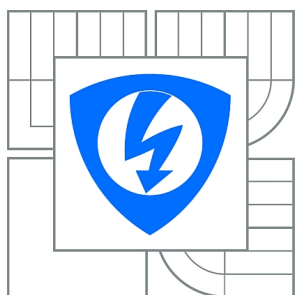


**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH  
TECHNOLOGIÍ**

**ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY**

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

## **ESTIMACE ORIENTACE MULTIKOPTÉR**

ATTITUDE ESTIMATION OF MULTICOPTERS

**DIZERTAČNÍ PRÁCE**

DOCTORAL THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Mgr. RADEK BARÁNEK**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**prof. Ing. FRANTIŠEK ŠOLC, CSc.**

BRNO 2015

## **ABSTRAKT**

Tato dizertační práce se zabývá estimací orientace multikoptér. Především je zkoumáno zahrnutí dynamického modelu multikoptéry do estimačního algoritmu za účelem zpřesnění odhadnuté orientace. Ukazuje se, že zahrnutí dynamického modelu multikoptéry přináší velké výhody oproti konkurenčním algoritmům, kterými jsou GPS/INS či komplementární filtr. Cílem studie je mimo jiné testování možnosti odhadovat parametry dynamického modelu multikoptéry za běhu algoritmu. Dále je také studován vliv větru na přesnost estimované orientace. Algoritmy jsou založeny na nelineární verzi Kalmanova filtru. Celkově zahrnutí dynamického modelu multikoptéry přináší možnost odhadovat orientaci s omezenou chybou i bez nutnosti pravidelného měření absolutní pozice. Výsledkem práce je také nový algoritmus, který nevyžaduje kromě dat ze senzorů žádné pravidelné informace od multikoptéry (např. řídicí signály motorů).

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Estimace orientace, Multikoptéry, Kalmanův filtr

## **ABSTRACT**

This dissertation deals with attitude estimation of multicopters. Mainly the use of multicopter dynamic model in order to gain accuracy is investigated. It shows that the usage of multicopter dynamic model brings advantage contrary to other known algorithms for attitude estimation such as GPS/INS or complementary filter. Besides others one goal is to study the possibilities to estimate the parameters of dynamic model on-line. Further the influence of wind speed to estimation accuracy is also investigated. The algorithms are based on a nonlinear Kalman filter. The use of dynamic model of multicopters reveals the possibility of estimating attitude with bounded error even without periodic measurement of absolute position. One of the results of the dissertation is a new algorithm which does not require information about the thrust of multicopter propellers.

## **KEYWORDS**

Attitude estimation, Multicopters, Kalman filter

BARÁNEK, Radek *Estimace orientace multikoptér*: dizertační práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav Automatizace a Měřicí techniky, 2015. 110 s. Vedoucí práce byl prof. Ing. František Šolc, CSc.

## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou doktorskou práci na téma „Estimace orientace multikoptér“ jsem vypracoval(a) samostatně pod vedením vedoucího doktorské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor(ka) uvedené doktorské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této doktorské práce jsem neporušil(a) autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl(a) nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom(a) následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno .....

.....

podpis autora(-ky)

## PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu doktorského studia panu prof. Ing. Františkovi Šolcovi, CSc. za odborné vedení, konzultace a trpělivé motivování k práci.

Brno .....

.....

podpis autora(-ky)

# OBSAH

<b>Seznam symbolů, veličin a zkratek</b>	<b>11</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>13</b>
1.1 Cíle práce . . . . .	13
1.2 Členění práce . . . . .	14
<b>2 Úvod do problematiky estimace orientace</b>	<b>15</b>
2.1 Nomenklatura . . . . .	15
2.1.1 Navigační (referenční) souřadná soustava . . . . .	15
2.1.2 Tělesová souřadná soustava . . . . .	15
2.1.3 Matematický zápis . . . . .	16
2.2 Vyjádření orientace (parametrizace grupy rotací) . . . . .	16
2.3 Senzory používané pro estimaci orientace . . . . .	19
2.4 Současné metody estimace orientace . . . . .	25
2.4.1 Komplementární filtry . . . . .	25
2.4.2 GPS/INS . . . . .	28
2.4.3 Užití dynamického modelu . . . . .	30
<b>3 Model Multikoptéry</b>	<b>32</b>
3.1 Dynamická část . . . . .	33
3.1.1 Motory s vrtulemi . . . . .	34
3.1.2 Aerodynamický odpor . . . . .	35
3.1.3 Výstup dynamické části . . . . .	35
3.2 Kinematická část . . . . .	36
3.2.1 Rotační pohyb . . . . .	36
3.2.2 Translační pohyb . . . . .	36
3.3 Modely senzorů . . . . .	37
3.3.1 Univerzální chybový model senzoru . . . . .	39
<b>4 Algoritmy estimace orientace</b>	<b>41</b>
4.1 Rozšířený Kalmanův filtr . . . . .	41
4.2 Stavové veličiny a rovnice . . . . .	44
4.3 GPS/INS . . . . .	47
4.4 Použití dynamického modelu . . . . .	49
4.4.1 Základní algoritmus založený na modelu multikoptéry . . . . .	52
4.4.2 Algoritmus založený na modelu multikoptéry s automatickým odhadem parametrů . . . . .	53

4.4.3	Algoritmus založený na modelu multikoptéry bez využití řídicích signálů motorů . . . . .	54
4.5	Shrnutí kapitoly . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Simulace</b>	<b>60</b>
5.1	Testovací trajektorie . . . . .	60
5.2	Nastavení parametrů modelu multikoptéry a senzorů pro generování dat . . . . .	61
5.3	Nastavení parametrů algoritmů a simulace . . . . .	63
5.4	Kvantitativní hodnocení algoritmů . . . . .	65
5.5	Způsob prezentace výsledků . . . . .	66
5.6	Výsledky simulací . . . . .	67
5.6.1	Citlivost algoritmů na nepřesnosti parametrů . . . . .	73
5.6.2	Vliv parametrů senzorů na přesnost algoritmů . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Testy s reálnými daty</b>	<b>78</b>
<b>7</b>	<b>Vliv větru</b>	<b>81</b>
7.1	Model větru . . . . .	82
7.2	Vliv větru na přesnost orientace . . . . .	84
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>86</b>
	<b>Literatura</b>	<b>88</b>
	<b>Seznam příloh</b>	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>Grafy vybraných veličin pro testovací trajektorie</b>	<b>96</b>
A.1	Trajektorie č. 1 - Klasický let na traťové body . . . . .	96
A.2	Trajektorie č. 2 - Dynamický let . . . . .	97
A.3	Trajektorie č. 3 - Statický let . . . . .	98
A.4	Trajektorie č. 4 - Statický let s kalibračním manévrem . . . . .	99
<b>B</b>	<b>Grafy stavových veličin pro algoritmus ModelBaro + Param - dynamická trajektorie</b>	<b>100</b>
B.1	Eulerovy úhly . . . . .	100
B.2	Biasy gyroskopu . . . . .	101
B.3	Biasy akcelerometru . . . . .	102
B.4	Rychlost . . . . .	103
B.5	Parametry odporu vzduchu . . . . .	104

