



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

MODELOVÁNÍ A ANALÝZA LABORATORNÍHO MODELU ROTAČNÍHO INVERZNÍHO KYVADLA

MODELING AND ANALYSIS OF LABORATORY ROTATIONAL PENDULUM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Pavel Nedvědický

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Martin Brabc

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Pavel Nedvědický
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	Ing. Martin Brabc
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Modelování a analýza laboratorního modelu rotačního inverzního kyvadla

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Úkolem práce je navázat na předchozí závěrečné práce související s modelem rotačního inverzního kyvadla a využít předchozích experimentů k precizní analýze a řízení tohoto výukového modelu. Jedná se o variaci na klasickou úlohu řízení inverzního kyvadla se dvěma stupni volnosti a jedním aktuátorem. Důraz bude kladen především na kompenzaci nelinearit (např. suchého tření) a různé metody přechodů ze stabilní do labilní polohy a zpět.

Cíle bakalářské práce:

- 1) Proved'te literární rešerši v oblastech modelování a řízení rotačního inverzního kyvadla a kompenzace suchého tření.
- 2) Na základě předchozích prací sestavte nelineární model kyvadla, proved'te odhad parametrů a implementujte vhodný algoritmus pro stabilizaci kyvadla v labilní poloze.
- 3) Zopakujte předchozí experimenty, které cílily na odhad tření v modelu, a simulačně i experimentálně ověřte alespoň 5 různých variant kompenzace suchého tření.
- 4) Implementujte a porovnejte alespoň 3 různé metody přechodu ze stabilní do labilní polohy kyvadla. Implementujte vhodnou metodu pro přechod do labilní polohy.
- 5) Rozšiřte existující algoritmus implementovaný na kontroleru dsPIC (pomocí automatického generování kódu) o vhodnější metodu kompenzace tření.

Seznam doporučené literatury:

NELLES, Oliver. Nonlinear system identification: from classical approaches to neural networks and fuzzy models. Berlin: Springer, 2011. ISBN 978-364-2086-748.

LJUNG, Lennart. System identification: theory for the user. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR, 1999. ISBN 978-0136566953.

VALÁŠEK, Michael. Mechatronika. Dot. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 1996. ISBN 80-010-1276-X.

NOSKIEVIČ, Petr. Modelování a identifikace systémů. Ostrava: Montanex, 1999. ISBN 80-722-50-0-2.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá modelováním, identifikací a řízením rotačního inverzního kyvadla. Soustava byla matematicky popsána a byl vytvořen model v prostředí *Matlab/Simulink*, jehož parametry byly odhadnuty pomocí nástroje *Parameter Estimation Toolbox* implementovaného v *Matlabu*. Následuje část věnující se rozboru a aplikaci swing up metod, konkrétně momentového skoku, energetické metody a PD metody. Zvláštní důraz byl kladen na tvorbu pěti modelů tření, které zohledňují měnící se hodnotu třecího momentu v průběhu rotace ramene. Jeden z nich je model dynamický, byl zvolen Reset Integrator. Identifikované modely byly testovány jako kompenzace a byla ověřena jejich funkčnost. K řízení bylo využito stavového řízení se stavovým pozorovatelem. Koeficienty se naladily LQR metodou. Veškeré poznatky byly na závěr aplikovány při výsledném řízení modelu, čímž se ověřila jejich kvalita.

Summary

This bachelor thesis aims at modelling, identification and control of Furuta pendulum. System was described via mathematical equations and simulation model was created in *Matlab/Simulink*. Parameters of rotary inverted pendulum were estimated using the simulation model. Then the thesis deals with swing up via torque impulse, energy control and PD regulator. In the part dealing with friction five compensation models were created. They include change of friction during rotation and one of them is dynamic model, Reset Integrator. Models were verified by adding them as an input to an actuator and testing them. To stabilize pendulum in inverted position state feedback control with state observer was designed using LQR method. Final regulation included all knowledge obtained during this thesis.

Klíčová slova

Rotační inverzní kyvadlo, tření, Reset Integrator, swing up, energetická metoda, identifikace parametrů, Simulink, stavové řízení, stavový pozorovatel, LQR

Keywords

Furuta pendulum, friction, Reset Integrator, swing up, energy control, identification of parameters, Simulink, state control, state observer, LQR

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím uvedené literatury.

Pavel Nedvědický, Brno, 2018

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat všem, kteří se na této práci jakkoliv podíleli, i jen drobnými radami, zejména lidem z mechatronické laboratoře. Zvláštní poděkování patří vedoucímu bakalářské práce Ing. Martinu Brablcovi za vstřícný přístup, ochotu a dobrou komunikaci.

Obsah

1. Úvod.....	13
2. Rešeršní část	14
2.1. Rotační inverzní kyvadlo	14
2.1.1. Princip.....	14
2.1.2. Konstrukce	14
2.1.3. Motor	16
2.1.4. Senzorika	16
2.1.5. Výkonový obvod a připojení řídicích prvků.....	17
2.2. Swing up	18
2.2.1. Momentový skok	19
2.2.2. Energetická metoda.....	19
2.2.3. PD regulátor	20
2.3. Tření	21
2.3.1. Statické modely.....	22
2.3.2. Dynamické modely	23
3. Modelování systému a identifikace parametrů	27
3.1. Pohybové rovnice	27
3.2. Momenty setrvačnosti	28
3.3. Viskózní tlumení	31
3.3.1. Rameno	31
3.3.2. Kyvadlo.....	34
3.4. Verifikace.....	35
4. Řízení	38
4.1. Swing up	38
4.1.1. Momentový skok	38
4.1.2. Energetická metoda.....	39
4.1.3. PD regulátor	40
4.1.4. Srovnání	42
4.2. Stavové řízení	42
4.4. Tření	46
4.4.1. Specifické tření	46
4.4.2. Modely tření.....	48
4.4.3. Závislost na teplotě	57
4.4.4. Porovnání	57
4.4.5. Přidání šumu	60
5. Výsledné průběhy	61
6. Závěr	63
7. Seznam použitých zkratk	64
8. Zdroje.....	65
9. Přílohy.....	65
9.1. Elektronické.....	66
9.2. Grafické	66

1. Úvod

Inverzní kyvadla se začala v laboratořích vyskytovat v padesátých letech dvacátého století. Od té doby vznikla spousta různých variací. Jejich základní společnou vlastností je vyšší počet stupňů volnosti než počet aktuátorů. To znamená, že poloha kyvadla nemůže být řízena přímo. Významným rysem těchto systémů je jejich značná nelinearita v oblasti inverzní polohy. Z tohoto důvodu se staly předmětem experimentů cílících na návrhy různých druhů řízení a hojně se využívají v mechatronických laboratořích po celém světě jako výukové modely. Kromě řízení slouží například k návrhům metod vyšvihnutí kyvadla ze spodní do horní polohy (tzv. swing up) nebo zkoumání i modelování tření. Vývojově starší jsou inverzní kyvadla translační. K pohybu obvykle dochází prostřednictvím vozíku, který je umístěn na kolejnicích a pohybuje se lineárně v jednom směru. Vznik rotačních kyvadel (angl. Furuta Pendulum, případně Rotary Inverted Pendulum) je datován do let pozdějších. Poprvé bylo popsáno počátkem devadesátých let dvacátého století profesorem K. Furutou v Tokijském institutu technologie. [4] Jak již název napovídá, na rozdíl od translačních inverzních kyvadel u nich dochází k rotačnímu pohybu nejen kyvadla, ale i ramene.

Do Laboratoře mechatroniky VUT se kyvadlo v minulém desetiletí dostalo z Keimyung University, Daegu, Republic of Korea, se kterou Fakulta strojního inženýrství spolupracovala. [1] Prvním návrhem řízení se zabývala diplomová práce [1]. Od té doby se jeho zdokonalování v různých ohledech věnovaly práce [2] [3].

Na výše zmíněné projekty navazuje i tato bakalářská práce. Jejím cílem je osvojit si znalosti o rotačním inverzním kyvadle a ty aplikovat za účelem zlepšení kvality řízení. Toho má být docíleno zejména díky hlubšímu zkoumání tření ramene. Předchozí práce pro tuto kompenzaci využívaly modely, kde se velikost třecího momentu odvíjela pouze od aktuální úhlové rychlosti ramene. V důsledku výrobních nepřesností je však nutno uvažovat i proměnnou hodnotu tření v závislosti na aktuální poloze ramene. Navrhne se pět modelů, které by měly problematiku co nejdříve postihnout. Kromě experimentů cílících na odhad tření se práce zabývá i návrhem různých swing up sekvencí. V předchozích pracích k vyšvihnutí kyvadla docházelo použitím momentového skoku, který se u tohoto konkrétního laboratorního modelu jeví jako nejvhodnější. Existují i další metody, z nichž se vyberou dvě nejobvyklejší a budou rozebrány detailněji a aplikovány na tomto rotačním inverzním kyvadle. Všechny tři se porovnají a ověří se, zda byl splněn předpoklad, že momentový skok je nejvhodnější. Ze všech poznatků se sestaví výsledný průběh řízení a ten se porovná s předchozí prací [3] a bude stanoveno, do jaké míry byly naplněny cíle a jestli došlo k celkovému zkvalitnění regulace.

Práce je rozdělena na šest hlavních kapitol. První je úvodní, druhá se věnuje teoretickému základu, konkrétně popisu kyvadla z hlediska konstrukčního či sensorického, dále metodám vyšvihnutí a jejich odvození, tření, jeho příčinám, důsledkům a modelům. Třetí se týká popisu soustavy z hlediska fyziky a dynamiky (pohybové rovnice, parametry). Ve čtvrté se poznatky z předchozích kapitol aplikují na reálném modelu. Navrhnou se parametry swing upu, tření a stavového řízení se stavovým pozorovatelem. V páté a šesté kapitole se nachází výsledky a jejich zhodnocení.

2. Rešeršní část

Tato sekce se věnuje obecně rotačním inverzním kyvadlům a jejich druhům na základě různých dělení. Je zde popsán model umístěný v Laboratoři mechatroniky na VUT FSI. Následuje část věnovaná různým metodám přesunu kyvadla ze spodní do inverzní polohy (swing up). Nejobsáhlejší je poslední podkapitola věnující se problematice tření, čím je zapříčiněno, co způsobuje, jak ho omezit a jak ho popsat.

2.1. Rotační inverzní kyvadlo

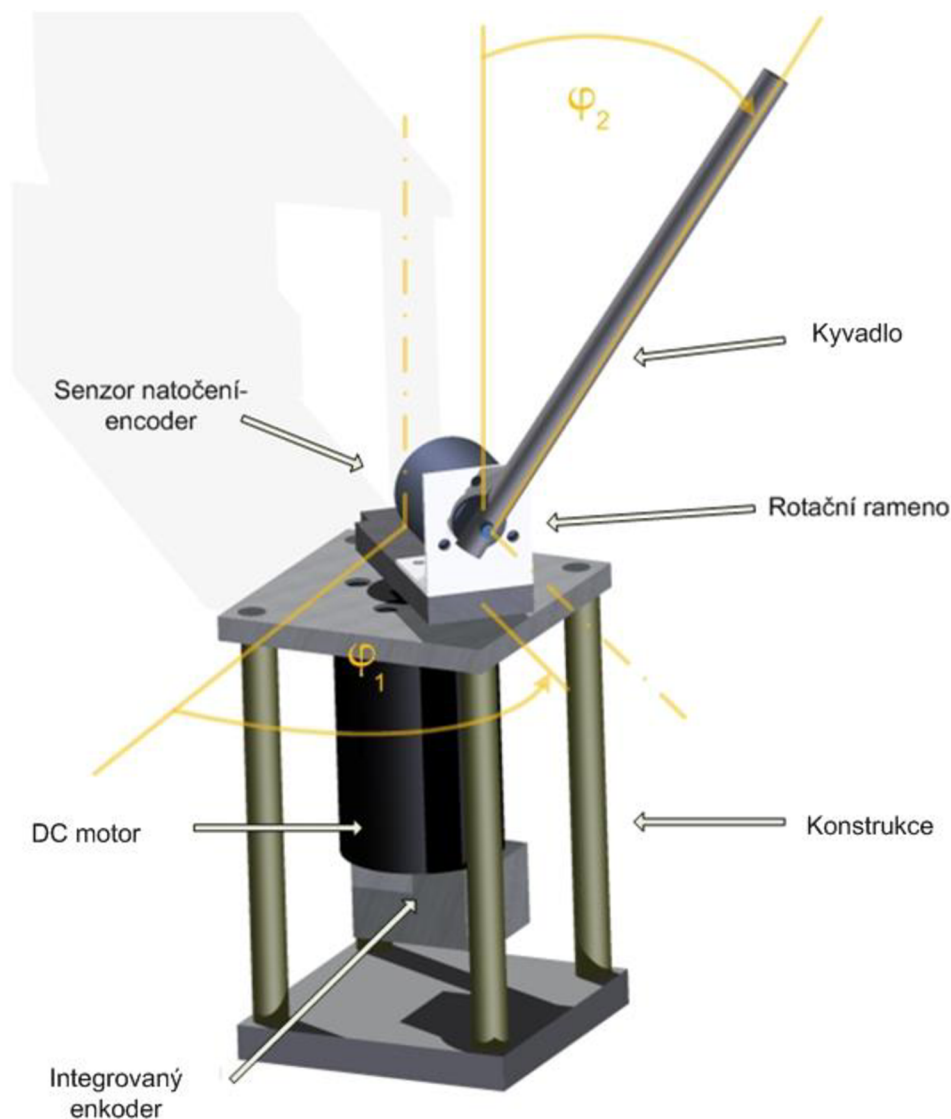
2.1.1. Princip

Rotační inverzní kyvadlo je systém se dvěma stupni volnosti. Prvním je poloha ramene, druhým poloha kyvadla. K řízení se však používá pouze jeden aktuátor, kterým je motor, na který je napojeno rameno. Z toho vyplývá, že se jedná o podaktuovanou soustavu. Cílem řízení je stabilizovat kyvadlo v horní inverzní poloze. V této oblasti je však chování značně nelineární. S menší prioritou se následně nastavuje i poloha ramene. Ke změně požadované hodnoty obvykle dochází skokově.

2.1.2. Konstrukce

Základní konstrukční schéma je pro všechny rotační inverzní kyvadla shodné. Základ tvoří motor, který je nehybně ukotven k základně. K jeho hřídeli je připevněno rameno. Na jeho konci se nachází enkodér. Ten snímá aktuální polohu kyvadla, které je s ním spojeno a může volně rotovat.

Ramena se mohou lišit délkou a hmotností. Podle polohy těžiště existují varianty s těžištěm v ose rotace aktuátoru a mimo osu. [1] Častější je druhý případ, prvního se dosahuje například umístěním protizávaží na druhé straně od kyvadla. Kyvadla se dělí na dvě skupiny, s rovnoměrným rozložením hmotnosti a nerovnoměrným. Obvyklým příkladem první skupiny je tyč, která má na konci vyvrtán otvor. Tím je spojena s enkodérem a tím pádem i ramenem. Tyče mohou být plné i duté. Druhou skupinu typicky reprezentuje tyč, na jejíž konec se připevní závaží. To má za následek (obdobně jako prodloužení) zvětšení momentu setrvačnosti.



Obr. 1: Sestava rotačního inverzního kyvadla. Převzato z práce [1]

Model, na kterém byly provedeny experimenty v této práci, je znázorněn na obr. 1. Těžiště ramene s enkodérem se nachází mimo osu rotace motoru. Jako kyvadlo se používá dutá kovová tyč bez jakéhokoliv závaží, tudíž má přibližně rovnoměrné rozložení hmotnosti. Těžiště rotačního ramene leží mimo osu rotace motoru. Jednotlivé parametry se nachází v tab. 1. Jelikož na konstrukci nebyly prováděny žádné změny, parametry byly převzaty z práce [3]. Pro kontrolu se přeměřily všechny délkové rozměry.

	hmotnost [kg]	délka [m]
rameno	0,072	0,080
enkodér	0,080	0,030
kyvadlo	0,030	0,155

Tab. 1: Parametry jednotlivých prvků mechanismu

2.1.3. Motor

Rameno je u modelu v Laboratoři mechatroniky poháněno kartáčovým stejnosměrným motorem s permanentními magnety od firmy D&J co., DS 4573 [1]. Základní parametry modelu jsou uvedeny v následující tabulce.

Parametr	Hodnota	Jednotka
Jmenovité napětí	24	V
Odpor vinutí	9,3±15 %	Ω
Indukčnost vinutí	8,3	mH
Konstanta motoru	0,0785±10 %	Nm/A
Proud naprázdno	0,4	A
Otáčky naprázdno	2800±10 %	RPM
Jmenovitý proud	1,3	A
Jmenovitý moment	0,06	Nm
Jmenovitý výkon	12	W
Jmenovité otáčky	2000±10 %	RPM
Moment setrvačnosti	0,016	kg· m ²
Hmotnost motoru	0,6	kg

Tab. 2: Parametry DC motoru D&J DS 4573. Převzato z [1]

Motor se řídí změnou vstupního napětí, které je určováno pomocí proudového regulátoru (viz 2.1.4.). V modelu se však počítá s momenty. Moment musí být přepočten na proud, k tomuto slouží konstanta motoru

$$c_{\phi} = 0,0785 \pm 10\% \text{ Nm/A.}$$

Proud z momentu spočítáme z rovnice (1). Převrácenou hodnotou c_{ϕ} se násobí moment před vstupem do motoru.

$$i = \frac{M_m}{c_{\phi}} \quad (1)$$

2.1.4. Senzorika

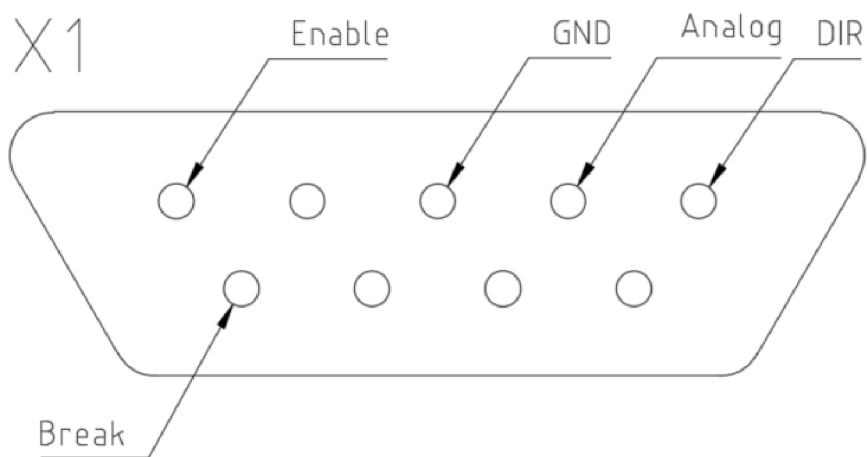
Do systému je nutno umístit alespoň dva senzory. Jeden z nich snímá polohu ramene, druhý polohu kyvadla. Při výběru musí být kladen důraz na to, aby rozlišení senzorů bylo dostatečné a aby bylo možné kromě polohy kvalitně snímat i její změnu v čase, neboli rychlost.

Poloha kyvadla je snímána enkodérem E50S, který má rozlišení 2000 CPR. Napájen je externě stejnosměrným napětím 5 V. K snímači je přímo připojeno kyvadlo. Snímání polohy aktuátoru zajišťuje vestavěný enkodér na spodním vývodu hřídele motoru. Rozlišení tohoto snímače činí 1728 CPR. Snímače jsou relativní. Při každém novém spuštění se nulová poloha stanovuje v bodě, ve kterém se soustava nacházela, když byl model inicializován. [2]

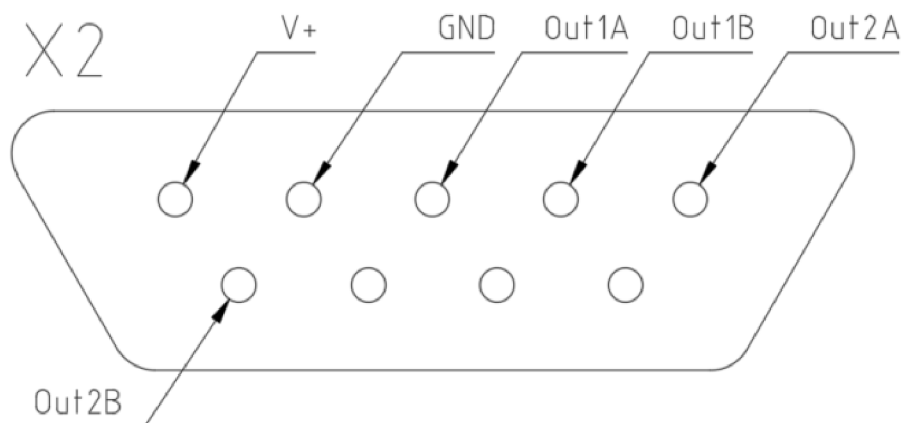
2.1.5. Výkonový obvod a připojení řídicích prvků

Využívá se externí obvod LMD18245 od firmy *Texas Instruments Inc.* Proud motorem je řízen digitálně pomocí D/A převodníku nebo externím analogovým napětím. Při nastavení referenčního napětí 0-5 V je na řídicích svorkách proud 0-3 A. Využívá se momentové řízení a proud procházejícím motorem se řídí přímo. [3]

Bylo převzato řízení univerzální I/O kartou MF624 od firmy Humusoft, které již bylo funkční. Musel být vytvořen nový kabel s konektorem D-SUB DE-9, který se zapojil dle schémat z práce [3]. Tyto schémata se nachází na obr. 2 a obr. 3 a jsou z pohledu na konektor na kabelu zepředu. Popis jednotlivých prvků je v tab. 3.



Obr. 2: Schéma pinů X1



Obr. 3: Schéma pinů X2

	Označení	Označení MF624	Popis
X1	DIR	DOUT3	Ovládání směru otáčení, digitální signál – „1“ pro CW, „-1“ pro CCW.
X1	Analog	DA3	Řídící hodnota napětí, analogový signál.
X1	GND	AGND	Uzemnění.
X1	Enable	DOUT4	Funkce <i>Enable</i> , digitální signál – „1“ pro přivedení napětí.
X1	Break	DOUT5	Funkce <i>Break</i> , digitální signál – „1“ pro zkratování vedení.
X2	Out1A	IRC1A+	Kanál A enkodéru pro úhel natočení ramene, výstupem je digitální signál.
X2	Out1B	IRC1B+	Kanál B enkodéru pro úhel natočení ramene, výstupem je digitální signál.
X2	Out2A	IRC2A+	Kanál A enkodéru pro úhel natočení kyvadla, výstupem je digitální signál.
X2	Out2B	IRC2B+	Kanál B enkodéru pro úhel natočení kyvadla, výstupem je digitální signál.
X2	V+	+5V	Napájení 5V pro enkodéry.
X2	GND	GND	Uzemnění.

Tab. 3: Podrobný popis pinů karty MF624. Převzato z práce [3]

2.2. Swing up

Na začátku každého experimentu je nutno kyvadlo dostat ze spodní stabilní polohy do horní labilní. Pro tento účel se navrhuje sekvence měnících se vstupních momentů. Existují různé metody, jak tento moment určovat. Důležitým požadavkem je co nejmenší rychlost kyvadla při průchodu horní polohou. Pokud by rychlost byla příliš velká, může nastat situace, kdy řízení nestihne systém uregulovat a kyvadlo přepadne zpět dolů. Rovněž je požadována spolehlivost swing upu. To znamená, že kyvadlo by mělo při každém pokusu být úspěšně vyšvihnuto. U některých metod je nutno udělat kompromis právě mezi rychlostí a spolehlivostí.

Při výběru metody je nutno zvážit faktory související s konstrukcí rotačního inverzního kyvadla. Prvním z nich jsou parametry kyvadla. Konkrétně pak váha a délka. S tím souvisí i moment setrvačnosti. Čím vyšší tyto hodnoty jsou, tím je vyšvihnutí náročnější. Rozhodující jsou rovněž parametry motoru. Pokud je motor dostatečně silný, je swing up jednodušší. Nižší maximální točivý moment má za následek potřebu rozfázovat swing up do více zhoupnutí.

