



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## KINEMATICKÝ A DYNAMICKÝ POPIS MECHANISMU ROZLOŽITELNÉ ANTÉNY VESMÍRNÉHO PLAVIDLA

KINEMATIC AND DYNAMIC CHARACTERIZATION OF A SPACECRAFT DEPLOYABLE ANTENNA  
MECHANISM

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Mirko Troup

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Miroslav Hrstka, Ph.D.

BRNO 2024



# Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Mirko Troup</b>
Studijní program:	Základy strojního inženýrství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	<b>Ing. Miroslav Hrstka, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2023/24

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.1111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Kinematický a dynamický popis mechanismu rozložitelné antény vesmírného plavidla**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Jedním z hlavních kritérií vesmírných a leteckých aplikací je minimalizace hmotnosti součástí plavidel a jejich kompaktnost. Například antény sloužící pro komunikaci mezi plavidlem a základnou musí mít určité rozměry, ovšem při startu a letu jsou složeny do kompaktních celků a jsou rozloženy až na oběžné dráze nebo na povrchu místa přistání. Téma bakalářské práce se zabývá návrhem mechanismu rozložitelné antény složené ze tří dílů spojených kloubovými spoji. Anténa je během letu plavidla složena do kompaktního celku. V požadovaném okamžiku je uvolněna pojistka a anténa je do pracovní polohy vysunuta pomocí předepjatých zkrutných pružin.

### **Cíle bakalářské práce:**

1. Rešeršní studie mechanismů pro rozkládací antény v oblasti vesmírných aplikací
2. Popis kinematického a dynamického chování zadaného modelu třídílné antény
3. Návrh optimálních parametrů z hlediska bezpečné funkčnosti mechanismu

### **Seznam doporučené literatury:**

- [1] Wijker, J.J. Spacecraft Structures, Springer, 2008, ISBN 978-3-540-755552-4.
- [2] JULIŠ, Karel a Rudolf BREPTA, 1987. Mechanika II. díl Dynamika. Praha: Státní nakladatelství technické literatury. Dynamika – Díl II. Dynamika.
- [3] HIBBELER, R. C. et al. Engineering Mechanics. Dynamics. Dynamics Study Pack. Prentice Hall 2001
- [4] PŘIKRYL, Karel. Kinematika. Vydání páté, V Akademickém nakladatelství CERM třetí vydání. Učební texty vysokých škol. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. ISBN 978-80-214-3679-4.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2023/24

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.  
děkan fakulty

## Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá detailním popisem mechanismu rozložitelné antény pomocí dvou odlišných metod: Kinetostatickou metodou a Lagrangeovou metodou. Výsledné soustavy pohybových rovnic jsou následně numericky počítány v jazyce Python. Při stejných vstupních hodnotách vychází 2 identické výsledky, které potvrzují možnost řešení soustavy oběma metodami. Na základě výsledků jsou navrženy optimální parametry pro zachování správné funkčnosti mechanismu nejprve při podmínkách na Zemi, následně ve vesmíru. Při působení gravitační síly vyplývají mnohem větší požadavky na pružiny a tlumiče. Následné porovnání metod indikuje, že nejvhodnější způsob řešení je jejich kombinace, kdy pro určení jednotlivých zrychlení těles je efektivnější Lagrangeova metoda, naopak pro zjištění hodnot vazebných sil je nutné použít metodu kinetostatickou.

## Klíčová slova

D'Alembertův princip, Lagrangeovy rovnice II.druhu, torzní pružina, rozložitelná anténa

## Abstract

This bachelor's thesis deals with a detailed description of the mechanism of a deployable antenna using two different methods: the Kinetostatic method and the Lagrange method. The resulting systems of equations are numerically calculated in Python. With the same input values, the solution is 2 identical results, which confirm the possibility of solving the system by both methods. Based on the result, optimal parameters are designed to maintain the correct functionality of the mechanism, first under conditions on Earth, then in space. Under the influence of gravity, much greater demands are required for springs and dampers. The subsequent comparison of the methods indicates that the most suitable solution is their combination, where the Lagrange method is more efficient for determining the individual accelerations of bodies, on the other hand, the kinetostatic method must be used to determine the values of the binding forces.

## Keywords

D'Alembert's principle, Lagrange equations of the second kind, torsion spring, deployable antenna



## Bibliografická citace

### Citace tištěného zdroje

TROUP, Mirko. *Kinematický a dynamický popis mechanismu rozložitelné antény vesmírného plavidla*. Brno, 2024. Dostupné také z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/157634>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Ing. Miroslav Hrstka, Ph.D.

### Citace elektronického zdroje

TROUP, Mirko. *Kinematický a dynamický popis mechanismu rozložitelné antény vesmírného plavidla* [online]. Brno, 2024 [cit. 2024-05-17]. Dostupné z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/157634>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Ing. Miroslav Hrstka, Ph.D.





## Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci zpracoval samostatně na základě konzultací se svým vedoucím Ing. Miroslavem Hrstkou, Ph.D. a s použitím uvedené literatury.

V Brně, 24/05/2024

---

Mirko Troup



## **Poděkování**

Děkuji vedoucímu Ing. Miroslavu Hrstkovi, Ph.D. za jeho čas, ochotu a cenné rady při tvorbě bakalářské práce. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přítelkyni za podporu po celou dobu studia.



# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>15</b>
<b>2 Rešeršní část</b>	<b>17</b>
2.1 Typy rozkládacích antén . . . . .	17
2.1.1 AstroMesh . . . . .	17
2.1.2 Rozkládací anténa scissor-like hoop truss . . . . .	18
2.1.3 Boom mechanismus pro družice CubeSats . . . . .	18
2.1.4 Anténa s postupným rozkladem panelů . . . . .	20
2.1.5 Čtyřstěnný mechanismus na bázi 3RR-3URU . . . . .	20
<b>3 Formulace problému</b>	<b>23</b>
<b>4 Teoretická část</b>	<b>25</b>
4.1 Metody řešení dynamiky pohybu tuhých těles . . . . .	25
4.2 Výpočetní software . . . . .	27
<b>5 Praktická část</b>	<b>29</b>
5.1 D'Alembertův princip . . . . .	30
5.1.1 Kinematický rozbor . . . . .	30
5.1.2 Úplné uvolnění soustavy těles . . . . .	30
5.1.3 Kontrola neznámých parametrů . . . . .	33
5.1.4 Sestavení soustavy rovnic . . . . .	36
5.2 Lagrangeovy rovnice II. druhu . . . . .	39
5.2.1 Kinetická energie . . . . .	39
5.2.2 Potenciální energie . . . . .	40
5.2.3 Energie tlumení . . . . .	41
5.2.4 Sestavení soustavy rovnic . . . . .	41
<b>6 Výsledky a diskuze</b>	<b>43</b>
6.1 Vstupní hodnoty pro zemskou aplikaci . . . . .	43
6.1.1 Určení průběhu polohy a rychlosti . . . . .	43
6.1.2 Určení reakčních sil ve vazbách . . . . .	46
6.2 Vstupní hodnoty pro vesmírnou aplikaci . . . . .	48
6.2.1 Určení průběhu polohy a rychlosti . . . . .	48
6.2.2 Určení reakčních sil ve vazbách . . . . .	49
<b>7 Závěr</b>	<b>53</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>55</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>57</b>
<b>Seznam příloh</b>	<b>59</b>



# 1 Úvod

Vesmírný průmysl dosáhl v posledních desetiletích značného rozvoje a stal se tak klíčovým odvětvím pro vědecký pokrok a technologické inovace. Jedním z důležitých prvků moderních vesmírných misí je efektivní a spolehlivý systém rozkládacích antén. Tyto antény jsou zásadní pro komunikaci mezi vesmírným plavidlem a pozemní stanicí, pro navigaci a pro sběr dat z vesmírných sond a satelitů. Bez robustního komunikačního systému by nebylo možné dosáhnout úspěchu v řadě kritických vesmírných misí, od průzkumu vzdálených planet a měsíců až po monitorování zemské atmosféry a povrchu [1]. Kinematický a dynamický popis takového mechanismu je tedy zásadní pro optimalizaci jejich výkonu a spolehlivosti.

Cílem této bakalářské práce je detailně popsat navržený mechanismus dvěma různými metodami dynamiky, konkrétně D'Alembertovým principem a Lagrangeovými rovnicemi II. druhu, a následně navrhnout optimální parametry z hlediska zadané funkčnosti mechanismu, tj. velikost reakčních sil v ložiscích a obálky pohybu v zástavbě družice.

Motivací pro řešení podobného mechanismu je program ExoMars 2022, kde bylo cílem dopravit na Mars robotické vozítko vybavené obdobnou rozložitelnou anténou, která by zároveň sloužila ke zlepšení znalosti povrchu na Marsu [2].

V první části je provedena rešerše existujících rozkládacích antén z hlediska jejich konstrukčního provedení. Je zde vyobrazeno 6 typů rozkládajících mechanismů, každý konstrukčně jinak navržený, ovšem se společným cílem dosáhnout co největší pevnosti, tuhosti a kompaktnosti při nejmenší možné hmotnosti soustavy.

V praktické části je podrobně popsán tzv. „boom“ mechanismus rozkládací antény skládající se ze tří hliníkových ramen kruhového průřezu, mezi kterými je upevněna torzní pružina vyvolávající moment potřebný pro zvednutí ramen do vertikální polohy. Tlumení je charakterizováno parametrem  $b$ , lineárně závislým na rychlosti. D'Alembertovou metodou je soustava rozdělena na jednotlivá tělesa, kdy dokážeme určit nejen hodnoty zrychlení, ale zároveň i síly působící v jednotlivých vazbách. Lagrangeova metoda naopak zahrnuje potenciální a kinetickou energii systému.

Výsledky obou metod vedou na stejné pohybové rovnice, pomocí kterých jsou určeny nejvhodnější hodnoty parametrů  $k$  a  $b$  pro dvě různé aplikace. První zohledňuje zemskou gravitační sílu, naopak druhá aplikace se zaměřuje na použití antény ve vesmíru, kde je gravitace nulová. Výsledkem je znatelně nižší nárokovost na hodnoty pružin a tlumičů ve vesmíru právě kvůli gravitaci, jelikož zde není žádná síla působící proti pohybu ramen s výjimkou tlumení.

Závěrem je poukázáno na rozdíly při sestavování těchto rovnic. Největším rozdílem je schopnost vypočítat vazebné síly pomocí D'Alembertova principu, což činí metodu komplexnější. Na druhou stranu je její řešení poměrně aritmeticky náročné. Lagrangeova metoda je naopak jednodušší z hlediska úpravy rovnic do finální podoby, na druhou stranu je komplikovanější rovnice správně sestavit, jelikož vyžaduje důkladnější porozumění dané problematice. Nevýhodou je nemožnost určit hodnoty sil ve vazbách. Z toho důvodu se jako nejvhodnější varianta jeví kombinace obou metod, kdy Lagrangeovou metodou se určí zrychlení a následně pro určení vazebných sil sestavit matici z D'Alembertova principu.





## 2 Rešeršní část

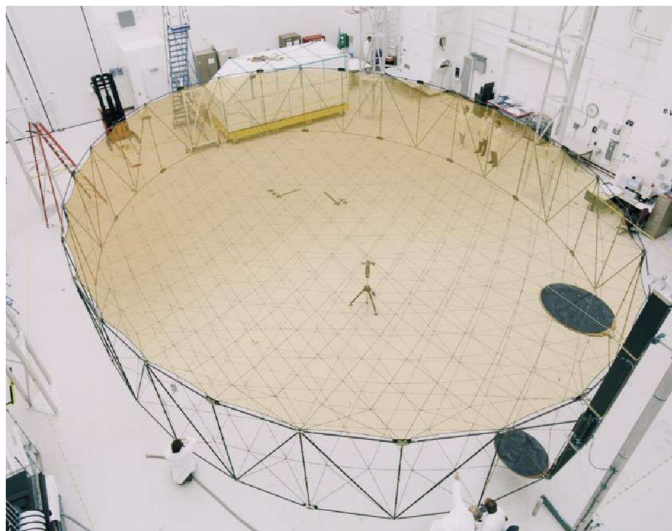
V oblasti vesmírných aplikací hraje klíčovou roli spolehlivost a efektivita komunikačních systémů. Jednou z klíčových technologií v tomto kontextu jsou výsuvné antény, které umožňují optimalizovat přenos dat mezi kosmickými prostředky a zemskými stanicemi [1]. V teoretické části jsou uvedeny příklady nejužívanějších typů mechanismu rozložitelných antén a následně jednotlivé metody potřebné pro kinematický a dynamický popis konkrétního zvoleného typu mechanismu.

### 2.1 Typy rozkládacích antén

Konstrukce a provoz všech mechanismů určených pro provoz v kosmickém prostředí vyžadují pečlivé technické řešení, které musí zaručit spolehlivou funkci v extrémních podmínkách vesmíru. V následujících sekcích jsou představeny nejznámější typy takových mechanismů.

