Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Mocniny a odmocniny v kontextu metrických úloh školské geometrie

Bakalářská práce

Autor: Eliška Hošková

Studijní program: B0114A170006 / Matematika se zaměřením na vzdělávání

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Biologie se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: Vízek Lukáš, Mgr. Ph.D.

Hradec Králové červenec 2023

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Zadání bakalářské práce

Autor:	**Eliška Hošková**
Studium:	S20MA003BP
Studijní program:	B0114A170006 Matematika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání, Biologie se zaměřením na vzdělávání
Název bakalářské práce:	**Mocniny a odmocniny v kontextu metrických úloh školské geometrie**
Název bakalářské práce AJ:	Powers and roots in the context of metric problems in school geometry

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Práce je věnována mocninám a odmocninám a jejich vztahu ke geometrii ve školské matematice. Rozebírá danou problematiku z perspektivy školního kurikula a z matematického hlediska. Předpokládá rešerši relevantních studiích v oboru matematického vzdělávání, realizuje vlastní výzkumné šetření na vybraných školách a analyzuje jeho výsledky.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Vondrová, N., & Rendl, M. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum.

Polák, J. (2014). *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. Plzeň: Fraus.

Vybrané články z odborných časopisů zaměřených na vyučování matematiky.

Vybrané učebnice matematiky pro střední školy.

Další literatura bude upřesněna v průběhu konzultací.

Zadávající pracoviště:	Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta
Vedoucí práce:	Mgr. Lukáš Vízek, Ph.D.
Oponent:	Ing. Mgr. Eva Trojovská, Ph.D.

Datum zadání závěrečné práce: 14.12.2021

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem „Mocniny a odmocniny v kontextu metrických úloh školské geometrie" vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, ze kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne Eliška Hošková

Poděkování

Ráda bych zde poděkovala vedoucímu bakalářské práce Mgr. Lukášovi Vízkovi, Ph.D. za jeho rady a čas, který mi poskytl k řešení problematiky. Dále děkuji všem respondentům, kteří se podíleli na mé bakalářské práci, a též mé rodině za jejich podporu.

Anotace

HOŠKOVÁ Eliška. *Mocniny a odmocniny v kontextu metrických úloh školské geometrie*. Hradec Králové, 2023. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí diplomové práce Mgr. Vízek Lukáš, Ph.D. 77 s.

Bakalářská práce pojednává o mocninách, odmocninách a jejich výskytu v metrických úlohách. Na témata nahlížíme ze dvou různých hledisek. Nejprve se zaměřujeme na matematickou stránku a poté na stránku didaktickou.

V praktické části ověřujeme námi vytvořený list u žáků, kteří ještě neprobrali zmíněnou látku. Následně zhodnocujeme, jakým způsobem na pracovní list respondenti reagovali, v jakých odvětvích matematiky měli největší problémy a zda byl pracovní list správně zkonstruován.

Klíčová slova: mocniny, odmocniny, Pythagorova věta, rozklad mnohočlenu na součin, obsah, vizualizace

Annotation

HOŠKOVÁ Eliška. *Powers and roots in the context of metric problems in school geometry*. Hradec Králové, 2023. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Supervisor Mgr. Vízek Lukáš, Ph.D. 77 p.

The bachelor's thesis discusses powers, square roots and their occurrence in metric problems. We approach the topics from two different perspectives. First we focus on the mathematical side and then on the didactic side.

In the practical part, we verify the worksheet we created with students who have not yet covered the mentioned material. Subsequently, we evaluate how the respondents reacted to the worksheet, in which branches of mathematics they had the biggest problems and whether the worksheet was constructed correctly.

Keywords: powers, square roots, Pythagorean theorem, decomposition of a polynomial into a product, content, visualization

Obsah

1 Úvod

Snad každý občan České republiky, který prošel alespoň základním vzděláním, se setkal s mocninami a odmocninami. Při jejich vyslovení si člověk vzpomene na nekonečně mnoho úloh, které musel vypočítat, aby si osvojil používání vzorců. Uvedená látka je důležitou složkou matematiky probíranou zejména v 8. třídě základní školy, či v sekundě na víceletém gymnáziu. Zvládnutí jmenovaného tématu je předpokladem pro zdolání studia na dalších školách.

Během celé výuky matematiky jsme se běžně setkávali s definicemi, větami a důkazy. Abychom mohli v tomto oboru pokračovat dále, bylo zapotřebí porozumění problematice. Nemáme na mysli pamětné memorování postupů, ale proniknutí do tématu, rozvíjení si logického myšlení, nebo i schopnost aplikace látky do běžného života. S pochopením látky pomáhají samotné důkazy, které obecně nejsou moc atraktivní a populární, zejména v případě algebraických. Naopak geometrické interpretace jsou dle mé vlastní praxe mnohdy poutavější. Ovšem i tato metoda má své zápory, kde hlavní z nich je, že zaznamenává pouze výsledek, nikoliv sled myšlenek. Přesto vnímám geometrickou reprezentaci jako jeden z možných prostředků, jak zaujmout matematikou a inspirovat k jejímu objevování a porozumění.

Bakalářská práce je rozdělena na hlavní 3 části, kde první 2 se věnují problematice z hlediska teoretického. Nejprve charakterizujeme matematickou složku, kam zařazujeme různé definice, věty a důkazy. Poté nahlížíme na tématiku z pohledu didaktického, kde rozebíráme úskalí v uvedené látce, popisujeme různé didaktické postupy a techniky, a nakonec analyzujeme vizualizaci. Poslední část je věnována samotnému výzkumu.

2 Matematická část

2.1 Mocniny

2.1.1 Historie mocniny

Na začátku naší bakalářské práce se zaměřujeme na historii mocnin. Pojem mocnina se objevuje již v dobách starověkého Řecka, kde se pojí s Pythagorovou větou nebo s výpočty obsahů geometrických útvarů. Prvním autorem moderního zápisu mocniny byl uveden francouzský matematik, filozof a fyzik René Descartes, který použil v roce 1637 ve své příloze *La Géométrie* první zápis a^2 namísto aa. Jeho symbolika se poměrně rychle uchytila a využívá se v matematice až do současnosti (Cajori 1913).

2.1.2 Definice mocniny s přirozeným mocnitelem

V matematice se pokoušíme veškeré zápisy co nejvíce zkrátit. Například sčítání stejných čísel zapisujeme stručně pomocí součinu. Obdobně lze zaznamenat i součin shodných čísel, a to pomocí mocniny, kterou podle autorů Odvárko a Kadleček definujeme:

„Pro libovolné přirozené číslo n se n-tá mocnina čísla a nazývá součin n činitelů a. Značíme a^n a čteme „á na n-tou".

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-krát}}$$

n-krát" (Odvárko, 2004, str. 62).

Definici mocniny s přirozeným exponentem uvádí každý autor odlišným způsobem. Kupříkladu tvůrci učebnice *Matematika pro gymnázia* formulují mocninu s přirozeným exponentem následujícím způsobem:

„Pro každé reálné číslo a a každé přirozené číslo n je

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a,$$

kde v součinu na pravé straně je n činitelů" (Bušek, 2012, str. 120).

Samotný výraz a^n označujeme jako mocninu, kde a je základ mocniny neboli mocněnec a symbol n se nazývá mocnitel čili exponent. Ze znění definice mocniny s přirozeným mocnitelem pak plynou jednoduché vztahy, kde pro každé reálné číslo a platí vztah:

$$a^1 = a$$

a dále pro každé přirozené číslo n je:

$$1^n = 1,;\ 0^n = 0$$

Přímo z formulace by se dále dalo odvodit, zda je mocnina s přirozeným exponentem kladné či záporné reálné číslo. Pokud je mocněnec kladné reálné číslo, pak je mocnina pokaždé kladná. V případě, kdy základ mocniny je záporné reálné číslo, záleží na exponentu. Je-li mocnitel liché číslo, pak je celá mocnina záporné reálné číslo. Naopak pokud patří exponent mezi sudá čísla, vznikne nám následně kladná reálná mocnina (Bušek 2012).

2.1.3 Operace s mocninami s přirozeným mocnitelem

1.1.3.1 Sčítání a odečítání mocnin

Operace sčítání a odečítání mocnin s přirozeným exponentem lze v případě, kdy mocniny mají stejný základ a mocnitele. Jako příklad můžeme uvést:

$$3a^2 - 2a + 4a^2 + a = 7a^2 - a \qquad \text{(Šedivý 1991)}$$

2.1.3.2 Součin mocnin se stejným základem

Mocniny se stejným základem násobíme takovým způsobem, kdy základ pouze opíšeme a exponenty sečteme. Tzv. pro každé reálné číslo a a přirozená čísla m, n platí:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Ukázkový příklad uvádíme níže:

$$4^3 \cdot 4^2 = 4^5$$

$$(-3)^{17} \cdot (-3)^6 = (-3)^{23}$$

2.1.3.3 Podíl mocnin se stejným základem

Pro podíl mocnin se shodným exponentem je základem reálný mocněnec různý od nuly a přirozená čísla m, n, kde $m > n$. Poté je určen vztah:

$$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n}}$$

Mezi vzorové ukázky lze představit:

$$3^9 : 3^4 = 3^5$$

$$(-15)^6 : (-15)^2 = (-15)^4$$

2.1.3.4 Mocnina součinu

Pro libovolná 2 čísla a, b a přirozené číslo n rozumíme mocninou součinu formuli,

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

kde umocňujeme každý činitel samostatně.

Příklady pojící se k této operaci uvádíme níže:

$$(2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$$

$$[0{,}8 \cdot (-0{,}2)]^4 = 0{,}8^4 \cdot (-0{,}2)^4$$

2.1.3.5 Mocnina podílu

Pokud umocníme zvlášť dělence a dělitele, mluvíme o operaci mocnina podílu. V tomto případě je zapotřebí, aby dělitel byl nenulový. U zlomku hovoříme o umocnění čitatele a jmenovatele.

$$\boxed{(a : b)^n = a^n : b^n \quad ; \qquad (\tfrac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Zmíněnou větu si můžeme ukázat na vzorech:

$$(9 : 2)^4 = 9^4 : 2^4$$

$$[(-2{,}4) : 5]^3 = (-2{,}4)^3 : 5^3$$

2.1.3.6 Mocnina mocniny

Touto operací, kde $a \in R$ a $m, n \in N$, rozumíme jednoduchý vzorec ve tvaru:

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

Mezi vzorové příklady řadíme například:

$$(5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4}$$

$$[(-4{,}2)^5]^3 = (-4{,}2)^{5 \cdot 3}$$ (Odvárko a Kadleček 2008)

2.1.4. Mocniny s celým exponentem

V minulé kapitole jsme se zabývali pouze přirozeným mocnitelem s reálným základem. Nyní si exponent rozšíříme na jakákoliv celá čísla.

Ve všech větách týkající se mocniny s přirozeným exponentem nemáme žádné speciální podmínky pro určování mocnitele. Jenom u dělení mocniny se stejným základem je platný pro exponenty r, s vztah, kde $r > s$. Pokud budeme uvažovat rovnost zmíněných čísel, pak pro libovolné reálné číslo a platí:

$$\frac{a^r}{a^r} = 1$$

Podle věty o podílu mocniny získáváme relaci:

$$\frac{a^r}{a^r} = a^{r-r} = a^0$$

Ze zmíněné úvahy plyne, že je praktické rozšířit definici mocniny o nultou mocninu z reálného čísla $a \neq 0$. Tzv. formulujeme:

$$\boxed{a^0 = 1}$$

Pro zmíněnou definici vhodně vyjadřujeme další vztah s nezáporným mocnitelem pro $a \in R/\{0\}$:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Jinak řečeno odstraňujeme záporný exponent pomocí převrácené hodnoty k číslu a a opačného prvku k hodnotě m. Rovnost můžeme navíc vyjádřit též ve tvaru: $a^{-m} = (\frac{1}{a})^m$.

Veškeré věty jmenované v předchozí podkapitole lze stejně aplikovat i pro mocninu s celým mocnitelem, kde pouze zjednodušujeme předpoklad věty o dělení mocnin se stejným základem (Bušek 2012).

2.1.5 Mocniny s racionálním a iracionálním exponentem

Pro každé číslo $a \in R$ a pro každý zlomek $\frac{m}{n} = k, k \in Z$, platí

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k = a^{\frac{m}{n}}$$

V případě definice mocniny s reálným exponentem, kde $a > 0$ a $m \in Z, n \in N$, se musí ověřit 2 podmínky. Nejprve se zjišťuje, jestli je v souladu s definicí mocniny s celým exponentem. Druhé situaci se zabývá vyjádřením racionálního čísla pomocí libovolným z nekonečně mnoha sobě rovným zlomků. Na základě ověřeních lze zadefinovat mocninu s reálným mocnitelem tímto způsobem:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

U mocnin s iracionálním mocnitelem pracujeme s horními a dolními aproximacemi jednotlivých iracionálních čísel, díky čemuž získáváme celkový, přibližný odhad mocniny.

Pro počítání se zmíněnými mocninami platí stejná pravidla jako pro mocniny s celým exponentem (Odvárko 2009).

2.2. Odmocniny

2.2.1 Historie odmocnin

V této kapitole se podíváme na historii odmocnin, která sahá až do období starověku. Průkopníkem se stal Pythagoras, který údajně jako první začal pracovat s iracionálními čísly. Během následujících obdobích na významného filozofa a matematika navazuje mnoho dalších pokračovatelů, kde jedním z nich je vynikající italský matematik Leonardo Pisánský, též zvaný Fibonacci. Sám navazoval mimo jiné i na techniku z období Babylonské říše (Honzlová Exnerová 2014). Mezi podstatné průkopníky se řadí také Christoph Rudolff, jenž ve svém spisu *Coss* z roku 1525 poprvé použil symbol odmocniny. Zmíněný objev se nadále používá v současné matematice (Králová 2007).

2.2.2 Definice odmocniny

Opačnou operaci k umocňování nazýváme odmocňování, kde z dané mocniny s mocnitelem hledáme základ (Vondrovicová 2018). Podle autora Odvárka si odmocninu lze nadefinovat jako:

„Pro každé $n \in N$ je n-tá odmocnina z nezáporného čísla a takové nezáporné číslo b, pro které platí $b^n = a$. Budeme zapisovat

$$b = \sqrt[n]{a}.$$

Číslo n se nazývá odmocnitel (exponent odmocniny), číslo a odmocněnec (základ odmocniny)" (Odvárko, 2009, str. 95). Samotný symbol √ se poté označuje pojmem odmocnítko (Bušek 2012).

Ve formulaci odmocniny se zmiňuje autor pouze o nezáporném základu a odmocniteli, avšak my se v matematice setkáváme i s dalšími možnostmi. Veškeré vztahy znázorníme v grafu níže.

$$\sqrt[n]{a} = b$$

n je sudé číslo

$a \geq 0$

$b \geq 0$

n je liché číslo

$a \geq 0$, $b \geq 0$

$a < 0$, $b < 0$

Na základě definice odmocniny si musíme uvědomit, že relace $\sqrt[n]{a} = b$ je totožná se vztahem $b^n = a$, kde díky tomuto můžeme definovat následující poměr jako $\sqrt[1]{a} = a$, jelikož $a^1 = a$ (Odvárko 2009).

2.2.3 Operace s odmocninami

2.2.3.1 Sčítání a odečítání odmocnin

U zmíněných operací platí stejná pravidla jako u mocnin tzv. je možné je provádět pouze v případě, kdy odmocniny mají stejný základ a odmocnitele. Jako příklad lze uvést:

$$5\sqrt{17} - 2\sqrt{17} = 7\sqrt{17}$$ (Sangaku Maths 2023)

2.2.3.2 Součin odmocnin se stejným základem

Pro každé nezáporné číslo $a, b \in R$ a pro všechna $n \in N$ můžeme formulovat vztah:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}}$$

Mezi vzorové příklady lze uvést například:

$$\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{7} = \sqrt[5]{14}$$

2.2.3.3 Odmocnina podílu

Pokud chceme odmocnit prvky ve zlomku se stejným odmocněncem, je zapotřebí se řídit následujícím pravidlem.

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \forall a, b \in R, a \geq 0, b > 0, \forall n \in N}$$

Díky příkladu níže si přiblížíme zmíněný vztah o odmocnině z podílu:

$$\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[5]{\frac{3}{7}}$$ (Odvárko 2009).

U zlomků s odmocninou ve jmenovateli využíváme postup zvaný usměrnění, abychom se zbavili nechtěné odmocniny. Pro celý proces je zásadní tzv. rozšiřování. Pod rozšířením zlomku si představujeme, že vynásobíme jmenovatele spolu s čitatelem stejným libovolným nenulovým číslem či číselným výrazem. Hodnota samotného zlomku se však nemění (Bušek 2012).

2.2.3.4 Umocňování odmocniny

Pro umocňování odmocniny je základem kladné reálné číslo a, přirozené číslo n a celé číslo s. Poté formulujeme vztah:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{s} = \sqrt[n]{a^{s}}$$

Tuto větu si můžeme ukázat na vzoru:

$$\left(\sqrt[8]{1{,}4}\right)^{5} = \sqrt[8]{1{,}4^{5}}$$

V případě, kdy mluvíme o čísle s jako o přirozeném čísle, platí věta i pro

$a = 0$. Jinak řečeno se jedná o speciální případ, kdy $s \in N, s = n$, pak píšeme:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = \sqrt[n]{a^{n}} = a, \forall a \in R, a \geq 0$$

Příklad pojící se k operaci:

$$\left(\sqrt[7]{3}\right)^{7} = \sqrt[7]{3^{7}} = 3$$

V některých případech se setkáváme i se záporným a. Pak si můžeme relace představit grafem:

$$a \in R, n \in N$$

n je sudé číslo	n je liché číslo
$\sqrt[n]{a^{n}} = \lvert a \rvert$	$\sqrt[n]{a^{n}} = a$

Kdybychom uvažovali 3 přirozená čísla m, n, p spolu s nezáporným reálným číslem a, mohli bychom odmocninu pomocí těchto prvků zapsat ve tvaru:

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

Jinak řečeno jsme využili krácení prvkem p, abychom si zjednodušili práci s výpočty. Uvedenou relaci si ukážeme na příkladu:

$$\sqrt[15]{4^{10}} = \sqrt[5\cdot 3]{4^{5\cdot 2}} = \sqrt[3]{4^{2}}$$

2.2.3.5 Odmocňování odmocniny

Předpokládejme přirozená čísla m, n a nezáporné reálné číslo a. Potom je dán vztah:

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}}$$

Mezi vzorovou ukázku řadíme:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{17}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{17}} = \sqrt[12]{17} \qquad \text{(Odvárko 2009)}$$

2.3. Mnohočleny

S výrazy se v matematice setkáváme na každém kroku. Ve výrazu se vyskytují jak určitá čísla neboli konstanty, tak i písmena čili proměnné, které nahrazují čísla z určité množiny. Důležitým pojmem pojící se s výrazy je definiční obor, čímž rozumíme již jmenovanou množinu, pro jejíž hodnoty proměnných má konkrétní výraz smysl. Pokud dosadíme do výrazu za veškeré proměnné libovolná čísla z definičního oboru a provedeme operaci určenou daným výrazem, získáme číslo, kterému říkáme hodnota výrazu (Bušek 2012).

