - 1)x^1 + C_6, \\ F(x^1) &= C_1(x^1)^2 - 2C_3x^1 + C_5, \end{aligned}$$

kde $C_1 \neq 0, C_2 + C_3 = 0, C_4 = -C_2^2/C_1, C_5 = C_2^2/C_1, C_6 = -C_2(C_1 - C_2^2)/C_1^2$. Ric je Lorentzovská metrika s konstantní kladnou křivostí.

2. Pro konexi s Christoffely

$$A(x^1) = B(x^1) = D(x^1) = 0, \quad C(x^1) = -2x^1, \quad E(x^1) = 4(x^1)^3, \quad F(x^1) = 2x^1$$

vychází Lorentzovská metrika

$$Ric = -4dx^1 \otimes dx^1 + 4(x^1)^2 dx^2 \otimes dx^2$$

s konstantní kladnou křivostí.

3. Konexe s Christoffely

$$A(x^1) = -\frac{1}{x^1}, \quad D(x^1) = -\frac{1}{x^1}, \quad E(x^1) = \frac{1}{x^1}, \quad B(x^1) = C(x^1) = F(x^1) = 0$$

poskytuje Riemannovu metriku

$$\text{-}Ric = \frac{1}{(x^1)^2}(dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2)$$

s konstantní zápornou křivostí.

4. Konexe, jejíž Christoffely jsou tvaru:

$$A = \frac{-2x^1}{1 + (x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad B = \frac{2x^2}{1 + (x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad A = D = -E, \quad C = F = -B$$

poskytuje Riemannovu metriku s konstantní kladnou křivostí

$$Ric = \frac{4}{(1 + (x^1)^2 + (x^2)^2)^2}(dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2).$$

Vraťme se nyní ke konexím typu A (12.3) a typu B (12.4) a vyhledejme mezi nimi metrizovatelné s užitím metod, které jsme rozvinuli v kapitole 7.

Úloha 1. Na $\mathbf{R}^2[x^1, x^2]$ je dána třída symetrických lineárních konexí s konstantními Christoffely

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= A, & \Gamma^2_{11} &= B, & \Gamma^1_{12} &= C, \\ \Gamma^2_{12} &= D, & \Gamma^1_{22} &= E, & \Gamma^2_{22} &= F, \end{aligned} \tag{12.7}$$

kde $A, \ldots, F$ jsou reálné konstanty. Vyšetřete tuto třídu konexí z hlediska metrizovatelnosti.

Pro konexi s konstantními Christoffely na $\mathbf{R}^2$ mají komponenty Ricciho tenzoru tento tvar:

$$\begin{aligned} Ric(\partial_1, \partial_1) &= R_{11} = B(F - C) + D(A - D), \\ Ric(\partial_1, \partial_2) &= Ric(\partial_1, \partial_2) = R_{12} = R_{21} = CD - BE, \\ Ric(\partial_2, \partial_2) &= R_{22} = C(F - C) + E(A - D). \end{aligned} \tag{12.8}$$

Protože komponenty jsou konstantní, je Ricciho tenzor takové konexe také konstantní a rovněž všechny jeho kovariantní derivace $\nabla^k Ric$, $k = 1, 2, \ldots$ jsou konstantní. Dále je Ric symetrický.

Obecně, pro některé skupiny parametrů je Ricciho tenzor nulový, pro některé je nenulový, ale degenerovaný, a pro některé je nedegenerovaný. Pro metrizovatelnost jsou příznivé pouze dva případy:

1. $Ric = 0$, ekvivalentně $R = 0$, konexe je plochá, a tedy metrizovatelná.

2. Ric je nedegenerovaný ($\det R_{ij} \neq 0$) a rekurentní, tj. existuje 1-forma $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ taková, že $\nabla Ric = \omega \otimes Ric$, tedy

$$R_{ij;k} = \omega_k \cdot R_{ij}.$$

Podmínka symetričnosti, $Ric(X, Y) = Ric(Y, X)$, je splněna díky (12.8).

Pro náš případ získáme:

$$
\begin{aligned}
-R_{11;1} &= 2(AR_{11} + BR_{12}),\\
-R_{12;1} &= CR_{11} + (A + D)R_{12} + BR_{22},\\
-R_{22;1} &= 2(CR_{12} + DR_{22}),\\
-R_{11;2} &= 2(CR_{11} + DR_{12}),\\
-R_{12;2} &= ER_{11} + (C + F)R_{12} + DR_{22},\\
-R_{22;2} &= 2(ER_{12} + FR_{22}).
\end{aligned}
$$

