UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vázané extrémy funkce více proměnných a jejich aplikace v ekonomii

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Iveta Bebčáková, PhD.**
Vypracoval(a): **Tereza Miklová**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2018

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Tereza Miklová

Název práce: Vázané extrémy funkce více proměnných a jejich aplikace v ekonomii

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Mgr. Iveta Bebčáková, PhD.

Rok obhajoby práce: 2018

Abstrakt: Extrémy funkcí a jejich vyšetřování se řadí k nejdůležitějším součástem diferenciálního počtu. Hledání extrémů funkcí lze využít k řešení některých optimalizačních úloh v mnoha praktických odvětvích. Tato práce se zaměřuje na vázané lokální extrémy funkce více proměnných a několik jejich aplikací v ekonomii. Nejprve je představen vázaný lokální extrém v teoretickém kontextu, jeho geometrická interpretace a dvě základní metody, kterými jej vyšetřujeme. Poté se práce věnuje třem úlohám aplikace metod hledání těchto extrémů v ekonomii - úloze maximalizace užitku, maximalizace produkce a minimalizace nákladů. Úlohy jsou zasazeny do ekonomického kontextu a pro srovnání je ukázáno řešení ekonomickou úvahou. Dále jsou doplněny několika řešenými příklady včetně porovnání hlavních metod hledání vázaných extrémů a vysvětlení významu a použití Lagrangeova multiplikátoru v ekonomii.

Klíčová slova: vázaný extrém, funkce více proměnných, podmíněná optimalizace, Lagrange, maximalizace užitku, maximalizace produkce, minimalizace nákladů

Počet stran: 54

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Tereza Miklová

Title: Multivariable constrained optimization and its application to economics

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Mgr. Iveta Bebčáková, PhD.

The year of presentation: 2018

Abstract: Extrema of functions and their determination are one of the most relevant parts of the differential calculus. Searching for extrema of a function can be used to solve some of the optimization tasks in many practical fields. This thesis focuses on constrained local extrema of multivariable functions and some of their applications in economics. First, the constrained local extremum of a function in theoretical context is introduced along with its geometrical interpretation and two main methods of its determination. Then the thesis introduces three model examples of applications of constrained extrema determination methods used in economics - utility maximization, production maximization and cost minimization. The model examples are set in theoretical context and solved also economically. Together with the model examples, practical tasks are introduced, containing comparison of the two main solving methods of constrained extrema determination. Also, the meaning and economical use of the Lagrange multiplier is explained.

Key words: constrained extremum, multivariable function, constrained optimization, Lagrange, utility maximization, production maximization, costs minimization

Number of pages: 54

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Ivety Bebčákové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Ráda bych poděkovala paní Mgr. Ivetě Bebčákové, PhD. za všechen čas strávený vedením a konzultacemi této práce a svým blízkým za podporu v průběhu celého studia.

Úvod

Tato bakalářská práce si klade za cíl představit vázané extrémy funkcí více proměnných a ukázat a vysvětlit tři ekonomické úlohy, které lze za pomoci jejich znalosti řešit. Motivací pro výběr tématu bylo přání poznat, jak můžeme schopnosti získané studiem matematické analýzy využít v praxi a jakým způsobem je lze propojit se znalostmi v ekonomii.

Práce se dělí na dvě části, které jsou zároveň kapitolami - teoretickou a aplikační. V první části čtenáře seznamuje s vázanými lokálními extrémy funkcí více proměnných z teoretického hlediska. Připomíná, jak je definujeme, jak se liší od volných lokálních extrémů funkce a jaká pravidla používáme při práci s nimi. Poté se věnuje jejich geometrické interpretaci a představuje dvě hlavní matematické metody, které využíváme pro jejich hledání.

Ve druhé části se práce zaměřuje na tři typy úloh tzv. podmíněné optimalizace v ekonomii. Začátek kapitoly je věnován otázkám, které vedou k potřebě řešení takovýchto úloh a modelovým předpokladům, které musí platit, aby byly úlohy řešitelné.

První podkapitola druhé kapitoly je zaměřena na úlohu maximalizace užitku. Ekonomická teorie užitku je popsána v souvislostech za pomoci matematických nástrojů a doplněna obrázky. Následuje část příkladová, kde je úloha řešena nejprve ekonomickou úvahou a poté je vysvětlen postup aplikace metod hledání vázaných extrémů, představených v první kapitole a jejich srovnání. Pozornost je věnována také Lagrangeovu multiplikátoru a jeho úloze v ekonomii.

Druhá podkapitola práce se obdobným způsobem věnuje úlohám maximalizace produkce a minimalizace nákladů. Také je doplněna o příkladovou část a obrázky. Pro jejich vykreslení jsou v práci použity programy Matlab a Inkscape.

Seznam použitých symbolů

$\mathbb{N}$	...	množina přirozených čísel
$\mathbb{R}$	...	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	...	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{R}^n$	...	n-rozměrný vektorový prostor
$x = [x_1, \ldots, x_n]$	...	bod z R^n o souřadnicích $x_1, \ldots, x_n$
$f'(x_1, \ldots, x_n)$	...	derivace funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$
$f''(x_1, \ldots, x_n)$	...	2. derivace funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$
$\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(x)$	...	parciální derivace k-tého řádu funkce
		$f(x_1, \ldots, x_n)$ podle proměnné x_i v bodě x
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$	...	smíšená parciální derivace 2. řádu funkce
		$f(x_1, \ldots, x_n)$ podle proměnných $x_i\, x_j$ v bodě x
$Lin\,\{f_1, \ldots, f_m\}$	...	lineární obal množiny $\{f_1, \ldots, f_m\}$
$\mathcal{N}^\perp$	...	ortogonální doplněk podprostoru $\mathcal{N}$
$\langle\, , \rangle$	...	skalární součin
a_{ij}	...	prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice A
$d^k f(x_1, \ldots, x_n)$	...	diferenciál k-tého řádu funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$
$\vert\,\vert$	...	absolutní hodnota
$\cdot$	...	součin

Kapitola 1

Vázaný lokální extrém funkce více proměnných

Vyšetřování extrémů funkce je jednou z nejdůležitějších částí diferenciálního počtu [2] s mnoha aplikacemi v praxi - lze jej využít při řešení specifických optimalizačních úloh ekonomických, konstrukčních, fyzikálních a mnoha dalších. Příklady takovýchto úloh lze nalézt v [7] a [3]. Vázané lokální extrémy funkcí pak využíváme ve chvíli, kdy je optimalizace navíc podmíněna platností nějakého omezení. V této kapitole si představíme vázané lokální extrémy funkcí více proměnných, metody jejich hledání a definujeme základní pravidla, podle kterých s nimi pracujeme.

Kapitola je napsána na základě [2], [8] a [5]. Předpokládá se, že čtenář má znalosti matematiky, lineární algebry a ekonomie v rozsahu učiva předmětů KMA/M2N, KMA/LA2S a KMA/E2 Univerzity Palackého v Olomouci.

1.1. Důležité pojmy

Připomeňme si na začátek některé důležité pojmy, které používáme při práci s lokálními extrémy funkcí n proměnných:

Definice 1.1.1 Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}, M \neq \emptyset$. Zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ se nazývá **reálná funkce n reálných proměnných** a množina M se nazývá definiční obor této funkce a značí se D_f. [2]

Obraz bodu $x = [x_1, ..., x_n] \in D_f$ v zobrazení f, tj. reálné číslo y takové, že $f(x) = y$, nazýváme **funkční hodnota** funkce f v bodě x a značíme $f(x)$.

Poznámka 1.1.1 Pro $n = 2$ budeme místo $f(x_1, x_2)$ psát $f(x, y)$ a pro $n = 3$ budeme místo $f(x_1, x_2, x_3)$ používat značení $f(x, y, z)$.

Definice 1.1.2 Nechť $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $x^* = [x_1^*, \ldots, x_n^*] \in M$ je **stacionární bod** funkce f, jestliže v bodě x^* existují všechny parciální derivace funkce f a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0,\ i = 1, ..., n$$

[2]

Definice 1.1.3 Nechť $\mathcal{F} = [f_1, \ldots, f_m] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m < n$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je množina řešení systému rovnic

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

a $x^* = [x_1^*, \ldots, x_n^*] \in \Omega$. Dále předpokládejme, že funkce $f_i, i = 1, \ldots, m$ mají na Ω spojité parciální derivace a Jacobiho matice $\mathcal{F}'\ (x^*)$ zobrazení $\mathcal{F}$ v bodě x^* má hodnost m. Prostor $\mathcal{N}_{\Omega}(x^*) = Lin \left\{f_1'(x^*), \ldots, f_m'(x^*)\right\}, f_i'(x^*) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x^*), \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x^*)\right)$ nazýváme **normálový prostor k Ω v bodě** x^* a jeho ortogonální doplněk $\mathcal{T}_{\Omega}(x^*) = [\mathcal{N}\ (x^*)]^{\perp}$ se nazývá **tečný prostor k Ω v bodě** x^*. [2]

Definice 1.1.4 Nechť $A = (a_{ij}) \quad i, j = 1, ..., n$ je symetrická matice, $h \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že kvadratická forma $P(h) = \langle Ah, h\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$ určená maticí A je **pozitivně (negativně) semidefinitní**, jestliže

$$P(h) \geq 0 \quad (P(h) \leq 0) \tag{1.1}$$

pro každé $h \in \mathbb{R}^n$. Jestliže v (1.1) nastane rovnost pouze pro $h = 0$, řekneme, že forma P je **pozitivně (negativně) definitní**. Jestliže existují $h, \tilde{h} \in \mathbb{R}^n$ taková, že $P(h) < 0$ a $P(\tilde{h}) > 0$, řekneme, že kvadratická forma je **indefinitní**. [2]

1.2. Lokální extrém funkce

Zastavme se pro lepší návaznost na chvíli u lokálních extrémů funkce. Lokální extrém funkce vyšetřujeme lokálně - tedy v okolí nějakého bodu z definičního oboru funkce. Určíme jej dle [2] následovně:

Definice 1.2.1 Řekneme, že funkce $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $x^* \in M$ **lokálního maxima (minima)**, jestliže existuje okolí $U(x^*)$ bodu x^* takové, že pro každé $x \in U(x^*)$ platí

$$f(x) \leq f(x^*) \quad (f(x) \geq f(x^*)) \, .$$

Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích pro $x \neq x^*$ ostré, mluvíme o ostrých lokálních maximech a minimech.

Níže uvedená věta z [2] formuluje **nutnou podmínku existence lokálního extrému** funkce n proměnných pomocí stacionárního bodu (definice 1.1.2). V některých zdrojích se nazývá také Fermatova věta.