Mezi výrazy zařazujeme jednočleny a mnohočleny. Pod jednočlenem si představujeme výraz, který se dá formulovat jako číslo, proměnná nebo jako součin čísla a mocnin proměnných s přirozenými mocniteli. Naopak mnohočlen se dá zobrazit jako jednočlen nebo jako součet jednotlivých jednočlenů (Odvárko 2009). Mnohočleny můžeme rozdělit podle počtu proměnných, přesto se převážně pracuje na základních a středních školách pouze s jednou až dvěma proměnnými (Bušek 2012).

2.3.1 Operace s mnohočleny

2.3.1.1 Sčítání a odečítání mnohočlenů

Sčítat či odečítat můžeme pouze takové mnohočleny, u kterých se nachází stejné proměnné ve stejných mocninách. Pokud máme před celým mnohočlenem mínus, je zapotřebí změnit u všech členů mnohočlenu znaménka na opačná.

Vzorovým příkladem níže si představíme obě operace:

$(5a^2 - 3b^3 + 4a - 2b) - (3a^2 - 2b^3 + 7ab - a + 1) = 5a^2 - 3b^3 + 4a - 2b - 3a^2 + 2b^3 - 7ab - a + 1 = 2a^2 - b^3 + 5a - 2b - 7ab - 1$ (Odvárko 2009).

2.3.1.2 Násobení mnohočlenů

Jestliže násobíme jednočleny, lze koeficienty i proměnné různě sdružovat a zaměňovat jejich pořadí. Obecně pro součin mnohočlenů je důležité pravidlo týkající se násobení mocnin se stejným základem, což se nachází v kapitole *Mocniny*.

Mnohočlen můžeme násobit buď jednočlenem, nebo opět mnohočlenem. V prvním případě je zapotřebí se držet pravidla, kde se násobí každý člen mnohočlenu s jednočlenem. Následně se získané jednočleny sčítají, popřípadě odečítají. Podobným pravidlem se řídí i součin dvou mnohočlenů, u kterých se musí vynásobit každý člen jednoho z nich se všemi členy druhého výrazu.

Zmíněné operace lze prezentovat na jednoduchých ukázkách:

$$(3x^3 + 5xy - 2x) \cdot 6xy = 18x^4y + 30x^2y^2 - 12x^2y$$

$$(5x^2 + 3x - 2) \cdot (2x - 1) = 10x^3 + 6x^2 - 4x - 5x^2 - 3x + 2 =$$

$$10x^3 + x^2 - 7x + 2$$ (Odvárko a Kadleček 2008)

Umíme-li mnohočleny násobit, umíme též nalézt jejich mocniny. Nejčastěji využívaná v počtech je druhá a třetí mocnina, které určujeme pomocí vzorců:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (*)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$ (Bušek 2012)

Jejich grafické znázornění a následný popis schématu s důkazem je umístěno v praktické části bakalářské práce.

2.3.1.3 Podíl mnohočlenů

V této podkapitole se zaměříme na podíl mnohočlenů jednočlenem, či mnohočlenem. První situace je poměrně jednoduchá, jelikož dělíme jednočlenem všechny prvky mnohočlenu a vzniklé podíly sečteme. Ve druhém případě se setkáváme s již složitějším postupem. Na středních a základních školách se počítá zejména s mnohočleny s jednou proměnou a dělitelem nejvýše stupně rovnému stupni dělence. Při dělení výrazů se využívá věta o podílu mocnin se stejným základem, proto je důležité nejdříve ovládat téma mocnin.

Výsledkem podílu je opět mnohočlen v případě, kdy mluvíme o dělení beze zbytku. Jinak řečeno nám po vydělení zbude 0. V opačné situaci nám zůstává tzv. neúplný podíl se zbytkem, jenž je menšího stupně než u dělitele (Bušek 2012).

Nejprve si na příkladu ukážeme dělení mnohočlenu jednočlenem a následně se zaměříme na situaci, kdy dělitelem je mnohočlen.

1. $(3x^5 + 2x) : x = (3x^5 : x) + (2x : x) = 3x^4 + 2 \; pro \; x \neq 0$

2. $(6x^3 - 13x^2 + x + 2) : (3x + 1) = 2x^2 - 5x + 2 \; pro \; x \neq \frac{1}{3}$

$$-6x^3 - 2x^2$$

$$-15x^2 + x + 2$$

$$15x^2 + 5x$$

$$6x + 2$$

$$-6x - 2$$

$$0$$

(Odvárko 2004)

2.3.1.4 Rozklad mnohočlenů na součin

Rozklad mnohočlenu chápeme jako jeho vyjádření ve tvaru součinu mnohočlenů, které už nelze dále rozložit. Princip spočívá ve vytýkání před závorku nebo užitím náležitých vzorců.

Mezi nejdůležitější formule užívané při výpočtech v matematice řadíme vzorce (∗) z oddílu *Násobení mnohočlenů*. Další hojně používané jsou formule:

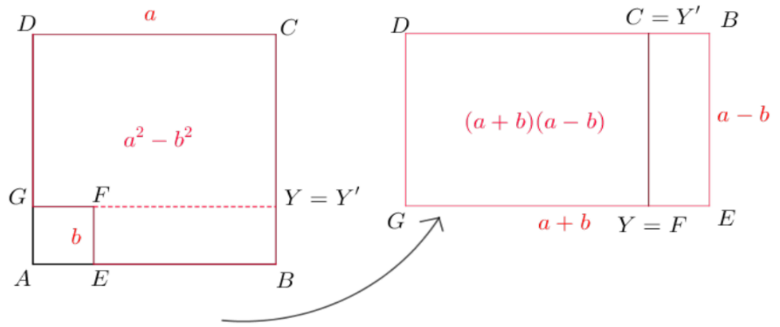
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \qquad \text{(Bušek 2012)}$$

K pochopení vztahů u zmíněných vzorců, zejména u $a^2 - b^2$, se nejčastěji využívají grafická znázornění. Princip spočívá v obsahu čtverce a obdélníka. Pokud budeme uvažovat libovolný čtverec ABCD o délce strany a a obsahu a^2, z něhož vyřízneme menší čtverec AEFG s velikostí strany b a obsahem b^2, vznikne nám útvar EBCDGF s obsahem $a^2 - b^2$. Následně přesuneme obdélník EBY'F za vzniku obdélníku GEBD s rozměry $a + b$ a $a - b$. Vzniklý útvar má tedy obsah $(a + b)(a - b)$. Celým procesem jsme dospěli k odvození rovnosti

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b). \qquad \text{(Novotná 2018)}$$



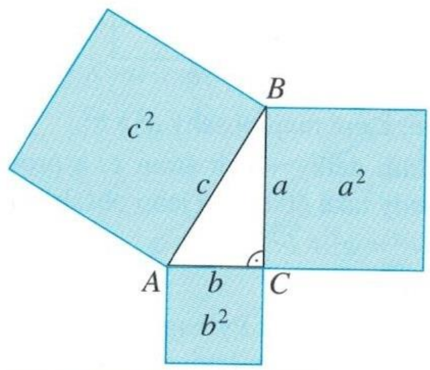
Obrázek 1 - Grafické znázornění vzorce $a^2 - b^2$

2.4. Metrické vztahy

Pod pojmem metrické úlohy si představujeme podrobnější popis prostorových vztahů. Mezi zkoumané vlastnosti řadíme vzdálenost či odchylku. V úlohách tohoto typu se zjišťují například vzdálenosti či odchylky dvou přímek nebo rovin (Pomykalová 2010).

2.4.1 Pythagorova věta

Uvedenou větu řadíme mezi nejznámější věty v matematice. Při jejím vyslovení si ihned vybavíme pravoúhlý trojúhelník, u kterého dvě strany svírající pravý úhel označujeme jako odvěsny. Naopak zbylou nejdelší stranu ležící proti největšímu úhlu nazýváme přeponou (Beutelspacher 2005).



Obrázek 2 – Grafické znázornění Pythagorovy věty

Autoři Odvárko a Kadleček ji popisují jako: *„Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverců sestrojených nad jeho odvěsnami. Jinak řečeno: Pro pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou o délce c a s odvěsnami o délkách a, b platí:*

$$c^2 = a^2 + b^2\text{“ (Odvárko a Kadleček, 2008, str. 23).}$$

Titíž tvůrci se navíc vyjadřují k větě obrácené k Pythagorově větě. Definují jí ve tvaru: *„Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníku a platí-li pro ně $c^2 = a^2 + b^2$, pak je trojúhelník pravoúhlý a c je délka jeho přepony“* (Odvárko a Kadleček, 2008, str. 27).

Pomocí správného vyjádření můžeme prostřednictvím jmenované věty vyjádřit třetí stranu ze zbylých dvou stran. Vztahy jsou formulovány ve tvaru:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$ (Bušek 2012)

2.4.1.1 Historie Pythagorovy věty

Pythagorova věta udávající vztah mezi přeponou a odvěsnami je známá již už od dob před Pythagorem. Staří Indové využívali k určení pravého úhlu trojúhelník o délkách stran 5, 12, 13 jednotek. V Egyptě používali stejný způsob s jediným s rozdílem. Velikosti stran se rovnaly číslům 3, 4, 5 jednotek. Vzhledem k jejich povědomí o pravoúhlém trojúhelníku určen těmito délkami stran lze předpokládat, že již v tomto období chápali spojitost mezi velikostmi. Uvědomovali si tzv. speciální Pythagorovu větu, kde platí $5^2 = 3^2 + 4^2$ nebo $13^2 = 12^2 + 5^2$. Tímto způsobem se připravila půda pro obecný důkaz platící pro všechny pravoúhlé trojúhelníky. Ten se podařilo uskutečnit Pythagorovi nebo jeho žákům Pythagorejcům, což se považuje za pravděpodobnější verzi. Ačkoli sám Pythagoras nenapsal žádné dochované dílo, přesto se mu za jeho působení připisuje jmenovaná věta (Horák 1949).

2.4.1.2 Důkaz Pythagorovy věty

Pro Pythagorovou větu existuje nejvíce důkazů v celé matematice. V dnešní době se vyskytuje okolo 400 důkazů (Beutelspacher 2005). Mezi neslavnější odvození patří důkaz proměnou ploch (Čučka 2007). Mluvíme ovšem o poměrně komplikované verzi vyskytující se v díle *Základy* od Euklida. K odvození Pythagorovy věty se proto využívají jednodušší varianty důkazu (Stewart 2019). Na základních školách bývá nejvíce používána alternativa se čtvercovou dlaždicí, kde každá z nich je rozdělena na 4 shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky. Druhý často aplikovaný důkaz je tvořen 2 velkými čtverci. Jeden z nich se skládá ze 4 pravoúhlých trojúhelníků a jednoho velkého čtverce. Při jiném uspořádání stejných trojúhelníků nám následně vzniknou 2 menší čtverce (Čučka 2007). Analýzu těchto dvou zmíněných důkazů rozebíráme podrobněji v praktické části, která obsahuje i jejich grafické znázornění.

2.4.2 Obsahy geometrických útvarů

Pod pojmem obsah si představujeme kladné číslo, které je přidružené geometrickému obrazci tak, že platí následující 3 podmínky:

„1. Shodné obrazce mají sobě rovné obsahy.

2. Skládá-li se obrazec z několika obrazců, které se navzájem nepřekrývají,

rovná se jeho obsah součtu jejich obsahů.

3. Obsah čtverce, jehož strana má délku 1 (mm, cm, …), je 1 (mm^2, cm^2, …)“ (Pomykalová, 2006, str. 65 a 66).

2.4.2.1 Historie obsahů geometrických útvarů

S výměrou se setkáváme už v dobách starověku. Již Babyloňané znali formule pro výpočet obsahu jednoduchých pravoúhelníků. Číňané navíc sepsali dílo *Matematika v devíti knihách*, kde můžeme dohledat úlohy s touto tématikou. Velký pokrok zajistili matematici Indie díky spisu *Súlvasútra*, která obsahuje kromě počtů obsahů, objemů též úlohy týkající se proměny obrazců, např. obdélník na čtverec o stejném obsahu. V následujících obdobích se matematici intenzivně obsahům nevěnovali (Sklářová 2009). Jejich pozornost však zůstala u neuvěřitelného čísla π (Stewart 2019).

2.4.2.2 Vzorce obsahů geometrických útvarů

Ve jmenované podkapitole se budeme zabývat pouze výčtem základních vzorců pro výpočet obsahu.

- Čtverec s délkou strany a

$$S = a^2 = a \cdot a$$

V tomto případě je obsah úzce spjat nejen s mocninami a odmocninami, ale i s významnou Pythagorovou větou, ve které se uplatňuje.

- Obdélník s délkami stran a, b

$$S = a \cdot b$$

- Rovnoběžník s délkami stran a, b a výškami na strany v_a, v_b

$$S = a \cdot v_a = b \cdot v_b$$

- Trojúhelník se stranami a, b, c a výškami na strany v_a, v_b, v_c

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

- Lichoběžník se stranami a, b, c, d a výškou v

$$S = \frac{(a + d) \cdot v}{2}$$

- Obecný mnohoúhelník

Obecný vztah pro výpočet obsahu jakéhokoliv čtyřúhelníku až na deltoid neexistuje. Proto je zapotřebí, aby se daný čtyřúhelník rozdělil na část, u kterých umíme obsahy spočítat. Následně získané, jednotlivé obsahy sečteme.

- Pravidelný n-úhelník se stranou a

Díky pravidelnosti n-úhelníku ho můžeme rozkouskovat na několik shodných rovnoramenných trojúhelníku, za jejichž pomoci lze vyjádřit chtěný obsah:

$$S = n \cdot S_t \,,$$

kde S_t značí obsah jednoho ze zmíněných trojúhelníků.

- Kruh s poloměrem r

Pro zadefinování si obsahu kruhu je zapotřebí si nejdříve připomenout konstantu π, pod kterou si představujeme takové reálné číslo vyhovující rovnici:

$$\pi = \frac{O}{d}.$$

Znakem O rozumíme obvod libovolného kruhu a d jeho průměr. Číslo π vychází pro jakýkoliv obvod a průměr vždy v přibližné hodnotě 3, 14.

Nyní už si můžeme formulovat vzorec pro obsah kruhu:

$$\boxed{S = \pi \cdot r^2}$$

(Šrámek 2017)

3 Didaktická část

3.1 Rámcový vzdělávací program

Jelikož se na všech základních a středních školách uplatňuje rámcový vzdělávací program (dále jen RVP), zahrnuli jsme ho i do naší bakalářské práce. Vzhledem k našemu zaměření se budeme pohybovat pouze v kapitole *Matematika a její aplikace* (Bartošek et al. 2021; Balada et al. 2021). Přesněji se specializujeme, v jakých úsecích RVP se objevují témata popisována v našem díle.

S tématikou obsahů se lehce seznamují už žáci na 1. stupni základní školy. Zmíněné učivo spadá pod skupinu *Geometrie v rovině a prostoru*, kde žáci pracují pouze se čtvercovou sítí, pomocí níž poznávají obsah. Dále se zaměřují na základní jednotky obsahu.

Látka mocnin a odmocnin se začíná probírat až ve 2. stupni vzdělávání základní školy. Látka se řadí pod obecnou kategorií *Číslo a proměnná*, kde očekávaným výstupem žáka je provádění početních operací v oboru celých a racionálních čísel a užívání ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu. Aby žák dokázal pracovat s mocninami a odmocninami, je zapotřebí umět sčítat, odečítat a násobit. Po zvládnutí jmenované látky mohou studenti použít zmíněné znalosti v metrických úlohách školské geometrie. V RVP řadíme uvedené učivo do skupiny *Geometrie v rovině a prostoru*. Na základě stanov RVP jsem pro naši bakalářskou práci zařadila následující výstupy žáků: odhad a vypočet obsahů a obvodů základních rovinných, geometrických objektů, zdůvodnění a používání polohových a metrických vlastností základních rovinných útvarů při řešení příkladů a jednoduchých praktických problémů, využívání matematické symboliky, charakterizování a třídění rovinných útvarů, analyzování a řešení aplikačních geometrických úloh s použitím matematického aparátu (Bartošek et al. 2021).

Výše popsané učivo se probírá též na středních školách. Na gymnáziích ho lze dohledat pod názvem *Číslo a proměnná* a *Geometrie*. Očekáváné výstupy žáků se zde nazývají provádění operací s mocninami a odmocninami a upravování číselných výrazů, využívání geometrických pojmů, odůvodňování a aplikování vlastností geometrických objektů v rovině a v prostoru, třídění na základě vlastností útvarů, využívání náčrtu při řešení rovinného nebo prostorového problému, používání funkčních vztahů v úlohách početní geometrie, trigonometrii a upravování výrazů a pracování s proměnnými a iracionálními čísly, řešení analytických polohových a metrických úloh o lineárních útvarech v rovině (Balada et al. 2021).

3.2 Problematika učiva na základní škole

3.2.1 Problematika obsahů

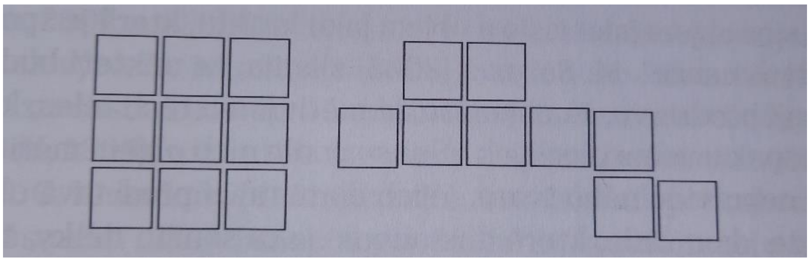
Obsahy a objemy se řadí mezi sedm nejčastěji udávaných kritických míst v matematice na základních školách. Nepochopení této oblasti následně vede k její neoblibě. V dalších odstavcích si probereme komplexněji problematiku obsahů.