Ricciho tenzor bude rekurentní, právě když budou existovat konstanty $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{R}$ splňující soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \omega_1 R_{11} + 2AR_{11} + 2BR_{12} = 0,\\
&(2)\quad \omega_1 R_{12} + (A + D)R_{12} + CR_{11} + BR_{22} = 0,\\
&(3)\quad \omega_1 R_{22} + 2CR_{12} + 2DR_{22} = 0,\\
&(4)\quad \omega_2 R_{11} + 2CR_{11} + 2DR_{11} = 0,\\
&(5)\quad \omega_2 R_{12} + (C + F)R_{12} + ER_{11} + DR_{22} = 0,\\
&(6)\quad \omega_2 R_{22} + 2ER_{12} + 2FR_{22} = 0.
\end{aligned}
\tag{12.9}
$$

Abychom zodpověděli problém, budeme se zajímat o nalezení takových reálných parametrů $A, \ldots, F$, pro které je soustava (12.9) řešitelná a současně platí buď $R_{11} = R_{12} = R_{22} = 0$ nebo $det(R_{ij}) \neq 0$ (tj. Ric je nedegenerovaný).

1. Zjistíme nejprve, kdy může vzniknout plochá konexe. Rozlišme např. případy $D = 0$ a $D \neq 0$.

   (a) Pro $D = 0$ vedou na plochou konexi následující volby:

   - $B = C = D = E = 0, A, F \in \mathbf{R}$;
   - $D = E = 0, C = F, A, B, F \in \mathbf{R}$;
   - $B = D = 0$, parametry A, C, E, F splňují $AE - C^2 + CF = 0$.

   Důkaz. Při $D = 0$ má podmínka $R_{12} = 0$ tvar $BE = 0$. Pro $D = E = 0$ musí platit $B(F - C) = 0, C(F - C) = 0$, z toho plyne, že $F = C \vee B = C = 0$. Pro $D = B = 0$, pak musí být $C(F - C) + AE = 0$.

(b) Pro $D \neq 0$ vychází z $R_{12} = 0$ vztah $C = \frac{BE}{D}$. Navíc, podmínky $R_{11} = R_{22} = 0$ platí právě tehdy, když

$$\begin{aligned} B(F - \tfrac{BE}{D}) + D(A - D) &= 0, \\ \tfrac{BE}{D}\left(F - \tfrac{BE}{D}\right) + E(A - D) &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava je ekvivalentní jedné rovnici třetího stupně

$$AD^2 - EB^2 + BDF - D^3 = 0, \quad D \neq 0.$$

Je-li tedy $D \neq 0$ pevně dáno, pak např. volba A, B, E vede na jediné F. Podobně pro zvolená E, B, F dopočítáme jednoznačně A. Vyjde plochá metrizovatelná konexe.

Zadaná třída konexí s konstantními Christoffely tedy obsahuje čtyřparametrický systém (lokálně) plochých metrizovatelných konexí.

Pro afinnní varietu dimenze 2, jejíž konexe má konstantní Christoffely, platí následující:

Lemma 12.6 *Jestliže je Ricciho tenzor rekurentní a splňuje $R_{12} = 0$, pak je buď nulový nebo degenerovaný.*

Důkaz. Ze soustavy (12.9) zaručující rekurentnost plyne

$$\begin{aligned} (\omega_1 + 2A)R_{11} &= 0, \qquad & (\omega_2 + 2C)R_{11} &= 0, \\ (\omega_1 + 2D)R_{22} &= 0, \qquad & (\omega_2 + 2F)R_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Uvažujme rovnice na prvním řádku:

- buď $R_{11} = 0$, nebo $\omega_1 + 2A = 0$ a $\omega_2 + 2C = 0$,
- buď $R_{22} = 0$, nebo $\omega_1 + 2D = 0$ a $\omega_2 + 2F = 0$.

Kdyby platilo $R_{11} \cdot R_{22} \neq 0$, muselo by být $A = D$ a $C = F$. Potom ale $R_{11} = 0$ a současně $R_{22} = 0$, což je ve sporu s předpokladem.

Lemma 12.7 *Je-li Ric na M_2 všude nenulový, rekurentní a nedegenerovaný, pak jeho komponenty splňují $R_{11} \cdot R_{22} \neq 0$.*

Důkaz. Pokud by platilo $R_{11} = 0$, dostali bychom ze soustavy (12.9):

$$BR_{12} = 0 = DR_{12}.$$

Muselo by tedy platit buď $R_{12} = 0$, nebo $B = D = 0$, ale to má opět za následek $R_{12} = 0$. Tedy *Ric* je reprezentován singulární maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}.$$

Podobně v případě $R_{22} = 0$ bychom získali $CR_{12} = 0 = ER_{12}$, tedy $R_{12} = 0$, a *Ric* je reprezentován singulární maticí

$$\begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z předchozího plyne:

Důsledek 12.8 *Pokud by existovala na M_2 metrizovatelná konexe s konstantními Christoffely a všude nenulovým Ricciho tenzorem, musela by splňovat*

$$R_{11} \cdot R_{12} \cdot R_{22} \neq 0.$$

2. Zbývá tedy vyšetřit tuto možnost.

Lemma 12.9 *Je-li (M_2, ∇) dvoudimenzionální afinní varieta s konstantními Christoffely, jejíž Ricciho tenzor je rekurentní a má všechny komponenty všude nenulové, pak je Ric degenerovaný.*