V průběhu let vznikly různé metody, které se k swing upu dají využít. Jmenovitě se jedná o energetickou metodu, momentový skok, PD metodu. Tyto jsou nejobvyklejší a byly vybrány k podrobnějšímu popisu. Existují i další, mezi ně se řadí například metoda rychlostního gradientu.

2.2.1. Momentový skok

Tato metoda se jeví jako nejintuitivnější a nejjednodušší. Používá se u soustav s dostatečně výkonným aktuátorem. Její princip spočívá obvykle ve dvou za sebou jdoucích skokově se měnících momentových impulsech, které mají opačný směr. Často jsou tyto impulsy shodné velikostí, ale nejedná se o nutnost. Při návrhu parametrů swing upu se obvykle postupuje experimentální cestou. Stanoví se první hodnota momentu. Následně se zjistí, kdy se kyvadlo bude nacházet v poloze takové, aby bylo možno skokově změnit směr momentu a dokončit vyšvihnutí. Hlavní výhodou této metody je její rychlost. Časový interval, za jaký se kyvadlo dostane do horní polohy, je zpravidla kratší nebo stejně dlouhý jako u jiných metod. Nevýhodná je nutnost kompromisu mezi rychlostí v inverzní poloze a spolehlivostí. Pokud jsou hodnoty navrženy tak, aby při každém spuštění došlo k úspěšnému vyšvihnutí, je nutno počítat s vyšší rychlostí kyvadla při průchodu horní polohou.

2.2.2. Energetická metoda

Pro rotační inverzní kyvadla je energetická metoda nejčastěji používaným způsobem vyšvihnutí kyvadla. Její popis zde vychází z práce [4]. Vychází z předpokladu, že do soustavy je nutno dodat dostatečnou energii, která odpovídá změně potenciální energie kyvadla při přesunu z dolní stabilní do horní labilní polohy. Je navržena tak, aby při každém pohybu motoru se energie soustavy přibližovala nule. Celková energie kyvadla je dána součtem kinetické a potenciální energie. Je definovaná tak, aby byla nulová, pokud se kyvadlo nachází v inverzní poloze a má nulovou rychlost. Matematické vyjádření energie se nachází v rovnici (2).

$$E(t) = \frac{1}{2}J_2\dot{\beta}^2 + m_2 * l_2 * g * (\cos(\beta) - 1), \quad (2)$$

kde J_2 je moment setrvačnosti kyvadla,
 β je poloha kyvadla,
 m_2 je váha kyvadla,
 l_2 je vzdálenost těžiště kyvadla od osy rotace,
 g je gravitační zrychlení.

Změnu energie získáme derivací rovnice (2) v čase.

$$\dot{E}(t) = \dot{\beta} * (J_2 * \ddot{\beta} - m_2 * l_2 * g * \sin(\beta)) \quad (3)$$

Tento tvar lze ještě upravit použitím rovnice (28). Zanedbá se člen s b_2 a $\dot{\alpha}$, protože dominantní složkou je zde zrychlení.

$$\dot{E}(t) = -m_2 * l_1 * l_2 * \ddot{\alpha} * \dot{\beta} * \cos(\beta) \quad (4)$$

Musí být splněn požadavek na energii systému neustále se blížící nule. Pravá strana rovnice (4) tudíž musí být kladná, pokud je energie nedostatečná, záporná, pokud větší než požadovaná. Existují tři proměnné, které mění znaménko. Rychlost kyvadla, cosinus polohy a zrychlení ramene. Z toho vyplývá, že znaménko zrychlení ramene je

v každém okamžiku stejné jako znaménko rozdílu energií, rychlosti kyvadla a cosinu polohy.

$$\text{sign}(\ddot{\alpha}) = \text{sign}((E - E_0) * \dot{\beta} * \cos(\beta)) \quad (5)$$

Nyní učiníme předpoklad, že znaménko zrychlení je totožné se znaménkem momentu vstupujícího do motoru. Rovnice (5) se upraví na:

$$\text{sign}(M_M) = \text{sign}((E - E_0) * \dot{\beta} * \cos(\beta)) \quad (6)$$

Abychom dostali požadovanou hodnotu vstupního momentu, vynásobíme rovnicí (6) koeficientem k :

$$M_M = k * \text{sgn}(\cos(\beta) * \dot{\beta} * (E - E_0)); k > 0 \quad (7)$$

Tím se určí velikost vstupního momentu motoru M_M . Avšak tento tvar pouze mění znaménko, ale jeho velikost zůstává konstantní a rovna k . Je vhodné rovnici (7) upravit tak, aby při energii blízké se nule se i moment M_M zmenšoval. Toho docílíme vyjmutím členu s energiemi mimo funkci signum. Získáme výsledný tvar:

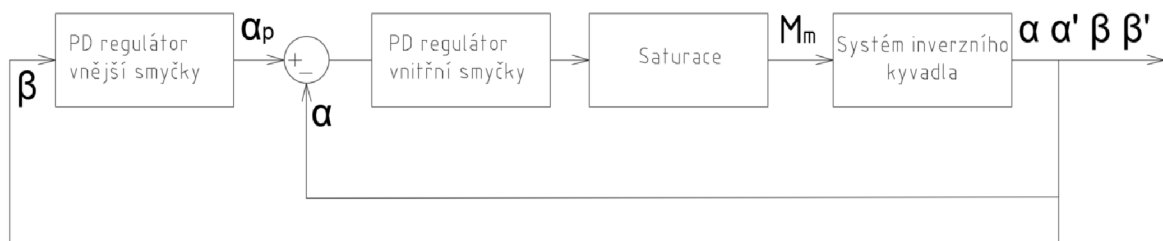
$$M_M = \text{sat}_{M_{max}} * (k * (E - E_0) * \text{sgn}(\cos(\beta) * \dot{\beta})); k > 0, \quad (8)$$

kde $\text{sat}_{M_{max}}$ je saturací na maximální hodnotu momentu M_{max} . Díky tomuto tvaru by dle předpokladů v ideálním případě měla být rychlost kyvadla v inverzní poloze nulová.

Při takovémto tvaru nabývá výraz $\text{sgn}(\cos(\beta) * \dot{\beta})$ na začátku simulace nulové hodnoty, protože se obvykle kyvadlo nachází ve spodní poloze a jeho rychlost je nulová. Nedošlo by k rozhybání ramene. Je nutno tuto situaci ošetřit podmínkou, která určuje velikost momentu, pokud $\text{sgn}(\cos(\beta) * \dot{\beta}) = 0$. Obvykle se použije $M_M = k * E$.

2.2.3. PD regulátor

Návrh v práci [5], ze kterého se zde vychází, předpokládá využívá dvou PD regulátorů, z nichž ten ve vnější smyčce snímá polohu kyvadla a vnitřní polohu ramene.



Obr. 4: Swing up pomocí dvou kaskádovitých PD regulátorů

Vnější smyčka může být popsána rovnicí:

$$\alpha_p = P * \beta + D * \dot{\beta}, \quad (9)$$

kde α_p odpovídá požadované poloze ramene,
 β výchylce kyvadla od dolní polohy a
 $\dot{\beta}$ aktuální rychlosti kyvadla.

Vhodnou volbou konstant P a D je určena trajektorie ramene, která vede k vyšvihnutí kyvadla. Větší hodnoty mají za následek větší rozsah pohybu ramene. Vnitřní smyčka reguluje polohu ramene na požadovanou hodnotu danou vnější smyčkou. Dá se popsat jako:

$$M_M(s) = P_{in} * \Delta\alpha(s) - D_{in} * \Delta\dot{\alpha}(s), \quad (10)$$

kde $\Delta\alpha(s) = \alpha_p(s) - \alpha(s)$,
 $\alpha(s)$ odpovídá aktuálnímu natočení ramene.

Derivační složku D_{in} musí být záporná, aby se rychlost ramene zvyšovala, nikoliv přibližovala nule. Je tedy nutno stanovit celkem čtyři parametry. Existují metody, jak je spočítat. Pro tento případ bude dostatečné ruční nastavení a naladění přímo na základě experimentálních měření.

2.3. Tření

Se třením se setkáváme ve velkém množství technických aplikací. Třením rozumíme tečnou reakční sílu při kontaktu dvou povrchů a jejich vzájemném pohybu. Na mikroskopické úrovni si tření lze představit jako elastické a plastické deformační síly mezi částicemi ve styku. Každý takovýto kontakt se projevuje dílčí silou F_i a sumou všech vzniká celková třecí síla F_N . [6] Tyto povrchy se mohou stýkat přímo, v technických aplikacích jsou častěji odděleny vrstvou maziva. Tření závisí na množství faktorů, mezi které patří tvar styčných ploch, vzájemné silové působení, materiál povrchů, kvalita jejich opracování, drsnost, relativní rychlost, znečištění cizími částicemi či mazání.

V některých případech je tření žádané a jsou požadovány co největší hodnoty třecích sil. Typickým příkladem jsou brzdy automobilů a dalších dopravních prostředků. Ve většině ostatních situací má tření ovšem převážně negativní důsledky. Obecně díky němu dochází k opotřebením styčných ploch, tzv. otěru, s tím souvisí i vznik tepla, ohřev součástí, snižování účinnosti. Z těchto důvodů je žádoucí tření různými způsoby eliminovat nebo alespoň redukovat. K tomu se používají již zmíněná maziva, snížení drsnosti povrchů či vhodná volba materiálů. Studium tření a jevů s ním spojených se zabývá obor tribologie. V současné době je na snižování třecích součinitelů kladen čím dál větší důraz. V různých strojírenských aplikacích, obzvláště pak automobilním a dopravním průmyslu, je potřeba preciznějších styků povrchů za účelem zvyšování účinnosti strojů.

U rotačního inverzního kyvadla je motor mazán pevným mazivem. Tím se docílí snížení třecího momentu, avšak nikdy ne hodnoty, kdy by bylo zanedbatelné. Je tedy vhodné s ním počítat a kompenzovat ho vytvořením modelu. Tento model bude následně sloužit jako vstup do motoru při chodu a jeho cílem je efekty tření potlačit zvýšením

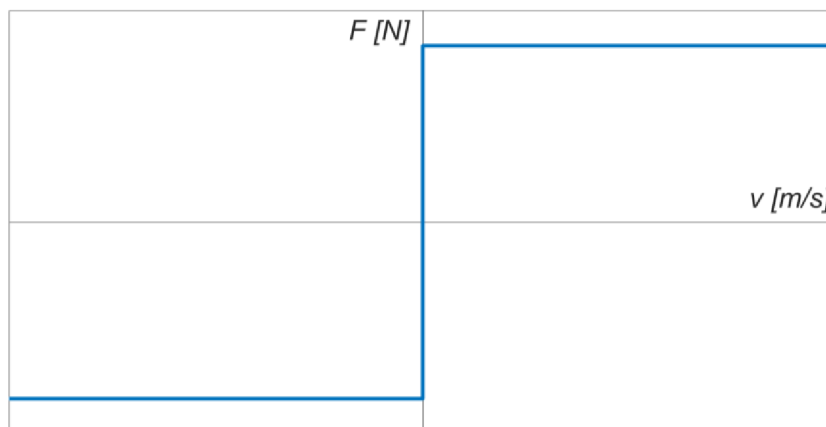
proudu motoru o vhodnou hodnotu. Modely se dělí na statické a dynamické [6], popisu nejobvyklejších z nich se věnují následující podkapitoly.

2.3.1. Statické modely

Nejjednodušším učebnicovým případem tření je Coulombův model suchého tření. Tření působí proti směru pohybu a jeho velikost není závislá na rychlosti ani výchylce. Pro nulové rychlosti a menší zatížení platí, že třecí síla je rovna síle vnější, má opačný směr a povrchy vůči sobě zůstávají v klidu.

$$\begin{aligned} F &= F_e, & \text{pokud } v = 0 \text{ a } |F_e| < F_C, \\ F &= F_C * \text{sgn}(v) & \text{jinak,} \end{aligned} \quad (11)$$

kde F je velikost třecí síly,
 F_e vnější silové působení ve směru tečném k povrchům,
 F_C Coulombovo tření,
 v relativní rychlost povrchů ve styku.

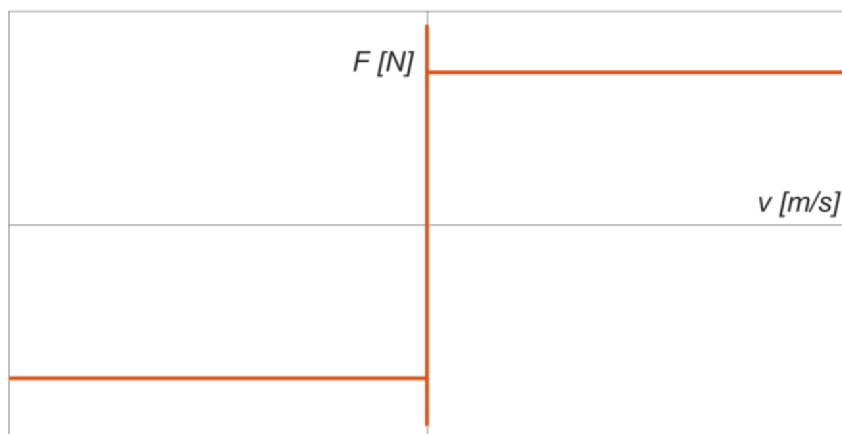


Obr. 5: Coulombovo tření

Statické tření je jev, kdy při přechodu z klidu do pohybu dochází ke zvýšení třecí síly. Tělesa zůstávají v klidu i při zatížení silou o velikosti Coulombovy síly a k pohybu dochází teprve při síle odpovídající statickému tření. Dojde k odtržení a krátkodobému nárůstu zrychlení. Jakmile se těleso pohybuje, je brzděno Coulombovým třením. Model je podobný předchozímu s jedinou změnou v silové podmínce:

$$\begin{aligned} F &= F_e, & \text{pokud } v = 0 \text{ a } |F_e| < F_S, \\ F &= F_C * \text{sgn}(v) & \text{jinak,} \end{aligned} \quad (12)$$

kde F_S je statické tření.



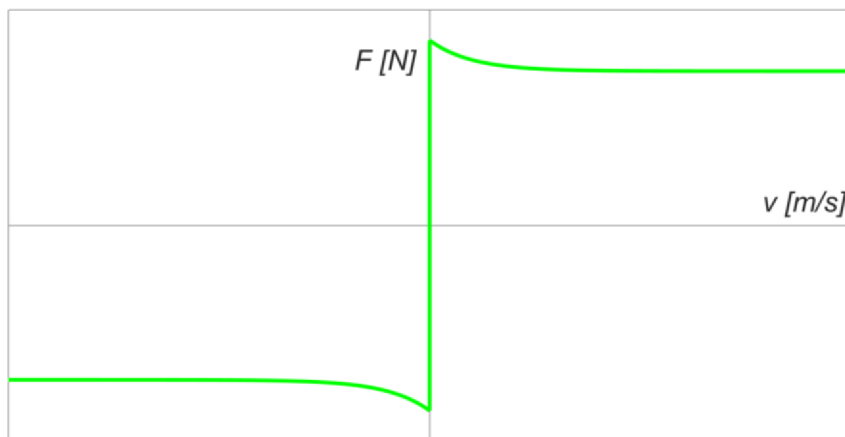
Obr. 6: Coulombovo a statické tření

Ukázalo se, že přechod mezi statickým a Coulombovým třením není skokový. [6] Dochází zde k plynulé změně, která je popsána Stribeckovou křivkou. Jedná se o exponenciálu, jejíž maximální hodnota je v nulové rychlosti a odpovídá statickému tření. Plynule přechází na hodnotu Coulombova tření. Matematicky ji lze vyjádřit rovnicí (13).

$$F = F_C + (F_S - F_C) * e^{-\left|\frac{v}{v_S}\right|^{\delta_v}}, \quad (13)$$

kde v_S je Stribeckova rychlost,
 δ_v definuje tvar křivky.

Funkce F se získává měřením třecí síly pro konstantní rychlosti. Následně se vypočítají potřebné parametry.



Obr. 7: Stribeckova křivka

2.3.2. Dynamické modely

Dynamické modely se pro vyšší rychlosti neliší principiálně od statických. Je u nich zavedena závislost na výchylce v situacích, kdy se těleso dostává do pohybu, případně mění směr rychlosti. Mezi často používané modely patří Dahlův, hřebenový (z angl. bristle), Reset integrator, Bliman-Sorine nebo LuGre. [6]

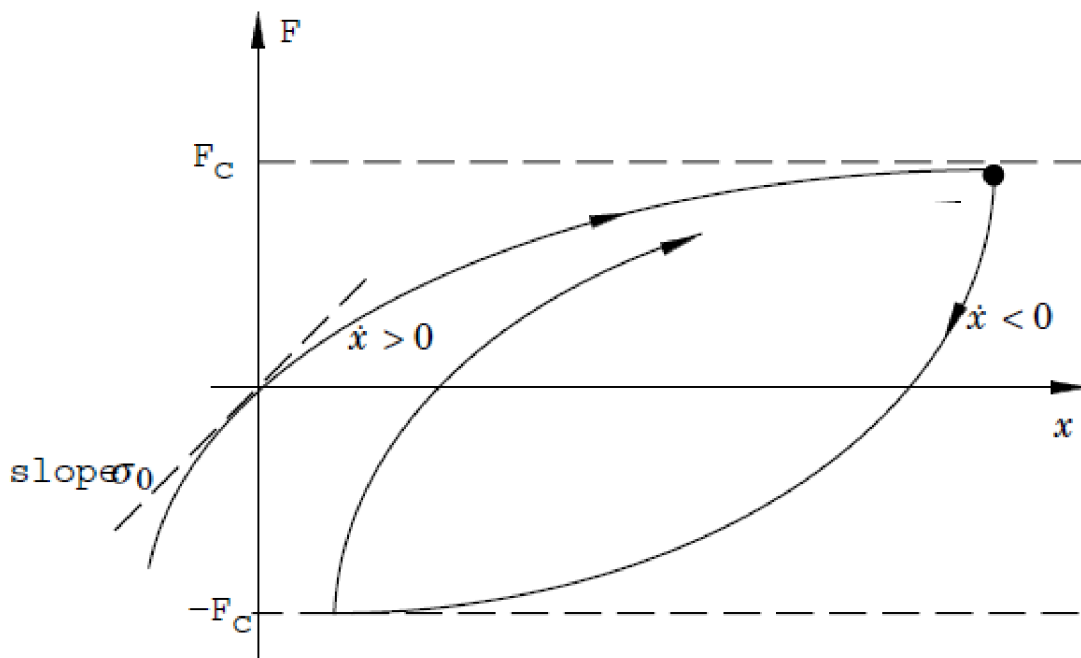
a) Dahlův model

Dahlův model vznikl na základě experimentů s kuličkovými ložisky. Při tvorbě bylo vycházeno z tahového diagramu. Pokud je objekt zatížen, narůstá třecí síla, dokud nedojde k porušení. Model lze vyjádřit pomocí diferenciální rovnice ve tvaru: [6]

$$\frac{dF}{dx} = \sigma * \left(1 - \frac{F}{F_C} * \operatorname{sgn}(v) \right)^\alpha, \quad (14)$$

kde x je výchylka,
 F_C Coulombova třecí síla,
 σ koeficient tuhosti,
 α koeficient určující tvar křivky, často $\alpha=1$.

Z tvaru rovnice (14) plyne, že třecí síla je maximálně rovna Coulombově síle, případně menší. Její velikost závisí pouze na aktuální výchylce a směru rychlosti, nikoliv její velikosti. Model není schopen postihnout problematiku statického tření ani Stribeckova efektu.



Obr. 8: Dahlův model. Převzato z práce [6]

b) Reset Integrator model

Jedná se o rozšíření hřebenového modelu s hlavním záměrem snížit výpočetní náročnost. [6] Hřebenový popisuje tření jako myšlené pružné vazby na mikroskopické úrovni. Při větším namáhání dochází k jejich porušování a praskání. U Reset Integrator modelu se ve chvíli, kdy má dojít k porušení, odstraní přídavek síly oproti síle v pohybu. Model se skládá z několika rovnic a podmínek. Je nutno zavést proměnnou z , která vyjadřuje aktuální výchylku pružných vazeb. Její změnu popisuje rovnice (15).

$$\frac{dz}{dt} = 0, \quad \text{pokud } v > 0 \text{ a } z \geq z_0 \text{ nebo } v < 0 \text{ a } z \leq z_0, \quad (15)$$

$$\frac{dz}{dt} = v \quad \text{jindy}$$

Statické tření je specifikováno koeficientem $a(z)$:

$$a(z) = a, \quad \text{pokud } |z| < z_0, \quad (16)$$

$$a(z) = 0 \quad \text{jindy}$$

Třecí síla je dána vztahem:

$$F = (1 + a(z)) * \sigma_0(v)z + \sigma_1 * \frac{dz}{dt} \quad (17)$$

Třecí sílu popisují celkem tři konstanty a jedna křivka:

- a specifikuje nárůst statické třecí síly oproti suchému tření,
- z_0 je hodnota výchylky, pro kterou dochází k přerušení vazby,
- σ_1 je parametrem vnitřního tlumení (není totožný s viskózním tlumením),
- $\sigma_0(v)$ udává tření v závislosti na rychlosti.

Z rovnic (15) (16) (17) vyplývá, že pro $|z| < z_0$ je tření funkcí z , po dosažení limitní hodnoty z_0 hodnota z zůstane konstantní a rovna z_0 a zároveň $a(z)$ změní svou hodnotu na nulovou. Tím se odstraní veškerý silový přídavek a tření je funkcí pouze parametru $\sigma_0(v)$.

c) LuGre model

Model je pojmenován podle místa vzniku, kterým je Lundská univerzita (Švédsko) a univerzita v Grenoblu (Francie). Navazuje na interpretaci tření dle hřebenového modelu. Tření je vyjádřeno jako síla působící na myšlené pružiny při jejich vychýlení. [6] Pokud je výchylka dostatečně velká, dochází ke skluzu pružin. Průměrná výchylka v ustáleném stavu je funkcí rychlosti. Model postihuje problematiku Stribeckova efektu.

$$\frac{dz}{dt} = v - \sigma_0 * \frac{|v|}{g(v)} * z, \quad (18)$$

$$F = \sigma_0 * z + \sigma_1(v) * \frac{dz}{dt} + f(v), \quad (19)$$

kde z specifikuje průměrnou výchylku pružin.

Pro malé výchylky se model chová jako pružina. Linearizací (19) v okolí nulových rychlostí získáváme:

$$\frac{d(\delta z)}{dt} = \delta v, \quad (20)$$

$$\delta F = \sigma_0 * \delta z + (\sigma_1(0) + f'(0)) * \delta v, \quad (21)$$

kde σ_0 označuje tuhost pružin,
 $\sigma_1(v)$ je viskózní tlumení.

Pro konstantní rychlosti se tření vyjádří jako:

$$F = g(v) * \operatorname{sgn}(v) + f(v), \quad (22)$$

kde $g(v)$ modeluje Stribeckův efekt,
 $f(v)$ je viskózní tření.

Jednou z možností, jak funkci $g(v)$ aproximovat, je (23).

$$g(v) = \alpha_0 + \alpha_1 * e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} \quad (23)$$

Součtem koeficientů $\alpha_0 + \alpha_1$ z (23) se získá statické tření, α_0 odpovídá suchému tření.