Věta 1.2.1 *Nechť funkce $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $x^* \in M$ lokální extrém. Pak všechny parciální derivace funkce f, které v tomto bodě existují, jsou rovny nule.*

Důkaz věty lze najít v [2, str. 65]. Lokální extrém funkce tak můžeme nalézt buďto ve stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje a ostatní jsou rovny nule. Stacionární bod zároveň nemusí být nutně bodem extrému, takovým bodem je například sedlový bod funkce. **Postačující podmínku existence lokálního extrému** funkce n proměnných vyjadřuje následující věta z [2]:

Věta 1.2.2 *Nechť $x^* \in \mathbb{R}^n$ je stacionární bod funkce f a předpokládejme, že f má v bodě x^* a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu. Položme $A = (a_{ij}) = f''(x^*)$, tj. $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*)$.*

- *Je-li kvadratická forma $P(h) = \langle Ah, h \rangle$ pozitivně (negativně) definitní, má funkce f v bodě x^** ***ostré lokální minimum (maximum)****.*

- *Je-li kvadratická forma $P(h)$ indefinitní, v bodě x^* extrém nenastává.*

- *Má-li funkce f v bodě x^** ***lokální minimum (maximum)****, je kvadratická forma $P(h)$ pozitivně (negativně) semidefinitní,*

kde f'' je matice rozměru n x n parciálních derivací 2. řádu funkce f.

Důkaz věty lze nalézt v [2, str. 71]. O definitnosti dané kvadratické formy rozhodujeme podle následující věty z [2]

Věta 1.2.3 *Kvadratická forma P určená symetrickou maticí $A = (a_{ij})$, $P(h) = \langle Ah, h\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j$ je* ***pozitivně definitní****, právě když jsou všechny hlavní minory matice A, tj. determinanty*

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = detA$$

kladné. Kvadratická forma P je ***negativně definitní****, právě když hlavní minory střídají znaménko, počínajíc záporným.*

1.3. Vázaný lokální extrém funkce

Vázané extrémy funkce více proměnných hledáme, narozdíl od extrémů volných, jen na podmnožině definičního oboru - v bodech definičního oboru, které splňují určité podmínky. Dle [8] je definujeme takto:

Definice 1.3.1 Nechť $\Omega = \{x \in D_f; g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\}$. Říkáme, že funkce $f(x)$ o n argumentech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ má v bodě $x^* = [x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*] \in \Omega$ **lokální extrém vázaný (pro $m < n$) podmínkami**

$$g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0, \tag{1.2}$$

jestliže pro všechny body x z vhodného okolí $U(x^*) \cap \Omega$, které vyhovují podmínkám (1.2), platí jeden ze vztahů:

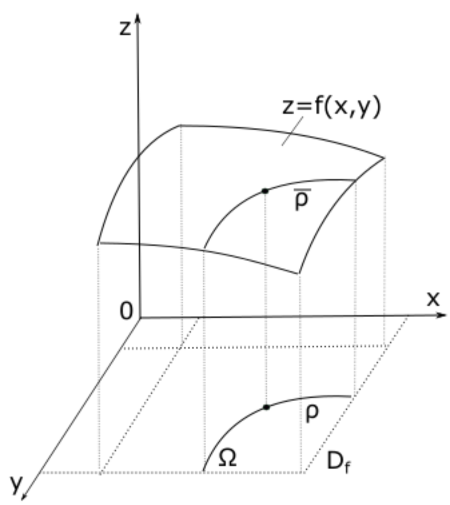
a) $f(x) \geq f(x^*)$ (jde o **vázané lokální minimum**)

b) $f(x) \leq f(x^*)$ (jde o **vázané lokální maximum**)

Poznámka 1.3.1 Vedle termínu vázaný lokální extrém užíváme také označení **lokální extrém vzhledem k množině** [5], zde Ω. Podmínky (1.2) nazýváme také **vazby** či **omezení**.

Geometrická interpretace vázaného lokálního extrému

Pro funkce $n > 2$ proměnných a více podmínek je grafické znázornění proble-



Obrázek 1.1: Geometrická interpretace vázaného lokálního extrému

matičtější, zjednodušme si proto situaci na funkci 2 proměnných $f(x, y)$ a jednu podmínku $g(x, y) = 0$ a podívejme se, jak hledání vázaného extrému funkce vypadá graficky. Na obrázku 1.1 vidíme, že množina $\Omega = \{(x, y) \in D_f ; g(x, y) = 0\}$ bude tvořena rovinnou křivkou $\rho \subset \mathbb{R}^2$. Omezíme-li graf funkce f na množinu Ω, získáme prostorovou křivku $\bar{\rho} \subset \mathbb{R}^3$. Bod z ρ s nejmenší (největší) funkční hodnotou na svém okolí je pak vázaným lokálním minimem (maximem) funkce f na Ω. Existuje-li v tomto bodě tečna ke křivce $\bar{\rho}$, je rovnoběžná s rovinou xy.

1.4. Metody hledání vázaných lokálních extrémů

Při vyšetřování vázaného extrému funkce používáme nejčastěji dvě metody - metodu přímého dosazení a Lagrangeovu metodu neurčitých koeficientů. Pojďme si je blíže představit:

Metoda přímého dosazení

Používáme ji v případě, kdy dokážeme z rovnic vazebných podmínek explicitně vyjádřit některé proměnné tak, abychom po dosazení těchto vyjádření do účelové funkce převedli úlohu na hledání volného lokálního extrému. Pro funkci dvou proměnných vypadá postup následovně:

Mějme funkci $f(x, y)$, kterou chceme maximalizovat (minimalizovat) za podmínky $g(x, y) = 0$ Předpokládejme, že je možné z podmínky vyjádřit některou z proměnných, tedy $x = \alpha(y)$, případně $y = \beta(x)$ [1]. Dosazením do účelové funkce pak získáme funkci $f(x, \beta(x)) = F(x)$, případně $f(\alpha(y), y) = F(y)$. Úlohu jsme tak převedli na úlohu hledání volného extrému funkce jedné proměnné. Tu vyřešíme. Označme bod, ve kterém nabývá funkce $F(x)$ svého extrému jako x^*. Pak bude původní funkce $f(x, y)$ nabývat extrému v bodě $f(x^*, \beta(x^*))$. Analogicky tomu bude u funkce $F(y)$. V případě více proměnných a více podmínek použijeme definice a věty o lokálních extrémech funkcí n proměnných z podkapitoly 1.2.

Lagrangeova metoda neurčitých koeficientů

Někdy je vyjadřování proměnných účelové funkce z vazebných podmínek složité, či dokonce nemožné. V takových případech volíme k hledání vázaných extrémů funkce Lagrangeovu metodu. Zformulujme **nutnou podmínku existence** vázaného lokálního extrému [2], tzv. **Lagrangeovu větu o neurčitých multiplikátorech**:

Věta 1.4.1 *Nechť funkce n proměnných $f, g_1, \ldots, g_n, 1 \leq m < n$, mají spojité parciální derivace 1. řádu v otevřené množině $N \subset \mathbb{R}^n$ a nechť v každém bodě* *množiny N má matice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

hodnost m. Buď Ω množina všech bodů $[x_1, \dots, x_n]$, které vyhovují rovnicím (1.2). Má-li funkce f v bodě $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*] \in \Omega$ ***lokální extrém vzhledem k*** *Ω, existují reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tak, že jsou splněny rovnosti*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x^*) = 0, \; j = 1, \dots, n. \tag{1.4}$$

Důkaz věty lze nalézt v [2, str. 110]. Funkce

$$L(x, \lambda) = L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \, g_k(x_1, \dots, x_n)$$

se nazývá **Lagrangeova funkce** a konstanty λ_k **Lagrangeovy multiplikátory** [2]. Lagrangeova funkce pak "obsáhne" vazebné podmínky tak, že místo vázaných extrémů funkce f na Ω vyšetřujeme volné extrémy funkce L.

Definice 1.4.1 Nechť množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je dána systémem rovnic (1.2). Řekneme, že bod $x^* \in \Omega$ je **stacionárním bodem funkce f na** Ω jestliže existují Lagrangeovy multiplikátory $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ takové, že platí (1.4).

O tom, zda ve stacionárním bodě pro funkci $L(x^*, \lambda)$ extrém nastává nebo ne, můžeme rozhodnout pomocí matice druhých derivací Lagrangeovy funkce $L''(x, \lambda)$ dle následující věty z [2]:

Věta 1.4.2 *Nechť funkce f a $g_k, k = 1, \dots, m$ mají spojité parciální derivace druhého řádu v bodě x^*, který je stacionárním bodem f na Ω a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou příslušné Lagrangeovy multiplikátory, tj. $L'(x^*, \lambda) = 0$. Dále nechť matice (1.3) má pro $x = x^*$ hodnost m. Jestliže pro každé $0 \neq h \in Lin \{g_1'(x^*), \dots, g_m'(x^*)\}^{\perp}$ platí*

$$\langle L''(x^*)h, h\rangle > 0 \, (\langle L''(x^*)h, h\rangle < 0) \, ,$$

má funkce f v bodě x^* ***ostré lokální minimum (maximum) vzhledem k*** Ω*.*
Jestliže existují $\tilde{h}, \bar{h} \in Lin\left\{g_1'(x^*), \ldots, g_m'(x^*)\right\}^\perp$ taková, že

$$\left\langle L''(x^*)\tilde{h}, \tilde{h}\right\rangle > 0, \quad \left\langle L''(x^*)\bar{h}, \bar{h}\right\rangle < 0,$$

v bodě x^* vzhledem k Ω lokální extrém nenastává.

Důkaz věty lze nalézt v [2, str. 111].

Postup při hledání vázaných lokálních extrémů Lagrangeovou metodou

Tvrzení předchozích vět lze shrnout do následujícího návodu [2]:

1) Vytvoříme Lagrangeovu funkci $L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{k=1}^m \lambda_k g_k(x)$.

2) Určíme stacionární body f vzhledem k Ω, tj. určíme $x_1, \ldots, x_n$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ jako řešení systému $n + m$ rovnic

$$\frac{\partial}{\partial x_i} L(x, \lambda) = 0,\ i = 1, \ldots, n, \quad g_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, m.$$

   Nechť $x^* \in \Omega$ je takto vypočítaný stacionární bod funkce f vzhledem k Ω a $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ jsou příslušející multiplikátory.

3) Ze systému m lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^*)h_1 + \cdots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x^*)h_n &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x^*)h_1 + \cdots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x^*)h_n &= 0 \end{aligned}$$

   pro proměnné $h_1, \ldots, h_n$ vypočteme m proměnných v závislosti na $n - m$ zbývajících. Takto vypočítané vektory $h \in \mathbb{R}^n$ jsou prvky tečného prostoru k Ω v bodě x^*, $\mathcal{T}_\Omega(x^*) = Lin\left\{g_1'(x^*), \ldots, g_m'(x^*)\right\}^\perp$ - tento výpočet můžeme provést, protože předpokládáme, že matice (1.3) má hodnost m. Předpokládejme, že jsme vypočítali $h_1, \ldots, h_m$ v závislosti na $h_{m+1}, \ldots, h_n$.