Důkaz. Díky předpokladu $R_{11} \neq 0$ dostáváme ze soustavy (12.9) pro rekurentnosti Ricciho tenzoru mj. tyto vztahy:

(a)

$$\omega_1 = -2A - 2B\frac{R_{12}}{R_{11}}, \qquad \omega_2 = -2C - 2D\frac{R_{12}}{R_{11}},$$

(b)

$$-2AR_{22} - 2B\frac{R_{12}R_{22}}{R_{11}} + 2CR_{12} + 2DR_{22} = 0,$$

(c)

$$-2CR_{22} - 2D\frac{R_{12}R_{22}}{R_{11}} + 2ER_{12} + 2FR_{22} = 0.$$

Odtud

$$\begin{aligned} B \cdot \tfrac{R_{12}R_{22}}{R_{11}} &= (D-A)R_{22} + CR_{12}, \\ D \cdot \tfrac{R_{12}R_{22}}{R_{11}} &= (F-C)R_{22} + ER_{12}. \end{aligned}$$

Předpokládejme nejprve, že $B \cdot D \neq 0$. Ukážeme, že Ricciho tenzor bude v tomto případě degenerovaný. Dostaneme:

$$[-D(D-A) + B(F-C)]\, R_{22} - (CD - BE)R_{12} = 0$$

a po dosazení ze vztahů pro R_{12} a R_{11}:

$$0 = R_{11}R_{22} - R_{12}^2 = det(R_{ij})$$

Tedy Ric je degenerovaný.

Dokázali jsme tedy postupně:

Věta 12.10 *Ve třídě dvoudimenzionálních afinních variet se symetrickou konexí a s konstantními Christoffely typu* (12.7) *jsou metrizovatelné právě ty, které jsou ploché.*

Odpověď na úlohu 1 je tedy následující.

Důsledek 12.11 *Při zavedeném označení, na plochou, a tedy metrizovatelnou symetrickou konexi vedou následující volby koeficientů:*

$$B = C = D = E = 0, \qquad A, F \in \boldsymbol{R} \text{ libovolné};$$

$$C = F, D = E = 0, \qquad A, B, F \in \boldsymbol{R} \text{ libovolné};$$

$$B = D = 0, \qquad A, C, E, F \in \boldsymbol{R} \text{ a platí } AE - C^2 + CF = 0;$$

$$D \neq 0, D \in \boldsymbol{R}, C = \frac{BE}{D}, AD^2 - EB^2 + BDF - D^3 = 0, \qquad A, B, E, F \in \boldsymbol{R}.$$

Jestliže $B = 0$, pak

$$R_{11} = D(A-D), \qquad R_{12} = CD, \qquad R_{22} = C(F-C) + E(A-D).$$

Zkoumejme podmínky rekurentnosti.

Zřejmě $D \neq 0, C \neq 0$, předpoklad $D = 0$ nebo $C = 0$ by vedl na $R_{12} = 0$ a tedy podle Lemmatu 12.6 na $Ric = 0$.

Z první rovnice soustavy (12.9) je $(2A + \omega_1)R_{11} = 0$. Podle Lemmatu 12.7, platí buď $R_{11} \neq 0 \neq R_{22}$, nebo není pravda, že Ric je všude nenulový. Případ $Ric = 0$ jsme již prošetřili. Předpokládejme tedy, že $R_{11} \neq 0$, pak $\omega_1 = -2A$ a po dosazení do druhé rovnice v (12.9) získáme

$$(D - A)R_{12} + CR_{11} = 0,$$

nebo ekvivalentně:

$$CD(D - A + C) = 0. \tag{12.10}$$

Podle předpokladu $D \neq 0, C \neq 0$. Vztah (12.10) je tedy ekvivalentní s $C = A - D$. Získáme $R_{11} = R_{12}$.

Dosadíme-li nyní do třetí rovnice v (12.9) obdržíme

$$(A - D)(R_{12} - R_{22}) = 0.$$

Předpoklad $A - D = 0$ by podle rovnice (12.10) znamenal $CD = 0$, ale tento případ nemůže nastat. Proto $R_{12} = R_{22}$. Dohromady $R_{11} = R_{12} = R_{22}$, a tedy $det(R_{ij}) = 0$, Ric je degenerovaný.