#### 2.1.1 AstroMesh

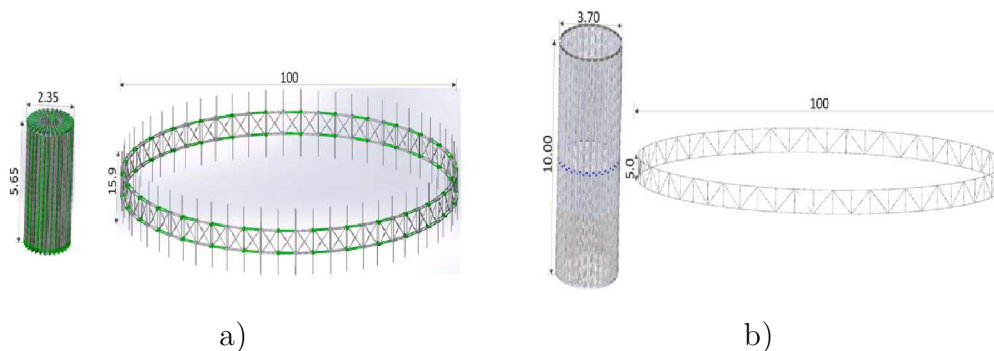
AstroMesh je síťový mechanismus určený pro anténní systémy ve vesmíru. Je složen z dvojice zesílených klenbových nosníků, přičemž celý mechanismus je rozvinut pomocí jediného tažného lana. V porovnání u jiných síťových mechanismů dosahuje AstroMesh nižší hmotnosti a také celkového objemu ve složeném stavu. Tento mechanismus slouží pro mapování vlhkosti půdy s velkou přesností po celém světě [3, 4].



Obr. 2.1. AstroMesh v rozložené poloze [3]

V současné době je zároveň vyvíjen mechanismus na první pohled velice podobný jako je právě anténa AstroMesh. Hlavní rozdíl spočívá ve dvojité vrstvě ramen, což systému dodává větší tuhost a poměr skladování. Problém je ovšem ve hmotnosti, která je až příliš velká na použití ve vesmíru, proto jsou navrženy delší, 5 metrová lehká ramena, která při

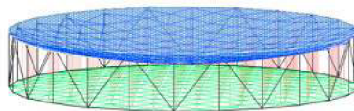
zachování tuhosti zmenší celkovou hmotnost [5]. Jejich rozdíl ve struktuře je zobrazen na obr. 2.2.



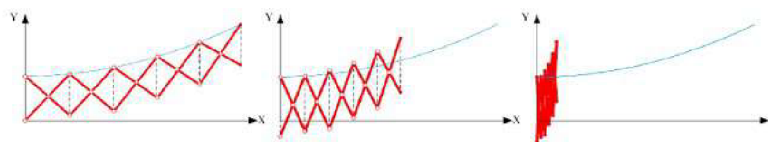
Obr. 2.2. a) Anténa s dvojitou vrstvou ramen, b) AstroMesh [5]

### 2.1.2 Rozkládací anténa scissor-like hoop truss

Rozkládací anténa „scissor-like hoop truss“ je na první pohled velice podobná struktuře, kterou disponuje AstroMesh. Ovšem ve srovnání má konfigurace parabolická podpěrná žebra pod povrchem sítě eliminující potřebu dalších vysokých ramen. Zároveň je menší ve složeném stavu, díky čemuž je kompaktnější. [6]



Obr. 2.3. Scissor-like v rozložené poloze [6]



Obr. 2.4. Proces složení mechanismu [6]

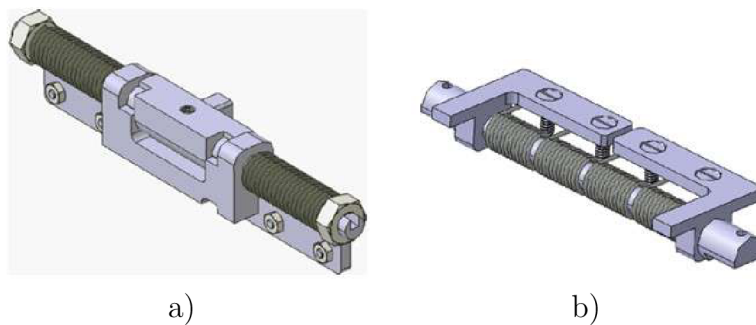
### 2.1.3 Boom mechanismus pro družice CubeSats

Tento rozkládací mechanismus pro solární panely je uplatněn u družic CubeSats, které jsou populární pro vesmírný výzkum díky své nízké ceně a kompaktním rozměrům [7].

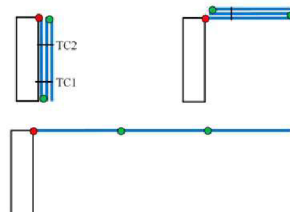


Obr. 2.5. Družice CubeSat [8]

Solární panely jsou zde připevněny pomocí jednotlivých čepů, na kterých jsou namotány zkrutné pružiny vytvářející moment potřebný pro rozložení všech panelů. Proces vysouvání je zde uskutečněn ve 2 krocích. V prvním kroku je sepnuta pouze pružina připevněná k základnímu tělesu, to způsobí rozvinutí všech panelů o  $90^\circ$ . Následně je sepnuta další pružina, která panely rozvine do finální podoby, viz obr. 2.7. [7]



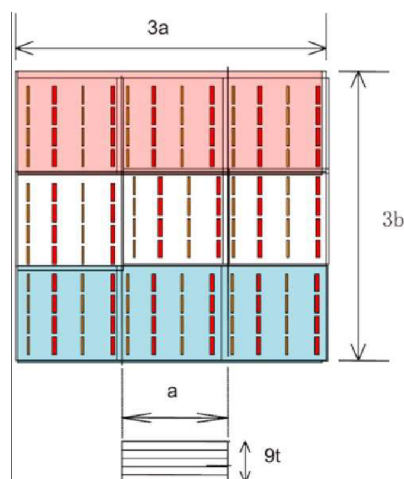
Obr. 2.6. Ukázka čepů na družici: a) Čep připevněn k základnímu tělesu, b) Čep mezi panely [7]



Obr. 2.7. Proces rozložení panelů [7]

### 2.1.4 Anténa s postupným rozkladem panelů

Další typ výsuvného mechanismu je oproti předchozím typům velice odlišný, protože se zde pracuje s postupným rozkladem jednotlivých panelů. Tento typ je demonstrován na mechanismu s devíti stejnými obdélníkovými panely, viz obr. 2.8. Principem je spojení dvojic panelů za pomoci běžných pantů, ve kterých se nachází malá zkrutná pružina způsobující rozvin mechanismu [9].



Obr. 2.8. Náhled složení mechanismu [9]

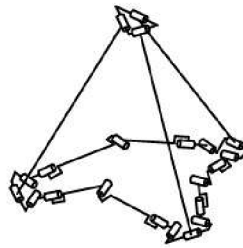


Obr. 2.9. Detailní pohled na pant [9]

Velkou výhodou zde hraje roli kompaktnost, jelikož ve složené poloze jsou všechny obdélníkové panely naskládány na sebe [9].

### 2.1.5 Čtyřstěnný mechanismus na bázi 3RR-3URU

Poslední zmíněnou soustavou je mechanismus složený z více čtyřstěnných těles založených na konfiguraci 3RR-3URU. Název značí, že se skládá ze 3 rotujících kloubů (3RR) a 3 lineárních kloubů, z nichž 2 jsou univerzální (3URU), jak je znázorněno na obr. 2.10. [10]



Obr. 2.10. Čtyřstěnný mechanismus [10]

V jednotlivých kloubech se nachází čepy, do nichž je usazená zkrutná pružina schopna rozložit mechanismus. Díky použití několika kratších součástí je celá soustava velice kompaktní a vykazuje výbornou tuhost. [10]

V této bakalářské práci je dopodrobna rozebrán popis mechanismu, obdobného v oddíle 2.1.3, skládající se ze 3 ramen spojených čepy, v nichž se nachází předepjaté torzní pružiny.



### 3 Formulace problému

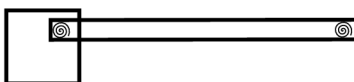
Cílem bakalářské práce je nejprve řešící studie mechanismů pro rozkládací antény v oblasti vesmírných aplikací. Následně je uveden detailní pohled na popis kinematického a dynamického chování zadaného modelu třídílné antény, z něhož jsou navrženy optimální parametry z hlediska správné funkčnosti mechanismu.

Nejpodstatnější část je vytvoření výpočtového modelu třídílné rozložitelné antény vyrobené z hliníkových tyčí kruhového průřezu spojených čepy se zkrutnými pružinami o tuhostech  $k_A$ ,  $k_B$  a  $k_C$ . Tlumení je zprostředkováno parametry  $b_A$ ,  $b_B$  a  $b_C$ , lineárně závislými na rychlosti, které představují přítomnost tlumícího členu, u něhož se předpokládá funkčnosti v daných podmínkách. Anténa se skládá z vysunutého stavu, kdy dojde k předeptnutí zkrutných pružin, viz obr. 3.1, která jsou následně zajištěna lanky s náloží. V momentě přistání družice na místě určení je uvolněna pojistka a anténa je pomocí zkrutných pružin vysunuta do pracovní polohy. Její rozvin je zobrazen na obr. 3.2.

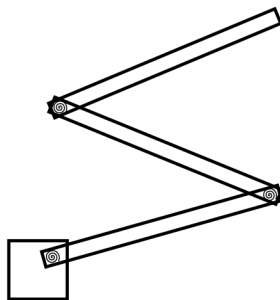
Vytvořený model je popsán pohybovými rovnicemi pomocí dvou odlišných metod dynamiky. Nejprve D'Alembertovým principem, který spočívá v rozdělení mechanismu na jednotlivá ramena, následně Lagrangeovou metodu zahrnující energetický přístup.

V poslední řadě je důležité poznamenat, že pro realizaci takového pohybového popisu je vhodné provést pár zjednodušení, díky kterým bude řešení snadněji proveditelné. Nejsou zde zahrnuty povětrnostní podmínky, ve vazbách se nevyskytuje tření a není zde kladen důraz na žádné další vnější vlivy, které by mohly ramena rozpohybovat. Výsledkem se předpokládá soustava nelineárních diferenciálních rovnic, které je zapotřebí vyřešit numericky ve výpočetním softwaru. Veškeré výpočty jsou prováděny v jazyce Python, pomocí funkcí z balíku `numpy` pro práci s poli a řešiče diferenciálních rovnic `odeint`.

Z pohybových rovnic je zapotřebí navrhnout optimální parametry z hlediska správné funkčnosti mechanismu tak, aby rychlost soustavy a reakční síly ve vazbách nedosahovaly příliš vysokých hodnot, ale zároveň aby tuhosti pružin a parametry tlumení byly co nejmenší. Na závěr jsou obě metody vůči sobě porovnány.



Obr. 3.1. Mechanismus ve složeném stavu.



Obr. 3.2. Rozvin mechanismu do vertikální polohy.





## 4 Teoretická část

Teoretická část je zaměřena na metody, které jsou základem pro analýzu dynamiky pohybu tuhých těles. V rámci kapitoly jsou představeny teoretické základy D'Alembertova principu a Lagrangeových rovnic II. druhu nezbytné pro následnou aplikaci v praktické části. Ve druhé podkapitole je uveden výpočetní software, který je využíván na všechny typy výpočtů vykytujících se v této práci.

### 4.1 Metody řešení dynamiky pohybu tuhých těles

Dynamika pohybu tuhých těles je klíčovou oblastí v mechanice zabývající se studiem pohybu objektů a sil na ně působících. K řešení těchto problémů existuje několik metod, které umožňují přesné a efektivní modelování pohybu. Zvoleny jsou dvě metody, konkrétně D'Alembertův princip a Lagrangeovy rovnice II. druhu, které jsou detailněji představeny v následujících sekcích.

#### D'Alembertův princip

D'Alembertův princip, současně nazýván jako kinetostatická metoda nebo metoda uvolňování, vychází z Druhého Newtonova zákona ve tvaru

$$\vec{F} + (-m\vec{a}) = 0, \quad (4.1)$$

kde  $-m\vec{a}$  je setrvačná (D'Alembertova) síla. Slovní vyjádření D'Alembertova principu pro soustavu těles zní: *Síly mechanické soustavy jsou v rovnováze, přičteme-li k silám vtištěným (včetně sil reaktivních) síly setrvačné.* [11, 12]

Po úpravě rovnice (4.1) a následném rozdělení sil do jednotlivých složek dostáváme rovnice: [13]

$$x : \sum F_x = ma_x, \quad (4.2)$$

$$y : \sum F_y = ma_y, \quad (4.3)$$

případně moment se dá vyjádřit jako: [13]

$$z : \sum M_z = I\alpha, \quad (4.4)$$

kde  $m$  je hmotnost,  $a$  zrychlení,  $F$  síla,  $\alpha$  úhlové zrychlení,  $M$  moment a  $I$  moment setrvačnosti.