Otázka obsahů geometrických útvarů se objevuje na základních školách už na 1. stupni, kde se žáci zabývají nejdříve konkrétní úrovní a až později své zkušenosti zobecňují do podoby vzorců. Autoři Vondrová a Rendl navazují na téma vzorců následující větou: *„V nejabstraktnější fázi pojmotvorného procesu míry v geometrii je použit jazyk algebry pro abstraktní uchopení multiplikativní struktury“* (Vondrová et al., 2015b, str. 257). Mohli bychom říci, že tímto způsobem nám vznikají samotné vzorce, které jsou ovšem podle M. Hejného a kol. (1990) symbolikou zestručněné věty. Samotná stručnost může být zároveň výhodou, ale i nevýhodou. Z jedné strany jsou formule snadno zapamatovatelné a dobře se s nimi pracuje. Naopak z druhého hlediska jsou často náhradou skutečného poznání, jelikož poskytují žákovi řešit to, čemu sám nerozumí (Vondrová et al. 2015b). Zjednodušeně se je učí nazpaměť bez jakéhokoliv pokusu jim porozumět. S tím se pojí myšlenka, že děti mají často problém s řešením jednoduchých výpočtů obsahů geometrických útvarů tam, kde se nemohou spolehnout na dosazení do již známé formule. Na základě zmíněné idey si tvůrci Vondrová et al. vybrali 5 příkladů z úloh mezinárodního testování, které předložili žákům. Z jejich řešení následně dospěli k výsledkům, že žáci nejsou schopni vyřešit otázku týkající se obsahu pravděpodobně kvůli špatnému rozpoznání obrázku či si nedokážou rozdělit schéma na části, s nimiž už umí pracovat. Proto mnoho žáků příklady vynechali, ačkoliv měli dostatek času k jejich řešení. Mohli bychom říci, že jsou až příliš vázáni na použití vzorců a neuvědomují si souvislosti mezi formulemi různých útvarů (Vondrová et al. 2015a). Podobnému tématu se věnuje dosti výzkumů v USA. Ukázaly, že žáci nerozumí souvislostem mezi vizuální stránkou a numerickými procesy. Nechápou, že součin dvou délek vytvoří jednotku obsahu.

Dále pro žáky bývá ve výpočtech obsahů potíž, kdy se přechází od menších útvarů k velkým prostorům jako pole, pokoj či budovy nebo od jednoduchých útvarů k útvarům nepravidelných tvarů či různě zakřiveným objektům. Žáci proto musí uvažovat v takových jednotkách, které lze deformovat. Se zmíněnou situací se pojí problém, kdy žáci rozumí obsahem součin dvou stran bez ohledu na tvar geometrického objektu, a navíc zobecňují vzorec „základna krát výška" i na útvary jiné než rovnoběžníky, např. na nepravidelné tvary.

Žáci se též často dopouštějí chyb v terminologii. Nejčastěji si pletou pojmy obsah a objem, obsah a obvod, ale také jednotky jako je například metr čtvereční, popřípadě krychlový. Zřejmě si neuvědomují vztah mezi číslem nad jednotkou míry s počtem délek v součinu.

Při výuce se můžeme setkat s žáky různého věku, kteří nedokážou zachovat obsah. V díle autorů Vondrová et al. se vyskytuje příklad s umístěním shodných čtverců (viz obrázek 3). Ačkoli se jejich počet nezměnil, přesto nejsou žáci schopni vypočítat obsah. Místo něho pracují buď s obvodem, nebo jsou názoru, že útvar nemá obsah žádný.



Obrázek 3 - Změna obsahu při změně umístění čtverců

Popřípadě se lze setkat s případy, kdy žáci rozdílných věkových skupin jsou přesvědčeni, že stejný obsah znamená shodnost daných útvarů. Eventuelně podléhají představě, že útvary se stejným obsahem musí mít i shodný obvod a naopak. S tímto problémem se nesetkáváme pouze u dětí základní školy, ale i s žáky střední ba dokonce i vysoké školy.

Dle učitelů mají žáci největší potíže z hlediska probírané problematiky s převody jednotek a vzorci, jelikož nejsou schopni si je všechny zapamatovat. S přibývajícími formulemi si je začínají plést. Další potíží zmiňovanou pedagogy je jejich neschopnost propojit látku matematiky s učivem fyziky. Předměty vnímají zcela odděleně a také se je zcela odděleně učí.

Pokud pomineme kognitivní vývoj dítěte a náročnost tématu, má velký vliv na pochopení problematiky obsahu didaktická stránka. Často se podceňuje důležitost porozumění jednotky míry. Žáci nejsou vedeni k tomu, aby sami formulovali nástroje měření. Dále se klade malý důraz na souvislost mezi obsahem a multiplikativní operací. Naopak se vyskytuje přílišný důraz na výpočty neboli zjišťování číselné hodnoty čili se hledání míry omezuje pouze na práci s čísly. Žáci ji tak vykonávají bez porozumění, čímž dochází ke ztrátě spojení mezi geometrickou představou a výpočtem obsahu (Vondrová et al. 2015b). K potížím přidává sebedůvěra v matematice, jenž může být u některých žáků poměrně nízká. Z toho důvodu se často uchylují ke kalkulativní nápravě vzorce než snaze nahlédnout do problematiky. Pro ně je bezpečnější do vzorce dosadit, protože podle svého myšlení se nemůže na správnost své úvahy spolehnout (Vondrová et al. 2015a). Následující problém se týká předčasného nástupu vzorců čili algebraizace a malého důrazu na pochopení formule pro výpočet obsahu obdélníku, díky kterému lze odvodit vzorce u ostatních útvarů. Žáci jsou málo vedeni k bádání nad vztahy mezi jednotlivými vzorci geometrických objektů (Vondrová et al. 2015b).

3.2.2 Problematika algebraizace

Základní algebraické činnosti jsou podmínkou ke zdárnému zvládnutí jistých oblastí matematiky. Popíšeme si, jaké překážky musí žáci překonávat v kontextu algebraizace, pod čímž si představujeme algebraický popis vztahu mezi objekty a algebraické vyjádření aritmetické zákonitosti. I američtí vědci zkoumající větší počet srovnatelných studií se zabývali žákovskými problémy s cílem zachytit výsledky kvalitního bádání v didaktice matematiky. Pro naši bakalářskou práci jsou podstatné části z jejich výzkumu týkající se oblasti rovnic, kam zahrnujeme i úpravy s výrazy, a slovních úloh.

„*Výuka algebry navazuje na žákovy předchozí zkušenosti s řešením aritmetických a geometrických úloh*“ (Vondrová et al., 2015a, str. 322). Z toho vyplývají 2 podstatné důsledky. Jestliže jsou žákovy aritmetické či geometrické znalosti naučeny špatně nebo pouze povrchně neboli formálně, budou fungovat spíše jako bariéra v činnosti na algebraické úrovni. Druhý dopad vychází z rozdílů základů aritmetických a algebraických činností. Myslíme tím práci s konkrétní číselnou hodnotou a s proměnnou, kterou rozumíme zevšeobecnění číselných hodnot nebo dalších objektů. Jinak sem řadíme též podstatu řešení příkladů za pomoci aritmetických prostředků, jejich řešení pomocí algebraických nástrojů a práci s rovností jako operací nebo jako relací. U aritmetických úloh se právě zobrazuje zmíněný znak „=“ jako pokyn k výpočtu, zatímco u algebry se setkáváme s významem zachování rovnosti. Na základě výzkumu A. Dembyové (1997) se zjistilo, že rovnost v algebraickém pojetí není pro žáky zcela zřejmá. Po dotazu žáků, zda se dva výrazy po úpravě rovnají, nebyli schopni odpovědět či byli záporného názoru. Byli přesvědčení, že po dosazení do obou výrazů mohou získat 2 různé hodnoty.

Jak jsme zmiňovali výše, je důležité se zabývat samotnými proměnnými, což je základní pojem v algebře. Každý, kdo se chce pohybovat v tomto oboru, musí porozumět obsahu proměnné. Ovšem zmíněný pojem nabývá mnoho významů. Tvůrci Vondrová et al. uvádějí ve svém díle následující 4 možnosti chápání proměnné:

1. proměnná jako zobecněné číslo,
2. proměnná jako zástupce množiny hodnot, kterých může nabýt zmíněný objekt při popisu vztahu,
3. proměnná jako neznámá,
4. proměnná jako součást systému, který závisí na pravidlech transformace a ekvivalence.

Právě tato mnohotvárnost má velký vliv na potíže žáků, už jenom z toho důvodu, že se role proměnné může měnit v průběhu jedné úlohy. Navíc žáci často písmenům přiřazují vlastní představy, které jsou většinou chybné. Například interpretují písmena jako označení pojící se se jménem objektu neboli pod písmenem A si vybavují auto. Objevují se však i možnosti, kdy si žáci pod proměnnou představují konkrétní hodnotu nebo ji vnímají jako náhražku nějaké obecné skupiny proměnných. Například *c* si označují jako cenu za mléko, ale i cenu za chleba. Veškeré jmenované jevy jsou přičítány nematematickým zkušenostem žáků.

Mezi další problémy žáků řadíme potíže v řešení algebraických úloh, které jsou dány jejich odlišnou povahou od aritmetických příkladů. Zásadní rozdíl mezi nimi je, že aritmetická úloha vyžaduje provedení operace se známými čísly za cílem získat další číslo. Naopak algebraický příklad vyžaduje komplexnější přístup. Žáci jsou zvyklí po celou dobu školní docházky pracovat zejména s aritmetickými úlohami, což vede k přesvědčení, že příklady se řeší vypočítáním jedné hodnoty. Mají tendenci proměnné nahrazovat aritmetickým výpočtem na čísla. Jinak bychom mohli říci, že mají potřebu výpočtu. Mluvíme pak o jejich cíli získat řešení, tzv. číslo.

K různorodosti významu proměnné se vyjadřují i další studie, které se zaměřují zejména na analýzu příkladů vyžadující algebraické myšlení. Samotné úlohy rozdělují do 4 typů – přiřazovací, vztahové, otázky a tvrzení s dalšími fakty. Algebraizace úlohy je poté základní podmínkou k úspěšnému řešení příkladu. Mohli bychom říci, že převádíme tvrzení na rovnice vyjadřující vztah proměnných.

Právě tento přechod, od vztahových slovních projevů k jejich algebraickému vyjádření, je pro žáky nejobtížnější. Je to patrné zejména u slovních vyjádření běžného jazyka, které odkazují na jistou operaci (například slovo „zmenšit" vyvolává operaci odčítání), a přitom matematická reprezentace příkladu požaduje operaci zcela odlišnou, například operaci k ní opačnou (Vondrová et al. 2015b). S úlohami se pojí další potíž, kde žáci nerozumí samotné slovní úloze. Nemusí rozumět buď textu, kam zahrnujeme nejen jednotlivá slova, ale i různá slovní spojení, nebo nechápe matematickou podstatu slovní úlohy, čímž rozumíme vztahy mezi objekty nebo její matematickou strukturu. Posledním možným problémem je koncept, pojmy, kterým nerozumí. Jinak řečeno nechápe probíranou látku. Kvůli zmíněným potížím následně buď žák ztrácí zájem o řešení příkladu, žádá vysvětlení nebo nevědomky volí chybný postup. Často se ale žáci přiklánějí k nahodilé kombinaci početních operací a čísel ze zadání (Vondrová et al. 2015a).

Mnohdy mohou být překážkou i nové zkušenosti s algebraickou činností. Žáci využívají symboliku chybně kvůli špatně vybudovaným představám vztahujících se k novým poznatkům. Hovoříme o situaci, kdy s přibývajícím věkem žáků se ve výuce začnou objevovat další látky. Příkladem je učivo mocniny, kdy si žáci často zaměňují koeficienty za mocnitele.

Z pohledu pedagogů jsou problémy v oblasti algebry hodně spjaty s prací s algebraickými výrazy. Podle učitelů jsou úpravy výrazů, zejména rozklad mnohočlenu na součin či obecně práce s mocninami, samy o sobě náročné, jelikož je zapotřebí zde uplatnit své znalosti a dovednosti. Potíž je v tom, že žáci nemají osvojeny zvláště pořadí operací, práci se závorkami, se zlomky a zápornými čísly. Mezi další problematické oblasti uvedli slovní úlohy, především ty s více proměnnými (Vondrová et al. 2015b).

3.2.3 Didaktické postupy a techniky ve výuce matematiky

Jaké podněty mohou směřovat k tomu, aby myšlenkové procesy započaly a poté i zdárně pokračovaly? Předchozí otázka zcela vystihuje náplň této kapitoly.

Obecně je rozvíjení myšlení úzce spjato s konstruktivními přístupy k vyučování matematiky. Základem každého učení je angažovanost jednotlivce a jeho zájem o problematiku. Kuřina, autor článku v časopisu Učitel matematiky, se vyjadřuje k tématu větou: *„S myšlenkami, podobně jako s tekutinami, lze dobře zacházet jen tehdy, když jsou ve vhodném obalu. (V takovém případě je možno je izolovat, měřit mísit i prodávat.)“* (Kuřina, 1997, str. 177). Pod pojmem *obal myšlenek* si autor představuje domněnky, tvrzení, formulace definic, zápisy důkazů nebo konstrukcí, a nakonec i vhodná schémata či obrázky, jež jsou spjaty s jazykem matematiky. Proto bychom měli podporovat více jeho rozvoj.

Navíc je zapotřebí, aby žáci získávali zkušenosti především začleňováním vhodných činností souvisejících s řešením úloh. Musíme vzít v úvahu, jestli je důležitější učit dokazovat než předkládat samotné důkazy, spíše definovat pojmy než tvořit definice nebo řešit příklady než předávat hotová řešení. Jeli lepší vést žáky k myšlení, než je učit formální logiku (Kuřina 1997).

3.2.3.1 Problematika obsahů

Mezi učiteli zmiňované techniky řadíme takové procesy, u kterých je zdůrazněna nutnost tvorby představ o pojmech obsah či objem. V případě obsahu často pedagogové využívají čtverečkovanou síť či zaplňování plochy shodnými pásky. Z výpovědí učitelů se můžeme dozvědět, že samotná názorná ukázka pomocí libovolných pomůcek nestačí, proto je zapotřebí ji spojit s následným krokem tzv. symbolickým uchopením situace jako například formou vynásobení rozměrů stran.

Mnoho učitelů využívá techniku cíleného narušování takových představ, kdy hledání obsahů je spjato pouze s využitím vzorců. Často uplatňují ve svých hodinách klasické školní úlohy o bazénu či smáčených stěnách, kde nemohou žáci použít celý vzorec. Je zapotřebí, aby si ho uměli vytvořit. Celkově se učitelé shodují v názoru, že pro pochopení problematiky jsou zapotřebí zkušenosti ze života.

Druhá kategorie se zabývá možnostmi, jak se zdárně vypořádat se vzorci. Podle některých pedagogů by si žáci měli jisté formule pamatovat (zejména pro obdélník, čtverec, krychli nebo kvádr). Tím, že žáci v hlavě uchovávají vzorce, jim to pomáhá k úspěšnosti v testech. Nepostradatelnou roli v tomto případě hraje samozřejmě opakování.

Před vytvořením vzorců využívají učitelé ve svých hodinách různé procesy dokazování. Každý pedagog samozřejmě k problematice přistupuje individuálně. Buď jsou názoru, že si žáci nejsou schopni sami odvodit vzorce. Proto je na tabuli představují pro jistotu sami. Druhá situace je prezentována tím, že na základě podnětů ke vzorci dokážou děti dospět. Poměrně dost učitelů preferuje spíše odvození vzorců pomocí aktivní manipulace s pomůckami, čímž motivují žáky k učení nových věcí a zlepšení jejich porozumění tématu. Vyjádřili se, že ze svým pozorování postřehli fakt, že žáci si vzorec poté lépe zapamatují a uchopí ve své paměti. V tématu obsahu často pedagogové využívají stříhání a lepení, kde děti převádějí nový útvar na jiný tvar, u něhož znají obsah. V případě kruhu se zabývají přibližného odvození čísla π. Princip spočívá v měření obvodů a průměrů libovolných kruhových předmětů a následného zápisu hodnot do tabulek (Rendl et al. 2013). Ovšem je nutné podotknout, že v praxi nesmí ani jeden z postupů výrazně převažovat. Spíše bychom se měli snažit obě techniky kombinovat, i přestože druhý přístup je časově náročnější (Kuřina 2019).

3.2.3.2 Problematika algebraizace

Nejčastěji jmenovanou technikou u proměnných je analogie „jablíčka a hruštičky". Jedná se o substituci abstraktních proměnných konkrétními předměty. Uvedený postup soudí učitelé v několika rovinách. Nejvíce pedagogové podotýkají, že jim slouží pro názornost, k překonání začáteční ontogenetické překážky nebo pro zvýšení sebedůvěry u žáka, jelikož tím navazují na jednodušší učivo z nižších ročníků. Ovšem v tomto případě se setkáváme s jistými nedostatky. Pokud hovoříme o sčítání, nelze dát k sobě „jablíčka" a „hruštičky", avšak u násobení nelze toto pravidlo uplatnit. Dalším rizikem jsou špatná označení proměnných. Na mysli máme nerozlišení proměnné jako zkratky pro jednotku a proměnné jako jinou číselnou hodnotu či počet předmětů. Pro lepší orientaci si uvedeme příklad:

Jedno jablko si označíme písmenem j, z čehož poté pro 5 jablek získáváme $5j$. Nyní budeme uvažovat situaci, kdy za 5 korun máme jedno jablko. Tím získáváme $5j$ za j jablek, kde j znamená buď neznámou nebo proměnný počet jablek.

Nepříliš učitelů propojuje problematiku s aritmetikou. Párkrát bylo zmíněno přiblížení jádra operací pomocí oddělených modelů s celočíselnými hodnotami místo proměnných. Jmenovaný postup se využívá buď k odvozování nebo k ověřování obecných vět, či zákonů. Například sem můžeme uvést krácení, distributivní zákon, vytýkání a mnohé další. Avšak tato technika by neměla být jedinou.

Při práci s odvozováním či ověřováním vztahů, zejména u práce s dvojčleny, se vyskytují 2 přístupy. Většina učitelů se přiklání spíše k algebraickému odvození pomocí konkrétních výrazů. Pár z nich navíc hovoří o oboustranné práci v tématu rozkladu mnohočlenu na dvojčleny či vytýkání, čímž chtějí zdůraznit, že se jedná o reciproké operace k násobení (Rendl et al. 2013). Druhý případ je geometrická reprezentace, o níž hovoříme jako o opomíjené příležitosti ve výuce matematiky. Navíc se geometrické znázornění prezentuje žákům v pozdní fázi, například až u práce s dvojčleny. Do té doby mají s tímto zobrazením malé, popřípadě nemají žádné zkušenosti. Avšak právě vizuální představy pomáhají žákům nahlédnout do aritmetického a algebraického světa, čímž si rozvíjejí schopnost vnímat všelijaké interpretace stejné situace. Dále k rozvíjení propojení symbolického a geometrického myšlení napomáhá samotný přechod mezi zápisy symboliky a geometrického zobrazení (Benešová 2022).