Podobně, jestliže $D = 0$, je $R_{11} = B(F - C), R_{12} = -BE, R_{22} = C(F - C) + AE$. Zřejmě musí být $B \neq 0, E \neq 0, F \neq C$. Předpokládejme, že soustava (12.9) je splněna. Pak $\omega_2 = -2C$ (protože $R_{11} \neq 0$). Z šesté rovnice $(F - C)R_{22} + ER_{12} = 0, R_{22} = -\frac{E}{F-C}R_{12}$, z páté rovnice $(F - C)R_{12} + ER_{11} = 0, R_{11} = -\frac{F-C}{E}R_{12}$. Odtud $R_{11} \cdot R_{22} = R_{12}^2$ a Ric je degenerovaný. Tím je věta plně dokázána.

Úloha 2. Prozkoumejte metrizovatelnost konexí na $M_2 = \mathbf{R}[u, v] - \{(0, v); v \in \mathbf{R}\}$ s Christoffelovými symboly tvaru

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^1_{11} &= \tfrac{A}{u}, & \tilde{\Gamma}^2_{11} &= \tfrac{B}{u}, & \tilde{\Gamma}^1_{12} &= \tfrac{C}{u}, \\ \tilde{\Gamma}^2_{12} &= \tfrac{D}{u}, & \tilde{\Gamma}^1_{22} &= \tfrac{E}{u}, & \tilde{\Gamma}^2_{22} &= \tfrac{F}{u}, \end{aligned} \tag{12.11}$$

kde $A, \dots, F$ jsou reálné konstanty.

Označíme-li jako ∇ konexi na M_2 s konstantními Christoffely značenými v Úloze 1, Ric jako její Ricciho tenzor a R_{ij} jeho komponenty, a jako $\tilde{\nabla}$ konexi v Úloze 2, $\tilde{Ric}, \tilde{R}_{ij}$

její Ricciho tenzor. Jsou mezi nimi tyto vztahy:

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{u}\Gamma^i_{jk}, \qquad \tilde{R}_{ij} = \frac{1}{u^2}R_{ij}, \qquad u \neq 0$$

a dále

$$\nabla \tilde{Ric} = \frac{1}{u}\nabla Ric. \tag{12.12}$$

Zřejmě je $\tilde{Ric} = 0$ právě tehdy, když $Ric = 0$.

Tenzor $\tilde{Ric}$ je rekurentní právě tehdy, když splňuje soustavu rovnic:

$$\begin{array}{ll}
(1) & (\omega_1 + \frac{2A}{u})\tilde{R}_{11} + \frac{2B}{u}\tilde{R}_{12} = 0,\\
(2) & \frac{C}{u}\tilde{R}_{11} + (\omega_1 + \frac{1}{u}(A+D))\tilde{R}_{12} + \frac{B}{u}\tilde{R}_{22} = 0,\\
(3) & \frac{2C}{u}\tilde{R}_{12} + (\omega_1 + \frac{2D}{u})\tilde{R}_{22} = 0,\\
(4) & (\omega_2 + \frac{2C}{u})\tilde{R}_{11} + \frac{2D}{u}\tilde{R}_{12} = 0,\\
(5) & \frac{E}{u}\tilde{R}_{11} + (\omega_2 + \frac{(C+F)}{u})\tilde{R}_{12} + \frac{D}{u}\tilde{R}_{22} = 0,\\
(6) & \frac{2E}{u}\tilde{R}_{12} + (\omega_2 + \frac{2F}{u})\tilde{R}_{22} = 0,
\end{array} \tag{12.13}$$

pro jisté funkce ω_1, ω_2.

Plochou metrizovatelnou konexi získáme právě pro volby parametrů $A, \ldots, F$ uvedených v důsledku 12.11. Dále pro konexe s Christoffely (12.11) platí zřejmě tvrzení analogická Lemmatům 12.6, 12.7, 12.9:

Lemma 12.12 *Nechť je na M_2 dána konexe s Christoffely* (12.11). *Je-li její Ricciho tenzor rekurentní a splňuje $\tilde{R}_{12} = 0$, pak je nulový nebo degenerovaný.*

Důkaz. Z (12.13) po dosazení dostaneme:

$$\begin{array}{ll}
(\omega_1 + \frac{2A}{u})\tilde{R}_{11} = 0, & (\omega_2 + \frac{2C}{u})\tilde{R}_{11} = 0,\\
(\omega_1 + \frac{2D}{u})\tilde{R}_{22} = 0, & (\omega_2 + \frac{2F}{u})\tilde{R}_{22} = 0.
\end{array} \tag{12.14}$$

Z rovnic na prvním řádku plyne, že $\tilde{R}_{11} = 0$, nebo $\omega_1 + \frac{2A}{u} = 0$ a $\omega_1 + \frac{2C}{u} = 0$ pro $u \in \mathbf{R} - \{0\}$. Podobně z rovnic ve druhém řádku, buď $\tilde{R}_{22} = 0$, nebo $\omega_1 + \frac{2D}{u} = 0$ a $\omega_2 + \frac{2F}{u} = 0$, pro $u \in \mathbf{R} - \{0\}$. Kdyby platilo $\tilde{R}_{11} \cdot \tilde{R}_{22} = 0$, muselo by být $A = D$ a současně $C = F$. To by ale znamenalo, že $\tilde{Ric} = 0$, což je ve sporu s předpokladem.

