Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Diplomová práce

Geometrické konstrukce pomocí skládání papíru

Vypracoval: Bc. Jakub Jančich

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Geometrické konstrukce pomocí skládání papíru jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... ……………………………

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu mé diplomové práce panu prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za jeho pomoc, veškeré připomínky a nápady. Děkuji za vstřícnost a odborný dohled.

Anotace

Diplomová práce Geometrické konstrukce pomocí skládání papíru je zaměřena na využití skládání papíru ve výuce matematiky. Hlavní částí jsou pracovní listy, kde skládání nahrazuje rýsování geometrických úloh. Pro ověření a procvičení geometrických znalostí jsou ke každé provedené konstrukci přidány doplňující otázky. Pro zjednodušení a jednotný postup při vypracovávání pracovních listů jsou zde popsány konstrukce základních axiomů, díky kterým lze konstruovat všechny použité úlohy.

Klíčová slova: origami, skládání papíru, geometrické konstrukce

Annotation

The diploma thesis Geometric constructions by paper folding is focused on the use of paper folding in teaching mathematics. The main part is formed by worksheets, where the paper folding replaces drawing geometric tasks. For verification and practice of geometrical knowledge additional questions to each construction are added. To simplify and unify approach for developing worksheets constructions of basic axioms which enable to construct all the tasks are described.

Keywords: origami, paper folding, geometric constructions

Obsah

1 Úvod

V době počítačů vzniká pro výuku geometrie několik problémů. Prvním problémem je zánik pracovních pozic, využívajících pravítko a kružítko. Dalším problémem je úbytek dětí s rozvinutými motorickými dovednostmi. Díky těmto problémům vzniká několik otázek a myšlenek pro pojetí moderní výuky geometrie.

Jedním z návrhů jak oživit a zmodernizovat výuku geometrie je skládání papíru. Nejedná se o metodu, která by měla zcela nahradit tradiční rýsování. Spíše jde o doplňující metodu, díky které lze na geometrické konstrukce nahlížet z úplně jiného pohledu než u tradičního rýsování. Další výhodou je rozvoj motorických dovedností, který, jak už bylo řečeno, je a vždycky byl zapotřebí.

Skládáním lze vyjádřit mnohé geometrické úlohy počínaje konstrukcí n-úhelníků, kuželoseček, osové a středové souměrnosti až po konstrukci prostorových těles. Tato práce je však hlavně zaměřena na konstrukce mnohoúhelníků a těles.

Tato práce řeší dvě antické úlohy a poskytuje návod na dělení úsečky v daném poměru pomocí skládání papíru. Hlavním cílem této práce je však tvorba pracovních listů, použitelných ve výuce matematiky. Tyto listy jsou orientovány na skládání geometrických konstrukcí a procvičují geometrické znalosti. Listy tedy obsahují grafický a textový návod na složení dané situace, kde jsou přidány otázky týkající se daného geometrického problému.

2 Historie

2.1 Origami

Hlavním představitelem skládání papíru je umění zvané Origami[1]. Origami využívá skládání čtvercového papíru pro tvorbu soch, při které se nesmí použít stříhání, lepení ani zdobení[2]. Vzniklo v Japonsku a doba vzniku se v mnoha pramenech liší. Jediné, co víme jistě, je, že papír se do Japonska poprvé dostal v roce 610 n. l. a první zmínka o papírové skládance se objevuje v básni od Ihara Saikaku roku 1680. Roku 1764 vychází první kniha s návody na stavbu Origami.

V Japonsku se skládání papíru využívalo pro výzdobu šintoistických svatyní např.: papírové řetězy označovaly posvátná území svatyně. Dále se pro štěstí věšeli skládanky k dárkům. V Číně zase skládali papír pro praktické využití jako krabičky, misky a různé nádoby.

Jako i jiná umění i Origami se rozvíjelo do několika směrů. Východní-klasický směr vychází z přibližného napodobování živočichů, rostlin a předmětů. Západní-realistický směr se snaží o přesné napodobení se všemi detaily. Geometrický-abstraktní směr sestavuje geometrické útvary a tělesa z několikrát se opakujících stejných dílků, které do sebe zapadají.

O původu Origami neexistuje žádná jednotná teorie. Například ve Španělsku papírové skládanky nazývají - Papiroflexia a domnívají se, že skládání papíru se rozvinulo v Evropě nezávisle na Japonsku.

---

[1] Origami – vzniklo z japonských slov oru (skládat) kami (papír)
[2] Pokud při skládání používáme stříhání a lepení, nazýváme toto umění Kirigami

2.2 Antické úlohy

V 5 století př. n. l. ve starověkém Řecku vznikly tři matematické úlohy, pro které neexistuje řešení z hlediska užití Eukleidovské konstrukce. (Eukleidovská konstrukce znamená, že pro konstrukci smíme použít pouze pravítko a kružítko. Pravítko je užíváno jen ke konstrukci úsečky a přímky. Dále na pravítku nesmí být nakresleny žádné značky označující jakoukoliv míru. Kružítkem smíme kreslit oblouky a smíme jím přenést pouze vzdálenost z již zkonstruovaných úseček.) Roku 1830 mladý Évariste Galois dokázal, že tyto úlohy nejsou řešitelné eukleidovskými konstrukcemi.

Prvním problémem je duplikace krychle, někdy též nazýván jako Délský problém. Cílem je k zadané krychli zkonstruovat krychli o dvakrát větším objemu.

Druhým problémem je trisekce úhlu, což znamená rozdělit libovolný úhel na tři shodné části.

Posledním problémem je kvadratura kruhu. Zde je cílem najít čtverec o stejném obsahu jako má zadaný kruh.

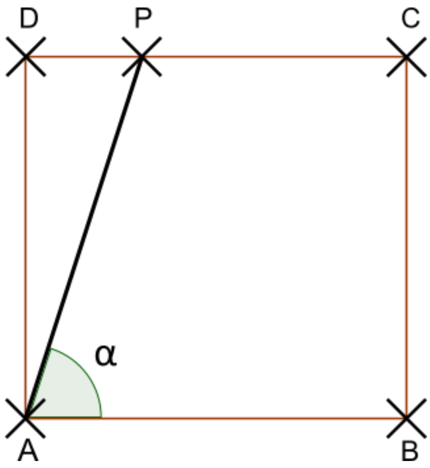
2.2.1 Trisekce ostrého úhlu

Již v 5. století př. n. l. vyřešil trisekci úhlu Hippiás z Elidy pomocí křivky kvadratrix. S dalším nápadem přišel i Archimédes, avšak ani jedna z metod není založena na eukleidovské konstrukci.

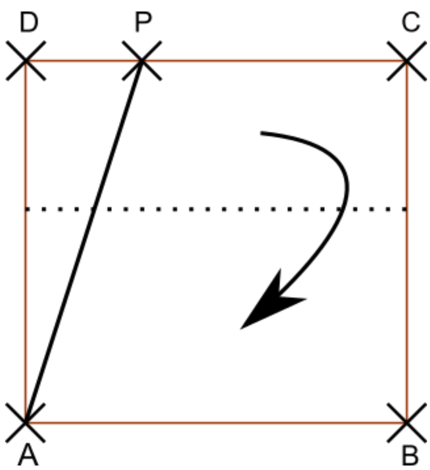
Zde si uvedeme metodu dělení úhlu na tři shodné části pomocí skládání papíru od pana Hisashi Abe popsanou v knize (Lang [9], s. 37). Tato metoda je aplikovatelná pouze na ostré úhly.

Postup

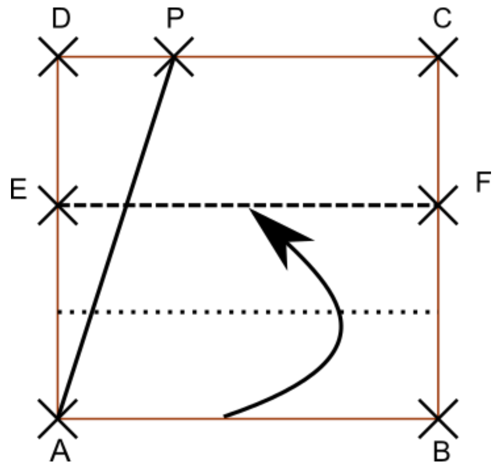
1) Mějme čtvercový papír, jehož vrcholy označíme *ABCD*.
2) Sestrojme úhel α, který chceme dělit na třetiny.
   - $\alpha = BAP$, kde bod *P* leží na hraně *CD*



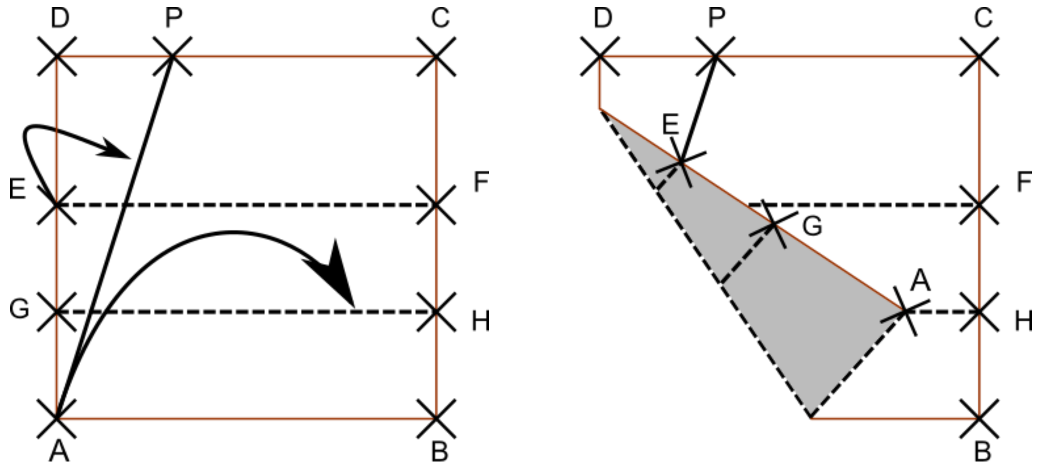
3) V libovolné vzdálenosti přeložením vytvořme úsečku *EF* rovnoběžnou s hranou *AB* (nedoporučuje se překládat v dolní třetině čtverce kvůli 4. kroku).



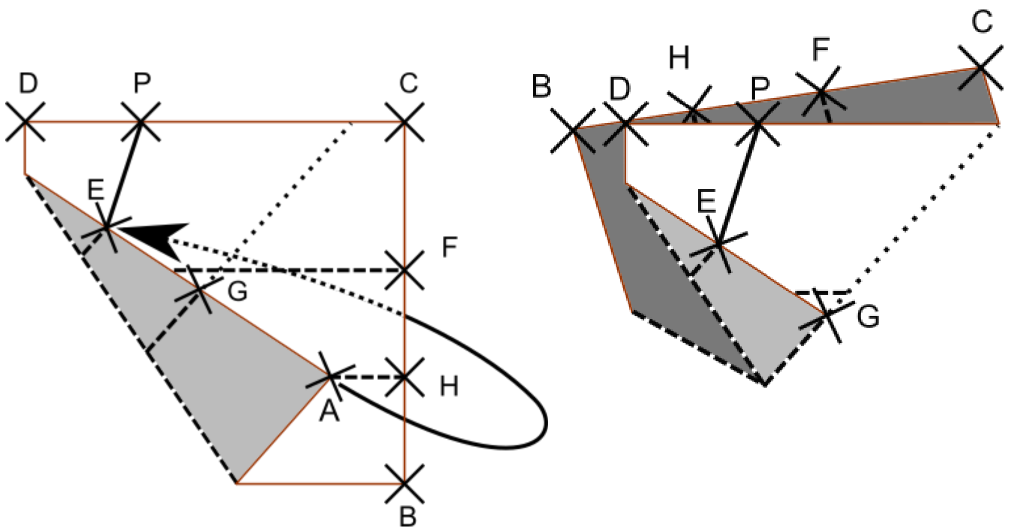
4) Sestrojme osu souměrnosti *GH* pro úsečku *EF* a hranu *AB*.



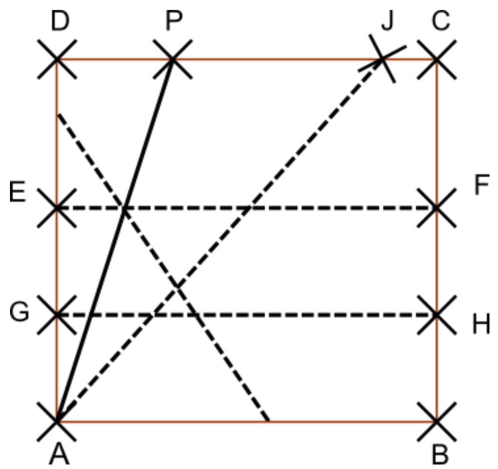
5) Přeložme hranu *AD* tak, aby bod *E* ležel na úsečce *AP* a bod *A* na *GH*, nerozkládáme.

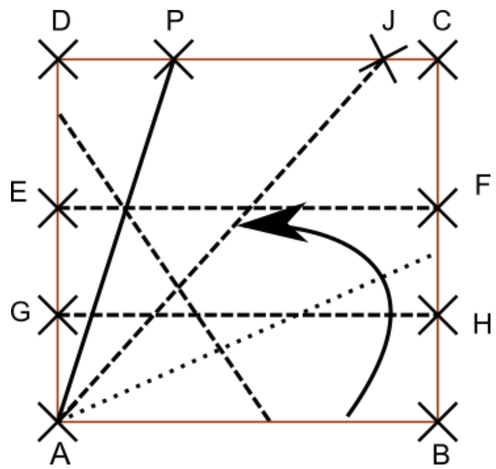


6) V přeloženém stavu přeložíme bod *A* na bod *E*, po rozložení vznikne úsečka *AJ*.

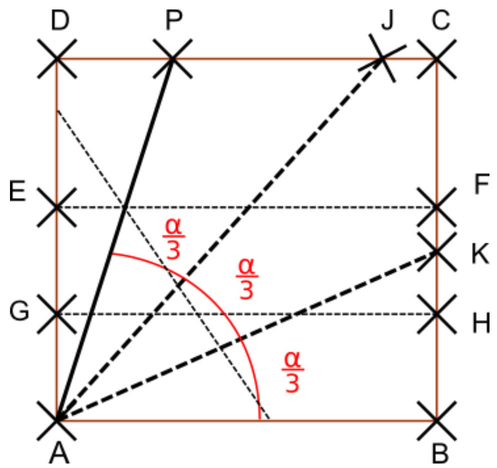


7) Úhel *BAJ* je roven $\frac{2}{3}$ úhlu α a proto sestrojíme jeho osu.





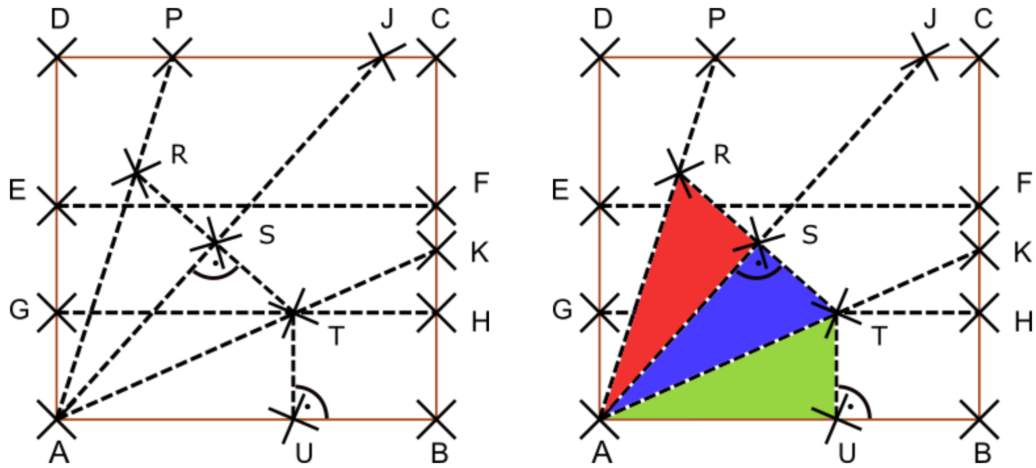
8) Osa úhlu *BAJ* vytvoří nový úhel *BAK*, který je třetinou úhlu α.



Důkaz trisekce úhlu

Abychom mohli dokázat, že jsme úhel BAP rozdělili na třetiny, musíme zakreslit dvě kolmice. Jako první vedeme kolmici na úsečku *AB* tak, aby procházela průnikem úseček *AK* a *GH*. Druhou kolmici vedeme na úsečku *AJ* tak, aby opět procházela průnikem úseček *AK* a *GH*. Tím vzniknou čtyři nové body *R, S, T, U*.

Tyto závěry formulovala (Šolá [22], s. 18).

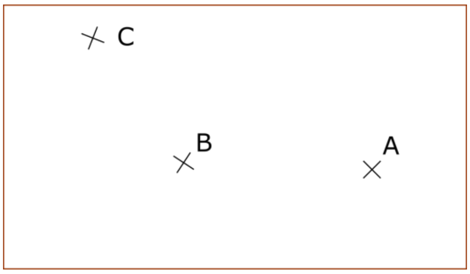


Nyní stačí dokázat, že trojúhelníky *ARS*, *AST* a *ATU* jsou shodné. Z konstrukce víme, že $|RS| = |EG| = |ST| = |GA|$. A také platí, že $|TU| = |ST|$. Úsečka *AS* je osou souměrnosti pro *AR* a *AT*, a tak platí $|AR| = |AT|$. Tzn. trojúhelník *ART* je rovnoramenný. Dle věty SUS tedy platí *ARS* ≅ *AST* ≅ *ATU*. Z toho plyne, že úhly $RAS = SAT = TAU = \frac{1}{3} RAU$. Velikosti sestrojených úhlů jsou rovny třetinové velikosti úhlu *RAU* resp. α.

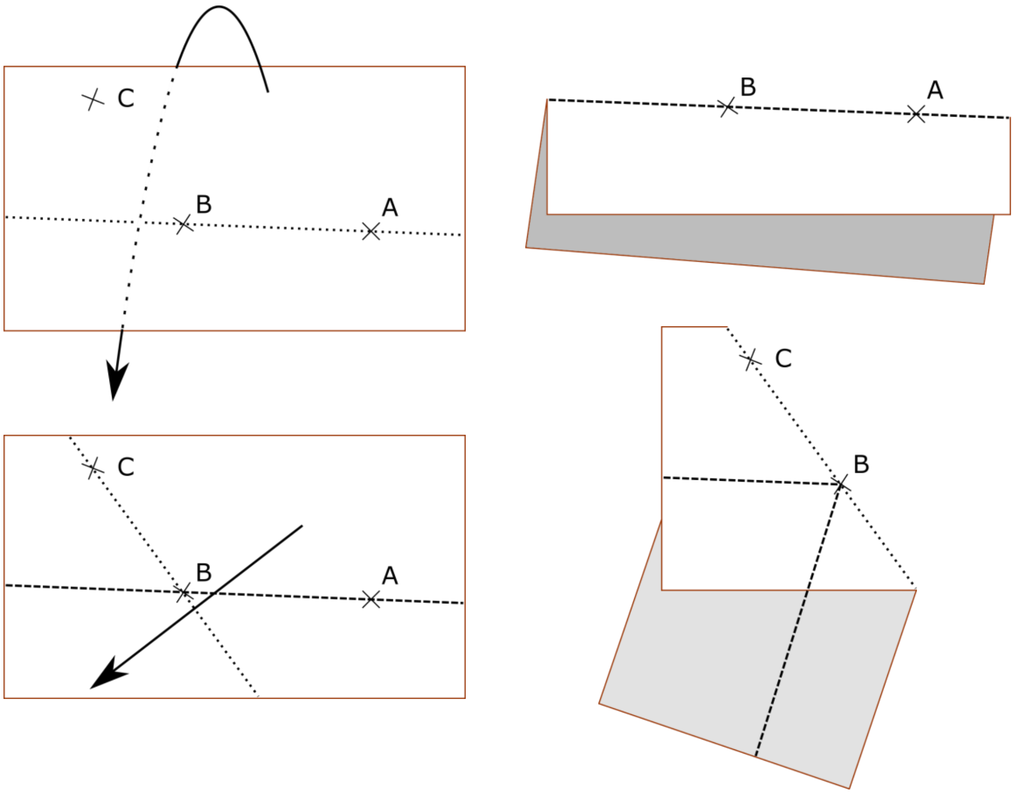
2.2.2 Trisekce tupého úhlu

Předchozí metodou lze dělit jen ostrý úhel. Proto zde ukážeme, jak dělit na třetiny i tupý úhel. Následující metodu vymyslel pan Jacques Justin's (Lang [9], s.39).

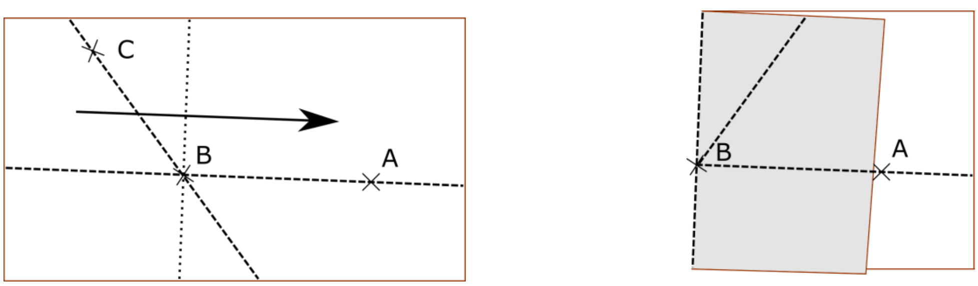
1) Zakreslete body *A*, *B*, *C* tak, aby úhel *ABC* byl tupý.



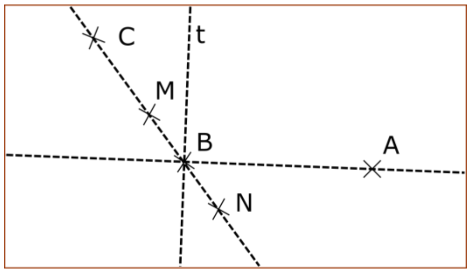
2) Složte dle hrany dle úseček *BA* a *CB*. Po každém přeložení rozložte.



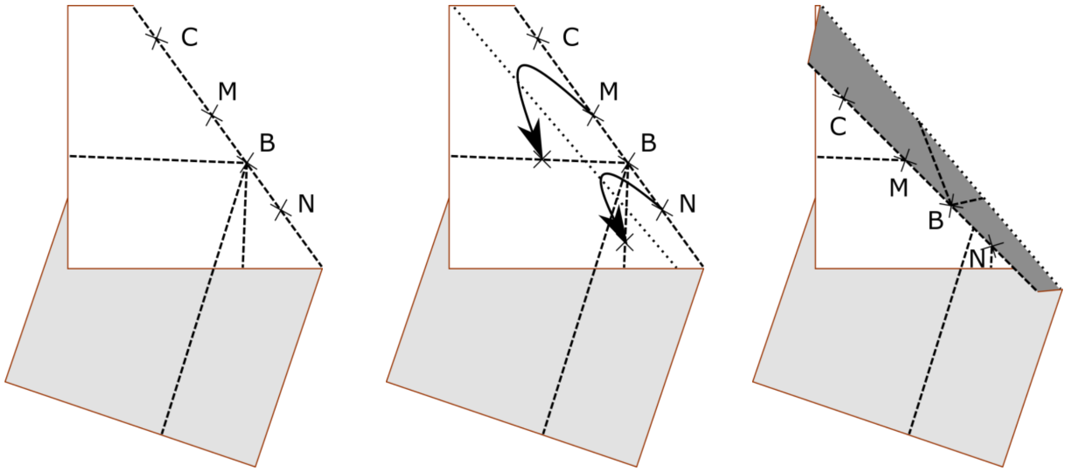
3) K úsečce *BA* složte kolmici skrze bod *B*.