4) Určíme druhý diferenciál pro Lagrangeovu funkci ve stacionárním bodě x^* vzhledem k proměnným x

$$d^2L(x^*, \lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(x^*)h_i h_j = \langle L''(x^*)h, h \rangle,$$

za $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ dosadíme příslušné multiplikátory a za $h_1, \ldots, h_m$ vyjádření z předchozího bodu.

5) Na závěr vyšetříme definitnost vzniklé kvadratické formy $n-m$ proměnných. Je-li pozitivně (negativně) definitní, nastává v bodě x^* ostré lokální minimum (maximum). Je-li indefinitní, vázaný extrém v bodě x^* nenastane.

Je důležité si uvědomit, že Lagrangeova metoda nezaručuje nalezení všech vázaných lokálních extrémů funkce f. Může se stát, že funkce $L(x, \lambda)$ nebude mít v bodě extrém a funkce f jej tam mít bude. O existenci takového extrému musíme rozhodnout jinak, například z definice 1.3.1 vázaného lokálního extrému.
Některé zdroje uvádí i alternativní metody hledání vázaných extrémů, [2] například hovoří o metodě nerovnosti mezi průměry a o Cauchyově nerovnosti. V této práci však budeme pracovat zejména s Lagrangeovou metodou.

Kapitola 2

Aplikace vázaných lokálních extrémů funkce více proměnných v ekonomii

V této části práce si ukážeme, jak lze znalosti vázaných extrémů využít v praxi. Zaměříme se na některé mikroekonomické optimalizační úlohy, prozkoumáme jejich matematickou interpretaci a vysvětlíme si, jak je díky metodám hledání vázaných extrémů efektivně řešit. Současně si přiblížíme ekonomický význam Lagrangeova multiplikátoru.
Teoretická část kapitoly čerpá z [4], příklady jsou inspirovány úlohami v [3] a [7].

Optimalizace v mikroekonomii

Mikroekonomie je obor ekonomické teorie, který zkoumá dílčí tržní subjekty (jednotlivce, firmy a stát) a jejich rozhodovací problémy. Vedle rovnováhy na jednotlivých trzích statků a služeb pak pro ně hledá optimální řešení. Rozhodovací situace mohou vypadat následovně:

- *V jakém poměru má spotřebitel z dostupných peněz nakoupit potřebné statky, je-li cílem maximální možný užitek?*
- *Jak rozdělit rozpočet na nákup výrobních faktorů, chce-li firma maximalizovat výslednou produkci?*

- *V jakém množství výrobní faktory nakoupit, abychom dosáhli výrobního cíle při minimálních nákladech?*
- *Jak investovat do možných druhů reklamy tak, abychom měli co nejvyšší odezvu?*
- *Jak rozdělit investici mezi více akcií, aby byly dividendy maximální?*

Matematicky řečeno hledáme extrémní hodnotu účelové funkce za platnosti nějakého omezení. Ve speciálním případě mají tato omezení tvar rovnosti. Takovéto úlohy umíme vyřešit hledáním vázaných extrémů účelové funkce. V tomto textu se zaměříme na případy

1. maximalizace užitku
2. maximalizace produkce
3. minimalizace nákladů

Vymezující předpoklady

Musíme si uvědomit, že situace na trhu není statická a na rozhodování tržních subjektů mají za reálných okolností vliv i další faktory. Abychom lépe porozuměli vztahům mezi vybranými proměnnými, přijmeme zjednodušující předpoklady obvyklé pro ekonomické modely:

- *ceteris paribus* (za jinak neměnných okolností)
  Faktory, které při rozhodování nezkoumáme, považujeme v tu chvíli za neměnné.
- *předpoklad optimalizace*
  Všechny tržní subjekty se chovají racionálně, přičemž racionalitu můžeme chápat dvěma způsoby - 1. činí rozhodnutí vedoucí k vytčenému cíli
  2. jednají na základě předchozích úvah a analýz, nikoli spontánně.

2.1. Maximalizace užitku

Užitek, indiferenční křivky a linie rozpočtu

První způsob aplikace, na který se zaměříme, bude maximalizace užitku spotřebitele. V úvodu kapitoly jsme přijali předpoklad, že ekonomické subjekty jednají na trhu racionálně. Jak uvádí [4], racionálně jednající spotřebitel usiluje o maximalizaci svého užitku. Zároveň je omezen výší svého důchodu a cenami statků. Užitek definujeme jako subjektivní pocit plynoucí ze spotřeby statků a služeb. Vychází z preferencí spotřebitele při výběru mezi kombinacemi jednotlivých statků (tzv. spotřebními koši).

Poznámka 2.1.1 Protože je volba spotřebitele racionální, budeme u spotřebních košů předpokládat úplnost srovnání (každé 2 spotřební koše lze z hlediska preferencí srovnat), tranzitivitu (preferuje-li spotřebitel koš A před košem B a koš B před košem C, preferuje také koš A před košem C) a nenasycenost (větší množství statku preferuje před menším množstvím statku).
Zároveň budeme uvažovat jen statky, které jsou žádoucí, mají rostoucí směr preferencí a nejsou vzájemně dokonalými substituty ani komplementy.

Pro účely výpočtů si definujeme užitek takto:
Užitek je funkcí množství spotřebovávaných statků [4]

$$U = u(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

kde $X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0$ jsou množství jednotlivých statků. Tedy platí $U \geq 0$ $\forall X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0$. V zájmu přehlednosti grafického zobrazení a názornosti analýzy budeme dále užitek uvažovat jako funkci množství dvou statků

$$U = u(X, Y), \tag{2.1}$$

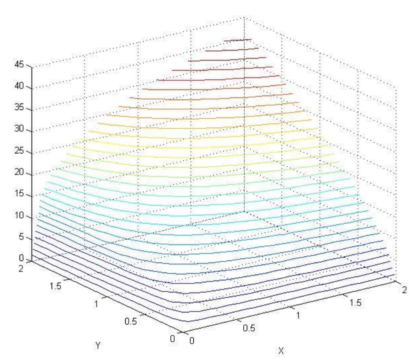
kde $X, Y \geq 0$.

Poznámka 2.1.2 Funkce užitku může nabývat i záporných hodnot, v rámci této práce ale budeme uvažovat jen její nezápornou část, jelikož si ji zjednodušeně definujeme jako funkci nezáporných množství. Zároveň reálně nezávisí pouze na množstvích, zde jde opět o zjednodušení.

Množinu kombinací statků X a Y se stejným užitkem nazýváme **indiferenční křivka**. Matematicky jsou indiferenční křivky vrstevnicemi funkce užitku. Pojďme si je představit:

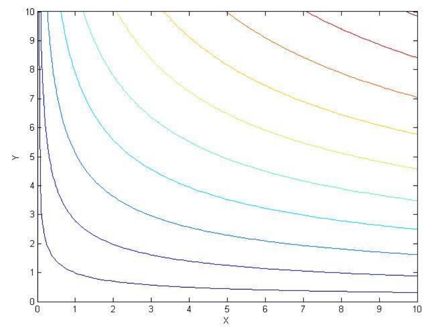
Vezmeme si příklad funkce užitku pro dvě proměnné v Cobb-Douglasově tvaru $u(X,Y) = X^{\frac{1}{3}}Y^{\frac{2}{3}}$ a pomocí softwaru (zde Matlab) vykreslíme její graf s vrstevnicemi.

Poznámka 2.1.3 Cobb-Douglasův tvar funkce užitku je často užívanou obměnou Cobb-Douglasovy produkční funkce, kterou si podrobněji představíme v podkapitole 2.2. V úloze maximalizace užitku jej používáme, protože ideálně modeluje chování proměnných a tvoří monotónní, konvexní křivky.

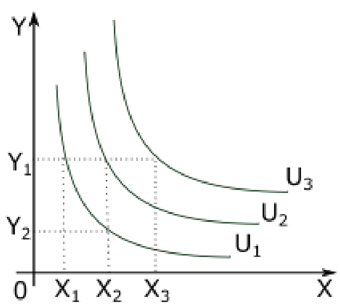


Obrázek 2.1: I. kvadrant grafu funkce $u(X,Y) = X^{\frac{1}{3}}Y^{\frac{2}{3}}$

Z povahy užitku (2.1) coby funkce spotřebovávaných množství nás přitom bude zajímat jen I. kvadrant grafu této funkce, kde proměnné X i Y nabývají nezáporných hodnot - obrázek 2.1. Promítneme-li vrstevnice této funkce na základnu, získáme obrázek 2.2. Takto zobrazené vrstevnice funkce užitku pak nazýváme indiferenční křivky, vzniklý soubor indiferenčních křivek se nazývá **indiferenční mapa**.
Ve zobecněné podobě, která se používá v ekonomii, ji zachycuje obrázek 2.3, kde



Obrázek 2.2: vrstevnice I. kvadrantu grafu funkce $u(X,Y) = X^{\frac{1}{3}}Y^{\frac{2}{3}}$



Obrázek 2.3: indiferenční mapa

$U_i, i = \{1,2,3\}$ představuje vrstevnici funkce $u(X,Y)$ o úrovni $U_i \in \mathbb{R}$. Zde jde o množinu všech bodů $(X,Y), X > 0, Y > 0$, pro které $u(X,Y) = U_i, i = \{1,2,3\}$.

Poznámka 2.1.4 Indiferenčních křivek lze pro každého spotřebitele vykreslit nekonečně mnoho, pro zjednodušení se používá způsob nákresu použitý v 2.3, tedy jen několik vybraných křivek.