První velkou výhodou je fakt, že se jedná o univerzální postup řešení. Ten spočívá v rozdělení soustavy na jednotlivá tělesa, přičemž veškeré vazby jsou nahrazeny ekvivalentním silovým působením. Další nespornou výhodou je možnost pomocí D'Alembertova principu určit výsledné hodnoty silového působení ve vazbách. [11]

## Lagrangeovy rovnice II. druhu

Lagrangeovy rovnice II. druhu představují nejužívanější metodu analytické mechaniky při sestavování pohybových rovnic pro modelová tělesa a především pro modelové soustavy těles. Metodický postup při sestavování pohybových rovnic je nezávislý na volbě souřadnicového systému, což je nespornou výhodou. [11]

Obvyklý tvar rovnic je formulován pro holonomní vazby a nezávislé zobecněné souřadnice. Tak jsou již předem vyloučené všechny vazbové síly, což je výhodné především pro složité modelové soustavy. Další výhodou je i skutečnost, že jedinou dynamickou veličinou, kterou je nutno vyjádřit je kinetická energie  $E_k$ , což bývá zpravidla jednoduché. U konzervativních soustav lze dále využít pojmu potenciální energie  $E_p$  a pracovat tak pouze se skalárními veličinami  $E_k$  a  $E_p$ . [11, 14]

Lagrangeovy rovnice II. druhu vyplynou z ústřední rovnice dynamiky psané ve tvaru

$$\sum_{i=1}^n F_i^P \delta r_i - \sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \delta r_i = 0, \quad (4.5)$$

kde  $F_i^P$  vyjadřuje pracovní sílu,  $r_i$  polohu a  $\delta r_i$  virtuální posuv.

Pro soustavu s holonomními vazbami lze rovnici přepsat na: [11]

$$\sum_{i=1}^n \left[ Q_i - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial E_k}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0, \quad (4.6)$$

kde  $Q_i$  je zobecněná síla a  $q_i$  zobecněná souřadnice.

Vzhledem ke vzájemné nezávislosti zobecněných souřadnic musí platit: [11]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i \quad (4.7)$$

pro  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Pokud všechny pracovní síly jsou síly potenciální, tzn. bez vnějších účinků, a zároveň na systém působí tlumící síly lineárně závislé na rychlostech, potom platí tvar: [11]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (4.8)$$

## 4.2 Výpočetní software

Vzhledem k předpokladu nelineárních soustav diferenciálních rovnic a maticových rovnic je pro výpočet zvolen výpočetní software v jazyce Python ve verzi 3.11.5 s vývojovým prostředím Spyder ve verzi 5.4.3, jehož rozhraní je zobrazeno na obr. 4.1. V preambuli jsou definovány jednotlivé balíky potřebné pro provedení výpočetních operací. Například knihovna `numpy` slouží pro základní matematické operace a knihovna `matplotlib` pro vykreslování grafů. Další použité balíky jsou ukázány na obr. 4.2

```

42 # a_2k_-_1*_np.cos(phi2)*dphi2_
43 def ddtm(a,t):
44     phi2,dphi2,phi3,dphi3,phi4,dphi4 = x
45     A = np.zeros((3,3),dtype=float)
46     t = np.zeros((3,1),dtype = float)
47
48     MA = (np.pi/2-phi2)*ka[1]
49     MB = (phi2-phi3)*k8[1]
50     MC = (phi2-phi4)*k4[1]
51
52     b1= m2*(1/2/2)**2
53     b2= m2*(1/2)**2
54     b3= m3*(1/2)**2
55     b4 = I_2
56
57     l5=m4*1_2*(1/3)*np.sin(phi2)*np.sin(phi3)
58     b6=m3*1_2*(1/2)*np.sin(phi2)*np.sin(phi3)
59     l7=m4*1_2*(1/3)*np.cos(phi2)*np.cos(phi3)
60     b8=m3*1_2*(1/2)*np.cos(phi2)*np.cos(phi3)
61
62     b9=m4*1_2*(1/2)*np.sin(phi2)*np.sin(phi4)
63     l10=m4*1_2*(1/2)*np.cos(phi2)*np.cos(phi4)
64
65     l11 = -m3*1_2*(1/3/2)*np.sin(phi2)*np.cos(phi3)*(dphi3**2)
66     b12 = -m3*1_2*(1/2/2)*np.cos(phi2)*np.sin(phi3)*(dphi3**2)
67     l13 = -m4*1_2*(1/3)*np.sin(phi2)*np.cos(phi3)*(dphi3**2)
68     b14 = -m4*1_2*(1/2/2)*np.sin(phi2)*np.cos(phi4)*(dphi4**2)
69     l15 = m4*1_2*(1/3)*np.cos(phi2)*np.sin(phi3)*(dphi3**2)
70     b16 = m4*1_2*(1/2/2)*np.cos(phi2)*np.sin(phi3)*(dphi3**2)
71     l17 = -m2*g*(1/2/2)*np.cos(phi2)
72     b18 = -m3*g*(1/2)*np.cos(phi2)
73     h19 = -m2*g*(1/2)*np.cos(phi2)
74
75     h20 = -h2[1]*dphi2
76
77     A[0,0] = b1-b2+h3+b4
78     A[0,1] = b5-b3+b7+b8
79     A[0,2] = b4+h19
80     F[0,0] = l11+l12+b13+b14+b15+b16+b17+b18+h19+b20+MA+MB
81     #dphi2 = (b1+b2+h3+b4+h7+h8+h9+h10+h11+h12+h13+h14+h15+h16-h17)/(b18+h19+h20+h21)

```

Obr. 4.1. Náhled vývojového prostředí Spyder.

```

import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
import pickle
from matplotlib.animation import FuncAnimation
import matplotlib as mpl

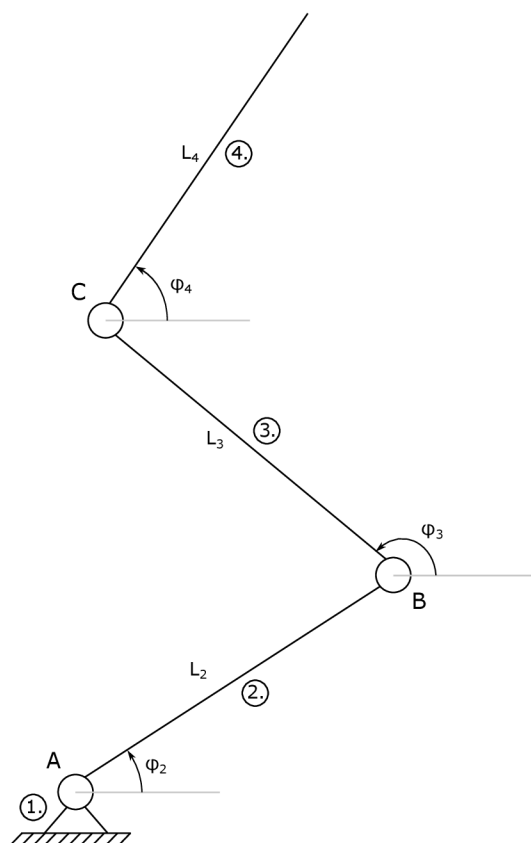
```

Obr. 4.2. Ukázka balíčků použitých v prostředí Spyder.



## 5 Praktická část

Mechanismus je sestaven ze tří ramen o stejných vlastnostech jako je  $m_2, m_3, m_4, L_2, L_3$  a  $L_4$ , viz obr. 5.1. Dále platí, že první rameno je připojeno k základnímu tělesu při zachování rotačního pohybu, druhé rameno je připojeno pomocí čepu na první. Stejným způsobem je také spojeno třetí rameno ke druhému.



Obr. 5.1. Schéma mechanismu v obecné poloze.

Pohyb mechanismu je vyvolán torzními pružinami o tuhosti  $k_i$ , které se nachází v jednotlivých čepch. Každá pružina vyvolává moment lineárně závislý na úhlu natočení dané pružiny, kdy největší moment je v předepjatém stavu a postupně jeho hodnota klesá až do chvíle, kdy je jeho hodnota nulová. První pružina,  $k_A$ , je předepnutá o  $90^\circ$  a je vázána k základnímu tělesu, způsobuje tedy moment  $M_A$ , viz obr. 5.2, jenž se dá vyjádřit pomocí rovnice

$$M_A = k_A \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right). \quad (5.1)$$

Vzhledem k předpokladu obecného rovinného pohybu (poloha ramena vzhledem k osám nepohybujícím se vůči základu) se zbylé dva momenty  $M_B$  a  $M_C$ , znázorněny na obr. 5.3 a 5.4, vyjádří z rozdílu natočení ramen vůči sobě, protože konce pružiny jsou připojeny na jednotlivá sousední tělesa. Pro oba momenty tedy platí:

$$M_B = k_B (\varphi_2 - \varphi_3), \quad (5.2)$$

$$M_C = k_C (\varphi_3 - \varphi_4). \quad (5.3)$$

Pro zpomalení a následné zastavení ramen je zde zvoleno tlumení lineárně závislé na rychlosti ramen, tzn. čím rychleji se ramena zvedají, tím víc je pohyb tlumen silou  $F_D$ .

$$F_{D_i} = b_i \dot{\varphi}_i, \quad (5.4)$$

Kinematický a dynamický popis pohybu mechanismu sestává ze dvou podkapitol, kdy každá jedna z nich bude zahrnovat jinou metodu řešení vysouvání antény. I přes fakt, že na popsání mechanismu stačí metoda pouze jedna, díky využití obou z nich na konci práce vzniknou dva identické výsledky.

## 5.1 D'Alembertův princip

D'Alembertův princip, současně nazýván kinetostatická metoda, je metoda založená na úplném uvolnění jednotlivých těles mechanismu (obdoba řešení soustavy těles ze statiky), do níž jsou následně vloženy složky zrychlení získané derivacemi polohy těžišť těles.

### 5.1.1 Kinematický rozbor

Před úplným uvolněním jednotlivých těles je zapotřebí provést kinematický rozbor, který určí počet stupňů volnosti soustavy [16].

$$i = i_v - \left( \sum \xi_i - \eta \right) - k\delta \quad (5.5)$$

Soustava je složená ze 4 těles, přičemž 1. těleso je těleso základní. Každé následující obsahuje 3 stupně volnosti. Dále se zde vyskytují 3 rotační vazby. Každá z nich odebírá 2 stupně volnosti. Nevyskytují se zde žádná degenerovaná tělesa. Po dosazení hodnot do rovnic je určen celkový počet stupňů volnosti.

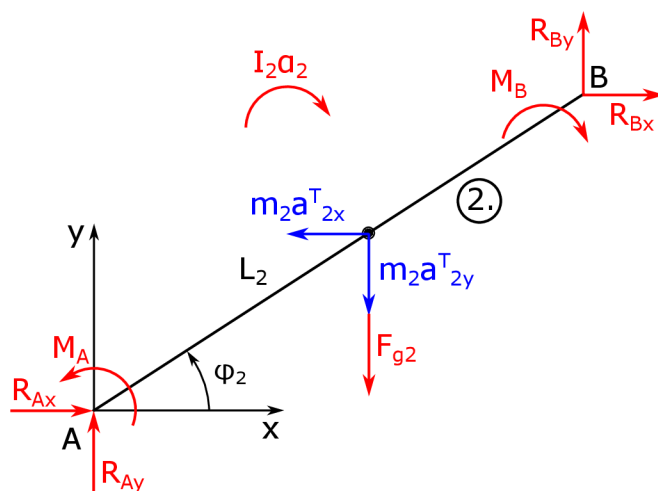
$$i = 9 - (2 + 2 + 2 - 0) = 3^{\circ}V \quad (5.6)$$

### 5.1.2 Úplné uvolnění soustavy těles

Úplné uvolnění mechanismu se provádí za pomoci jeho rozdělení na jednotlivá tělesa. Díky tomu jsou snadno zjistitelné všechny síly a momenty působící na každé těleso.

Rotační vazby se uvolňují ekvivalentním nahrazením za 2 síly, jedna ve směru osy  $x$ , druhá ve směru osy  $y$ . Směry sil si můžeme zvolit jaké chceme, je ovšem zapotřebí dodržet zákon akce a reakce. Ve chvíli, kdy nějaká síla vyjde v záporných hodnotách, znamená to, že výsledný vektor síly míří opačným směrem, než je na obrázku.