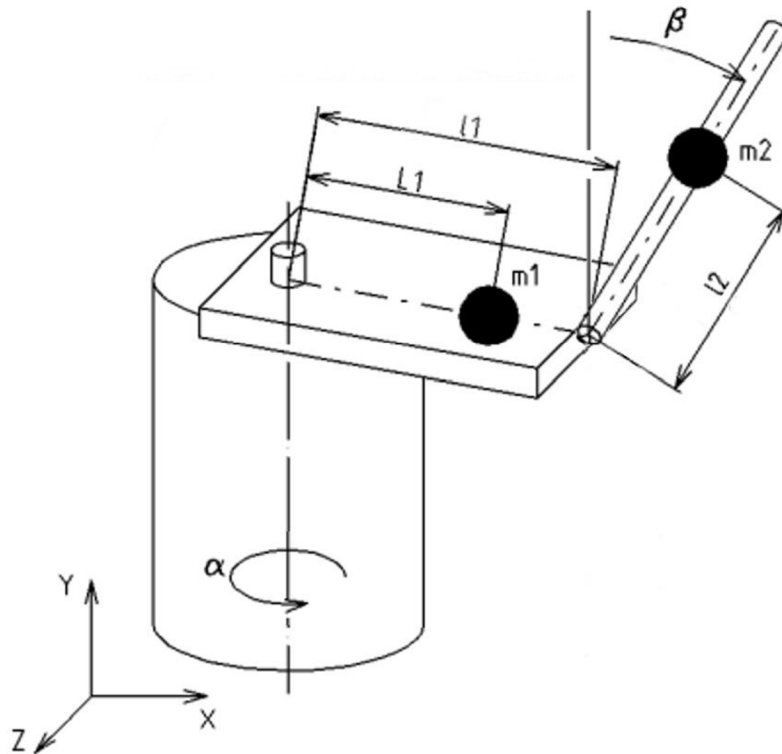
3. Modelování systému a identifikace parametrů

3.1. Pohybové rovnice

Pro identifikaci modelu je nezbytné vyjádřit matematické rovnice, které budou popisovat dynamiku systému. Toho je dosaženo využitím Lagrangeových rovnic II. druhu. V obecném tvaru je lze zapsat jako:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i, \quad (24)$$

kde E_k je celková kinetická energie systému,
 E_d celková disipativní energie systému,
 E_p celková potenciální energie systému,
 Q_i působení vnějších sil,
 q_i i-tá souřadnice vektoru zobecněných souřadnic.



Obr. 9: Zjednodušený model systému. Převzato z [3], upraveno

Na obr. 9 je znázorněn model systému s jednotlivými parametry, kterými jsou:

α ... úhlové natočení ramene,

β ... úhlové natočení kyvadla,

$l_1 = 72 \text{ mm}$... vzdálenost kyvadla od osy rotace ramene,

$L_1 = 32,5 \text{ mm}$... vzdálenost těžiště ramene od osy rotace ramene,

$m_1 = 152 \text{ g}$... hmotnost ramene s enkodérem,

$l_2 = 69,5 \text{ mm}$... vzdálenost těžiště kyvadla od osy rotace kyvadla,

$m_2 = 30 \text{ g}$... hmotnost kyvadla.

Pro každý stupeň volnosti je nutno zavést jednu zobecněnou souřadnici. Jelikož tento systém má stupně volnosti dva, první souřadnicí bude natočení ramene α , druhou natočení kyvadla β .

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

V předchozí práci [3] byla počáteční výchylka $\beta=0$ uvažována ve spodní poloze. Z důvodů, které se týkají především simulačního modelu a řízení, je výhodnější stanovit $\beta = 0$ v inverzní poloze. Kladný směr rotace je po směru hodinových ručiček. Totéž platí o kladném smyslu rotace ramene. Vzhledem k tomu, že Lagrangeovy rovnice II. druhu pracují s energiemi, výsledné tvary si budou téměř odpovídat, jediná změna nastává v znaménku některých členů. Podrobně je odvození popsáno v práci [2], z tohoto důvodu je dostatečné zde uvést pouze finální tvary se zohledněnou změnou znamének.

$$(J_1 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 \sin^2 \beta) \ddot{\alpha} + m_2 l_2^2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin 2\beta + b_1 \dot{\alpha} - m_2 l_1 l_2 \ddot{\beta} \cos \beta + m_2 l_1 l_2 \dot{\beta}^2 \sin \beta = M_M - M_t, \quad (25)$$

$$J_2 * \ddot{\beta} + b_2 \dot{\beta} - m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha} \cos \beta - \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\alpha} \sin 2\beta - m_2 l_2 g \sin \beta = 0 \quad (26)$$

kde J_1 je moment setrvačnosti ramene vzhledem k ose aktuátoru,
 J_2 moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k jeho ose rotace,
 g tíhové zrychlení,
 b_1 koeficient viskózního tlumení ramene,
 b_2 koeficient viskózního tlumení kyvadla,
 M_M moment vyvozený aktuátorem,
 M_t třecí moment.

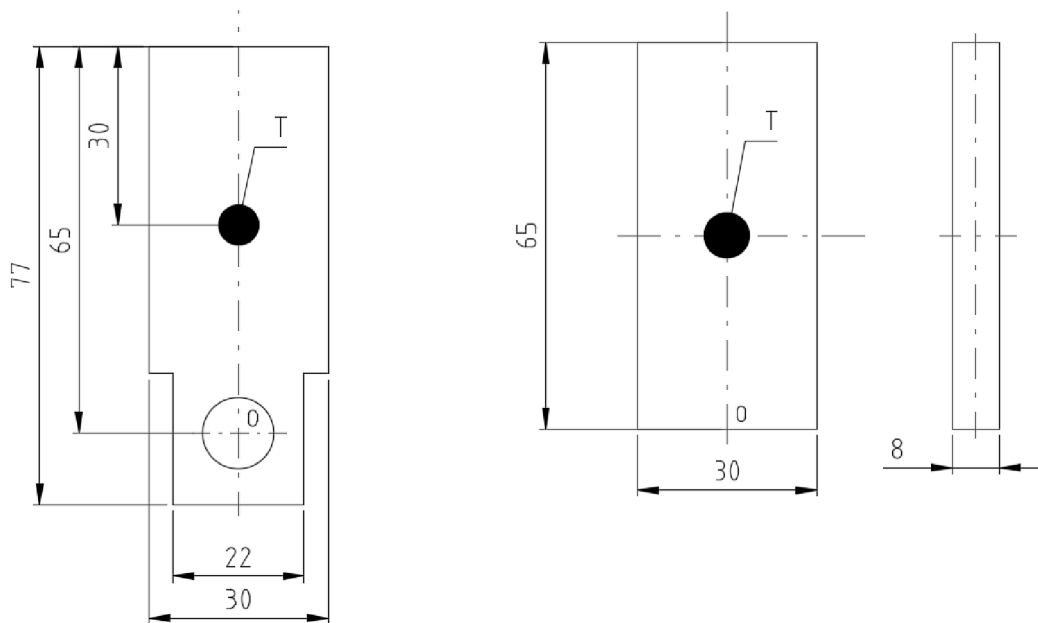
Třecí moment se při simulacích uvažuje pouze při tvorbě modelů tření a odhadu parametrů, pokud se testuje řízení, je roven nule. Co se týče modelování v prostředí *Simulink*, pracuje se zde s rovnicemi pro zrychlení. Jednoduchou úpravou tedy dostáváme výsledné tvary.

$$\ddot{\alpha} = \frac{-m_2 l_1 l_2 \dot{\beta}^2 \sin \beta + m_2 l_1 l_2 \ddot{\beta} \cos \beta - m_2 l_2^2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin 2\beta - b_1 \dot{\alpha} + M_M - M_t}{J_1 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 \sin^2 \beta}, \quad (27)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{\frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\alpha} \sin 2\beta + m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha} \cos \beta - b_2 \dot{\beta} + m_2 l_2 g \sin \beta}{J_2}. \quad (28)$$

3.2. Momenty setrvačnosti

Rameno můžeme rozdělit na dvě části, samotné kovové rameno a k němu na konci připevněný enkodér. Stanoví se momenty setrvačnosti pro každou část zvlášť a sečtou se.



Obr. 10: Skutečný a zjednodušený tvar ramene

Rameno, které nemá jednoduchý tvar, lze zjednodušeně uvažovat jako kvádr (obr. 10). Pro ten se moment setrvačnosti spočítá následovně:

$$J_{1rT} = \frac{1}{12} * m_r * (a^2 + b^2) = 3,075 * 10^{-5} \text{ kg} * \text{m}^2, \quad (29)$$

kde m_r je hmotnost ramene,
 a je délka zjednodušeného modelu ramene,
 b je šířka zjednodušeného modelu ramene.

Enkodér lze uvažovat jako plný válec. Pro ten se moment setrvačnosti pro osu rovnoběžnou s osou motoru a procházející těžištěm spočítá ze vzorce:

$$J_{1eT} = \frac{1}{4} m_e r^2 + \frac{1}{12} m_e l_e^2 = 1,05 * 10^{-5} \text{ kg} * \text{m}^2, \quad (30)$$

kde m_e je hmotnost enkodéru,
 r poloměr enkodéru,
 l_e délka enkodéru.

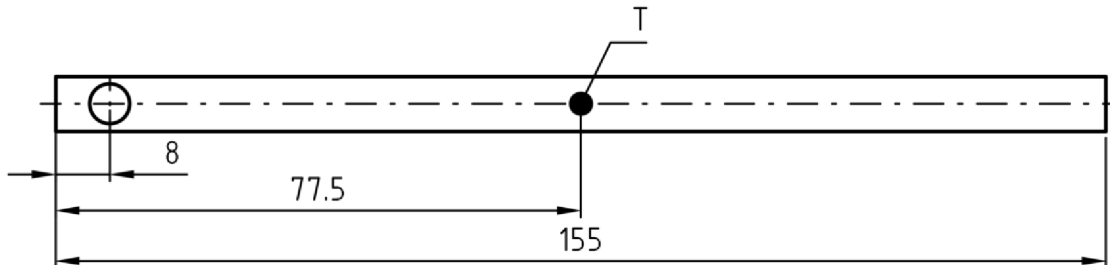
Nyní se aplikuje Steinerova věta. Předpokládáme, že těžiště enkodéru se nachází v jeho středu. Enkodér je ukotven na konci ramene. Vzdálenost mezi těžištěm a osou otáčení dostaneme odečtením půlky délky enkodéru od délky ramene.

$$J_{1r} = J_{1rT} + m_r * \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 = 1,068 * 10^{-4} \text{ kg} * \text{m}^2 \quad (31)$$

$$J_{1e} = J_{1eT} + m_e * \left(l_1 - \frac{l_e}{2}\right)^2 = 2,105 * 10^{-4} \text{ kg} * \text{m}^2 \quad (32)$$

Na závěr se obě hodnoty sečtou a dostáváme výsledný moment setrvačnosti celého ramene.

$$J_1 = J_{1r} + J_{1e} = 3,173 * 10^{-4} \text{ kg} * \text{m}^2 \quad (33)$$



Obr. 11: Kyvadlo

Skutečné kyvadlo je tenkostěnný kovový válec, nedopustíme se však podstatné chyby, pokud provedeme zjednodušení a uvažujeme tyč. Její moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející jejím těžištěm v požadovaném směru se stanoví jako:

$$J_{2T} = \frac{1}{12} * m_2 * L_2^2, \quad (34)$$

kde m_2 je hmotnost kyvadla,
 L_2 celková délka kyvadla.

Využitím Steinerovy věty se spočítá moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení.

$$J_2 = J_{2T} + m_2 * l_2^2, \quad (35)$$

kde l_2 je vzdálenost těžiště od osy rotace.

Dosazením odpovídajících hodnot dostáváme výsledný moment setrvačnosti ramene:

$$J_2 = 2,050 * 10^{-4} \text{ kg} * \text{m}^2 \quad (36)$$

Rozdíl hodnoty oproti předchozí práci [3] je způsoben odlišnou délkovou hodnotou dosazenou do Steinerovy věty. V minulé práci byla dosazena půlka délky kyvadla. Zde je počítáno s vzdáleností mezi středem díry, kterou je kyvadlo upevněno k enkodéru, a středem tyče. To má za následek snížení momentu setrvačnosti a tím pádem i vyšší frekvenci kmitů, která by měla vést k přesnějšímu kopírování experimentálních dat volného pádu simulačním modelem.

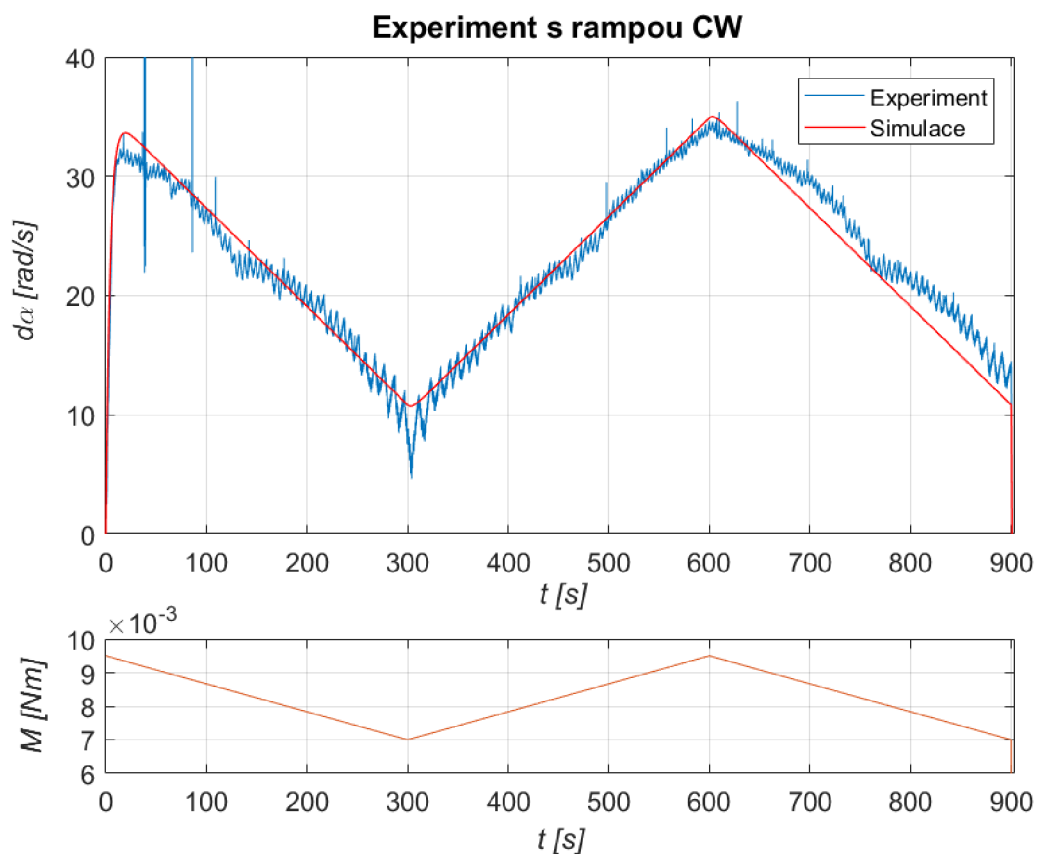
3.3. Viskózní tlumení

3.3.1. Rameno

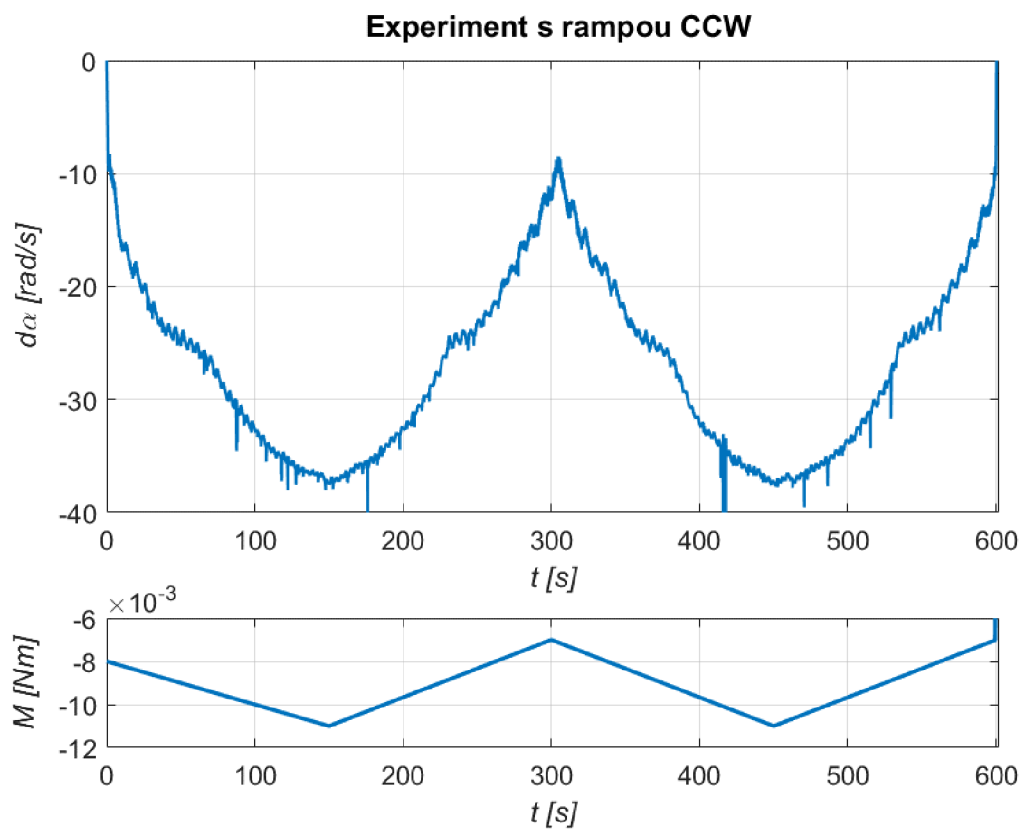
Stanovit parametr viskózního tlumení ramene lze pomocí experimentu s rampou. Během něj je kyvadlo fixováno ve spodní poloze. To umožní zjednodušení rovnice (27) odebráním členů, které závisí na pohybu kyvadla:

$$\ddot{\alpha} = \frac{-b_1 \dot{\alpha} + M_M - M_t}{J_1 + m_2 l_1^2} \quad (37)$$

Model rovnice (37) v *Simulinku* se použije při zjišťování parametrů jak viskózního tlumení ramene b_1 , tak dynamického třecího momentu M_d . Svoje využití najde i při podrobnějším zkoumání tření. Experiment spočívá v roztáčení ramene momentem. Ten se v průběhu lineárně mění, narůstá i klesá. Lomená čára momentu se skládá ze čtyř úseček. Bylo začínáno na maximální hodnotě. Důvodem je, že pokud se experiment zahájil na minimálním momentu, v důsledku po obvodu proměnného tření se rameno v úvodu zastavilo v místě, kde byl statický třecí moment nejvyšší. To by způsobilo chybu při stanovování parametrů. Po naměření dat jsou dva výše uvedené parametry optimalizovány pomocí *Parameter Estimation Toolboxu*. Na obr. 12 je na horním grafu znázorněn průběh experimentální a simulované rychlosti s naladěnými parametry. Na spodním tvar momentové křivky. Lze pozorovat, že během sestupné rampy dochází k mírné odchylce hodnot. Za příčinu je považován nárůst teploty během tohoto dlouhého experimentu, kdy se změnila viskozita maziva a došlo k mírnému poklesu tření. Na obr. 13 je experiment stejného druhu pro opačný směr otáčení. Rychlostní průběh je podobný, ale vstupní momenty se liší zaokrouhleně o 15 %. Jev je vysvětlen v kapitole 4.4.3.



Obr. 12: Experiment s rampou CW směr

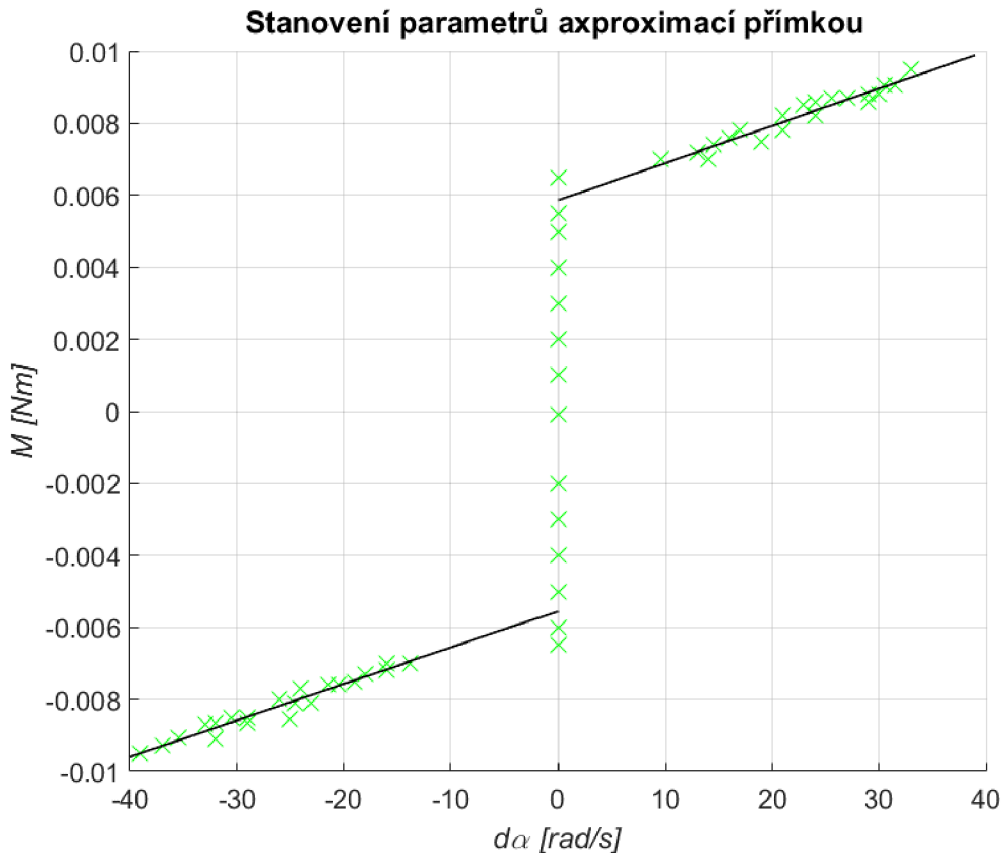


Obr. 13: Experiment s rampou CCW směr

Oba dva parametry lze zjistit i početně. Ač víme, že zrychlení kvůli povaze modelu, kde se tření mění po obvodu, nikdy nulové nebude, je možné jej za nulové považovat, protože stanovíme střední hodnotu rychlosti pro daný moment. Zároveň při experimentu s rampou uvažujeme rychlost růstu momentu za tak malou, že okamžitá střední úhlová rychlost odpovídá momentu motoru. Položením zrychlení nule se rovnice (37) mění na:

$$M_M = M_t + b_1 \dot{\alpha} \quad (38)$$

Je zjevné, že s rostoucím momentem se lineárně zvyšuje úhlová rychlost a konstantou úměrnosti je viskózní tlumení ramene b_1 . Z grafu experimentu s rampou odečteme dostatečný počet dvojic hodnot úhlová rychlost – moment motoru. Ty vyneseme do grafu, kde osou x je úhlová rychlost, osou y moment motoru. Data se následně proloží přímkou pomocí příkazu *polyfit*. Hodnota x^0 odpovídá dynamickému momentu tření, x^1 viskóznímu tlumení ramene. Z obr. 14 lze vyčíst, že pro oba směry se vyskytuje oblast nízkých úhlových rychlostí, kde nejsou žádná data. Zde nelze jednoznačně jednotlivé body určit. Není možno zde již zanedbat obvodově proměnné tření a počítat s průměrnou hodnotou, protože třecí moment v natočeních, kde má nejvyšší hodnoty, pohyb kyvadla úplně zastaví. Druhým důvodem je, že závislost moment – rychlost v této oblasti je nedeterministická. Pro malé rychlosti nelze uvažovat pouze s dynamickým třecím momentem a viskózním tlumením. Třecí moment zde mění svoji hodnotu, což je pro účely tohoto experimentu nevhodné.