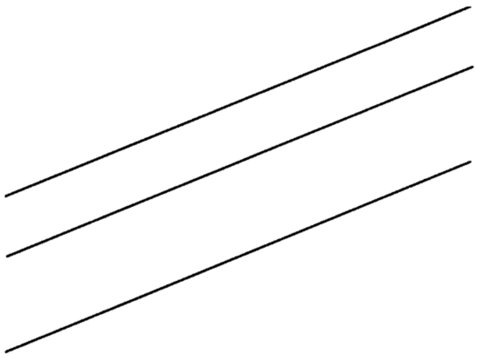
Mezi další postupy lze zařadit mimomatematické techniky, jako je barevné odlišení, či rozdílná velikost nebo značení písmen. Uvedená metoda se využívá pro lepší názornost (Rendl et al. 2013).

3.3 Vizuální reprezentace

„*Argumentace, ověřování a dokazování jsou nedílnou součástí matematiky*“ (Štrausová, 2012, str. 48). Jedná se o důležitý prvek při budování matematických pojmů, porozumění matematice a její interpretaci. Při její výuce se setkáváme nejen s důkazy založenými na pravidlech matematické logiky, ale i s tzv. vizuálními důkazy (Štrausová 2012). S tím se pojí citát od Francise Cricka, který udává ve svém díle autor Kuřina: „*Vidění je aktivní, tvořivý proces. Náš mozek tvoří nejlepší výklady, jichž je schopen, a to v souladu s předešlými zkušenostmi a omezeními, mnohoznačnými informacemi dodávanými našima očima. Evoluce přihlédla k tomu, že to náš mozek dokáže obvykle, ale ne vždycky, s pozoruhodným výsledkem.*“ (Kuřina, 1998, str. 10)

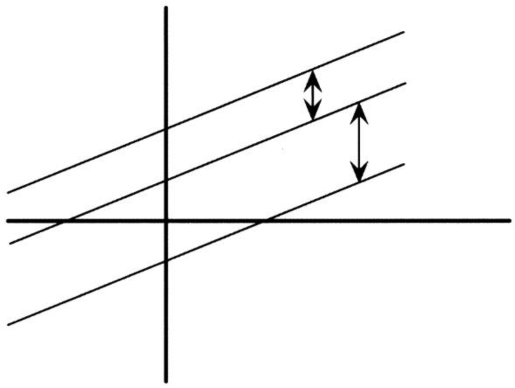
Schémata a obrázky výrazně ovlivňují pochopení pojmů a mohou se využít i k důkazu některých vět a vlastností. Ovšem netýkají se pouze geometrické oblasti. U algebraických myšlenek se též můžeme setkat s přirozeným geometrickým vyjádřením. Při volbě vhodného obrázku lze opatřit mnoho informací, které jsou uspořádaný dle smysluplných vztahů. Popisované důkazy beze slov jsou pro žáky často poutavější, zajímavější a srozumitelnější než ty algebraické (Štrausová 2012). Ovšem každý postup má své pro a proti. Mezi velké riziko se řadí konkrétnost, jelikož nezobrazuje obecnou situaci, ale pouze případ speciální. V jistých případech je vizuální reprezentace konkrétnější než samotná symbolická vyjádření (Kuřina 1998). Další nevýhodou může být i to, že neměnné obrázky zaznamenávají pouze výsledek, nikoliv sled myšlenek vedoucí k závěru. Abychom se vyhnuli uvedenému riziku, lze využívat ve svých hodinách dynamickou geometrii, která umožňuje stvrzovat tvrzení a tvořit dynamické vizuální důkazy. K práci s ním se poté používá posuvník, díky němuž mohou žáci opakovaně s obrázkem pohybovat. Tímto způsobem mohou lépe porozumět jádru sdělení (Štrausová 2012). Dle výzkumu od Gawlicka se zjistilo, že žáci pracující s dynamickou geometrii nedosahovali lepších výsledků z hlediska vědomostí a dovedností, ale dařilo se jim v úkolech s tématikou objevů vztahů mezi geometrickými objekty. Autor studie došel k závěru, že tento typ přístupu podporuje tvorbu hypotéz, nikoliv jejich prověřování (Ševčíková 2020). Pokud se zaměříme na výhody, lze sem řadit zejména názornost. Pochopení obrázku sice může trvat poměrně dlouho, ale souvislosti jsou viditelné dosti zřetelně a průkazně. Důležitou vsuvkou je, že z hlediska vyučování obrázek spojuje více oblastí matematiky, čímž může přispívat k většímu prohloubení znalostí a porozumění souvislostem (Kuřina 1998).

Je zřejmé, že naše vnímání je tvořeno vším tím, co víme. Ovšem vjemy nejsou určeny pouze kvantitou předchozích znalostí. Je zapotřebí zahrnout též kontext, v němž je pozorování uskutečňováno. V různých situacích mohou mít shodné vizuální objekty rozdílné významy. Pokud bychom přirovnali popisovanou okolnost k příkladu, modelovali bychom ho na obrázku č. 4, na němž vidíme 3 rovnoběžky.



Obrázek 4 - Tři rovnoběžky

Jestli bychom neměli ke kontextu řečeny žádné informace, pravděpodobně bychom uvažovali o euklidovské geometrii. Nyní uvažujme tytéž přímky spolu s kartézským systémem souřadnic (viz obrázek č. 5).



Obrázek 5 - Tři rovnoběžky a kartézská soustava souřadnic

Začátečník by si zřejmě při pohledu na tento obrázek pomyslel, že se jedná o stejné schéma zmíněné výše s jediným rozdílem dvou dalších různoběžek. Ovšem u znalců by to evokovalo mnohem více kupříkladu si pod čárami nepředstavují pouze geometrické objekty, ale spíše lineární funkce (Arcavi 2003).

Mnoho žáků nemá obecně matematické důkazy rádo a považuje je za namáhavé a zbytečné. Zřejmě proto raději matematické větě uvěří, než aby ji zkusili dokázat. Ovšem na druhou stranu je potěšitelné, že žáci pedagogovi důvěřují. Informace jím předávané považují žáci za pravdivé. Naopak jistou pochybnost lze považovat za hnací sílu poznání. Jedním z důvodů, proč žáci k důkazům neimponují jsou například učebnice, které obsahují většinou algebraické důkazy jak u algebraických, tak i geometrických vět. Přitom algebraické myšlenky mohou mít již zmíněnou geometrickou interpretaci (Štrausová 2012). Právě vizualizaci můžeme chápat jako prostředek, jak se vyprostit ze situací, v nichž si nemusíme být zcela jistí postupem (Arcavi 2003). Mezi další příčiny řadíme osobnost učitele, využití počítačů nebo jiných technologií a mnohé další. Klíčovým faktorem zvýšení zájmu o důkazy je jejich motivace (Štrausová 2012).

4 Praktická část

V našem výzkumném pracovním listu jsme využili jako výchozí situaci dvě základní grafická znázornění důkazu Pythagorovy věty. K nim jsme následně vytvořili na sebe navazující otázky, jež měly navést respondenta k pochopení a objevení Pythagorovy věty. Otázky jsou dvojího druhu, jednak s uzavřeným výběrem odpovědí, jednak jsou otevřené. Uzavřené úlohy mají jednoznačné odpovědi a otevřené otázky umožňují respondentům formulovat navzájem různá pravdivá vyjádření.

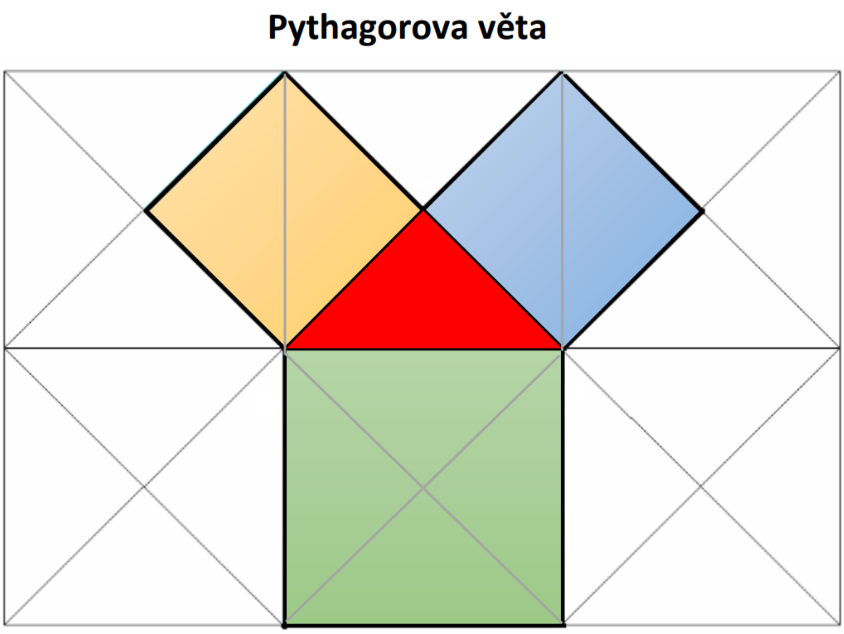
V matematice základní školy zpravidla navazuje téma Pythagorova věta na celek druhá mocnina a odmocnina a předchází studiu výrazů s proměnnými. Jejich součástí jsou vztahy pro druhou mocninu součtu a rozdílu a pro rozdíl druhých mocnin. Vztah pro druhou mocninu součtu lze přitom graficky znázornit velmi podobně ilustraci platnosti Pythagorovy věty. Z toho důvodu byl připraven také pracovní list sloužící k objevení a porozumění daného vztahu.

Podobu pracovních listů lze dohledat v přílohách (viz příloha 3).

4.1 Část pracovního listu využitá k výzkumu

Nyní se podíváme na jednotlivé úlohy, které si následně rozebereme a správně vyhodnotíme. Úkoly jsme rozdělili do 3 skupin podle jejich charakteru. První skupinu jsme nazvali *výchozí situace*, kde se respondenti nejprve seznamují s pracovním listem a daným tématem. Slouží to k navození situace, proto tyto otázky nevyhodnocujeme. Další skupinou je *analýza schématu*. V tomto případě, jak již vychází z názvu, musí žáci rozebrat schéma a následně díky své analýze být schopni zodpovědět dané otázky. Poslední část se věnuje samotnému vyvození závěru neboli formulaci výroku. Na základě popisu jsme nazvali tuto část jako *formulování tvrzení*.

4.1.1 Výchozí situace první strany pracovního listu



Obrázek 6 - Síť trojúhelníků

V prvním případě barevně zvýrazňujeme v síti 3 čtverce a k nim přilehlý trojúhelník (viz Obrázek 1). Jedná se o ilustraci platnosti Pythagorovy věty pro rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník. V tomto grafickém znázornění jsou nad odvěsnami červeného pravoúhlého trojúhelníku sestrojené 2 navzájem shodné čtverce, kde každý z nich se skládá ze 2 trojúhelníků totožných s červeným trojúhelníkem. Naopak nad přeponou je zkonstruován velký zelený čtverec složený ze 4 trojúhelníků, které jsou též totožné s červeným trojúhelníkem. Vzhledem k tomu, že shodné trojúhelníky mají stejný obsah, je možné ze schématu vyčíst, že součet obsahů čtverců nad odvěsnami je roven obsahu čtverce nad jeho přeponou.

Na grafické schéma navazují následující otázky.

1) Jaké vlastnosti má červený trojúhelník? Odůvodni, proč tyto vlastnosti má.

Tuto otázku může žák zodpovědět na základně znalostí vlastností čtverce, které jsou zpravidla diskutovány před výukou Pythagorovy věty v rámci tématu čtyřúhelníky. Díky svým vědomostem by měli respondenti dojít ke dvěma zásadním vlastnostem červeného trojúhelníku, tedy k tomu, že je pravoúhlý a má dvě strany stejně dlouhé. Hlavním pojítkem bylo z obrázku vydedukovat, že se úhlopříčky ve čtverci navzájem půlí, čímž vytváří ve čtverci 4 shodné rovnoramenné trojúhelníky. Další vlastností úhlopříček je, že svírají pravý úhel, což vede k pravoúhlému trojúhelníku.

2) Kolik je v obrazci trojúhelníků stejných vlastností jako červený?

Touto úlohou poukazujeme na to, že celá síť je tvořena 24 stejnými trojúhelníky. Avšak ze zadání je možné pochopit obrazec pouze jako barevnou část, nikoli jako celou síť, což by následně poukazovalo na pouhých 9 trojúhelníků. Mezi další alternativy odpovědí patří 23 a 8, jelikož je také možné chápat otázku takovým způsobem, kde do počtu nezahrnujeme samotný červený trojúhelník.

V případě, kde by v první úloze nedokázali žáci určit vlastnosti, měla je tato otázka navést, popřípadě utvrdit ve správném řešení. Důležitým ukazatelem jsou již zmíněné úhlopříčky, jež čtverec rozdělují na 4 stejné trojúhelníky.

4.1.2 Analýza schématu první strany pracovního listu

3) Zakroužkujte správné tvrzení.

Oranžový čtverec má stejnou délku strany jako

a. Odvěsna červeného trojúhelníku
b. Přepona červeného trojúhelníku

Modrý čtverec má stejnou délku strany jako

a. Odvěsna červeného trojúhelníku
b. Přepona červeného trojúhelníku

Zelený čtverec má stejnou délku strany jako

a. Odvěsna červeného trojúhelníku
b. Přepona červeného trojúhelníku

4) Z kolika trojúhelníků stejných jako červený se skládají různé čtverce? Doplňte:

Oranžový čtverec se skládá z …2… trojúhelníků.
Modrý čtverec se skládá z …2… trojúhelníků.
Zelený čtverec se skládá z …4… trojúhelníků.

Obrázek 7 – Úloha 3 a 4 se správným řešením

Analýza schématu je rozdělena celkem do dvou otázek (viz Obrázek 2). První úloha je s uzavřeným výběrem odpovědí, druhý příklad je naopak v principu kalkulativní. Obě otázky však mají jedinou správnou odpověď.

Úloha 3 zkoumá, zda jsou žáci schopni určit, která strana trojúhelníku je přepona a která odvěsna. Na obrázku č. 1 je hezky vidět, že jednotlivé čtverce mají jednu svou stranu společnou se stranou trojúhelníku. Podle předchozích odpovědí a svých znalostech by měli žáci umět pojmenovat a následně označit 2 typy názvů stran u pravoúhlého trojúhelníku. Celá situace pak následně vede k pojmenování *sestrojen nad přeponou či odvěsnou*, která je uvedena ve znění Pythagorovy věty.

V příkladu č. 4 doplňují respondenti počet trojúhelníků, které tvoří jednotlivé čtverce. Jak již bylo dříve zmíněno, čtverce jsou rozděleny pomocí úhlopříček na shodné trojúhelníky. Celou touto otázkou napomáháme žákům k zodpovězení následující úlohy.

4.1.3 Formulování tvrzení první strany pracovního listu

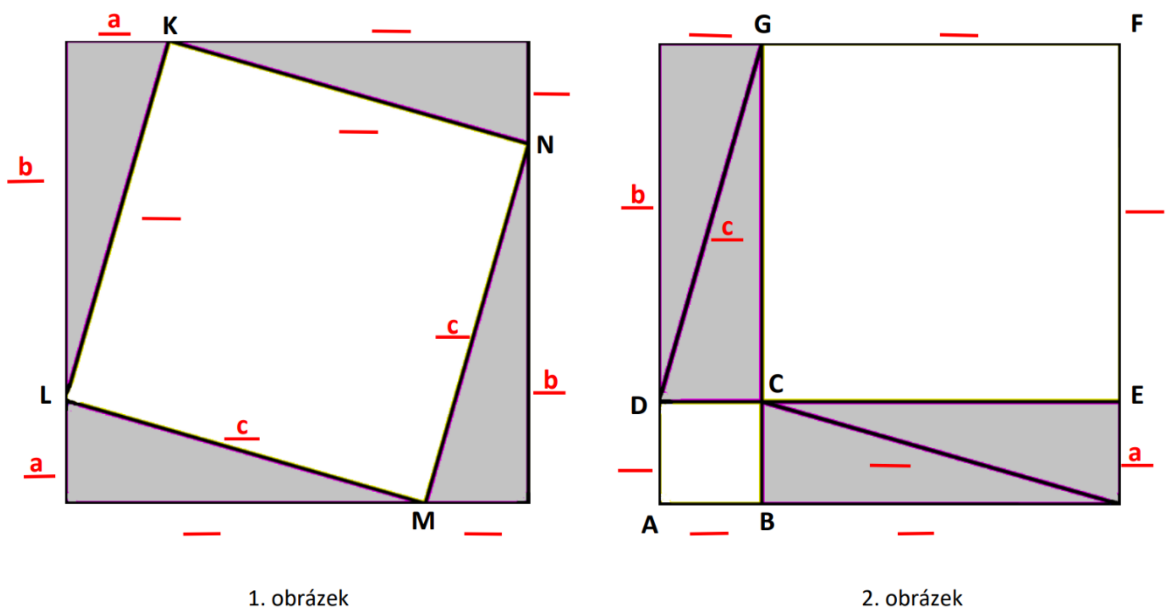
Do 3 skupiny jsme zahrnuli pouze poslední úlohu, kde se již ptáme na vztah mezi obsahy barevných čtverců.

5) Jaký je vztah mezi obsahem zeleného čtverce a obsahem oranžového a modrého čtverce?

Poslední příklad je otevřenou úlohou, kde žáci mají napsat, co vydedukovali ze svých odpovědí. Respondenti by se měli dostat k objevení vztahu v Pythagorově větě, kde součet obsahů čtverců nad odvěsnami se rovná obsahu čtverce nad přeponou.

Odpovědi na úlohu mohou být dvojího charakteru. V zásadě mohou být reakce žáků buď obecné nebo přímo mířené ke grafickému schématu (viz Obrázek 1). V případě obecné odpovědi respondent dokáže vidět vztah mezi obsahy čtverců i přes to, že nevyužívá přesného složení obrazce. V této situaci hovoříme o možných odpovědích ve tvaru: *obsahy jsou stejné*, kde se porovnává modrý a oranžový čtverec společně se zeleným, nebo *obsah zeleného čtverce je roven součtu obsahů modrého a oranžového čtverce*, kde se srovnávají jednotlivé čtverce mezi sebou. Druhá možnost, kde se odkazuje žák na grafické znázornění, vychází z konkrétních hodnot. Mezi případné odpovědi lze zařadit: *obsah zeleného čtverce je dvakrát větší než obsah modrého, popřípadě oranžového čtverce.* Do této odpovědi je možné přidat vsuvku, kde porovnáváme oranžový čtverec s modrým.