### Uvolnění 1. ramena a rovnice rovnováhy



Obr. 5.2. Uvolnění 1. ramena.

$$x : R_{Ax} + R_{Bx} = m_2 a_{2x}^T \quad (5.7)$$

$$y : R_{Ay} + R_{By} - F_{g2} = m_2 a_{2y}^T \quad (5.8)$$

$$M_{O_A} : M_A - M_B + m_2 a_{2x}^T \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 - m_2 a_{2y}^T \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - \\ - R_{Bx} l_2 \sin \varphi_2 + R_{By} l_2 \cos \varphi_2 = I_2 \alpha_2 \quad (5.9)$$

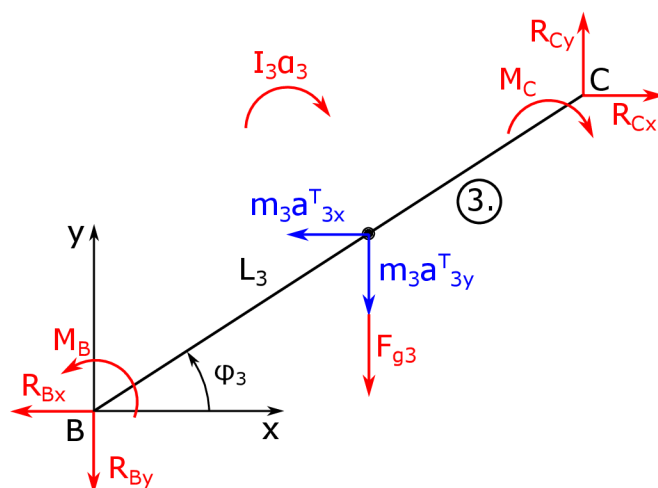
### Uvolnění 2. ramena a rovnice rovnováhy

Přestože z vysouvání mechanismu je zřejmé, že druhé rameno se na rozdíl od prvního a třetího vysouvá v rozmezí od  $180^\circ$  do  $90^\circ$ , je pro výpočet momentu k bodu mnohem jednodušší ho uvolnit stejně jak dvě zbylá ramena, protože se tím zamezí počítání s tupými úhly a tím spojenou změnou znaménka pro funkci kosinus.

$$x : -R_{Bx} + R_{Cx} = m_3 a_{3x}^T \quad (5.10)$$

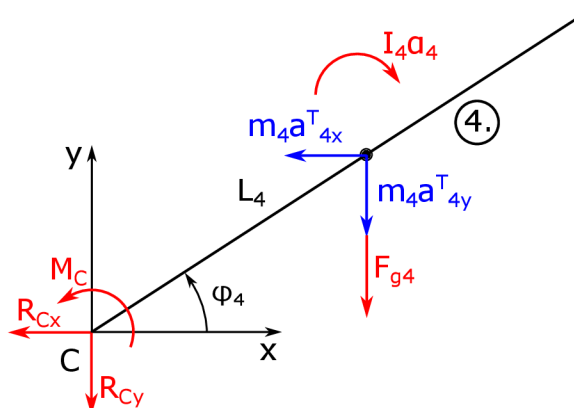
$$y : -R_{By} + R_{Cy} - F_{g3} = m_3 a_{3y}^T \quad (5.11)$$

$$M_{O_B} : M_B - M_C + m_3 a_{3x}^T \frac{l_3}{2} \sin \varphi_3 - m_3 a_{3y}^T \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 - m_3 g \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 - \\ - R_{Cx} l_3 \sin \varphi_3 + R_{Cy} l_3 \cos \varphi_3 = I_3 \alpha_3 \quad (5.12)$$



Obr. 5.3. Uvolnění 2. ramena.

### Uvolnění 3. ramena a rovnice rovnováhy



Obr. 5.4. Uvolnění 3. ramena.

$$x : -R_{Cx} = m_4 a_{4x}^T \quad (5.13)$$

$$y : -R_{Cy} - F_{g4} = m_4 a_{4y}^T \quad (5.14)$$

$$M_{O_C} : M_C + m_4 a_{4x}^T \frac{l_4}{2} \sin \varphi_4 - m_4 a_{4y}^T \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 - m_4 g \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 = I_4 \alpha_4 \quad (5.15)$$



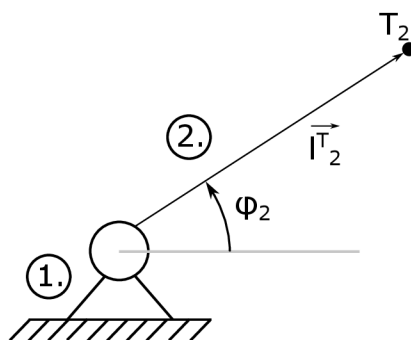
### 5.1.3 Kontrola neznámých parametrů

Díky uvolnění všech těles je nyní zřejmé, kolik neznámých parametrů soustava obsahuje, což určuje počet rovnic potřebných k vyřešení pohybu mechanismu.

$$NP = \{M_A; M_B; M_C; R_{Ax}; R_{Ay}; R_{Bx}; R_{By}; R_{Cx}; R_{Cy}; a_{2x}^T; a_{2y}^T; a_{3x}^T; a_{3y}^T; a_{4x}^T; a_{4y}^T; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4\} = 18 \quad (5.16)$$

Z počtu neznámých parametrů plyne, že soustava aktuálně není řešitelná, jelikož je zapotřebí získat ještě 6 dalších rovnic. Ty jsou dány vektorovým popisem zrychlení těžišť jednotlivých těles zobrazených na obr. 5.5, 5.6 a 5.7 [17]. Díky tomu bude soustava rovnic již řešitelná. Pro pozdější zjednodušení následných úprav momentových rovnic jsou zde zároveň zavedeny substituce obsahující členy, které dále nebude nutné upravovat. Tím je dosaženo větší přehlednosti.

#### 1.rameno



Obr. 5.5. Poloha těžiště 1.ramena.

Poloha těžiště:

$$x_T : \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \quad (5.17)$$

$$y_T : \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 \quad (5.18)$$

Rychlost těžiště:

$$\dot{x}_T : -\frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \quad (5.19)$$

$$\dot{y}_T : \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \quad (5.20)$$

Zrychlení těžiště:

$$\ddot{x}_T : -\frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 - \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 \quad (5.21)$$

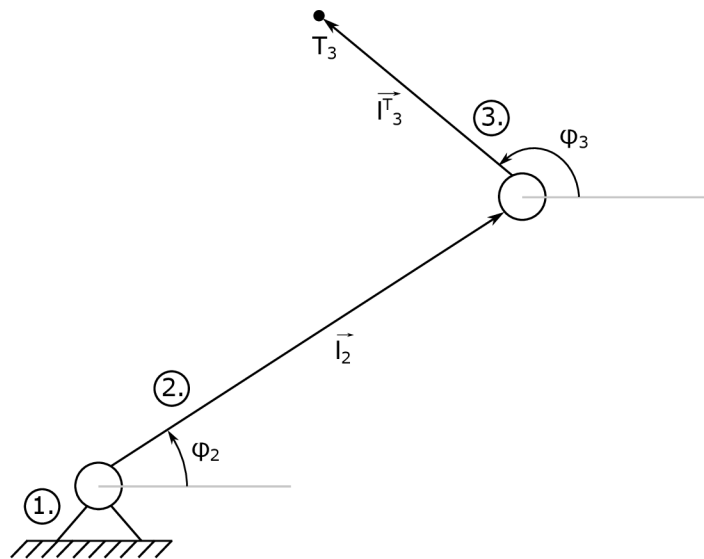
$$\ddot{y}_T : -\frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 \quad (5.22)$$

Zde jsou zavedeny první 2 substituce:

$$\hat{x}_2^T = -\frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 \quad (5.23)$$

$$\hat{y}_2^T = -\frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 \quad (5.24)$$

## 2.rameno



Obr. 5.6. Poloha těžiště 2.ramena.

Poloha těžiště:

$$x_T : l_2 \cos \varphi_2 + \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 \quad (5.25)$$

$$y_T : l_2 \sin \varphi_2 + \frac{l_3}{2} \sin \varphi_3 \quad (5.26)$$

Rychlost těžiště:

$$\dot{x}_T : -l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - \frac{l_3}{2} \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3 \quad (5.27)$$

$$\dot{y}_T : l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3 \quad (5.28)$$

Zrychlení těžiště:

$$\ddot{x}_T : -l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 - l_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 - \frac{l_3}{2} \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 \quad (5.29)$$

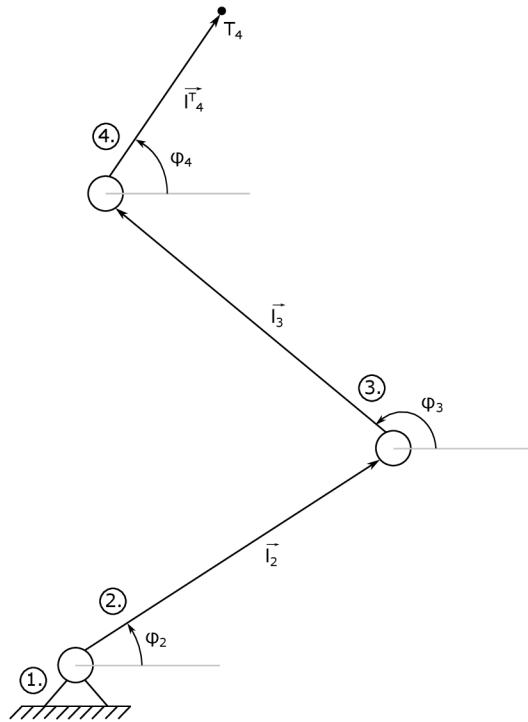
$$\ddot{y}_T : -l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + l_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - \frac{l_3}{2} \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 \quad (5.30)$$

Současně jsou definovány další 2 substitute:

$$\hat{x}_3^T = -l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 - \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 \quad (5.31)$$

$$\hat{y}_3^T = -l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 - \frac{l_3}{2} \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 \quad (5.32)$$

### 3.rameno



Obr. 5.7. Poloha těžiště 3.ramena.

Poloha těžiště:

$$x_T : l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 + \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 \quad (5.33)$$

$$y_T : l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 + \frac{l_4}{2} \sin \varphi_4 \quad (5.34)$$

Rychlost těžiště:

$$\dot{x}_T : -l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - l_3 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3 - \frac{l_4}{2} \sin \varphi_4 \dot{\varphi}_4 \quad (5.35)$$

$$\dot{y}_T : l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + l_3 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3 + \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 \dot{\varphi}_4 \quad (5.36)$$

Úrychlení těžiště:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_T : & -l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 - l_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - l_3 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 - l_3 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 - \\ & - \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 \dot{\varphi}_4^2 - \frac{l_4}{2} \sin \varphi_4 \ddot{\varphi}_4 \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_T : & -l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + l_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - l_3 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 + l_3 \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 - \\ & - \frac{l_4}{2} \sin \varphi_4 \dot{\varphi}_4^2 + \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 \ddot{\varphi}_4 \end{aligned} \quad (5.38)$$

A poslední 2 substituce:

$$\hat{x}_4^T = -l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 - l_3 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 - \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 \dot{\varphi}_4^2 \quad (5.39)$$

$$\hat{y}_4^T = -l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 - l_3 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 - \frac{l_4}{2} \sin \varphi_4 \dot{\varphi}_4^2 \quad (5.40)$$

### 5.1.4 Sestavení soustavy rovnic

Po dosazení všech momentů a zrychlení těžišť do momentových rovnic (5.9), (5.12) a (5.15) je zřejmé, že vznikne systém tří nelineárních diferenciálních rovnic o třech neznámých parametrech, konkrétně  $\ddot{\varphi}_2$ ,  $\ddot{\varphi}_3$  a  $\ddot{\varphi}_4$ . Takoveto typy soustavy rovnic je nutné řešit numerickými metodami, je tedy zapotřebí mít neznámé parametry na jedné straně rovnice a zbytek členů na druhé. Následně se vytvoří matice, které určí hodnoty neznámých parametrů [18].

Pro lepší přehlednost se zde nebudou vyskytovat jednotlivé úpravy, protože se v každé rovnici vyskytuje příliš mnoho členů.

Pro popis 1. ramena proto platí:

$$\begin{aligned} M_A + M_B - m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - m_2 \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \left( \hat{y}_2^T + \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 \right) + \\ + m_2 \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 \left( \hat{x}_2^T - \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 \right) - \\ - l_2 \sin \varphi_2 \left[ -m_4 \left( \hat{x}_4^T - l_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - l_3 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 - \frac{l_4}{2} \sin \varphi_4 \ddot{\varphi}_4 \right) - \right. \\ \left. - m_3 \left( \hat{x}_3^T - l_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - \frac{l_3}{2} \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 \right) \right] + l_2 \cos \varphi_2 (-F_{g4} - F_{g3}) + \\ + l_2 \cos \varphi_2 \left[ -m_4 \left( \hat{y}_4^T + l_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + l_3 \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 + \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 \ddot{\varphi}_4 \right) - \right. \\ \left. - m_3 \left( \hat{y}_3^T + l_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 \right) \right] - I_2 \ddot{\varphi}_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\varphi}_2 \left[ -m_2 \left( \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 \right)^2 - m_3 (l_2 \cos \varphi_2)^2 - m_4 (l_2 \sin \varphi_2)^2 - \right. \\
& \left. - m_3 (l_2 \sin \varphi_2)^2 - m_4 (l_2 \cos \varphi_2)^2 - m_2 \left( \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \right)^2 \right] + \\
& + \ddot{\varphi}_3 \left( -m_4 l_2 l_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 - m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 - \right. \\
& \left. - m_4 l_2 l_3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 - m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \right) + \\
& + \ddot{\varphi}_4 \left( -m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_2 \sin \varphi_4 - m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \right) = \\
& = -M_A - M_B - m_2 \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 \hat{x}_2^T + m_2 \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \hat{y}_2^T + \\
& + m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - m_4 l_2 \sin \varphi_2 \hat{x}_4^T - m_3 l_2 \sin \varphi_2 \hat{x}_3^T - \\
& - l_2 \cos \varphi_2 (-F_{g_4} - F_{g_3}) + m_4 l_2 \cos \varphi_2 \hat{y}_4^T + m_3 l_2 \cos \varphi_2 \hat{y}_3^T
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Diferenciální rovnice pro 2. rameno:

$$\begin{aligned}
& - M_B - M_C - m_3 g \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 - \\
& - m_3 \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 \left( \hat{y}_3^T + l_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 \right) + \\
& + m_3 \frac{l_3}{2} \sin \varphi_3 \left( \hat{x}_3^T - l_2 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 - \frac{l_3}{2} \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 \right) + \\
& + m_4 l_3 \sin \varphi_3 \left( \hat{x}_4^T - l_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - l_3 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 - \frac{l_4}{2} \sin \varphi_4 \ddot{\varphi}_4 \right) + \\
& + l_3 \cos \varphi_3 \left[ -F_{g_4} - m_4 \left( \hat{y}_4^T + l_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + l_3 \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 + \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 \ddot{\varphi}_4 \right) \right] - \\
& - I_3 \ddot{\varphi}_3 = 0
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\varphi}_2 \left( -m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 - m_4 l_2 l_3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 - \right. \\
& \quad \left. - m_4 l_2 l_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 - m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \right) + \\
& + \ddot{\varphi}_3 \left[ -m_3 \left( \frac{l_3}{2} \sin \varphi_3 \right)^2 - m_4 (l_3 \sin \varphi_3)^2 - \right. \\
& \quad \left. - m_4 (l_3 \cos \varphi_3)^2 - m_3 \left( \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 \right)^2 - I_3 \right] + \\
& + \ddot{\varphi}_4 \left( -m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_3 \sin \varphi_4 - m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_3 \cos \varphi_4 \right) = \\
& = M_B + M_C - m_3 \frac{l_3}{2} \sin \varphi_3 \hat{x}_3^T + m_3 \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 \hat{y}_3^T - \\
& - m_4 l_3 \sin \varphi_3 \hat{x}_4^T + m_4 l_3 \cos \varphi_3 \hat{y}_4^T + \\
& + l_3 F_{g_4} \cos \varphi_3 + m_3 g \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Nakonec 3. rameno:

$$\begin{aligned}
& M_C - m_4 g \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 \\
& + m_4 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_4 \left( \hat{x}_4^T - l_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - l_3 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 - \frac{l_4}{2} \sin \varphi_4 \ddot{\varphi}_4 \right) - \\
& - m_4 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 \left( \hat{y}_4^T + l_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + l_3 \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 + \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 \ddot{\varphi}_4 \right) - \\
& - I_4 \ddot{\varphi}_4 = 0
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\varphi}_2 \left( -m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_2 \sin \varphi_4 - m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_2 \cos \varphi_4 \right) + \\
& + \ddot{\varphi}_3 \left( -m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_3 \sin \varphi_4 - m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_3 \cos \varphi_4 \right) + \\
& + \ddot{\varphi}_4 \left[ -m_4 \left( \frac{l_4}{2} \sin \varphi_4 \right)^2 - m_4 \left( \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 \right)^2 - I_4 \right] = \\
& = -M_C + m_4 g \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 - m_4 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_4 \hat{x}_4^T + \\
& + m_4 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 \hat{y}_4^T
\end{aligned} \tag{5.46}$$

## 5.2 Lagrangeovy rovnice II. druhu

Druhá metoda řešení vysouvání mechanismu je popsána Langrangeovými rovnicemi II. druhu. Tato metoda funguje na základě popisu mechanismu pomocí kinetických a potenciálních energií. Základní Lagrangeova rovnice (4.8) je v rámci zjednodušení následujících úprav zapsána následovně:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_i} = - \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial E_D}{\partial \dot{\varphi}_i} \quad (5.47)$$

### 5.2.1 Kinetická energie

Kinetická energie soustavy je složena z jednotlivých členů popisující energii každého tělesa zvlášť. Popis pohybu těles je tvořen pohybovými a otáčivými složkami rychlosti, rovnice pro kinetickou energii je tedy vyjádřena následovně:

$$E_k = \frac{1}{2} m_2 v_2^{T^2} + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^{T^2} + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^{T^2} + \frac{1}{2} I_4 \dot{\varphi}_4^2 \quad (5.48)$$

V rovnicích vystupují veličiny  $v_2^{T^2}$ ,  $v_3^{T^2}$  a  $v_4^{T^2}$  znázorňující rychlost těžišť, což ještě není jednoznačně vyjádřeno, jelikož jsou známy pouze rychlosti rozložené do souřadnicového systému  $XY$ . Pythagorovou větou tedy je možné sečíst rozložené rychlosti a tím získat výslednou rychlost.

$$v_2^{T^2} = \dot{x}_2^{T^2} + \dot{y}_2^{T^2} \quad (5.49)$$

$$v_3^{T^2} = \dot{x}_3^{T^2} + \dot{y}_3^{T^2} \quad (5.50)$$

$$v_4^{T^2} = \dot{x}_4^{T^2} + \dot{y}_4^{T^2}, \quad (5.51)$$

kde  $\dot{x}_2^{T^2}$ ,  $\dot{y}_2^{T^2}$ ,  $\dot{x}_3^{T^2}$ ,  $\dot{y}_3^{T^2}$ ,  $\dot{x}_4^{T^2}$  a  $\dot{y}_4^{T^2}$  jsou vyjádřeny již z vektorového popisu rovnicemi (5.19), (5.20), (5.27), (5.28) (5.35) a (5.36). Nyní jsou zkompletovány všechny prerekvizity k provedení parciálních derivací týkající se kinetické energie.

#### Derivace kinetické energie podle $\varphi_2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2} &= m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 - m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + \\ &+ m_4 l_2 l_3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_2 \sin \varphi_4 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_4 - \\ &- m_4 l_2 l_3 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 - m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_2 \cos \varphi_4 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_4 \end{aligned} \quad (5.52)$$

**Derivace kinetické energie podle  $\varphi_3$** 

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_3} = & -m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 - \\ & - m_4 l_2 l_3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_3 \sin \varphi_4 \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_4 + \\ & + m_4 l_2 l_3 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 - m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_3 \cos \varphi_4 \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_4 \end{aligned} \quad (5.53)$$

**Derivace kinetické energie podle  $\varphi_4$** 

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_4} = & -m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_2 \sin \varphi_4 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_4 - m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_3 \sin \varphi_4 \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_4 + \\ & + m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_2 \cos \varphi_4 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_4 + m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_3 \cos \varphi_4 \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_4 \end{aligned} \quad (5.54)$$

Další derivace kinetické energie, konkrétně derivace podle  $\dot{\varphi}_i$  a následná derivace podle času  $t$ , zde nebude pro zachování přehlednosti uvedena, jelikož úpravy jsou příliš dlouhé.

**5.2.2 Potenciální energie**

Potenciální energie závisí na poloze jednotlivých ramen, která jsou v čase odlišná. Zároveň zde podle Lagrangeových rovnic vystupuje i působící moment, můžeme tedy zapsat rovnici:

$$\begin{aligned} E_p = & m_2 g y_2 + m_3 g y_3 + m_4 g y_4 + \\ & + \frac{1}{2} k_A \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right)^2 + \frac{1}{2} k_B (\varphi_2 - \varphi_3)^2 + \frac{1}{2} k_C (\varphi_3 - \varphi_4)^2, \end{aligned} \quad (5.55)$$

kde  $y_2$ ,  $y_3$  a  $y_4$  jsou již taktéž vyjádřeny v rovnicích (5.18), (5.26) a (5.34). Nyní mohou být provedeny derivace potenciální energie podle  $\varphi_i$ :

**Derivace potenciální energie pro 1. rameno**

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_2} = m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 + m_3 g l_2 \cos \varphi_2 + m_4 g l_2 \cos \varphi_2 - M_A + M_B \quad (5.56)$$

**Derivace potenciální energie pro 2. rameno**

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_3} = m_3 g \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 + m_4 g l_3 \cos \varphi_3 - M_B + M_C \quad (5.57)$$

**Derivace potenciální energie pro 3. rameno**

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_4} = m_4 g \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 - M_C \quad (5.58)$$



### 5.2.3 Energie tlumení

Tlumení zahrnuje 3 tlumiče zastavující mechanismus ve vzpřímené poloze, pro tlumící energii platí:

$$E_D = \frac{1}{2}b_A\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}b_B\dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2}b_C\dot{\varphi}_4^2 \quad (5.59)$$

Derivace energie tlumení pro 1. rameno

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\varphi}_2} = b_A\dot{\varphi}_2 \quad (5.60)$$

Derivace energie tlumení pro 2. rameno

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\varphi}_3} = b_B\dot{\varphi}_3 \quad (5.61)$$

Derivace energie tlumení pro 3. rameno

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\varphi}_4} = b_C\dot{\varphi}_4 \quad (5.62)$$

### 5.2.4 Sestavení soustavy rovnic

Rovnice jsou upraveny do stejné podoby jako v předchozí metodě a vyřešeny numericky metodou `odeint` z balíku `numpy`.

Pro 1.rameno platí,

$$\begin{aligned} & m_2 \left( \frac{l_2}{2} \right)^2 \ddot{\varphi}_2 + m_3 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_4 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + I_2 \ddot{\varphi}_2 + \\ & + m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 + m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 + \\ & + m_4 l_2 l_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 + m_4 l_2 l_3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 + \\ & + m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_2 \sin \varphi_4 \ddot{\varphi}_4 + m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_2 \cos \varphi_4 \ddot{\varphi}_4 = \\ & = m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 - m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 - \\ & - m_4 l_2 l_3 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 - m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_2 \cos \varphi_4 \dot{\varphi}_4^2 + \\ & + m_4 l_2 l_3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 + m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_2 \sin \varphi_4 \dot{\varphi}_4^2 - \\ & - m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 - m_3 g l_2 \cos \varphi_2 - m_4 g l_2 \cos \varphi_2 + \\ & + M_A - M_B - b_A \dot{\varphi}_2. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Pro 2.rameno platí,

$$\begin{aligned}
& m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_2 + m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_2 + \\
& + m_4 l_2 l_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_2 + m_4 l_2 l_3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_2 + \\
& + m_3 \left( \frac{l_3}{2} \right)^2 \ddot{\varphi}_3 + m_4 l_3^2 \ddot{\varphi}_3 + I_3 \ddot{\varphi}_3 + \\
& + m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_3 \sin \varphi_4 \ddot{\varphi}_4 + m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_3 \cos \varphi_4 \ddot{\varphi}_4 = \\
& = m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_2^2 - m_3 l_2 \frac{l_3}{2} \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_2^2 - \\
& - m_4 l_2 l_3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_2^2 - m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_3 \cos \varphi_4 \dot{\varphi}_4^2 + \\
& + m_4 l_2 l_3 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_2^2 + m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_3 \sin \varphi_4 \dot{\varphi}_4^2 - \\
& - m_3 g \frac{l_3}{2} \cos \varphi_3 - m_4 g l_3 \cos \varphi_3 + M_B - M_C - b_B \dot{\varphi}_3.
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Pro 3.rameno platí,

$$\begin{aligned}
& m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_2 \sin \varphi_4 \ddot{\varphi}_2 + m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_2 \cos \varphi_4 \ddot{\varphi}_2 + \\
& + m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_3 \sin \varphi_4 \ddot{\varphi}_3 + m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_3 \cos \varphi_4 \ddot{\varphi}_3 + \\
& + m_4 \left( \frac{l_4}{2} \right)^2 \ddot{\varphi}_4 + I_4 \ddot{\varphi}_4 = M_C - b_C \dot{\varphi}_4 - m_4 g \frac{l_4}{2} \cos \varphi_4 - \\
& - m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_2 \sin \varphi_4 \dot{\varphi}_2^2 - m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \cos \varphi_3 \sin \varphi_4 \dot{\varphi}_3^2 + \\
& + m_4 l_2 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_2 \cos \varphi_4 \dot{\varphi}_2^2 + m_4 l_3 \frac{l_4}{2} \sin \varphi_3 \cos \varphi_4 \dot{\varphi}_3^2.
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Už při sepsání finálních rovnic pomocí Lagrangeovy metody je zřejmé, že hodnoty budou naprosto stejné, protože veškeré členy jsou identické v porovnání se členy při řešení soustavy kinetostatickou metodou.

## 6 Výsledky a diskuze

Po získání soustavy rovnic je nyní zapotřebí sestavit maticovou rovnici, která je již numericky vyřešitelná pomocí příkazu `numpy` z obr. 4.2. Maticová rovnice je vyjádřena ve tvaru:

$$A \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

kde  $A$  je matice 3x3 složená ze členů na levé straně rovnic a matice  $F$  je složená ze členů na pravé straně rovnic [18]. Na obr. 4.1 je zobrazena ukázka sestavení rovnic pro výpočet pohybu prvního ramena.