Lemma 12.13 *Je-li $\tilde{Ric}$ na M_2 všude nenulový, rekurentní a nedegenerovaný, pak jejich komponenty splňují $\tilde{R}_{11} \cdot \tilde{R}_{22} \neq 0$.*

Důkaz. Pokud by platilo $\tilde{R}_{11} = 0$, dostali bychom ze soustavy (12.13):

$$\frac{B}{u}\tilde{R}_{12} = 0 = \frac{D}{u}\tilde{R}_{12}, \qquad u \in \mathbf{R} - \{0\}\,.$$

Muselo by tedy platit $\tilde{R}_{12} = 0$, nebo $B = D = 0$, ale to má opět za následek $\tilde{R}_{12} = 0$. Tedy $\tilde{Ric}$ je reprezentován singulární maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{R}_{22} \end{pmatrix}.$$

Podobně v případě $\tilde{R}_{22} = 0$ bychom získali $\frac{C}{u}\tilde{R}_{12} = 0 = \frac{E}{u}\tilde{R}_{12}$, tedy $\tilde{R}_{12} = 0$ a $\tilde{Ric}$ je reprezentován singulární maticí

$$\begin{pmatrix} \tilde{R}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma 12.14 *Je-li* (M_2, ∇) *dvoudimenzionální afinní varieta s Christoffely tvaru* (12.11)*,jeho Ricciho tenzor je rekurentní a má všechny komponenty všude nenulové, pak je* $\tilde{Ric}$ *degenerovaný.*

Důkaz. Díky předpokladu $\tilde{R}_{11} \neq 0$ dostáváme ze soustavy (12.13) pro rekurentnosti Ricciho tenzoru mj. tyto vztahy:

1.
$$\omega_1 = -\frac{2A}{u} - \frac{2B}{u}\frac{\tilde{R}_{12}}{\tilde{R}_{11}}, \qquad \omega_2 = -\frac{2C}{u} - \frac{2D}{u}\frac{\tilde{R}_{12}}{\tilde{R}_{11}},$$

2.
$$-\frac{2A}{u}\tilde{R}_{22} - \frac{2B}{u}\frac{\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{22}}{\tilde{R}_{11}} + \frac{2C}{u}\tilde{R}_{12} + \frac{2D}{u}\tilde{R}_{22} = 0,$$

3.
$$-\frac{2C}{u}\tilde{R}_{22} - \frac{2D}{u}\frac{\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{22}}{\tilde{R}_{11}} + \frac{2E}{u}\tilde{R}_{12} + \frac{2F}{u}\tilde{R}_{22} = 0,$$

pro $u \in \mathbf{R} - \{0\}$.

Odtud

$$\begin{aligned} \tfrac{B}{u} \cdot \tfrac{\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{22}}{\tilde{R}_{11}} &= \tfrac{(D-A)}{u}\tilde{R}_{22} + \tfrac{C}{u}\tilde{R}_{12}, \\ \tfrac{D}{u} \cdot \tfrac{\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{22}}{\tilde{R}_{11}} &= \tfrac{(F-C)}{u}\tilde{R}_{22} + \tfrac{E}{u}\tilde{R}_{12}, \end{aligned}$$

pro $u \in \mathbf{R} - \{0\}$. Předpokládejme nejprve, že $B \cdot D \neq 0$. Obdobně jako v důkazu lemmatu 12.7 je Ricciho tenzor degenerovaný. Dostaneme:

$$0 = \tilde{R}_{11}\tilde{R}_{22} - \tilde{R}_{12}^2 = det(\tilde{R}_{ij})$$

Tedy $\tilde{Ric}$ je degenerovaný.

Tím jsme dokázali:

Věta 12.15 *Ve třídě dvoudimenzionálních afinních variet se symetrickou konexí typu B a s Christoffely tvaru* (12.11) *jsou metrizovatelné právě ty, které jsou ploché.*

Reference

[1] ANASTASIEI, M.: *Metrizable linear connections in vector bundles.* Publ. Math Debrecen 62/3-4 (2003), 277-287.

[2] ANDERSON, I., THOMPSON, G.: *The inverse problem of the calculus of variations for ordinary differential equations.* Memoires AMS 98, No 473 (1992).

[3] ARIAS-MARCO, T., KOWALSKI, O.: *Classification of locally homogeneous affine connections with arbitrary torsion on 2-dimensional manifolds.* Monatsh. Math. 153 (2008), 18 p., DOI 10.1007/s00605-007-0494-0.

[4] AUDRETSCH, J., MARZLIN, K.-P.: *Ramsey fringes in atomic interferometry: Measurability of the influence of space-time curvature.* Phys. Rev. A **50** (3) (1994) pp. 2080-2095.