4.1.4 Výchozí situace druhé strany pracovního listu

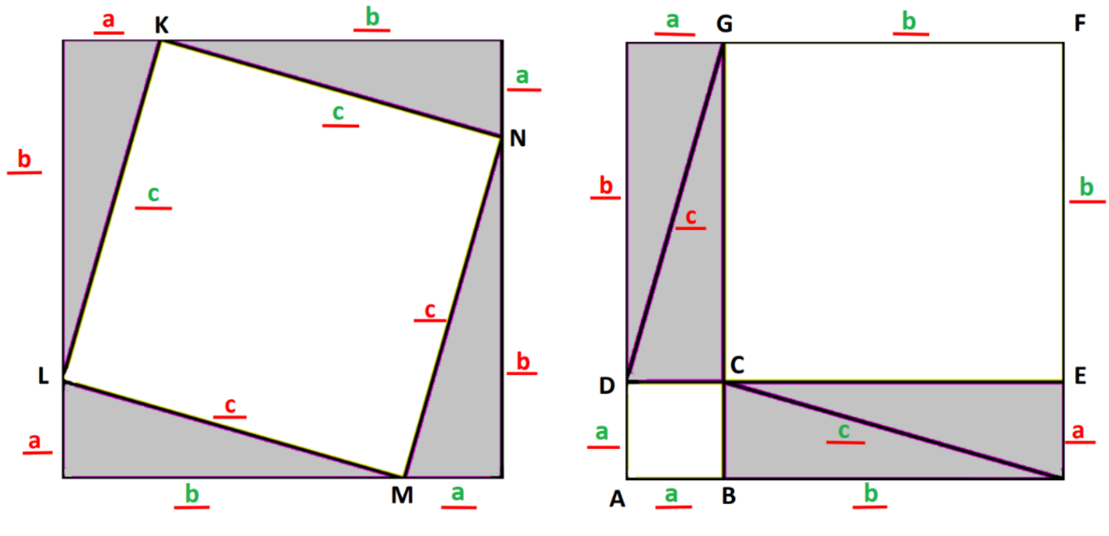


Obrázek 8 – Grafické schéma, původní verze

Na druhou stranu pracovního listu je zařazena jiná podoba grafického důkazu Pythagorovy věty, která se skládá ze 2 čtverců. V prvním z nich (viz Obrázek 3, vlevo) je do daného čtverce vepsán čtverec KLMN. Šedě jsou zvýrazněné čtyři pravoúhlé navzájem shodné trojúhelníky. Při jiném uspořádání stejných trojúhelníků ve čtverci nám vzniknou dva menší bílé čtverce ABCD a CEFG, což je znázorněno na druhém obrázku. Z těchto trojúhelníků je možné sestavit dva obdélníky, čímž získáme čtverce ABCD, CEFG (Obrázek 3, vpravo). Platí přitom, že čtverec KLMN má stranu shodné délky s přeponou šedého trojúhelníku, čtverec ABCD s jednou jeho odvěsnou a čtverec CEFG se zbývající odvěsnou. A dále platí, že obsah čtverce KLMN je roven součtu obsahů čtverců ABCD a CEFG. Tedy druhá mocnina délky přepony šedého trojúhelníku je rovna součtu druhých mocnin délek jeho odvěsen. Šedý trojúhelník je různostranný, nejedná se tedy o speciální typ pravoúhlého trojúhelníku jako v případě ilustrace platnosti Pythagorovy věty na první straně pracovního listu.

Na grafické schéma opět navazují otázky a úlohy. První z nich cílí na správné označení délek úseček.

1) Písmena a, b, c vyjadřují délky příslušných úseček. Například c je délka úsečky LM. Obrázky jsou však částečně popsané. Doplňte na určená místa správná písmena k jednotlivým úsečkám.



1. obrázek 2. obrázek

Obrázek 9 – Grafické schéma, správné řešení

První úloha slouží k obecnému popisu stran obrazců a uvědomění si, z jakých geometrických útvarů je schéma složeno. K tomu slouží také následující otázka. Správné odpovědi na ni jsou zvýrazněné červeně:

2) Zakroužkuj správné odpovědi. Šedé trojúhelníky jsou:

a) rovnoramenné b) pravoúhlé c) rovnostranné d) tupoúhlé

e) ostroúhlé f) různostranné

Obrázek 10 – Úloha 2 se správným řešením

Řešitelé pracovního listu rozpoznávají jednotlivé útvary zejména díky jejich vizuální podobě, případně na základě označení délek jejich stran. V závěrečné otázce k výchozí situaci se vyjadřují ke čtvercům KLMN, ABCD a CEFG:

3) Jaké čtyřúhelníky jsou útvary KLMN, ABCD a CEFG? A proč?

4.1.5 Analýza schématu druhého pracovního listu

4) Urči obsahy bílých čtyřúhelníků v závislosti na délkách jejich stran.

Čtyřúhelník KLMN má obsah ...c^2...

Čtyřúhelník ABCD má obsah ...a^2...

Čtyřúhelník CEFG má obsah ...b^2...

5) Z jakých útvarů se skládají 1. a 2. obrázek?

1. obrázek se skládá z 4 pravoúhlých trojúhelníků, čtverce KLMN

2. obrázek se skládá z 4 pravoúhlých trojúhelníků, čtverců ABCD a CEFG

Obrázek 11 – Úloha 4 a 5 se správným řešením

Do analýzy schématu jsme zahrnuli příklady č. 4 a č. 5 (viz Obrázek 6), které jsou charakteru částečně otevřené otázky. Úloha 4 má jediné správné řešení, naopak úloha 5 má více možných řešení. Jestliže respondenti v otázce 5 správně vydedukují názvy a počet útvarů, odpoví si tím zároveň na další dvě úlohy.

Otázka č. 4 studuje, jestli jsou respondenti schopni na základě označení stran určit obsahy obrazců. Podmínkou správného vyřešení úlohy je mít dobře zodpovězenou otázku 1. Ačkoli na tuto úlohu přímo nenavazují následující otázky, je to podstatná část v Pythagorově větě.

Následující úloha je klíčová pro pochopení dalších otázek. Jak se můžeme dočíst v Obrázku 6, cílem je určit, z jakých útvarů jsou složené jednotlivé části výchozí situace. Otázku lze vnímat dvěma způsoby. Jednak do počtu můžeme zahrnout velký čtverec složený z jednotlivých dílů, nebo se zajímáme pouze o samotné útvary, které následně po správném uspořádání vytvoří čtverec. Na základě této myšlenky se 1. obrázek buď skládá ze 4 šedých trojúhelníků a 1 čtverce KLMN, nebo ze 4 šedých trojúhelníků, čtverce KLMN a velkého čtverce. Stejnou ideu lze aplikovat i u 2. obrázku, kde máme 4 šedé trojúhelníky, 2 čtverce ABCD a CEFG. K útvarům je možné připojit již zmíněný velký čtverec, což by nám vytvořilo celkem 3 čtverce. U tohoto příkladu ve 2. obrázku jsou navíc viditelné 2 obdélníky složené ze šedých trojúhelníků, které lze též zahrnout do odpovědí. Avšak není poté tolik zřejmý rozdíl mezi obrázky.

4.1.6 Formulování tvrzení druhé strany pracovního listu

Veškeré otázky v této skupině jsou otevřené a je zapotřebí, aby žáci sami pomocí přechozích úloh a grafického zobrazení dokázali vydedukovat jisté závěry. Úvodní úlohou je tato otevřená otázka.

6) V čem se shoduje 1. a 2. obrázek?

Otázka má jasný záměr. Respondenti by si měli všimnout a ujasnit si veškeré shody mezi obrázky. Tím, že je žáci dokáži nalézt, následně lehce rozpoznají rozdíly, čímž se zabýváme v nadcházející úloze.

Na první pohled lze díky popisu jednotlivých stran zřetelně rozpoznat, že obrázky mají stejnou velikost, což nás vede i ke stejnému obvodu a obsahu. Při delším pozorování je viditelné, že obě schémata jsou složena ze stejných rovinných útvarů, a to ze čtverců a trojúhelníků. Pro přesné vyjádření shody lze využít pouze samotné trojúhelníky, jelikož oba obrázky obsahují stejný počet naprosto totožných šedých trojúhelníků. Veškeré zmíněné shody lze brát jako správnou odpověď. Na tyto úvahy navazuje v pořadí 7. otázka.

7) V čem se naopak liší?

Na základě rozpoznání shod je možné poté určit odlišnost mezi jednotlivými obrázky. Již při prvním pozorování je zřetelný rozdíl v různém uspořádání obrazců a v počtu a velikosti čtverců. Sérii otázek uzavírá následující výzva.

8) Co jste mohli podle všech získaných informací zjistit?

V posledním otevřeném problému by měli respondenti shrnout veškeré informace, které získali v průběhu vyplňování otázek. Cílem úlohy je nasměrovat žáky přes předešlé otázky ke znění Pythagorovy věty, popřípadě k naznačení její formulace. Vzhledem k přílišné obecnosti příkladu, mohou být odpovědi žáků různé a nemusejí se tak týkat přímo Pythagorovy věty.

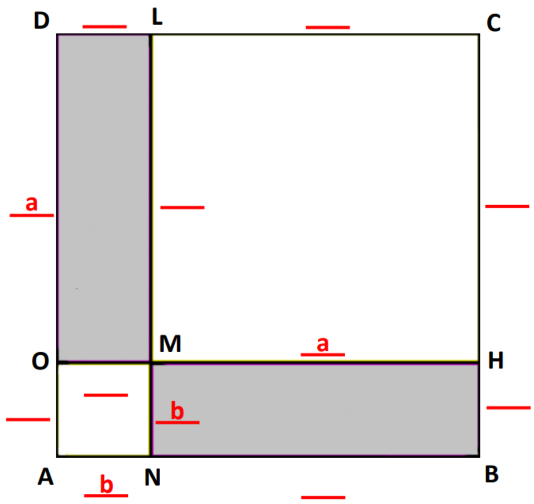
4.2 Koncept pracovního listu

V této podkapitole se více zaměříme na část pracovního listu, kterou jsme v praxi neměli možnost ověřit. Úlohy v ní jsme obdobně rozdělili do 3 skupin se stejnou charakteristikou a názvem jako v předešlém úseku praktické části. Jedná se o třídy *výchozí situace*, *analýza schématu* a *formulování tvrzení*.

4.2.1 Výchozí situace první strany konceptu

Rozklad mnohočlenů na součin

Ačkoli se rozklad mnohočlenů na součin může na první pohled zdát zcela odlišný od Pythagorovy věty, přesto lze najít mezi těmito tématy souvislost. V důkazu na Pythagorovu větu nalezneme obrazec, který se dá využít následovně i v dokazování rozkladu mnohočlenů na součin.



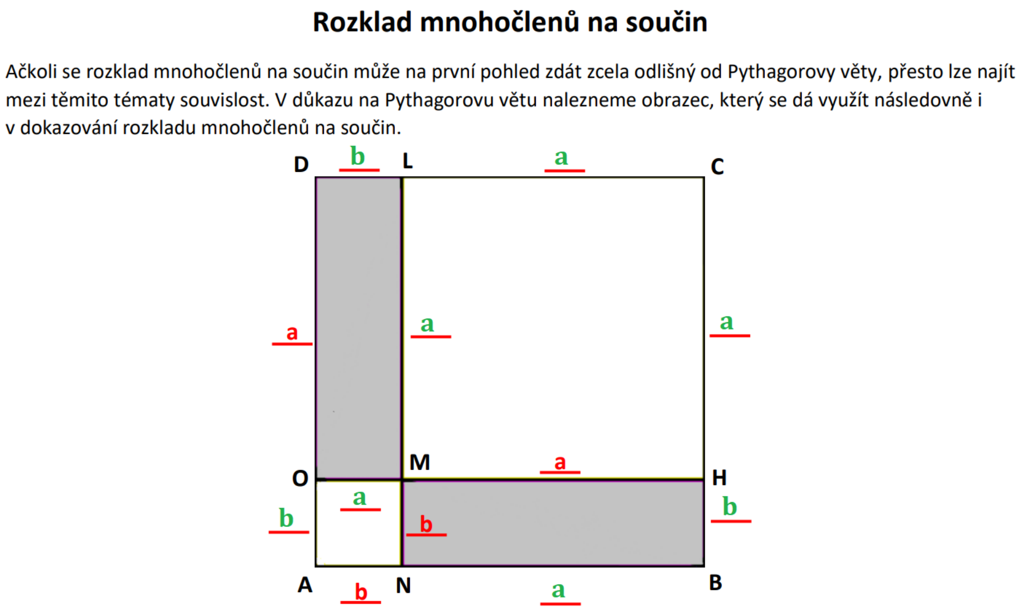
Obrázek 12 – Grafické schéma, původní verze

Nejprve se zaměřujeme na grafické znázornění důkazu pro vzorec $(a+b)^2$ (viz Obrázek 7). Z obrázku je zřejmé, že strana velkého čtverce ABCD je dlouhá (a+b). Abychom dospěli ke chtěnému tvaru s druhou mocninou, lze využít k výpočtu obsah čtverce, který můžeme vyjádřit též jako součet obsahů jednotlivých rovinných útvarů uvnitř něho. Obrazce tvořící schéma jsou čtverec ANMO o délce strany b, čtverec MHCL o délce strany a a 2 obdélníky se stranami a, b. Po výpočtu jejich obsahů a následnému součtu obsahů dostaneme výsledek $a^2 + 2ab + b^2$.

Na toto grafické schéma navazují nadcházející úlohy.

1) Písmena a, b vyjadřují délky příslušných úseček. Například a je délka úsečky MH. Obrázky jsou však částečně popsané. Doplňte na určená místa správná písmena k jednotlivým úsečkám.

V první úloze se nejedná o žádnou velkou vědu. Cílem je doplnit správná písmena k příslušným délkám. Na základě korektního označení stran lze vyplňovat nadcházející otázky.



Obrázek 13 – Grafické schéma, správné řešení

4.2.2 Analýza schématu první strany konceptu

Do analýzy schématu jsme zařadili příklady č. 2, 3 a 4 (viz Obrázek 9), kde úloha 2 je zcela otevřenou otázkou. Naopak zbylé dvě úlohy jsou pouze částečně otevřeného charakteru. Přesto však mají všechny otázky jediné správné řešení.

2) Jak dlouhá je strana čtverce ABCD?

Ke správnému zodpovězení otázky je klíčová úloha 1, jelikož k určení strany čtverce ABCD je zapotřebí mít dobře doplněné délky jednotlivých stran. Poté lze lehce určit, že strana čtverce se rovná součtu délek stran dvou útvarů, například obrazce ANMO a OMLD. Díky tomu dostaneme výsledné řešení ve tvaru (a+b).

3. Zapiš obsahy útvarů v závislosti na délkách jejich stran.

   Čtverec ANMO má obsah ...b^2...

   Čtverec MHCL má obsah ...a^2...

   Obdélník NBHM má obsah ...ab...

   Obdélník OMLD má obsah ...ab...

4. Obsah čtverce ABCD je (...a + b...)^2

Obrázek 14 – Úloha 3 a 4 se správným řešením

Úlohou 3 směřujeme k obsahům dílčích obrazců, které lze určit na základě obecného označení stran. Otázka směřuje k vyjádření obsahu čtverce ABCD pomocí součtu jednotlivých obsahů rovinných útvarů, čímž navazuje přímo na úlohu 5.

V následujícím příkladu je důležité, aby si respondenti dokázali s touto otázkou spojit 1. úlohu. Cílem otázky je pouze zapsat obsah čtverce pomocí délky strany a druhé mocniny, nikoli pomocí součtu obsahů obrazců uvnitř něho.

4.2.3 Formulování tvrzení první strany konceptu

Formulování tvrzení zahrnuje pouze poslední otevřenou úlohu první strany konceptu, která má jediné správné řešení.

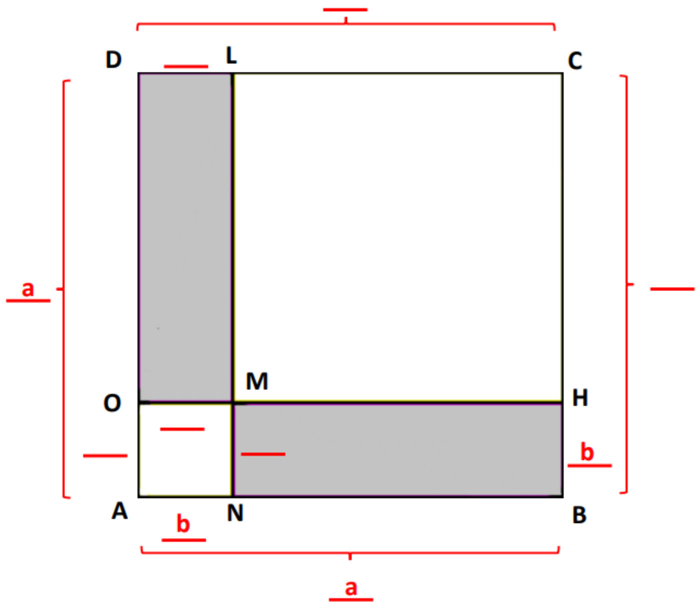
5. Jak jinak lze vyjádřit obsah čtverce ABCD? Podívej se na obrázek a vyjádři obsah čtverce ABCD pomocí obsahů jiných útvarů (nápověda: obsah obdélníků, obsahy bílých čtverců).

Zapiš vztah obsahu čtverce ABCD: (...a + b...)^2 = ...$a^2 + 2ab + b^2$...

Obrázek 15 - Úloha 5 se správným řešením

Na základě správně vyplněné otázky č. 3 a pozorování grafického schématu lze zodpovědět tuto úlohu. Spojením, či sečtením všech obsahů získáme výsledné řešení ve tvaru $a^2 + 2ab + b^2$. Pod otázkou by se měl zapsat samotný vzorec, ke kterému se došlo během vyplňování úloh.

4.2.4 Výchozí situace druhé strany konceptu

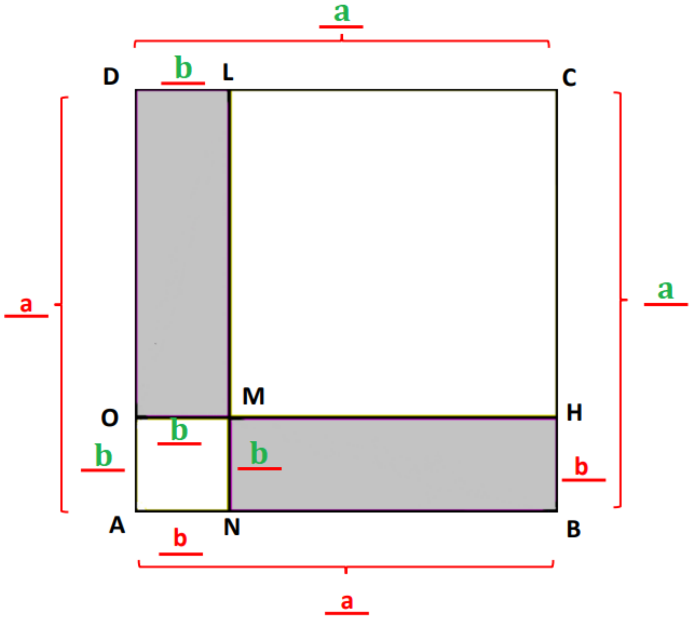


Obrázek 16 – Grafické schéma, původní verze

Druhá strana konceptu se zabývá grafickým důkazem rozkladu mnohočlenu na součin $(a-b)^2$. Princip odvození vzorce je stejný jako na první straně konceptu, akorát místo obsahu čtverce ABCD se zjišťuje obsah čtverce MHCL, jehož délku strany získáme odečtením strany b od délky strany a u čtverce ABCD. Výsledný obsah čtverce MHCL dosáhneme jednoduchým odečtením obsahů obou obdélníků a obsahu čtverce ANMO od obsahu čtverce ABCD.