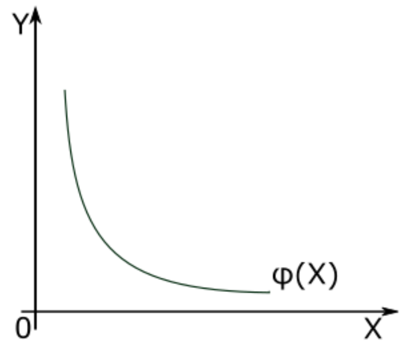
Podívejme se na jednu z těchto indiferenčních křivek jako na funkci jedné proměnné

$$Y = \varphi(X), \tag{2.2}$$

její graf označme $G(\varphi)$ a pozorujme vlastnosti na obrázcích 2.1, 2.3 a 2.4.
Pozorujeme následující:

- *každý spotřební koš leží na indiferenční křivce*

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \; \exists\, \varphi : (X,Y) \in G(\varphi) \tag{2.3}$$



Obrázek 2.4: indiferenční křivka

Předpokládáme-li, že spotřebitel je schopen srovnat spotřební koše podle preferencí (poznámka 2.1.1), pak je každé kombinaci statků X a Y schopen přiřadit úroveň užitku. Tedy každá možná spotřební situace leží na některé z jeho indiferenčních křivek. Ukážeme si to na příkladu.
Vezměme funkci užitku ve tvaru

$$u(X,Y) = X^{\frac{1}{3}}Y^{\frac{2}{3}}. \tag{2.4}$$

Zvolme si bod o libovolných nezáporných souřadnicích, např. $[0,4;0,6]$ a hledejme funkci φ, na jejímž grafu tento bod leží. Abychom našli její tvar, osamostatníme proměnnou Y v předpisu funkce užitku (2.4)

$$Y^{\frac{2}{3}} = \frac{u(X,Y)}{X^{\frac{1}{3}}}$$

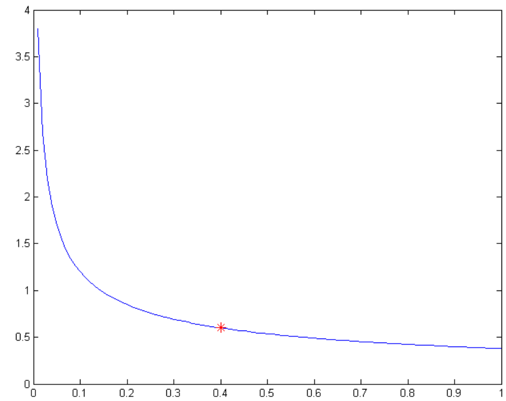
$$Y^{\frac{2}{3}} = \frac{0,4^{\frac{1}{3}}0,6^{\frac{2}{3}}}{X^{\frac{1}{3}}}$$

$$Y = \left(\frac{0,4^{\frac{1}{3}}0,6^{\frac{2}{3}}}{X^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

a po úpravách dostaneme funkci následujícího tvaru:

$$\varphi : Y = \frac{12}{\sqrt{10^3}\cdot\sqrt{X}}. \tag{2.5}$$

Vykreslíme-li její graf (obrázek 2.5), vidíme, že bodem $[0,4;0,6]$ křivka opravdu prochází.



Obrázek 2.5: graf funkce $Y = \frac{12}{\sqrt{10^3}\sqrt{X}}$

- *úroveň užitku se v rámci jedné indiferenční křivky nemění*

  Z povahy indiferenční křivky jakožto funkce užitku snadno odvodíme, že $\forall (X, Y) \in G(\varphi) : u(X, Y) = U \in \mathbb{R}$

  tj. že fce $u(X, Y)$ je na množině $G(\varphi)$ konstantní. Pro křivku o úrovni U_1 na obrázku 2.3 tak bude platit

  $u(X_1, Y_1) = u(X_2, Y_2) = U_1$.

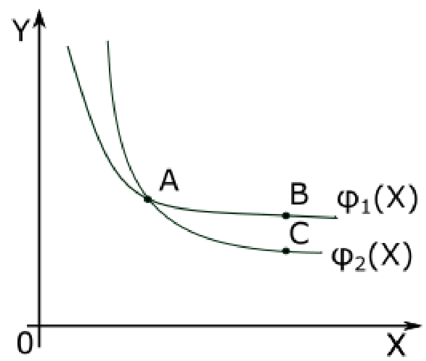
- *čím dále je indiferenční křivka od počátku, tím vyšší užitek vyjadřuje*

  Pozastavíme-li proměnnou Y na pevné hodnotě Y_1, na obrázku 2.3 platí $u(X_1, Y_1) < u(X_2, Y_1) < u(X_3, Y_1)$. Víme, že vyšší množství statku spotřebitel preferuje před nižším, přiřadí mu tedy i vyšší užitek. Vzhledem ke směru růstu proměnných pak logicky $U_1 < U_2 < U_3$

- *indiferenční křivky se neprotínají*

  $\forall \varphi_1$ a $\forall \varphi_2$, $\varphi_1 \neq \varphi_2 : G(\varphi_1) \cap G(\varphi_2) = \emptyset$

  Tato vlastnost vychází z tranzitivity mezi spotřebními koši, z předpokladu nenasycenosti (poznámka 2.1.1) a z neměnnosti úrovně užitku v rámci jedné indiferenční křivky. Víme, že spotřebitel je mezi body v rámci jedné indiferenční křivky indiferentní, všechny kombinace statků ležící na jedné indiferenční křivce mu přináší stejný užitek. Předpokládejme na chvíli, že se indiferenční křivky mohou protnout - obrázek 2.6. Pak by platilo $u(A) =$



Obrázek 2.6: protnuté indiferenční křivky

$u(B) \wedge u(A) = u(C) \to u(B) = u(C)$. Dle předpokladu nenasycenosti ale $u(B) > u(C)$, protože vyšší množství spotřebovávaného zboží Y přináší spotřebiteli vyšší užitek. Zároveň nelze jedné spotřební situaci přiřadit dvě úrovně užitku, což by v případě průsečíku nastalo. Předpoklad protnutí indiferenčních křivek tak byl chybný. Tvrzení (2.3) tedy můžeme upřesnit takto: $\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \; \exists! \, \varphi : (X,Y) \in G(\varphi)$.

- *indiferenční křivky jsou klesající*

  $\forall X_1, X_2 \in D_\varphi,\ X_1 < X_2 : \varphi(X_1) > \varphi(X_2)$

  neboli

  $\forall X \in D_\varphi : (\varphi(X))' < 0$.

  Toto je způsobeno předpokladem nenasycenosti, který jsme přijali v poznámce 2.1.1. Jak vidíme na obrázku 2.3, spotřebitel nemá při spotřebě statků X a Y žádnou horní hranici chtěného množství. Při zachování stejné úrovně užitku v rámci jedné indiferenční křivky tak logicky vyšší množství statku Y vyvážíme snížením množství statku X.

- *indiferenční křivky jsou konvexní*

  $\forall X_1, X_2, X_3 \in D_\varphi$ kde $X_1 < X_2 < X_3$, leží bod $(X_2, \varphi(X_2))$ pod spojnicí bodů $(X_1, \varphi(X_1))$ a $(X_3, \varphi(X_3))$ nebo na ní,

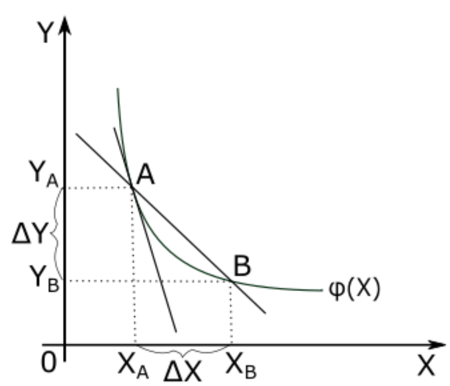
  neboli $\forall X \in D_\varphi : (\varphi(X))'' \geq 0$.

  Zde se projevuje zákon klesajícího mezního užitku - každá další spotřebovaná jednotka statku přináší nižší užitek, než ta předešlá.

Dalším nástrojem analýzy vlastností indiferenční křivky je **mezní míra substituce ve spotřebě**. Vyjadřuje poměr, ve kterém je spotřebitel ochoten obětovat statek Y pro získání dodatečné jednotky statku X při neměnné úrovni užitku, tedy v rámci jedné indiferenční křivky. V průběhu křivky se mění. K jejímu vyjádření se dostaneme následovně:

Na obrázku 2.7 vidíme jednu indiferenční křivku popsanou funkcí $Y = \varphi(X)$ a na ní dva body $A = (X_A, Y_A)$ a $B = (X_B, Y_B)$. Vzhledem k tomu, že oba body leží na stejné indiferenční křivce, má z nich spotřebitel stejný užitek, tj. $u(X_A, Y_A) = u(X_B, Y_B)$. Jinými slovy: Snížená spotřeba statku Y z hodnoty Y_A na hodnotu Y_B je podle našeho spotřebitele vykompenzována zvýšením spotřeby statku X z hodnoty X_A na hodnotu X_B. Dáme-li do poměru absolutní hodnoty rozdílů výše zmíněných hodnot, tj. $\frac{|Y_A - Y_B|}{|X_A - X_B|} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$, zjistíme kolik jednotek statku Y je spotřebitel ochoten obětovat za zvýšenou spotřebu statku X o jednu jednotku. Přičemž $\Delta Y = |Y_A - Y_B|$ a $\Delta X = |X_A - X_B|$. Tento poměr má navíc další interpretaci - jedná se o absolutní hodnotu směrnice přímky procházející body A a B (sečny).

Upřesněním tohoto poměru pro každý bod na indiferenční křivce je absolutní



Obrázek 2.7: sečna a tečna indiferenční křivky

hodnota směrnice tečny v tomto konkrétním bodě. Tu díky sečně snadno odvodíme - přibližováním po indiferenční křivce z bodu B do bodu A se sečna přibližuje tečně. Můžeme tedy říci, že platí

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = |\varphi'(X_A)|$$

Absolutní hodnotu směrnice tečny indiferenční křivky v bodě a zároveň mezní míru substituce ve spotřebě pak vyjádříme následovně:

$$MRS_C(X_A) = |\varphi'(X_A)| \tag{2.6}$$

Absolutní hodnota se zde používá proto, že pro nejčastější tvar indiferenční křivky je směrnice záporná a kromě informace, že křivka bude klesající, nemá znaménko výrazu pro analýzu vztahu proměnných další význam. Zároveň můžeme pozorovat, že s posunem po indiferenční křivce ve směru růstu proměnné X bude MRS_C klesat, což se projevuje v konvexnosti křivky. Je to dáno tím, že čím méně statku Y spotřebitel má, tím méně je dále ochoten jej směňovat.

Parciální derivace funkce užitku $u(X, Y)$ pak vyjadřují vliv změny hodnoty proměnné X či Y, při neměnnosti té druhé, na hodnotu celkové funkce. V ekonomii tento ukazatel nazýváme **mezní užitek** statku X či Y a značíme jej MU_X resp. MU_Y a platí

$$\frac{\partial u}{\partial X} = MU_X \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = MU_Y. \tag{2.8}$$

Vyjadřuje, o kolik vzroste celkový užitek, pokud zvýšíme množství spotřebovávaného statku o jednotku a množství druhého statku se přitom nemění. Mezní míru substituce ve spotřebě pak dokážeme vyjádřit jako podíl mezních užitků obou statků. Využijeme přitom derivace implicitně zadané funkce (2.2):

$$\varphi' = -\frac{\frac{\partial u}{\partial X}}{\frac{\partial u}{\partial Y}}.$$

Dle vztahů (2.7) a (2.8) tedy platí

$$\varphi' = -\frac{MU_X}{MU_Y}.$$

Z (2.6) pak plyne

$$MRS_C = \left| -\frac{MU_X}{MU_Y} \right| = \frac{MU_X}{MU_Y}.$$

Tento vztah je nápomocný při ekonomických výpočtech, jak si ukážeme v Příkladě 2.1.1.