<b>C</b>	<b>Vstupy a výsledky pro reálnou trajektorii</b>	<b>105</b>
C.1	Grafy vybraných veličin pro reálnou trajektorii . . . . .	105
C.2	Grafy odhadnutých stavových veličin pro reálnou trajektorii (algorit- mus Model+Param) . . . . .	107
C.2.1	Eulerovy úhly . . . . .	107
C.2.2	Rychlost . . . . .	108
C.2.3	Biasy gyroskopu . . . . .	109
C.2.4	Biasy akcelerometru . . . . .	109
C.2.5	Parametry odporu vzduchu . . . . .	110
C.2.6	Parametr přepočtu úhlové rychlosti vrtule na tah . . . . .	110

# SEZNAM OBRÁZKŮ

2.1	Ilustrace významu jednotlivých Eulerových úhlů - kurz . . . . .	18
2.2	Ilustrace významu jednotlivých Eulerových úhlů - podélný sklon . .	19
2.3	Ilustrace významu jednotlivých Eulerových úhlů - příčný sklon . . .	20
2.4	Vliv bílého šumu a biasu gyroskopu na spočítaný úhel . . . . .	21
2.5	Výpočet úhlu náklonu ze znalosti vertikálního směru . . . . .	22
2.6	Ilustrace jednotlivých os navigační, tělesové a horizontálně zarovnané souřadné soustavy (pohled z vrchu) . . . . .	24
2.7	Schéma komplementárního filtru pro estimaci orientace . . . . .	27
3.1	Mechanické schéma multikoptéry se šesti motory . . . . .	32
3.2	Rozdělení matematického modelu multikoptéry . . . . .	33
3.3	Schéma dynamické části modelu . . . . .	33
3.4	Schéma kinematické části modelu . . . . .	36
3.5	Navázání senzorů na model multikoptéry . . . . .	37
3.6	Ilustrace stochastických chyb senzorů . . . . .	40
4.1	Schéma predikčního modelu algoritmu GPS/INS . . . . .	47
4.2	Základní schéma predikčního modelu algoritmu zahrnujícího model multikoptéry . . . . .	50
4.3	Zpětná vazba při použití dynamického modelu . . . . .	51
4.4	Schéma predikčního modelu základního algoritmu s modelem multikoptéry . . . . .	51
4.5	Schéma predikčního modelu algoritmu bez použití řídicích signálů motorů . . . . .	55
5.1	Simulační schéma testování algoritmů . . . . .	60
5.2	Průběh chyb pro jednotlivé Eulerovy úhly - algoritmus GPS/INS - klasická trajektorie . . . . .	68
5.3	Průběh chyb pro jednotlivé Eulerovy úhly - simulace výpadku GPS signálu v čase 60 s . . . . .	68
5.4	Průběh chyb pro jednotlivé Eulerovy úhly - algoritmus baseModel - klasická trajektorie . . . . .	70
5.5	Průběh chyb pro jednotlivé Eulerovy úhly - algoritmus modelBaro - klasická trajektorie . . . . .	71
5.6	Průběh chyb pro jednotlivé Eulerovy úhly - algoritmus model + Param - klasická trajektorie . . . . .	72
5.7	Průběh chyb pro odhadnuté koeficienty odporu vzduchu - algoritmus modelBaro + Param - statická trajektorie . . . . .	74
5.8	Průběh chyb pro jednotlivé Eulerovy úhly - algoritmus modelBaro + Param - klasická trajektorie . . . . .	74



5.9	Závislost chyby algoritmů při poruše parametrů odporu vzduchu . .	75
5.10	Závislost chyby algoritmu při poruše parametru přepočtu tahu vrtule - Algoritmus baseModel . . . . .	75
5.11	Výsledky analýzy vlivu parametrů senzorů na přesnost orientace . .	77
6.1	Průběh chyb Eulerových úhlů pro jednotlivé algoritmy . . . . .	80
7.1	Průběh složky vygenerované rychlosti větru a průběh odhadnuté chyby predikce měření akcelerometru . . . . .	83
7.2	Průběh reziduí akcelerometru pro případ bez větru a s větrem . . .	83
A.1	Průběhy vybraných veličin pro trajektorii č. 1 . . . . .	96
A.2	Průběhy vybraných veličin pro trajektorii č. 2 . . . . .	97
A.3	Průběhy vybraných veličin pro trajektorii č. 3 . . . . .	98
A.4	Průběhy vybraných veličin pro trajektorii č. 4 . . . . .	99
B.1	Chyba odhadnuté orientace vyjádřené Eulerovými úhly . . . . .	100
B.2	Průběh skutečné a odhadnuté orientace vyjádřené Eulerovými úhly	100
B.3	Chyba odhadnutých biasů gyroskopu . . . . .	101
B.4	Průběh skutečných a odhadnutých biasů gyroskopu . . . . .	101
B.5	Chyba odhadnutých biasů akcelerometru . . . . .	102
B.6	Průběh skutečných a odhadnutých biasů akcelerometru . . . . .	102
B.7	Chyba odhadnuté rychlosti . . . . .	103
B.8	Průběh skutečné a odhadnuté rychlosti . . . . .	103
B.9	Chyba odhadnutých parametrů odporu vzduchu . . . . .	104
B.10	Průběh skutečných a odhadnutých parametrů odporu vzduchu . . .	104
C.1	Průběhy vybraných referenčních veličin pro reálnou trajektorii . . .	105
C.2	Průběhy hodnot gyroskopu a akcelerometru pro reálnou trajektorii	106
C.3	Chyba odhadnuté orientace vyjádřené Eulerovými úhly . . . . .	107
C.4	Průběh referenční a odhadnuté orientace vyjádřené Eulerovými úhly	107
C.5	Chyba odhadnuté rychlosti . . . . .	108
C.6	Průběh skutečné a odhadnuté rychlosti . . . . .	108
C.7	Průběh odhadnutých biasů gyroskopu . . . . .	109
C.8	Průběh odhadnutých biasů akcelerometru . . . . .	109
C.9	Průběh odhadnutých parametrů odporu vzduchu . . . . .	110
C.10	Průběh odhadnutého parametru přepočtu úhlové rychlosti vrtule na tah . . . . .	110

# SEZNAM TABULEK

2.1	Vliv externího zrychlení na chybu úhlu . . . . .	23
4.1	Stavové prostory jednotlivých algoritmů . . . . .	58
4.2	Uvažované vstupní veličiny pro jednotlivé algoritmy . . . . .	58
4.3	Uvažované měřené veličiny pro jednotlivé algoritmy . . . . .	58
4.4	Výpočet specifické síly u jednotlivých algoritmů . . . . .	59
5.1	Hodnoty parametrů referenčního modelu multikoptéry použité pro generování pravého stavu . . . . .	62
5.2	Hodnoty parametrů chybových modelů pro jednotlivé senzory - bílý šum a dynamický bias . . . . .	62
5.3	Hodnoty parametrů chybových modelů pro jednotlivé senzory - statický bias a <b>S</b> matice . . . . .	63
5.4	Hodnoty budících šumů procesu náhodné procházky pro stavy parametrů . . . . .	64
5.5	Počáteční variance stavu . . . . .	65
5.6	Výsledky simulací algoritmu GPS/INS pro jednotlivé trajektorie . .	67
5.7	Výsledky simulací základního algoritmu s modelem multikoptéry pro jednotlivé trajektorie - algoritmus baseModel . . . . .	69
5.8	Výsledky simulací algoritmu s modelem multikoptéry bez řídicích signálů motorů - algoritmus modelBaro . . . . .	70
5.9	Výsledky simulací algoritmu s modelem multikoptéry a automatickým odhadem parametrů - algoritmus Model + Param . . . . .	72
5.10	Výsledky simulací algoritmu s modelem multikoptéry bez řídicích signálů motorů s automatickým odhadem parametrů - algoritmus modelBaro + Param . . . . .	73
5.11	Nastavení parametrů senzorů pro analýzu vlivu na přesnost orientace	77
6.1	Výsledky testů algoritmů na reálných datech . . . . .	79
7.1	Vliv větru na přesnost orientace pro jednotlivé algoritmy . . . . .	85

# SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

$\omega$	úhlová rychlost
$\mathbf{f}$	vektor síly
$\mathbf{v}^n$	vektor rychlosti vyjádřený v referenční souřadné soustavě
$\mathbf{v}^b$	vektor rychlosti vyjádřený v tělesové souřadné soustavě
$\mathbf{p}^n$	vektor pozice vyjádřený v referenční souřadné soustavě
$\mathbf{x}$	stavový vektor dynamického systému
$\mathbf{u}$	vektor vstupů dynamického systému
$\mathbf{y}$	vektor výstupů dynamického systému
$\mathbf{P}$	kovarianční matice stavu
$\mathbf{Q}$	kovarianční matice aditivního stavového šumu
$\mathbf{R}$	kovarianční matice aditivního šumu měření
$\Delta t$	perioda vzorkování
$\mathbf{R}_b^a$	Rotační matice ze soustavy $b$ do soustavy $a$
$\phi$	příčný sklon
$\theta$	podélný sklon
$\psi$	kurz
$\sigma$	standardní směrodatná odchylka
$\mathbf{g}$	vektor gravitačního zrychlení
$\mathbf{gyr}^b$	výstupní vektor gyroskopu
$\mathbf{acc}^b$	výstupní vektor akcelerometru
$\mathbf{mag}^b$	výstupní vektor magnetometru
<b>GPS</b>	výstupní vektor GPS přijímače
<i>baro</i>	výstupní hodnota barometru
<b>INS</b>	Inerciální Navigační Systém – Inertial Navigation System

KF	Kalmanův filtr
GM	Gauss-Markovský proces 1. řádu
Std	směrodatná odchylka

# 1 ÚVOD

Autonomní operace strojů se čím dál více stává součástí každodenního života. Výjimku netvoří ani mobilní roboti, mezi které lze řadit i autonomní vzdušné létající prostředky. Bez ohledu na konkrétní typ autonomního stroje je jeho bezproblémová činnost podmíněna dostatečně přesnou znalostí veličin popisující stav daného stroje. Pod těmito veličinami si lze představit např. natočení ramene svařovacího stroje či pozici autonomního automobilu. Tyto veličiny jsou pak spolu s žádanými hodnotami použity řídicím algoritmem pro vygenerování tzv. akčních zásahů, které mají schopnost ovlivňovat daný stroj a tím plnit požadované úkony.

U většiny strojů je určování těchto veličin realizováno pomocí senzoru, který danou veličinu přímo měří. U létajících strojů je vzhledem k autonomnímu provozu nejdůležitější znalost naklonění prostředku vzhledem k lokálnímu horizontu (tzv. orientace) a kurz. Jelikož neexistuje senzor, který by za všech podmínek tyto hodnoty spolehlivě měřil, je třeba využít složitějších algoritmů, které zpracovávají signály z více senzorů pro úspěšné určování veličin popisujících orientaci létajícího prostředku.

Platí pravidlo, že čím přesnější jsou použité senzory, tím jednodušší může být algoritmus, který je zpracovává, aby bylo dosaženo konstantní přesnosti určení orientace. Na druhou stranu nepřesné senzory pak vyžadují velmi komplexní algoritmy a někdy zcela znemožňují dosažení požadovaných přesností. Další možnou variantou je zahrnutí znalostí o konkrétním studovaném systému a vstupních veličin pro zpřesnění odhadu studovaných veličin. Právě posledně zmiňovanou variantou se zabývá tato dizertační práce. Konkrétně se jedná o studium možností, jak lze pomocí přesného matematického modelu zpřesnit odhad orientace multikoptéry (vrtulníky s mnoha pevnými rotory) pomocí standardně používaných senzorů (gyroskop, akcelerometr, magnetometr, tlakoměr, atd.). Pozornost je také věnována vlivu větru na navržené řešení a možnostem jak lze negativní vlivy větru zmírnit.

## 1.1 Cíle práce

Cílem dizertační práce je naučit se, ověřit a prohloubit znalosti v oblasti estimace orientace multikoptéry při použití matematického modelu stroje. Dalším cílem je studovat možnosti odhadu některých parametrů modelu v reálném čase při dané konfiguraci senzorů. Snahou je vytvořit algoritmus, který by v ideálním případě nepotřeboval žádnou konkrétní znalost o dané multikoptéře. Všechny parametry modelu by byly odhadovány za běhu algoritmu. Měření některých parametrů by totiž mohlo být značně složité a náklady na jejich identifikaci by mohly převyšovat náklady ušetřené použitím levnějších senzorů.

Posledním cílem je studovat vliv větru na přesnost navrženého algoritmu pro odhad orientace.

## 1.2 Členění práce

V první části jsou probrány nejpoužívanější způsoby parametrizace orientace. Dále jsou zmíněny standardně používané senzory pro odhad orientace. Následuje přehled známých algoritmů pro odhad orientace nejen multikoptér. Poté je popsán matematický model multikoptéry, který následně slouží pro návrh jednotlivých testovaných algoritmů odhadu orientace uvažujících dynamický model. Součástí této kapitoly je i popis chybových modelů pro jednotlivé senzory uvažované v práci. V následující kapitole je nejprve uveden obecně nelineární Kalmanův filtr a následně jsou představeny jednotlivé algoritmy. Cílem dalších kapitoly je pak ověřit funkčnost těchto algoritmů v simulacích a také na zaznamenaných datech z reálného letu. Cílem poslední kapitoly je pak studium vlivu větru na přesnost odhadnuté orientace.

## 2 ÚVOD DO PROBLEMATIKY ESTIMACE ORIENTACE

Znalost orientace hraje důležitou roli v autonomním řízení létajících prostředků, zejména pro stabilizaci a navigaci. Za účelem stanovení orientace je létající stroj vybaven řadou senzorů fyzikálních veličin. Data z těchto senzorů jsou pak zpracovávána algoritmy, jejichž konkrétní podoba závisí jak na kvalitě použitých senzorů, tak na konkrétním druhu létajícího prostředku. Obecně lze tvrdit, že přesnější senzory umožňují použití jednoduchých algoritmů, zatímco levné, nepřesné senzory vyžadují algoritmy komplexní, které navíc nemusí podávat dostatečně přesné informace o orientaci za všech podmínek. Některé algoritmy využívají znalosti dynamiky konkrétního létajícího prostředku.

### 2.1 Nomenklatura

V této podkapitole jsou stručně shrnuty konvence použitých souřadných soustav a zápisu matematických výrazů.

V rámci práce budou používány dvě souřadné soustavy, jejichž definice jsou popsány níže. V celé práci je zanedbána rotace země. Také gravitační pole je považováno za homogenní. Tyto aproximace je možné použít, jelikož chyby senzorů uvažovaných v této práci řádově převyšují tyto efekty.

#### 2.1.1 Navigační (referenční) souřadná soustava

Lokální pravoúhlá pravotočivá souřadná soustava s počátkem v těžišti vyšetřovaného tělesa, jejíž osy jsou definovány takto:

- osa  $x$  směřuje ke geografickému severu
- osa  $y$  směřuje ke geografickému východu
- osa  $z$  směřuje dolů (do středu země)

Takto definovaná souřadná soustava je často označována zkratkou NED (z angl. North East Down) a je standardem v oblasti navigace.