1) Písmena a, b vyjadřují délky příslušných úseček. Například a je délka úsečky MH. Obrázky jsou však částečně popsané. Doplňte na určená místa správná písmena k jednotlivým úsečkám.

Tato úloha je ve stejném znění jako na první straně konceptu, proto o ni můžeme říci, že má tentýž cíl. Avšak řešení je rozdílné, jelikož máme odlišné grafické schéma.



Obrázek 17 - Grafické schéma, správné řešení

4.2.5 Analýza schématu druhé strany konceptu

Mezi úlohy sloužící k rozebrání schématu patří otázky č. 2, 3 a 4. Příklad 2 má opět charakter otevřené úlohy, zbylé dvě jsou naopak částečně otevřenými otázkami. Všechny 3 příklady mají jedinou správnou odpověď.

3. Zapiš obsahy útvarů v závislosti na délkách jejich stran.
   Čtverec ANMO má obsah ....b^2....
   Čtverec ABCD má obsah ....a^2....
   Obdélník NBHM má obsah $b(a-b)$
   Obdélník OMLD má obsah $b(a-b)$

4. Obsah čtverce MHCL je (...$a - b$...)^2

Obrázek 18 – Úloha 3 a 4 se správným řešením

Obě úlohy jsou stejně stylizované jako na první straně konceptu, proto mají i tentýž cíl, avšak v závislosti na jiném grafickém schématu získáváme odlišné výsledky.

4.2.6 Formulování tvrzení druhé strany konceptu

Zbývající otázku této strany jsme zahrnuli do skupiny formulování tvrzení.

5. Jak jinak lze vyjádřit obsah čtverce MHCL? Podívej se na obrázek a vyjádři obsah čtverce MHCL pomocí obsahů jiných útvarů (nápověda: obsah čtverce ABCD, obsah obdélníků, obsah čtverce ANMO).

Zapiš vztah obsahu čtverce MHCL: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Obrázek 19 - Úloha 5 se správným řešením

V příkladu 5 by měli respondenti zapsat obsah čtverce MHCL na základě vyjádření obsahů zbylých útvarů. Vzhledem k tomu, že se zjišťuje obsah čtverce umístěného uvnitř obrazce ABCD, musí se jednotlivé obsahy odečítat od obsahu čtverce ABCD.

4.3 Cíl výzkumné práce

V praktické části bakalářské práce se zabýváme zejména Pythagorovu větou. Ke svému výzkumu jsme využili pracovní list složený ze dvou různých důkazů Pythagorovy věty. Primárně se v naší studii nepokoušíme zjistit, zda jsou žáci schopni dojít ke znění Pythagorovy věty za pomoci na sebe navazujících úloh. Za hlavní cíl si klademe, jak řešitelé reagují na jednotlivé části pracovního listu a jak s ním dokážou pracovat. Při studii se pokoušíme navíc zjistit, v jakých oblastech matematiky mají žáci největší potíže.

4.4 Realizace výzkumu

Aby náš výzkum měl význam, potřebovali jsme žáky, kteří látku prozatím neprobrali. Proto jsem navštívila 8. třídu základní školy a sekundu na gymnáziu ještě před zmíněným tématem. Celkem se mého průzkumu zúčastnilo 42 respondentů (22 ze základní školy, 20 z gymnázia). Všechny žáky jsem zprvu seznámila s cílem výzkumu a upozornila je, že studie je anonymní a nikde nebude zveřejněno jejich jméno.

Svou studii jsem realizovala ve 3 vyučovacích hodinách. Nejprve jsem s žáky zopakovala látku spojenou s mým tématem, abych získala vyšší procento úspěšnosti ve vyplňování pracovního listu. Druhou hodinu jsem věnovala zejména svým úlohám, které každý student řešil sám v čase 25 minut. Na konci jsem s dětmi začala nové téma – Pythagorovu větu, kde jsem využila k jejímu vysvětlení grafického znázornění důkazů uvedené v mém pracovním listu. Poslední hodinu jsem žákům rozdala opravené listy a prošla s nimi správná řešení úloh. Následně jsem s nimi znovu probrala Pythagorovu větu a ověřila si jejich znalosti na příkladech.

4.5 Výsledky výzkumné práce

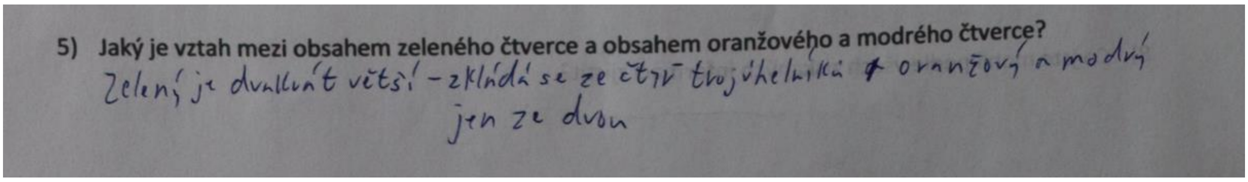
V naší studii vyhodnocujeme každou stranu pracovního listu zvlášť, kde v těchto částech zpracováváme pouze úlohy ve skupinách *analýza schématu* a *formulování tvrzení*. Výsledky žáků gymnázia jsou odděleny od řešeních na základní škole a jsou zapsány do jednotlivých tabulek, ve kterých pro lepší orientaci barevně rozdělujeme správnost jejich odpovědí. Zeleně vyznačujeme správné řešení, světle zelená charakterizuje částečně správnou odpověď a červená barva označuje chybné řešení. V případě, kdy úloha nebyla vyplněna jsme vytvořili univerzální skupinu s tímto výsledkem a označili ji písmenem X. Ke všem skupinám jsme uvedli názorné příklady řešení žáků.

4.5.1 První strana pracovního listu

U úloh *analýzy schématu* zapisujeme přesná řešení žáků do tabulek, avšak u poslední otázky ze skupiny *formulování tvrzení* jsme vytvořili 2 podkategorie podle charakteristických odpovědí respondentů, jelikož se zde setkáváme se dvěma možnými řešeními. V případě, kdy respondenti míří přímo ke grafickému schématu, si označíme skupinu s uvedeným výsledkem písmenem S_2. Kategorie S^+ označuje obecné odpovědi řešitelů, kteří dokážou vidět vztah mezi obsahy čtverců i bez využití přesného složení obrazce. Jestliže žáci zodpoví otázku částečně, označujeme tuto skupinu písmenem C bez ohledu na charakteristiku odpovědi.

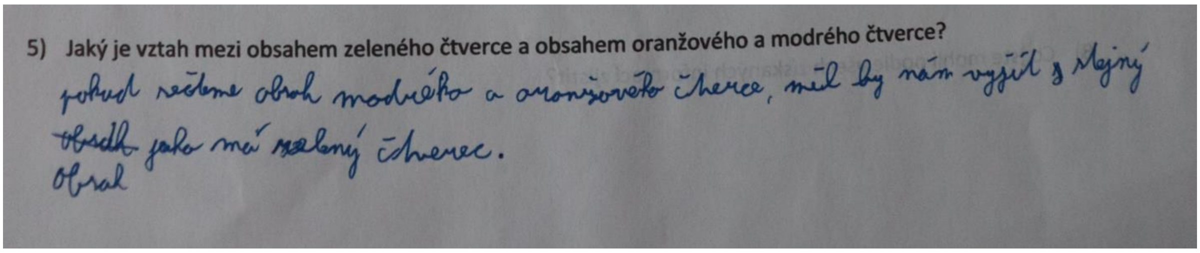
Abychom si dokázali řešení respondentů v posledním příkladu lépe představit, uvedeme níže jejich vzorové výsledky.

Mezi názorné příklady skupiny S_2 lze zařadit:


5) Jaký je vztah mezi obsahem zeleného čtverce a obsahem oranžového a modrého čtverce?

Zelený je dvakrát větší - zkládá se ze čtyř trojúhelníků oranžový a modrý jen ze dvou

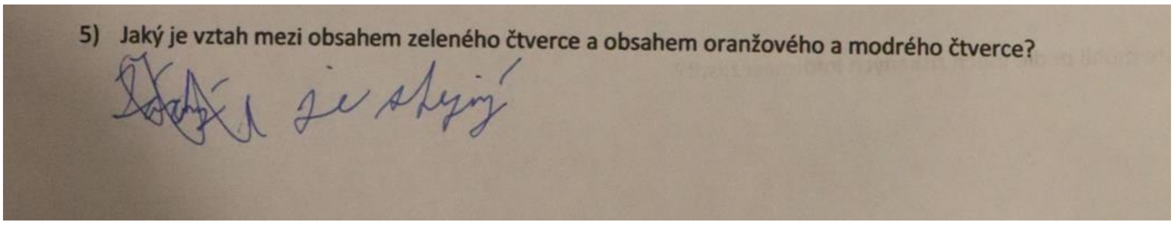
Obrázek 20 - Příklad řešení žáka


5) Jaký je vztah mezi obsahem zeleného čtverce a obsahem oranžového a modrého čtverce?

pokud sečteme obsah modrého a oranžového čtverce, měl by nám vyjít stejný ~~obsah~~ jako má zelený čtverec.
Obsah

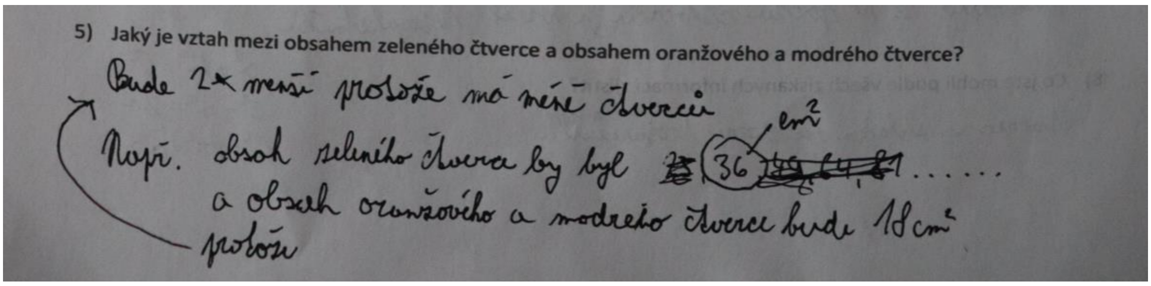
Obrázek 21 - Příklad řešení žáka

V případě obecného řešení zahrnujeme do možných odpovědí:


5) Jaký je vztah mezi obsahem zeleného čtverce a obsahem oranžového a modrého čtverce?

je stejný

Obrázek 23 - Příklad řešení žáka

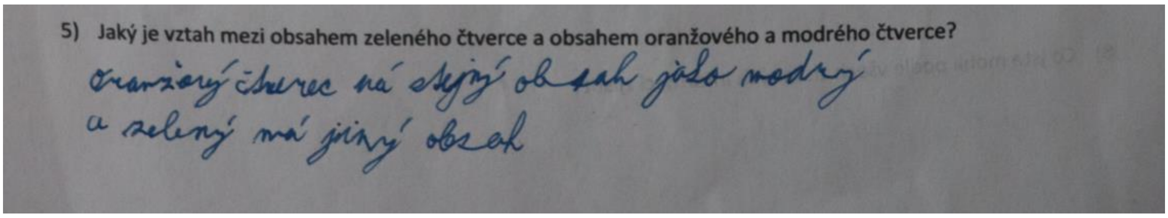

5) Jaký je vztah mezi obsahem zeleného čtverce a obsahem oranžového a modrého čtverce?

Bude 2× menší protože má méně čtverců

Např. obsah zeleného čtverce by byl 36 cm² ......
a obsah oranžového a modrého čtverce bude 18 cm²
protože

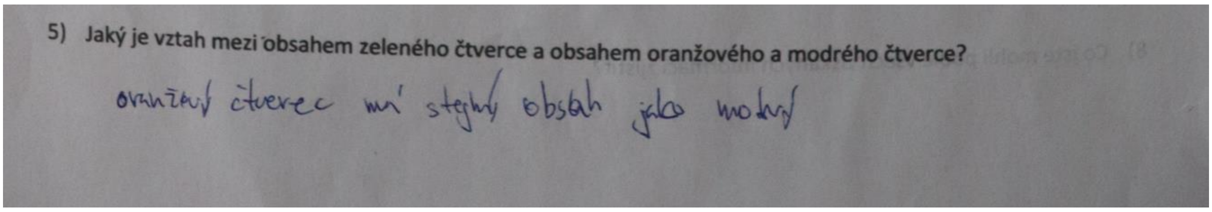
Obrázek 22 - Příklad řešení žáka

Mezi příklady částečně správných odpovědí můžeme začlenit například:


5) Jaký je vztah mezi obsahem zeleného čtverce a obsahem oranžového a modrého čtverce?

Oranžový čtverec má stejný obsah jako modrý a zelený má jiný obsah

Obrázek 25 - Příklad řešení žáka


5) Jaký je vztah mezi obsahem zeleného čtverce a obsahem oranžového a modrého čtverce?

oranžový čtverec má stejný obsah jako modrý

Obrázek 24 - Příklad řešení žáka

V nadcházejících dvou tabulkách uvádíme výsledky všech zúčastněných respondentů.

Tabulka č. 1 prezentuje řešení žáků na základní škole. Je očividné, že řešitelé často zaměňovali u pravoúhlého trojúhelníku přeponu za odvěsnu a naopak. Navíc žáci mnohdy vynechávali 5. úlohu.

Tabulka č. 1 - výsledky žáků na základní škole

Žáci	Úloha 3			Úloha 4			Úloha 5
	I.	II.	III.	I.	II.	III.	
1	a	a	b	2	2	4	S_2
2	a	a	b	2	2	4	S^+
3	a	a	b	2	2	4	S_2
4	a	a	b	2	2	4	S_2
5	a	a	b	2	2	4	S_2
6	a	a	b	2	2	4	X
7	b	a	b	4	4	4	X
8	a	a	b	2	2	4	C
9	b	b	a	2	2	4	C
10	a	a	b	2	2	4	X
11	a	a	b	2	2	4	X
12	a	a	b	2	2	4	C
13	b	a	b	2	2	4	S_2
14	b	b	a	2	2	4	S_2
15	a	a	b	2	2	4	C
16	a	a	b	2	2	4	X
17	a	b	b	2	2	1	X
18	b	a	b	2	2	4	X
19	a	b	a	2	2	4	X
20	a	b	b	2	2	4	X
21	b	b	a	8	8	8	S_2
22	b	a	b	2	2	4	S^+

Tabulka č. 2 zobrazuje výsledky respondentů z gymnázia, kde největší problém se opět vyskytoval u otázky 3 a posledního příkladu.

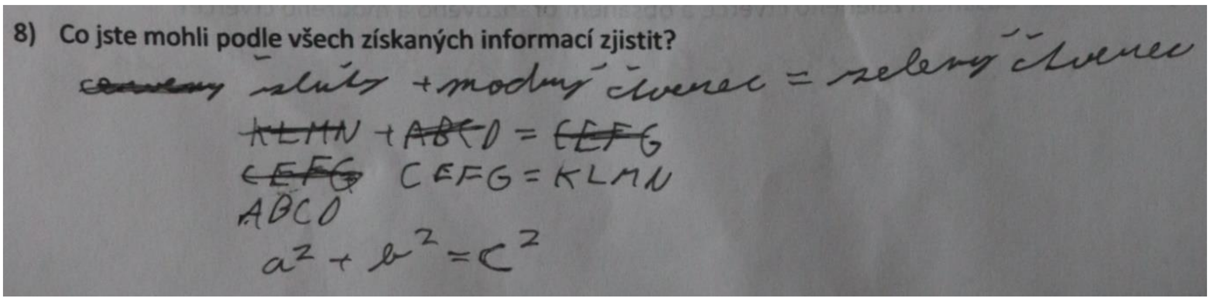
Tabulka č. 2 - výsledky žáků na gymnáziu

Žáci	Úloha 3			Úloha 4			Úloha 5
	I.	II.	III.	I.	II.	III.	
1	a	a	b	2	2	4	S^+
2	a	a	b	2	2	4	S^+
3	a	a	b	2	2	4	S^+
4	a	a	b	2	2	4	S^+
5	a	a	b	2	2	4	S^+
6	a	a	b	2	2	4	S^+
7	a	a	b	2	2	4	S_2
8	a	a	b	2	2	4	X
9	a	a	b	2	2	4	C
10	a	a	b	2	2	4	S^+
11	b	b	a	2	2	4	S^+
12	a	b	b	2	2	4	X
13	a	a	b	2	2	4	S^+
14	a	a	b	2	2	4	X
15	a	a	b	2	2	X	X
16	a	a	a	2	2	4	X
17	a	a	b	2	2	4	S^+
18	a	a	b	2	2	4	X
19	a	a	b	2	2	4	X
20	b	b	a	2	2	4	X

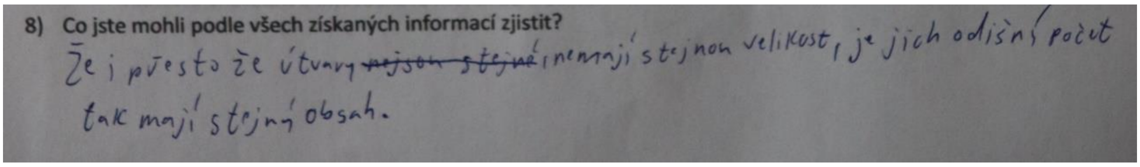
4.5.2 Druhá strana pracovního listu

Ze skupiny *analýzy schématu* zapisujeme do tabulky přesná řešení pouze u úlohy 4. U otázky č. 5 jsme vytvořili 3 sloupce na základě toho, jaké útvary respondenti uváděli ve svých řešeních. Jednotlivé obrazce se v prvním případě skládají ze čtverce a 4 trojúhelníků a ve druhé situaci ze 2 čtverců a 4 trojúhelníků, nebo je možné též uvést 2 obdélníky tvořené z již zmíněných trojúhelníků. Sloupec s označením C určuje čtverec, písmeno T je symbol pro obrazec trojúhelník a poslední znak O označuje obdélník. U příkladu 6 ze skupiny *formulování tvrzení* se samozřejmě setkáváme s mnoha různými řešeními, ovšem dle jejich charakteru je můžeme rozdělit do 3 kategorií. Obecně lze říci, že jsou schémata souhlasné ve stejných útvarech umístěných uvnitř něho (zkratka S_U). S větší přesností se shodují v šedých trojúhelnících, u kterých počítáme nejen s jejich počtem, ale i velikostí stran (zkratka T_s). Mezi další možná řešení lze zahrnout délku obrazce, s čímž se pojí jeho obvod a obsah (zkratka D). V předposlední otázce opět podle řešení žáků získáváme 3 skupiny. Rozdíl mezi schématy lze nalézt v počtu bílých čtverců, jejich velikosti či v prostém uspořádání útvarů, kam řadíme i takové odpovědi, kde žáci vidí odlišnost pouze samotném výskytu obdélníku. Jednotlivé kategorie značme po řadě symboly P_C, V_C, U. Jelikož je poslední příklad příliš otevřenou úlohou, setkáváme se zde s mnoha různými odpověďmi. Abychom se vyhnuli utrpení se zpracováváním individuálních odpovědí řešitelů, vytvořili jsme 2 základní kategorie. První z nich obsahuje taková řešení, kdy respondenti zapsali Pythagorovu větu, nebo se k ní přiblížili (zkratka P_V^+). Jinak řečeno pochopili, jakým směrem se pracovní list ubírá. Naopak druhá skupina uváděla řešení mimo naše očekávání (zkratka P_V^-). Níže uvádíme pro lepší orientaci v kategoriích příklady řešitelů u této otázky.