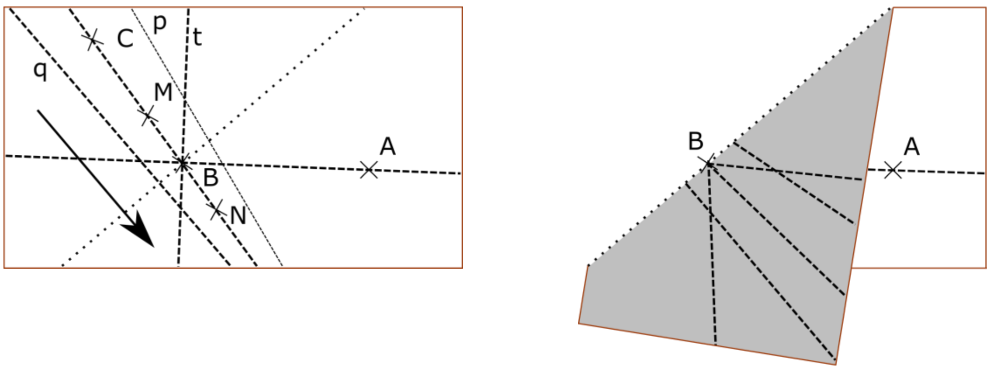
4) Nově vzniklou hranu označte t. Na sklad CB zakreslete dva body M a N tak, aby platilo $|MB| = |BN|$.



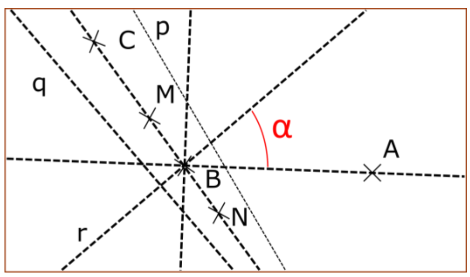
5) Opět přehněte dle úsečky CB, pak body M a N přeložte tak, aby bod M byl na hraně AB a bod N na hraně t. Pak celé rozložte.



6) Vzniknou dvě nové hrany, označte je dle obrázku p a q. K hraně q složte kolmici tak, aby procházela bodem B. Rozložte.



7) Nově vzniklou hranu označte r.



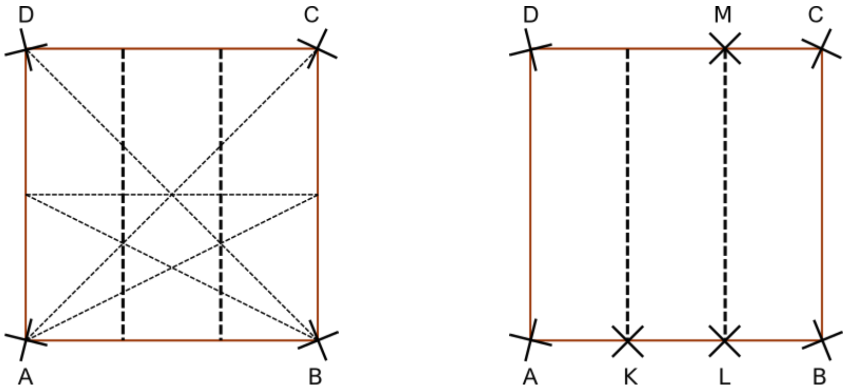
Hrana r svírá s hranou BA úhel α. Pro úhel α platí: $\alpha = \frac{1}{3} CBA$.

2.2.3 Duplikace krychle

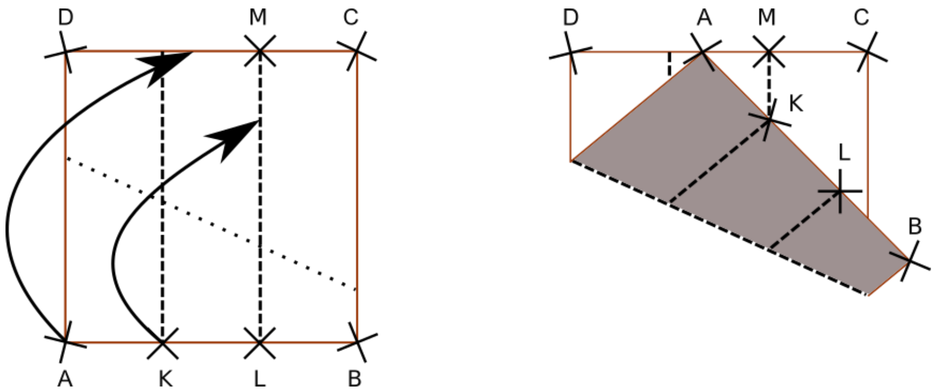
K duplikaci krychle se váže pověst Délského problému. Poté, co Atény zastihl mor, vyslali obyvatelé své posly na ostrov Délos. Zde se nacházela věštírna, kde chtěli najít odpovědi na řešení svého problému. Řešením měla být stavba nového oltáře. Jedinou podmínkou bylo, aby nový oltář měl dvakrát větší objem než původní, přičemž musí zachovat původní tvar, a to tvar krychle. Zjednodušeně řečeno - postavit krychli o dvakrát větším objemu, než má krychle původní.

Jak již bylo řečeno, problém duplikace krychle je eukleidovskou konstrukcí neřešitelný. Avšak pomocí skládání papíru vyřešit lze. V podstatě hledáme řešení rovnice $x^3 = 2a^3$, po upravení zjistíme, že hledáme délku $\sqrt[3]{2}$. Roku 1986 Peter Messer (Lang [9], s. 51) přišel s následující konstrukcí - viz následující strana.

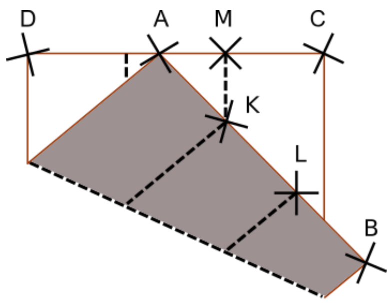
1) Rozdělíme čtvercový papír na třetiny - viz. kapitola Speciální úlohy a označíme body *K*, *L*, *M* dle obrázku.



2) Hranu *AB* přeložíme tak, aby bod *A* ležel na hraně *DC* a bod *K* na úsečce *LM*.



3) V takto složeném stavu platí poměr $\frac{|AC|}{|DA|} = \sqrt[3]{2}$.



Důkaz duplikace krychle

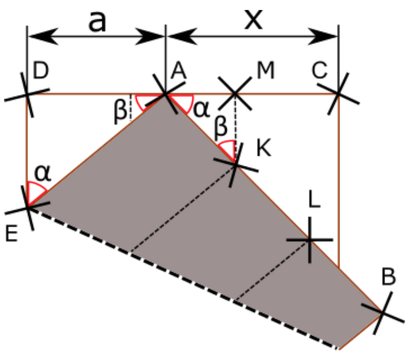
Následující řešení formulovala (Šolá [22], s. 20).

Připomeňme, že řešíme rovnici:

$$x^3 = 2a^3 \rightarrow x = a * \sqrt[3]{2} \rightarrow \frac{x}{a} = \sqrt[3]{2}$$

kde *a* = délka hrany původní krychle, *x* = délka hrany nové krychle,

pro *a* = 1 hledáme hranu (úsečku) délky $x = \sqrt[3]{2}$



Ze vzniklé situace lze vyjádřit následující:

$$|EA| = a + x - |ED| \qquad |AM| = x - \frac{1}{3} * (x + a) \qquad |AK| = \frac{1}{3} * (x + a)$$

Dále si všimněme, že jsou zde dva podobné trojúhelníky *EDA* a *AMK*. Z toho plyne:

$$\frac{|ED|}{|EA|} = \frac{|AM|}{|AK|} \rightarrow \frac{|ED|}{a + x - |ED|} = \frac{x - \frac{(x+a)}{3}}{\frac{(x+a)}{3}} \rightarrow \frac{|ED|}{a + x - |ED|} = \frac{2x - a}{x + a}$$

Pomocí Pythagorovy věty vyjádříme velikost úsečky *ED* ($|ED| = e$)

$$e^2 = (a + x - e)^2 - a^2 \rightarrow e = \frac{2ax + x^2}{2x + 2a}$$

Do obou rovnic dosadíme *a=1*

$$\frac{e}{1 + x - e} = \frac{2x - 1}{x + 1} \qquad e = \frac{2x + x^2}{2x + 2}$$

$$\frac{\frac{2x + x^2}{2x + 2}}{1 + x - \frac{2x + x^2}{2x + 2}} = \frac{2x - 1}{x + 1} \rightarrow \frac{2x + x^2}{2 + 2x + x^2} = \frac{2x - 1}{x + 1} \rightarrow -x^3 = -2 \rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

Pro hledanou krychli o dvojnásobném objemu tedy vždy platí $x = \sqrt[3]{2} * a$

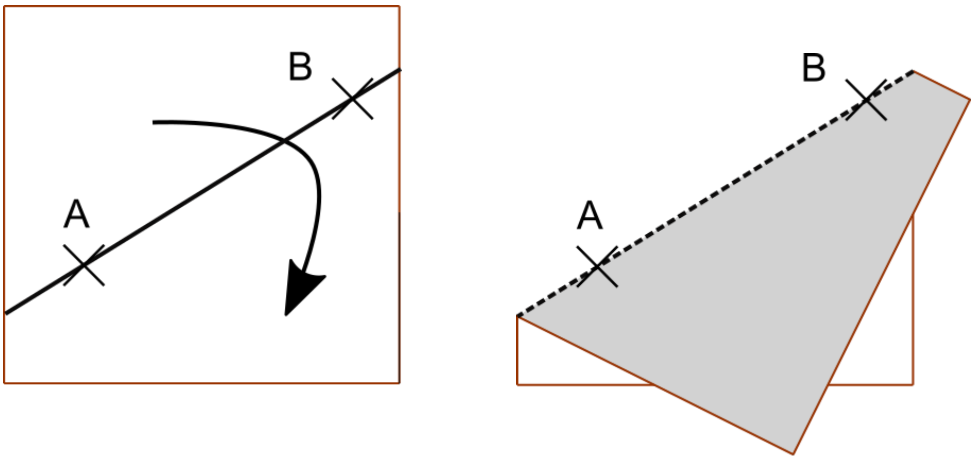
3 Základní axiomy origami

Axiom je tvrzení, které považujeme za pravdivé a není potřeba ho dokazovat. Axiomy v geometrii jsou základní pravidla, která můžeme opakovaně kombinovat. Tato pravidla určují (omezují), co vše lze narýsovat [15].

V roce 1989 na první mezinárodní konferenci umění a techniky origami, představil Humiaki Huzita a Benedetto Scimemi šest základních axiomů pro skládání papíru. Z jejich kombinací lze skládat všechny známé origami skládanky. Dnes jsou známé jako Huzitovy axiomy [8].

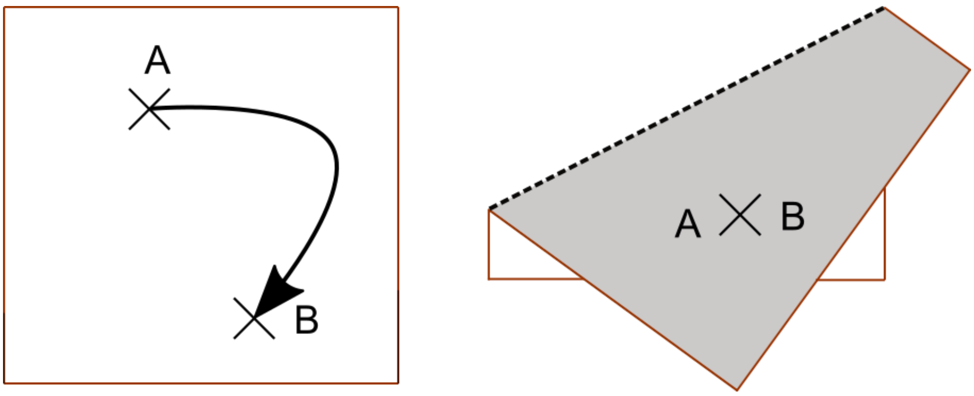
První axiom:

Jsou-li dány dva body, lze složit hranu (vést přímku) tak, aby jimi procházela.



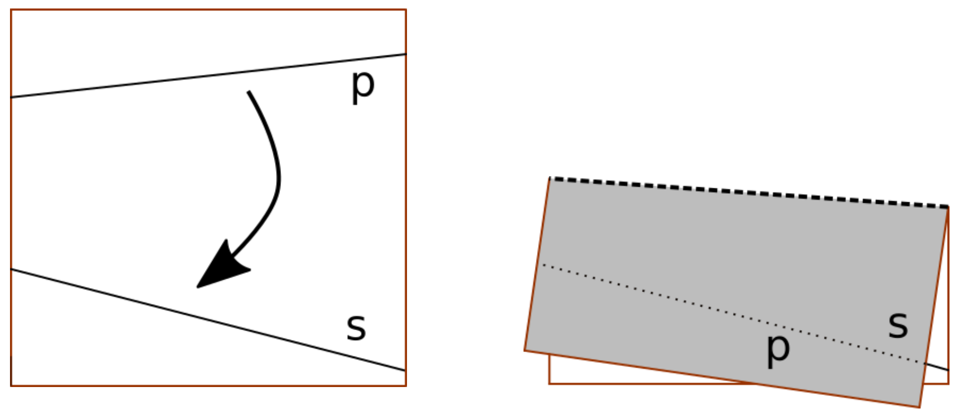
Druhý axiom:

Jsou-li dány dva body, lze tyto body na sebe přeložit, a tak sestrojit jejich osu souměrnosti.



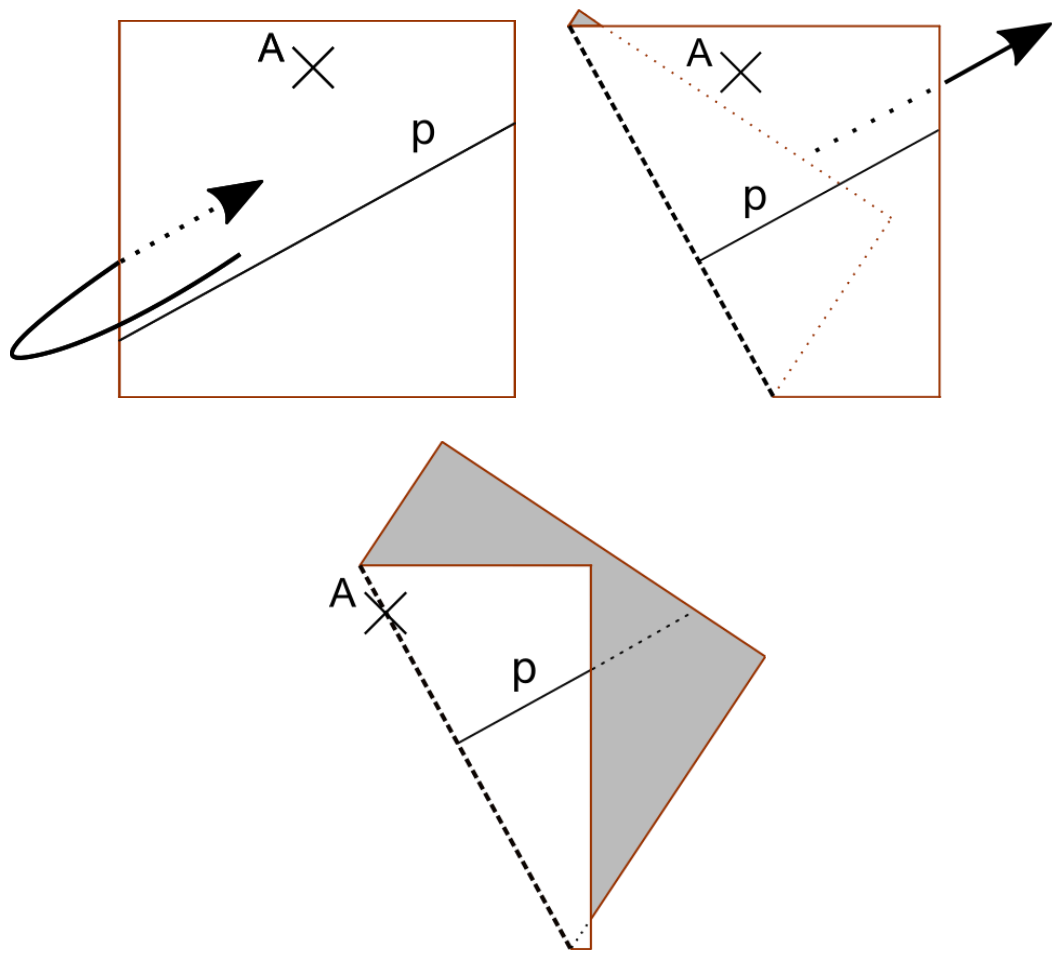
Třetí axiom:

Jsou-li dány dvě přímky, lze tyto přímky na sebe přeložit, a tak sestrojit jejich osu souměrnosti.



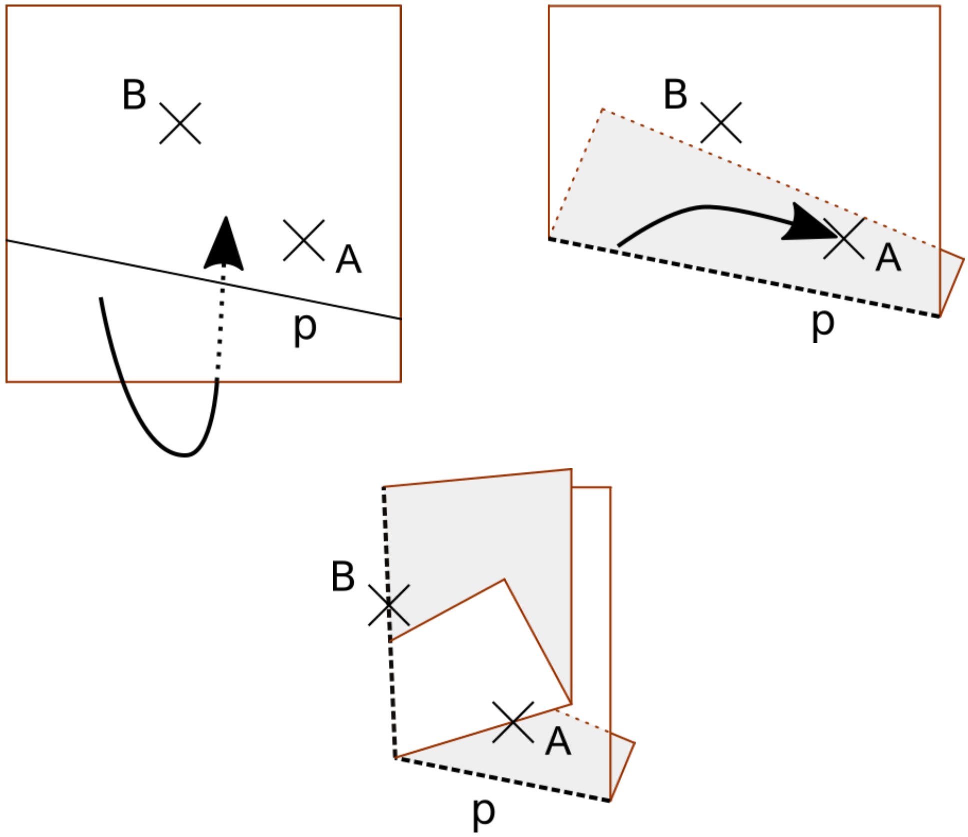
Čtvrtý axiom:

Je-li dán bod *A* a přímka *p*, lze sestrojit takovou přímku, která je kolmá na přímku *p* a zároveň prochází bodem *A*.



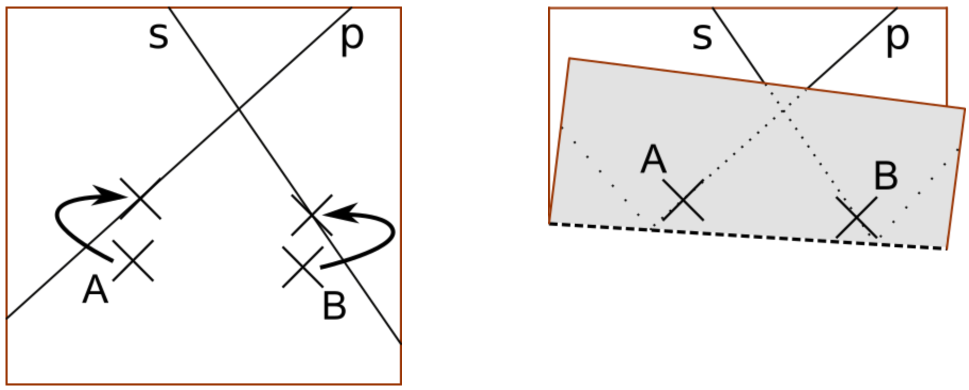
Pátý axiom:

Jsou-li dány body *A*, *B* a přímka *p*, lze přeložit bod *A* na přímku *p* tak, aby vznikla přímka procházející bodem *B*.



Šestý axiom:

Jsou-li dány body *A*, *B* a přímky *p, s,* lze sestrojit hranu (přímku) tak, aby bod *A* ležel na přímce *p* a bod *B* ležel na přímce s.



4 Geometrické konstrukce

V této práci jsou užity dva druhy skládání. Prvním druhem je náhrada rýsování skládáním. To znamená, že přehyb nahrazuje narýsovanou přímku (popř. úsečku). Výsledkem je tedy rozložený papír, kde je zobrazen neboli „narýsován” geometrický útvar. V druhém typu skládání je výsledkem model geometrického útvaru či tělesa.

4.1 Příprava pro učitele

4.1.1 Tvorba pracovních listů

Návod pro skládání papíru musí být jednoduchý, přehledný, srozumitelný a názorný. Toho docílíme jednotným stylem obrázků, reálným napodobením složeného papíru a stručným a výstižným popisem.

Tvorba většiny obrázků proto prošla několika etapami.

1) Narýsování dané situace v programu GeoGebra
2) Export do formátu SVG[3]
3) Dokreslení v programu Inkscape
   - Zvýraznění přímek, úseček, bodů a přehybů
   - Dokreslení šipek určující přehyb
   - Rozlišení spodní a přední strany papíru
4) Export do formátu PNG

Program GeoGebra sice zajišťuje jednoduché a přesné rýsování, ale export obrázků není dostačující. Následným dokreslením ve vektorové grafice zachováme přesnost, kvalitu, ale i možnost jednoduché opravy.

[3] SVG – Scalable Vector Graphics – formát pro vektorovou grafiku využívající strukturu XML

4.1.2 Průběh výuky

Forma výuky je individualizovaná. Všichni sice pracují na tom samém, ale každý svým vlastním tempem. Proto je vhodné mít na každou hodinu připravené další pracovní listy. Na konci hodiny by učitel měl se všemi probrat správné odpovědi.

4.1.3 Kompetence

Práce na těchto pracovních listech vede hned k několika kompetencím. Žáci díky doplňujícím otázkám užívají odbornou terminologii v reálné situaci, řeší problémy a rozvíjejí abstraktní myšlení. Díky grafickým návodům se učí orientovat ve schématech. Dále se zde posiluje schopnost odhadovat a obhajovat svá tvrzení.

4.1.4 Pomůcky

Každý žák by měl obdržet pracovní list se zadáním úkolu. Součástí některých pracovních listů je spodní část papíru určená k odstřižení, kde ústřižek slouží k splnění úkolu. Jiným typem pracovních listů je forma bez ústřižku, přičemž žák obdrží druhý prázdný list určený ke skládání. (pozn. nabízí se využití i popsaných papírů, které mají jednu stranu čistou, což je nutné pro přehlednost při skládání)

Ke každému pracovnímu listu je potřeba úhloměr a pravítko. Ty jsou povoleny jen k zodpovězení otázek, pokud není uvedeno jinak. Potřeba jiných pomůcek je zmíněna v kapitole Úlohy.

4.1.5 Úlohy

Trojúhelníky

Učivo: základní vlastnosti trojúhelníků, kružnice vepsaná, osová souměrnost, úhly, Thaletova věta

Cíle: ověřit a porozumět základním vlastnostem trojúhelníků, procvičit osovou souměrnost, porozumět úhlům

Pomůcky: Pro úlohy ,,Obecný trojúhelník", ,,Tupoúhlý trojúhelník" a ,,Trojúhelník v kruhu" jsou potřeba nůžky.