#### 2.1.2 Tělesová souřadná soustava

Pravoúhlá pravotočivá souřadná soustava s počátkem v těžišti vyšetřovaného tělesa, kdy osy jsou pevně spojeny s tělesem. Konkrétně u multikoptéry jsou osy tělesové soustavy definovány takto (viz obr. 3.1):

- osa  $x$  směřuje podél prvního ramene
- osa  $z$  směřuje dolů

- osa  $y$  doplňuje soustavu na pravotočivou

Pokud je multikoptéra ve vodorovné poloze, kdy její první rameno směřuje k severu, pak obě souřadné soustavy splývají.

### 2.1.3 Matematický zápis

- Vektory (označovány tučně malými písmeny):

$$\mathbf{a}^n = \begin{pmatrix} a_x^n & a_y^n & a_z^n \end{pmatrix}^T \quad (2.1)$$

kde vrchní index u vektoru (či složky) označuje souřadnou soustavu, ve které je vektor vyjádřen,  $n$  - navigační (referenční),  $b$  - tělesová.

- Matice (označovány tučně velkými písmeny):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

- Rotační matice slouží k přepočtu vektorů vyjádřených v jedné souřadné soustavě do druhé:

$$\mathbf{a}^n = \mathbf{R}_b^n \mathbf{a}^b, \mathbf{a}^b = \mathbf{R}_n^b \mathbf{a}^n = (\mathbf{R}_b^n)^T \mathbf{a}^n \quad (2.3)$$

Dolní index rotační matice určuje původní souřadnou soustavu a horní index určuje cílovou souřadnou soustavu.

## 2.2 Vyjádření orientace (parametrizace grupy rotací)

Stručně řečeno orientace vystihuje natočení studovaného objektu (tělesové souřadné soustavy) vzhledem ke zvolené referenční souřadné soustavě. Referenční soustava bývá obvykle určena lokálním vertikálním směrem a směrem ke geografickému severu (NED soustava definována výše). Určit orientaci pak znamená stanovit toto natočení číselně. Existuje více způsobů kvantitativního popisu orientace, které se vzájemně liší.

### Rotační matice

Z matematického hlediska je množina všech možných orientací (rotací) v trojdimenzionálním prostoru speciální ortogonální grupou  $SO(3)$  [1]. Tuto grupu tvoří čtvercové ortonormální matice s rozměrem  $3 \times 3$ . Vlastnosti těchto matic lze shrnout do následujících bodů:



- $\det(\mathbf{R}) = 1$
- $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$

Z těchto vlastností například plyne, že jednotlivé řádky resp. sloupce tvoří navzájem kolmé a jednotkové vektory. Na tyto tzv. rotační matice lze pohlížet jako na speciální případ matice přechodu od jedné báze k druhé. Každá matice  $3 \times 3$  splňující výše uvedené podmínky popisuje v trojdimenzionálním prostoru právě jedno natočení (orientaci). Tyto rotační matice lze tedy přímo použít jako číselnou reprezentaci orientace. Z hlediska estimace orientace je důležitý časový vývoj reprezentace orientace při znalosti úhlových rychlostí. V případě rotačních matic je časový vývoj popsán vztahem:

$$\dot{\mathbf{R}}_b^n = \mathbf{R}_b^n \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (2.4)$$

kde

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z^b & \omega_y^b \\ \omega_z^b & 0 & -\omega_x^b \\ -\omega_y^b & \omega_x^b & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

a  $\omega_i^b$  jsou jednotlivé složky vektoru úhlové rychlosti. Jak již bylo zmíněno, rotační matice je zároveň také matice přechodu z báze tělesové souřadné soustavy do báze referenční souřadné soustavy, tedy:

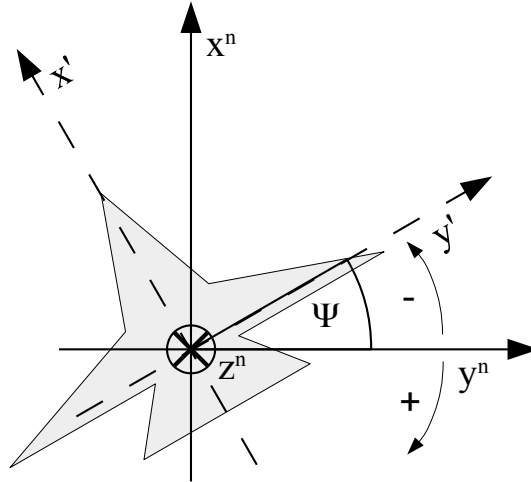
$$\mathbf{a}^n = \mathbf{R}_b^n \mathbf{a}^b \quad (2.6)$$

## Eulerovy úhly

Eulerovy úhly jsou pro člověka nejpřirozenější způsob parametrizace orientace. Jedná se o trojici čísel, která udávají tři úhly postupných rotací okolo definovaných os vedoucích k transformaci referenční souřadné soustavy do soustavy tělesové. Tyto úhly mají podle normy používané v letectví [2] (ČSN 31 0001) názvy *příčný sklon* -  $\phi$ , *podélný sklon* -  $\theta$  a *kurz* -  $\psi$ . Ilustrace významu jednotlivých Eulerových úhlů jsou na obr. 2.1, 2.2, 2.3. Při znalosti časového průběhu vektoru úhlové rychlosti se časový vývoj Eulerových úhlů řídí vztahy:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & -\cos \phi \sec \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Ze vztahu (2.7) je patrné, že derivace  $\dot{\phi}$  a  $\dot{\psi}$  jsou pro  $\theta = 90^\circ, -90^\circ$  nedefinované. Tomuto jevu se říká Kardanův zámeček (angl. gimbal lock) [1] a je hlavní nevýhodou Eulerových úhlů. Výhodou je jejich již zmíněná dobrá interpretovatelnost. Používají se tedy především pro uživatelsky přehlednou ilustraci výsledků. Dokonce i indikátory umělého horizontu v letadlech zobrazují pilotovi orientaci grafickou formou ve smyslu Eulerových úhlů.



Obr. 2.1: Ilustrace významu jednotlivých Eulerových úhlů - kurz

## Kvaterniony

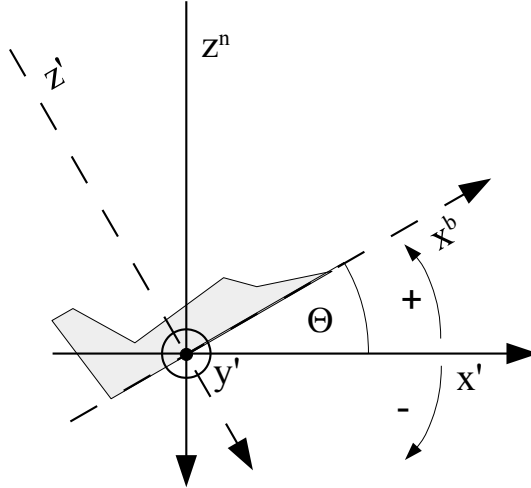
Z matematického hlediska vznikly kvaterniony nekomutativním rozšířením komplexních čísel. Jedná se o čtyřdimenzionální vektory splňující speciální algebru. Orientaci lze pak popisovat kvaterniony, které splňují podmínku jednotkové velikosti ( $\|\mathbf{q}\| = 1$ ). S ohledem na popis orientace je opět důležitý vztah pro vývoj kvaternionu při znalosti úhlových rychlostí:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_1 & -q_4 & q_3 \\ q_4 & q_1 & -q_2 \\ -q_3 & q_2 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Interpretace jednotlivých prvků kvaternionu reprezentující orientaci již není tak elegantní a přímočará jako v případě Eulerových úhlů. Možnou interpretací je vztahování prvků kvaternionu k tzv. rotačnímu vektoru:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mu/2) \\ (\mu_x/\mu) \sin(\mu/2) \\ (\mu_y/\mu) \sin(\mu/2) \\ (\mu_z/\mu) \sin(\mu/2) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

kde  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_x \ \mu_y \ \mu_z)^T$  je rotační vektor, jehož směr určuje osu otáčení a jeho velikost úhel, o který je třeba kolem určené osy pootočit referenční soustavu, aby byla získána soustava tělesová,  $\mu = \|\boldsymbol{\mu}\|$  je pak norma rotačního vektoru. Z (2.9) je patrné, že hodnoty jednotlivých prvků kvaternionu jsou z intervalu  $q_i \in \langle -1, 1 \rangle$ .