Obr. 14: Stanovení parametrů aproximací přímkou

Hodnoty získané z obou metod se liší až na řádech nižších desetinných míst. Zvolené hodnoty jsou zaznamenány v tab. 4.

b_1	$1,02 \cdot 10^{-4} \text{ Nsm}^{-1}$
M_{d1} (CW)	$0,00584 \text{ Nm}$
M_{d2} (CCW)	$0,0056 \text{ Nm}$

Tab. 4: Výsledné hodnoty

3.3.2. Kyvadlo

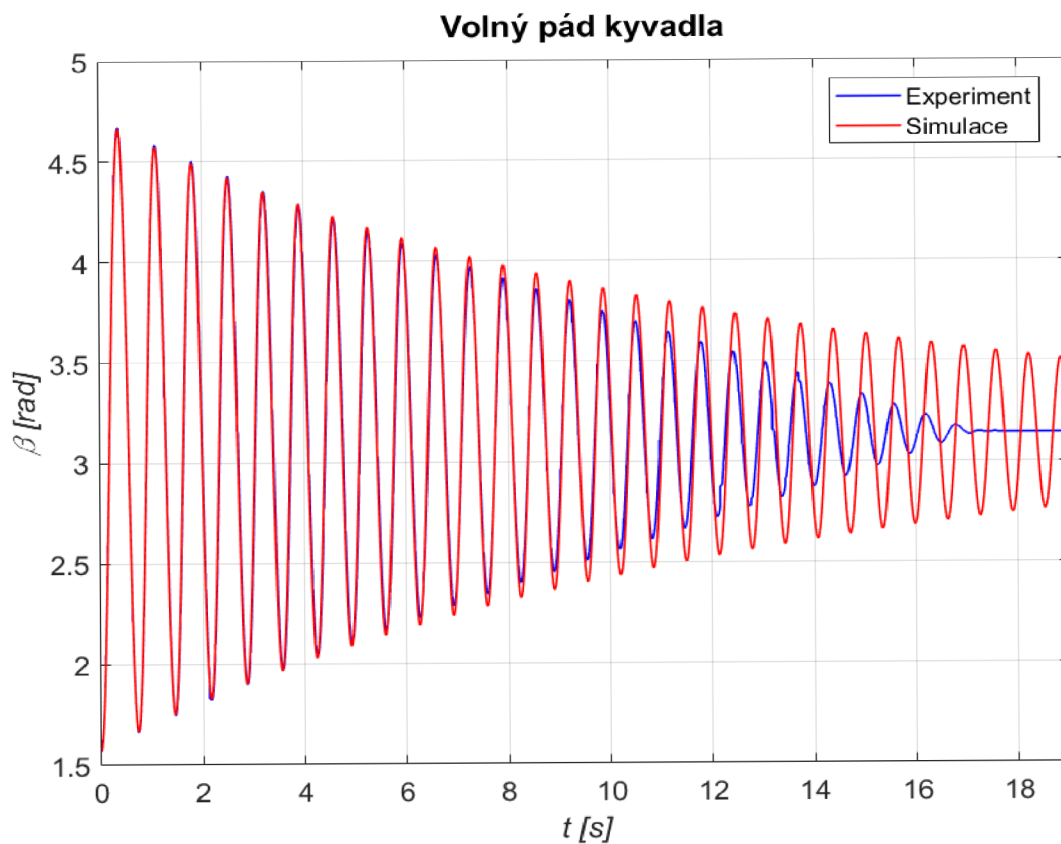
Pro účely tohoto experimentu bylo rameno fixováno v konstantní poloze a kyvadlo se tedy hýbalo pouze volným pádem působením tíhové síly. Odstraněním členů rovnice (28) závisících na úhlu α dostáváme rovnici pro volný pád:

$$\ddot{\beta} = \frac{m_2 l_2 g \sin \beta - b_2 \dot{\beta}}{J_2} \quad (39)$$

Ta slouží pro porovnání simulačního a experimentálního průběhu kmitání. Kyvadlo bylo vychýleno o 90° a spuštěno. Průběhy se ladí změnou jediného parametru, viskózního tlumení kyvadla. Při ladění parametru je nejdůležitější, aby co nejdříve kopíroval průběh několika prvních kmitů. Z rovnice (39) je zřejmé, že jediným parametrem, který amplitudy snižuje, je právě viskózní tlumení. To však při malých rychlostech celý pohyb ztlumí až po dlouhé době. Reálně se vyskytuje i malý třecí moment, který je pro účely řízení zanedbatelný. Ten by způsobil zastavení pohybu simulace po stejné době jako v případě experimentu. Výsledná hodnota viskózního tlumení kyvadla je rovna:

$$b_2 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Nsm}^{-1}$$

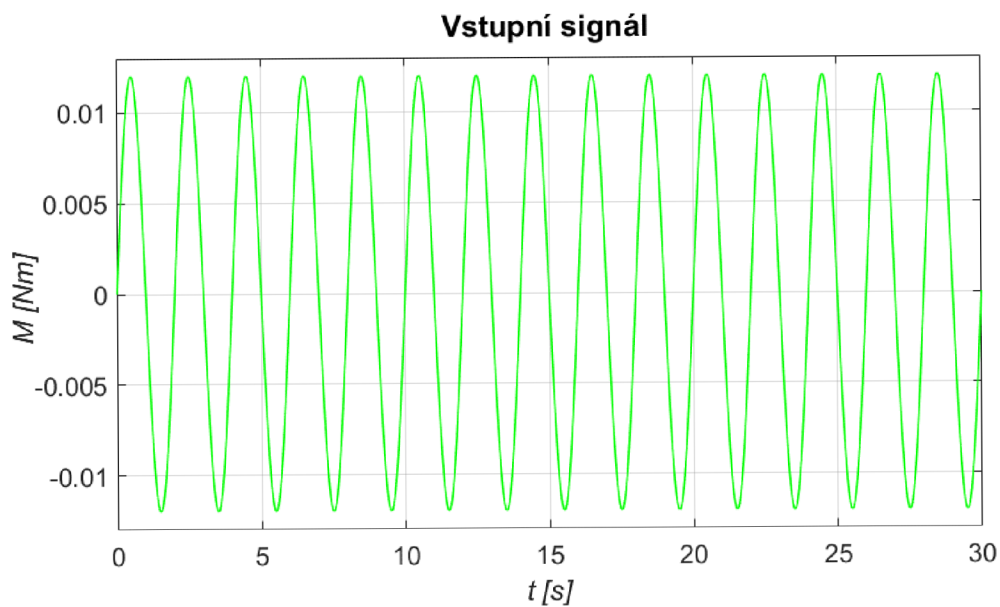
Co se dá na grafu dále ověřit je moment setrvačnosti kyvadla. Pokud je stanoven správně, kmitá simulace i experiment se stejnou frekvencí. Toto se zde potvrdilo. Při porovnání výsledků stejného experimentu v práci [3] lze pozorovat, že frekvence kmitů odpovídá lépe. To znamená, že mírné snížení momentu setrvačnosti bylo úpravou vhodnou.



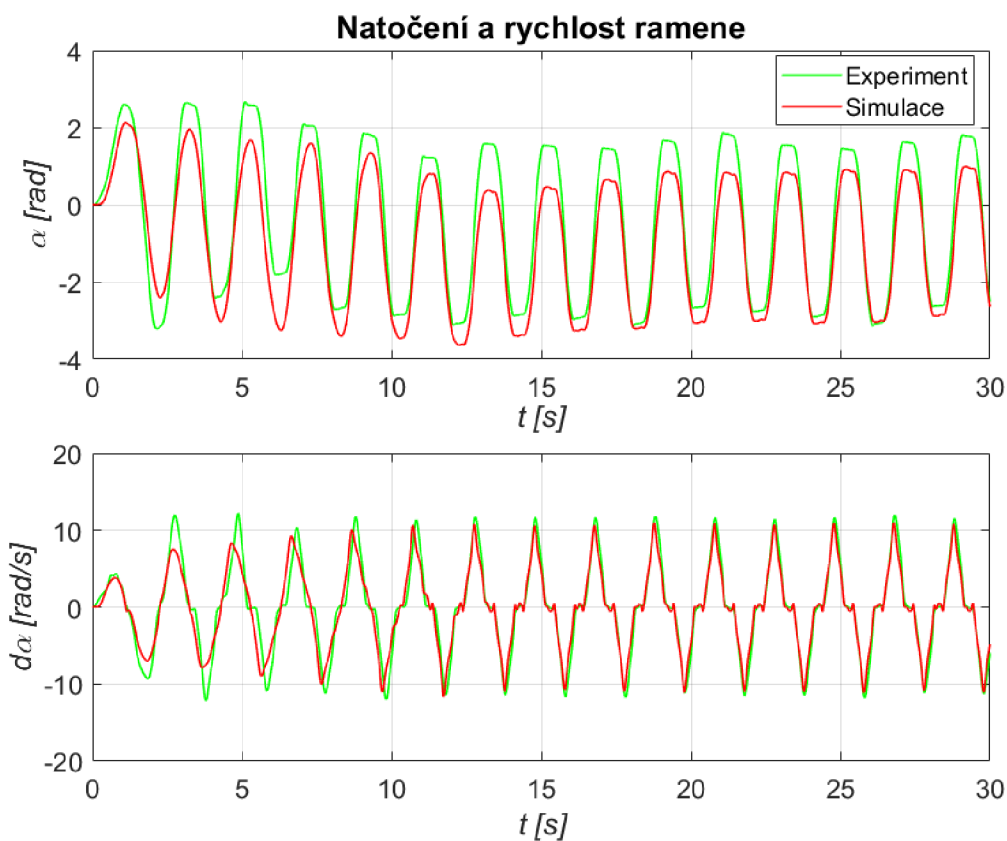
Obr. 15: Volný pád kyvadla

3.4. Verifikace

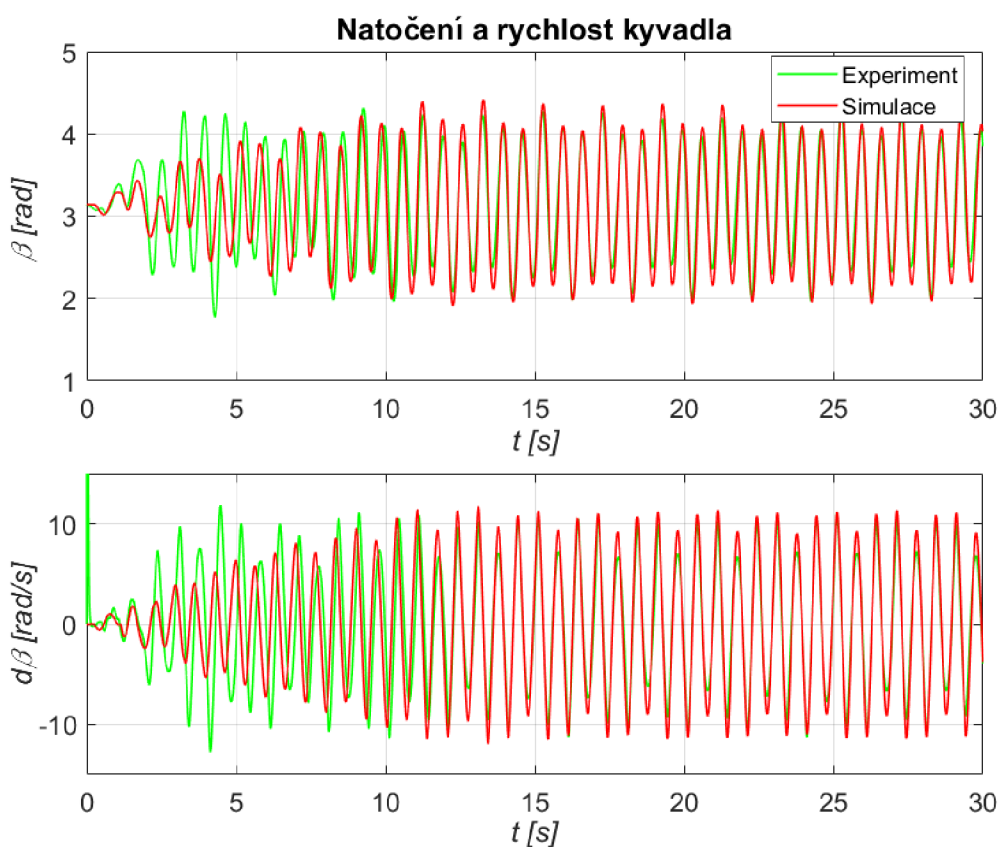
Před započítím práce na následujících kapitolách muselo být zjištěno, zda stanovené parametry odpovídají realitě. K tomu byl využit sinusový signál o amplitudě $0,012 \text{ Nm}$ a úhlové rychlosti $\pi \text{ rad.s}^{-1}$. Je nutno, aby jak polohy, tak rychlosti stanovené simulačně alespoň přibližně kopírovaly experimentální průběh.



Obr. 16: Sinusový signál



Obr. 17: Verifikace natočení a úhlové rychlosti ramene



Obr. 18: Verifikace natočení a úhlové rychlosti kyvadla

Porovnáním grafů zjistíme, že z úvodu se u simulace kýve rameno pomaleji, ale po rozběhu jsou všechny průběhy téměř totožné. Odchytky vznikají v důsledku mírně jiného natočení ramene u experimentu a simulace. Rozdílná oblast pohybu ramene má za následek jiné tření v důsledku změny třecích parametrů po obvodu. Tím je ovlivněno i zrychlení a peaky na všech grafech. I přesto se dosažená přesnost dá označit za dobrou a parametry jsou tímto považovány za verifikované.

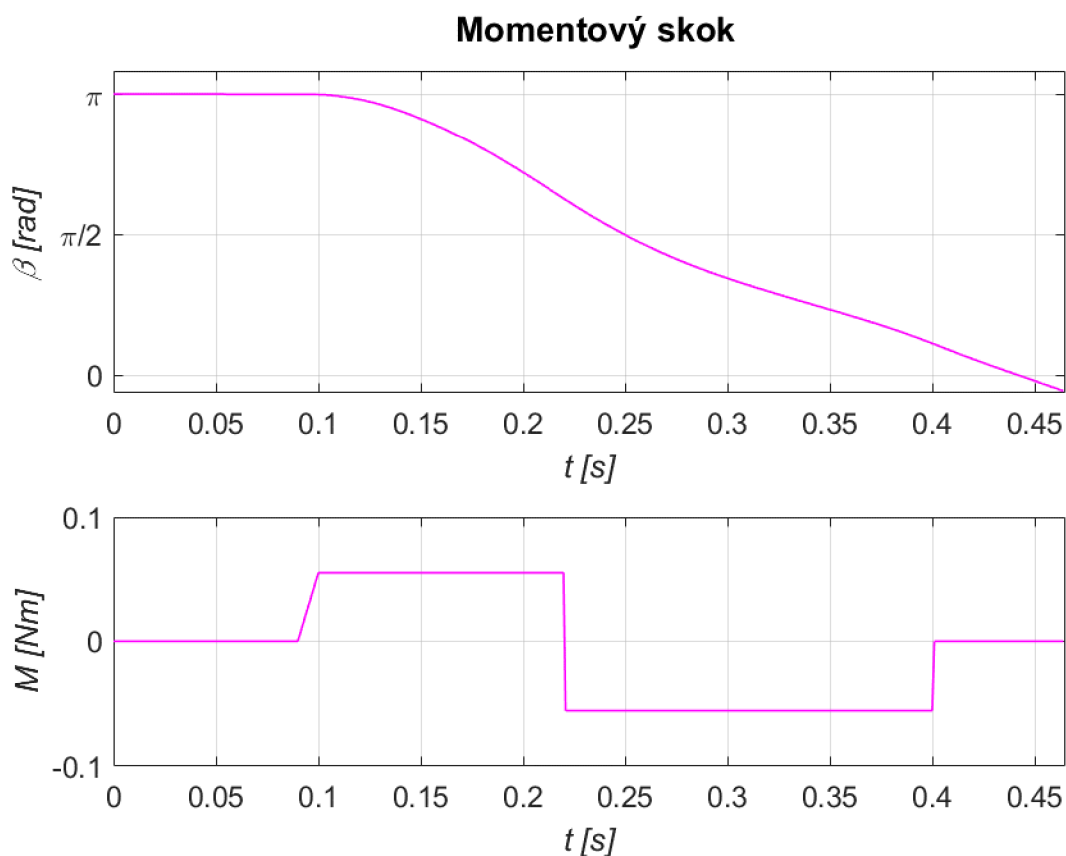
4. Řízení

4.1. Swing up

4.1.1. Momentový skok

Touto metodou bylo kyvadlo vyšvihováno ve všech předchozích pracích. Poměr točivého momentu motoru ku délce a váze kyvadla je dostatečně velký, což umožňuje dostat kyvadlo do inverzní polohy pouhou dvojicí momentových impulsů.

Vzhledem k orientaci kladných směrů výchylek α, β je nutno pro přemístění kyvadla ze spodní polohy $\beta = \pi$ do horní nastavit první moment kladně, druhý záporně. Parametry byly nalezeny experimentálně. V prvním kroku byl na aktuátor přiveden kladný proud a na grafu se odměřil čas, kdy se kyvadlo dostalo do polohy $\beta < \pi/2$. V tom okamžiku se skokově změnil směr proudu a došlo k dokončení swing upu. Došlo k jejich doladění, kdy se mírně měnila hodnota, aby byla rychlost v horní poloze přiblížena nule z důvodu usnadnění první fáze regulace. I přesto je nutno navrhnout úvodní regulátor s vyšší vahou na polohu a rychlost kyvadla, aby se spolehlivě udrželo v horní poloze a nepřepadlo. Výchylka, ve které si úvodní stabilizační regulátor přebírá řízení, byla stanovena na $\beta = \frac{\pi}{9}$. Přibližně po dvou sekundách se kyvadlo ustálí a řízení může převzít finální regulátor.



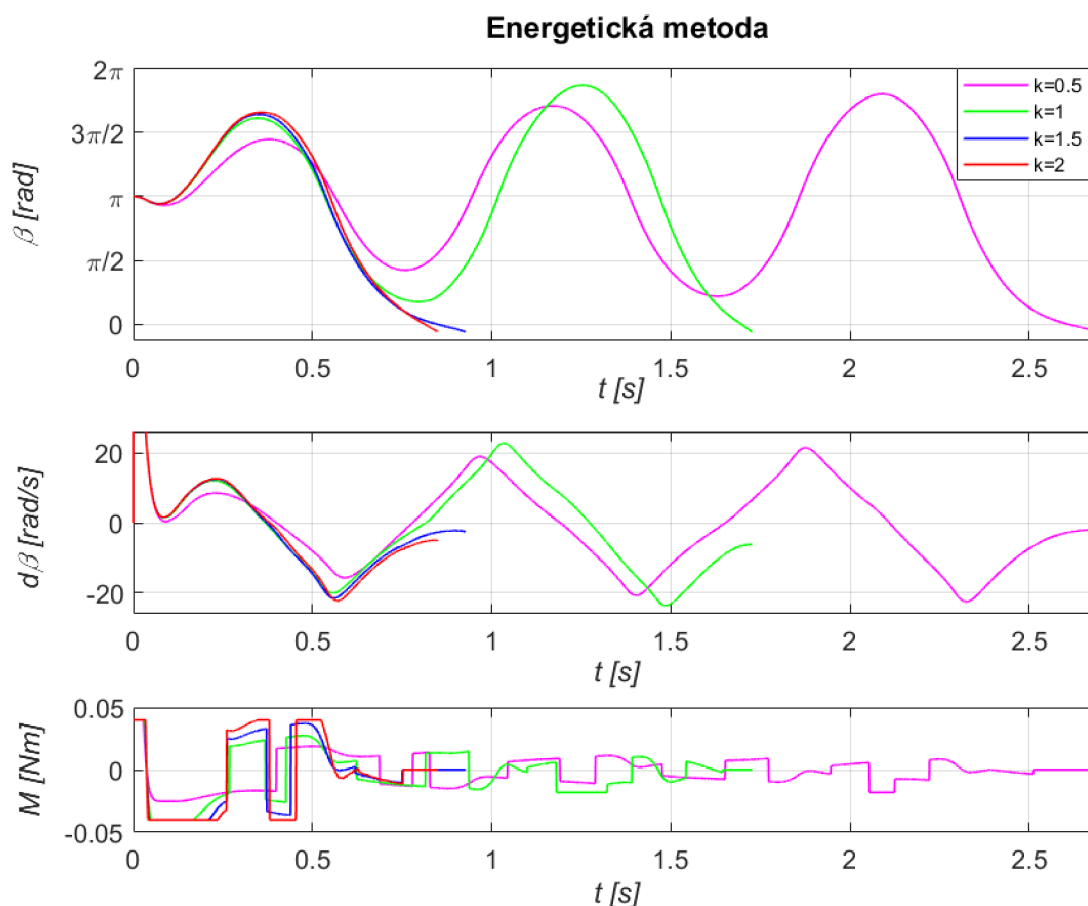
Obr. 19: Swing up momentovým skokem

Na obr. 19 je znázorněn experimentální průběh vyšvihnutí, konkrétně úhlová výchylka kyvadla a moment. Regulace zde ani u dalších obdobných grafů není připojena, protože při porovnání jednotlivých metod je důležitá i rychlost, jaké kyvadlo dosahuje při průchodu inverzní polohou. Experiment tedy končí, jakmile se kyvadlo dostane do záporných výchylek. U této metody celý swing up proběhne za $0,36 \text{ sec}$. Na grafu kyvadlo protíná nulovou výchylku v čase $0,45 \text{ sec}$, avšak k prvnímu momentovému impulsu nedochází zároveň s počátkem experimentu. Právě rychlost je spolu s jednoduchostí hlavní výhodou této metody.

4.1.2 Energetická metoda

Energetická metoda tak, jak byla navrhnutá profesorem Furatou [4] nevedla k úspěšnému vyšvihnutí ramene. Problematické je, že jakmile energie dosáhne kladné hodnoty, změní se znaménko momentu a pokud se kyvadlo nachází v poloze pouze mírně menší než $\beta < \pi/2$, dojde k redukci rychlosti a její směr se změní. Systém se tedy rozhoupe, ale vyšvihnutí nedokončí. Řešení lze nalézt v odstranění požadavku na nulovou rychlost v inverzní poloze. Z tohoto důvodu byla provedena úprava, kdy nulová energie systému je uvažována kladná, konkrétně $E_0 = 0,01 \text{ J}$. To odpovídá rychlosti $\dot{\beta} = 9,9 \text{ rad} * \text{s}^{-1}$. Úvodní regulátor byl již navrhnut pro předchozí metodu, proto bude použit i zde a nedojde k neuregulování kyvadla.

Ukázalo se, že je nutno nastavit maximální hodnoty momentu. Pokud moment zůstal neomezen, docházelo k roztočení kyvadla v jednom směru, oscilaci kyvadla okolo $\beta = \pi/2$ a vyšvihnutí neproběhlo. Vhodně se jevil $M_{max} = 0,04 \text{ Nm}$. Nyní přistoupíme k volbě koeficientu k . Testování proběhlo pro několik různých hodnot. Nejnižší koeficient, při kterém došlo k vyšvihnutí, ne pouze rozhoupání, byl $k = 0,5$. Avšak je vhodné použít vyšší hodnoty, aby bylo zapotřebí nižšího počtu zhoupnutí. Nejnižšího možného se dosáhla pro koeficient $k = 1,5$. Volba vyšších koeficientů ($k = 2$) je bezpředmětná, protože díky omezení momentu k výraznějšímu urychlení nedojde, ale začíná se zvyšovat rychlost v inverzní poloze. Průběhy pro jednotlivé koeficienty se nachází na obr. 20. Jako optimální byl tedy zvolen koeficient $k = 1,5$. Tak je kyvadlo vyšvihnuto do inverzní polohy nejdéle za $t = 0,85 \text{ s}$.