Časová dotace: 20 min na každé téma (dle zkušenosti jde s rychlejšími či nadanějšími žáky stihnout první tři témata za jednu vyučovací hodinu)

Cílová skupina: 6. třída, 7. třída – Model pravoúhlého trojúhelníku

Mnohoúhelníky

Učivo: základní vlastnosti pětiúhelníků, šestiúhelníků a osmiúhelníků, shodnost, osová souměrnost, rovnoramenné trojúhelníky

Cíle: ověřit a porozumět základním vlastnostem šestiúhelníků a osmiúhelníků, procvičit odhad, osovou souměrnost a měření úhlů

Pomůcky: nůžky, v úloze na Péticípou hvězdu je potřeba jednoho kusu papíru formátu A4 pro dva žáky

Časová dotace: každá úloha 20-25 min

Cílová skupina: 7. třída

Rovnoramenný lichoběžník

Učivo: základní vlastnosti lichoběžníků

Cíle: porozumět výpočtu obsahu rovnoramenného lichoběžníku

Pomůcky: nůžky

Časová dotace: 20 min

Cílová skupina: 7. třída

Mnohostěny

Učivo: základní vlastnosti krychle, čtyřstěnu a osmistěnu, výška těles, stěnová a tělesová úhlopříčka

Cíle: rozeznat druhy čtyřúhelníků, procvičit představivost, procvičení výpočtu plochy a objemu krychle a čtyřstěnu

Pomůcky: pro stavbu jedné krychle je potřeba šest kusů papíru (např. formát A5)

pro stavbu čtyřstěnu je zapotřebí dvou papírů

Pro obě témata je možné využít papíry popsané z obou stran.

Časová dotace: 45 min každé téma

Cílová skupina: 8. třída

Speciální úlohy-Pythagorova věta a Pythagorejský trojúhelník

Učivo: Pythagorova věta, zlomky, souřadnicový systém, podobnost

Cíle: Procvičit základní vlastnosti čtverce, procvičit aritmetické počítání a odvození vzorce, porozumění Pythagorově větě

Pomůcky: kalkulačka

Časová dotace: 30 min Pythagorova věta, 20 min Pythagorejský trojúhelník

Cílová skupina: 9. třída

Speciální úlohy-vlaštovka

Učivo: Trojúhelníky, úhly

Cíle: Rozpoznání druhů úhlů, zlepšit představivost a úsudek

Časová dotace: 30 min

Cílová skupina: 6. Třída

Speciální úlohy-Tangram

Učivo: procenta, zlomky

Cíle: procvičení představivosti a logického uvažování

Pomůcky: pastelky - 7 barev, nůžky

Časová dotace: 45 min

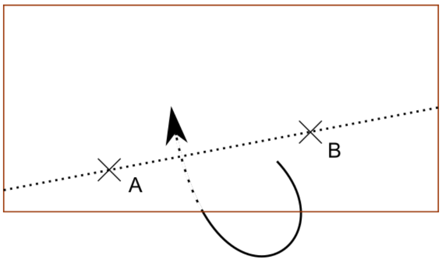
Cílová skupina: 7. třída

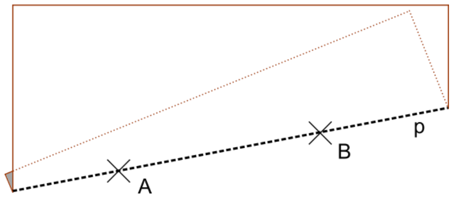
4.2 Trojúhelníky

Pracovní list – Obecný trojúhelník

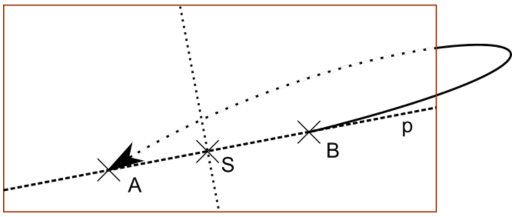
Skládáním papíru postupně zkonstruujte následující kroky. Do připravených míst doplňte odpovědi.

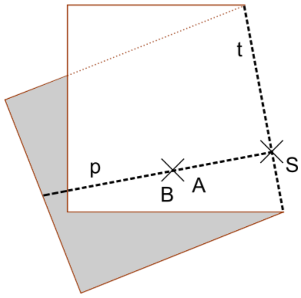
1) Odstřihněte spodní část pracovního listu dle přerušované čáry.
2) Na odstřihnuté části složte hranu *A* a *B*. Vznikla přímka *p*. Rozložte.





3) Přeložte bod *A* na bod *B*, pak rozložte.





- Přeložením vznikla přímka *t*, tuto přímku nazýváme ………………… úsečky *AB*.
- Průnikem přímky *t* a *p* vznikne bod *S*, který nazýváme ……………… úsečky *AB*.
- Jaký úhel svírají přímky *p* a *t*? ……………

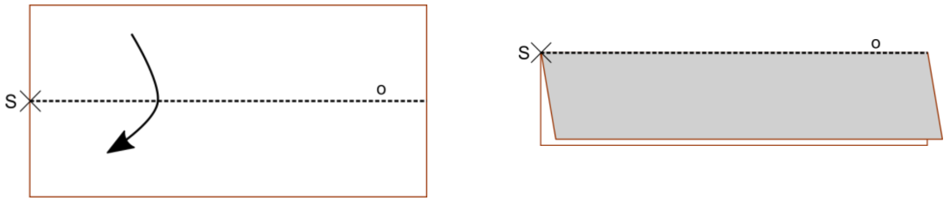
4) Zakreslete libovolný bod *C* tak, aby vzniklý trojúhelník ABC měl co největší obvod.

- Zapište délku obvodu vašeho trojúhelníku $|O_{ABC}|$ = cm
- Zakreslete do předposledního obrázku přibližnou polohu vašeho bodu *C*.

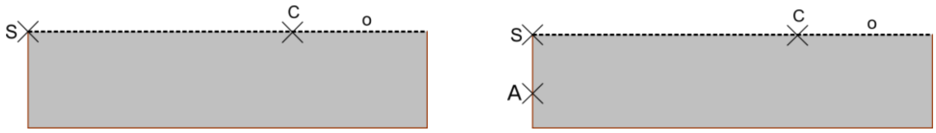
Pracovní list – Rovnoramenný trojúhelník

Skládáním papíru postupně zkonstruujte následující kroky. Do připravených míst doplňte odpovědi.

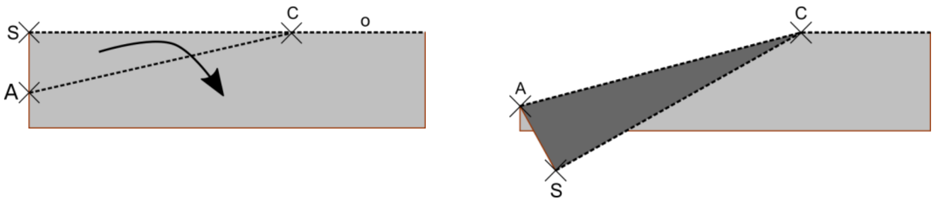
1. Přeložte papír na půlku dle kratší hrany a nerozkládejte. Vznikne přímka *o*.



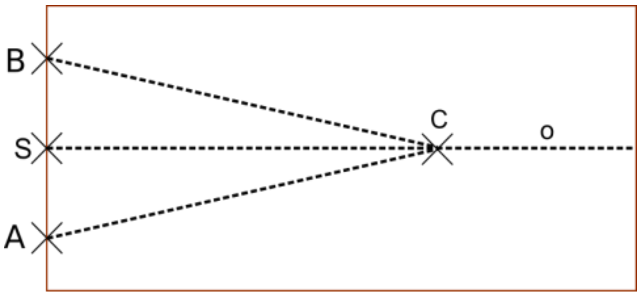
2. Na přímce *o* si zvolte libovolný bod *C*. A na kratší hraně papíru sestrojte libovolný bod *A*.



3. Přeložte papír dle úsečky *AC*.



4. Po rozložení vznikne nový bod *B* a rovnoramenný trojúhelník *ABC*.

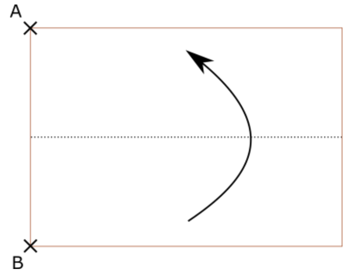


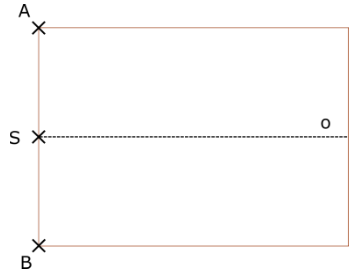
- Stranu *AB* nazýváme …………………………… trojúhelníku *ABC*.
- Úsečku *SC* nazýváme ………………… a ………………… trojúhelníku *ABC*.
- Označte v posledním obrázku úhel *SAC* symbolem α.
- Odhadněte, jaká je velikost úhlů *SAC*= *SBC*=
- Změřte velikost úhlu *SAC* a *SBC*. Jsou stejné? …….. Pak úhly *SAC* a *SBC* nazýváme ……………….
  Jsou úhly *SAC* a *SBC* ostré nebo tupé? …………
- Zamysli se, kde by museli být vrcholy *A* a *B*, aby úhly *SAC* a *SBC* byly co největší? Musí být vrcholy a) co nejblíže k bodu S b) co nejdále od bodu S? …

Pracovní list - Rovnostranný trojúhelník

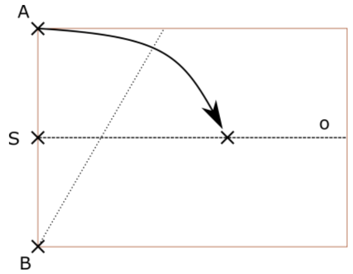
Skládáním papíru postupně zkonstruujte následující kroky. Do připravených míst doplňte odpovědi, popř. podtrhněte.

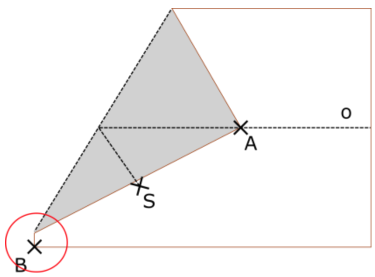
1. Na připravený papír zakreslete body *A* a *B* dle obrázku a vytvořte osu této úsečky.



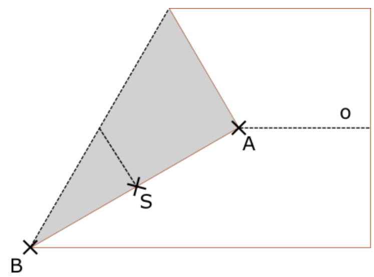


2. Bod *A* přeložte na osu *o* tak, aby hrana přeloženého papíru směrovala do bodu *B*.



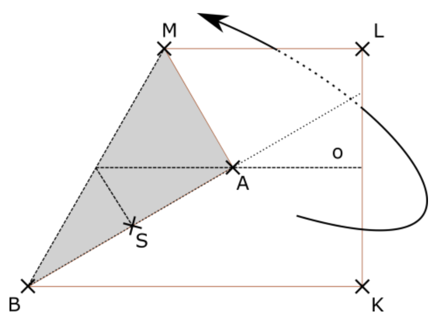


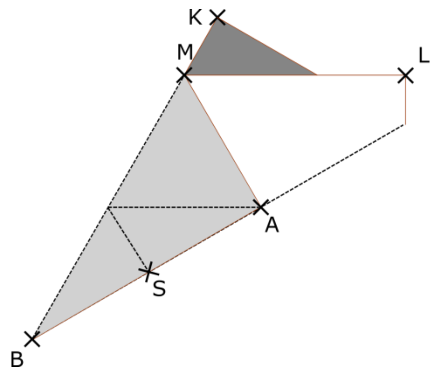
špatně



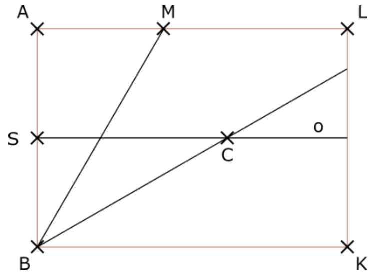
správně

3. Pro lepší názornost dokreslete body *K, L, M* dle obrázku.
   Dále spodem přeložte papír dle úsečky *AB.*
   *Nápověda: Spodní hranu papíru (úsečku *BK*) překládáme na úsečku *BM.*

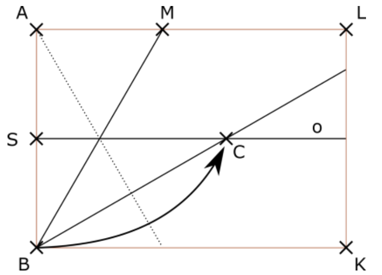


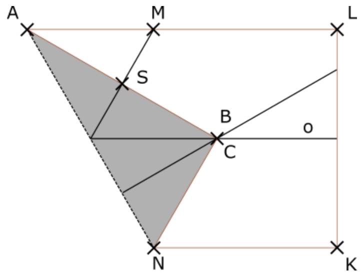


4. Rozložte celý papír. Nyní osu *o* protínají dva přehyby. Průnikem delšího přehybu s osou *o*, vznikne bod C, tento bod si zakreslete.



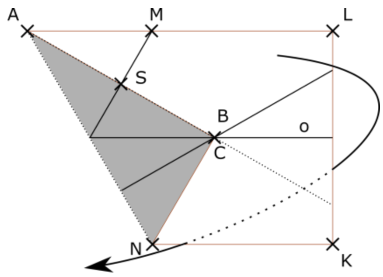
5. Bod *B* přeložte na osu *o*, tak aby hrana přeloženého papíru směrovala do bodu *A*. Na složené hraně vzniknul bod N.

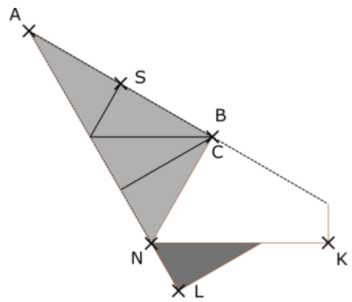




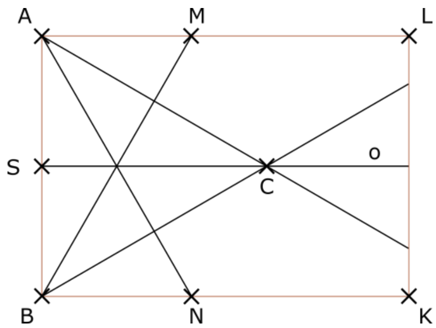
6. Spodem přeložte papír dle úsečky *AB*.

*Nápověda: Horní hranu papíru (úsečku *AL*) překládáme na úsečku *AN*.





7. Celý papír rozložte, vzniklý trojúhelník *ABC* je rovnostranný.



- Úsečka *AN* je ………. úhlu *BAC*, Úsečka *BM* je ………. úhlu *ABC*. Úsečka *SC* je ………. úhlu *BCA*. Bod *N* náleží/nenáleží úhlu *BAC*.
- Změřte a zapište velikost těchto úhlů *ABC*=......... *BAC*=......... *ACB*=.........

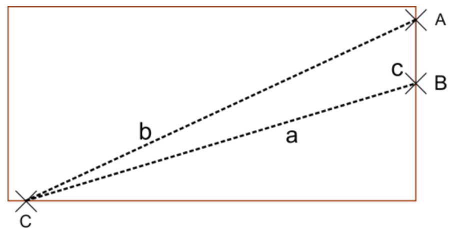
8. Zkuste jedním přehybem získat nový rovnostranný trojúhelník s vrcholem *C*.
   - Zakreslete do posledního obrázku alespoň dva nové rovnostranné trojúhelníky.

Pracovní list - Tupoúhlý trojúhelník

Skládáním papíru postupně zkonstruujte následující kroky. Do připravených míst doplňte odpovědi, popř. podtrhněte.

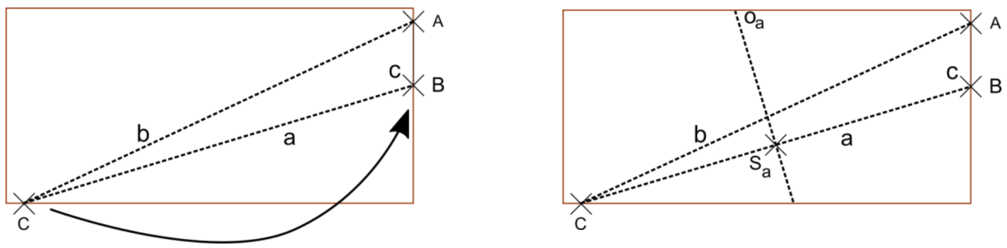
1. Odstřihněte spodní část pracovního listu dle přerušované čáry.
2. Zakreslete dva body *A*, *B* libovolně na pravou kratší hranu odstřižku a bod *C* na spodní delší hranu.

3. Vytvořte hrany *CA* a *CB* a označte je *b* a *a*.



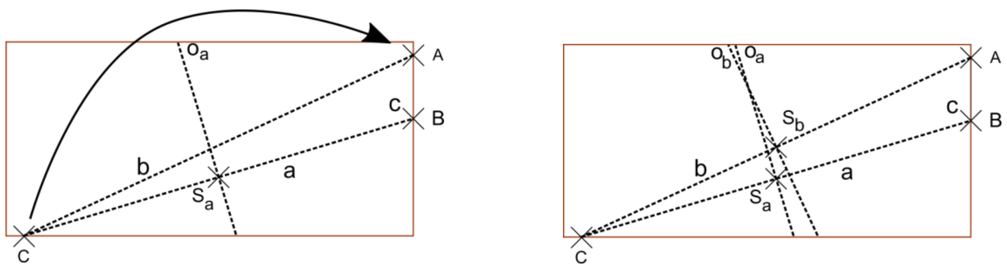
Který z úhlů je tupý? *CAB. ACB, CBA*

4. Sestrojte střed úsečky *a* tak, že bod *C* přeložíte na bod *B*. Pak rozložte.

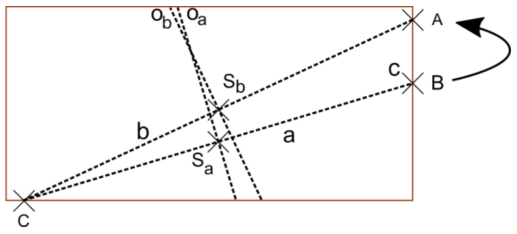


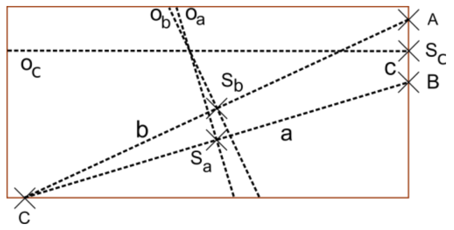
- Sestrojením středu S_a vznikla přímka o_a tu nazýváme ……………………… úsečky *a*.

5. Sestrojte střed úsečky *b* tak, že bod *C* přeložíte na bod *A*. Pak rozložte.

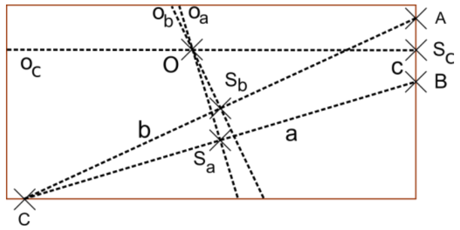


6. Sestrojte střed úsečky c tak, že bod B přeložíte na bod A. Pak rozložte.





7. Průnikem všech os vznikl bod O.

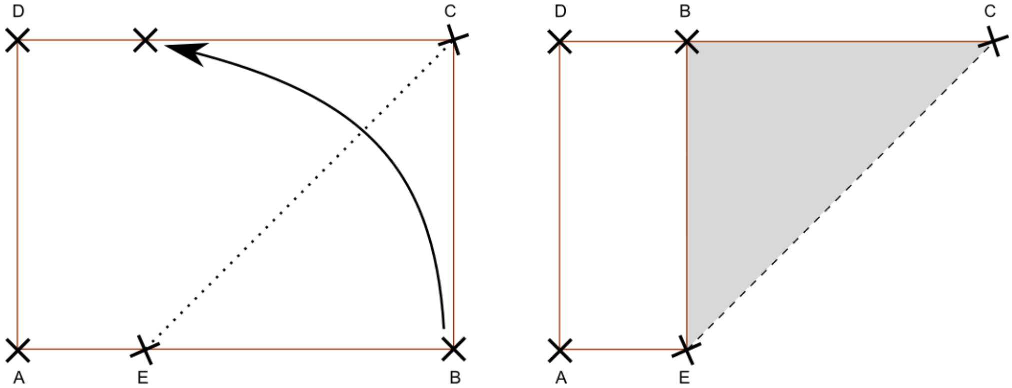


- Změřte tyto vzdálenosti: $|OC|$ =……….. $|OA|$ =……….. $|OB|$ =………..
- Důsledkem nepřesného skládání zaokrouhlete změřené vzdálenosti na cm.
  $|OC|$ =……….. $|OA|$ =……….. $|OB|$ =………..
- Jsou tyto vzdálenosti po zaokrouhlení stejné? ……..
- Pokud jsou tyto vzdálenosti stejné, jaký geometrický útvar bychom mohli z bodu O narýsovat tak, aby procházel body A, B i C zároveň? …………………
  Jak tento útvar nazýváme vzhledem k trojúhelníku ABC? …...………………….
- Úsečka S_bS_c je …………………….. se stranou a. Kolikrát je úsečka S_bS_c menší než strana a? …….. (použij pravítko). Jak tuto úsečku nazýváme? ……………….

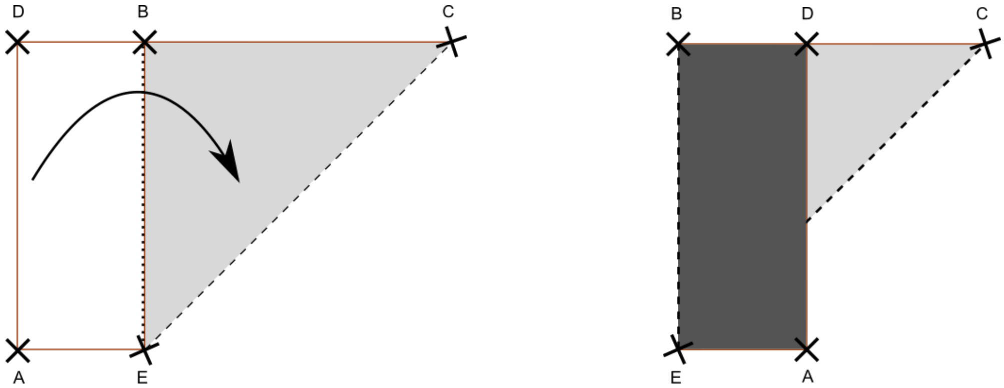
Pracovní list – Model pravoúhlého trojúhelníku

Skládáním papíru postupně zkonstruujte následující kroky. Do připravených míst doplňte odpovědi, popř. zakroužkujte.

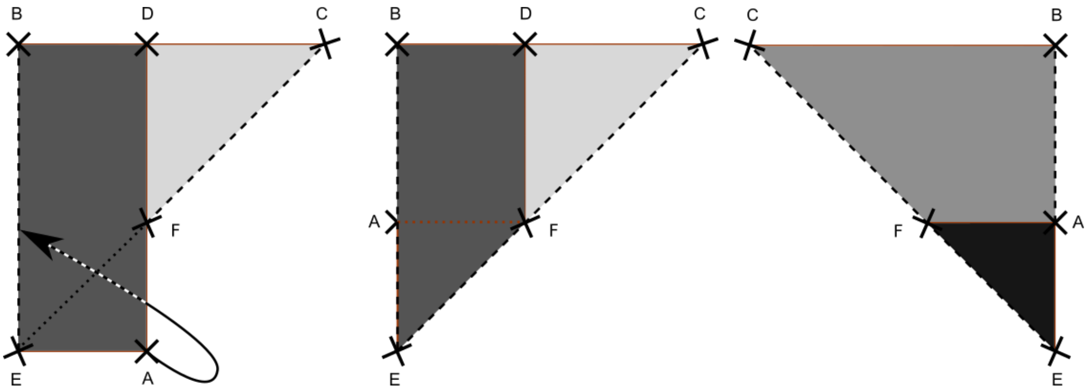
1) Přeložte hranu *BC* na hranu *CD* tak, aby hrana *BE* byla rovnoběžná s hranou *AD*.