V případě první situace zahrnujeme do možných odpovědí:



Obrázek 26 - Příklad řešení žáka

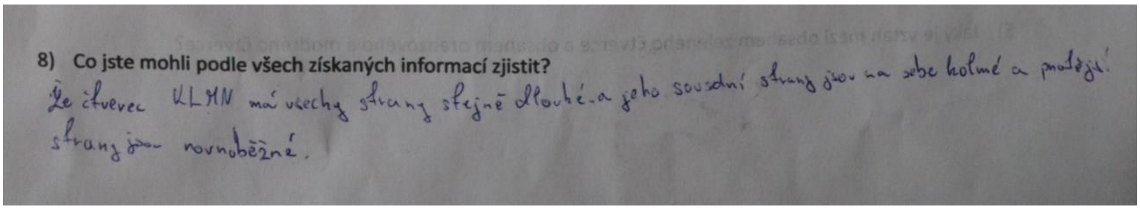


8) Co jste mohli podle všech získaných informací zjistit?

Že i přesto že útvary ~~nejsou stejné~~ nemají stejnou velikost, je jich odlišný počet tak mají stejný obsah.

Obrázek 27 - Příklad řešení žáka

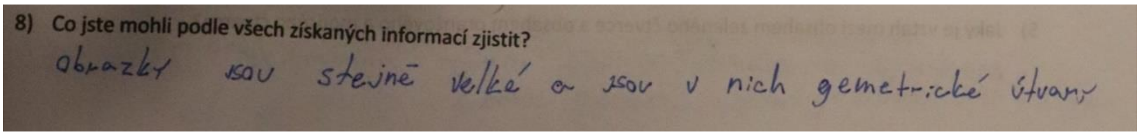
Pokud se zaměříme na druhou kategorii čili na skupinu s označením P_V^-,můžeme zde nalézt například tyto odpovědi:



8) Co jste mohli podle všech získaných informací zjistit?

Že čtverec KLMN má všechny strany stejně dlouhé a jeho sousední strany jsou na sebe kolmé a protější strany jsou rovnoběžné.

Obrázek 28 - Příklad řešení žáka



8) Co jste mohli podle všech získaných informací zjistit?

obrazky jsou stejně velké a jsou v nich gemetrické útvary

Obrázek 29 - Příklad řešení žáka

Vzhledem k tomu, že se na druhé straně listu převážně vyskytují úlohy, u kterých pouze zaznamenáváme odpovědi žáků, nerozdělujeme výsledky barevně na správné, částečně správné a chybné řešení. V tabulce znázorňujeme odpovědi žáků pomocí symbolu **o**.

Veškeré odpovědi účastníků výzkumu jsme zapsali do dvou tabulek, kde se nejdříve zaměřujeme na základní školu a poté vyobrazujeme řešení respondentů na víceletém gymnáziu.

Při prvním pohledu na tabulku č. 3 si můžeme všimnout, že žákům dělala největší problém úloha 4 a 8. Nicméně i u otázek č. 7 a 6 lze též pozorovat jisté potíže.

Tabulka č. 3 – výsledky žáků na základní škole

Žáci	Úloha 4			Úloha 5						Úloha 6			Úloha 7			Úloha 8	
				I.			II.										
	I.	II.	III.	C	O	T	C	O	T	S_U	T_S	D	P_C	V_C	U	P_V^+	P_V^-
1	c^2	a^2	b^2	o		o	o		o		o		o			o	
2	36	8,36	36,96	o		o	o	o	o		o			o		X	X
3	36	22,5	27,5	o		o	o	o	o	o					o		o
4	a	a	a	o		o	o		o		o		o			o	
5	a^2	a^2	a^2	o		o	o		o			o	o	o		o	
6	X	X	X	o		o	o		o	X	X	X	X	X	X	X	X
7	c^2	a^2	b^2	o		o	o	o	o	o			X	X	X		o
8	a^2	a^2	a^2	o		o	o		o		o		o			X	X
9	$a\cdot a$	$a\cdot a$	$a\cdot a$	o		o	o		o			o	o				o
10	a^2	a^2	a^2	o		o	o		o		o		o			X	X
11	X	X	X	o		o	o		o			o	o			X	X
12	36	25	9	o		o	o		o		o		o			X	X
13	X	X	X	o			o	o				o		o		X	X
14	c^2	a^2	b^2	o			o	o		X	X	X	X	X	X		o
15	X	X	X	o		o	o		o		o		o			X	X
16	$a\cdot a$	$a\cdot a$	$a\cdot a$	o		o	o	o				o			o		o
17	$a\cdot a$	$a\cdot a\cdot a\cdot a$	$a\cdot b$	o			o		o			o	X	X	X	X	X
18	16	16	16	o		o	o		o	o			o				o
19	X	X	X	o		o	o		o			o	X	X	X		
20	X	X	X	o		o	o	o		o					o	X	X
21	5,8	1,5	5,8	o		o	o		o			o	o			X	X
22	X	X	X	o		o	o	o	o	X	X	X	X	X	X	X	X

U žáků víceletého gymnázia si lze povšimnout, že příklad 8 pro ně byl nejkomplikovanější. Ovšem u jedinců se setkáváme s potížemi i u úloh 4, 6 a 7.

Tabulka č. 4 – výsledky žáků na gymnáziu

Žáci	Úloha 4			Úloha 5						Úloha 6			Úloha 7			Úloha 8	
				I.			II.										
	I.	II.	III.	C	O	T	C	O	T	S_U	T_S	D	P_C	V_C	U	P_V^+	P_V^-
1	c^2	a^2	b^2	o		o	o		o	o	o		o	o			o
2	c^2	a^2	b^2	o		o	o		o		o		o	o			o
3	c^2	a^2	b^2	o		o	o		o		o		o			o	
4	c^2	a^2	b^2	o		o	o		o		o		o				o
5	$c \cdot c$	$a \cdot a$	$b \cdot b$	o		o	o		o	o	o		o				o
6	c^2	a^2	b^2	o		o	o		o		o			o		o	
7	c^2	a^2	b^2	o		o	o	o	o		o		o			X	X
8	c^2	a^2	b^2	o		o	o		o		o		o			X	X
9	C^2	A^2	B^2	o		o	o		o			o	o				o
10	c^2	a^2	c^2	o		o	o	o	o		o	o	o			X	X
11	c^2	a^2	b^2	o		o	o		o		o		o			X	X
12	c^2	a^2	b^2	o		o	o	o	o			o	o				o
13	a^2	a^2	a^2	o		o	o		o		o		o			X	X
14	c	a	b	o		o	o		o		o		o				o
15	c^2	a^2	b^2	o		o	o		o			o	o			X	X
16	$c \cdot c$	$a \cdot a$	$b \cdot b$	o		o	o		o	X	X	X	X	X	X	X	X
17	c^2	a^2	c^2	o		o	o		o			o	o			X	X
18	X	X	X	o		o	o	o	o		o	o	X	X	X	X	X
19	c^2	a^2	b^2	o		o	o	o	o		o			o		X	X
20	X	X	X	o		o	o		o		o		o			X	X

5 Závěr

Hlavním cílem naší bakalářské práce bylo prozkoumat námi vytvořený pracovní list a zjistit, jakým způsobem s ním dokážou žáci pracovat a v čem mají respondenti problémy. Na základě jejich řešení jsme poté mohli sledovat nedostatky listu a navrhnout možná zlepšení, k čemuž nám pomohla i teoretická stránka bakalářské práce.

V teoretické části se nejprve zaměřujeme na matematickou stránku našeho tématu. Rozebíráme zprvu mocniny, odmocniny, mnohočleny a následně metrické úlohy, kam spadá nejen Pythagorova věta, ale i výpočty obsahů. Poté se věnujeme didaktickému úseku, který je klíčový pro naši studii. Popisujeme zde potíže, se kterými se žáci potýkají při algebraizaci a při určování obsahů, na což navazujeme kapitolou o didaktických postupech a technikách spojenými s jmenovanou tématikou. Poslední segment práce se zaobírá problematikou vizualizace.

V praktické části se nejdříve zaměřujeme na popis celého pracovního listu, kde každou jeho úlohu dopodrobna rozebíráme. Následně navazujeme na zmíněný úsek charakteristikou konceptu, jenž jsme neměli možnost ověřit v praxi. Samotný výzkum jsem uskutečnila v 8. třídě základní školy a v sekundě na víceletém gymnáziu. Abych získala větší úspěšnost ve vyplňování pracovního listu, zopakovala jsem se žáky den předem potřebnou látku. Poslední vyučovací hodinu strávenou s respondenty jsem s nimi prošla nové téma – Pythagorovu větu.

Během výzkumu se obracíme na jisté pasáže v didaktické části, které jsme se pokoušeli svou studií ověřit. Na základě výsledků respondentů uvedených v jednotlivých tabulkách jsme dospěli k závěru, že žáci mají potíže se samotnými vzorci. Často se vyskytovaly v celé úloze 4 na druhé straně pracovního listu odpovědi typu a^2, což nasvědčuje, že nerozumí podstatě vzorců a učí se je nazpaměť. S touto potíží se pojí špatné rozpoznávání obrázku. Ačkoli v našich výsledcích neuvádíme řešení respondentů u úloh ze skupiny *výchozí situace*, lze vydedukovat ze všech jejich odpovědí včetně otázek z jmenované skupiny, že nedokážou diagnostikovat schéma. Neumí pracovat s grafickým znázorněním a ztrácí se v něm, což je důsledek málo prosazované vizualizace. Ta by ovšem neměla být brána jako všelék na problémy matematického vzdělávání, ale měla by obohatit naše porozumění matematiky. Hovoříme o tom, že samotná vizualizace poskytuje metodu vidění neviditelného (Arcavi 2003). Zřejmě kvůli zmíněnému problému, kdy si už v první úloze špatně určí označení stran, nejsou schopni dále pokračovat, zejména s již zmiňovaným příkladem 4. U řešitelů se objevuje též neporozumění textu, matematické podstatě, jako jsou vztahy mezi objekty, a matematickým pojmům. Jmenovaná problematika se vyskytuje zejména na první straně pracovního listu, ale též i v otázce 8 na druhé straně. Z tohoto důvodu žáci vynechávali poslední úlohy a v otázce č. 3 si pletli názvy *přepona, odvěsna*. Poměrně častým problémem byl také velký důraz na výpočet obsahu čili zjišťování číselné hodnoty, což může vést ke ztrátě mezi geometrickou představivostí a samotným určením obsahu.

Při pozorování výsledků v tabulkách je očividné, že si žáci na gymnáziu vedli o něco lépe než respondenti ze základní školy. Důvodů, proč tomu tak je, může být nekonečně mnoho. Lze například uvažovat nad tím, že na gymnáziích jsou vybraní žáci, kteří o vyšší studium jeví větší zájem. Ovšem, abychom dokázali o uvedeném tématu hovořit, bylo by zapotřebí hlouběji proniknout do problematiky a zjistit veškeré příčiny. Nicméně zmíněný problém není obsahem naší bakalářské práce.

Přestože jsme neměli možnost ověřit náš vytvořený koncept, jsme názoru, že by mohli žáci mít potíž nejen s grafickou stránkou a neporozuměním schématu, ale i s tématikou týkající se symbolu „=“. V konceptu se totiž nesetkáváme s významem značící výpočet, ale s představou zachování rovnosti. Respondenti si tedy nemusí uvědomovat vztah mezi výrazy a samotnému grafickému znázornění neporozumí.

Na základě řešení žáků jsme mohli dojít k myšlence změny pracovního listu. Zmíněné problémy vyskytující se u jednotlivých žáků mohou mít příčinu ve špatně zkonstruovaném listu. U některých řešitelů se objevoval pohled na schéma jako na celek. Měli tendenci se soustředit na celý obrázek, nikoliv na jednotlivé části v něm. Abychom se v budoucnu vyhnuli zmíněnému problému a též dospěli u žáků k lepšímu porozumění problematice, mohli bychom využít buď dynamické geometrie namísto papírové formy nebo vystřižení schémat, s čímž bychom pracovali společně s daným pracovním listem.

Celá práce pro mě byla důležitou zkušeností a ziskem do mé budoucí praxe. Díky odpovědím žáků jsem mohla hlouběji nahlédnout do problematiky. Získané informace mě pobídly k zamyšlení se nad vhodnou volbou metod a pomůcek.

6 Literatura

[1] ARCAVI, Abraham, 2003. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics [online]. **52**(3). Dostupné z: http://www.jstor.org/stable/3483015

[2] BALADA, Jan, Gabriela BALADOVÁ a Jan BONĚK, 2021. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* [online]. 2021. B.m.: MŠMT. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-pro-gymnazia-rvp-g/

[3] BARTOŠEK, Miroslav, Václav BENDL a Martina ČERNÁ, 2021. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. 2021. B.m.: MŠMT. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

[4] BENEŠOVÁ, Štěpánka, 2022. *Algebraizace v úlohách s geometrickým kontextem - žákovské obtíže a chyby* [online]. Praha. Diplomová práce. Univerzita Karlova. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/178717/120435374.pdf?sequence=1

[5] BEUTELSPACHER, Albrecht, 2005. *Matematika do vesty*. Vyd. 1. Praha: Baronet. ISBN 978-80-7214-841-7.

[6] BUŠEK, Ivan, 2012. *Matematika pro gymnázia. Základní poznatky*. 4. vyd. Praha: Prometheus. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-366-0.

[7] CAJORI, Florian, 1913. History of the Exponential and Logarithmic Concepts. *The American Mathematical Monthly* [online]. **20**(1), 5–14. ISSN 0002-9890. Dostupné z: doi:10.2307/2973509

[8] ČUČKA, Michal, 2007. *Pythagorova věta a její důkazy* [online]. Brno. Diplomová práce. Masarykova univerzita. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/jerju/Diplomova_prace.pdf

[9] HONZLOVÁ EXNEROVÁ, Vendula, 2014. *Výpočet odmocnin od starověku po současnost* [online]. Praha. Závěrečná práce. Univerzita Karlova. Dostupné z: https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/czv/vypocet_odmocnin.pdf

[10] HORÁK, Stanislav, 1949. *Pythagorova věta*. 1. vyd. Praha: Jednota československých matematiků a fysiků. Brána k vědění ; sv. 5.

[11] KRÁLOVÁ, Magda, 2007. *Mocniny a odmocniny* [online]. Dostupné z: http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/matematika/aritmetika/o-pocitani/mocniny-odmocniny?fbclid=IwAR0B8ycVsTt-vQ_phbZmVUfPEZopjBaxrPr-17b4gRUzEPf1RAwef9RGfSg#

[12] KUŘINA, František, 1997. UČÍME V MATEMATICE MYSLET? [online]. **5**(3). Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/151391/UcitelMat_005-1997-3_9.pdf

[13] KUŘINA, František, 1998. Matematika v obrazech (1) [online]. **6**(1). Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/151346/UcitelMat_006-1998-1_1.pdf

[14] KUŘINA, František, 2019. METODY A CÍLE VYUČOVÁNÍ MATEMATICE [online]. **27**(3). Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/148612/UcitelMat_027-2019-3_6.pdf

[15] NOVOTNÁ, Kateřina, 2018. *Geometrická interpretace v algebře a aritmetice* [online]. B.m. Bakalářská práce. Univerzita Hradec Králové. Dostupné z: https://theses.cz/id/lewc41/STAG89712.pdf?zpet=%2Fvyhledavani%2F%3Fsearch%3Dnovotn%C3%A1%20kate%C5%99ina%20interpretace%C2%A8%26start%3D1

[16] ODVÁRKO, Oldřich, 2004. *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Praha: Prometheus. Učebnice pro základní školy. ISBN 978-80-7196-276-2.

[17] ODVÁRKO, Oldřich, 2009. *Matematika pro střední odborné školy: základní poznatky*. 1. vyd. Praha: Prometheus. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-394-3.

[18] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK, 2008. *Matematika pro 8. ročník základní školy* [online]. 1. vydání. Praha: Prometheus [vid. 2023-05-18]. ISBN 978-80-7196-148-2. Dostupné z: https://arl.uhk.cz/arl-hk/cs/detail-hk_us_cat-m0587571-Matematika-pro-8-rocnik-zakladni-skoly/

[19] RENDL, Miroslav, Naďa VONDROVÁ, Lenka HŘÍBKOVÁ, Darina JIROTKOVÁ, Jaroslava KLOBOUČKOVÁ, Ladislav KVASZ, Anna PÁCHOVÁ, Isabella PAVELKOVÁ, Irena SMETÁČKOVÁ, Eliška TAUCHMANOVÁ a Jana ŽALSKÁ, 2013. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* [online]. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova. ISBN 978-80-7290-723-6. Dostupné z: https://www.researchgate.net/profile/Nada-Vondrova/publication/308959439_Kriticka_mista_matematiky_na_zakladni_skole_ocima_ucitelu/links/57fa44ba08ae886b8985f026/Kriticka-mista-matematiky-na-zakladni-skole-ocima-ucitelu.pdf

[20] SANGAKU MATHS, 2023. Product, division and sum of square roots. *Sangaku Maths* [online] [vid. 2023-06-23]. Dostupné z: https://www.sangakoo.com/en/unit/product-division-and-sum-of-square-roots

[21] SKLÁŘOVÁ, Eva, 2009. *Historie matematiky ve vztahu k vyučování matematiky na 2. stupni ZŠ* [online]. Brno. Diplomová práce. Masarykova univerzita. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/gzc4v/diplomova_prace_sklarova.pdf

[22] STEWART, Ian, 2019. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. První vydání v českém jazyce. Praha: Argo : Dokořán. Zip (Argo : Dokořán). ISBN 978-80-7363-935-8.