Obr. 20: Swing up energetickou metodou

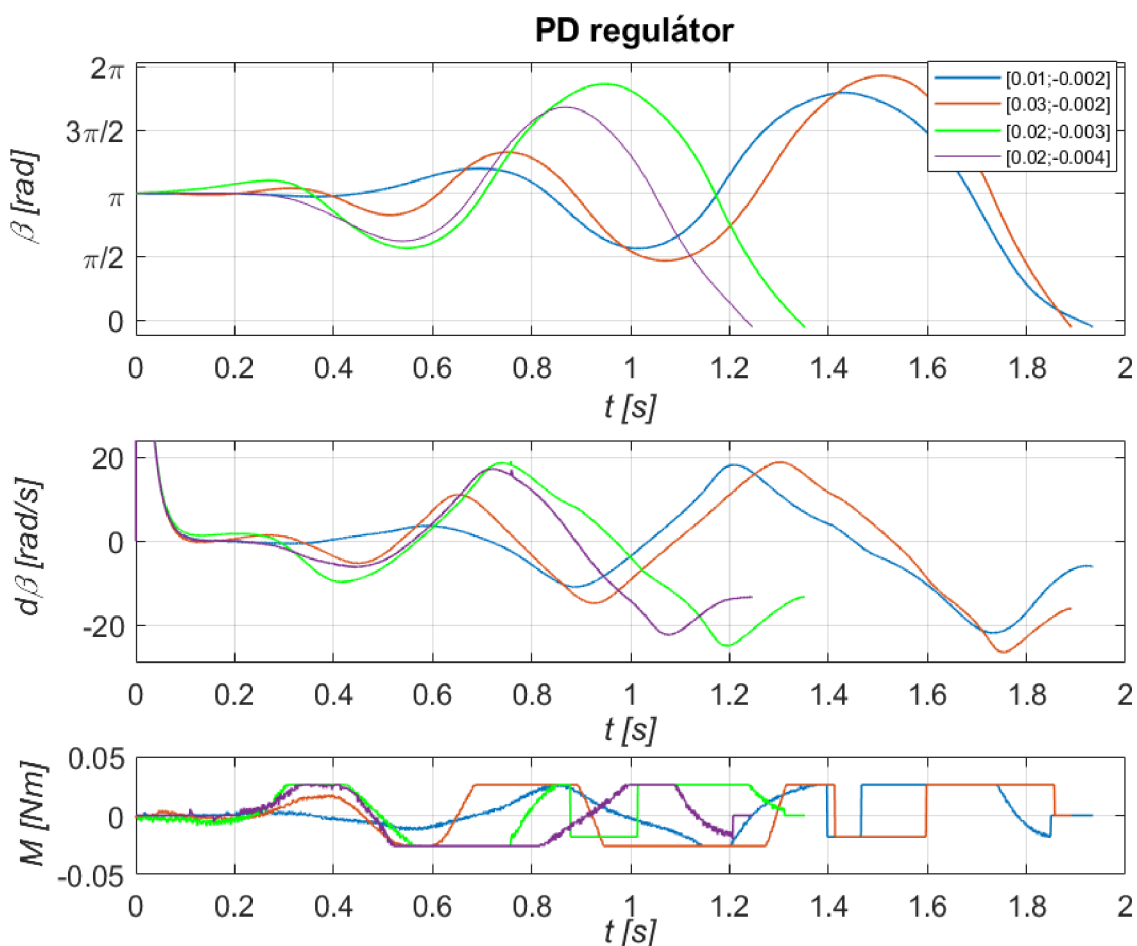
Metoda počítá pouze s energiemi, které nezávisí na směru otáčení. Může dojít k vyšvihnutí do inverzní polohy v opačném směru. Regulátor je navrhnut tak, aby reguloval pouze v oblastech $\beta \doteq 0$. Proto byl do soustavy umístěn blok *Switch*, který v případě přiblížení se k inverzní poloze v opačném směru přivede do soustavy moment znemožňující dokončení swing upu. Pokud by i přesto došlo k dosažení horní polohy, je simulace pomocí bloku *Break* ukončena. Stejně ochrany jsou využity i v následující metodě.

4.1.3. PD regulátor

Jako vstup do vnější smyčky nelze použít polohu kyvadla tak, jak je definována ($\beta=0$ v horní poloze), ale musí být odečtena hodnota π , aby nulová výchylka byla v dolní poloze. Sériově za druhým regulátorem se nachází omezovač momentu, jehož využití se jeví jako nutné. Maximální hodnoty vstupního momentu by vedly k přehnanému namáhání motoru. Při snížení konstant PD regulátoru by zejména v první fázi swing upu docházelo pouze k pomalému pohybu.

Parametry vnější smyčky byly nastaveny tak, aby rozsah pohybů byl maximálně cca 180° . Tomu odpovídá proporcionální složka $P_{in} = 0,5$, protože největší vzdálenost mezi aktuální a požadovanou polohou je π . Pro vnitřní smyčku byly testovány různé sady parametrů, z nichž bylo vybráno několik vhodných k porovnání. Na rozdíl od energetické

metody se zde objevuje nepravidelnost. Často se liší počet zhoupnutí, které jsou potřeba k vyšvihnutí kyvadla. Na obr. 21 jsou zaznamenány swing upy, které reprezentují nejčastější průběh. Varianty, které vedly k rychlému vyšvihnutí, s sebou vždy nesly nevýhodu vyšší rychlosti. Při rozfázování do více zhoupnutí se dařilo ji snížit. Vzhledem k přítomnosti stabilizačního regulátoru je možné dát přednost kombinaci parametrů vedoucí k nejrychlejšímu vyšvihnutí.

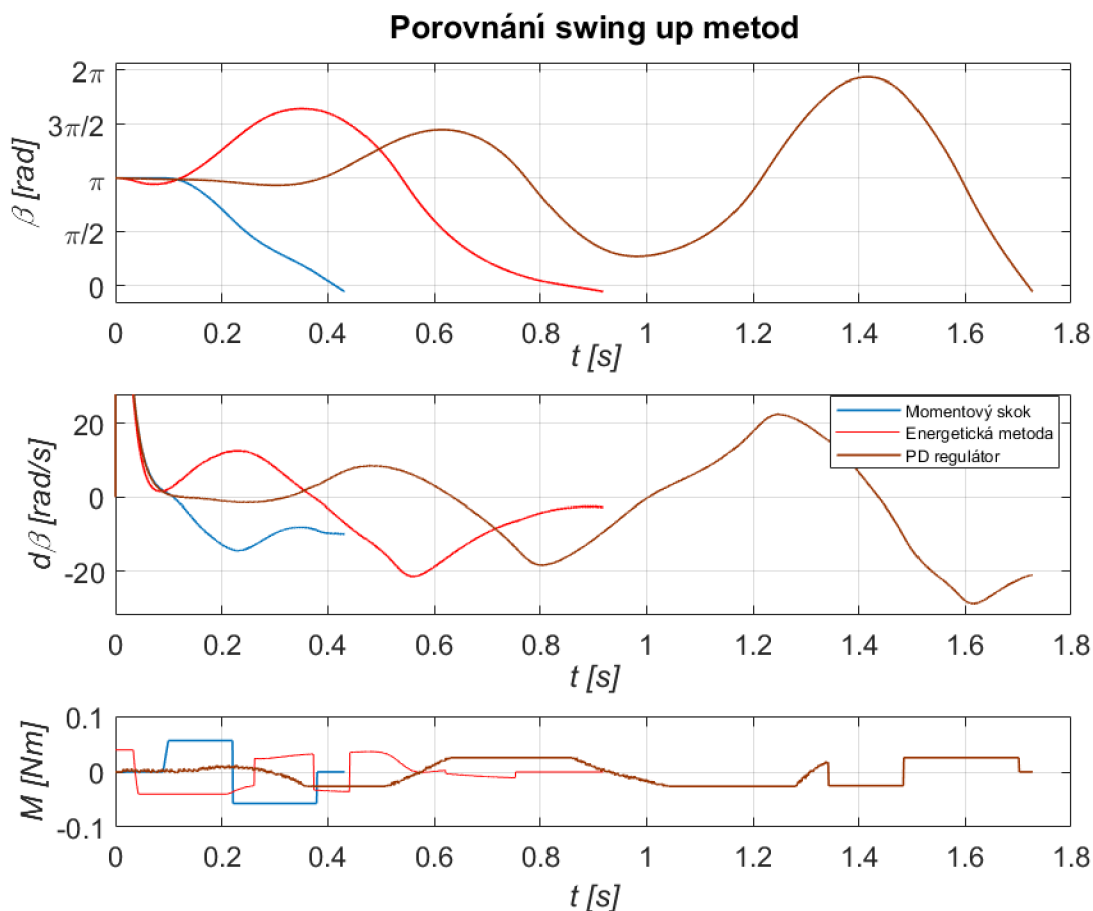


Obr. 21: Swing up PD regulátorem

P_{out}	0,5
D_{out}	0,04
P_{in}	0,02
D_{in}	-0,004

Tab.5: Optimální koeficienty

4.1.4. Srovnání



Obr. 22: Srovnání tří metod s optimalizovanými parametry

Všechny metody aktuálně fungují spolehlivě. Nejhůře se jeví použití PD regulátoru. Je nejpomalejší a zároveň v inverzní poloze dosahuje násobně vyšší rychlosti než zbylé dvě. Navzdory učinění předpokladu, že energetická metoda bude mít v inverzní poloze rychlost odpovídající přebytku energie, je reálně tato rychlost mnohem nižší, a to je její hlavní výhoda oproti momentovému skoku. Dle očekávání se chová swing up pomocí momentového skoku. Je nejrychlejší a je nutno u něj počítat s nenulovou rychlostí v inverzní poloze. Kvůli době vyšvihnutí byl zvolen a bude využíván po zbytek práce. Nevýhodné u něj je, že může být nutno průběžně ladit parametry v závislosti na aktuální skutečné hodnotě tření.

4.2. Stavové řízení

V první fázi řízení probíhalo dvěma kaskádovitě zapojenými PD regulátory. Parametry těchto regulátorů byly laděny ručně a následně ověřovány na modelu i experimentech. Ukázalo se, že takto dosáhnout požadované přesnosti je náročné, proto se přešlo k stavovému řízení. Vzhledem k tomu, že návrhu i popisu tohoto způsobu se velmi podrobně věnovala práce [3], nebylo nutné provádět celý návrh a některé části mohly být převzaty. Zde je uvedena pouze zkrácená verze návrhu parametrů LQR metodou.

Je nutné vytvořit linearizované rovnice v oblasti inverzní polohy. U goniometrických funkcí lze předpokládat následující linearizované tvary:

$$\sin(\beta) = \beta; \quad \sin(2\beta) = 2\beta; \quad \sin^2(\beta) = 0; \quad \cos(\beta) = 1$$

Dále považujeme za nulové členy, ve kterých se nachází součin rychlostí. Po úpravě rovnic (27) (28) se na závěr dosadí jedna do druhé, aby se v rovnici pro zrychlení kyvadla nevyskytoval člen se zrychlením ramene a naopak.

$$\ddot{\alpha} = \frac{m_2 l_1 l_2 b_2 \dot{\beta} + m_2^2 l_1 l_2^2 g \beta - b_1 \dot{\alpha} J_2 + M_M J_2}{(J_1 + m_2 l_1^2) J_2 - m_2^2 l_1^2 l_2^2} \quad (40)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{m_2 l_1 l_2 b_1 \dot{\alpha} - b_2 \beta (J_1 + m_2 l_1^2) + m_2 l_2 g \beta (J_1 + m_2 l_1^2) + m_2 l_1 l_2 M_M}{(J_1 + m_2 l_1^2) J_2 - m_2^2 l_1^2 l_2^2} \quad (41)$$

Stavový prostor je popsán rovnicemi:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (42)$$

$$y = Cx + Du, \quad (43)$$

kde x je vektor stavů,
 u vektor vstupů,
 y vektor výstupů.

A , B , C , D jsou matice, které popisují jednotlivé závislosti. A závislost derivací stavů na jejich aktuálních hodnotách. B derivací stavů na vstupech. C výstupů na aktuálních hodnotách stavů. D výstupů na vstupech. Jednotlivé matice jsou tedy definovány níže a jsou zde i jejich výsledné hodnoty.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \dot{\beta}} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \dot{\alpha}} \\ \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \beta} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\beta}} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{\alpha}} \\ \frac{\partial \ddot{\beta}}{\partial \beta} & \frac{\partial \ddot{\beta}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \ddot{\beta}}{\partial \dot{\beta}} & \frac{\partial \ddot{\beta}}{\partial \dot{\alpha}} \\ \frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \beta} & \frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \dot{\beta}} & \frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 130 & 0 & -0,19 & -0,20 \\ 41,3 & 0 & -0,06 & -0,28 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial M_M} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial M_M} & \frac{\partial \ddot{\beta}}{\partial M_M} & \frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial M_M} \end{pmatrix}^T = (0 \ 0 \ 2018,0 \ 2755,7)^T, \quad (45)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$D = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T. \quad (47)$$

Pro návrh regulátoru jsou důležité váhové matice R a Q . Matice R specifikuje váhu vstupů. Ten je tu pouze jediný, proto $R = 1$. Matice Q popisuje váhu, s jakou dochází k regulaci jednotlivých stavů. Jednotlivé stavy na sobě nezávisí, jde tedy o diagonální matici 4×4 . *Matlab* obsahuje příkaz *lqrd*, který regulátor na základě vstupních údajů navrhne. Pracuje se s diskretizovanými maticemi systému s časovou konstantou $T = 0,001$ s. [3]

Úvodní regulátor má za cíl udržet kyvadlo v horní poloze a snížit jeho rychlost. Proto je dána větší váha na polohu a rychlost kyvadla, pohyb ramene je v tuto chvíli méně podstatný. Výsledný tvar matice je:

$$Q_1 = \text{diag}([2; 1 * 10^{-3}; 8 * 10^{-4}; 4 * 10^{-4}])$$

Z toho plyne i tvar regulační matice:

$$K_1 = [1,753; -0,032; 0,104; -0,035]$$

Jakmile se kyvadlo po vyšvihnutí ustálí v inverzní poloze, řízení přebírá finální regulátor. Zvyšuje se zejména priorita, s jakou je regulována poloha ramene. Matice mají tyto tvary:

$$Q_2 = \text{diag}([0,52; 2,2 * 10^{-2}; 2,7 * 10^{-4}; 1,52 * 10^{-3}]),$$

$$K_2 = [1,859; -0,148; 0,169; -0,074]$$

Protože v soustavě dochází k vysokofrekvenčním kmitům, je vhodné použít stavového pozorovatele, který využívá linearizovaných rovnic k výpočtům předpokládaných stavů. Stavový pozorovatel existoval již v práci [3], po drobných úpravách mohl být využit i zde. Jeho rovnice má tvar:

$$\dot{\hat{x}} = (A - HC)\hat{x} + Bu + Hy, \quad (48)$$

kde \hat{x} je vektor rekonstruovaných stavů,
 u je vektor vstupů,
 y je vektor výstupů,
 H je maticí pozorovatele.

Je nutno zvolit póly systémové matice pozorovatele:

$$P = A - HC, \quad (49)$$

kde P je systémová matice pozorovatele.

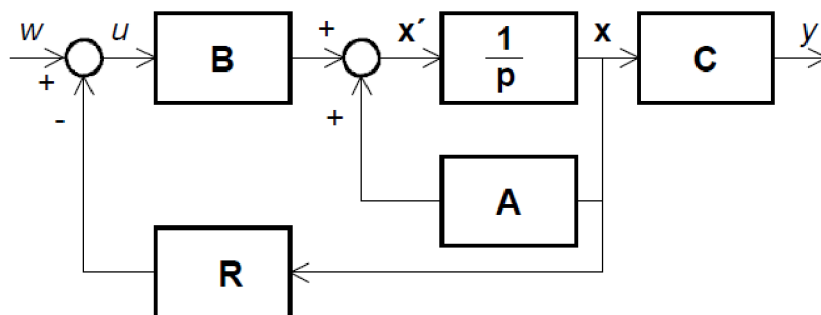
Póly systémové matice P musí mít větší zápornost než póly matice A . Určují se jako násobek pólů uzavřené smyčky:

$$p = k * \text{eig}(A - BK), \quad (50)$$

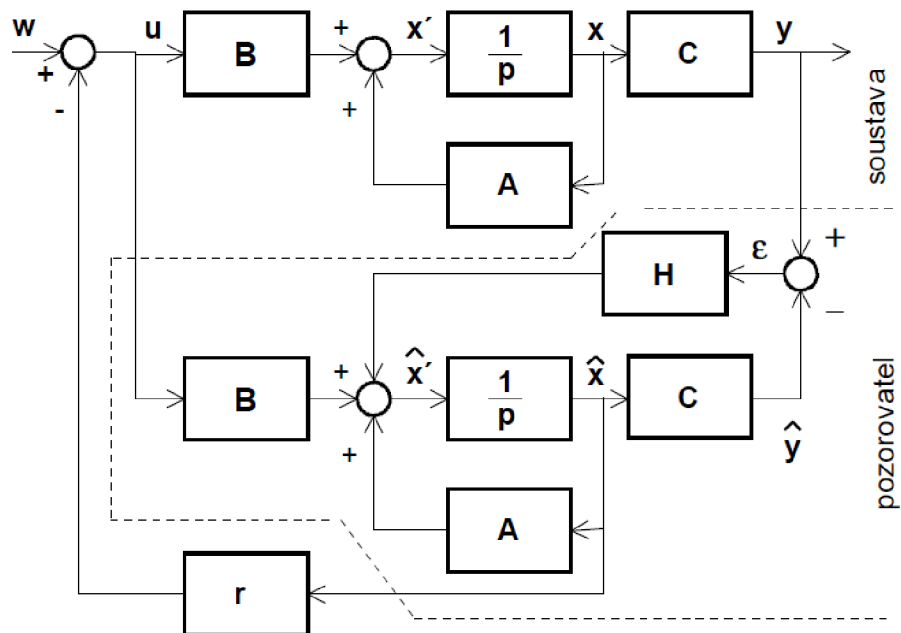
kde p jsou póly pozorovatele,
 $(A - BK)$ označuje uzavřenou smyčku regulátoru,
 k je koeficient, kterým jsou póly násobeny.

Koeficient k má zásadní vliv na chování pozorovatele. Čím je nižší, tím vyšší váha je dána na simulační model. S rostoucím koeficientem dochází ke zvyšování vlivu měřených dat. Nebylo předmětem této práce se podrobně věnovat hledání vhodného koeficientu, provedlo se tedy několik experimentů pro různé hodnoty. Ty potvrdily, že koeficient $k = 7,5$, který byl vyhodnocen jako nejvhodnější v práci [3], se dobře uplatní i zde.

Protože pozorovatel vychází z linearizovaných rovnic, kvalitně svoji funkci plní pouze v malé oblasti okolo bodu, ve kterém byly rovnice linearizovány. Tím je inverzní bod $\beta = 0$. Při větší skokové změně požadované polohy ramene se kyvadlo od nulové hodnoty odchyluje do oblasti, kde již pozorovatel není schopen přesně a včas odhadovat jednotlivé stavy. Dochází k pádu kyvadla. Proto byl použit blok *Switch*, který v případě, že se kyvadlo od požadované polohy odchýlí o víc jak 5° , změní vstup do řízení na měřená data. Jakmile se kyvadlo opět přiblíží inverzní poloze, znovu se jako vstup použije vektor rekonstruovaných stavů ze stavového pozorovatele.



Obr. 23: Grafické vyjádření stavového regulátoru. Převzato z [8]



Obr. 24: Blokové schéma stavového řízení s pozorovatelem. Převzato z [8]

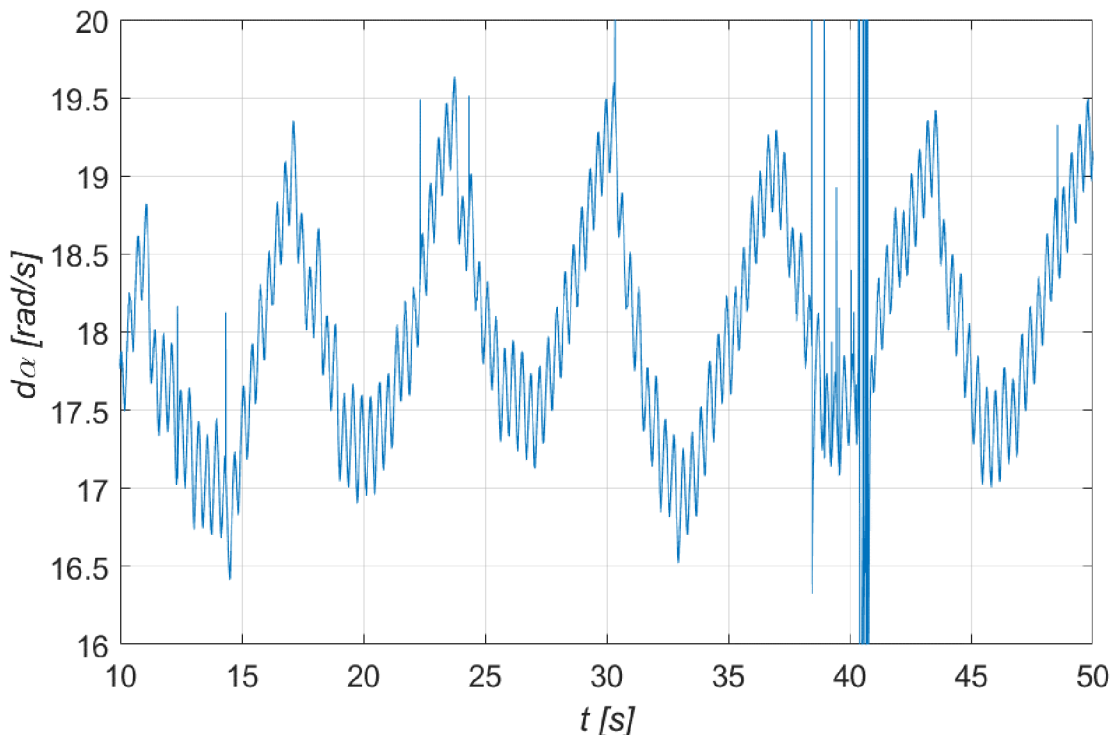
4.4. Tření

V této podkapitole je podrobně popsán návrh různých modelů kompenzace tření. Jeho správný odhad a popis je důležitý pro zlepšení kvality řízení. Správně navržený model tření umožňuje použití nižších hodnot parametrů řízení, díky čemuž se zmenší amplituda momentů. Pokud by se podařilo tření popsat opravdu přesně, mohlo by při regulaci dojít nejen k oscilaci okolo požadovaného natočení ramene, ale i přímo k ustálení kyvadla v inverzní poloze. Veškeré experimenty v páté kapitole byly provedeny s kyvadlem zafixovaným ve spodní poloze. Tím se eliminují změny zrychlení v důsledku rotace kyvadla. Pro simulace byl využit model dle rovnice (37).

4.4.1. Specifické tření

U tohoto rotačního inverzního kyvadla není možno přesně popsat průběh tření na základě obvyklých modelů, které závisí převážně na velikosti a směru rychlosti. Ač je úhlová rychlost rotace ramene při sestavování jednotlivých modelů důležitým faktorem, je nezbytné vzít v úvahu i proměnnou hodnotu tření závisící na úhlové výchylce. Projevuje se významná sinusová závislost při rotaci. Příčinu lze nalézt v montáži. Při ní došlo k mírnému vyosení sběracích kroužků. Dochází tedy k proměnlivé zátěži ložiska, tím pádem se mění i tření.