### 6.1 Vstupní hodnoty pro zemskou aplikaci

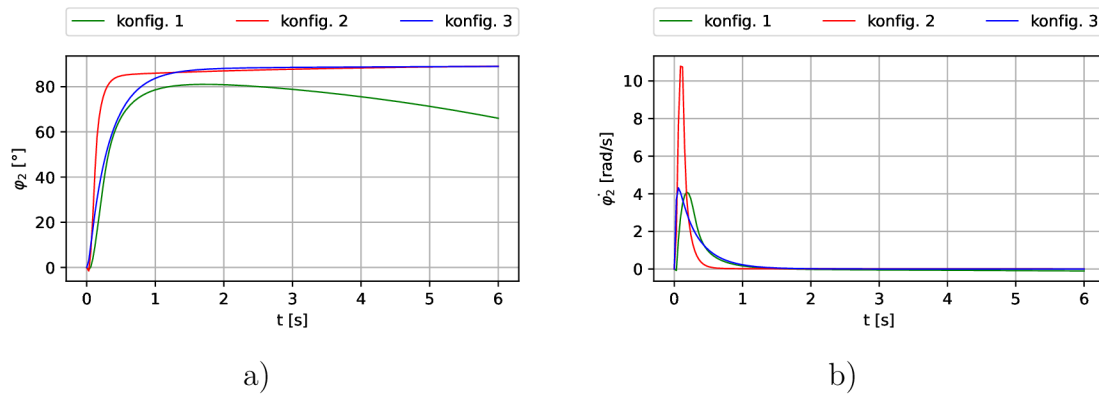
Vstupní hodnoty jsou voleny do 3 různých konfigurací (viz Tab. 6.1), kdy ve všech jsou zachovány stejné hodnoty délky a hmotnosti ramen společně s gravitační konstantou pro hlubší porozumění účinku jednotlivých pružin a tlumičů. Jednotlivé konfigurace jsou voleny postupně od nejnižších hodnot tak, aby výsledky co možná nejlépe odpovídaly reálnému provozu a zároveň na ně byl nejnižší možný požadavek.

veličina	jednotka	konfigurace 1	konfigurace 2	konfigurace 3
$m_2$	[kg]	0,5	0,5	0,5
$m_3$	[kg]	0,5	0,5	0,5
$m_4$	[kg]	0,5	0,5	0,5
$g$	[m/s <sup>2</sup> ]	9,81	9,81	9,81
$l_2$	[m]	0,5	0,5	0,5
$l_3$	[m]	0,5	0,5	0,5
$l_4$	[m]	0,5	0,5	0,5
$k_A$	[Nm/rad]	8	25	30
$k_B$	[Nm/rad]	6	20	25
$k_C$	[Nm/rad]	8	30	35
$b_A$	[Ns/m]	5	7	25
$b_B$	[Ns/m]	6	8	35
$b_C$	[Ns/m]	4	6	22

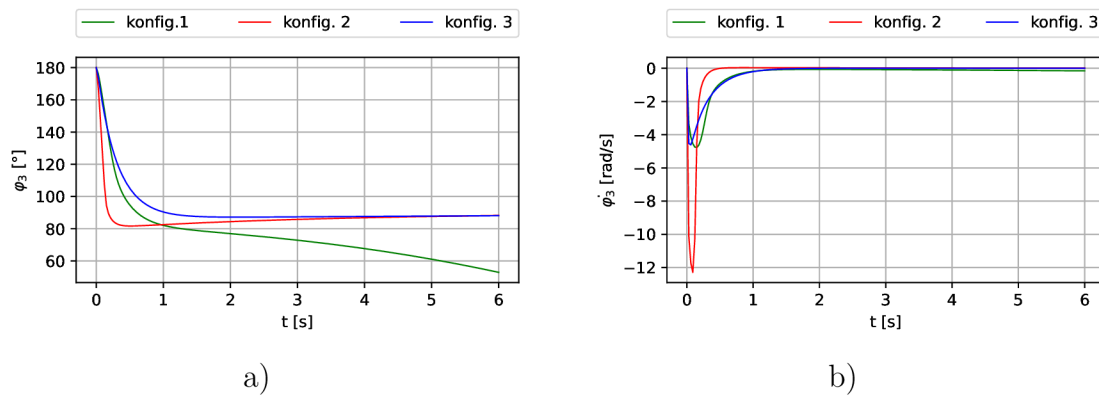
Tab. 6.1. Vstupní hodnoty pro zemskou aplikaci.

#### 6.1.1 Určení průběhu polohy a rychlosti

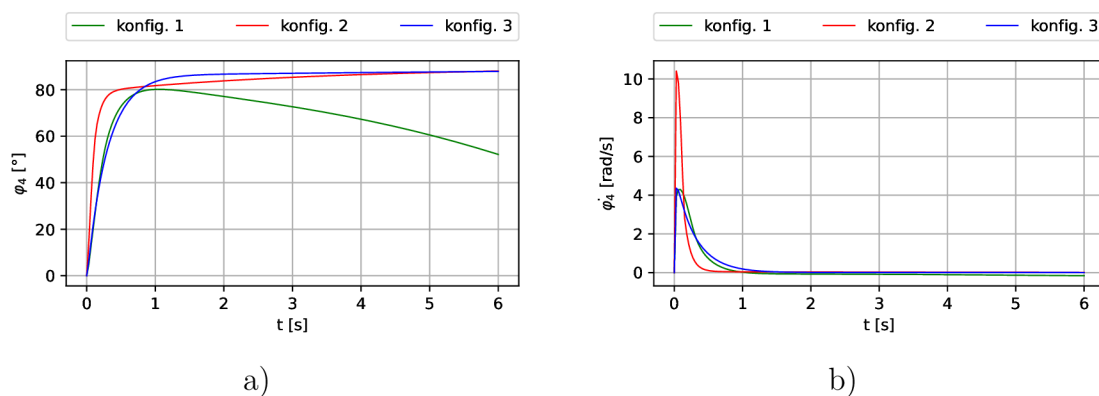
V grafech 6.1, 6.2 a 6.3 jsou zobrazeny průběhy polohy a rychlosti u jednotlivých ramen pro všechny 3 konfigurace, přičemž 1. konfigurace je znázorněna zelenou barvou, 2. konfigurace barvou červenou a poslední konfigurace barvou modrou.



Obr. 6.1. Výsledné hodnoty 1. ramena: a) Průběh polohy, b) Průběh rychlosti



Obr. 6.2. Výsledné hodnoty 2. ramena: a) Průběh polohy, b) Průběh rychlosti

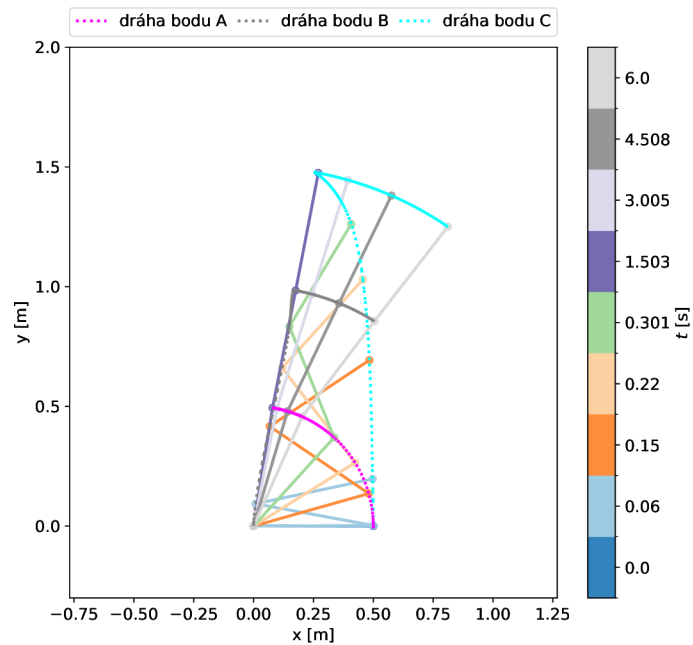


Obr. 6.3. Výsledné hodnoty 3. ramena: a) Průběh polohy, b) Průběh rychlosti

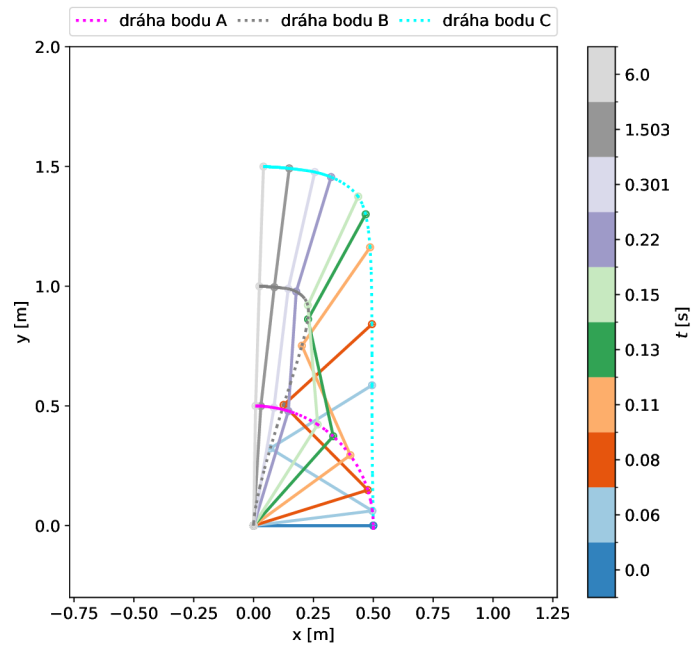
### Vykreslení průběhu celého mechanismu

Předchozí grafy zobrazují polohy a rychlosti jednotlivých ramen vyvíjejících se v čase  $t$ . Pro lepší porozumění funkce celého mechanismu jsou zde grafy 6.4, 6.5 a 6.6 znázorňující

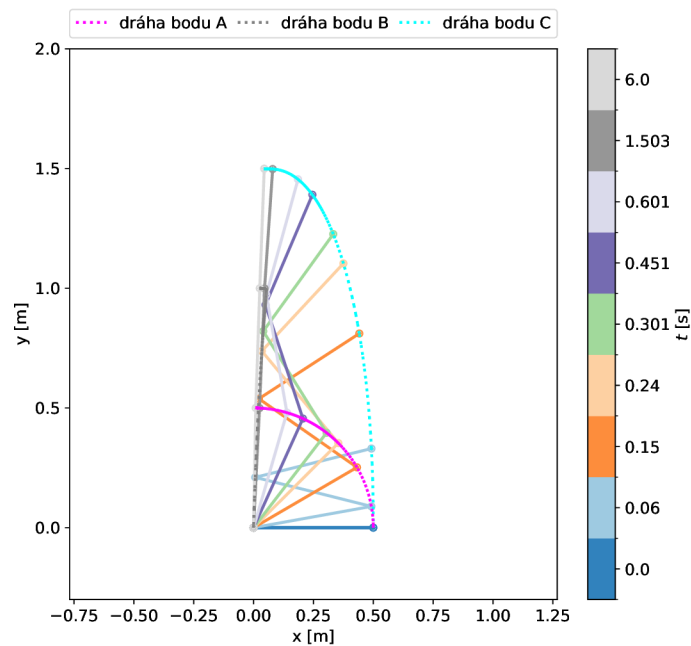
vysunutí ramen v rámci celého mechanismu pro všechny tři konfigurace.



Obr. 6.4. Průběh soustavy při 1. konfiguraci.



Obr. 6.5. Průběh soustavy při 2. konfiguraci.



Obr. 6.6. Průběh soustavy při 3. konfiguraci.

Konfigurace 1 je volena s myšlenkou zachování co nejmenších hodnot pružin a tlumení, díky čemuž jsou jednotlivé komponenty bezpečnější, dostupnější a cenově výhodnější. Bohužel je konfigurace nedostačující, jelikož pružiny nevykazují dostatečně velký moment, který by ramena zvednul do vertikální polohy a ramena postupem času padají zpět k zemi.

Vzhledem k nedostačujícímu momentu je 2. konfigurace volena s pružinami o větší tuhosti, současně se zachováním nízkých hodnot tlumících konstant. Zde je již vidět, že ramena se dokážou dostat do vertikální polohy a zároveň v ní setrvat. Problém spočívá ve vysoké rychlosti vysouvání ramen, jelikož se zde dostáváme do hodnot okolo 12 m/s, což je na daný mechanismus zbytečně moc.

Konfigurace 3 je zde zobrazena jako nejvhodnější varianta. Tuhost pružin společně s tlumením dosahují vysokých hodnot, což zaručuje jak stabilitu při vertikální poloze, tak i relativně nízkou rychlost.