2) Pomyslný obdélník *AEBD* přeložte dle osy *EB*.



3) Průnik hrany *AD* a *EC* nazveme *F*. Trojúhelník *EAF* přeložíme dle úsečky *EF*. Nyní je model hotový. Obrázek vpravo zobrazuje pohled z druhé strany.



- Je tento trojúhelník rovnoramenný, rovnostranný nebo tupoúhlý?
- Odhadněte velikost plochy trojúhelníku *EBC* = Nyní ji vypočítejte =
- Je hrana *FA* rovnoběžná s hranou *CB*? ……

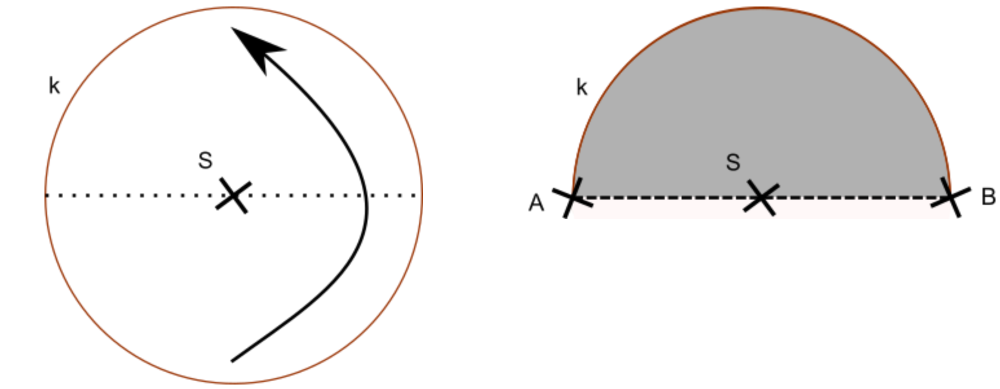
Odpovědi na následující dvě otázky napište z druhé strany.

- Lze jedním přeložením sestrojit nový pravoúhlý trojúhelník? Jestli ano, jak?
- Lze dvěma přeloženími sestrojit čtverec? Jestli ano, jak?

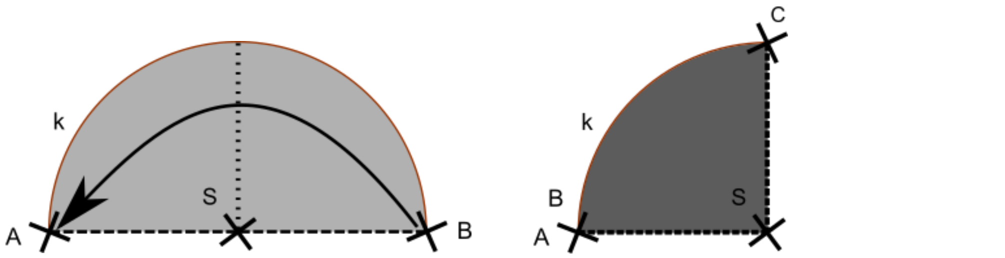
Pracovní list – trojúhelník v kruhu

Skládáním papíru postupně zkonstruujte následující kroky. Do připravených míst doplňte odpovědi.

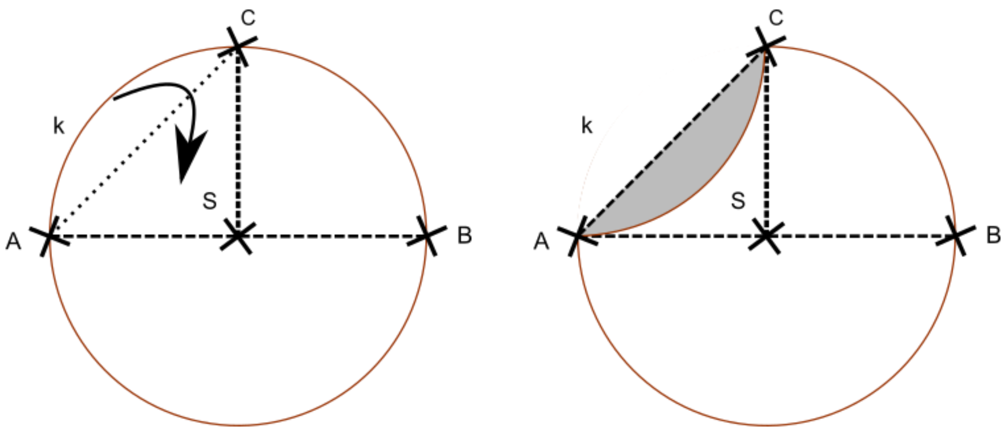
1) Na druhém listě vystřihněte připravený kruh.
2) Přeložte kruh libovolně dle průměru na polovinu. Vzniklé hraně přiřadíme koncové body *A* a *B*.



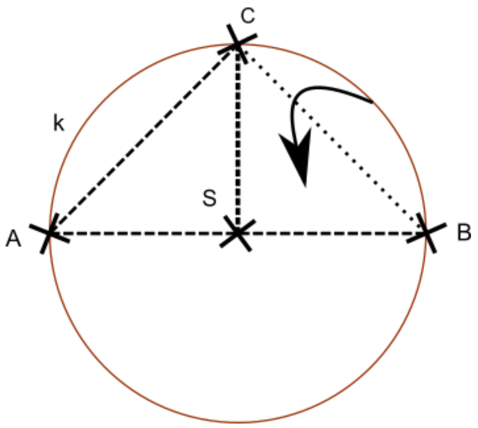
3) Bod *B* složíme na bod *A*. Nové hraně přiřadíme koncový bod *C* a rozložíme.

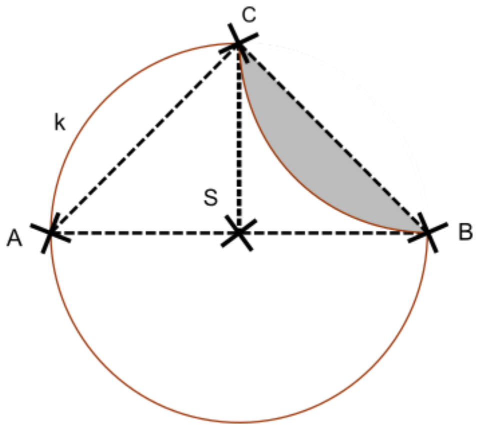


4) Přeložte kruhovou úseč dle úsečky *AC*. Rozložte.



5) Přeložte kruhovou úseč dle úsečky *CB*. Rozložte.





- Úsečky *AC* a *CB* nazýváme ……………………………. kružnice *k.*

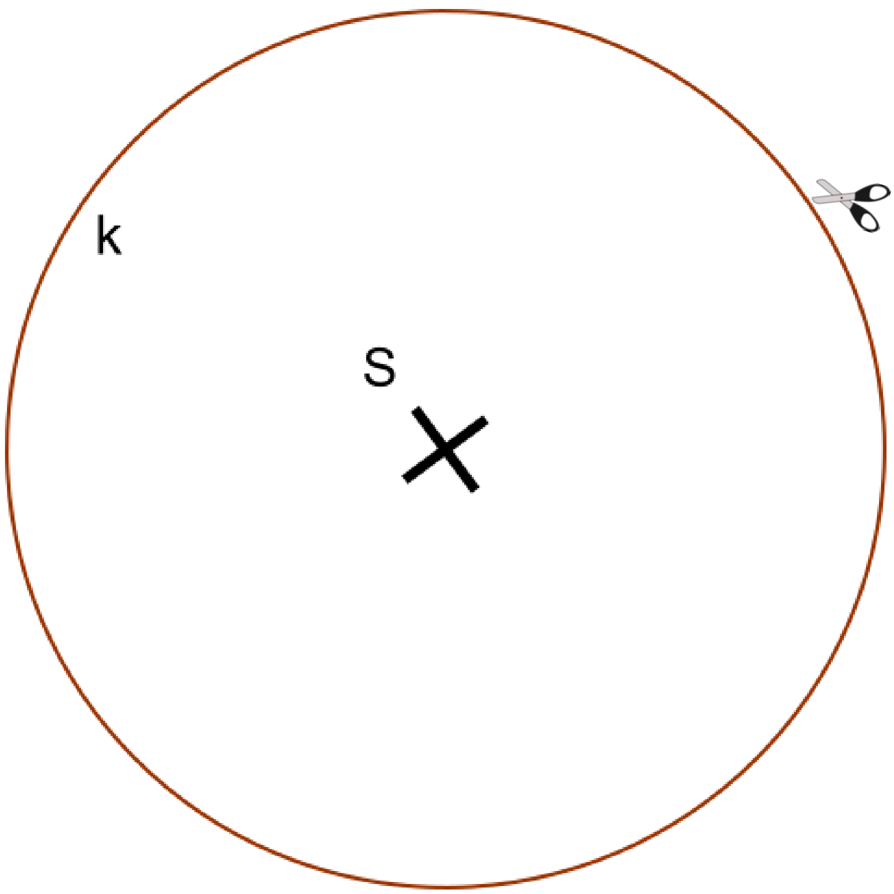
6) Trojúhelník *ABC* je pravoúhlý a ………………………………..…..

- Jsou zde sestrojeny i jiné pravoúhlé trojúhelníky? Jmenuj ………………………..

7) Na kružnici *k* zakreslete libovolný bod *E* a sestrojte trojúhelník *ABE.*

- Změřte a zapište velikost úhlu *AEB* =……… Porovnejte velikost úhlu s ostatními spolužáky.

8) Sestrojte čtverec.

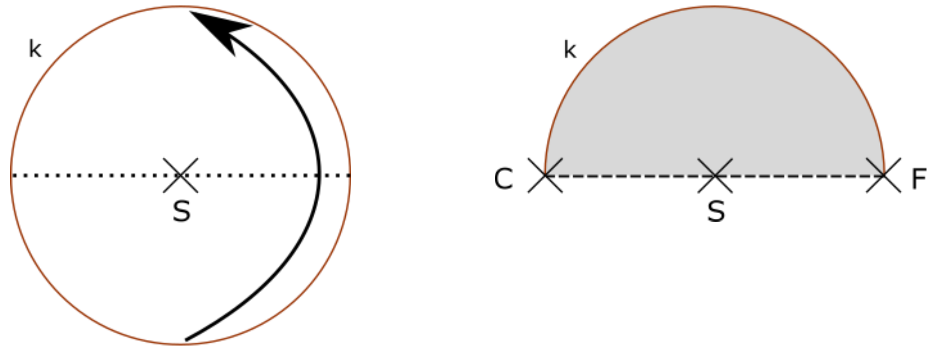


4.3 Mnohoúhelníky

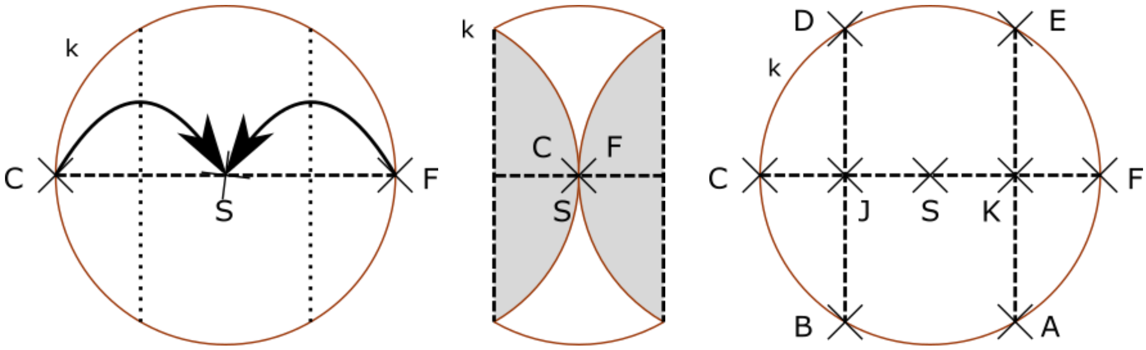
Pracovní list – Pravidelný šestiúhelník v kruhu

Skládáním papíru postupně zkonstruujte následující kroky. Do připravených míst doplňte, popř. zakroužkujte správnou odpověď.

1) Z připraveného odstřižku vystřihněte zakreslený kruh.
2) Přehněte kruh na půlku a rozložte.
   Vznikla úsečka *CF*, tu nazýváme ………….. kružnice *k*.



3) Přeložte bod *C* na střed (to samé s bodem *F*). Rozložte. Na úsečce *CF* vzniknou body *J* a *K*. Mezi těmito body je vzdálenost rovna ……….………………………

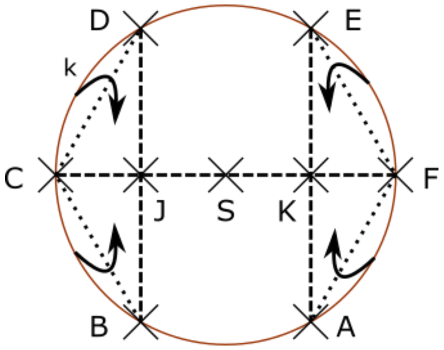


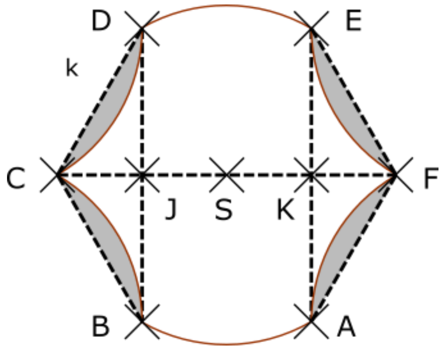
Na hraně kruhu vznikly nové body *B*, *A*, *E* a *D* dle obrázku.

Už jste někdy pracovali s Inbusovým klíčem? Všimli jste si, že řez jeho tělem tvoří pravidelný šestiúhelník?

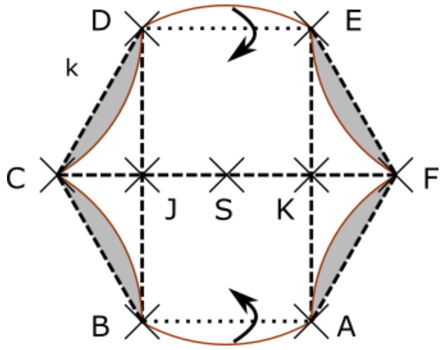
Proč mají šrouby a matice tvar pravidelného šestiúhelníku? Díky tomuto tvaru je menší šance, že hlavě šroubu nebo matici strhnete hrany.

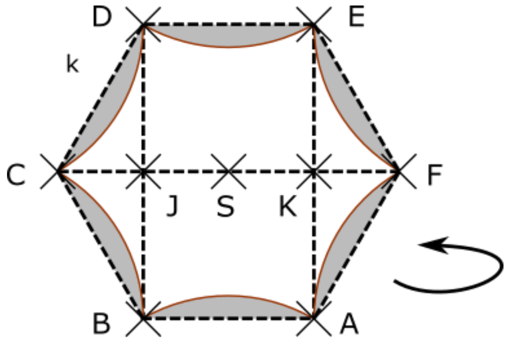
4) Složte hranu dle úseček *CD*, *BC*, *FE* a *AF*. Nerozkládat.





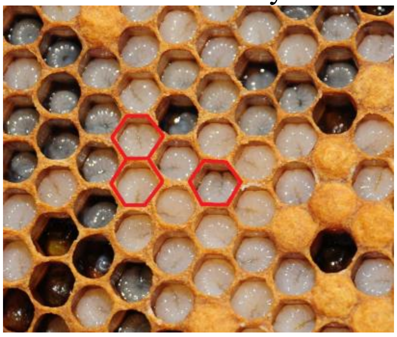
5) Složte hrany dle úseček *DE* a *BA*. Nerozložené celé otočte.

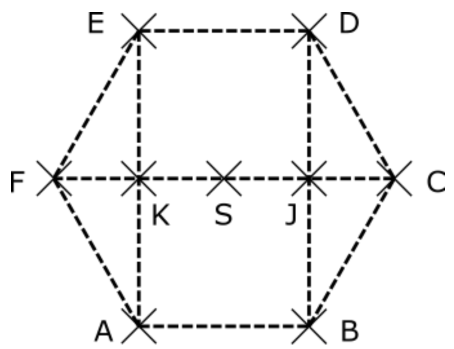




Prohledejte penál! Nemáte náhodou pastelku nebo tužku, která má v řezu pravidelný šestiúhelník?

I v přírodě najdeme pravidelný šestiúhelník. Například včely vyrábějí tzv. plástve ve tvaru právě pravidelného šestiúhelníku. Do něj ukládají zásoby medu nebo včelí larvy.





6) Šestiúhelník *ABCDEF* je hotový.

Změřte a zapište následující úhly *FED*=…….. *CDE*=…….. *BCD*=……..

Všechny vnitřní úhly šestiúhelníku jsou / nejsou shodné.

Součet vnitřních úhlů je tedy roven ………

Zakroužkujte ty úsečky, které jsou pro šestiúhelník osami souměrnosti.

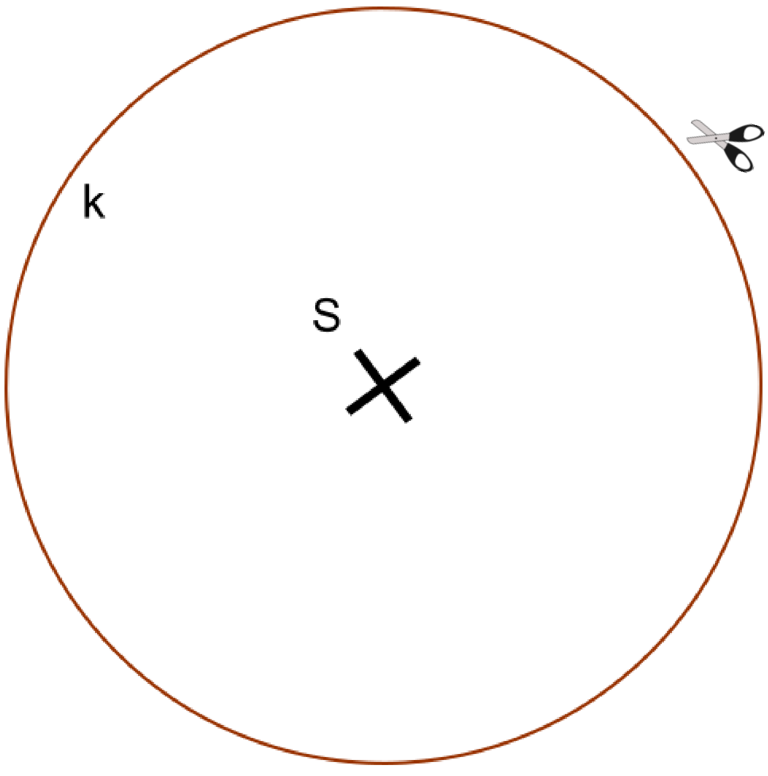
AJ *EB* *CF* *DK* *DA* *EA*

Do posledního obrázku zakreslete alespoň jednu další.

Vypište dvojice rovnoběžných úseček: …………………………………………

Proč je trojúhelník *AKF* shodný s trojúhelníkem *JCD*?

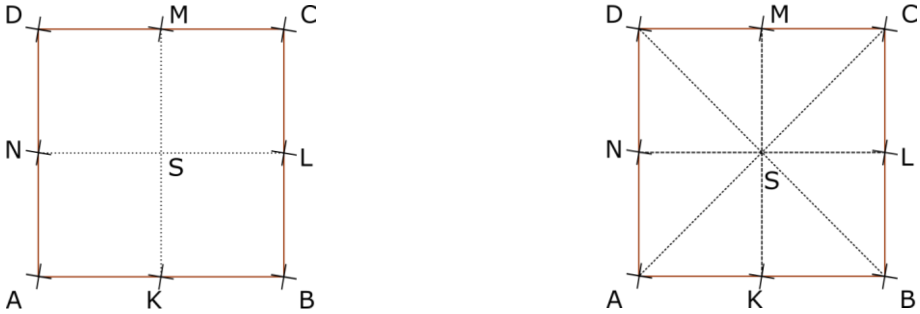
……………………………………………………………………………………..



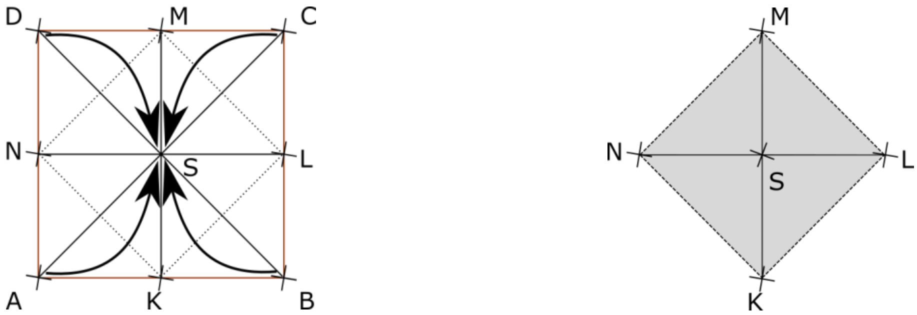
Pracovní list – Pravidelný osmiúhelník

Skládáním papíru postupně zkonstruujte následující kroky. Do připravených míst doplňte, popř. zakroužkujte správnou odpověď.

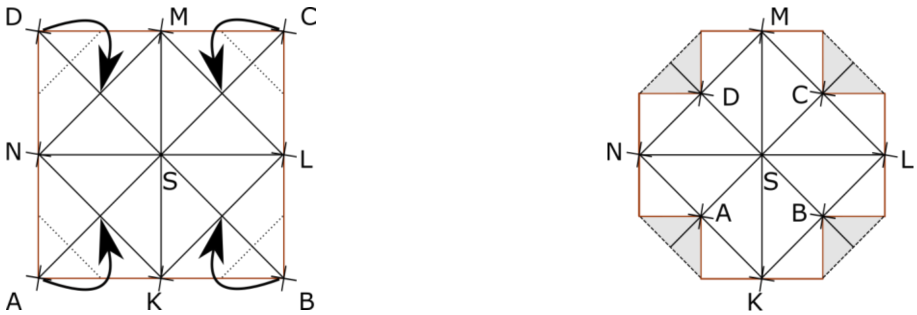
1) Z přiloženého prázdného papíru sestrojte čtverec *ABCD*, zbytek vyhoďte.
2) Přeložte čtverec *ABCD* na půlku dle hran *AB* a *DA*, následně přeložte dle jeho úhlopříček.



3) Bod *A* přeložte na bod *S* dle úsečky *KN*. Obdobně přeložte i body *B, C, D*.