Průběh rychlosti při konstantním momentu



Obr. 25: Průběh rychlosti při konstantním vstupním momentu $M=0,0085 \text{ Nm}$

V grafu průběhu rychlosti při konstantním momentu lze pozorovat dvě sinusové závislosti. Jedna z nich byla identifikována v předchozí práci a její kvantifikace je hlavní náplní této práce a budeme se jí věnovat v následujících kapitolách. Na první pohled se zdá být rovněž významná závislost rychlosti na dalším faktoru, který má násobně delší

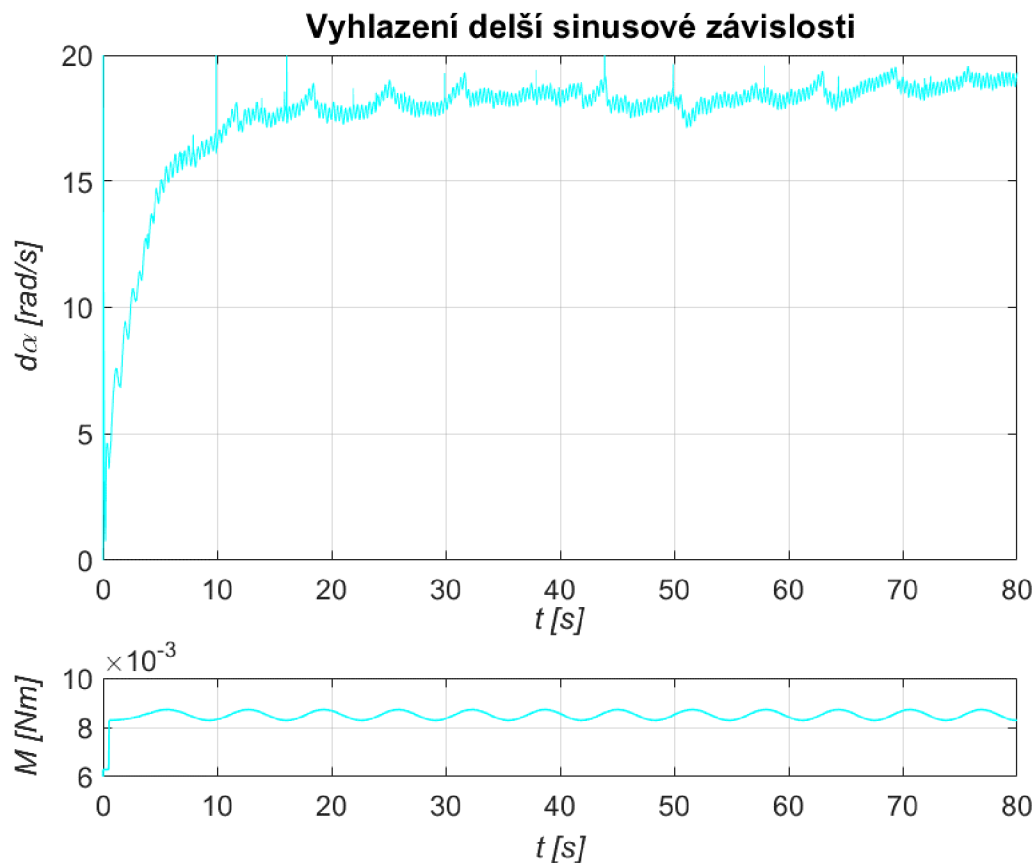
periodu. Prostým měřením lze zjistit, že amplituda této sinusové závislosti přesahuje 10 % průměrné úhlové rychlosti, při nižších rychlostech ještě více.

Po pozorování několika vln při různých rychlostech bylo ověřeno, že změna je periodická a jeden průběh připadá na konstantní počet otáček. Ten se určí jednoduchým experimentem. Po dostatečně dlouhou dobu (cca 3 minuty) bylo rameno roztáčeno konstantním momentem. Z grafu se odečetl počet period, který je roven $\nu = 14$. Změřila se dráha uražená ramenem $x = 1622$ rad. Počet otáček zjistíme z rovnice

$$n = \frac{x}{\nu * 2\pi} = \frac{1622}{14 * 2\pi} = 18,44 \text{ ot.} \quad (51)$$

Dalším krokem bylo nalezení počátečního bodu. K tomu posloužila rovněž experimentální metoda. Kyvadlo bylo roztočeno a po třicet sekundách zastaveno. Z grafu, ve kterém byly vykresleny úhlové rychlosti ramene, se odpozorovalo, kolik otáček chybí do dosažení požadované polohy. Pomocí bloku *Matlab Function* se vytvořila funkce, která měla vliv tohoto tření kompenzovat. Bylo nutno stanovit amplitudu závislosti. Nejrychlejší variantou, která dá hrubou představu o této hodnotě, bylo použití amplitudy pomalu lineárně rostoucí s časem a z grafu odečíst, kdy je kompenzace nejlepší.

Amplituda $M = 0,00024$ Nm způsobila přibližné vyrovnání rychlostního profilu (viz obr. 26). Ač se i zde vyskytují rychlostní peaky, místy je profil téměř lineární (např. 32 – 42 sec). Původně se tato závislost jevila jako významná, po její kvantifikaci lze prohlásit, že její vliv na řízení je zanedbatelný. Hodnota dosahuje pouze cca desetiny hodnoty amplitudy pro kratší sinusovou závislost, dále by bylo problematické pokaždé stanovovat počáteční otáčku. V navržených modelech tření nebudou tyto zjištěné parametry dále zohledňovány.



Obr. 26: Kompenzace tření

4.4.2. Modely tření

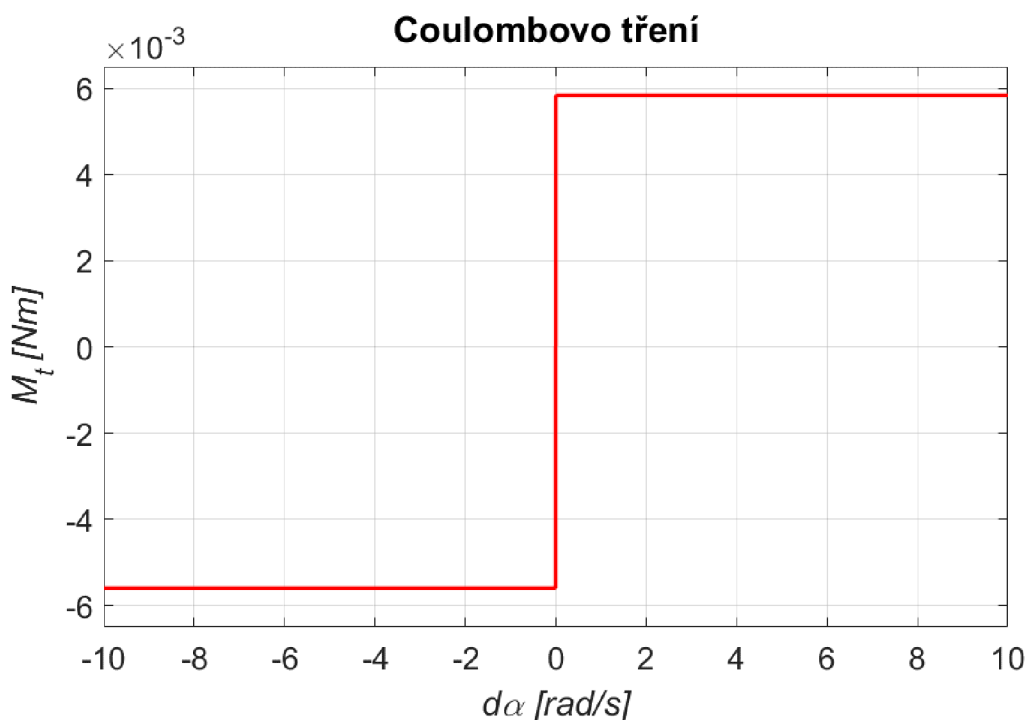
Ze zadání práce je potřeba vytvořit alespoň pět modelů, navrhnout jejich parametry a ověřit je. Jsou seřazeny od nejjednodušších tak, jak byly chronologicky navrhovány. První čtyři jsou statické, pátý dynamický.

a) Coulombovo tření

Elementární možností aproximace tření je použití Coulombova modelu. V něm je tření pouze funkcí znaménka rychlosti, pro rotační pohyb platí rovnice (52).

$$\begin{aligned}
 M_t &= M_{d1}, & \text{pokud } dA > 0, \\
 M_t &= -M_{d2}, & \text{pokud } dA < 0, \\
 M_t &= 0 & \text{jindy.}
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

Parametry byly stanoveny pomocí dříve popsaného experimentu s rampou. Dochází k mírné asymetrii hodnot v závislosti na směru. Proti hodinovým ručičkám je třecí moment cca o 5 % nižší.



Obr. 27: Coulombovo tření

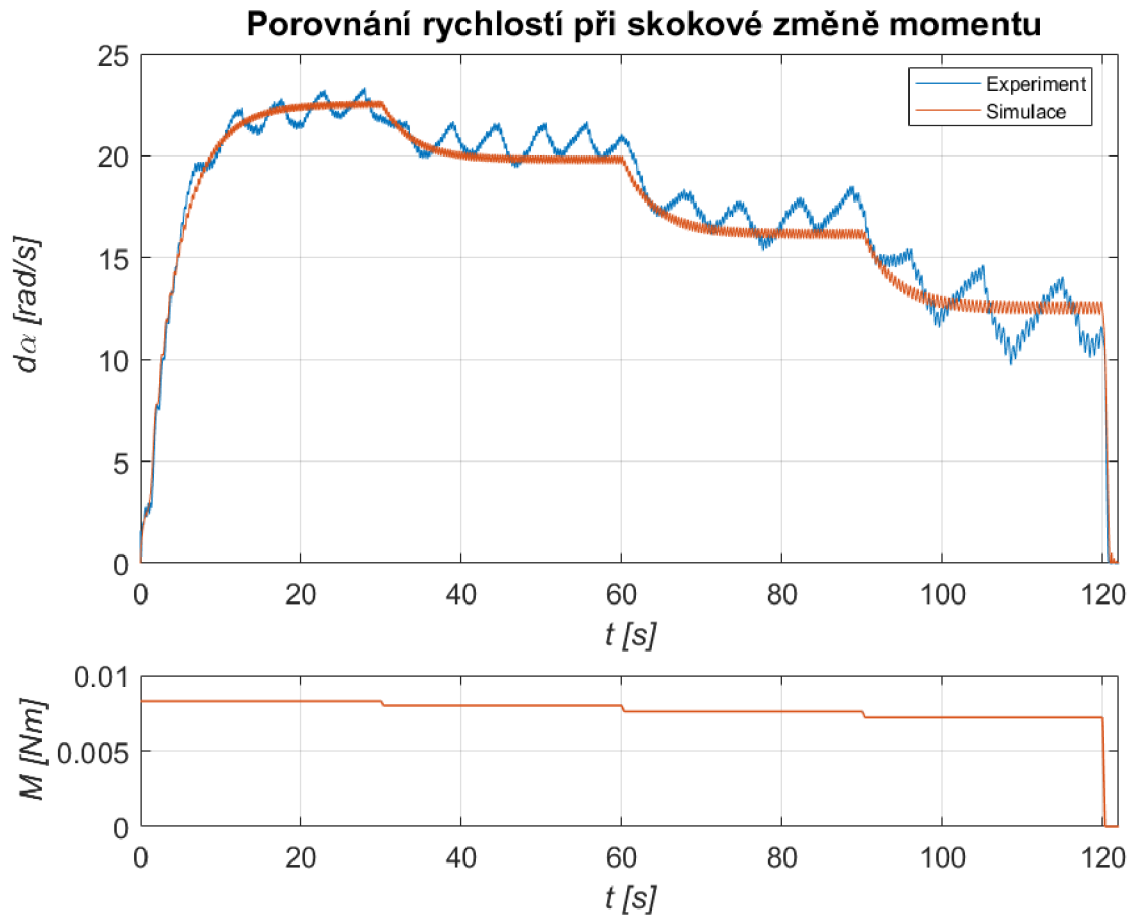
Tento model není schopen kvalitně postihnout průběh tření. Je nepřesný v nízkých rychlostech, ani nezohledňuje změnu tření po obvodu. Přesto je tento model důležitý, jelikož další statické modely z něj vycházejí a jsou pouze jeho úpravou obohaceny o další závislosti.

b) Obvodově závislé tření

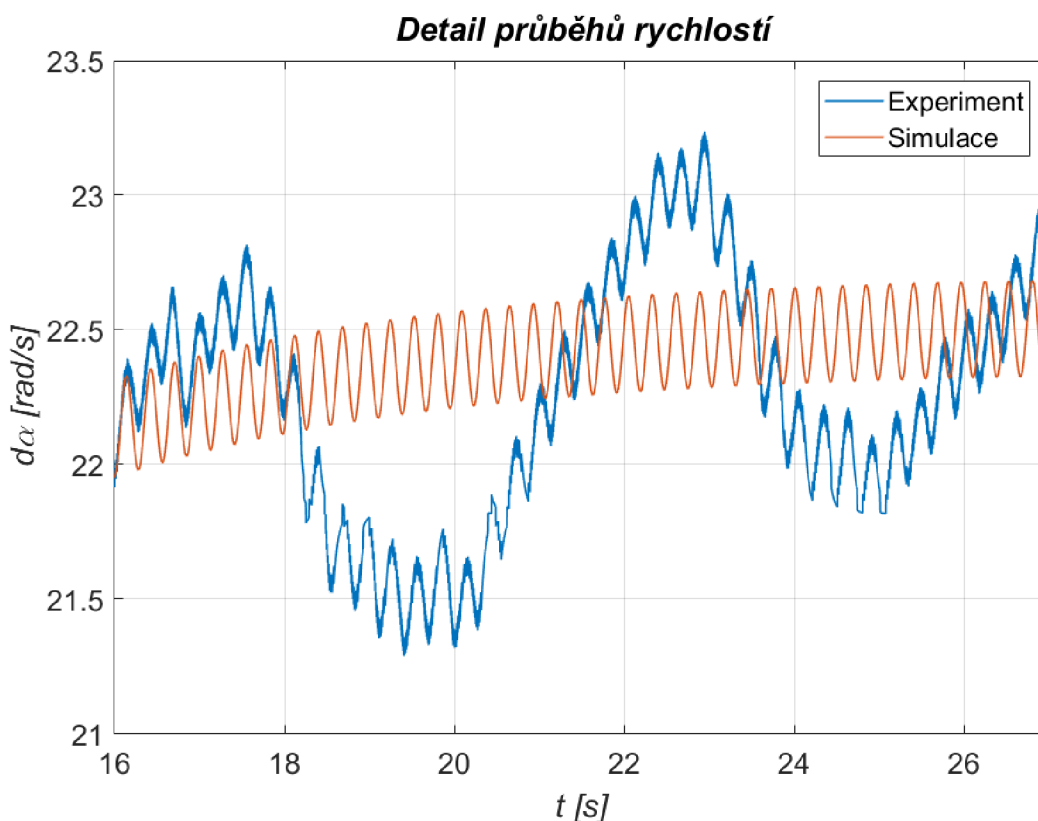
Jak již bylo zmíněno, tento model vychází z předchozího. Je však zohledněno i tření proměnné po obvodu. Kvalitní, ne však dokonalou, aproximaci poskytuje sinusová závislost. S ní vypadá model následovně:

$$\begin{aligned}
 M_t &= M_{d1} + M_o * \sin(A - \varphi_{01}), \text{ pokud } dA > 0, \\
 M_t &= -(M_{d1} + M_o * \sin(A - \varphi_{02})), \text{ pokud } dA < 0, \\
 M_t &= 0 \quad \text{jindy.}
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

Bylo určeno natočení, ze kterého budou všechny pokusy začínat. Dalšími kroky je zjištění amplitudy a počáteční polohy tření. K tomu byl využit iterativní proces, kdy se postupně zlepšoval odhad těchto dvou parametrů. Na úvod se přibližně stanovila amplituda. K tomu posloužilo porovnání simulačních a experimentálních dat, kdy se hodnota nastavovala tak, až docházelo k přibližně totožnému rozkmitu (obr. 28, obr. 29).



Obr. 28: Porovnání simulačního modelu s experimentem



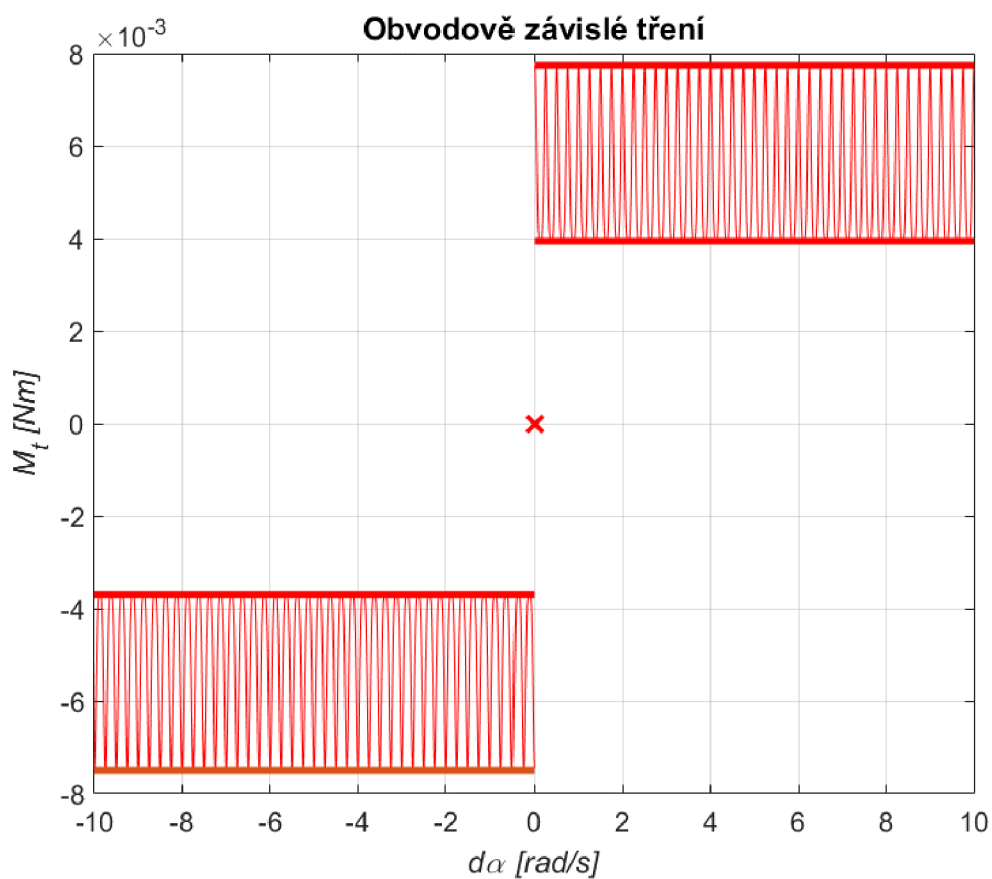
Obr. 29: Detailní pohled na obr. 28

K dalším krokům se již nevyužívá model, nýbrž se tření kompenzuje tak, že je přidáváno jako vstup do motoru.

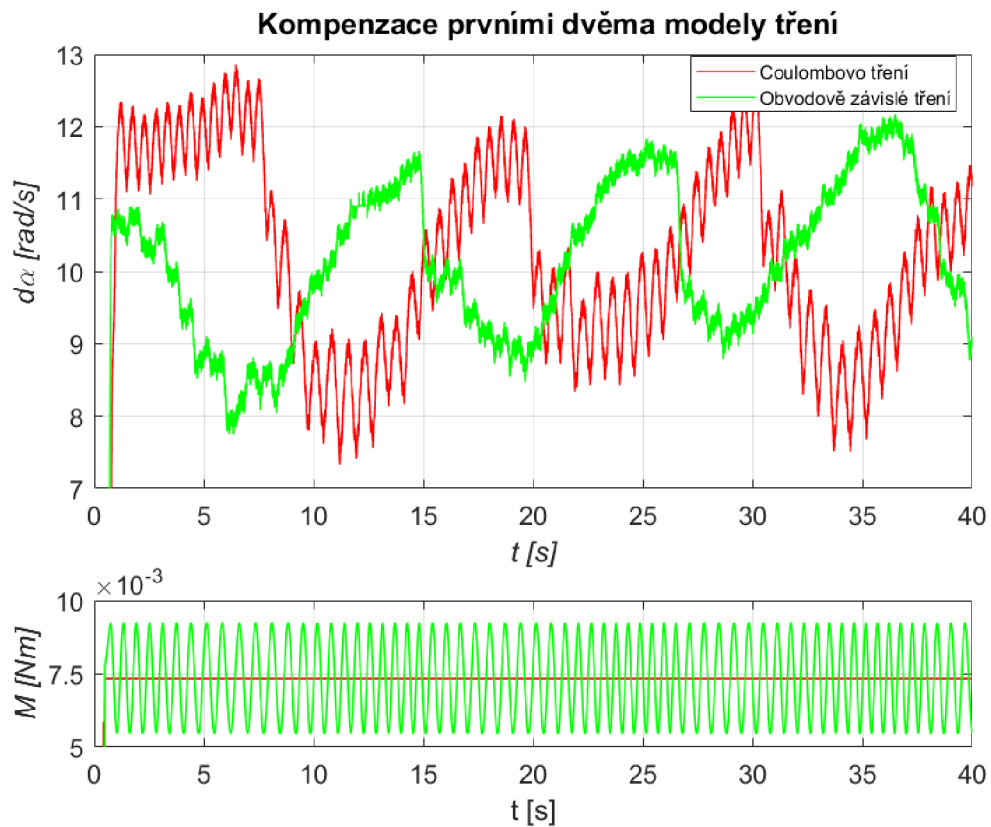
Zjišťování počáteční polohy sinusové závislosti bylo provedeno při konstantním momentu. Zjistí se kontinuální změnou její hodnoty. Projde hodnotami od 0 po 2π za dobu 120 sec . V grafu se vytyčí oblast, kdy dochází ke snižování amplitudy. Čas se přepočte na počáteční polohu. Tímto získáme její přibližnou hodnotu. Nyní se zpřesní zopakováním tohoto experimentu, avšak na mnohem menším rozsahu hodnot a s pomalejším růstem. Získáme výslednou počáteční polohu, která se bude používat po zbytek práce. Následně je možno totožným postupem, avšak pro amplitudu, zjistit její zpřesněnou hodnotu. Celý tento postup je nutno provést dvakrát, pro směr otáčení ve smyslu i proti smyslu hodinových ručiček. Výsledné hodnoty, které jsou použity jako vstupní parametry rovnice (53), jsou zapsány v tab. 6, znázornění modelu v závislosti na úhlové rychlosti je na obr. 30. Tady i u následujících modelů pás hodnot ohraničený tlustými křivkami odpovídá všem možným kombinacím dvojice úhlová rychlost – třecí moment, jakých může být dosaženo. Právě díky obvodově proměnnému tření v závislosti na natočení ramene se při konstantní rychlosti mění třecí moment v celém rozsahu oblasti. Šířka pásu odpovídá dvěma amplitudám M_o , tedy rozkmitu. Průběh rychlosti s kompenzací tření při schodovitě se snižujícím momentu je znázorněn na obr. 31. Není možné pouze sinusovou závislost provést kompenzací tak, aby rychlost byla lineární. Povedlo se pouze významně snížit amplitudu, ač vznikly mírné amplitudy i od kompenzace. V důsledku změny tření popsané v 4.4.1 se mění kvalita vyhlazení v závislosti na tom, zda rychlost v dané chvíli roste, nebo klesá. V případě rostoucí rychlosti je průběh více hladký. Při klesající dochází ke skokovým pádům rychlosti.