Jak již víme, spotřebitel je ve snaze o maximalizaci užitku omezen svým důchodem a cenami statků. Přijměme modelový předpoklad, že ceny statků nezávisí na nakupovaném množství a spotřebitel celý svůj důchod použije na nákup statků X a Y. Pak lze jeho důchod zapsat následující rovnicí dle [4]:

$$P_X X + P_Y Y = I \tag{2.9}$$

kde P_X je cena statku X, P_Y cena statku Y a I vyjadřuje důchod. Jedná se o lineární rovnici, které budou vyhovovat body ležící na přímce. Tato přímka bude rovněž grafem lineární funkce.

Vyjádřeme si zároveň funkci jedné proměnné

$$Y = \psi(X) = \frac{I - P_X X}{P_Y}$$

Zapíšeme-li ji ve směrnicovém tvaru, získáme

$$Y = \frac{I}{P_Y} - \frac{P_X}{P_Y} X$$

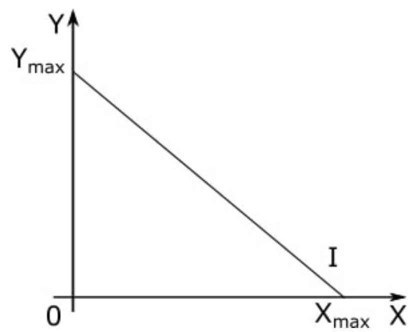
a směrnice je pak rovna

$$-\frac{P_X}{P_Y}.$$

Grafickým řešením rovnice (2.9) je v ekonomii tzv. **linie rozpočtu**, znázorněná na obrázku 2.8. X_{max} a Y_{max} představují situace, kdy je celý důchod spotřebitele vynakládán na nákup jen jednoho daného statku.

Absolutní hodnota směrnice linie rozpočtu se nazývá **mezní míra substituce ve směně** a lze ji zapsat těmito způsoby:

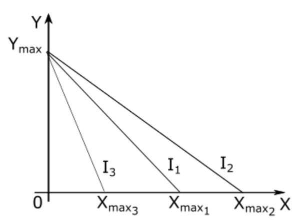
$$MRS_E = \left| -\frac{P_X}{P_Y} \right| = |\psi'(X)| \;\; \forall X \in < 0; X_{max} > \tag{2.10}$$



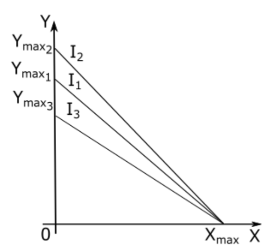
Obrázek 2.8: linie rozpočtu

kdy I je konstantní. Vyjadřuje poměr, v němž jsou statky směnitelné na trhu, pokud spotřebitel využil celý svůj důchod.

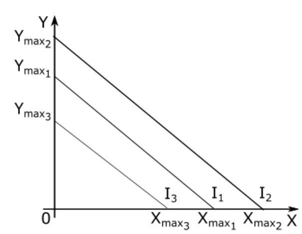
Na obrázcích 2.9, 2.10 a 2.11 můžeme pozorovat, jak se linie rozpočtu mění v závislosti na svých parametrech. Obrázek 2.9 - Vycházejme z linie rozpočtu I_1.



Obrázek 2.9: změna P_X



Obrázek 2.10: změna P_Y



Obrázek 2.11: změna I

Klesne-li cena statku X, P_X, spotřebitel si může koupit více statku X, průsečík s osou X se posune doprava, MRS_E klesne a linie rozpočtu se změní v I_2. V opačném směru při růstu P_X MRS_E vzroste a linie rozpočtu se změní v I_3.

Obrázek 2.10 - změna ceny statku Y, P_Y, se projeví analogicky na ose Y, avšak reakce MRS_E bude opačná. Při poklesu ceny statku Y MRS_E vzroste, při jejím nárůstu klesne.

Obrázek 2.11 - změna výše důchodu má efekt na maximální množství obou statků. I poroste směrem vpravo, klesat bude vlevo. MRS_E i ceny statků zůstávají neměnné.

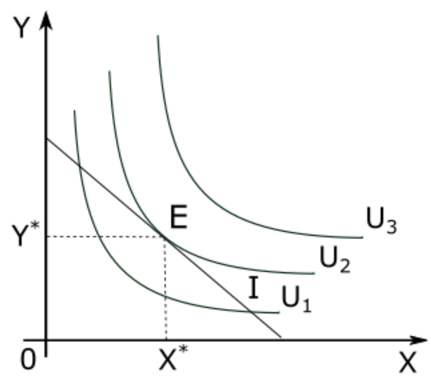
Optimum spotřebitele

Známe-li nyní všechny podstatné souvislosti, snadno odvodíme, že optimální kombinace statků se pro spotřebitele nachází v bodě dotyku indiferenční křivky a linie rozpočtu, kde jsou si rovny obě směrnice. Jinými slovy tam, kde

$$MRS_E(X^*) = MRS_C(X^*) \tag{2.11}$$

$$\frac{P_X}{P_Y}(X^*) = \frac{MU_X}{MU_Y}(X^*) \tag{2.12}$$

kde X^* je x-ová souřadnice bodu dotyku, který si označíme jako $E = [X^*, Y^*]$. Na obrázku 2.1 pak vidíme, že v bodě optimální kombinace statků X a Y je linie rozpočtu tečnou některé z indiferenčních křivek. Spočítejme si nyní modelový



Obrázek 2.12: optimum spotřebitele - vnitřní řešení

příklad:

Příklad 2.1.1

Spotřebitel má k dispozici 1620 Kč, aby si koupil dva různé statky. Jeden z nich stojí 60 Kč, druhý 90 Kč. Předpokládejme, že funkce užitku daného spotřebitele je ve tvaru

$$u(x, y) = 30x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}, \tag{2.13}$$

kde x a y označují jednotlivé statky. Jaké množství obou statků musí spotřebitel nakoupit, aby maximalizoval svůj užitek?

Řešení

Nejprve k vyřešení příkladu použijeme ekonomickou úvahu. Známe výši důchodu spotřebitele $I = 1620K\check{c}$ a ceny nakupovaných statků - statek x, s cenou $P_x = 60K\check{c}$ a statek y s cenou $P_y = 90K\check{c}$. Funkci užitku $u(x, y)$ známe, rovnici důchodu zapíšeme na základě (2.9) ve tvaru

$$60x + 90y = 1620. \tag{2.14}$$

Z 2.12 víme, že maximalizace užitku při daném důchodu spotřebitel dosáhne v bodě, kde

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{MU_x}{MU_y}. \tag{2.15}$$

Mezní užitky spočítáme jako parciální derivace funkce užitku (2.13), tedy

$$\begin{aligned} MU_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 20x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \\ MU_y &= \frac{\partial u}{\partial y} = 10x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Tyto mezní užitky a známé ceny statků dosadíme do rovnice (2.15) a vyjádříme z ní některou proměnnou, zde x.

$$\begin{aligned} \frac{60}{90} &= \frac{20x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{10x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}} \\ \frac{2}{3} &= 2\frac{y}{x} \\ \frac{1}{3} &= \frac{y}{x} \\ x &= 3y \end{aligned}$$

V tomto tvaru dosadíme do rovnice důchodu (2.14), kterou jsme si zapsali na začátku příkladu a zjistíme výslednou hodnotu proměnné y.

$$\begin{aligned} 60 \cdot 3y + 90y &= 1620 \\ 270y &= 1620 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Na základě již známého vztahu $x = 3y$ dopočítáme, že $x = 18$.

Závěr

Spotřebitel dosáhne maximálního užitku při nákupu 18 kusů statku x a 6 kusů statku y.

2.1.1. Využití metod hledání vázaných lokálních extrémů

Podívejme se nyní na Příklad 2.1.1 matematicky a obecněji. Snažíme se maximalizovat užitkovou funkci $u(x, y)$. K dispozici přitom máme omezený důchod I a známe ceny statků x a y, P_x a P_y. Podle (2.9) tedy dokážeme vyjádřit rovnici důchodu

$$I = xP_x + yP_y. \tag{2.16}$$

Matematicky jde tedy o úlohu hledání vázaného extrému účelové funkce (funkce užitku) za platnosti nějaké podmínky (rovnice důchodu). Zvolíme Lagrangeovu metodu řešení a ukážeme si, že se výsledná interpretace shoduje s ekonomickým způsobem výpočtu. Zároveň vysvětlíme, jaký význam má v úloze Lagrangeův multiplikátor.

Použijeme postup z podkapitoly 1.4. Utvoříme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = u(x, y) - \lambda(xP_x + yP_y - I) \tag{2.17}$$

a vyjádříme její parciální derivace podle proměnných x a y. Přidáme vazebnou podmínku (2.16).

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda P_x = 0 \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda P_y = 0 \tag{2.19}$$

$$xP_x + yP_y = I$$

Z rovnic (2.18) a (2.19) vyjádříme proměnnou λ

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda P_x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda P_y = 0$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P_x} = \lambda \tag{2.20}$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{P_y} = \lambda, \tag{2.21}$$

kde $P_x, P_y \neq 0$ Z rovnic (2.20) a (2.21) plyne

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P_x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{P_y}$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{P_x}{P_y},$$

což je ekvivalentní vyjádření (2.15). Touto metodou tak dojdeme ke stejnému výsledku - optimum je v bodě dotyku indiferenční křivky a linie rozpočtu.

Proměnná λ má v ekonomii důležitý význam. Vazebná podmínka v podobě rovnice důchodu (2.16) je funkcí dvou proměnných, označme ji $g(x, y)$. Rovnice (2.20) a (2.21) pak můžeme přepsat jako

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial x}} = \lambda \tag{2.22}$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \lambda. \tag{2.23}$$

Čitatel v obou zlomcích vyjadřuje **mezní přínos** dodatečné jednotky dílčí proměnné pro funkci $u(x, y)$, kterou se snažíme maximalizovat. Jmenovatel udává **mezní náklad** zvýšení hodnoty dílčí proměnné o jednotku, abychom dodrželi (2.16), musíme totiž zvýšení hodnoty jedné proměnné vykompenzovat snížením hodnot ostatních. Poměr mezního přínosu proměnné a mezních nákladů s ním spojených pak nazýváme **Benefit-cost ratio** a platí, že při optimální volbě proměnných je pro všechny proměnné stejný. Využití tohoto koeficientu si později ukážeme v příkladu 2.2.2.

Příklad 2.1.2

Ponechme si zadání příkladu 2.1.1 a spočítejme jej pomocí hledání vázaných lokálních extrémů.

Řešení

Z informací v zadání poskládáme klasickou matematickou úlohu hledání vázaného lokálního extrému funkce. Zadanou užitkovou funkci $u(x, y) = 30x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ budeme považovat za výchozí. Spotřebitel chce svůj užitek maximalizovat, budeme tedy hledat vázané maximum této funkce.