Obr. 2.2: Ilustrace významu jednotlivých Eulerových úhlů - podélný sklon

### Výpočet rotační matice

Jelikož je rotační matice často používána pro přepočítání vektorů mezi souřadnými soustavami, je vhodné uvést vztahy pro výpočet rotační matice při znalosti kvaternionu či Eulerových úhlů. Při znalosti kvaternionu je vztah následující [3]:

$$\mathbf{R}_b^n = \begin{pmatrix} (q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & 2(q_2q_4 + q_1q_3) \\ 2(q_2q_3 + q_1q_4) & (q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2) & 2(q_3q_4 - q_1q_2) \\ 2(q_2q_4 - q_1q_3) & 2(q_3q_4 + q_1q_2) & (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Při znalosti Eulerových úhlů pak platí následující vztah:

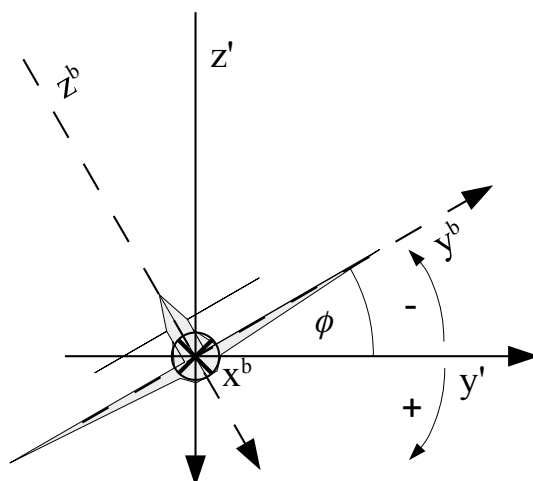
$$\mathbf{R}_b^n = \begin{pmatrix} c(\theta)c(\psi) & s(\phi)s(\theta)c(\psi) - c(\phi)s(\psi) & s(\phi)s(\psi) + c(\phi)s(\theta)c(\psi) \\ c(\theta)s(\psi) & c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\theta)s(\psi) & c(\phi)s(\theta)s(\psi) - s(\phi)c(\psi) \\ -s(\theta) & s(\phi)c(\theta) & c(\phi)c(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

kde:

$$c(\alpha) = \cos(\alpha), s(\alpha) = \sin(\alpha) \quad (2.12)$$

## 2.3 Senzory používané pro estimaci orientace

Úkolem algoritmů používaných na estimaci orientace je číselně stanovit jednu z výše uvedených parametrizací orientace. Autonomní létající stroje obecně jsou za tímto účelem vybaveny několika senzory. Algoritmy iterativně zpracovávají aktuální hodnoty z těchto senzorů za účelem stanovení zmíněné orientace. Mezi běžně používané senzory patří:



Obr. 2.3: Ilustrace významu jednotlivých Eulerových úhlů - přičný sklon

- tříosý gyroskop (senzor úhlové rychlosti)
- tříosý akcelerometr
- tříosý magnetometr
- barometr (senzor atmosférického tlaku)
- přijímač globální satelitní navigace

Všechny senzory jsou součástí stroje a tříosé senzory mají jednotlivé osy totožné s tělesovou souřadnou soustavou stroje.

### Tříosý gyroskop

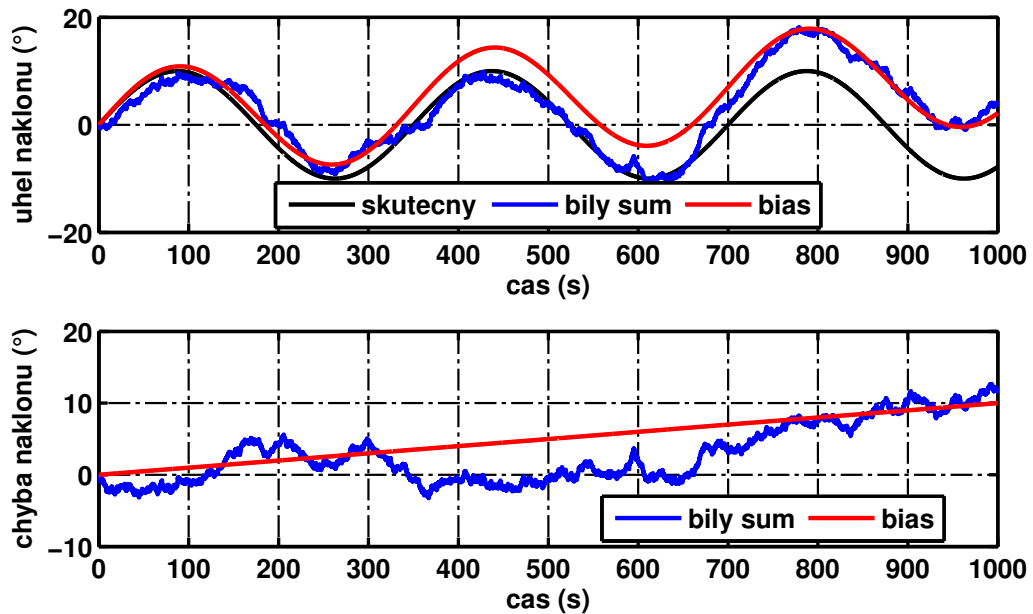
Gyroskop měří úhlovou rychlost rotačního pohybu a patří mezi nejdůležitější senzory pro estimaci orientace. Měřené hodnoty z gyroskopu je možné použít pro výpočet orientace při znalosti orientace v předchozím časovém okamžiku. Tento výpočet je prováděn pomocí jednoho ze vztahů (2.4), (2.7), (2.8). V případě ideálního gyroskopu by se tedy problém estimace orientace redukoval pouze na stanovení orientace v počátečním časovém okamžiku, dále by pak byla orientace propagována pomocí údajů z gyroskopu. Z reálného hlediska i ty nejkvalitnější gyroskopy udávají úhlovou rychlost s jistou nepřesností, která se po integraci projeví s časem rostoucí chybou vypočítané orientace.