### 6.1.2 Určení reakčních sil ve vazbách

Určení reakčních sil je možno provést právě díky použití D'Alembertova principu. Při již spočítaných hodnotách zrychlení je zde několik možností postupu výpočtu. Zde je zvolen opět maticový způsob výpočtu reakčních sil z důvodu jednoduchosti zadávání hodnot do Pythonu. Vychází se z rovnic rovnováhy pro jednotlivá tělesa v ose  $X$  a  $Y$ , viz oddíl 5.1.2, kdy na levé straně rovnic se nachází všechny reakční síly a na pravé straně rovnic jsou zapsány zrychlení, popř. gravitační síla  $F_{g_i}$ . Pro upřesnění operace je zde uveden jeden příklad z rovnice (5.8):

$$R_{A_y} + R_{B_y} = m_2 a_{2_y}^T + F_{g_2} \quad (6.2)$$

Vychází se z obecného předpisu maticové rovnice, která je zapsána jako

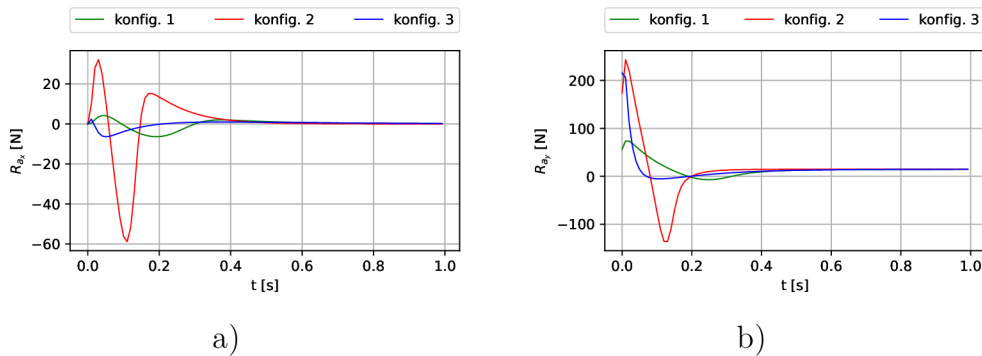
$$Ax = b, \quad (6.3)$$

kde matice  $A$  představuje levou stranu rovnic, matice  $x$  je matice neznámých parametrů a matice  $b$  představuje pravou stranu rovnic. Rovnice (5.7), (5.8), (5.10), (5.11), (5.13) a (5.14) tvoří soustavu šesti lineárních rovnic, která je v maticovém tvaru zapsána jako:

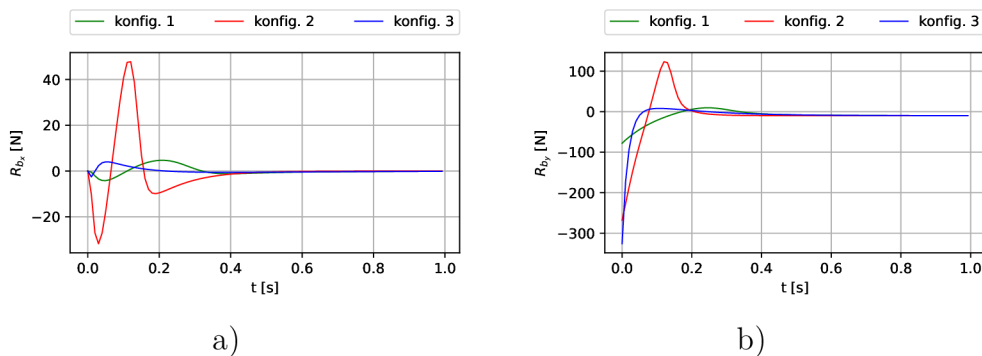
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{A_x} \\ R_{A_y} \\ R_{B_x} \\ R_{B_y} \\ R_{B_x} \\ R_{B_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 a_{2_x}^T \\ m_2 a_{2_y}^T + F_{g_2} \\ m_3 a_{3_x}^T \\ m_3 a_{3_y}^T + F_{g_3} \\ m_4 a_{4_x}^T \\ m_4 a_{4_y}^T + F_{g_4} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

### Výsledné průběhy reakčních sil

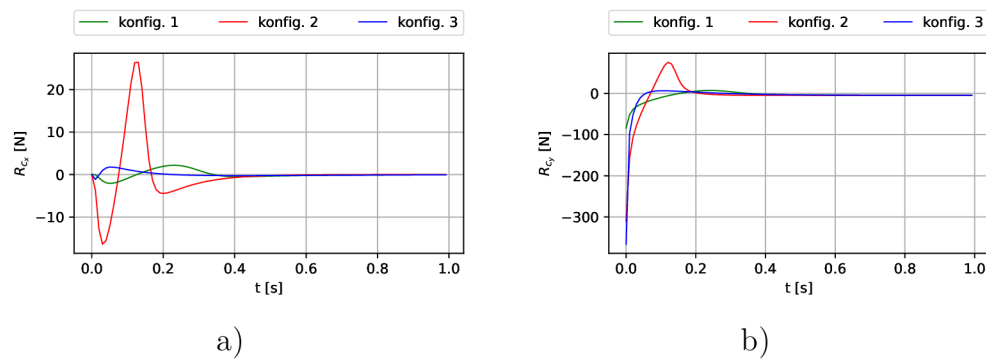
V grafech 6.7, 6.8 a 6.9 jsou vykresleny průběhy sil v čase 0 až 1 s pro jednotlivé konfigurace antény.



Obr. 6.7. Výsledný průběh reakčních sil: a) Reakční síla  $R_{A_x}$ , b) Reakční síla  $R_{A_y}$



Obr. 6.8. Výsledný průběh reakčních sil: a) Reakční síla  $R_{B_x}$ , b) Reakční síla  $R_{B_y}$



Obr. 6.9. Výsledný průběh reakčních sil: a) Reakční síla  $R_{C_x}$ , b) Reakční síla  $R_{C_y}$

## 6.2 Vstupní hodnoty pro vesmírnou aplikaci

Jediný rozdíl mezi vstupními hodnotami pro zemskou a pro vesmírnou aplikaci je hodnota gravitační konstanty, která je zde nulová (viz. Tab 6.2). Není zapotřebí zobrazovat více konfigurací, jelikož díky nulové gravitaci je nárok na pružiny a tlumiče minimální.

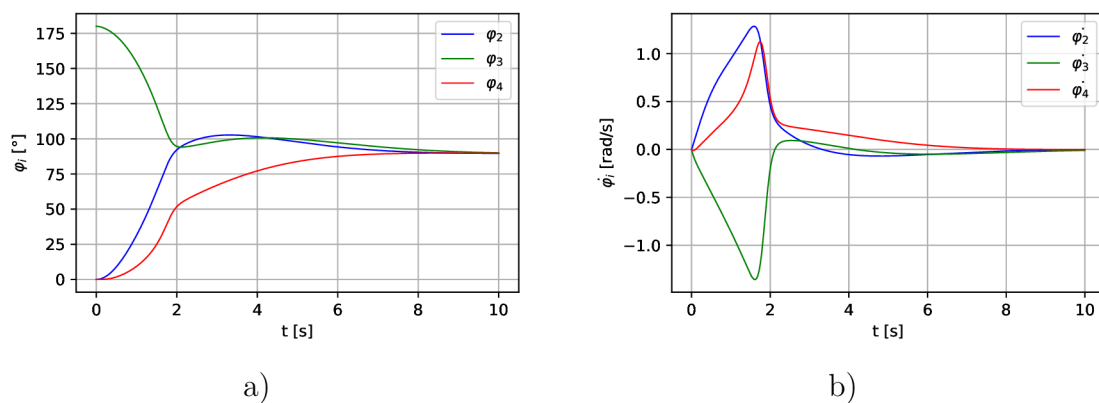
veličina	jednotka	hodnoty
$m_2$	[kg]	0,5
$m_3$	[kg]	0,5
$m_4$	[kg]	0,5
$g$	[m/s <sup>2</sup> ]	0
$l_2$	[m]	0,5
$l_3$	[m]	0,5
$l_4$	[m]	0,5
$k_A$	[Nm/rad]	0,2
$k_B$	[Nm/rad]	0,1
$k_C$	[Nm/rad]	0,05
$b_A$	[Ns/m]	0,25
$b_B$	[Ns/m]	0,3
$b_C$	[Ns/m]	0,2

Tab. 6.2. Vstupní hodnoty pro vesmírnou aplikaci.

### 6.2.1 Určení průběhu polohy a rychlosti

V grafech 6.10 jsou zobrazeny průběhy polohy a rychlosti obdobně jako v předešlé podkapitole.

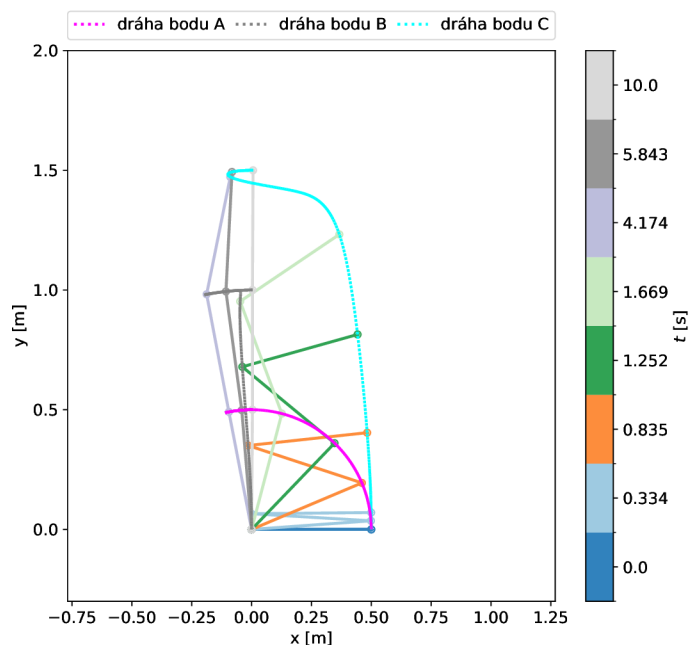




Obr. 6.10. Výsledné hodnoty: a) Průběh polohy, b) Průběh rychlosti

### Vykreslení průběhu celého mechanismu

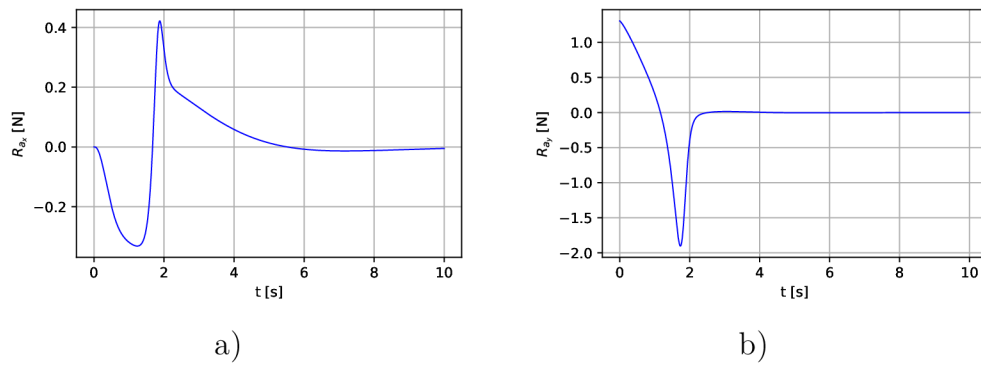
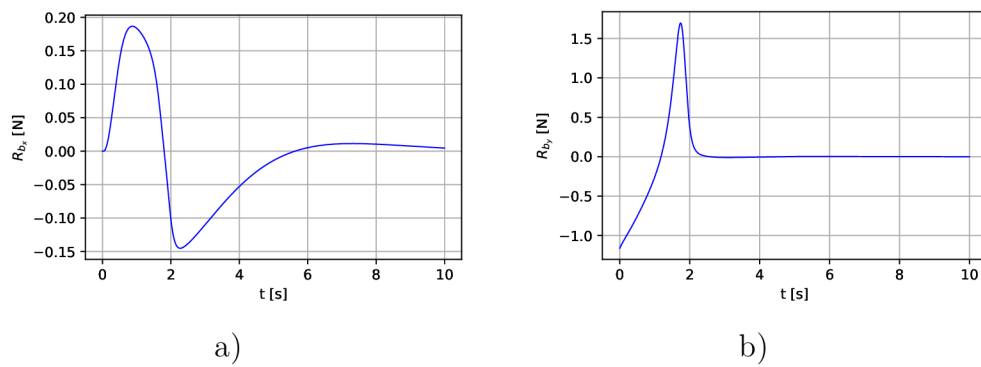
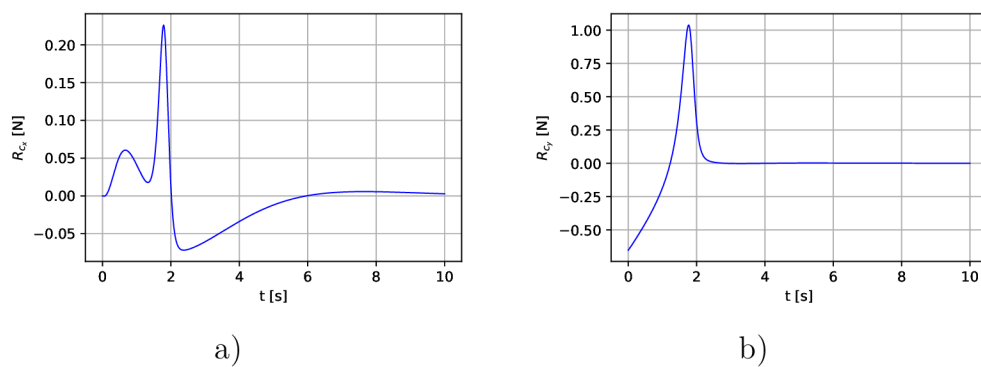
Na obr. 6.11 je zakreslen průběh celé soustavy rozvíjející se v čase pro lepší přehlednost a pochopení funkce mechanismu.



Obr. 6.11. Průběh soustavy.

### 6.2.2 Určení reakčních sil ve vazbách

Určení reakčních sil se provádí stejným způsobem jako v oddíle 6.1.2 a je zobrazeno v grafech 6.12, 6.13 a 6.14.