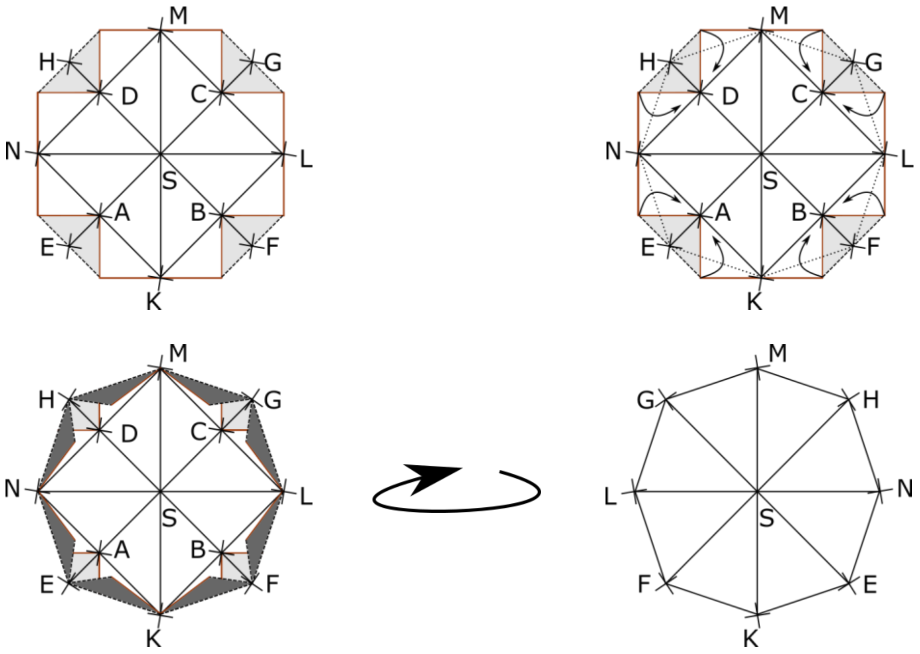
4) Bod *A* přeložte na střed úsečky *KN*. Obdobně přeložte i body *B, C, D*.



Jaký tvar má dopravní značka STOP? Existují i jiné značky tohoto tvaru?

Už jste někdy slyšeli o bojovém umění UFC (Ultimate fighting championship)? Zápasníci bojují ve stoje i na zemi v aréně tvaru pravidelného osmiúhelníku.

5) Zbylé vnější hrany přeložte dle úseček *EK*, *KF*, *FL*, *LG*, *GM*, *MH*, *HN*, *NE*, pak celé otočíme.



6) Po otočení si překreslete názvy všech vrcholů.

7) Zkontrolujte pomocí pravítka, zda je osmiúhelník *KENHMGLF* pravidelný.

- Jsou všechny vnitřní úhly stejné? ……….
- Běžný osmiúhelník má každý vnitřní úhel roven 135°. Jaké úhly má Váš složený osmiúhelník? ……………………….. Průměr změřených úhlů se rovná ……..
- Součet všech vnitřních úhlů se rovná ……………..
- Je čtyřúhelník *FEHG* čtverec nebo obdélník? ……………….
- Jak nazveme čtyřúhelník *FENL*? ………………………
- Jmenuj alespoň dva shodné čtyřúhelníky s čtyřúhelníkem *FENL*: ....
- Pokud bychom vzali úsečku *LN* jako osu souměrnosti, pak:

  Vzor je bod *F* a jeho obrazem je bod ….

  Vzor je bod *S* , pak jeho obrazem je bod …. , nazýváme ho ..…………………
- Pokud bychom vzali úsečku *GE* jako osu souměrnosti, pak:

  Vzor je bod *F* a jeho obrazem je bod ….

  Vzor je úsečka *KE,* pak je jejím obrazem úsečka ……..

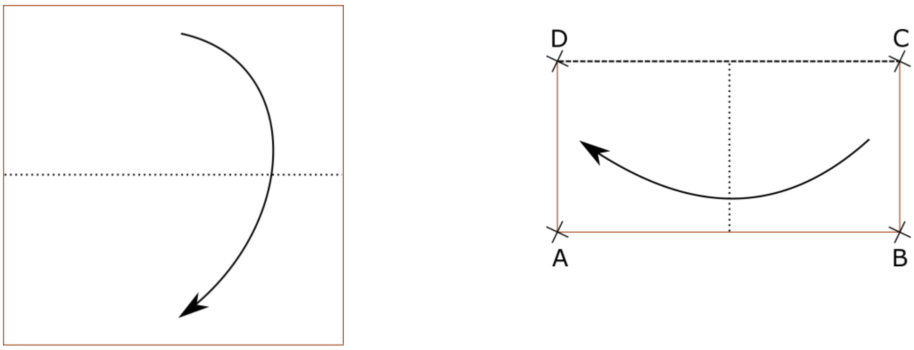
  Vzor je trojúhelník *SNH*, pak jeho obrazem je trojúhelník …………

Vypište dvojice rovnoběžných úseček: ……………………………………………

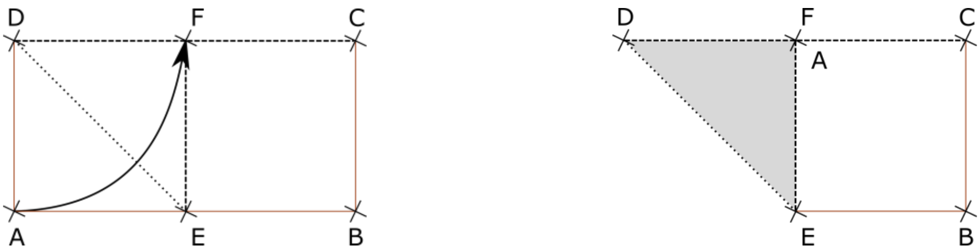
Pracovní list – Péticípá hvězda

Skládáním papíru postupně zkonstruujte následující kroky. Do připravených míst doplňte, popř. zakroužkujte správnou odpověď.

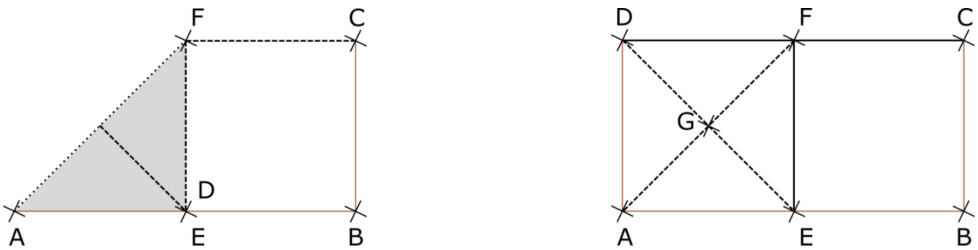
1) Čtvercový papír přeložte na půlku a pak dle delší strany znovu na půlku. Druhý přehyb rozložte zpět.



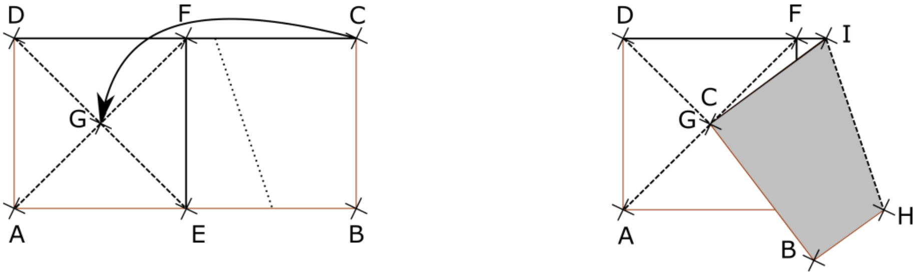
2) Vznikl obdélník *ABCD* s osou *EF*. Nyní bod *A* přeložte na bod *F* a převraťte zpět.



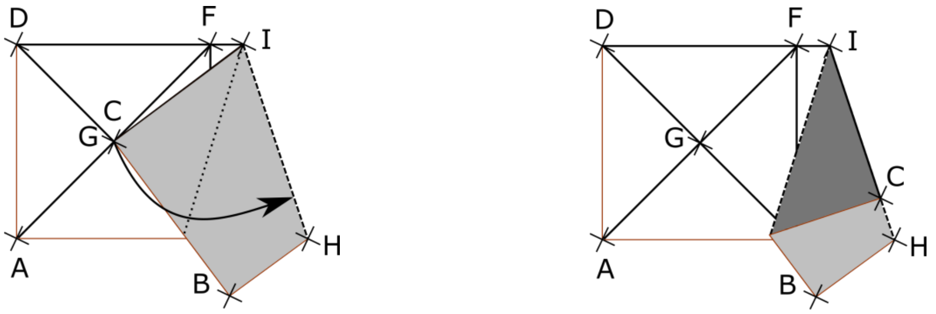
3) Bod *D* přeložte na bod *E* a převraťte zpět. Průsečík úseček *AF* a *DE* nazveme *G*.



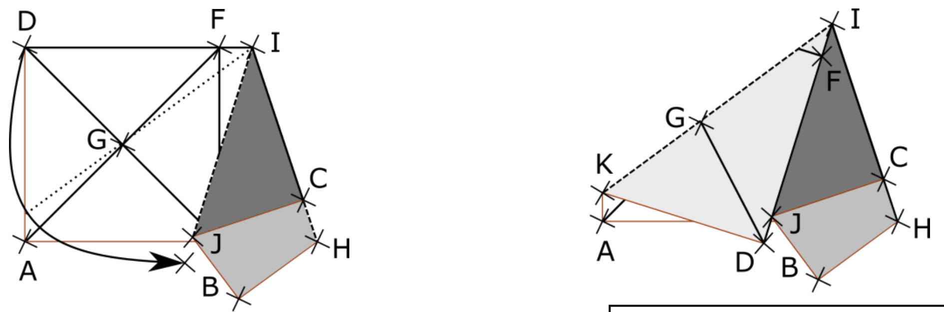
4) Bod *C* složte na bod *G*.



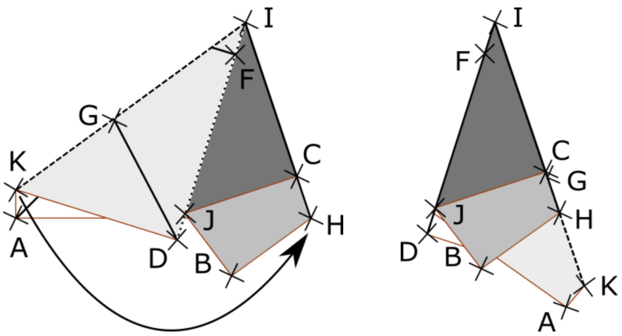
5) Hranu *CI* přeložte na hranu *HI*.



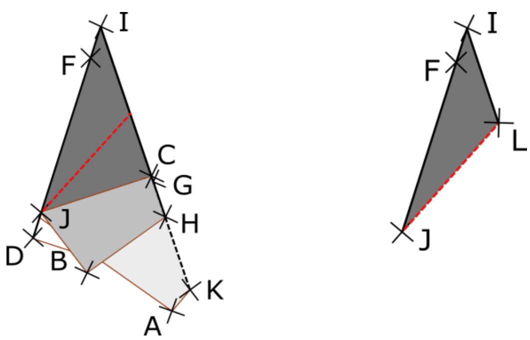
6) K vzniklému přehybu doplníme bod *J* dle obrázku. Pak hranu *DI* složíme na hranu *JI*.



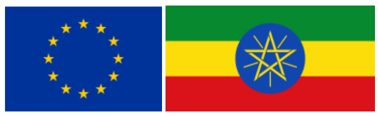
7) Hranu *KI* přeložte spodem na hranu *HI*.



8) Odstřihněte horní část přibližně dle naznačené červené čáry. Spodní část vyhoďte.



Pěticípá hvězda na vlajkách. Evropská unie má ve znaku 12 pěticípých hvězd. Tyto hvězdy zde mají symbolizovat ideály jednoty, solidarity a souladu mezi evropskými národy.

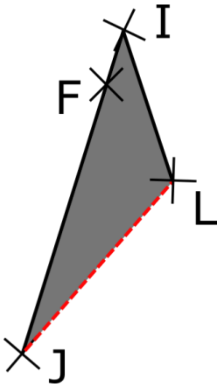


Etiopie. Stát východní Afriky. Zde je hvězda znamením pro lepší budoucnost jejího národa

Znáte tyto vlajky?

USA, Turecko, Kuba, Maroko, Nový Zéland

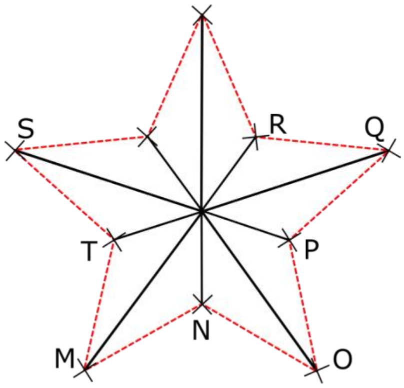
• Změřte následující úhly: *ILJ*= *JIL*= *LJI*=



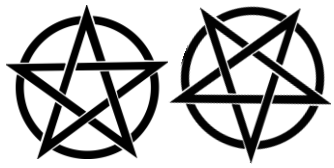
9) Než skládanku rozložíte na pěticípou hvězdu, tipněte si, který z bodů je středem hvězdy a který bod tvoří vrchol cípu. Zapište vaše tipy:

Střed = Vrchol cípu=

Body *J, L, I* si na skládanku zakreslete. Nyní rozložte a správně tyto body přikreslete do následujícího obrázku.



Pentagram – starověký magický symbol známý už před 6000 lety, v té době symbolizoval Venuši. Postupem času vešel do dějin jako znak magie. Pokud je nakreslen jedním cípem nahoru, symbolizuje ochranu před satanem. Naopak dva cípy nahoru symbolizují satana.



Trojúhelník *MNT* nazýváme …………………… Kolik shodných trojúhelníků s trojúhelníkem *MNT* najdete? ……. Jmenujte je: ……………………………………….

Napište jméno trojúhelníka shodného s trojúhelníkem *SQO*: ……….

Vypište všechny osy souměrnosti: …………………………………………………..

Jaké dva úhly svírají úsečky *TQ* a *MR*? …………………………. Svírají tyto úhly i úsečky *SP* a *TQ*? ……

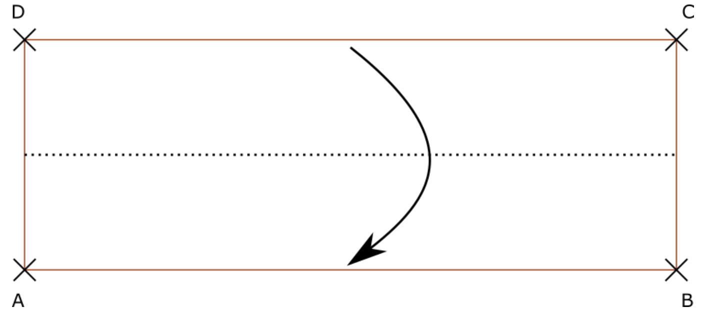
Jaký geometrický útvar vznikne spojením všech vrcholů každého cípů? ……………...
Lze v této hvězdě najít ještě nějaký? Pokud ano, zakresli ho do posledního obrázku.

4.4 Rovnoramenný lichoběžník

Pracovní list

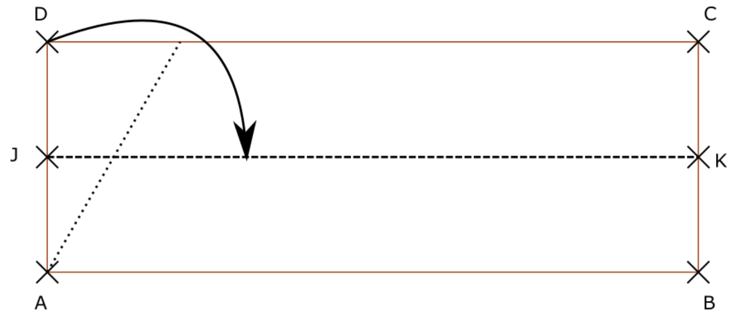
Skládáním papíru postupně zkonstruujte následující kroky. Do připravených míst doplňte, popř. zakroužkujte správnou odpověď.

1) Se sousedem v lavici si rozděl prázdný papír na půlky dle kratší hrany.
2) Na svou půlku vyznač body *A, B, C, D* dle obrázku a přelož na půl dle kratší hrany.

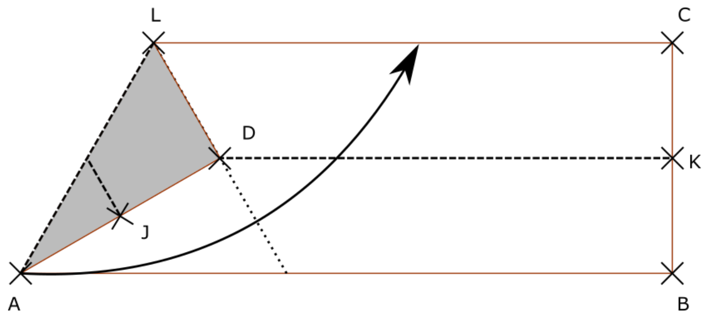


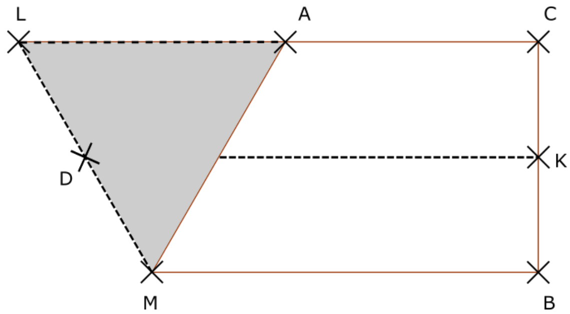
Vzniklý přehyb vytvořil body *J* a *K*.

3) Hranu *AD* přelož bodem *D* na úsečku *JK*. Dejte pozor, ať hrana *DJ* směruje do bodu *A*.

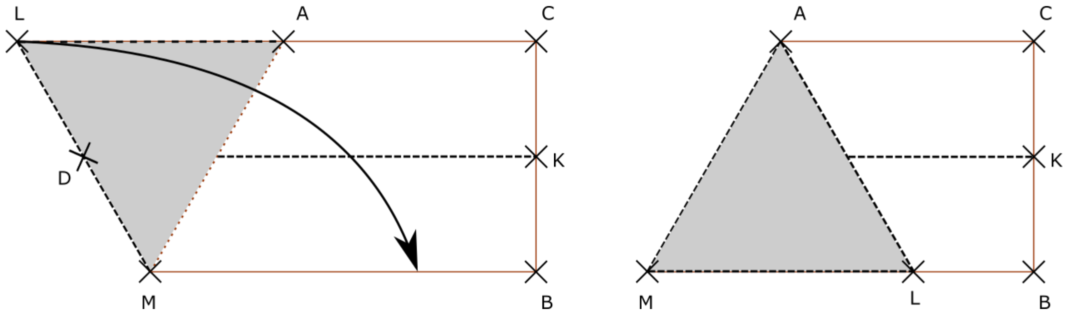


4) Přeložte bod *A* na úsečku *LC* dle úsečky *LD*.

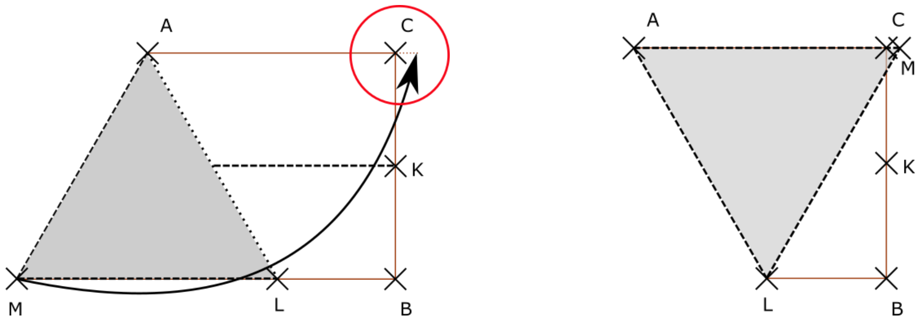




5) Přeložte bod *L* na úsečku *MB* dle úsečky *MA*.

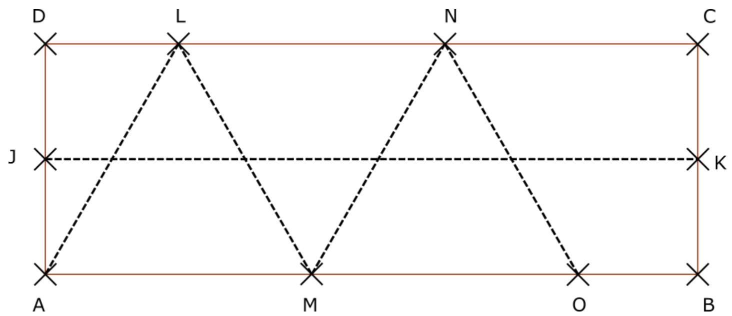


6) Přeložte bod *M* na polopřímku *AC* dle úsečky *AL* (bod *M* nevychází na bod *C*!).

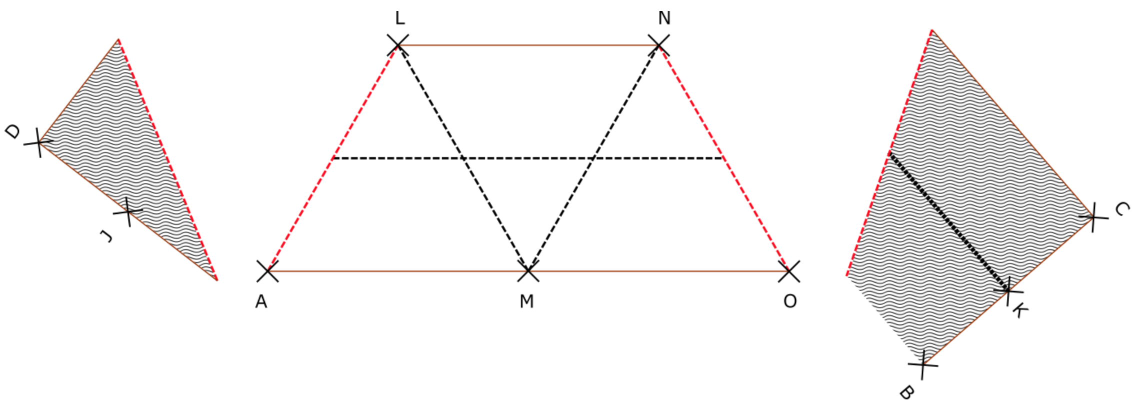


Celé rozložíme.

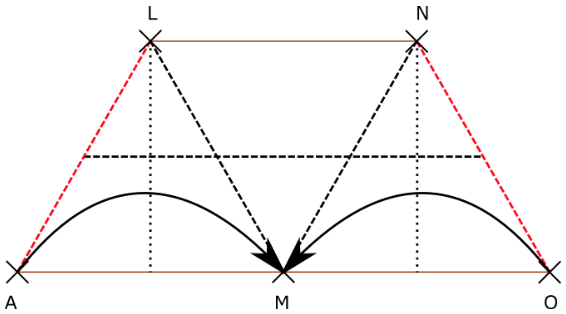
7) Po rozložení vznikne několik nových bodů, zakreslete dle obrázku:

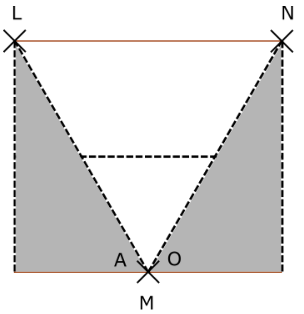


8) Trojúhelník *ALD* a čtyřúhelník *OBCN* odstřihneme.

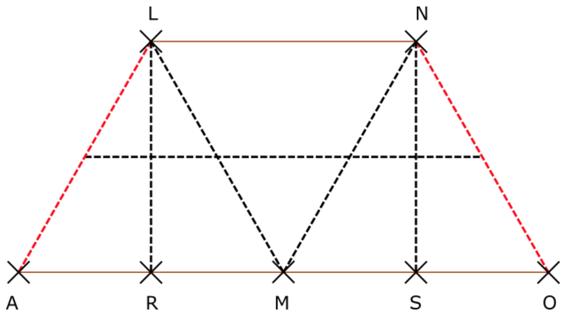


9) Přeložíme bod *A* a *O* na bod *M*. Rozložíme.





10) Po rozložení na úsečce *AO* vzniknou body *R* a *S* dle následujícího obrázku.



Čtyřúhelník *AONL* nazýváme rovnoramenným lichoběžníkem.