Vliv základních chyb, jako je bílý šum a konstantní bias, na určenou orientaci je ilustrován na jednoduchém příkladu pouze s jedním úhlem. Necht' je skutečný signál jednodimenzionální úhlové rychlosti zatížen v jednom případě bílým šumem a v druhém konstantním biasem (aditivní chyba). Tyto modifikované signály pak budou použity na výpočet úhlu pomocí integrace signálu úhlové rychlosti. Pro příklad byl použit gaussovský bílý šum se standardní směrodatnou odchylkou  $\sigma = 1^\circ/\text{s}$ , bias

měl hodnotu  $b = 0.01^\circ/\text{s}$ , doba simulace byla 1000 s a perioda vzorkování  $\Delta t = 0.1$  s. Úhel byl počítán iterativně pomocí vztahu:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \Delta t \omega_{k+1} \quad (2.13)$$

kde  $\omega_k$  je úhlová rychlost v časovém kroku  $k$  a  $\alpha_k$  je úhel v časovém kroku  $k$ . Horní graf na obr. 2.4 ukazuje absolutní hodnoty skutečného a vypočítaných průběhů úhlu náklonu. Spodní graf potom ukazuje pouze chyby, tzn. rozdíl vypočítaných a skutečných hodnot.



Obr. 2.4: Vliv bílého šumu a biasu gyroskopu na spočítaný úhel

V průměru chyba roste s časem pro oba případy. Dle teorie by měla chyba způsobená biasem růst lineárně s časem. Chyba způsobená bílým šumem roste v průměru úměrně s odmocninou času. Pro čtyřnásobný časový úsek se tak chyba v průměru zdvojnásobí. I přestože jsou výsledné projevy chyb v úhlu srovnatelné, je důležité si všimnout parametrů chyb úhlové rychlosti, které jsou řádově odlišné. Směrodatná odchylka bílého šumu je v tomto případě stokrát větší než bias. Bílý šum v úhlové rychlosti tedy není pro integraci úhlu tak velkým nepřítelem, jako je konstantní či slabě proměnný bias.

### Tříosý akcelerometr

S ohledem na estimaci orientace je používán dvěma různými způsoby. Ve standardních navigačních algoritmech (odhadují i pozici) je používán pro propagaci rychlosti

a následně, po dvojnásobné integraci, pozice. Přírůstek akcelerometru k určení orientace tedy není při tomto použití moc patrný. V těchto jednodušších je však používán k přímému měření lokálního vertikálního směru. Vertikální směr lokální navigační soustavy je totiž určen směrem, který udává vektor gravitačního zrychlení. Je možné dokázat, že v případě, kdy je těleso pevně spojeno s akcelerometrem v pohybu rovnoměrném přímočarém, je vektor indikovaný akcelerometrem vektorem opačným ke gravitačnímu zrychlení. Při znalosti lokálního vertikálního směru v tělesové souřadné soustavě je možné izolovat dva stupně volnosti orientace:

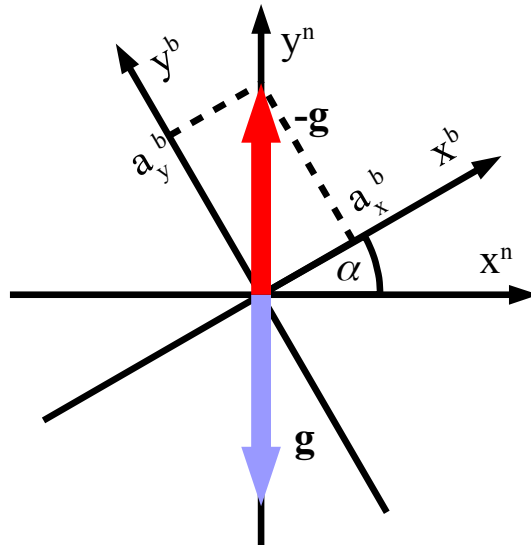
$$\phi = \arctan\left(\frac{g_y^b}{g_z^b}\right) \quad (2.14)$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{-g_x^b}{\|\mathbf{g}\|}\right) \quad (2.15)$$

kde  $\mathbf{g}^b = (g_x^b \ g_y^b \ g_z^b)^T$  označuje vektor gravitačního zrychlení vyjádřený v tělesové souřadné soustavě. Jeden stupeň volnosti, v tomto případě úhel kurzu, je tímto způsobem nezjistitelný.

V momentech kdy těleso zrychluje, je měřený vektor součtem vektoru opačného ke gravitačnímu a tohoto zrychlení. Záleží tedy na velikosti a směru zrychlení, jak velkou chybu v orientaci určené pomocí (2.14), (2.15) způsobí.

Na jednoduchém dvojdimenzionálním příkladu bude ukázán vliv zrychlení pohybu na přesnost určení úhlu pomocí akcelerometru. Tento úhel je možné určit při znalosti vertikálního směru vyjádřeného v tělesové souřadné soustavě.



Obr. 2.5: Výpočet úhlu náklonu ze znalosti vertikálního směru

Z obr. 2.5 je patrné, že úhel  $\alpha$  je možné určit pomocí vztahu:

$$\alpha = \arctan \left( \frac{a_x^b}{a_y^b} \right) \quad (2.16)$$

Bude-li skutečný úhel  $\alpha = 0^\circ$  potom  $-\mathbf{g}^b = \begin{pmatrix} 0 & 9.81 \end{pmatrix}^T [m/s^2]$  měření akcelerometru je ovšem rovno:

$$\mathbf{a}^b = -\mathbf{g}^b + \mathbf{R}_n^b \dot{\mathbf{v}}^n = -\mathbf{g}^b + \mathbf{a}_{ext}^b \quad (2.17)$$

Tabulka 2.1 shrnuje vliv externího zrychlení na chybu úhlu vypočítaného za předpokladu, že akcelerometr měří pouze  $-\mathbf{g}^b$ . Vektor  $\mathbf{a}_{ext}^b$  má ve všech případech stejnou velikost  $\|\mathbf{a}_{ext}^b\| = 5 [m/s^2]$ , jenom jeho směr se mění. Hodnoty chyb naznačují, že vliv

$\mathbf{a}_{ext}^b$	skutečný úhel ( $^\circ$ )	vypočtený úhel ( $^\circ$ )
$\begin{pmatrix} 0 & -5 \end{pmatrix}^T$	0	0.0
$\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} & -\frac{5\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T$	0	29.4
$\begin{pmatrix} 5 & 0 \end{pmatrix}^T$	0	27.0
$\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T$	0	14.8

Tab. 2.1: Vliv externího zrychlení na chybu úhlu

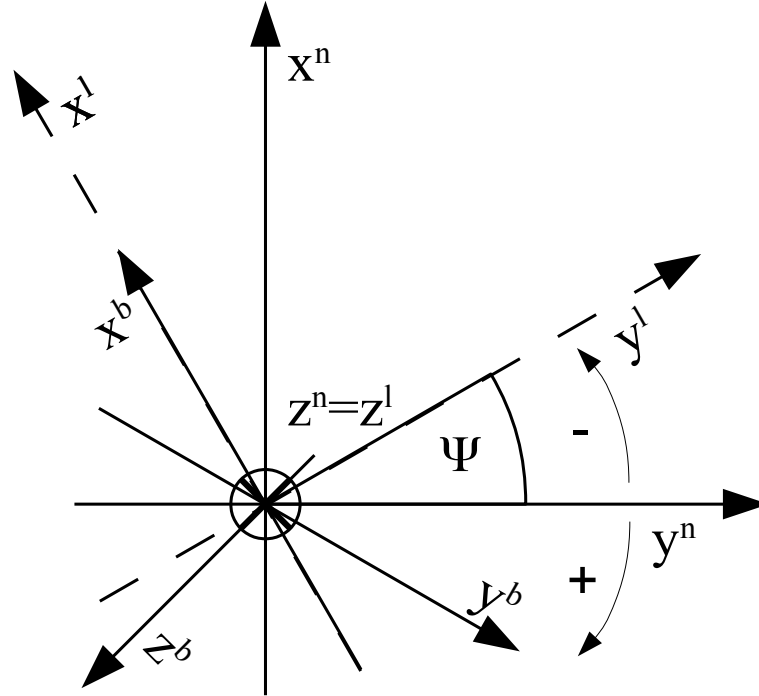
externího zrychlení zamezuje použití pouze akcelerometru pro měření orientace. To je možné použít pouze v aplikacích, kde je možné garantovat nepřítomnost externího zrychlení. Takovým případem může být např. fotoaparát na stativu, avšak určitě ne multikoptéra za letu.