M_{d1}	0,00584 Nm
M_{d2}	0,0056 Nm
M_o	0,0019 Nm
φ_1	-0,32 rad
φ_2	2,00 rad

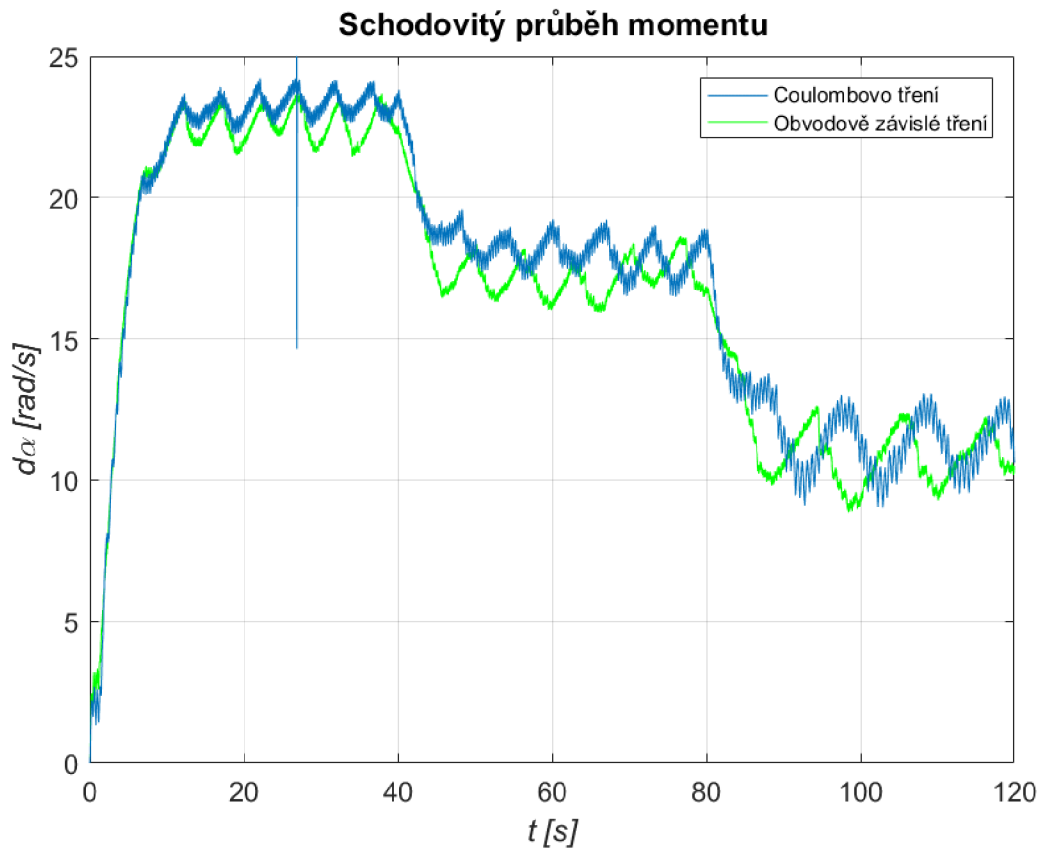
Tab. 6: Parametry druhého modelu tření



Obr. 30: Obvodově závislé tření



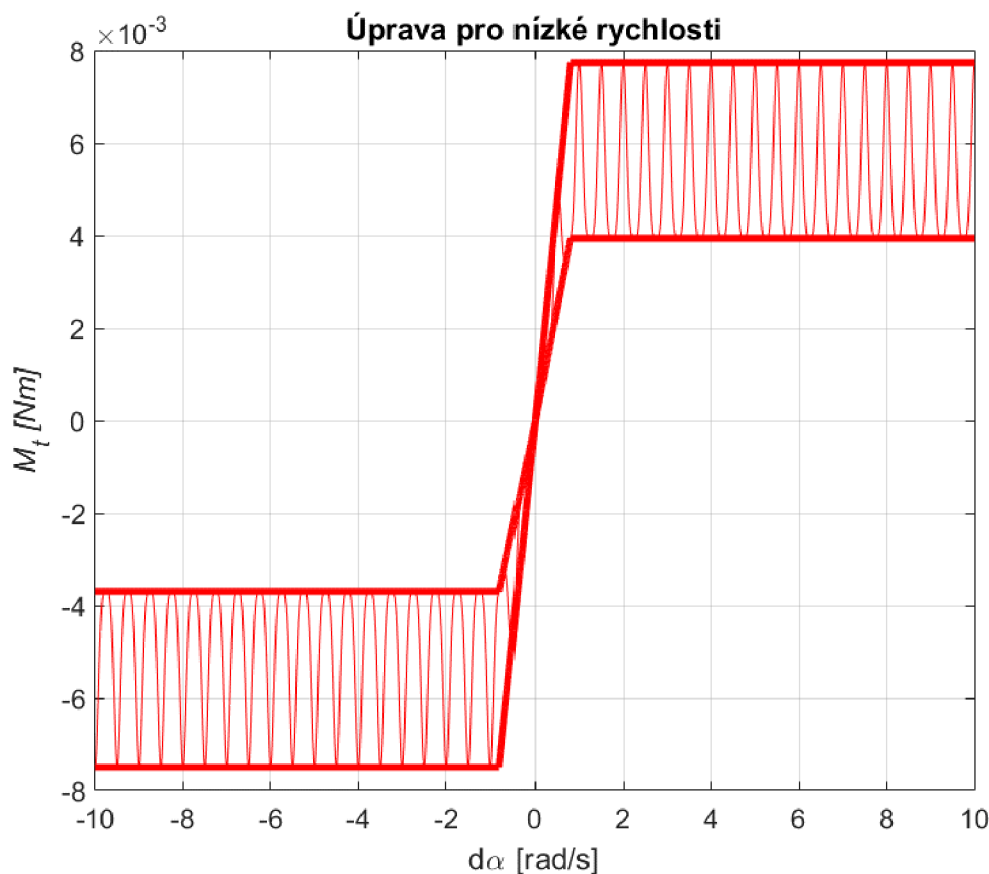
Obr. 31: Testování druhého modelu



Obr. 32: Schodovitý průběh vyhlazené a nevyhlazené rychlosti

c) Úprava pro nízké rychlosti

Hlavním problémem druhého modelu je skoková změna hodnot tření při průchodu nulovou rychlostí. Tento jev působí negativně při řízení v inverzní poloze, kde se znaménko rychlosti mění velice frekventovaně. Kompenzace tření tedy přispívá k rozkmitání soustavy. Je vhodné změnit model tak, aby se tření v celém rozsahu hodnot měnilo spojitě. Nejjednodušším řešením tohoto problému je při úhlových rychlostech okolo nuly třecí moment snižovat. V této oblasti je kompenzace funkcí rychlosti, a to přímo úměrně.



Obr. 33: Tření s úpravou pro nízké rychlosti

d) Zvýšení na statické tření

Dalším faktorem, který je nutno zohlednit, je nárůst tření v nižších rychlostech. Zvyšuje se až na hodnotu momentu statického. Ten byl zjištěn provedením sérií měření s lineárně rostoucím momentem. Pro dostatečný počet bodů po obvodu pro oba směry bylo stanoveno, kdy dochází k odtržení. Výsledky odpovídají sinusové křivce s počáteční výchylkou totožnou jako u tření dynamického.

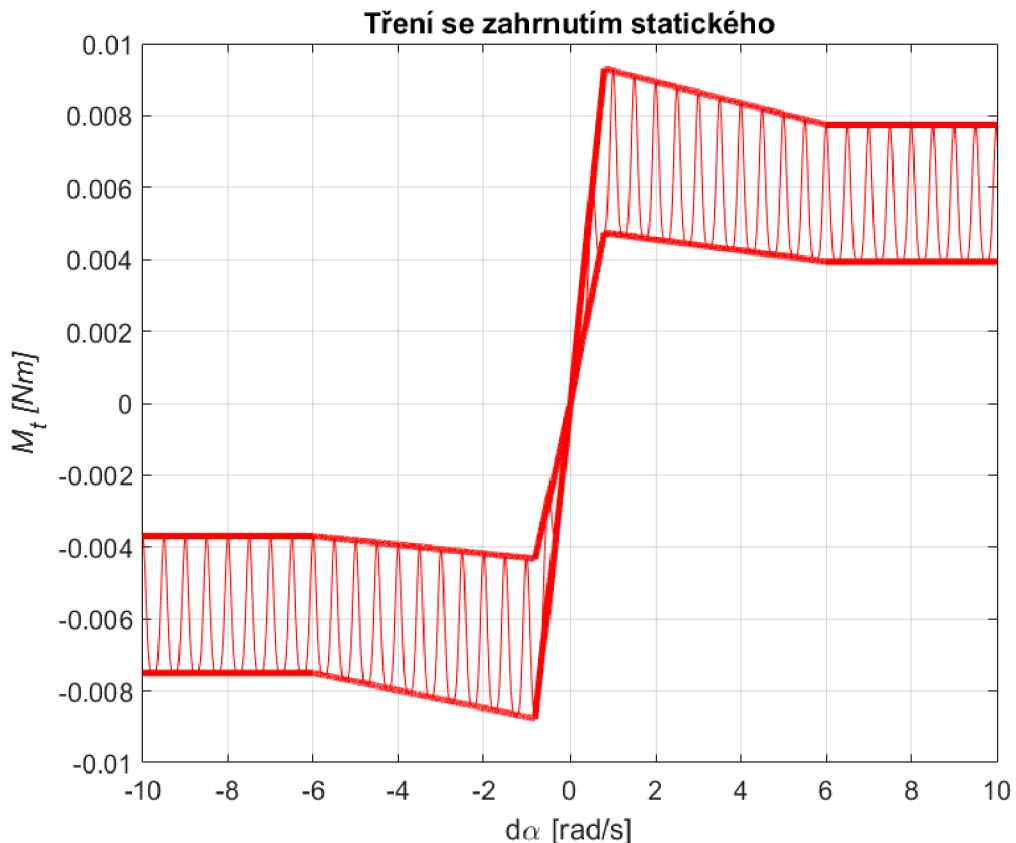
Tření při nízkých rychlostech roste s exponenciální závislostí, která odpovídá Stribeckově křivce. Stanovení parametrů exponenciály probíhá ideálně při konstantních rychlostech, toto je vzhledem k proměnnému tření velice náročné. Z tohoto důvodu bylo provedeno zjednodušení. Předpokládáme, že změna třecího momentu je lineárně závislá na rychlosti. Tímto krokem nedochází k podstatnému zhoršení modelu. Stanoví se

hodnota koeficientu k z rovnice (54), který odpovídá sklonu křivky tření. Totožný koeficient bude použit i pro zvětšování obvodové složky rychlosti.

$$k_{1,2} = \frac{M_{s1,2} - M_{d1,2}}{\dot{\alpha}_r}, \quad (54)$$

kde $\dot{\alpha}_r = 6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ je referenční úhlová rychlost.

$\dot{\alpha}_r$ je definována jako úhlová rychlost, pod níž začíná docházet k prvním příznakům změny tření a dynamické tření již nezvládá problematiku postihnout tak jako ve vyšších rychlostech.



Obr. 34: Tření se zahrnutím statického

Tento model, stejně jako předchozí, nezpůsobuje žádné rozdíly oproti druhému při experimentech s fixovaným ramenem a konstantními momenty. Očekává se, že by se však měla projevit zvýšená kvalita řízení.

e) Reset Integrator model

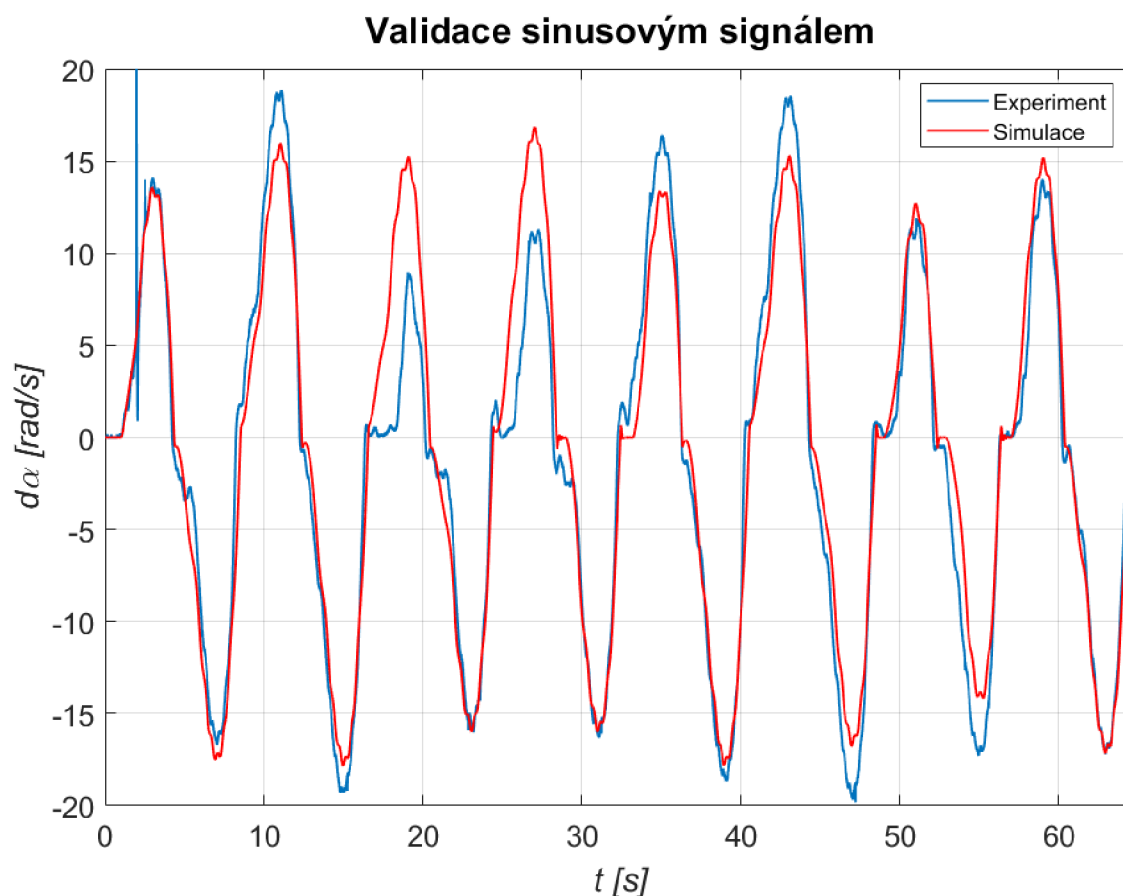
Je jediným zástupcem dynamických modelů v této práci. Byl zvolen Reset Integrator model. Důvodem je poměrně lehké naladění parametrů a především nenáročnost na výpočet. Parametr a odpovídá nárůstu statického momentu oproti dynamickému. Ač jsou hodnoty pro oba směry rotace různé, poměr mezi oběma zůstává velice podobný, proto není třeba odlišovat parametr a v závislosti na směru pohybu.

$$a = \frac{M_{s1}}{M_{d1}} - 1 = \frac{0,0072}{0,00584} - 1 = 0,23 \quad (55)$$

Zbylé dva parametry z_0 a σ_1 byly zjištěny porovnáním experimentálních a simulačních dat pro sinusové vlny o různých frekvencích a amplitudách. Byl využit *Parameter Estimation Toolbox*, optimalizované hodnoty pro sadu měření zaznamenaný a z nich byly spočteny průměrné hodnoty, které se následně použily. Parametry tření byly využity z druhého modelu.

a	0,23
z_0	0,011
σ_1	0,0012

Tab. 7: Parametry Reset Integrator modelu



Obr. 35: Validace sinusovým signálem

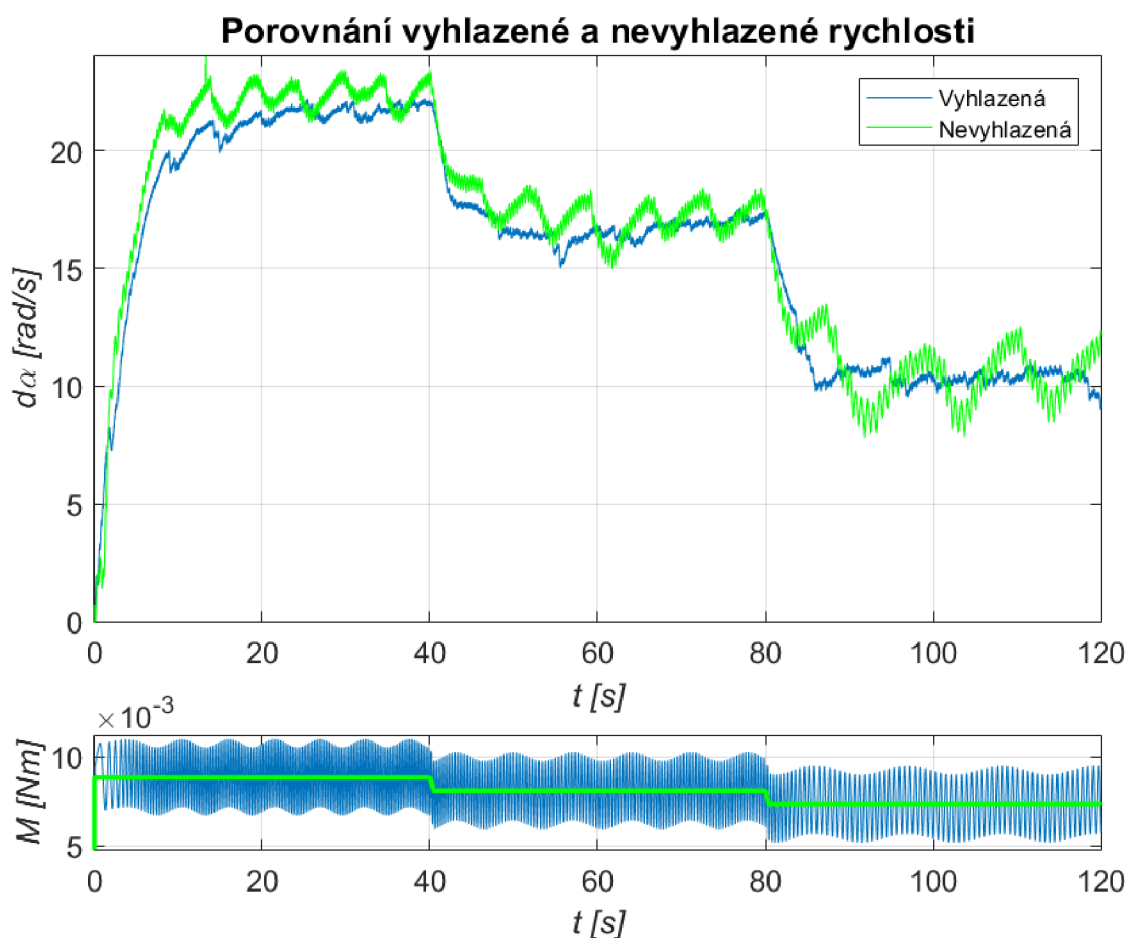
Ověření funkčnosti modelu probíhalo sinusovým signálem (obr. 35). Ač je zřejmé, že nedochází k věrnému kopírování experimentálních hodnot úhlových rychlostí simulačním modelem, je možné tento model označit za kvalitní. Okamžik odlepení a maximální rychlost ovlivňuje úhlová výchylka při průchodu sinusového signálu nulovou hodnotou. Jelikož není možné model vytvořit tak přesně, aby se tyto výchylky vždy dokonale shodovaly, je nutno na validaci pohlížet spíše statisticky. Při dostatečně dlouhém experimentu lze porovnat různé průběhy, které nulové rychlosti dosáhly v přibližně stejných výchylkách. Takovéto průběhy si odpovídají jak maximální úhlovou

rychlostí, tak okamžikem utržení. Například u první kladné vlny, kdy jsou počáteční výchylky stejné, jsou experimentální i simulační rychlosti prakticky totožné.

4.4.3. Závislost na teplotě

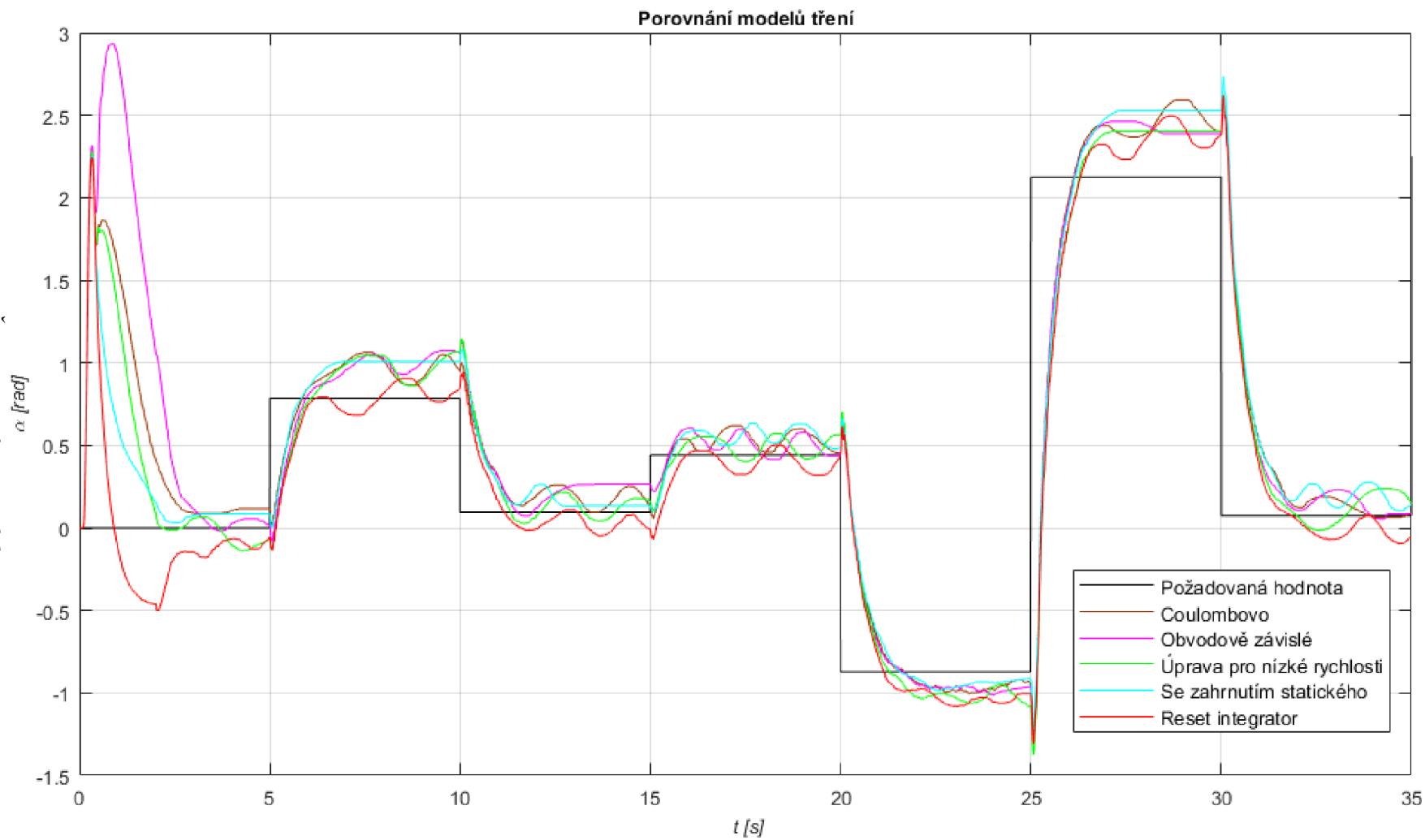
V průběhu odhadu třecích parametrů bylo zjištěno, že se hodnoty mění i v důsledku změn okolní teploty. Maziva ve všech technických aplikacích projevují teplotní závislost, kdy při růstu teploty klesá viskozita, a tím pádem dochází i k lepšímu mazání styčných ploch a snížení tření. Rotační inverzní kyvadlo je mazáno tuhým mazivem a zahřívání při provozu se projevuje jen mírně, protože nedochází k významnější rotaci a doba provozu modelu nebývá dlouhá. Významnější je tedy okolní teplota. Poprvé byl tento problém pozorován u dříve popsaného experimentu s rampou. Ten byl proveden v zimních měsících a při ověřování jeho výsledků v květnu byla zjištěna poměrně významná odchylka. Musel být zopakován. Dynamická hodnota třecího momentu po směru hodinových ručiček poklesla z $M_d = 0,0068 \text{ Nm}$ na $M_d = 0,00584 \text{ Nm}$. To znamená rozdíl zhruba 15 %. U všech modelů tření byly parametry nastaveny na nižší, protože se jeví jako vhodnější volba pro kompenzaci. Pokud by došlo k předimenzování, následkem může být zesílení vibrací a kmitání.

4.4.4. Porovnání



Obr. 36: Porovnání vyhlazené a nevyhlazené rychlosti

Na obr. 36 je spojení druhého modelu s kompenzací tření o nižší frekvenci, kdy tyto dvě sinusové vlny byly přidávány jako vstup do motoru. Tím došlo k vyhlazení rychlostního profilu. Podařilo se výrazně snížit obě amplitudy, plně lineárního průběhu však není možné dosáhnout. Zlepšení je možné ověřit porovnáním s druhým průběhem, kdy ani jedna závislost kompenzována nebyla.