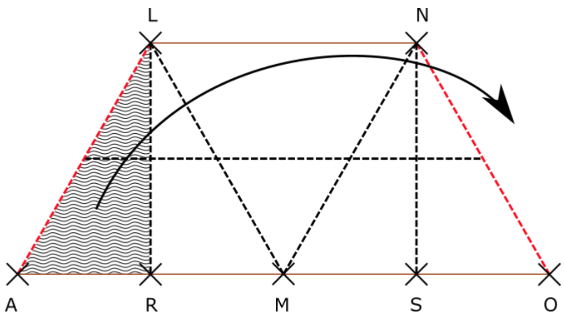
Jako základny označíme strany ……. a ……., výšky jsou úsečky ……. a ……., ramena jsou strany ……. a …….

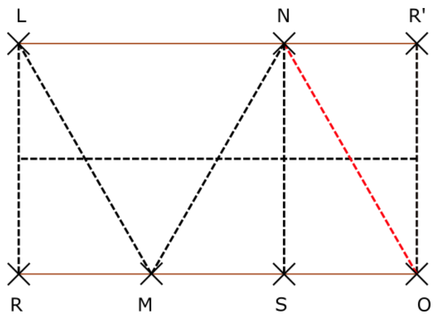
Zakroužkujte pravdivá tvrzení:

$AO \parallel LN$	$AL \parallel ON$	$\lvert AL\rvert = \lvert NO\rvert$	$\lvert LN\rvert = \lvert RS\rvert$	$AL \perp LN$	$\sphericalangle RAL = \sphericalangle SON$

Jak na výpočet obsahu rovnoramenného lichoběžníku?

Odstřihněte trojúhelník *ARL* a přiložte přeponou k přeponě trojúhelníku *SON*.





Vznikl obdélník *ROR'L*, zapište výpočet jeho obsahu: ……………………………

Lze tento postup výpočtu obsahu použít u všech druhů lichoběžníků? ……

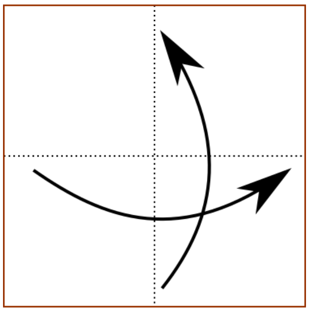
Zdůvodněte své poslední tvrzení na druhou stranu papíru

4.5 Mnohostěny

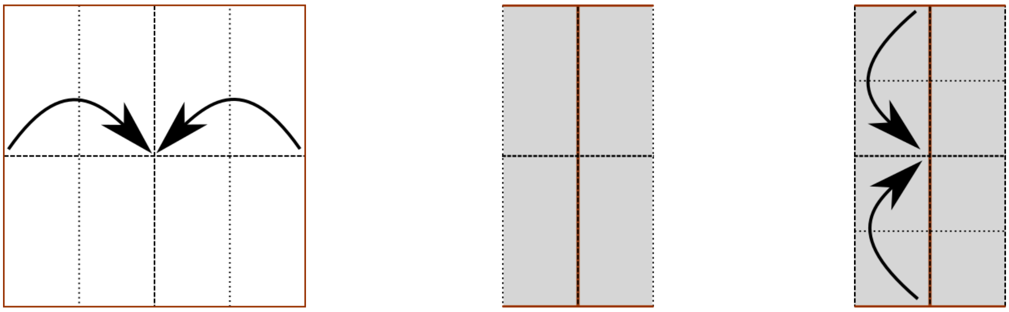
Pracovní list – krychle

Skládáním papíru postupně zkonstruujte následující kroky. Do připravených míst doplňte, popř. zakroužkujte správnou odpověď.

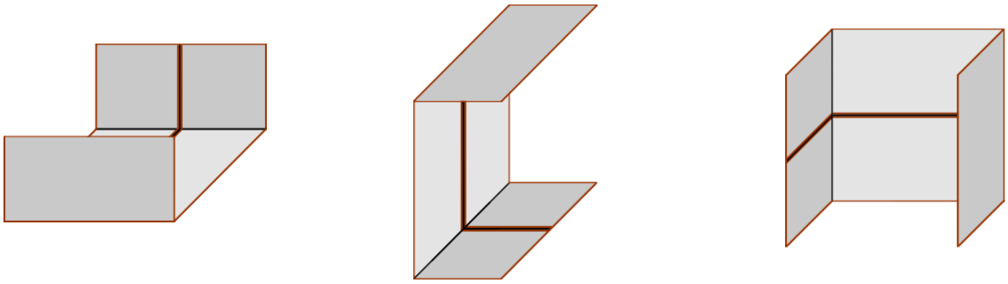
1) Z papíru formátu A4 odstřihněte čtverec. Ten pak přeložte horizontálně i vertikálně. A zpět rozložte.



2) Obě horizontální půlky přeložte na půl. Pak přeložte dolní i horní půlku na půl.



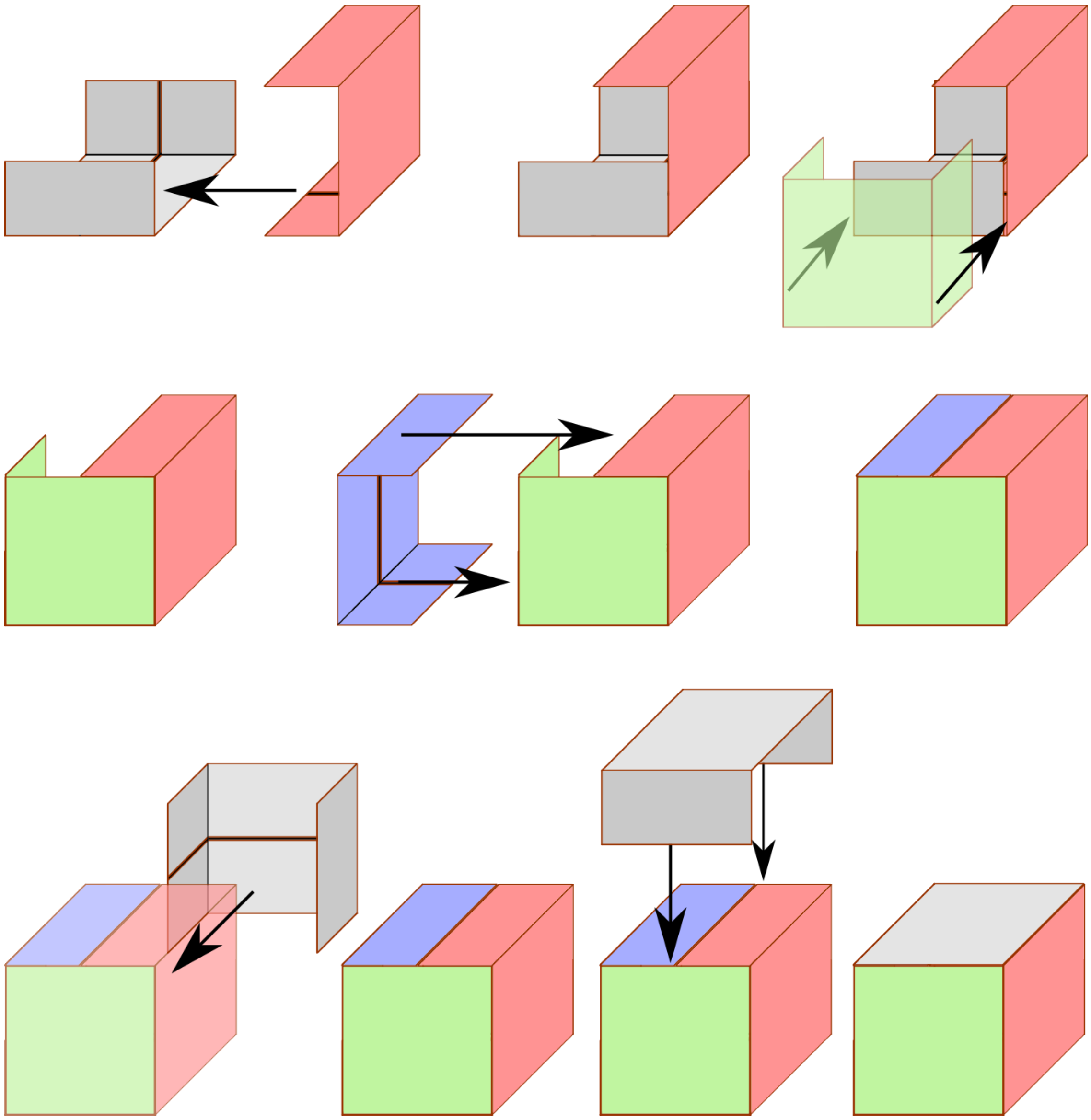
3) Vznikne dílec ve tvaru písmene „U“. K sestavení krychle potřebujete celkem 6 těchto dílců.
Na následujících obrázcích je pro ukázku stejný díl z několika pohledů.



Rubikova kostka.

Jde o hlavolam tvaru krychle složené z 26 menších krychlí. Tyto krychle mají různé barvy a lze s nimi otáčet do různých směrů. Otáčením pak musíte získat na každé straně jednu barvu. Dle serveru www.lidovky.cz nejrychleji složil Rubikovu kostku čtrnáctiletý Američan Lucas Etter za 4,9 sekundy!!

4) Pokud máte všech šest dílů hotových. Můžete je do sebe postupně začít skládat.



Krychle je hotová. Odpovídejte na následující otázky:

Počet vrcholů = ……….. počet hran = ……….. počet stran = ………..

Jaké délce se rovná stěnová úhlopříčka Vaší krychle? ………………………

Existuje nástroj či měřidlo, kterým by šlo změřit tělesovou úhlopříčku krychle? Pokud ano, napište název tohoto nástroje či měřidla …………………………

Zakreslete čárkovaně do posledního obrázku tělesovou úhlopříčku.

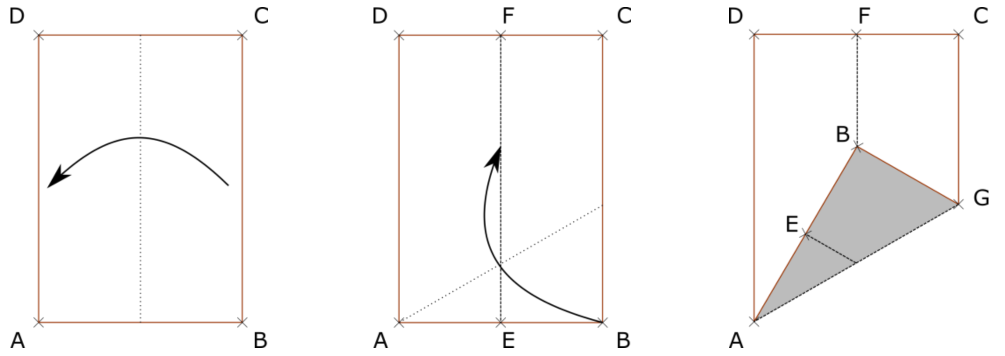
Odhadněte velikost plochy a objemu Vaší krychle *S*= *V*=

Vypočítejte velikost plochy a objemu Vaší krychle *S*= *V*=

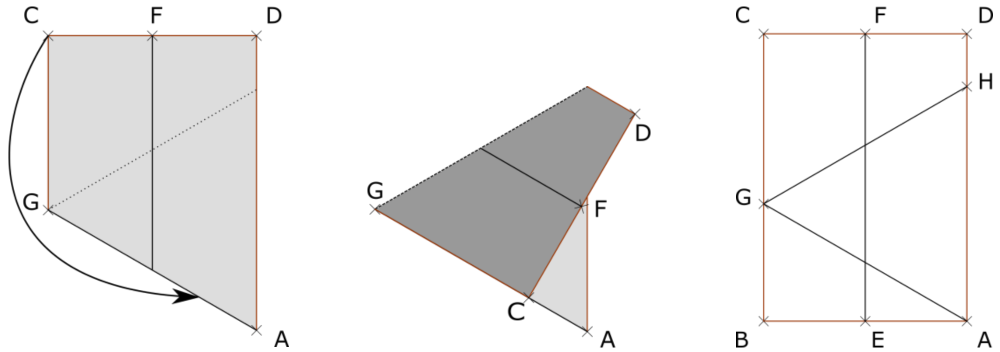
Pracovní list – Tetraedr – čtyřstěn

Skládáním papíru postupně zkonstruujte následující kroky. Do připravených míst doplňte, popř. zakroužkujte správnou odpověď.

1) Jeden z připravených papírů přehněte na půl dle kratší hrany, vznikne osa *EF*. Následně složte bod *B* na úsečku *EF* tak, aby přehyb směroval do bodu *A*.

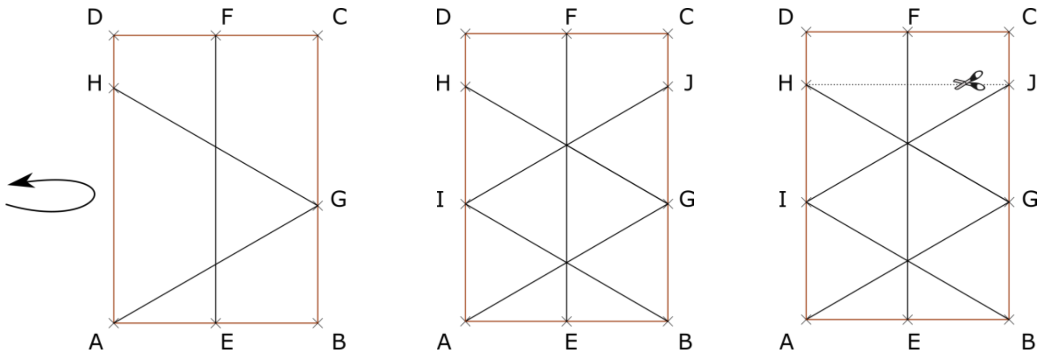


2) Celý nerozložený papír otočte, pak hranu *GC* složte na hranu *GA*. Rozložte.

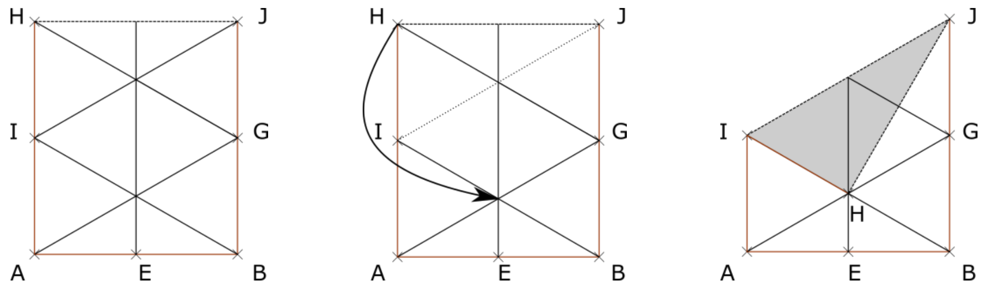


• Trojúhelník *AHG* je ……………………………..

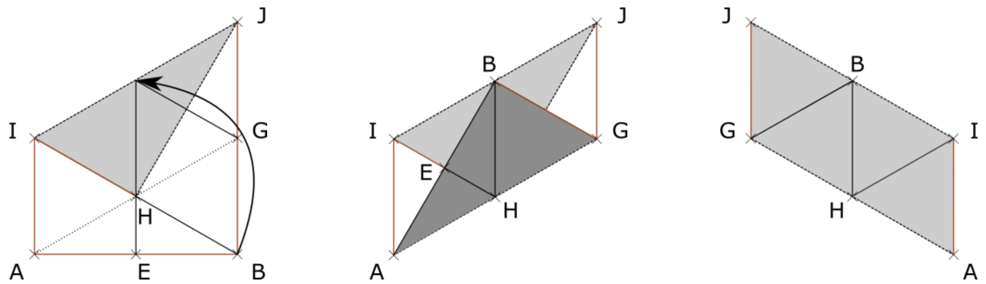
3) Papír znovu otočte a celý postup zopakujte. Pak odstřihněte obdélník *HJCD* a vyhoďte jej.



4) Složte bod *H* dle úsečky *IJ*.



5) Složte bod *B* dle úsečky *AG*. Opět celou skládanku otočte a všechny viditelné přehyby zpevněte (utáhněte).



6) První díl je hotový, k složení Tetraedru však potřebujete ještě jeden stejný díl, a tak z druhého připraveného papíru složte znovu to samé.

- Čtyřúhelník *AIJG* nazýváme ………………………
- Čtyřúhelník *AIBH* nazýváme ………………………
- Čtyřúhelník *GAIB* nazýváme ………………… …………………
- Jsou úsečky *HI* a *GB* rovnoběžné? …… Je úsečka *AJ* osou úhlu *IAH*? …..

Platónská tělesa

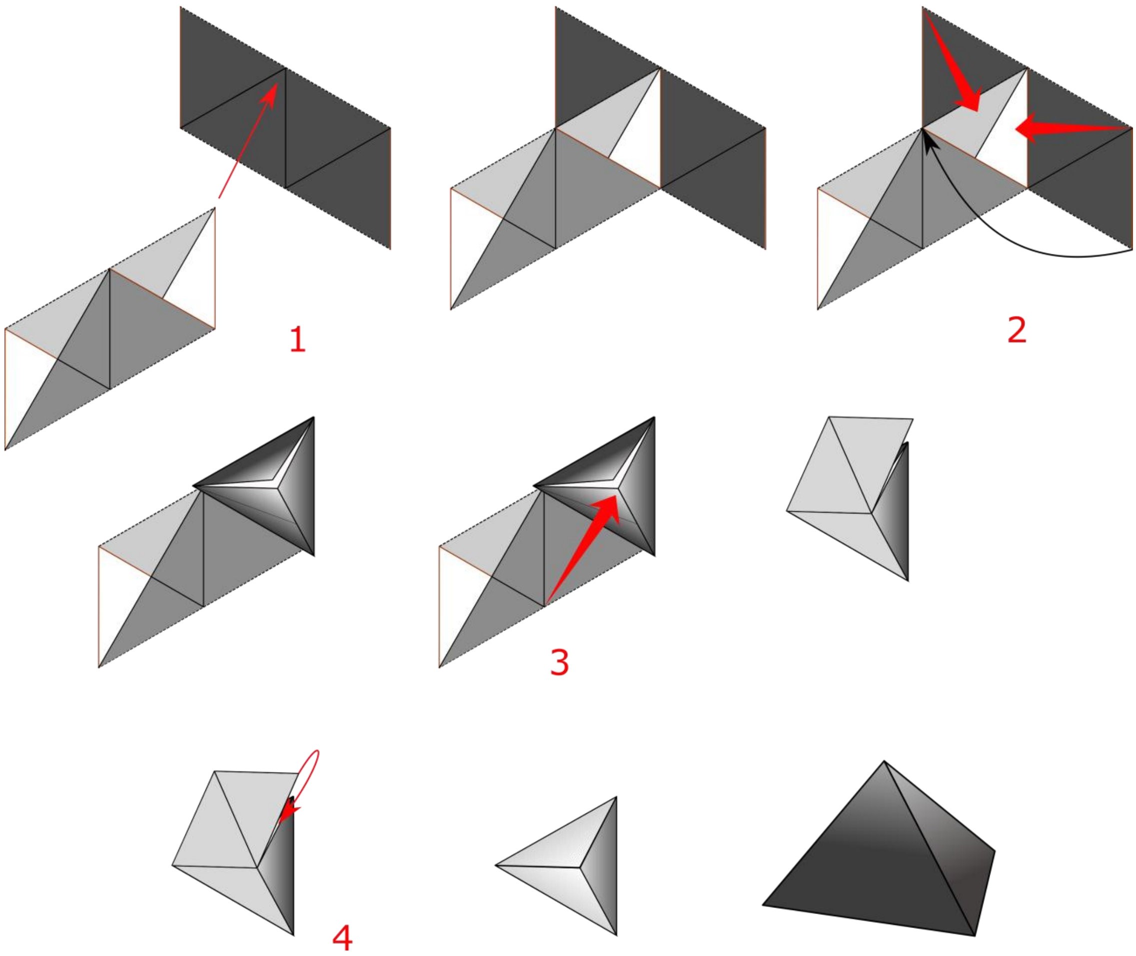
Jde o pravidelná geometrická tělesa, pro která platí:

- Všechny stěny jsou tvořeny ze stejných pravidelných mnohoúhelníků
- Z každého vrcholu vychází stejný počet hran

Těchto těles existuje jen pět (čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvacetistěn a dvanáctistěn). Platón (427-347 př. n. l.) je považoval za představitele živlů (oheň, země, vzduch, voda a jsoucno – vše co existuje). Také se domníval, že tyto živly jsou tvořeny miniaturními částicemi těchto tvarů. Některé molekuly opravdu tohoto tvaru nabývají např. molekula methanu tvoří pravidelný čtyřstěn.

Můžeme se také setkat s krystaly těchto tvarů např.: krystal kuchyňské soli má tvar krychle

7) Jeden díl otočte a postupujte dle následujícího obrázku.



8) Ve čtvrtém kroku musíte poslední díl zasunout do vzniklé mezery mezi sousedními stěnami.

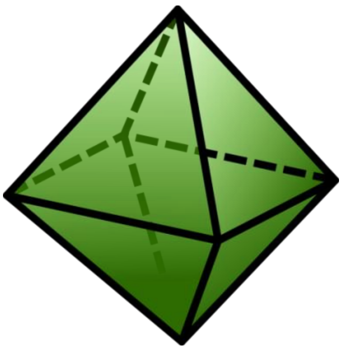
- Tetraedr má …….. stěny …….. hran a ………. vrcholy
- Změřte všechny vnitřní úhly jedné stěny. Jsou shodné? …… Zapište velikost těchto úhlů …………….. Z jakého typu trojúhelníku jsou tedy stěny tvořeny? ....
- Pokud dáte dva Tetraedry stěnami na sebe, kolik stěn bude mít výsledné těleso? …..
- Odhadněte, jak vysoký je Váš Tetraedr? ……………. Nyní změřte ………
- Odhadněte, jak veliká je plocha Vašeho Tetraedru? ……………

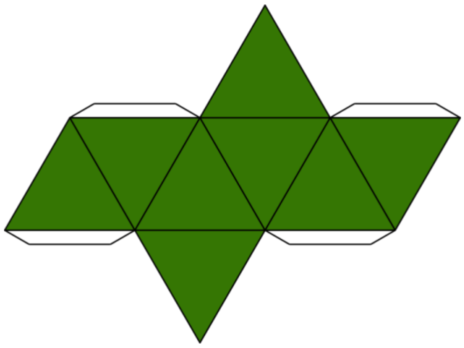
  Nyní plochu vypočtěte:

Pracovní list – Oktaedr – Osmistěn

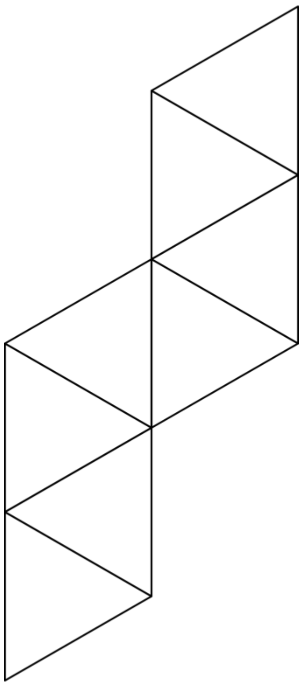
Skládáním papíru postupně zkonstruujte následující úkoly. Do připravených míst doplňte, popř. zakroužkujte správnou odpověď.