### Tříosý magnetometr

Používané jsou dva způsoby zpracování měřeného vektoru magnetického pole. První je založen na stejném principu jako akcelerometr při měření gravitačního vektoru. Využívá se apriorní znalosti vektoru magnetického pole v navigační soustavě (možné díky magnetickým mapám či magnetickým modelům země). Ten samý vektor měřený v tělesové soustavě opět může izolovat dva stupně volnosti orientace. Pro naprostou většinu míst na zemi je vektor magnetického pole nekolineární s gravitačním polem a tím doplňuje akcelerometr k určení celkové orientace. Lokální zkreslení magnetického pole však může opět způsobit velké chyby v orientaci.

Při druhém způsobu je vektor magnetického pole použit pouze pro výpočet magnetického kurzu. Pro tento výpočet je nutná transformace vektoru do horizontálně

zarovnané souřadné soustavy. To je souřadná soustava, jejíž rovina  $xy$  splývá s rovinou  $xy$  navigační soustavy a současně průmět osy  $x$  tělesové soustavy do této roviny má stejný směr jako osa  $x$  horizontálně zarovnané souřadné soustavy. Je to tedy navigační soustava otočená o úhel kurzu kolem osy  $z$ . Vzájemný vztah jednotlivých os navigační (n), tělesové (b) a horizontálně zarovnané (l) souřadné soustavy ilustruje obr. 2.6.



Obr. 2.6: Ilustrace jednotlivých os navigační, tělesové a horizontálně zarovnané souřadné soustavy (pohled z vrchu)

Rotační matice pro transformaci z tělesové do horizontálně zarovnané souřadné soustavy může být vyjádřena pomocí Eulerových úhlů:

$$\mathbf{R}_b^l = \begin{pmatrix} c(\theta) & s(\phi) s(\theta) & c(\phi) s(\theta) \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ -s(\theta) & s(\phi) c(\theta) & c(\phi) c(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Transformovaný vektor je pak výsledkem rovnice:

$$\mathbf{mag}^l = \mathbf{R}_b^l \mathbf{mag}^b \quad (2.19)$$

Úhel magnetického kurzu je z transformovaného vektoru spočítán pomocí vztahu:

$$\psi = \arctan \left( \frac{\mathit{mag}_y^l}{\mathit{mag}_x^l} \right) \quad (2.20)$$



Výhodou oproti předchozímu způsobu je, že v tomto případě může magnetometr ovlivnit pouze úhel kurzu. Na přesnost tohoto úhlu jsou často kladeny mírnější nároky než na horizontální znalost orientace. V některých případech je magnetometr jediná možnost jak tento úhel určit.

## **Barometr**

Pomocí barometru je možné měřit tzv. barometrickou výšku. U reálného barometrického výškoměru se využívá známé exponenciální závislosti atmosférického tlaku na nadmořské výšce. V této práci však bez újmy na obecnosti bude předpokládáno, že měří přímo nadmořskou výšku.

Na první pohled nemá pro určení orientace žádný smysl. Ovšem jak ukáže tato práce, může informace o výšce zajistit pozorovatelnost pro algoritmus odhadující orientaci, který by byl bez této informace buď nestabilní nebo závislý na jiném absolutním senzoru polohy (např. GPS), což přináší jiné nevýhody.

## **Přijímač globální satelitní navigace**

Zpracováním signálů vysílaných jednotlivými satelity poskytuje údaje o poloze v rámci celé zeměkoule. Může se opět zdát, že údaj o poloze nemá pro určení orientace žádný význam, ovšem díky vazbě mezi orientací a polohou jsou tyto údaje velmi cenné. Jednoduše vysvětleno, pravidelným měřením pozice lze do určité míry odhadovat i rychlost a dokonce i zrychlení. Právě takto odhadnuté zrychlení je pak možné odečíst od měření akcelerometru k získání lokálního vertikálního směru.

## **2.4 Současné metody estimace orientace**

Tato kapitola shrnuje používané metody pro estimaci (odhad) orientace. Do úvahy budou brány metody vhodné pro použití levných, méně přesných senzorů, které jsou součástí létajícího stroje.

### **2.4.1 Komplementární filtry**

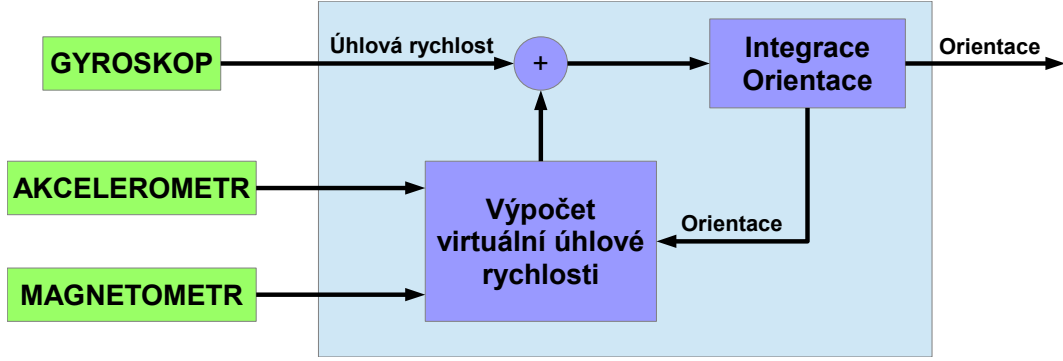
Nejjednodušší metodou pro odhad orientace je tzv. komplementární filtr. Za komplementární filtr se obecně považuje filtr, který kombinuje informace ze dvou a více senzorů, které poskytují o měřené veličině přesnou informaci z navzájem doplňujících se frekvenčních oblastí. Jeden ze senzorů většinou poskytuje relativně nepřesnou (zašuměnou) informaci o měřené veličině, avšak z dlouhodobého hlediska s omezenou chybou. Chyby mají tedy vysokofrekvenční charakter. Přínosná je tedy informace z dolní části spektra. Komplementem je pak senzor, který je schopný velmi přesně

sledovat změny měřené veličiny, avšak absolutní hodnota je zatížena proměnnou aditivní chybou, jejíž velikost není často nijak omezena. Zde mají chyby nízkofrekvenční charakter a užitečná informace je tedy v horní části spektra. Implementace takového filtru je pro skalární signály poměrně jednoduchá. Signály z obou senzorů jsou převedeny do frekvenční oblasti, kde se odfiltrují části spekter obsahující chybový signál. Výsledný signál je následně ve frekvenční doméně složen a převeden zpátky do časové oblasti. Takto filtrovaná hodnota měřené veličiny má pak větší přesnost než jednotlivé signály ze senzorů.