Zbývá zahrnout už jen informaci o ceně obou výrobků a výši použitelného důchodu. Tyto vztahy nám vytváří vazebnou podmínku

$$60x + 90y = 1620. \tag{2.24}$$

Jak můžeme vidět z tvaru obou funkcí, v této úloze bude vhodnější použít metodu Lagrangeových multiplikátorů. Proč v této situaci nezvolit metodu přímého dosazení, si ukážeme na Příkladu 2.1.3. Zapíšeme si tedy, jak bude vypadat Lagrangeova funkce

$$L(x, y, \lambda) = 30x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} - \lambda(60x + 90y - 1620), \tag{2.25}$$

sestrojíme její parciální derivace podle proměnných x a y a položíme je rovny nule. Přidáme vazebnou podmínku a pro lepší přehlednost si rovnice očíslujeme.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 20x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 60\lambda = 0 \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 10x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} - 90\lambda = 0 \tag{2.27}$$

$$60x + 90y = 1620 \tag{2.28}$$

Způsob řešení vzniklé soustavy rovnic je třeba uzpůsobit konkrétnímu případu. V této situaci se jeví jako vhodná úprava vyjádřit proměnnou λ z rovnice (2.26).

$$\begin{aligned}20x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 60\lambda &= 0\\ \lambda &= \frac{20}{60}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\\ \lambda &= \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

Získanou λ dosadíme do rovnice (2.27)

$$10x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} - 90\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right) = 0,$$

a rovnici pronásobíme výrazem $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$. Tím získáme vztah mezi x a y.

$$\begin{aligned}10x - 30y &= 0\\ x &= \frac{30}{10}y\\ x &= 3y\end{aligned}$$

Vyjádřenou proměnnou x dosadíme do rovnice (2.28) a získáme y.

$$\begin{aligned}60(3y) + 90y &= 1620\\ 270y &= 1620\\ y &= 6\end{aligned}$$

Ze vztahu mezi x a y pak vyčíslíme

$$\begin{aligned}x &= 3y\\ x &= 18\end{aligned}$$

Závěr

Maximálního užitku spotřebitel dosáhne, nakoupí-li 18 kusů statku x a 6 kusů statku y.

Ověření správnosti extrému

Pro úplnost si nyní ověříme správnost typu nalezeného extrému. Využijeme k tomu 2. diferenciál Lagrangeovy funkce (2.25), pro přehlednost zvolíme značení s dx a dy. V tomto případě bude ve tvaru

$$d^2L(x,y,\lambda) = -\frac{20}{3}x^{\frac{-4}{3}}y^{\frac{1}{3}}(dx)^2 + 2\frac{20}{3}x^{\frac{-1}{3}}y^{\frac{-2}{3}}dxdy - \frac{20}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{-5}{3}}(dy)^2. \tag{2.29}$$

Diferencováním vazebné podmínky 2.24 získáme

$$dg(x,y) = 60dx + 90dy = 0. \tag{2.30}$$

Z 2.30 pak plyne

$$\begin{aligned} 60dx + 90dy &= 0 \\ 2dx + 3dy &= 0 \\ dy &= -\frac{2}{3}dx. \end{aligned}$$

Vzniklý vztah dosadíme do rovnice 2.29 2. diferenciálu Lagrangeovy funkce. $d^2L(x,y,\lambda) = -\frac{20}{3}x^{\frac{-4}{3}}y^{\frac{1}{3}}(dx)^2 + 2\frac{20}{3}x^{\frac{-1}{3}}y^{\frac{-2}{3}}dx\left(-\frac{2}{3}dx\right) - \frac{20}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{-5}{3}}\left(-\frac{2}{3}dx\right)^2$
Nakonec dosadíme bod podezřelý z extrému, má souřadnice $[18,6]$. Z předchozích výpočtů zároveň víme, že příslušná $\lambda = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$, po úpravě dosadíme.
$d^2L\left(18,6,\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}\right) = -\frac{20}{3}\cdot 18^{\frac{-4}{3}}\cdot 6^{\frac{1}{3}}(dx)^2 + 2\frac{20}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 18^{\frac{-1}{3}}\cdot 6^{\frac{-2}{3}}(dx)^2 - \frac{20}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot 18^{\frac{2}{3}}\cdot 6^{\frac{-5}{3}}(dx)^2$
Úpravami dostaneme

$$d^2L\left(18,6,\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}\right) = -\frac{10}{3\sqrt[3]{3}}(dx)^2.$$

Vidíme, že vzniklá forma má v bodě $[18;6]$ záporné znaménko, je tedy negativně definitní a nabývá v tomto bodě ostrého lokálního maxima vzhledem k podmínce 2.24.

Tímto způsobem můžeme ověřit typ nalezeného extrému pro všechny úlohy v této práci. Z tvaru Cobb-Douglasovy funkce je však zřejmé, že na I. kvadrantu bude na množině bodů určené touto vazebnou podmínkou konkávní, takže stacionární bod ležící uvnitř této množiny bodů bude vždy maximem. V úlohách tohoto konkrétního typu tak není úplně nutné hledaný vázaný extrém ověřovat.

Příklad 2.1.3

V předchozím příkladě jsme zvolili k hledání vázaného maxima metodu Lagrangeových multiplikátorů. Toto rozhodnutí pramení ze zkušenosti, kdy se metoda přímého dosazení v případě složitějších, delších předpisů funkcí a jejich vazebných podmínek ukáže být zdlouhavou a náročnější než metoda Lagrangeova. Pojďme si nyní toto své rozhodnutí ověřit. Ponechme si zadání z Příkladu 2.1.1 a pro jeho výpočet zvolme metodu přímého dosazení.

Řešení

Mějme tedy funkci

$$u(x,y) = 30x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

a její vazebnou podmínku

$$g(x,y) = 60x + 90y = 1620. \tag{2.31}$$

Z rovnice (2.31) si vyjádříme jednu z proměnných, zvolme například x.

$$x = \frac{1620 - 90y}{60} = \frac{162 - 9y}{6} \tag{2.32}$$

Dosadíme-li (2.32) do předpisu funkce $u(x,y)$, vznikne nová, jednodušší funkce proměnné y.

$$F(y) = 30 \cdot \left(\frac{162 - 9y}{6}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = 30\sqrt[3]{\frac{(162 - 9y)^2 \cdot y}{6^2}}$$

Dále postupujeme analogicky jako při hledání vázaného extrému funkce jedné proměnné. Funkci $F(y)$ zderivujeme a vzniklou derivaci položíme rovnu nule.

$$F'(y) = 30 \cdot \left[\frac{2}{3}\left(\frac{162 - 9y}{6}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{9}{6}\right) \cdot y^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{162 - 9y}{6}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3}y^{-\frac{1}{3}}\right] = 0$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$2\sqrt[3]{\frac{6}{162-9y}}\left(-\frac{9}{6}\right)\cdot y^{\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{\left(\frac{162-9y}{6}\right)^2}\cdot y^{-\frac{2}{3}}=0,$$

obě strany rovnosti násobíme výrazem $y^{\frac{2}{3}}$,

$$\begin{aligned}2\sqrt[3]{\frac{6}{162-9y}}\left(-\frac{9}{6}\right)\cdot y+\sqrt[3]{\left(\frac{162-9y}{6}\right)^2}&=0\\-3y\sqrt[3]{\frac{6}{162-9y}}+\sqrt[3]{\left(\frac{162-9y}{6}\right)^2}&=0\\\sqrt[3]{\left(\frac{162-9y}{6}\right)^2}&=3y\sqrt[3]{\frac{6}{162-9y}}\end{aligned}$$

a dále přenásobíme $\sqrt[3]{\frac{162-9y}{6}}$

$$\begin{aligned}162-9y&=18y\\y&=\frac{162}{27}=6\end{aligned}\qquad.$$

Na základě vztahu (2.32) pak dopočítáme hodnotu proměnné x.

$$x=\frac{162-9\cdot 6}{6}=\frac{108}{6}=18$$

Závěr

Srovnáme-li Příklad 2.1.2 a Příklad 2.1.3, vidíme, že při použití metody přímého dosazení jsou výpočty oproti Lagrangeově metodě o něco náročnější. Proto v případech, kdy je předpis optimalizované funkce či její vazebné podmínky od pohledu složitější, doporučuji použít Lagrangeovu metodu.

2.2. Maximalizace produkce a minimalizace nákladů

Další úlohy, kterým se budeme věnovat, jsou hledání maximální úrovně produkce a minimálních nákladů obchodního závodu. Ten na trhu statků a služeb stojí na straně nabídky. Vyjděme z teorie firmy popsané v [4]. Pro účely snadnější analýzy předpokládáme, že obchodní závod

- *má 1 vlastníka, který je zároveň i kontrolní a řídící osobou*
  tato osoba pobírá reziduální zisk obchodního závodu
- *má jako hlavní činnost výrobu*
  kdy výrobu definujeme jako přeměnu vstupu ve výstup
- *maximalizuje zisk*
  což odpovídá předpokladu přijatému na začátku této kapitoly, že všechny tržní subjekty jednají racionálně
- *je na trhu v dokonalé konkurenci*

Produkční funkce, izokvanta a izokosta
Stejně jako spotřebitel, i obchodní závod má určitá omezení. Zde jsou to technologické možnosti výroby a omezené náklady. Pro zjednodušení zavádíme tzv. **produkční funkci**, která modeluje vztah mezi množstvím vstupů použitých při výrobě v daném období a maximálním objemem výstupu, který vstupy vytvořily.

Předpokládejme dlouhodobou produkční funkci, kdy jsou všechny vstupy variabilní a uvažujme dva vzájemně nahraditelné vstupy - práci a kapitál. Pak má produkční funkce dle [4] tvar

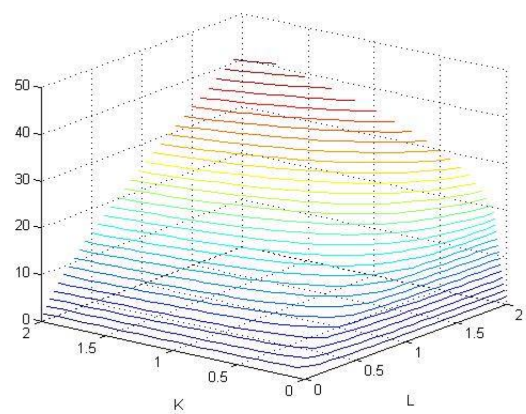
$$Q = f(K, L),$$

kde Q je objem produkce, K objem jednotek kapitálu a L objem jednotek práce. Použijme Cobb-Douglasovu produkční funkci, která je dána vztahem

$$f(K, L) = AK^a L^b,$$

kde A, a a b jsou kladné konstanty, K je objem jednotek kapitálu a L objem jednotek práce. Koeficient A vyjadřuje souhrnnou produktivitu faktorů, a a b elasticity výstupu jednotlivých faktorů, jež jsou dány užitými technologiemi. Uvažujme případy, kdy $a + b = 1$, funkce má pak konstantní výnosy z rozsahu, tudíž stejné vzdálenosti mezi izokvantami. Grafem funkce v tomto tvaru jsou konvexní izokvanty.