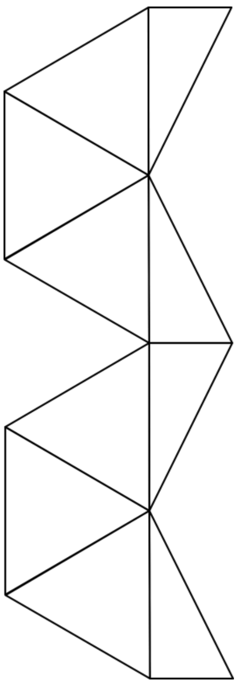
Osmistěn je trojrozměrné těleso, jehož stěny se skládají z osmi shodných rovnostranných trojúhelníků. Na následujícím obrázku vidíte jeho model a síť:

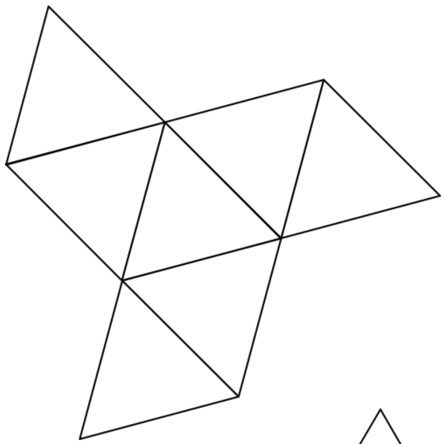


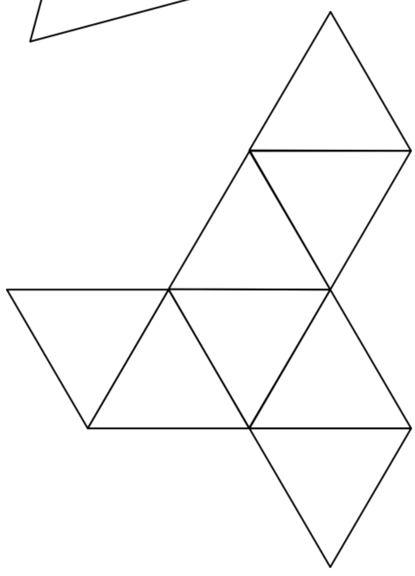


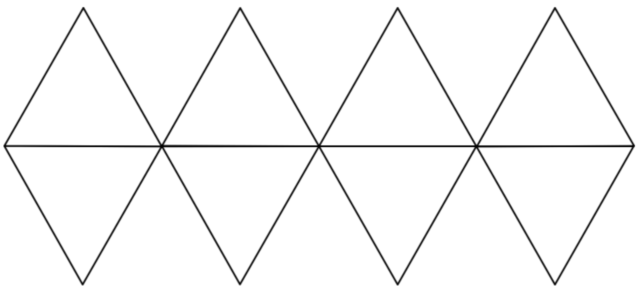
- Rozhodněte, z kterých následujících sítí je možné postavit osmistěn:









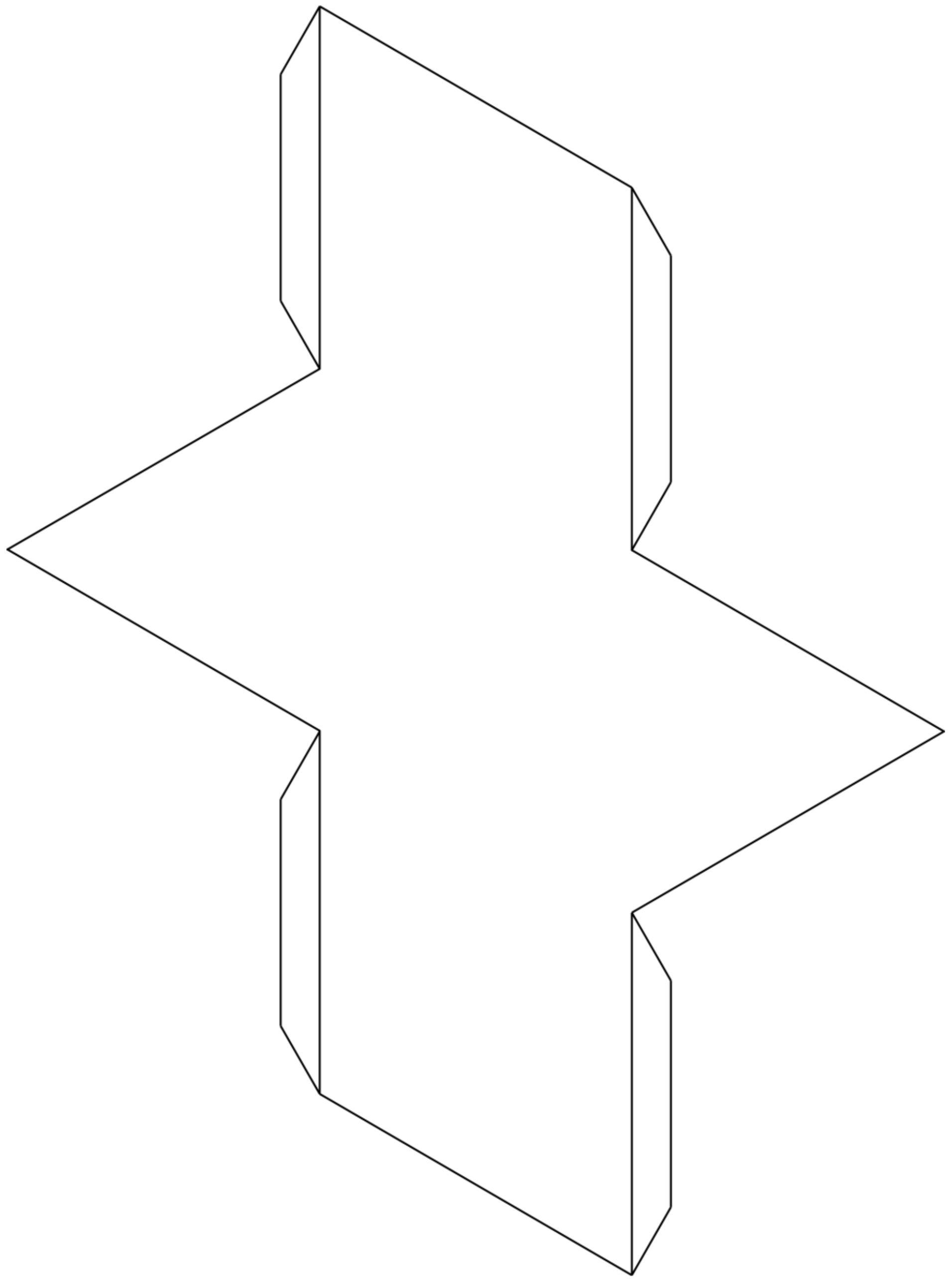


1) Odstřihněte dolní část dle přerušované čáry

2) Na odstřižené části je nakreslen obrys sítě osmistěnu. Vaším úkolem je pomocí skládání „dokreslit" síť tak, aby bylo možné osmistěn postavit.

3) Síť vystřihněte a sestavte osmistěn.

- Osmistěn má …. stěn …. hran a …. vrcholů
- Na jaká dvě shodná tělesa lze osmistěn rozdělit? ……………………
- Osmistěn má několik rovnoběžných hran, zakreslete je z druhé strany. Můžete je rozlišit v jednom obrázku barevně a nebo nakreslit osmistěn několikrát.



4.6 Speciální úlohy

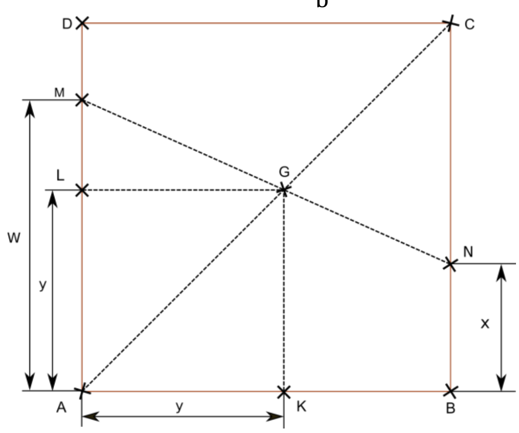
Dělení úsečky

Dělení úsečky na tři stejné díly sice nepatří mezi antické úlohy, ale řadíme ho mezi problémové úlohy skládání papíru. Existuje několik metod řešení, zde ukážeme jen metodu křížení úhlopříčky (Lang [9], s. 13).

K dělení úsečky na shodné díly používáme čtverec, kde jeho jedna strana (resp. dvě strany) jsou děleny na požadovaný počet dílů.

Obecný postup

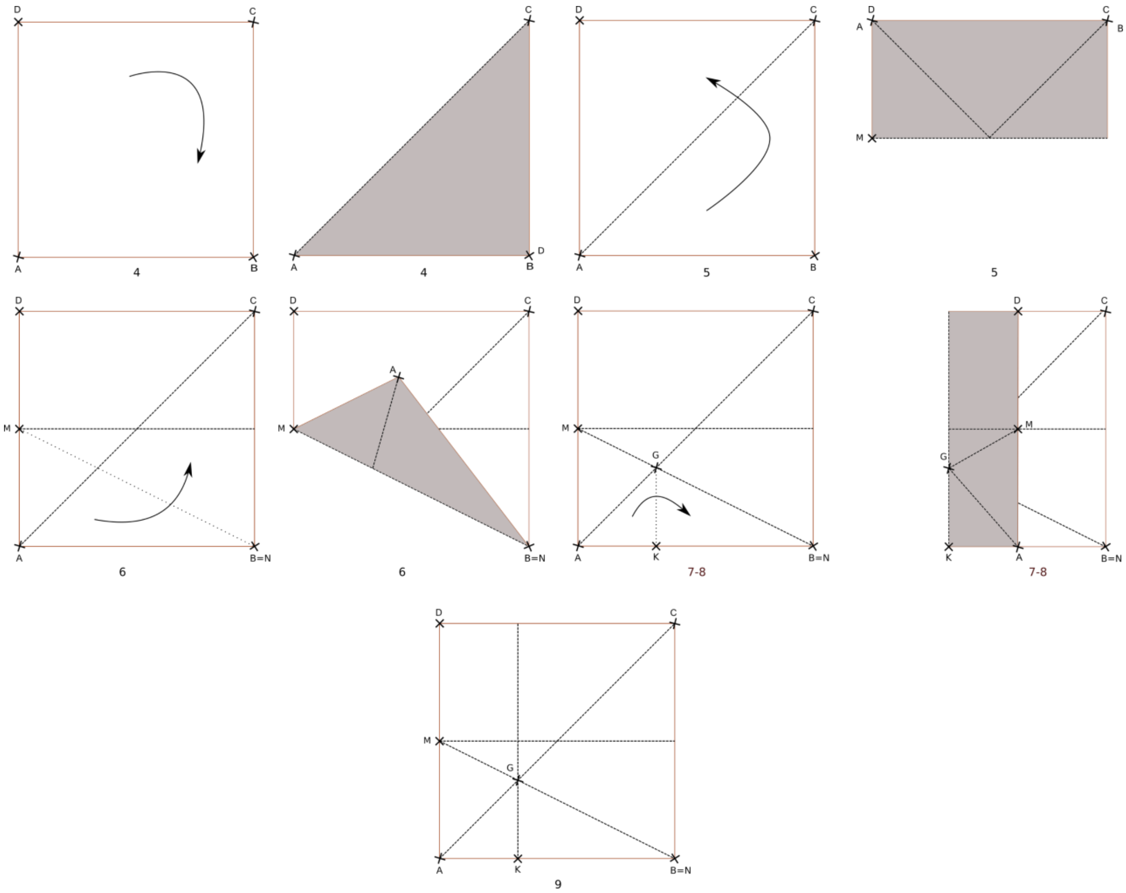
1) Zavedeme poměr $y = \frac{a}{b}$, který určuje, v jakém poměru chceme úsečku dělit.
2) Definujme proměnnou *p*, která je mocninou čísla 2. Tato proměnná musí být větší nebo rovna číslu a a současně rozdílu $(b - a)$.
3) Definujme $w = \frac{a}{p}$, $x = \frac{p+a-b}{p}$.
4) Čtverec přeložíme na půlku tak, aby vznikla úhlopříčka.
5) Pokračujeme dle obrázku č. 1. Na levé hraně zkonstruujeme bod *M* v poměru *w* a na pravé bod *N* v poměru *x*.
6) Přeložíme papír dle úsečky *MN*.
7) Průnikem úsečky *MN* a úhlopříčky *AC* vznikne bod *G*.
8) Sestrojíme čtverec *AKGL*, kde úsečka *AG* je úhlopříčka. Stačí sestrojit pravoúhlý trojúhelník *AKG* s přeponou *AG*.
9) Úsečka *AK* (resp. *AL*) je rovna poměru $y = \frac{a}{b}$ strany čtverce.



Obrázek 1 Dělení úsečky v poměru a/b

Postup pro $y = \frac{1}{3}$

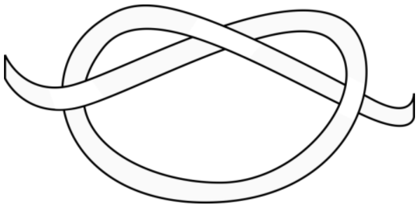
1) $y = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{1}{3}$
2) $2^n = p \geq (a \wedge b - a); p = 2$
3) $w = \frac{a}{p} = \frac{1}{2}; x = \frac{p+a-b}{p} = \frac{2+1-3}{2} = \frac{0}{2} = 0$
4) Čtverec přeložíme na půlku tak, aby vznikla úhlopříčka.
5) Pokračujeme dle obrázku č. 2. Na levé straně zkonstruujeme bod *M* v poměru *w* a bod *N* v poměru *x* (poměr x je roven nule, proto $N = B$).
6) Přeložíme papír dle úsečky *MN*.
7) Průnik úsečky *MN* a úhlopříčky *AC* nazveme *G*.
8) Bodem *G* vedeme rovnoběžku se stranou *AD*.
9) Úsečka *AK* je rovna poměru $\frac{1}{3}$ strany čtverce.



Obrázek 2 Postup dělení úsečky v poměru 1/3

Pracovní list – Pětiúhelník

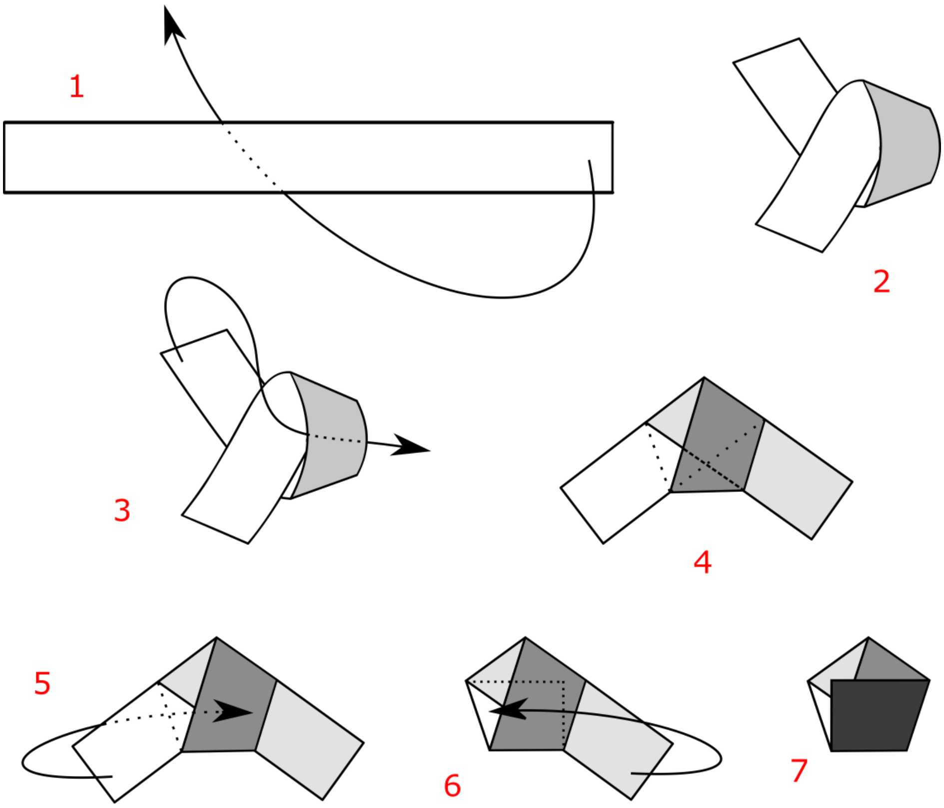
Skládání papíru se inspiruje i ve vázání uzlů. Například ze základního „oka“ lze seskládat pětiúhelník.



Návod:

a) Z papíru formátu A4 podélně odstřihněte čtyřcentimetrový pruh papíru. Lze skládat mi z pruhu o menší výšce. Praxí byla zjištěna pro papír formátu A4 maximální výška - 5 cm, ale skládání je už značně náročnější na preciznost.

b) Postupujte dle následujících obrázků:



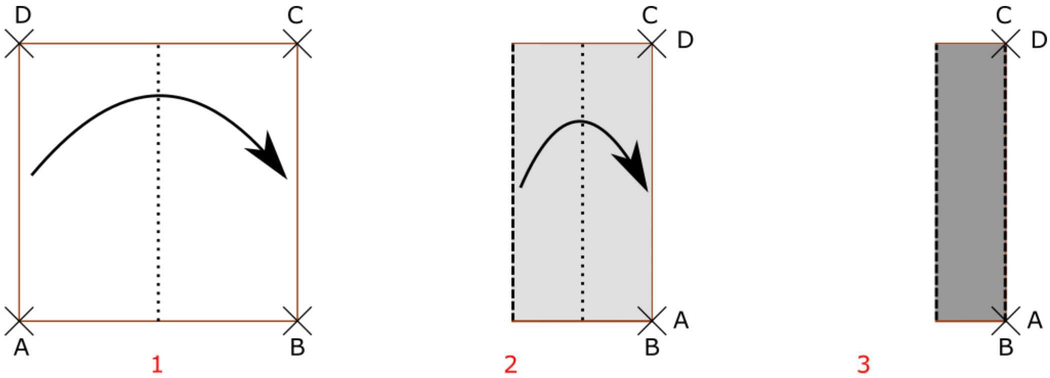
c) Ve čtvrtém kroku je potřeba přehyby s citem „dotáhnout“.

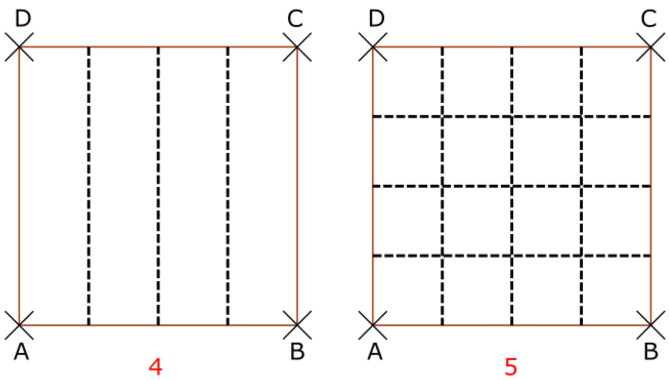
- Promyslete, jaké geometrické útvary vzniknou po rozložení.
- Do sedmého obrázku zakreslete všechny osy souměrnosti.

Pracovní list – Pythagorova věta

Skládáním papíru postupně zkonstruujte následující kroky. Do připravených míst doplňte, popř. zakroužkujte správnou odpověď.

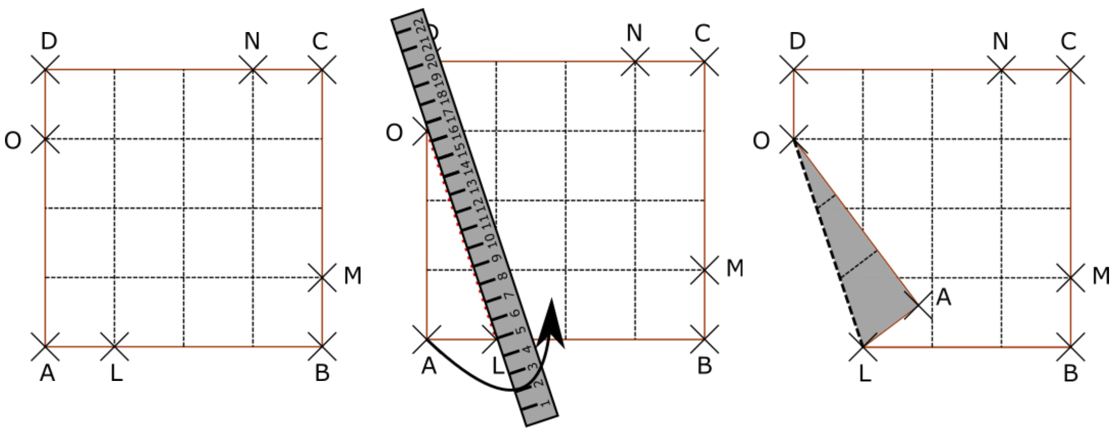
1) Z přiloženého prázdného papíru sestrojte čtverec *ABCD*, zbytek vyhoďte.
2) Přeložte hranu *AB* na čtvrtiny a pak i hranu *AD*.



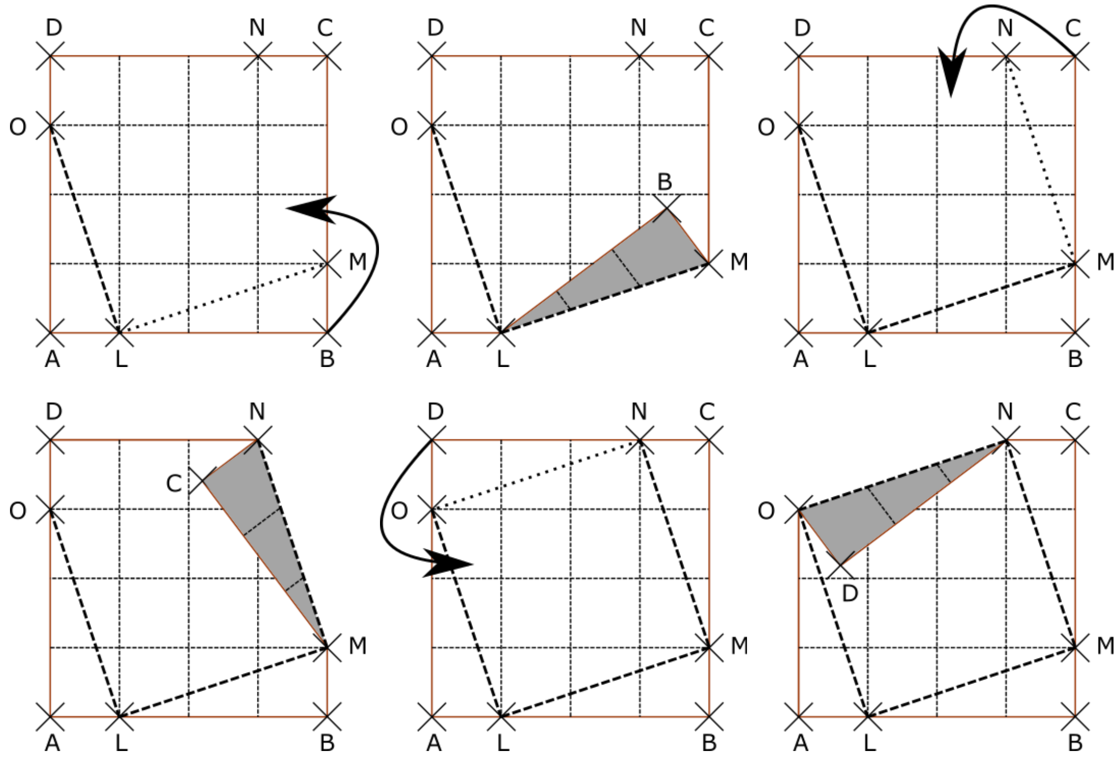


- Čtverec *ABCD* je nyní rozdělen na 16 shodných čtverců. Délka stran těchto čtverců je rovna ………………… strany *AB*. Kolikrát je jejich obsah menší než obsah čtverce původního? …………………….

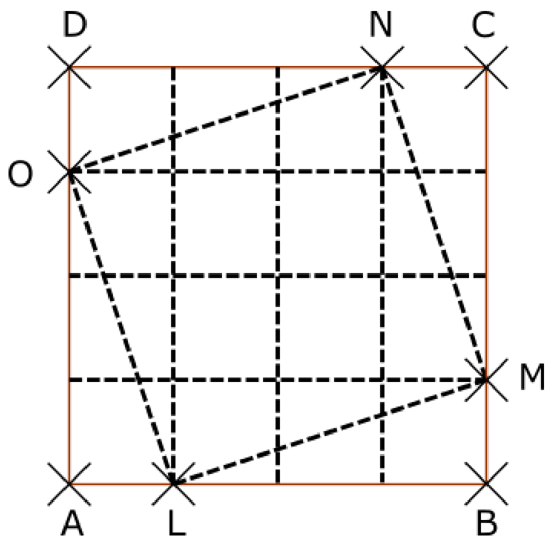
3) Doplníme nové body *L*, *M*, *N*, *O*, viz obrázek. Nyní složíme hranu *OL*.
   - Vzhledem k náročnosti následujících překladů je možné použít pravítko pro přesnější ohyb.