[5] BOČEK, L.: *Tenzorový počet.* MS SNTL, Praha, 1976.

[6] BOECKX, E., KOWALSKI, O., VANHECKE, L.: *Non-homogeneous relatives of symmetric spaces.* Diff. Geom. and Appl. **4** (1994), 45-69.

[7] BOECKX, E., KOWALSKI, O., VANHECKE, L.: *Riemannian Manifolds of Conullity two.* World Scientific, 1996.

[8] BOOTHBY, W. M.: *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.* Revised second edition, Academic Press, Amsterdam, London, New York, Oxford, Paris, Tokyo, 2003.

[9] CARTAN, H.: *Theorie Elementaire des Functions Analytiques D'une ou Plusieurs Variable.* Hermann, 1975.

[10] CHENG, K. S., NI, W. T.: *Necessary and sufficient conditions for the existence of metrics in two-dimensional affine manifolds.* Chinese J. Phys. **16** (1978), 228-232.

[11] COCOS, M.: *A note on symmetric connections.* J. Geom. Phys. 56 (2006), 337-343.

[12] CONLON, L.: *Differentiable Manifolds.* second edit. Boston: Birkhäuser, 2001. 418 s. ISBN 0-8176-4134-3.

[13] DeTURCK, D. M.: *Existence of metrics with prescribed Ricci curvature: Local theory.* Invent. Math., 65 (1981), 179-207.

[14] DERRICK, W. R., GROSSMAN, S. I.: *A First Course in Differential Equations.* Third Edition, West Publ. Comp., 1987.

[15] do CARMO, M. P.: *Riemannian Geometry.* Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1992.

[16] DODSON, C. T. J., POSTON, T.: *Tensor Geometry. The Geometric Viewpoint and its Uses.* Second ed., Spriger-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991.

[17] DOUGLAS, J.: *Solution of the inverse problem of the calculus of variations.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 50, pp. 71-128, 1941.

[18] EDDINGTON, A. S.: *A Generalisation of Weyl´s Theory of the Electromagnetic and Gravitational Fields* Proc. R. Soc. London, **99A** (1921), 104-122.

[19] EISENHART, L. P., VEBLEN, O.: *The Riemann geometry and its generalization.* Proc. London Math. Soc. **8** (1922), 19-23.

[20] FECKO, M.: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov.* 1. vyd. Bratislava: IRIS, 2004. 722 s. ISBN 80-89018-10-6.

[21] FERMI, E.: *Sopra i fenomeni che avvengono in vinicinanza di una linea ovaria.* Atti R. Accad. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 31 (1922), pp. 21–51.

[22] GODBILLON, C.: *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique.* Hermann, Paris, 1969.

[23] GOŁAB, S.: *Über die Metrisierbarkeit der affin-zusammenhängenden Räume.* Tensor, N.S. **9** (1959), 1-7.

[24] HACISALIHOGLU, H. H.,AMIROV, A. K.: *On the question of the interrelations between the metric and curvature tensor in Riemannian spaces.* Dokl. ANR., 351 (1996), No. 3, 295-296.

[25] HACISALIHOGLU, H. H.,AMIROV, A. K.: *On the question of the interrelations between the metric and curvature tensor in Riemannian spaces,* Sibirsk. Mat. Zh. 39 (1998), No. 5, 1005-1012.

[26] HAVAS, P.: *The range of application of the Lagrange formalism I.* Nuovo Cimento Suppl., Vol. 3, pp. 363-388, 1957.

[27] HELMHOLTZ, H.: *Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung.* Jour. f. d. reine u. angew. Math., Vol. 100, pp. 137-166, 1887.

[28] JAKUBOWICZ, A.: *Über die Metrisierbarkeit der affin-zusammenhängenden Räume.* Tensor, N.S. **14** (1963), 132-137.

[29] JAKUBOWICZ, A.: *Über die Metrisierbarkeit der affin-zusammenhängenden Räume, II Teil.* Tensor, N.S. **17** (1966), 28-43.

[30] JAKUBOWICZ, A.: *Über die Metrisierbarkeit der vierdimensionalen affin-zusammenhängenden Räume.* Tensor, N.S. **18** (1967), 259-270.

[31] JOST, J.: *Riemannian Geometry and Geometric Analysis.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005.

[32] KLEIN, J.: *Geometry of sprays. Lagrangian case. Principle of least curvature.* Proc. IUTAM-ISIMM Symp. on Modern Developements in Analytical Mechanics, Vol. I, Torino, pp. 177-196, 1982.

[33] KLEIN, J.: *On variational second order variational equations; Polynomial case.* Diff. Geom. and Its Appl. Proc. Conf. Opava 1992. Silesian Univ. Opava 1993, pp. 449-456.

[34] KOBAYASHI, S., NOMIZU, K.: *Foundations of Differential Geometry I.* Intersc. Publ. New York, London, 1963.