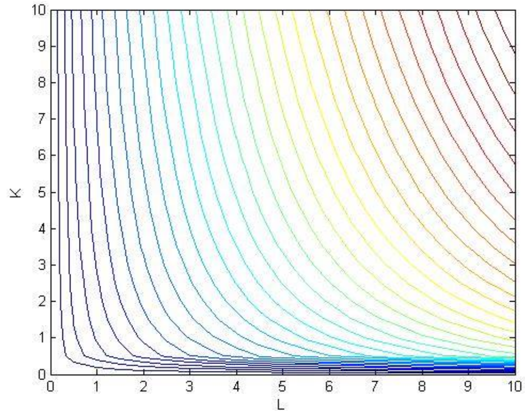
Grafické znázornění produkční funkce je analogické grafickému znázornění funkce užitku v podkapitole 2.1. Vykresleme Cobb-Douglasovu produkční funkci ve tvaru $f(K, L) = K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}$ a její vrstevnice pomocí softwaru, zde Matlab. Opět nás bude zajímat pouze I. kvadrant grafu funkce, kde jsou hodnoty obou vstupů nezáporné, spotřeba záporného množství vstupů logicky není možná. Vidíme jej na obrázku 2.13. Promítnutím vrstevnic produkční funkce na základnu získáme obrázek 2.14.



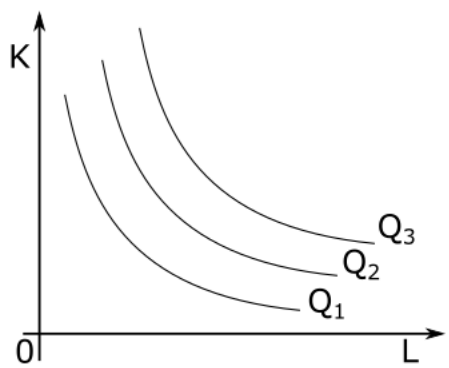
Obrázek 2.13: graf I. kvadrantu funkce $f(K, L) = K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}$

Takto zobrazené vrstevnice grafu produkční funkce nazýváme **izokvanty**. Označíme-li úroveň vstupu Q, je izokvanta souborem kombinací vstupů K a L, které vedou ke stejnému výstupu, tedy pro ně platí $f(K, L) = Q$. Stejně jako indiferenčních křivek, i izokvant existuje nekonečně mnoho. Grafické znázornění souboru izokvant nazýváme **mapa izokvant** - obrázek 2.15.

Vlastnosti izokvant jsou analogické vlastnostem indiferenčních křivek, popsaným v podkapitole 2.1. Rozdíl mezi izokvantou a indiferenční křivkou je podle [4] ten,



Obrázek 2.14: vrstevnice I. kvadrantu grafu funkce $f(K, L) = K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}$



Obrázek 2.15: mapa izokvant

že izokvanta je spojená se specifickou úrovní výstupu, zatímco indiferenční křivce nelze dle některých ekonomických směrů přiřadit úroveň užitku.

Poznámka 2.2.1 Znázornění izokvanty jako spojité funkce je také určitým zjednodušením. Reálně nebývá ve výrobě k dispozici nekonečně mnoho kombinací vstupů. Křivku by tak tvořila série bodů.

Poměr,v němž může obchodní závod nahrazovat kapitál prací, aniž by se změnila velikost výstupu, nazýváme **mezní míra technické substituce**. Jeho matematická interpretace je velmi podobná jako u mezní míry substituce ve spotřebě v podkapitole 2.1. Označíme-li si izokvantu jako funkci jedné proměnné

$$K = \omega(L), \tag{2.33}$$

vyjádříme mezní míru substituce ve spotřebě v bodě A o souřadnicích $[L_A, K_A]$ jako absolutní hodnotu derivace v tomto bodě, tedy

$$MRTS(L_A) = |\omega'(L_A)|. \tag{2.34}$$

Parciální derivace produkční funkce pak vyjadřují tzv. **mezní produktivitu** práce (kapitálu), tedy jak se změní hodnota produkční funkce v závislosti na změně hodnoty dané proměnné o jednotku za neměnnosti druhé proměnné. Značíme je MP_L a MP_K a platí

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = MP_L$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = MP_K$$

Obdobně jako v teorii užitku také platí vztah

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K}. \tag{2.35}$$

Izokvanty tedy zastupují všechny kombinace vstupů, které by si obchodní závod koupil, kdyby nebyl ničím omezen. Stejně jako spotřebitel však ve svých nákupech omezen je.

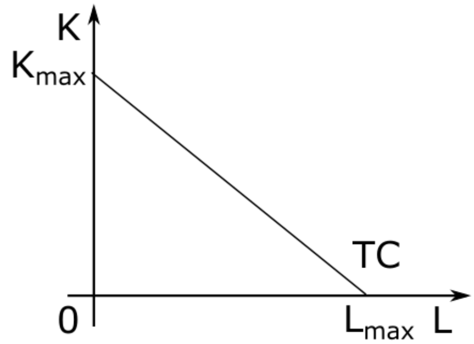
Předpokládejme, že obchodní závod nakupuje pouze dva vstupy, práci L a kapitál K, které nejsou dokonalými substituty ani komplementy. Přímka, obsahující všechny kombinace práce a kapitálu, které mohou být pořízeny za dané celkové náklady, se nazývá **izokosta** [4]. Její rovnice je

$$TC = wL + rK, \tag{2.36}$$

kde TC jsou celkové náklady, w cena jednotky práce a r cena jednotky kapitálu. Grafickým řešením rovnice (2.36) je pak obrázek 2.16. Směrnici izokosty získáme analogickým postupem jako u linie rozpočtu v podkapitole 2.1. Bude rovna

$$-\frac{w}{r}.$$

I chování izokosty v závislosti na změně jejích parametrů je analogické linii rozpočtu na obrázcích 2.9, 2.10 a 2.11. Tedy při změně celkových nákladů dojde k rovnoběžnému posunu izokosty, zatímco při změně ceny jednoho ze vstupů



Obrázek 2.16: izokosta

dojde ke změně jejího sklonu.

Optimum obchodního závodu

Optimální kombinací vstupů rozumíme dle [4] situaci, kdy je míra, ve které je obchodní závod technicky schopen nahradit práci kapitálem, rovna míře, v níž je schopen tuto substituce na trhu uskutečnit. Označíme-li si bod dotyku $E = [L^*, K^*]$, bude pro něj platit

$$MRTS(L^*) = \frac{w}{r}(L^*) \tag{2.37}$$

Tuto situaci nazýváme **nákladové optimum**. Ze vztahu (2.35) víme, že

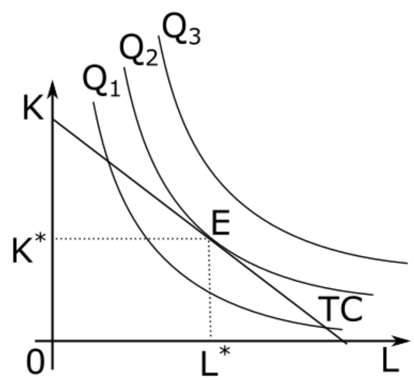
$$\frac{MP_L}{MP_K}(L^*) = \frac{w}{r}(L^*). \tag{2.38}$$

Úpravou vztahu (2.38) pak dostaneme

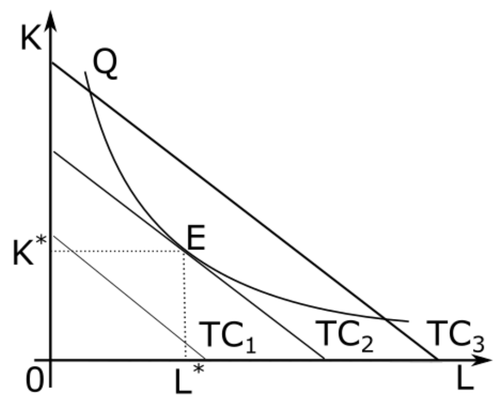
$$\frac{MP_L}{w}(L^*) = \frac{MP_K}{r}(L^*). \tag{2.39}$$

V nákladovém optimu tedy platí, že mezní produkt z peněžní jednotky vynaložené na nákup vstupu bude u všech vstupů stejný. Toto pravidlo nazýváme **pravidlo nejnižších nákladů** (anglicky Least Cost rule) [4].

Geometricky se nákladové optimum (2.37) nachází v bodě dotyku izokosty a izokvanty, kde je směrnice tečny izokvanty rovna směrnici izokosty. Grafickým znázorněním této situace jsou obrázky 2.17 a 2.18. Na hledání optima obchodního závodu pak můžeme nahlížet dvěma způsoby:



Obrázek 2.17: optimum obchodního závodu při maximalizaci produkce



Obrázek 2.18: optimum obchodního závodu při minimalizaci nákladů

- maximalizace výstupu při daných nákladech

  Situaci zachycuje obrázek 2.17. Obchodní závod vychází ze svých nákladů TC a hledá maximální objem produkce Q, který je za těchto nákladů schopen vyrobit. Optimální kombinací vstupů je pak bod E.

- minimalizace nákladů při daném výstupu

  V tomto případě obchodní závod plánuje vyrobit určitý výstup Q a hledá nejnižší možné náklady, při kterých lze tento výstup realizovat. Situaci ilustruje obrázek 2.18, optimální kombinaci značí bod E.

Obě úlohy pak opět umíme řešit hledáním vázaného lokálního extrému účelové funkce. Ukažme si to nyní na příkladech.

2.2.1. Využití metod hledání vázaných lokálních extrémů

Příklad 2.2.1

Produkce obchodního závodu je modelována pomocí Cobb-Douglasovy funkce ve tvaru

$$f(x, y) = 250x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{5}}$$

kde x představuje jednotky práce a y jednotky kapitálu. Víme, že jednotka práce má hodnotu 4000 Kč a jednotka kapitálu 6000 Kč. Celkové náklady obchodního závodu na práci a kapitál nesmí překročit 1200000 Kč. Jaká bude maximální úroveň produkce obchodního závodu? Přesáhne hranici 36000 jednotek?