4) Nyní budeme opakovat krok 3 pro úsečku *LM*, *MN* a *NO*.



5) Po rozložení vznikne nový čtverec *LMNO*. Jeho obsah je roven:
$\frac{13}{16}$, $\frac{5}{16}$ nebo $\frac{10}{16}$ obsahu čtverec *ABCD*? (Urči bez pravítka)



6) Vznikly zde čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky *ALO*, *LBM*. *MCN* a *OND*. Jeden z nich vyjádříme Pythagorovou větou:

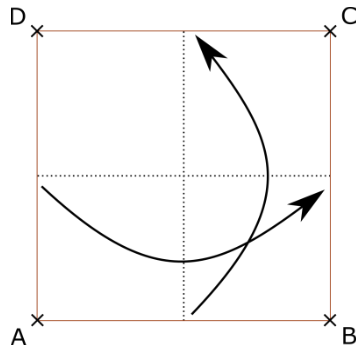
$$|LO|^2 = |AL|^2 + |AO|^2$$

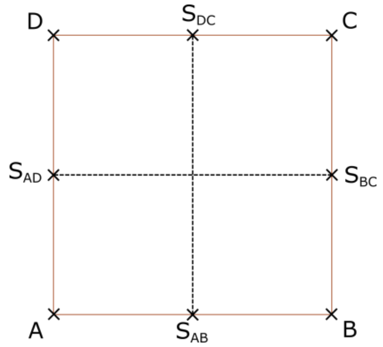
- V předchozím obrázku chybí tři body *E*, *F*, *G*, zakresli tyto body tak, aby vzniklé čtverce reprezentovaly předchozí rovnici. Tyto čtverce vypiš:
  $|LO|^2 =$ $|AL|^2 =$ $|AO|^2 =$
- Bod *A* má souřadnice [0, 0] a bod *C* [4, 4]. Vypište souřadnice bodů *M*, *L*, *N*, *D*:

Pracovní list – Pythagorejský trojúhelník

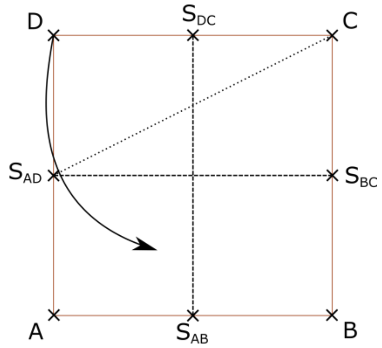
Skládáním papíru postupně zkonstruujte následující kroky. Do připravených míst doplňte, popř. zakroužkujte správnou odpověď.

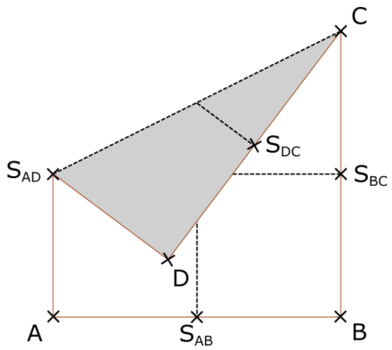
1) Čtvercový papír přeložte na půlku horizontálně i vertikálně. Průnikem hran s osami vzniknou středy příslušných stran S_{AB}, S_{BC}, S_{DC}, S_{AD}.



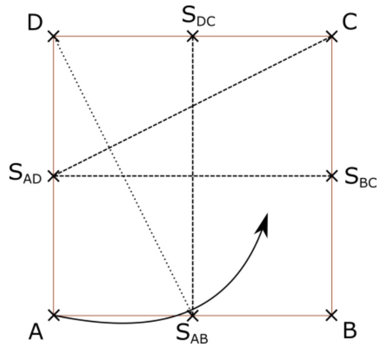


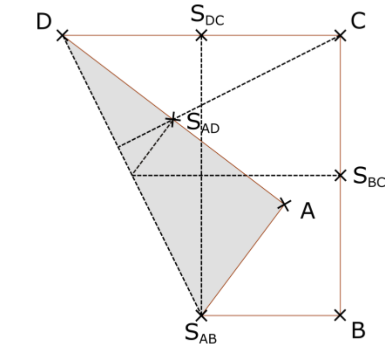
2) Bod D překlopte dle úsečky $S_{AD}C$. Rozložte.





3) Bod A překlopte dle úsečky DS_{AB}. Rozložte.



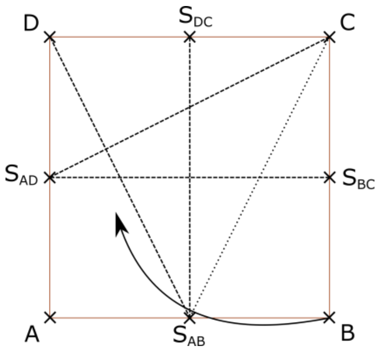


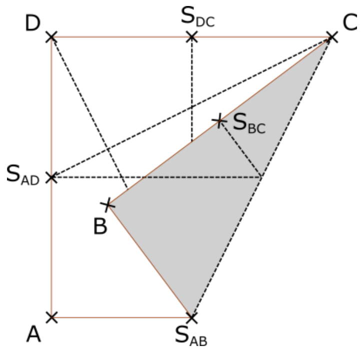
Pythagorejské trojice, jsou trojice celých kladných čísel, které určují délky stran pravoúhlého trojúhelníka. Existují dva druhy těchto čísel.

- Trojice čísel je nesoudělná např.: (3; 4; 5)
- Trojice čísel je násobkem trojice nesoudělné 2*(3; 4; 5) = (6; 8; 10)
  (v tomto případě se tedy jedná o podobný trojúhelník)

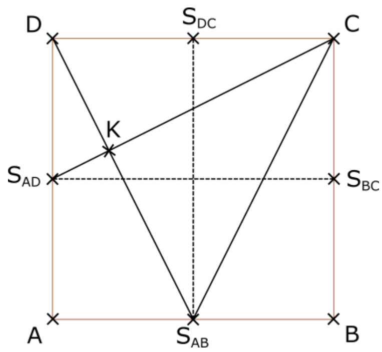
Synonymem pro Pythagorejskou trojici je Pythagorejský trojúhelník.

4) Bod B překlopte dle úsečky $S_{AB}C$. Rozložte.





5) Průnik hran DS_{AB} a $S_{AD}C$ označte bodem K.



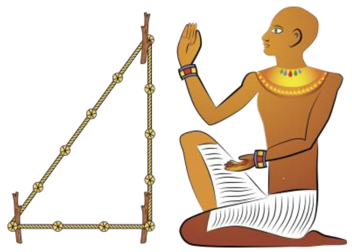
- Změřte a zapište velikost úhlu $S_{AB}KC$=

  a proto trojúhelník $S_{AB}CK$ nazýváme: ……………………………….

- Změřte délky těchto úseček: $|KC| =$ $|S_{AB}C| =$ $|S_{AB}K| =$

Pravý úhel znám již ve starém Egyptě

Už před 4000 lety ve starém Egyptě používali pravý úhel pro své stavby. Na lano navázali 13 uzlů, které mezi sebou měli stejnou vzdálenost. První uzel spojili s posledním. Pak už stačilo jen napnout lano do trojúhelníku o délce stran 3, 4 a 5 dílů.



Trojúhelník $S_{AB}CK$ je Pythagorejským trojúhelníkem. Víme, že je určen násobkem trojice (3; 4; 5). Tento násobek vypočtěte, výpočet proveďte pro všechny tři strany.

Násobek pythagorejské trojice je roven číslu ……….

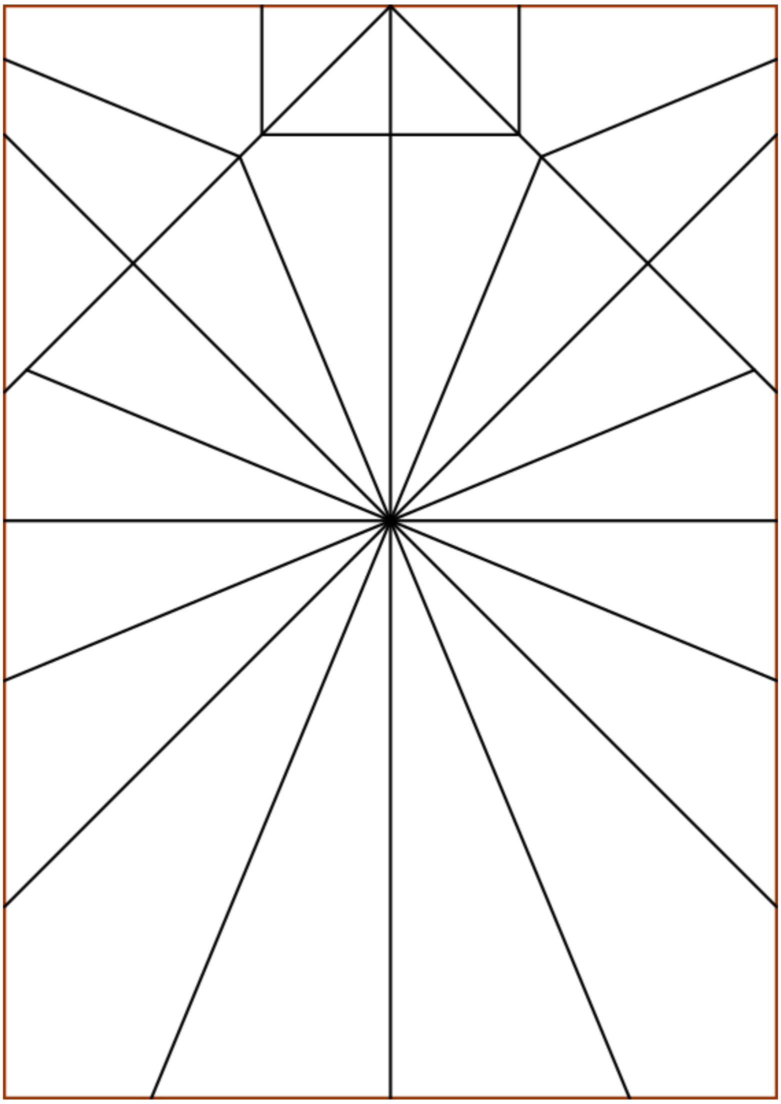
Námi zkonstruovaný Pythagorejský trojúhelník je tedy podobný trojúhelníku (3; 4; 5). Narýsujte tedy tento trojúhelník na druhou stranu papíru a ověřte jejich podobnost. Vypište, jak jste tuto podobnost ověřili: ……..…………………………………………

Pracovní list – Vlaštovka

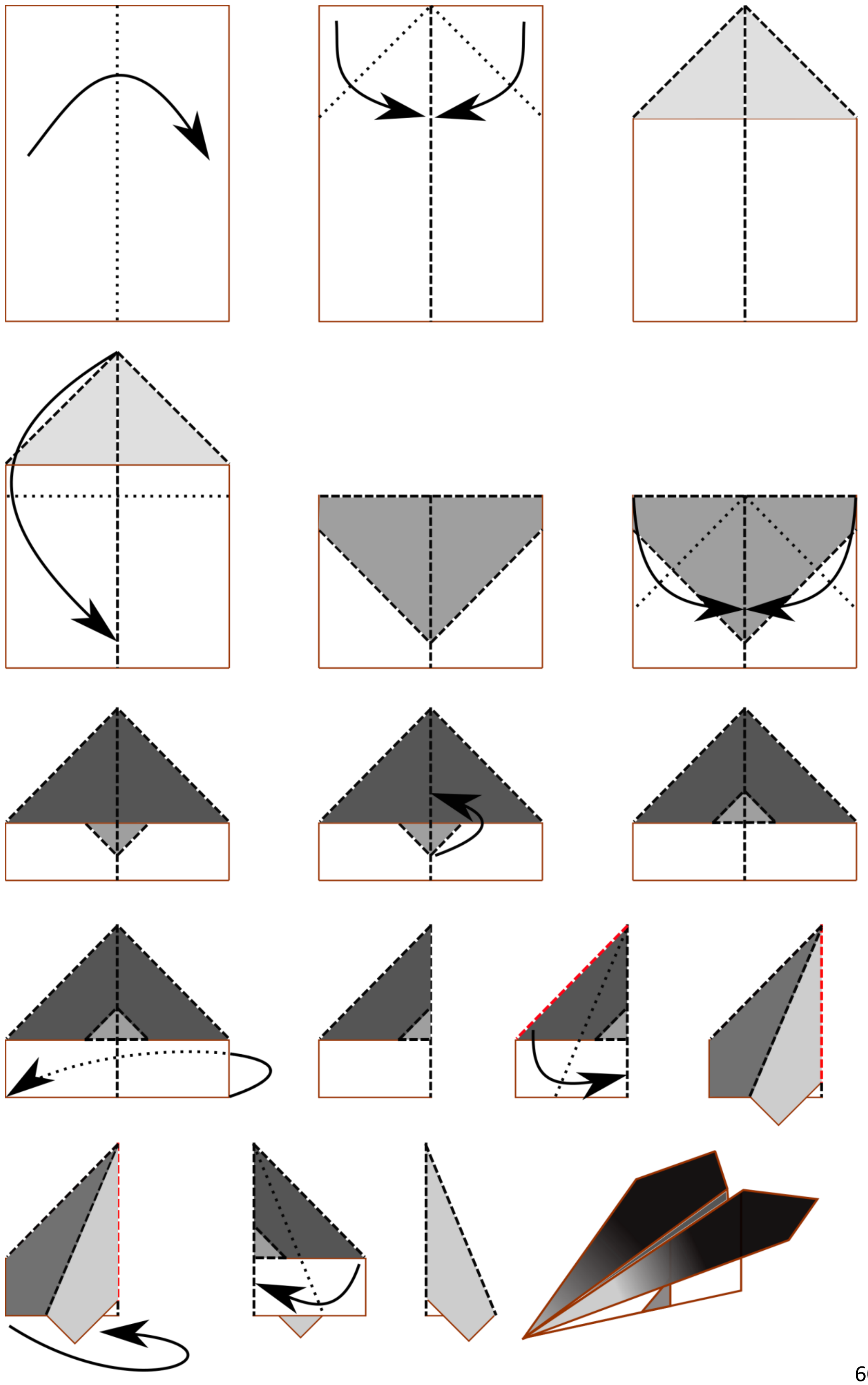
Zakreslete dané úkoly a pak sestrojte vlaštovku.

Na následujícím obrázku je zakreslen rozložený papír z poskládané vlaštovky. Zakreslete následující úkoly:

1) Každý pravý úhel označte příslušným symbolem.
2) Každý rovnoramenný trojúhelník zvýrazněte pastelkou.
3) Kolik pravoúhlých trojúhelníků se zde nachází? ....
4) Symbolem α zakreslete všechny tupé úhly.
5) Pomocí úhloměru najděte všechny úhly velikosti 22,5° a označte je názvem β.
6) Z návodu na stavbu vlaštovky určete, kde jsou v tomto obrázku křídla a vyšrafujte.



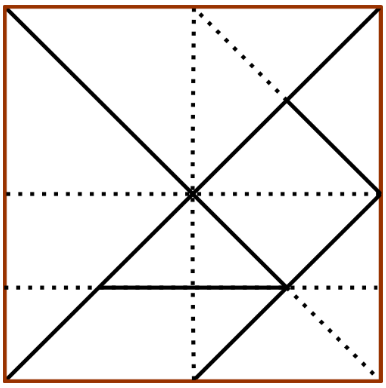
Z prázdného papíru sestrojte dle daného návodu vlaštovku.

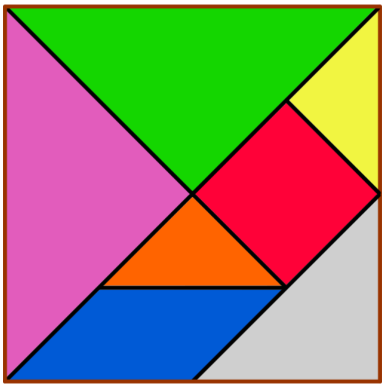


Pracovní list – Tangram

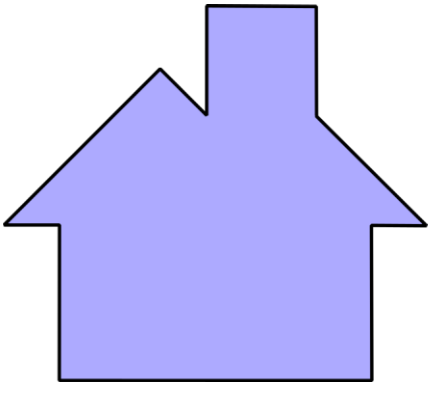
Tangram je hra pocházející ze staré Číny. V této hře je několik dílků ve tvaru čtverce, lichoběžníku a několik velikostí pravoúhlých trojúhelníků. Úkolem hry je sestavit z těchto dílků daný obrázek, když znáte jen jeho obrys. Při skládání se dílky nesmějí překrývat, ale musejí se sebe vždy dotýkat.

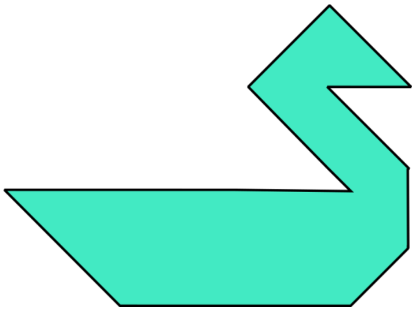
Poskládejte váš papír tak, aby na něm vznikly stejné geometrické útvary jako na obrázku. (Můžete využít pravítko)





Naneštěstí papír nelze složit tak, aby vznikly jen chtěné geometrické útvary. A tak musíte chtěné útvary odlišit. Proto vyšrafujte dle obrázku vpravo dané útvary danou barvou. Nyní jednotlivé tvary vystřihejte a poskládejte z nich následující dva obrázky:





- Vymyslete váš vlastní obrázek.
- Vymyslete, jak poskládat písmeno.
- Kolik procent plochy tvoří následující útvary z celkové plochy původního čtverce?

  fialový trojúhelník= čtverec= lichoběžník=

5 Závěr

Velkou inspirací pro moji práci byla diplomová práce pana Mentlíka [13]. Jde o jedinou mnou nalezenou diplomovou práci či knihu, kde byly využity pracovní listy s dodatečnými otázkami ke skládání. Většina zbylé literatury sloužila k námětům pro skládání.

Výroba pracovních listů byla náročná vzhledem k tvorbě obrázkových návodů. Největším problémem byl nákres schémat pro mnohostěny. Proto zde nejsou návody na jejich složitější druhy. Za prvé, návod v podobě nákresu by byl pro děti značně náročný a podle mého názoru i nesplnitelný. A za druhé, existují mnohem názornější a jednodušší návody, a to v podobě videí.

Některé pracovní listy jsou značně nahuštěné a jsou i typograficky nesprávné. Důvodem je snaha o šetření papíru. Už využití třetího pracovního listu znamená použít 75 kusů papírů formátu A4 pro 25 žáků ve třídě, nemluvě o použití v celém ročníku. Proto je ve většině případů zmenšené řádkování a někde jsou využita textová pole.

Jako řešení předchozího problému se nabízí možnost předělat pracovní listy tak, aby žáci odpovídali v elektronické podobě. To znamená, že skládání by probíhalo u počítačů. Žáci by obdrželi jen list na skládání. Další možností je oboustranný tisk (pokud pracovní list nemá odstřižek) a využití popsaných papírů pro skládání.

Bohužel v praxi byly užity jen první dva pracovní listy a jen na jedné třídě. Hned se vyskytlo několik problémů. Za prvé, otázky nabízely možnost více odpovědí, a tak byly opraveny. Za druhé, vzhledem k nepřesnému skládání dětem vycházely nepřesné údaje. Naopak v momentě, kdy se na konci hodiny vysvětlily správné odpovědi a řešení, většina dětí problém pochopila. Díky tomu, že před sebou měl každý žák vlastnoručně sestrojený model, bylo pro žáky velkou motivací probrat správné otázky a řešení.

Seznam použitých zdrojů

[1] About Washi. *The Japanese paper place* [online]. Toronto: Nancy Jacobi [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: http://www.japanesepaperplace.com/abt-japanese-paper/about-washi.htm

[2] Before Origami. *K's Origami* [online]. Hatori, Koshiro [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: http://origami.ousaan.com/library/historye.html

[3] BOHÁČOVÁ, Jana. *Origami jako didaktické prostředí v matematickém vzdělávání*. Praha, 2009. Diplomová práce. UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE. Vedoucí práce PhDr. Filip Roubíček, PhD.

[4] Historie origami. *Origami.webz* [online]. Svobodová, 2008 [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: http://origami.webz.cz/historie.htm

[5] HISTORIE ORIGAMI. *Origami-cos* [online]. Praha: ČESKÁ ORIGAMI SPOLEČNOST (ČOS), 2010 [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: http://www.origami-cos.cz/historie-origami

[6] History of Washi. *Hiromi paper* [online]. Santa Monica: Hiromi Katayama, 2010 [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: https://www.hiromipaper.com/hpi_about_washi.htm

[7] How to make a 3D paper star: Easy origami stars for beginners making | DIY-Paper Crafts. In: *DIY-Paper Crafts* [online]. 2016 [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=FIiqBRRVwjo

[8] Huzita-Justin Axioms. *Robert J. Lang Origami* [online]. California: Robert J. Lang, 2017 [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: http://www.langorigami.com/article/huzita-justin-axioms

[9] LANG, Robert J. *Origami and Geometric Constructions*. 1996-2015.

[10] LEISCHNER, Pavel. *Dějiny matematiky* [online]. České Budějovice, 2016 [cit. 2017-04-14].

[11] MAGRONE, Paola. *Form and art of closed crease origami* [online]. Rome, 2015 [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: http://www.formulas.it/formulog/wp-content/uploads/2014/12/Magrone_575-580.pdf

[12] Mathematical Origami. *Mathigon* [online]. Philipp Legner, 2017 [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: https://mathigon.org/origami

[13] MENTLÍK, Petr. *Rozvíjení matematických idejí pomocí origami*. Ústí nad Labem, 2014. Bakalářská práce. UNIVERZITA JANA EVANGELISTY PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM. Vedoucí práce Mgr. Jiří Přibyl.

[14] OLSON, ALTON T. *MATHEMATICS THROUGH PAPER FOLDING* [online]. Edmonton: University of Alberta [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: http://www.arvindguptatoys.com/arvindgupta/paperfolding.pdf

[15] Origami a geometrie. *Origami* [online]. František Grebeníček, 2009 [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: http://www.origami.cz/Geometrie/axiomy.html

[16] Platónská tělesa. *FYZikálně - MATematIcKý blog* [online]. [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: http://fyzmatik.pise.cz/1005-platonska-telesa.html

[17] Podrobnosti k Origami. *Origami* [online]. František Grebeníček, 2009 [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: http://www.origami.cz/podrobnosti.html

[18] PUPÍK, Petr. *Nedokonalosti dokonalé matematiky* [online]. Kunice, 2015 [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: http://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=68969&view=10353

[19] Pythagorova věta, Pythagorejský trojúhelník, Pythagorejská čísla pro ZŠ. *Základní škola Dobřichovice* [online]. [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: http://old.zsdobrichovice.cz/programy/matika/pyth_triangle.htm

[20] ROW, T. Sundara, BEMAN, Wooster Woodruff a David Eugene SMITH, ed. *Geometric exercise in paper folding*. 3rd. Chicago, 1917.

[21] SLÁMA, Michal. *Pythagorejské trojúhelníky*. Praha, 2015. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

[22] ŠOLÁ, Martina. Skládání papíru [online]. České Budějovice, 2015 [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: <http://theses.cz/id/km8p3g/>. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Faculty of Education. Vedoucí práce prof. RNDr. Pavel Pech, CSc..

Seznam obrázků