[23] ŠEDIVÝ, Ondrej, 1991. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Učebnice pro základní školy. ISBN 978-80-04-25091-1.

[24] ŠEVČÍKOVÁ, Andrea, 2020. *Vliv vizuální reprezentace důkazů matematických vět na jejich srozumitelnost* [online]. Hradec Králové. Dizertační práce. Univerzita Hradec Králové. Dostupné z: https://theses.cz/id/zqgxkw/STAG94444.pdf

[25] ŠRÁMEK, Martin, 2017. *Obvody a obsahy rovinných útvarů* [online]. Praha. Diplomová práce. Univerzita Karlova. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/85665/DPTX_2015_1_11320_0_485871_0_172248.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[26] ŠTRAUSOVÁ, Irena, 2012. Vizuální důkazy ve výuce matematiky [online]. **20**(1). Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/strausova.pdf

[27] VONDROVÁ, Naďa, Radka HAVLÍČKOVÁ, Miroslav RENDL a Jana ŽALSKÁ, 2015a. *KRITICKÁ MÍSTA MATEMATIKY ZÁKLADNÍ ŠKOLY: METODICKÝ MATERIÁL PRO UČITELE* [online]. Praha. Univerzita Karlova. Dostupné z: http://mdisk.pedf.cuni.cz/Nada/Manu%C3%A1l%20Kritick%C3%A1%20m%C3%ADsta%20matematiky%20na%20z%C3%A1kladn%C3%AD%20%C5%A1kole%20final.pdf

[28] VONDROVÁ, Naďa, Miroslav RENDL, Radka HAVLÍČKOVÁ, Lenka HŘÍBKOVÁ, Anna PÁCHOVÁ a Jana ŽALSKÁ, 2015b. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Vydání první. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum. ISBN 978-80-246-3234-6.

[29] VONDROVICOVÁ, Diana, 2018. *Výrazy s odmocninami* [online]. Plzeň. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni. Dostupné z: https://dspace5.zcu.cz/bitstream/11025/32022/1/Bakalarska%20prace%20ende.pdf

7 Seznam obrázků

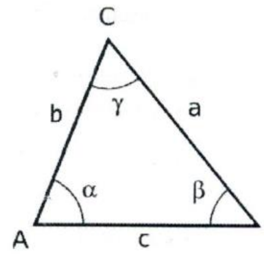
8 Přílohy

Příloha č. 1 – Příprava na první hodinu

Příprava na hodinu

Téma: Opakování na Pythagorovu větu

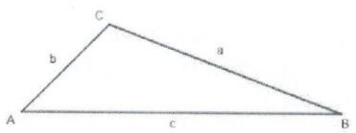
Cíle: Žák popíše pravoúhlý trojúhelník a čtverec
Žák zná obsahy čtverce, obdélníku
Žák počítá příklady na obsahy čtverce a obdélníku

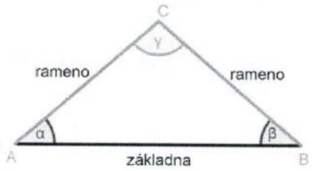


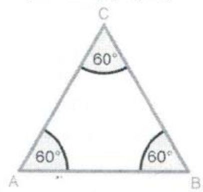
Trojúhelník:

- = geometrickýútvar, který má 3 vrcholy, 3 strany, 3 vnitřní úhly (součet 180°)
  = geometrický útvar, který je určen 3 body neležícími v jedné přímce (tzv. bavíme se i o vnitřku trojúhelníku)

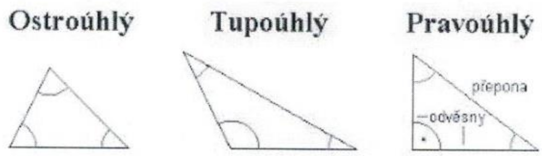
- Dělení podle délek stran – různostranné, rovnoramenné, rovnostranné**(nákres, popis)**







Dělení podle velikosti vnitřních úhlů – ostroúhlé, tupoúhlé, pravoúhlé **(nákres, popis)**



- Pravoúhlý trojúhelník – 1 pravý úhel, 2 ostré úhly
  - přepona (nejdelší strana), 2 odvěsny
  - přepona leží proti pravému úhlu

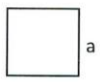
Čtverec:

- Vlastnosti: pravidelný čtyřúhelník
  všechny vnitřní úhly jsou pravé
  všechny strany jsou shodné

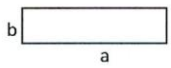
  (protilehlé strany jsou rovnoběžné
  úhlopříčky jsou stejně dlouhé
  úhlopříčky jsou na sebe kolmé
  úhlopříčky se navzájem půlí)

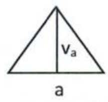
Obsahy: (náčrt)

- Obsah čtverce: $a^2 = a*a$



- Obsah trojúhelníku: $\frac{a*v_a}{2}$
- Obsah obdélníku: a*b





- Příklady:

1) Vypočítej obsah čtverce, je-li jeho strana a = 1 cm S = 1 cm^2
   b = 5 cm S = 25 cm^2
   c = 13 cm S = 169 cm^2

2) Jak dlouhá je strana čtverce, má-li obsah a = 4 cm^2 a = 2 cm
   b = 36 cm^2 a = 6 cm
   c = a^2 a

3) Urči obsah obdélníku, který má délky stran 12 m a 9 m. S = 108 cm^2

4) Strana čtverce se zvětší2x, kolikrát se zvětší jeho obsah? 2a -> $4a^2$

5) V Kocourkově se rozhodli, že postaví dětské a volejbalové hřiště. Volejbalové bude mít rozměr 16m x 9m. Dětské hřiště bude mít tvar čtverce. Plocha obou hřišť bude stejná. Jaké budou rozměry dětského hřiště? S = 144 m^2 -> 12 m

6) Načrtněte si obdélník, který má délky stran 8 cm a 4 cm. Dále nakreslete jednu jeho úhlopříčku. Kolik trojúhelníků v obrázku vidíte? Jaký má obsah každý z jeho trojúhelníků.
   S = 16 cm^2

Příloha č. 2 **–** Příprava na druhou hodinu

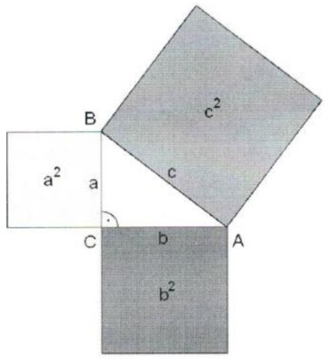
Příprava na hodinu

Téma: Opakování pravoúhlého trojúhelníku, pracovní list, Pythagorova věta
Cíle: Žák popíše pravoúhlý trojúhelník
Žák samostatně vyplní pracovní list
Žák definuje Pythagorovu větu

Opakování pravoúhlého trojúhelníku
Pravítko s ryskou – rovnoramenný, pravoúhlý
- přejet prstem přes přeponu a odvěsny

Pracovní list

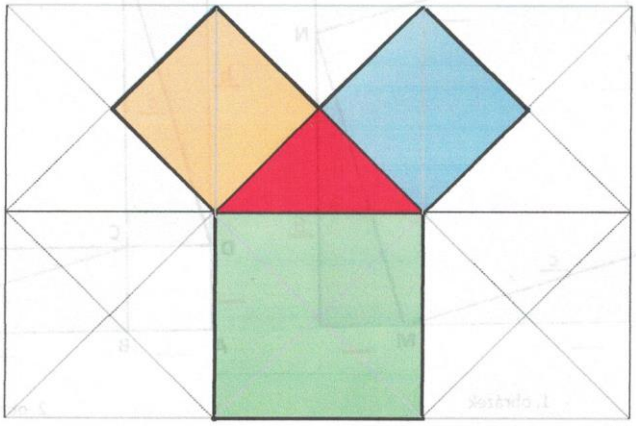
Pythagorova věta



= obsah čtverce nad přeponou je roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami
=> $c^2 = a^2 + b^2$
- pozor na vzorec -> může být různé označení trojúhelníku (KLM -> $k^2 = l^2 + m^2$)
- propojení s pracovním listem – vysvětlení důkazů, jak se pojí k Pythagorově větě

Příloha č. 3 – Pracovní list využitý k výzkumu

Pythagorova věta



1) **Jaké vlastnosti má červený trojúhelník? Odůvodni, proč tyto vlastnosti má.**

2) **Kolik je v obrazci trojúhelníků stejných vlastností jako červený?**

3) **Zakroužkujte správné tvrzení.**

   Oranžový čtverec má stejnou délku strany jako

   a. **Odvěsna červeného trojúhelníku**
   b. **Přepona červeného trojúhelníku**

   Modrý čtverec má stejnou délku strany jako

   a. **Odvěsna červeného trojúhelníku**
   b. **Přepona červeného trojúhelníku**

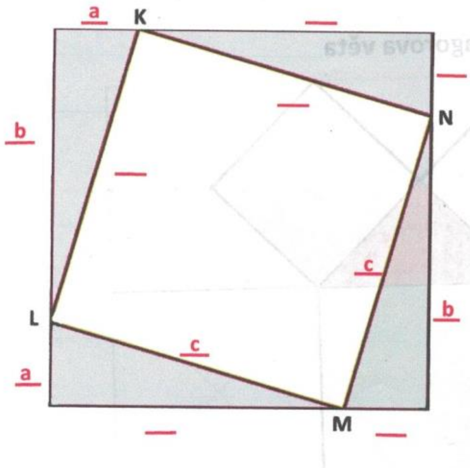
   Zelený čtverec má stejnou délku strany jako

   a. **Odvěsna červeného trojúhelníku**
   b. **Přepona červeného trojúhelníku**

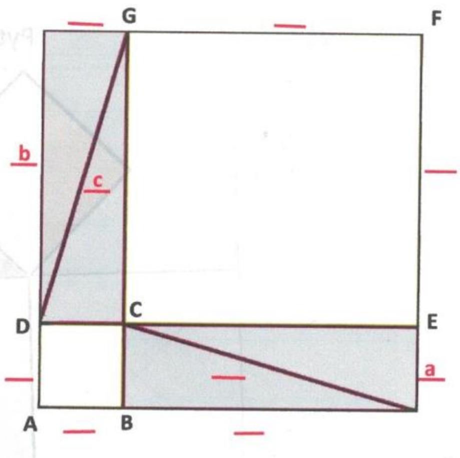
4) **Z kolika trojúhelníků stejných jako červený se skládají různé čtverce? Doplňte:**

   Oranžový čtverec se skládá z .... trojúhelníků.
   Modrý čtverec se skládá z .... trojúhelníků.
   Zelený čtverec se skládá z .... trojúhelníků.

5) **Jaký je vztah mezi obsahem zeleného čtverce a obsahem oranžového a modrého čtverce?**



1. obrázek



2. obrázek

1) Písmena a, b, c vyjadřují délky příslušných úseček. Například c je délka úsečky LM. Obrázky jsou však částečně popsané. Doplňte na určená místa správná písmena k jednotlivým úsečkám.

2) Zakroužkuj správné odpovědi. Šedé trojúhelníky jsou:

a) rovnoramenné b) pravoúhlé c) rovnostranné d) tupoúhlé

e) ostroúhlé f) různostranné

3) Jaké čtyřúhelníky jsou útvary KLMN, ABCD a CEFG? A proč?

4) Urči obsahy bílých čtyřúhelníků v závislosti na délkách jejich stran.

Čtyřúhelník KLMN má obsah ....
Čtyřúhelník ABCD má obsah ....
Čtyřúhelník CEFG má obsah ....

5) Z jakých útvarů se skládají 1. a 2. obrázek?

1. obrázek se skládá z ....

2. obrázek se skládá z ....

6) V čem se shoduje 1. a 2. obrázek?

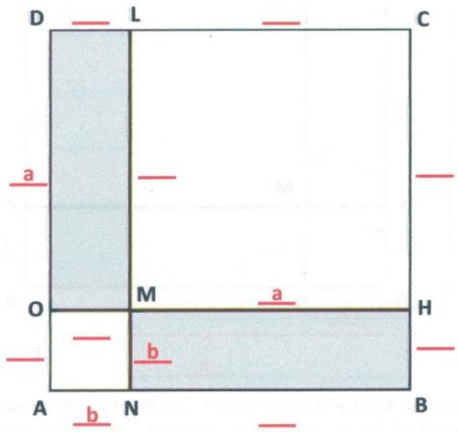
7) V čem se naopak liší?

8) Co jste mohli podle všech získaných informací zjistit?

Příloha č. 4 – Koncept pracovního listu

Rozklad mnohočlenů na součin

Ačkoli se rozklad mnohočlenů na součin může na první pohled zdát zcela odlišný od Pythagorovy věty, přesto lze najít mezi těmito tématy souvislost. V důkazu na Pythagorovu větu nalezneme obrazec, který se dá využít následovně i v dokazování rozkladu mnohočlenů na součin.



1. Písmena a, b vyjadřují délky příslušných úseček. Například a je délka úsečky MH. Obrázky jsou však částečně popsané. Doplňte na určená místa správná písmena k jednotlivým úsečkám.

2. Jak dlouhá je strana čtverce ABCD?

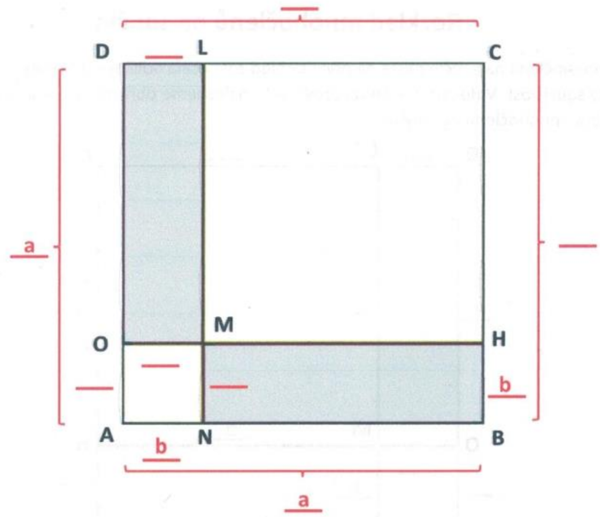
3. Zapiš obsahy útvarů v závislosti na délkách jejich stran.

   Čtverec ANMO má obsah ....
   Čtverec MHCL má obsah ....
   Obdélník NBHM má obsah ....
   Obdélník OMLD má obsah ....

4. Obsah čtverce ABCD je (..............)^2

5. Jak jinak lze vyjádřit obsah čtverce ABCD? Podívej se na obrázek a vyjádři obsah čtverce ABCD pomocí obsahů jiných útvarů (nápověda: obsah obdélníků, obsahy bílých čtverců).

Zapiš vztah obsahu čtverce ABCD: (................)^2 = ...



1. Písmena a, b vyjadřují délky příslušných úseček. Například a je délka úsečky MH. Obrázky jsou však částečně popsané. Doplňte na určená místa správná písmena k jednotlivým úsečkám.

2. Jak dlouhou stranu má čtverec MHCL?

3. Zapiš obsahy útvarů v závislosti na délkách jejich stran.

   Čtverec ANMO má obsah ....
   Čtverec ABCD má obsah ....
   Obdélník NBHM má obsah ....
   Obdélník OMLD má obsah ....

4. Obsah čtverce MHCL je (............)^2

5. Jak jinak lze vyjádřit obsah čtverce MHCL? Podívej se na obrázek a vyjádři obsah čtverce MHCL pomocí obsahů jiných útvarů (nápověda: obsah čtverce ABCD, obsah obdélníků, obsah čtverce ANMO).

Zapiš vztah obsahu čtverce MHCL: (...............)^2 = ...

Příloha č. 5 – Příprava na třetí hodinu

Příprava na hodinu

Téma: Pythagorova věta, pracovní list

Cíl: Žáci znají Pythagorovu větu

Žáci počítají podle vzorce na Pythagorovu větu

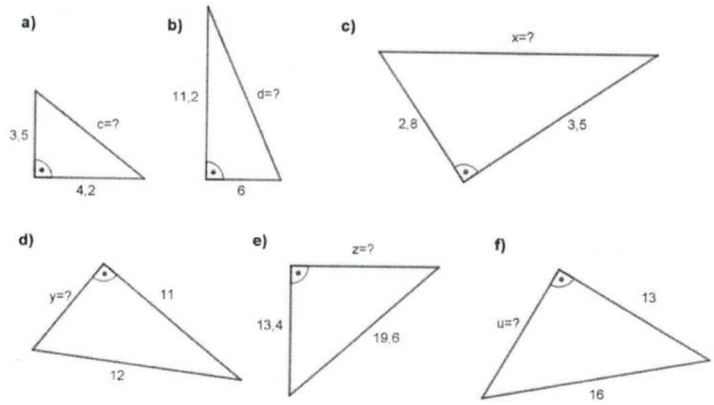
1) Oprava pracovního listu
2) Opakování Pythagorovy věty:

Jak zní Pythagorova věta?

Jaký je vzorec Pythagorovy věty?

3) Příklady:

1.Vypočítej chybějící údaj.



b) 12,71 j c) 4,48 j e) 14,3 j

2. Rozhodněte, zda trojúhelník s následujícími délkami stran je pravoúhlý.

a) a= 5 cm, b = 6 cm, c = 7 cm .... 49 = 25+36 .... Ne

b) k = 20 mm, l = 21 mm, m = 29 mm .... 841 = 400+441 ... Ano

3. Přední strana stanu typu „áčko" měří u země 150 cm. Boční stěna stanu od země k vrcholu stanu měří 180 cm. Jak vysoký je stan?

Náčrtek Zápis $x = 163{,}6$ cm Odpověď

4.Žebřík opřený o zeď je dlouhý 10 m. Vrchol žebříku je umístěn ve výšce 9,8 m. Jak daleko od stěny je jeho pata?

Náčrtek Zápis $x = 2$ m Odpověď

5. Vypočítejte obsah a obvod pravoúhlého trojúhelníku ABC s délkou přepony 26 cm a jednou odvěsnou délky 24 cm.

Náčrtek Zápis $a = 10$ cm, $O = 60$ cm, $S = 120\ cm^2$ Odpověď

6. Vypočítejte obvod pravoúhlého trojúhelníku ABC s odvěsnou b délky 8 cm a obsahem 40 cm^2.

Náčrtek Zápis $a = 10$ cm, $O = 12{,}8$ cm Odpověď