Řešení

Požadavek na limit celkových nákladů vytváří mezi proměnnými vazbu. Cílem obchodního závodu je v tomto případě maximum produkce při daných celkových nákladech. Zvolíme tedy rovnost

$$4000x + 6000y = 1200000.$$

Abychom nalezli maximální úroveň produkce, vyjádříme si nejprve Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = 250x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{5}} - \lambda(4000x + 6000y - 1200000)$$

Následně sestrojíme parciální derivace této funkce podle proměnných x a y a položíme je rovny nule. Přidáme vazebnou podmínku a rovnice si očíslujeme.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 200x^{-\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}} - 4000\lambda = 0 \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 50x^{\frac{4}{5}}y^{-\frac{4}{5}} - 6000\lambda = 0 \tag{2.41}$$

$$4000x + 6000y = 1200000 \tag{2.42}$$

Vyjádříme proměnnou λ z rovnice (2.40).

$$\begin{aligned} 200x^{-\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}} - 4000\lambda = 0 \\ \lambda = \frac{-200}{-4000}x^{-\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}} \\ \lambda = \frac{1}{20}x^{-\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

a dosadíme ji do rovnice (2.41).

$$50x^{\frac{4}{5}}y^{-\frac{4}{5}} - 6000(\frac{1}{20}x^{-\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}}) = 0$$

Rovnici přenásobíme výrazem $x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{4}{5}}$ a vyjádříme vztah mezi x a y.

$$\begin{aligned} 50x - 300y = 0 \\ x = \frac{300}{50}y \\ x = 6y \end{aligned} \tag{2.43}$$

Ten následně dosadíme do rovnice (2.42) a získáme hodnotu proměnné y.

$$\begin{aligned} 4000(6y) + 6000y &= 1200000 \\ 30000y &= 1200000 \\ y &= 40 \end{aligned}$$

Dosazením $y = 40$ do vztahu (2.43) pak získáme i hodnotu proměnné x.

$$x = 240$$

Po dosazení do produkční funkce $f(x, y)$ obchodního závodu zjistíme, že

$$\begin{aligned} f(240; 40) &= 250 \cdot (240)^{\frac{4}{5}} \cdot (40)^{\frac{1}{5}} \\ f(240; 40) &\doteq 41929,63. \end{aligned}$$

Závěr

Maximální úroveň produkce obchodního závodu je přibližně 41929,63 jednotek při použití 240 jednotek práce a 40 jednotek kapitálu. Maximální úroveň produkce tedy přesáhne 36000 jednotek.

Příklad 2.2.2

Pozměňme nyní zadání Příkladu 2.2.1 a představme si, že celkové náklady obchodního závodu na kapitál a práci budou moci dosáhnout hranice až 1500000 Kč. Jak se změní výsledná úroveň produkce?

Řešení

Postupem analogickým předchozímu příkladu lze propočítat, že maximalizace produkce dosáhne obchodní závod při 300 jednotkách práce (x) a 50 jednotkách kapitálu (y). Výsledná úroveň produkce tak bude dosahovat přibližně 52412 jednotek, vzroste tedy po zaokrouhlení na 2 desetinná místa o 10482,37 jednotek.

Existuje zde ovšem možnost, jak tuto úlohu řešit podstatně elegantněji. Využijme významu proměnné λ, který jsme si vysvětlili v podkapitole 2.1.1. Lagrangeův multiplikátor získaný z produkční funkce obchodního závodu se v ekonomii nazývá **mezní produktivita peněz** [7]. Vyjadřuje, kolik dodatečných jednotek produkce získáme, investujeme-li do výroby další peněžní jednotku. Vyčíslíme-li si proměnnou λ z příkladu 2.2.1, zjistíme, že při 240 jednotkách práce a 40 jednotkách kapitálu je tato mezní míra výnosnosti peněz rovna

$$\lambda = \frac{1}{20} x^{-\frac{1}{5}} y^{\frac{1}{5}}$$

$$\lambda = \frac{1}{20} \cdot (240)^{-\frac{1}{5}} \cdot (40)^{\frac{1}{5}}$$

$$\lambda \doteq 0,03494135594$$

Závěr

V praxi to pro nás znamená, že pokud investujeme do produkce další korunu, můžeme v konečném měřítku vyprodukovat přibližně o 0,035 jednotky více. Nyní už lze logickou úvahou odvodit, že má-li podnik k dispozici dalších 300 000 Kč, maximální úroveň produkce vzroste z původní hodnoty v závislosti na mezní míře výnosnosti peněz na úroveň

$$41929,63 + (0,03494135594) \cdot (300000) \doteq 52412$$

Příklad 2.2.3

Produkční funkce obchodního závodu je ve tvaru

$$f(x,y) = 200x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$$

kde x představuje počet jednotek práce a y počet jednotek kapitálu. Řekněme, že cena jednotky práce je 80 Kč, cena kapitálu 60 Kč za jednotku a management stanovil výrobní cíl 10000 jednotek. Najděte množství práce a kapitálu potřebné k naplnění výrobního cíle při současné minimalizaci nákladů.

Řešení

V předešlých příkladech jsme optimalizovali produkční funkci nebo funkci užitku za současné platnosti pevně dané podmínky. Nyní je však předem stanoven výrobní cíl a požadovaná minimalizace se týká nákladů. Úlohu tohoto typu tak řešíme oproti úloze maximalizace produkce obráceně.

Při řešení tedy zvolíme za výchozí funkci nákladů, ta zde bude ve tvaru

$$f(x,y) = 80x + 60y$$

a budeme usilovat o její minimalizaci. Podmínku tentokrát tvoří sama produkční funkce, kterou omezíme výrobním cílem, tedy

$$g(x,y) = 200x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}} = 10000$$

Dále si vyjádříme Lagrangeovu funkci a postupujeme analogicky k ostatním úlohám podmíněné optimalizace.

$$L(x,y,\lambda) = 80x + 60y - \lambda(200x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}} - 10000),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 80 - 80\lambda x^{\frac{-3}{5}}y^{\frac{3}{5}} = 0 \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 60 - 120\lambda x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{-2}{5}} = 0 \tag{2.45}$$

$$200x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}} = 10000 \tag{2.46}$$

Proměnnou λ si vyjádříme z rovnice (2.44).

$$80 - 80\lambda x^{\frac{-3}{5}}y^{\frac{3}{5}} = 0$$

$$\lambda = \frac{-80}{-80y^{\frac{3}{5}}x^{\frac{-3}{5}}}$$

$$\lambda = x^{\frac{3}{5}}y^{-\frac{3}{5}}$$

Dosazením proměnné λ do rovnice (2.45) pak po úpravách získáme vztah mezi x a y.

$$60 - x^{\frac{3}{5}}y^{-\frac{3}{5}}120x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}} = 0$$

$$60 = x^{\frac{3}{5}}y^{-\frac{3}{5}}120x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}$$

$$\frac{60}{120} = \frac{x}{y}$$

$$x = \frac{1}{2}y$$

Vyjádřenou proměnnou x dosadíme do rovnice produkční funkce a získáme y.

$$200(\frac{1}{2}y)^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}} = 10000$$
$$200(\frac{1}{2})^{\frac{2}{5}}y = 10000$$
$$y = 50 \cdot 2^{\frac{2}{5}}$$
$$y = 50\sqrt[5]{4}$$

Na základě již známého vztahu mezi x a y pak x dopočítáme.

$$x = \frac{1}{2}y$$
$$x = 25\sqrt[5]{4}$$

Závěr

Minimálních nákladů za podmínky produkce 10000 jednotek dosáhne obchodní závod při použití $25\sqrt[5]{4}$ jednotek práce a $50\sqrt[5]{4}$ jednotek kapitálu.

Závěr

Cílem této práce bylo představit vázané extrémy funkcí více proměnných a ukázat aplikaci znalostí o nich na třech úlohách z oblasti ekonomie. V první, teoretické kapitole jsem připomněla definice a pravidla, které používáme při práci s lokálními extrémy funkcí a zaměřila se na extrémy vázané. Ty jsem následně vysvětlila z geometrického hlediska a představila dvě nejpoužívanější metody jejich určování.

Na začátku druhé, praktické části práce, jsem čtenáře seznámila s ekonomickými otázkami, které dokážeme pomocí metod hledání vázaných extrémů funkce řešit. Ve dvou podkapitolách jsem se pak třem takovým úlohám dopodrobna věnovala. V první z nich jsem prozkoumala teorii užitku z hlediska matematiky. Matematicky jsem popsala chování indiferenčních křivek a linie rozpočtu spotřebitele a ukázala, že hledání optima spotřebitele matematickou i ekonomickou cestou dochází ke stejnému výsledku. Dále jsem vysvětlila význam Lagrangeova multiplikátoru v ekonomii a na vlastním praktickém příkladu srovnala složitost výpočtu Lagrangeovou a dosazovací metodou. Znázornila jsem také postup ověření zjištěného extrému funkce. Všechny uvedené příklady byly názorně vyřešeny a teorie byla za pomoci softwarů Inkscape a Matlab doplněna obrázky.

Ve druhé podkapitole praktické části jsem se zabývala ekonomickou teorií hledání optima obchodního závodu z matematického úhlu pohledu, kdy k nalezení optima vedly dva přístupy - maximalizace produkce nebo minimalizace nákladů. Teorii jsem opět doplnila o obrázky a na příkladech vysvětlila postup výpočtu obou úloh. V této kapitole jsem zároveň ukázala, jak lze využít ekonomické interpretace Lagrangeova multiplikátoru v příkladu.

Práce na tomto tématu mi byla důležitým přínosem. Měla jsem možnost prozkoumat, jak je na základě teoretických znalostí získaných studiem matematiky a ekonomie možné tyto dva obory propojit a řešit praktické problémy. Svůj cíl práce dle mého názoru splnila. Jako možnost zajímavého rozšíření by mohly posloužit ekonomické aplikace podmíněné optimalizace ve tvaru nerovností.

Literatura

[1] Bebčáková, I.: *KMA/M2 Matematika 2, Přednáška 13* [online]. Dostupné z: http://elearning-math.upol.cz/pluginfile.php/9848/mod$_r esource/content/0$ $/KMA_M 2N_1 3.pdf.$, [$cit.$20.12.2017].

[2] Došlá, Z., Došlý, O.: *Diferenciální počet funkcí vice proměnných*. 3. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2010. ISBN 978-80-210-4159-2.

[3] Hoffmann, L. D., Bradley, G. L, Sobecki, D., Price, M.:*Calculus for Business, Economics and the Social and Life Sciences, Brief Edition*. 11. vydání. New York: McGraw-Hill Education, 2012. ISBN 007353238X.

[4] Hořejší, B. a kol.: *Mikroekonomie*. 3. dopl. vydání. Praha: Management Press, 2005. ISBN 80-7261-061-9.

[5] Jarník, V.: *Diferenciální počet II*. 3 dopl. vydání. Praha: Academia, 1976.

[6] Khan, S.:*Indifference curves and marginal rate of substitution* [online]. Dostupné z: https://www.khanacademy.org/economics-finance-domain/ap-microeconomics/ap-choices-opp-cost-tutorial/income-and-substitution-effects/v/indifference-curves-and-marginal-rate-of-substitution., [cit.10.2.2018].

[7] Larson, R., Falvo, D. C.:*Calculus: An applied approach*. 8. vydání. Boston: Houghton Mifflin Company, 2009. ISBN 978-0-618-95825-2.

[8] Tichý Z., Škrášek, J.: *Základy aplikované matematiky I*. 2. vydání. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1989. ISBN 80-03-00150-1.