[35] KOBAYASHI, S., NOMIZU, K.: *Foundations of Differential Geometry I, II.* Wiley-Intersc. Publ., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1991.

[36] KOLÁŘ, I.: *Úvod do globální analýzy.* Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2003. 118 s. ISBN 80-210-3205-7.

[37] KOWALSKI, O.: *Metrizability of affine connections on analytic manifolds.* Note di Matematica **8**, No 1 (1988), 1–11.

[38] KOWALSKI, O.: *On regular curvature structures.* Math. Z. 125 (1972), 129-138.

[39] KOWALSKI, O.: *Úvod do Riemannovy geometrie.* 1. vyd. Praha: Karolinum, 2005. 100 s. ISBN 80-246-0377-2.

[40] KOWALSKI, O., OPOZDA, B., VLÁŠEK, Z.: *On locally nonhomogeneous pseudo-Riemannian manifolds with locally homogeneous Levi-Civita connections.* International J.Math. **14**, 6 (2003), 1-14.

[41] KOWALSKI, O., OPOZDA, B., VLÁŠEK, Z.: *A classification of locally homogenous connections on 2-dimensional manifolds via group-theoretical approach.* Central European J. Math. **2** (1) (2004), 87-102.

[42] KOWALSKI, O., OPOZDA, B., VLÁŠEK, Z.: *Curvature homogeneity of affine connections on two-dimensional manifolds.* Coll. Math. 81(1) (1999), 123-139.

[43] KOWALSK,I O., OPOZDA, B., VLÁŠEK, Z.: *A Classification of Locally Homogeneous Affine Connections with Skew-Symmetric Ricci Tensor on 2-Dimensional Manifolds.* Monatsh. Math. 130 (2000), 109-125.

[44] KOWALSKI, O., TRICERRI, F., VANHECKE, L.: *New examples of non-homogeneous Riemannian manifolds whose cubature tensor is that of a Riemannian symmetric space.* C. R. Acad. Sci. Paris, t. **311**, Série I, (1990), 355-360.

[45] KOWALSKI, O., TRICERRI, F., VANHECKE, L.: *Curvature homogeneous Riemannian manifolds.* J. Math. Pures Appl., **71**, 1992, 471-501.

[46] KOWALSKI, O., VANŽUROVÁ, A.: *On curvature-homogeneous spaces of type* $(1,3)$. Math. Nachr. **284**, 17-18(2011) 2127-2132.

[47] KREYSZIG, E.: *Differentialgeometrie.* Leipzig, 1957.

[48] LEVINE, J.: *Invariant characterization of two-dimensional affine and metric spaces.* Duke Math. J. **14** (1948), 69-77.

[49] LOVELOCK, D., RUND, H.: *Tensors, Differential Forms, and Variational Principle.* A. Wiley-Intersc. Publ., New York, London, Sydney 1975.

[50] MARZLIN, K.-P.: *The physical meaning of Fermi coordinates.* Gen. Relat. Grav. **26** (6) (1994) pp. 619-636.

[51] MARZLIN, K.-P.: *Fermi coordinates for weak gravitational fields.* Phys. Rev. D **50** (2) (1994) pp. 888-891.

[52] MAYER, A.: *Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentiales* Berich. Vesh. Konig. Sach. Gessen. Wissen. Leipzig, Math.-Phys. K1., Vol. 48, p. 519, 1896.

[53] MIKEŠ, J.: *Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces.* Jour. Math. Sci. Vol. 78, pp. 311-333, 1996.

[54] MIKEŠ, J., HINTERLEITNER, I., VANŽUROVÁ, A.: *One remark on variational properties of geodesics in pseudo-Riemannian and generalized Finsler spaces.* In: Ninth Int. Conf. On Geometry, Integrability and Quantization. June 8-13, 2007. Varna. SOFTEX, pp. 261-264, Sofia 2008.

[55] MIKEŠ, J., LAITOCHOVÁ, J., POKORNÁ, O.: *On some relations between curvature and metric tensors in Riemannian spaces.* Rend. del Circolo Matematico di Palermo, Ser. II, Suppl. 2000, 63, 173-176.

[56] MIKEŠ, J., KIOSAK, V., VANŽUROVÁ, A.: *Geodesic mappings of manifolds with affine connection.* Palacký University, Olomouc (2008).

[57] MIKEŠ, J., VANŽUROVÁ, A.: *Reconstruction of the connection or metric from some partial information.* arXiv:1006.3207 (2010) 1-9.

[58] MIKEŠ, J., VANŽUROVÁ, A., HINTERLEITNER, I.: *Geodesic mappings and some generalizations* Palacký University Olomouc, Faculty of Sciences, Olomouc, 2009.

[59] MOKHTARIAN, F., KHALILI, N., YUEN, P.: *Multi-scale free-form surface description.* Web: http://www.ee.surrey.ac.uk/Research/VSSP/demos/css3d/index.html.