Obr. 6.12. Výsledný průběh reakčních sil: a) Reakční síla  $R_{A_x}$ , b) Reakční síla  $R_{A_y}$ Obr. 6.13. Výsledný průběh reakčních sil: a) Reakční síla  $R_{B_x}$ , b) Reakční síla  $R_{B_y}$ Obr. 6.14. Výsledný průběh reakčních sil: a) Reakční síla  $R_{C_x}$ , b) Reakční síla  $R_{C_y}$

## Diskuze

Z předešlých grafů je zřejmé, že při aplikaci na povrchu Země musí být hodnoty pružin navoleny dostatečně vysoké, aby byly schopny nejen ramena rozpochybovat, ale zároveň aby se ramena dokázala dostat do vertikální polohy a v ní setrvat. Z toho důvodu musí být relativně velké i tlumicí konstanty, aby naopak ramena nebyla vysunuta příliš rychle a nedocházelo k velkému kmitání. To vyvolává otázku, jak moc je taková konfigurace reálná, popřípadě kde jsou vyvolány rozdíly zapříčiňující vysokou nárokovost na pružiny a tlumiče.

Hlavním, avšak v této práci jediným, faktorem je přítomnost zemské gravitační síly působící proti pohybu rozvinu soustavy. Naopak ve vesmíru, kde nedochází k působení gravitace, se hodnoty pružin a tlumičů pohybují pouze v řádech desetin. Výsledné hodnoty jsou porovnány s reálnějšími analýzami z odborných článků dostupných na internetu, např. [10], což ovšem není úplně jednoduché, protože jednotlivé mechanismy jsou řešeny v odlišných podmínkách. Mechanismus rozebíraný v této práci uvažuje nehybné základní těleso, kdy při reálné verzi se anténa může nacházet na pohybujícím se robotickém vozítku. Tento fakt koresponduje taktéž s další vnější podmínkou a to je například vliv povětrnostních podmínek při aplikaci na Zemi, které zde nejsou zohledněny. Většina odborných analýz uvažuje tření, v některých případech je dokonce tření jediným brzdícím účinkem. Jelikož tento mechanismus je zastaven pouze pomocí tlumičů závislých na rychlosti, tuhosti pružin se zde musí pohybovat v řádů desítek Nm/rad, protože soustava musí být dostatečně rychle vysunuta, aby byla schopná dosáhnout vertikálního stavu. V opačném důsledku kvůli zemské gravitaci ramena postupně klesají směrem k zemi.

Na závěr je nezbytné prozkoumat hodnoty, na kterých se ustálily vazebné síly  $R_{A_y}$ ,  $R_{B_y}$  a  $R_{C_y}$ . Síla  $R_{A_y}$  je ustálena na hodnotě 14,71 N, což odpovídá hodnotě poloviny gravitační síly, z důvodu hmotnosti ramena 0,5 kg, ke které jsou připočítány další dvě stejné hodnoty od tíhy zbylých dvou ramen. Stejnému principu odpovídají i zbylé hodnoty  $R_{B_y}$  a  $R_{C_y}$ , kdy poslední zmíněná síla je ustálena na hodnotě -4,9 N, jelikož není zatěžováno žádným dalším ramenem. Znaménko mínus zde akorát značí opačný směr síly, než je zakreslený na obr. 5.4. Naopak hodnoty těchto sil při rozvinu ve vesmíru jsou ustáleny na nule právě kvůli nulovému gravitačnímu zrychlení.



## 7 Závěr

Tato bakalářská práce se zabývala kinematickým a dynamickým popisem mechanismu rozložitelné antény vesmírného plavidla s využitím dvou odlišných metod: D'Alembertovy a Lagrangerovy metody. Cílem bylo nejen podrobně popsat tento mechanismus a navrhnout optimální parametry pro vysunutí antény, ale také porovnat obě metody a zhodnotit jejich výhody a nevýhody.

Prostřednictvím rešerše existujících rozkládacích antén jsme získali komplexní přehled o současných technologiích a jejich konstrukčních řešeních. Tento přehled sloužil jako základ pro další analýzu kinematických a dynamických vlastností mechanismu rozložitelné antény.

Výsledky poskytly podrobný pohled na dvě odlišné metody řešení kinematiky a dynamiky mechanismu. Každá z těchto metod má své výhody a nevýhody, které byly analyzovány a srovnány na základě teoretických i praktických kritérií.

Popis D'Alembertovým principem se ukázal být užitečným nástrojem pro jednoduché pochopení pohybových charakteristik jednotlivých částí antény. Tento přístup umožňuje snadné vizualizování pohybů. Další nespornou výhodou je možnost určení průběhu reakčních sil v čepích mechanismu. Naopak Lagrangerova metoda nabízí přístup, který zahrnuje dynamické aspekty systému. Tato metoda umožňuje přesný popis mechanismu na základě jejich energetických vlastností jako je kinetická a potenciální energie.

Při porovnání obou metod bylo zjištěno, že uvolňovací metoda je výhodná pro počáteční fáze návrhu a určení průběhu vazebných sil, zatímco Lagrangerova metoda je vhodnější pro finální fáze návrhu. Cíle bakalářské práce se tedy mohou považovat za splněné, jelikož výsledky vedou ke stejnému řešení. Pozoruhodným zjištěním je naopak fakt, že nejefektivnější cesta pro získání optimálních výsledků je doporučeno využívat kombinovaný přístup, který umožňuje využít silné stránky obou metod a minimalizovat jejich slabiny.

Na závěr vykreslené průběhy 3 různých konfigurací ukázaly zajímavé výsledky, kde ideální hodnoty torzních pružin a tlumičů dosahují relativně vysokých hodnot, které jsou zapříčiněné zemskou gravitační silou působící proti pohybu mechanismu. Pro nulovou gravitační sílu, respektive pro vesmírnou aplikaci, jsou hodnoty srovnatelné s reálnými modely.



# Seznam použité literatury

- [1] WIJKER, Jacob Job. *Spacecraft structures*. Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN 9783540755524. Dostupné z DOI: [10.1007/978-3-540-75553-1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-75553-1).
- [2] AGENCY, The European Space. *ESA - ExoMars 2016 FAQs*. [B.r.].
- [3] THOMSON, Mark W. The AstroMesh deployable reflector. In: 1999, sv. 3, s. 1516–1519. ISBN 078035639X. Dostupné z DOI: [10.1109/APS.1999.838231](https://doi.org/10.1109/APS.1999.838231).
- [4] COWING, Keith. *Six Meter AstroMesh Deployable Reflector - SpaceRef*. 2013.
- [5] LIU, Zhaoyang; DING, Yunlong; QUAN, Chaoyang; FAN, Guozhuang; SONG, Jun; YANG, Dongwu. Optimization of a novel, bidirectional, double-ring, deployable mesh antenna with a super-large aperture. *Acta Astronautica*. 2024, roč. 214, s. 202–215. ISSN 00945765. Dostupné z DOI: [10.1016/j.actaastro.2023.10.031](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2023.10.031).
- [6] SHI, Zhiyang; LI, Tuanjie; TANG, Yaqiong; LI, Ming; ZHOU, Xin; QIAN, Junjie. Design and analysis of scissor-like hoop truss deployable antenna mechanism with arbitrary curvature support ribs. *Acta Astronautica*. 2024, roč. 219, s. 24–40. ISSN 00945765. Dostupné z DOI: [10.1016/j.actaastro.2024.03.005](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2024.03.005).
- [7] SANTONI, Fabio; PIERGENTILI, Fabrizio; DONATI, Serena; PERELLI, Massimo; NEGRI, Andrea; MARINO, Michele. An innovative deployable solar panel system for Cubesats. *Acta Astronautica*. 2014, roč. 95, s. 210–217. ISSN 00945765. Dostupné z DOI: [10.1016/j.actaastro.2013.11.011](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.11.011).
- [8] CORPORATION, The Aerospace. *Aerospace CubeSats for NASA's LLITED Mission to Be Launched by Spaceflight Inc. / The Aerospace Corporation*. 2021.
- [9] TAKANO, Tadashi; SAEGUSA, Kenji; SHIBATA, Kuniaki; KANEDA, Yuhei; MIYAZAKI, Yasuyuki; ARAKI, Yuta. Novel phased-array antenna with stepped deployment to overcome container size limitation. *Acta Astronautica*. 2022, roč. 192, s. 113–121. ISSN 00945765. Dostupné z DOI: [10.1016/j.actaastro.2021.12.005](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.12.005).
- [10] GUO, Jinwei; ZHAO, Yongsheng; XU, Yundou; ZHANG, Guoxing. Mechanics analysis and structural design of a truss deployable antenna mechanism based on 3RR-3URU tetrahedral unit. *Mechanism and Machine Theory*. 2022, roč. 171. ISSN 0094114X. Dostupné z DOI: [10.1016/j.mechmachtheory.2022.104749](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2022.104749).
- [11] KRATOCHVÍL, Ctirad. *Mechanika těles : dynamika*. Vyd. 4. V Akademickém nakl. CERM 2. vyd. Akademické nakladatelství CERM, 2007. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně). ISBN 978-80-214-3446-2.
- [12] BRDIČKA, Miroslav. *Teoretická mechanika*. Vydání 1. Academia, 1987.
- [13] GROSS, Dietmar; HAUGER, Werner; SCHRÖDER, Jörg; WALL, Wolfgang; GOVINDJEE, Sanjay. *Engineering Mechanics 3*. Springer Berlin Heidelberg, 2011. ISBN 978-3-642-14018-1. Dostupné z DOI: [10.1007/978-3-642-14019-8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-14019-8).
- [14] JULIŠ, Karel; BREPTA, Rudolf. *MECHANIKA II. DÍL Dynamika*. 1987.
- [15] KRATOCHVÍL, Ctirad. *Sbírka úloh z dynamiky*. Vyd. 2., přeprac. Akademické nakladatelství CERM, 2006. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně). ISBN 80-214-3228-4.
- [16] FLORIAN, Zdeněk. *Mechanika těles : statika*. Vydání sedmé. V Akademickém nakladatelství CERM, s.r.o 2. vydání. Akademické nakladatelství CERM, 2007. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně). ISBN 978-80-214-3440-0.
- [17] PŘIKRYL, Karel. *Kinematika*. Vyd. 5., V Akademickém nakladatelství CERM 3. vyd. Akademické nakladatelství CERM, 2008. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně). ISBN 978-80-214-3679-4.
- [18] ASSENCIO, Diego. *Double pendulum: Lagrangian formulation*. 2014.





## Seznam obrázků

2.1	AstroMesh v rozložené poloze [3]	17
2.2	a) Anténa s dvojitou vrstvou ramen, b) AstroMesh [5]	18
2.3	Scissor-like v rozložené poloze [6]	18
2.4	Proces složení mechanismu [6]	18
2.5	Družice CubeSat [8]	19
2.6	Ukázka čepů na družici: a) Čep připevněn k základnímu tělesu, b) Čep mezi panely [7]	19
2.7	Proces rozložení panelů [7]	19
2.8	Náhled složení mechanismu [9]	20
2.9	Detailní pohled na pant [9]	20
2.10	Čtyřstěnný mechanismus [10]	21
3.1	Mechanismus ve složeném stavu.	23
3.2	Rozvin mechanismu do vertikální polohy.	23
4.1	Náhled vývojového prostředí Spyder.	27
4.2	Ukázka balíků použitých v prostředí Spyder.	27
5.1	Schéma mechanismu v obecné poloze.	29
5.2	Uvolnění 1. ramena.	31
5.3	Uvolnění 2. ramena.	32
5.4	Uvolnění 3. ramena.	32
5.5	Poloha těžiště 1.ramena.	33
5.6	Poloha těžiště 2.ramena.	34
5.7	Poloha těžiště 3.ramena.	35
6.1	Výsledné hodnoty 1. ramena: a) Průběh polohy, b) Průběh rychlosti	44
6.2	Výsledné hodnoty 2. ramena: a) Průběh polohy, b) Průběh rychlosti	44
6.3	Výsledné hodnoty 3. ramena: a) Průběh polohy, b) Průběh rychlosti	44
6.4	Průběh soustavy při 1. konfiguraci.	45
6.5	Průběh soustavy při 2. konfiguraci.	45
6.6	Průběh soustavy při 3. konfiguraci.	46
6.7	Výsledný průběh reakčních sil: a) Reakční síla $R_{A_x}$ , b) Reakční síla $R_{A_y}$	47
6.8	Výsledný průběh reakčních sil: a) Reakční síla $R_{B_x}$ , b) Reakční síla $R_{B_y}$	47
6.9	Výsledný průběh reakčních sil: a) Reakční síla $R_{C_x}$ , b) Reakční síla $R_{C_y}$	48
6.10	Výsledné hodnoty: a) Průběh polohy, b) Průběh rychlosti	49
6.11	Průběh soustavy.	49
6.12	Výsledný průběh reakčních sil: a) Reakční síla $R_{A_x}$ , b) Reakční síla $R_{A_y}$	50
6.13	Výsledný průběh reakčních sil: a) Reakční síla $R_{B_x}$ , b) Reakční síla $R_{B_y}$	50
6.14	Výsledný průběh reakčních sil: a) Reakční síla $R_{C_x}$ , b) Reakční síla $R_{C_y}$	50



## Seznam příloh

- P1: Program  
GIF1: Rozvin-gravitace  
GIF2: Rozvin-bez-gravitace