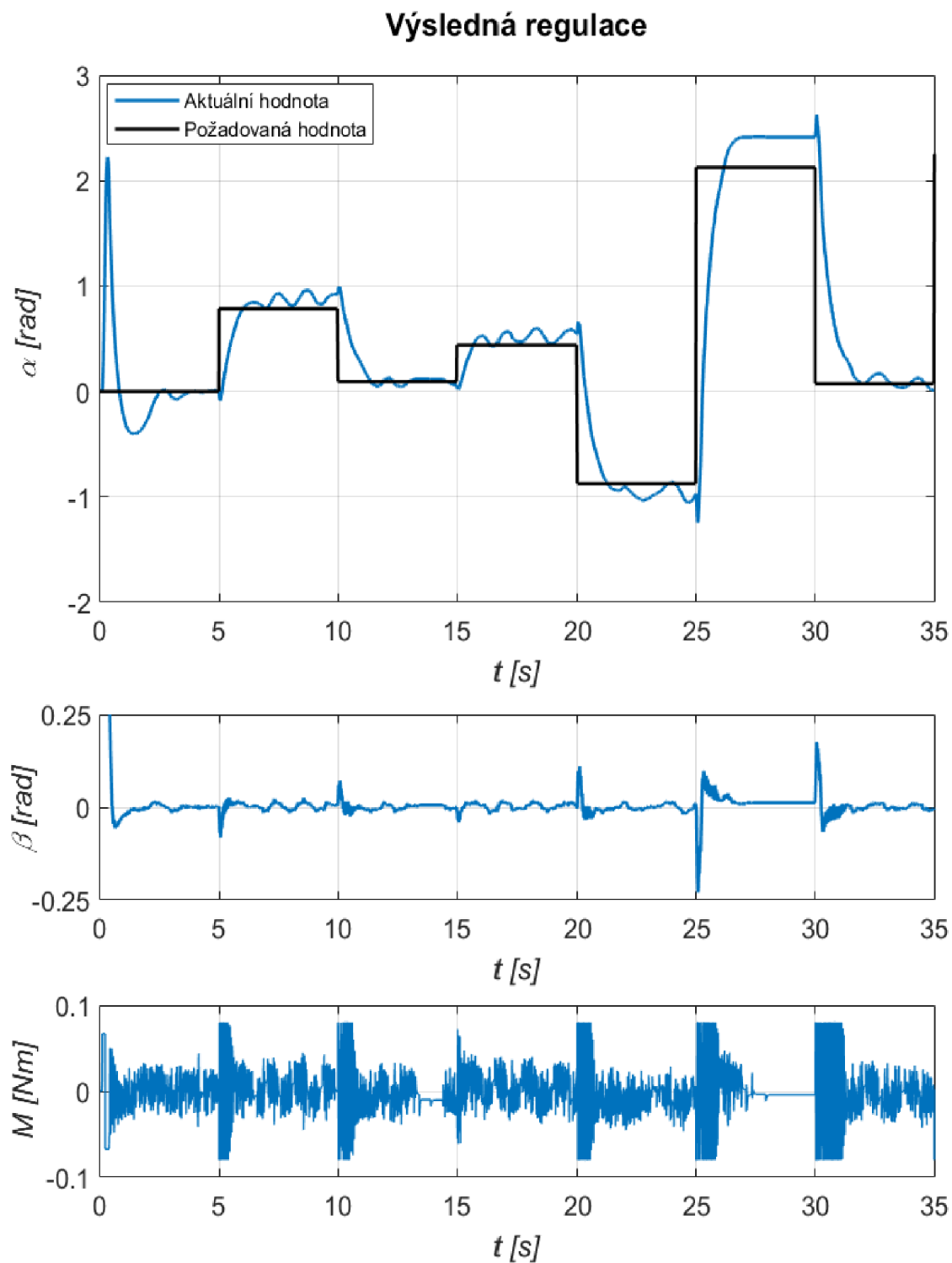


Na obr. 37 je znázorněno porovnání všech modelů tření při řízení. Přehledné grafy pro každý model zvlášť se nachází v přílohách. Všechny modely jsou si docela podobné, žádný z nich nevybočuje v negativním slova smyslu. U prvních dvou, které mají skokovou změnu třecího momentu při změně směru rychlosti, při některých parametrech stavového řízení a při řízení bez pozorovatele docházelo k rozkmitání. Pro zvolené parametry k tomuto téměř nedochází. Při pohledu na graf je okem pozorovatelné, že k nejlepší regulaci dochází při použití Reset Integrator modelu. Proto byl vybrán jako nejlepší a použit dále.

4.4.5. Přidání šumu

Ač se většina této práce zabývala tvorbou vylepšených třecích modelů, nebylo možné dosáhnout stavu, kdy je tření, obzvláště v nízkých rychlostech, popsáno dokonale nebo téměř dokonale. V předchozí práci [3] bylo pracováno s úvahou, že pokud se k modelu tření přidá i šum s malou amplitudou a vysokou frekvencí, dochází při dobře navržených parametrech ke zlepšení regulace. Pozitivní dopad šumu se projevuje obzvláště v úhlových rychlostech ramene blížících se nule. Tato myšlenka byla aplikována i v této práci, náhodných hodnot se dosáhlo pomocí bloku *Random Number*. Na modelu tření zvoleném v předchozím bodě byly testovány různé sady parametrů. Jejich porovnání se nachází v následujícím grafu. Jako nejvýhodnější se jeví kombinace $f = 200 \text{ Hz}$, $\text{amp} = 0,00004 \text{ Nm}$.

5. Výsledné průběhy



Obr. 38: Výsledná regulace

Při pohledu na regulaci polohy ramene je zjevné, že kvalita regulace zaostává za očekávaními. Nepodařilo se kvalitou zopakovat průběh z práce [3] navzdory tomu, že parametry stanovené v této práci se jeví lépe než v [3]. Momenty setrvačnosti i viskózní tlumení se po verifikacích zdály býti kvalitněji odhadnutými. Ověření třecích modelů na fixovaném rameni při konstantních i sinusově se měnících momentech proběhlo rovněž úspěšně. Předpokládalo se tedy, že ke zlepšení řízení skutečně dojde, protože popis tření je lepší, než tomu bylo doposud.

Regulátor byl navržen tak, aby se kompletně zamezilo kmitům o vyšších frekvencích. Pokud se zvýšením vah odpovídajících stavů do jisté míry kmitání připustilo, regulace natočení ramene se zpřesnila. Z grafů v [3] není zřejmé, zda ke kmitání dochází. Proto byl otestován regulátor o totožných parametrech. Zjistilo se, že ten je vysoce nestabilní a okamžitě po převzetí regulace kyvadlo shodí. To může mít dvě příčiny. Parametry jsou moc vysoké, proto byly sníženy tak, aby byl zachován poměr mezi vahou na jednotlivých stavech. V tomto případě ke kmitání docházelo. Druhá příčina je pravděpodobnější. *Windows* není real time operační systém a zpoždění, ke kterému docházelo u dat ze stavového pozorovatele, způsobilo nestabilitu soustavy, přestože byla ve Správci úloh *Windows* priorita *Matlabu* nastavena na vysokou. Práce [3] k experimentům používala real time *External mode*. To však bylo zjištěno příliš pozdě na to, aby se stihlo vše napravit.

Navrhnutý regulátor má přesto i svoje výhody. Jak již bylo zmíněno, ke kmitání nedochází. Dále se daří kyvadlo ustálit v inverzní poloze. Tento jev je častější, pokud není přidán šum. Ač ladění koeficientů bylo věnováno nemalé množství času, nepodařilo se navrhnout regulátor s vahou na poloze ramene takovou, aby se při zachování těchto bezesporu pozitivních vlastností kyvadlo pohybovalo blíže požadované poloze.

6. Závěr

Předmětem bakalářské práce bylo zkoumání rotačního inverzního kyvadla. V teoretické části byly popsány jednotlivé části kyvadla, kterými jsou konstrukce, motor, sensorika a výkonový obvod. V dalších podkapitolách se nachází informace o tom, jak kyvadlo dostat do inverzní polohy (swing up). K hlubšímu zkoumání byly vybrány tyto tři způsoby: momentový skok, energetická metoda a PD metoda. Tyto metody byly podrobněji rozebrány z hlediska toho, jak fungují a jak se zjišťují jejich parametry. Poté se práce věnuje příčinám a důsledkům tření, na to navazují nejběžnější modely, kterými se tření popisuje.

V praktické části bylo nejprve kyvadlo matematicky popsáno použitím Lagrangeových rovnic II. druhu. Ty posloužily k modelování v prostředí *Simulink*, ve kterém probíhaly veškeré experimenty. Zopakovaly se pokusy cílící na odhad parametrů. Mezi ně patří volný pád kyvadla, případně experiment s rampou. Oproti minulým pracím vyšly parametry nižší a zdá se, že jejich odhad je kvalitnější. To potvrdila verifikace sinusovým signálem, čímž byl umožněn přechod k další kapitole. Tou je zkoumání tření. Jedná se o nejobsáhlejší část celé práce s největší časovou dotací. Ve snaze co nejpřesněji identifikovat průběh tření se využilo řady experimentů s konstantními momenty, skokově se měnícími momenty, sinusově se měnícími momenty a jejich variací. Všechny experimenty se prováděly při fixovaném kyvadle kvůli eliminaci zrychlení od jeho pohybu. Některé experimenty využívaly porovnání se simulačními daty a optimalizaci parametrů pomocí *Parameter Estimation Toolboxu*. Zbytek se prováděl přidáním tření na vstup do motoru. Nejdůležitějším výstupem je popsání tření měnícího se po obvodu, které doposud při řízení způsobovalo největší problémy. Jednotlivé experimenty ověřující modely tření ukázaly, že shoda mezi realitou a simulací je vysoká, tudíž se zdá, že parametry modelů byly navrženy s dostatečnou přesností.

Přestože se neočekávalo, že by k vyšvihnutí do horní polohy byla vytvořena metoda efektivnější než v minulých pracích, byly kromě ní navrženy dvě další metody. Dříve používaná byla principiálně zachována, pouze se upravily parametry, aby vyšvihnutí bylo co nejkvalitnější. Druhou metodou je energetická, se kterou se u rotačních inverzních kyvadel setkáváme frekventovaně. Oproti momentovému skoku trvalo vyšvihnutí déle, ale rychlost v inverzní poloze byla podstatně menší, díky čemuž by mohl být odstraněn úvodní regulátor. Třetí metoda využívá dvou nestabilních PD regulátorů. Z těchto tří porovnávaných metod má nejhorší parametry jak v době swing upu, tak v rychlosti v inverzní poloze.

Předchozí poznatky se měly zužitkovat při řízení. Byly testovány různé metody řízení, jmenovitě kaskádovitě zapojené PD regulátory, stavové řízení bez i se stavovým pozorovatelem. Od PD řízení se brzy upustilo a zvolilo se stavové. Bez pozorovatele se nedařilo navrhnout parametry tak, aby docházelo ke kvalitní regulaci bez kmitání. Proto se využil pozorovatel a upravil se tak, aby byl použit pouze v blízkosti inverzního bodu. Matice stavového řízení navržená LQR metodou reguluje kyvadlo bez kmitů o vyšší frekvenci a dokáže ustálit kyvadlo v jedné poloze. Nepodařilo se upravit koeficienty tak, aby toto bylo zachováno a zároveň se dosáhlo regulace polohy ramene alespoň tak kvalitní jako v práci [3]. Pokud by se použilo real time řízení, je možné, že by vymizely problémy vzniklé při snaze aplikovat vyšší váhu na polohu a rychlost ramene.

7. Seznam použitých zkratk

Zkratky

CPR – counts per revolute

D/A – digitálně analogový převodník

I/O – input/output

LQR – linear quadratic regulation

PID – proporcionálně-derivační (řízení)

VUT – Vysoké učení technické v Brně

FSI – Fakulta strojního inženýrství

CW – clockwise

CCW – counter clockwise

8. Zdroje

- [1] - KLUSÁČEK, Ondřej. *Modelování, identifikace a řízení rotačního kyvadla*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 67 s. Vedoucí Ing. Robert Grepl, Ph.D.
- [2] - JAJTNER, Jan. *Návrh vestavěného systému pro řízení výukového modelu rotačního kyvadla*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 57 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Robert Grepl, Ph.D.
- [3] - ŠNAJDER, Jan. *Realizace řízení laboratorního modelu rotačního inverzního kyvadla*. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 66 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Martin Brablec
- [4] - ÅSTRÖM, Karl, Johan a Kazuo FURUTA. *Swinging up a pendulum by energy control* [online]. 2000, **36**(2), 287-295 [cit. 2018-05-25]. ISSN 0005-1098. Dostupné z: <https://www-sciencedirect-com.ezproxy.lib.vutbr.cz/science/article/pii/S0005109899001405>
- [5] – MELBA MARY, P. a N. S. MARIMUTHU. *Minimum time swing up and stabilization of rotary inverted pendulum using pulse step control* [online]. 2009. Dostupné z: http://ijfs.usb.ac.ir/pdf_197_db94d0141b1671df88589cda49c3502e.html
- [6] - OLSSON, H., K.J. ÅSTRÖM, C. CANUDAS DE WIT, M. GÄFVERT a P. LISCHINSKY. *Friction Models and Friction Compensation* [online]. Elsevier, 1998, 4(3), 176-195 [cit. 2018-05-19]. ISSN 0947-3580.
- [7] – CHOU, K. Y., CHEN Y. P. *Energy based swing-up controller design using phase plane method for rotary inverted pendulum*. 2014. Dostupné z: <https://ieeexplore.ieee.org/document/7064438/?reload=true>
- [8] - SKALICKÝ, Jiří. *Teorie řízení 1*. Brno: Vysoké učení technické, 2002. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-2112-6.
- [9] - AUTONICS CORPORATION, *E30S Series*, 2006. Dostupné z: http://www.ehaegypt.com/uploads/E30S%20series_37mnyih3.pdf

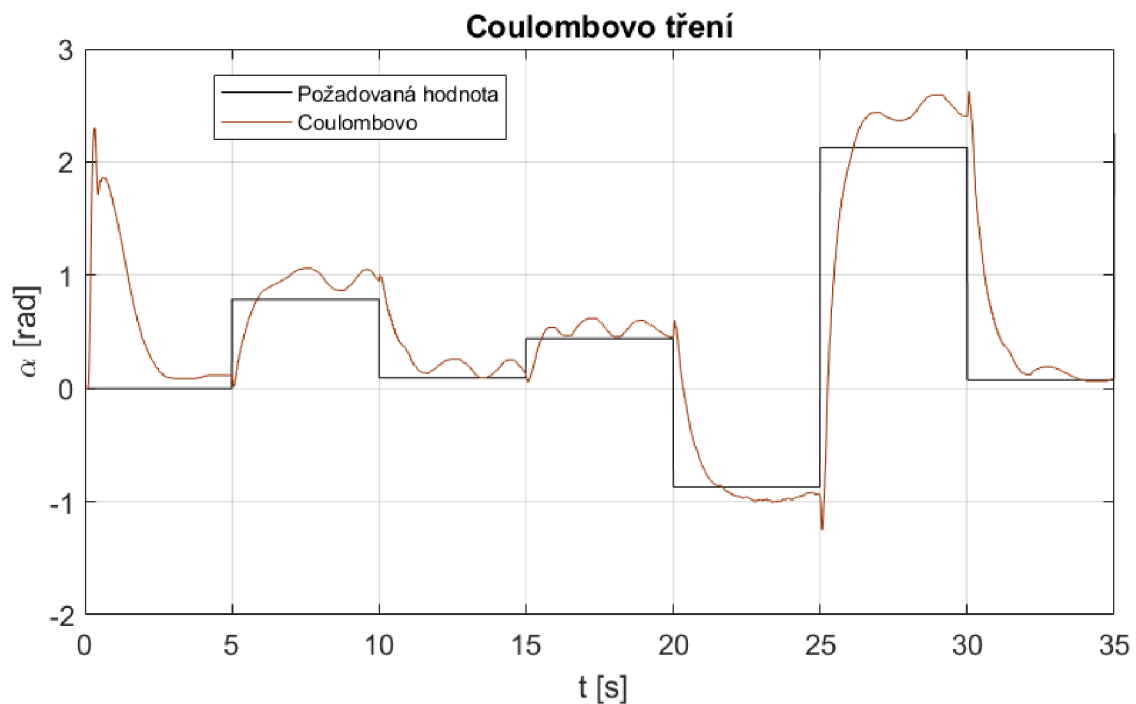
9. Přílohy

9.1. Elektronické

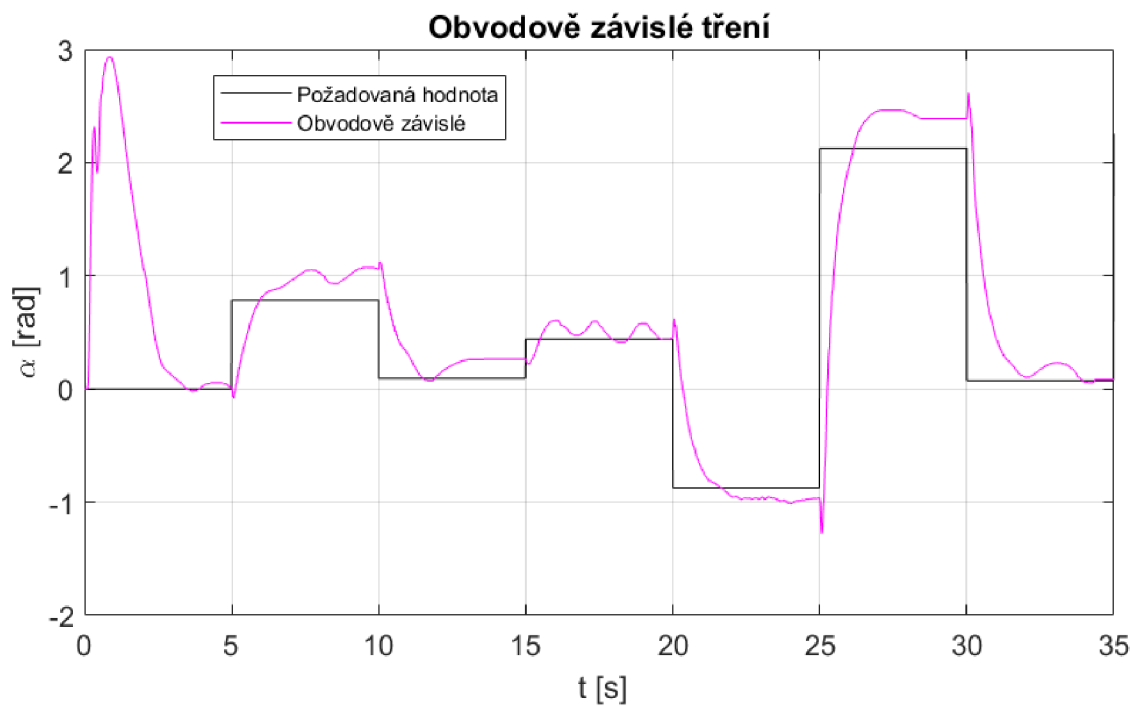
Přílohou práce je CD obsahující:

- *Data.m* – skript obsahující parametry modelu a navrhující stavové řízení, nutno spustit před spuštěním ostatních souborů
- *Rizeni_final.slx* – řízení reálného modelu pomocí karty MF624, součástí jsou tři swing upy, pět modelů tření, dva regulátory, stavový pozorovatel
- *Testovani_treni.slx* – porovnání experimentálních a simulačních dat pro všechny modely tření a různé vstupní signály
- Elektronickou verzi bakalářské práce

9.2. Grafické



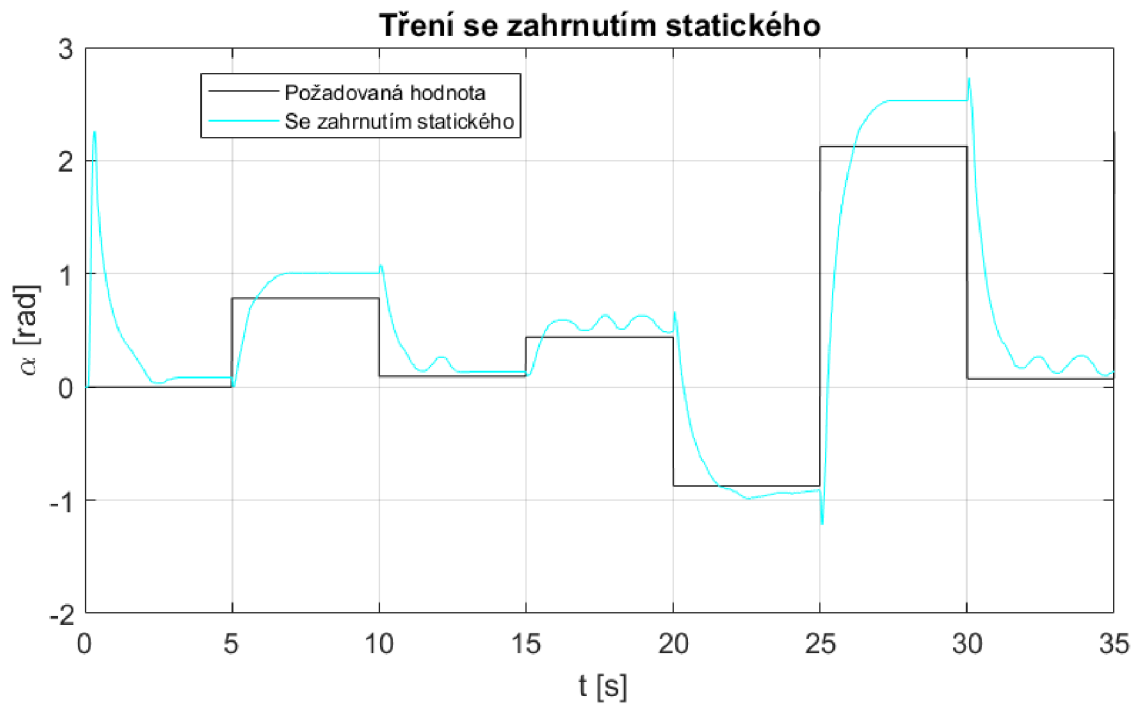
Obr. 39: Řízení s Coulombovým modelem tření



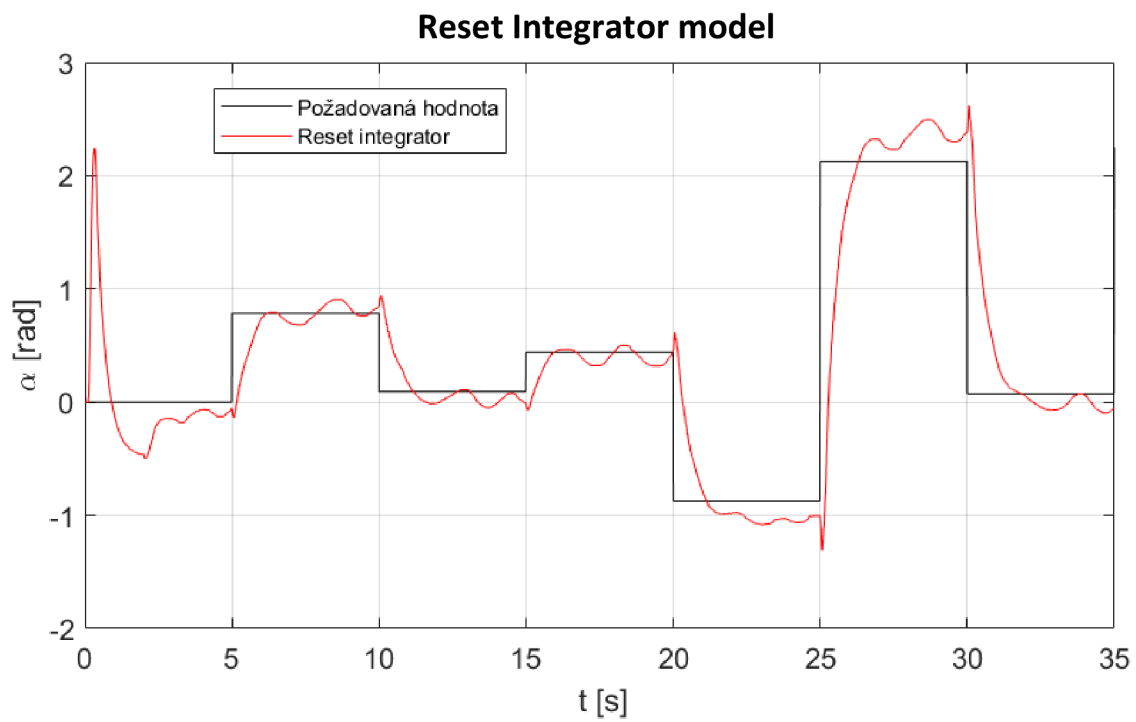
Obr. 40: Řízení s obvodově závislým modelem tření



Obr. 41: Řízení s modelem tření s úpravou pro nízké rychlosti



Obr. 42: Řízení s modelem tření se zahrnutím statického



Obr. 43: Řízení s Reset Integrator modelem