[60] NOMIZU, K., SASAKI, T.: *Affine Differential Geometry. Geometry of Affine Immersions.* Cambridge Univ. Press, 1994.

[61] OLVER, P. J.: *Equivalence, Invariants and Symmetry.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[62] O'NEILL, B.: *Úvod do Riemannovy geometrie.* Academic Press, Elsevier, 1983. 468 s. ISBN-13: 978-0-12-526740-3.

[63] OPOZDA, B.: *Affine Version of Singer's Theorem on Locally Homogneous Spaces.* Diff. Geom. Appl. 21 (2004), 173–198. Annals of Global Analysis and Geometry 15 (1997), 187-199.

[64] OPOZDA, B.: *Locally Homogeneous Affine Connections on Compact surfaces.* Proc. AMS 132(9) (2004), 2713-2721.

[65] OPOZDA, B.: *A classification of locally homogeneous connections on 2-dimensional manifolds.* In: *Differential Geometry and its Applications 21*, 2004, 173-198.

[66] OPOZDA, B.: *On curvature homogeneous and locally homogeneous affine connections.* Proc. AMS 124(6) (1996), 1889-1893.

[67] PETROV, A. Z.: *Einstein Spaces* (in Russian). Moscow, 1961.

[68] SAUNDERS, D. J.: *The Geometry of Jet Bundles.* Cambridge Univ. Press, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1989.

[69] SCHMIDT, B. G.: *Conditions on a connection to be a metric connection.* Commun. Math. Phys. **29** (1973), 55-59.

[70] SEKIGAWA, K.: *On some* 3*-dimensional Riemannian manifolds.* Hokkaido Math. J. **2** (1973), 259-270.

[71] SINGER, I. M.: *Infinitesimally homogeneous spaces.* Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 685-697.

[72] SINYUKOV, N. S.: *Geodesic mappings of Riemannian Spaces* (in Russian). Moscow, 1979.

[73] THOMPSON, G.: *Local and global existence of metrics in two-dimensional affine manifolds.* Chinese J. Phys. **19** (1991), No. 6, 529-532.

[74] TRICCERI, F.: *Locally homogeneous Riemannian manifold.* Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 1992.

[75] VANŽUROVÁ, A.: *A note on variational and metrizable connections.* Acta Mathematicae Academiae Nyírengyháziensis, Vol. 20, 2010, www.emis.de/journals.

[76] VANŽUROVÁ, A.: *Linear connections on two-manifolds and SODE's.* Proc. Conf. Aplimat 2007 (Bratislava, Slov. Rep.), Part II, 325-332.

[77] VANŽUROVÁ, A.: *Metrization problem for linear connections and holonomy algebras.* Archivum Mathematicum (Brno) 44 (2008), pp. 339-349.

[78] VERNER, A. L.: *Semi-geodesic coordinate net on tubes of non-positive curvature.* Trudy Mat. Inst. Stekhlov, 1995, 76, 130-140.

[79] VILIMOVÁ, Z.: *Problém metrizovatelnosti lineární konexe.* Opava, 2004. 79 s. Diplomová práce na Filozoficko-přírodovědecké fakultě Slezské univerzity v Opavě. Vedoucí diplomové práce Olga Krupková.

[80] WEYL, H.: *Raum, Zeit, Materie.* Berlin, 1919.

Seznam vlastních publikací:

[81] VANŽUROVÁ, A., PIRKLOVÁ, P.: *Metrizable connections and restrictively variational connections in affine manifolds.* In: *Aplimat 2012.* Bratislava: Faculty of machanical engineering, Slovak university of technology, 2012.

[82] VANŽUROVÁ, A., ŽÁČKOVÁ, P.: *Metrizability of connections on two-manifolds.* Acta universitatis palackianae olomucensis, Facultas rerum naturalium, Mathematica 48. Olomouc: UP Olomouc, 2009. p. 157-170. ISBN 978-80-244-2386-9.

[83] VANŽUROVÁ, A., ŽÁČKOVÁ, P.: *Metrization of linear connections.* Journal of Applied Mathematics (Bratislava, SR) Vol. II, No. I, pp. 151-163, 2009.

[84] VANŽUROVÁ, A., ŽÁČKOVÁ, P.: *Metrization of linear connections.* In: Aplimat 2009. Bratislava: Faculty of machanical engineering, Slovak university of technology, 2009. p. 453-464. ISBN 978-80-89313-31-0.

[85] VANŽUROVÁ, A., ŽÁČKOVÁ, P.: *The metrization problem for linear connections.* In: Proc. Internat. Conf. Presentation of Mathematics, ICPM'09 Liberec, pp. 137-143, 2009.

[86] ŽÁČKOVÁ, P.: *Problem of metrization and holonomy algebras.* In: Aplimat 2010. Bratislava: Faculty of machanical engineering, Slovak university of technology, 2010. p. 493 - 500. ISBN 978-80-89313-48-8.