Princip komplementárního filtru se dá aplikovat i na problém odhadu orientace. Gyroskop jako senzor úhlové rychlosti je poměrně přesně schopen sledovat změny v orientaci. Z dlouhodobého hlediska však absolutní chyba orientace určené integrací úhlové rychlosti nezastavitelně roste, jak ukazuje příklad zmíněný dříve v této kapitole. Akcelerometr pro změnu poskytuje poměrně stabilní hodnotu orientace, která je zatížena šumem a také chybou plynoucí z působení externího zrychlení (viz tabulka 2.1). Podobné vlastnosti má také magnetometr, který doplňuje akcelerometr pro stanovení kompletní orientace. Protože je popis orientace matematicky poměrně složitou záležitostí a vztah jednotlivých senzorů k orientaci je nelineární, není pro implementaci možné použít způsob implementace ve frekvenční oblasti zmíněný v předchozím odstavci. Striktně se již tedy nejedná o komplementární filtr, avšak v literatuře je tento název tradičně využíván.

Existuje více způsobů jak implementovat komplementární princip na data z gyroskopu, akcelerometru a magnetometru tak, aby byly u každého senzoru potlačeny charakteristické dominantní nepřesnosti [4], [5], [6], [7]. Jádrem filtru je vždy iterativní propagace zvolené reprezentace orientace pomocí integrace úhlové rychlosti z gyroskopu. Bez jakékoliv korekce by chyba takto určené orientace byla již po krátkém čase příliš velká pro efektivní použití. Pravidelně je tedy tato orientace korigována na základě měření akcelerometru a magnetometru. Jednou z možností je korekce přes virtuální úhlovou rychlost, které se někdy říká bias. To z toho důvodu, že při správném fungování filtru je střední hodnota této virtuální úhlové rychlosti blízká záporně vzatému skutečnému biasu gyroskopu. Orientace v tomto případě není propagována na základě čisté úhlové rychlosti z gyroskopu, ale na základě součtu skutečné úhlové rychlosti a té virtuální. Pravidlo pro počítání virtuální úhlové rychlosti může mít opět mnoho podob. Všechny pravidla však mají cíl zarovnat současnou orientaci tak, aby odpovídala té aktuálně stanovené na základě měření z akcelerometru a magnetometru. Jelikož se dá na orientaci pohlížet jako na souřadnou soustavu, je možné si pro lepší pochopení definovat dvě souřadné soustavy. První je ta vzniklá integrací, druhá je pak určená aktuálním měřením akcelerometru a gyroskopu. Cílem virtuální úhlové rychlosti je pak zarovnat tyto souřadné soustavy.

Schéma komplementárního filtru je na obr. 2.7. Z obrázku je zřejmé, že nejdůle-



Obr. 2.7: Schéma komplementárního filtru pro estimaci orientace

žitější částí filtru je výpočet virtuální úhlové rychlosti. Většinou se různé modifikace komplementárního filtru liší pouze v tomto výpočtu. Následující rovnice jsou příkladem možné realizace komplementárního filtru:

$$\mathbf{R}_{b|k+1}^n = \mathbf{R}_{b|k}^n \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{\Omega}_k \cdot \Delta t) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{\Omega}_k = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\omega}_z^b & \tilde{\omega}_y^b \\ \tilde{\omega}_z^b & 0 & -\tilde{\omega}_x^b \\ -\tilde{\omega}_y^b & \tilde{\omega}_x^b & 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$\tilde{\omega}_k^b = \mathbf{gyr}_k^b + \mathbf{b}_k \quad (2.23)$$

$$\mathbf{b}_k = -k_p \mathbf{e}_k - k_i \sum_{i=1}^k \mathbf{e}_k \quad (2.24)$$

$$\mathbf{e}_k = k_a \mathbf{e}_{a|k} + k_m \mathbf{e}_{m|k} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{e}_a = \left[ (\mathbf{R}_b^n)^T \cdot \frac{-\mathbf{g}^n}{\|\mathbf{g}\|} \right] \times \left( \frac{\mathbf{acc}^b}{\|\mathbf{acc}^b\|} \right) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{e}_m = \left[ (\mathbf{R}_b^n)^T \cdot \frac{\mathbf{m}_{ref}^n}{\|\mathbf{m}_{ref}^n\|} \right] \times \left( \frac{\mathbf{mag}^b}{\|\mathbf{mag}^b\|} \right) \quad (2.27)$$

Rovnice (2.21) je pouhou diskrétní realizací integrace rotační matice (viz (2.4)), která je zvolena jako reprezentace orientace,  $\mathbf{I}$  označuje jednotkovou matici a  $\Delta t$  je perioda vzorkování. Rovnice (2.23) indikuje, že integrovaný vektor je součtem virtuální úhlové rychlosti  $\mathbf{b}$  a úhlové rychlosti měřené gyroskopem  $\mathbf{gyr}^b$ . Rovnice (2.24) až (2.27) tvoří výpočet virtuální rychlosti na základě aktuální orientace. Vztah (2.24) napovídá že tzv. bias je součtem aktuální chyby a sumace všech chyb od počátku běhu, čímž připomíná PS regulátor. Podobnost není náhodná a sumační člen je zde z důvodu eliminace působení biasu gyroskopu. V ustáleném stavu, kdy je aktuální chyba nulová, by měl správně sumační člen vykompenzovat bias gyroskopu. Kladné parametry  $k_p$  a  $k_i$  pak nastavují chování komplementárního filtru. Rovnice (2.25) nastavuje různé váhy vlivu akcelerometru a magnetometru. Rozvážení lze kontrolo-

vat parametry  $k_a$  a  $k_m$ . Vztahy (2.26) a (2.27) pak stanovují pomocí vektorového součinu směr vektoru úhlové rychlosti tak, aby došlo k zarovnání vektorů vystupujících v součinu.  $\mathbf{g}^n$  je vektor gravitačního zrychlení vyjádřený v navigační souřadné soustavě a  $\mathbf{m}_{ref}^n$  je vektor magnetického pole v navigační souřadné soustavě.

Předpoklad tohoto algoritmu je, že akcelerometr měří pouze záporně vzatý vektor gravitačního zrychlení, jinými slovy předpokládá nulové externí zrychlení. Vliv externího zrychlení se dá do jisté míry kompenzovat vhodným nastavením parametrů filtru, většinou však na úkor poklesu přesnosti při nepřítomnosti externího zrychlení. Pokročilejším způsobem kompenzace externího zrychlení je adaptování parametrů filtru. Většinou je adaptování založeno na sledování normy vektoru akcelerometru. Je-li hodnota této normy blízko normě gravitačního zrychlení, lze předpokládat, že nepůsobí žádné externí zrychlení. Pokud je tato hodnota různá, je snížena váha akcelerometru. Nicméně při dlouhodobém působení gravitačního zrychlení nelze ani při adaptaci parametrů garantovat omezenou chybu stanovené orientace. Přes všechny uvedené nevýhody je však komplementární filtr velmi oblíbeným a používaným algoritmem pro estimaci orientace multikoptér, což dokazuje [8].

Princip zarovnávání vektorů, který tvoří jádro komplementárního filtru lze přeformulovat i do notace Kalmanova filtru [9], [10], [11]. Integrace úhlové rychlosti je součástí stavových rovnic. Predikované hodnoty měření akcelerometru a magnetometru jsou pak stanoveny na základě estimované orientace, které je součástí stavového prostoru. O výpočet korekce se již stará algoritmus Kalmanova filtru. Výhodou tohoto přístupu je snadnější nastavení, jelikož parametry jsou přímo navázané na chybové vlastnosti jednotlivých sensorů. Opět je však použit předpoklad, že akcelerometr měří gravitační zrychlení, který znemožňuje garantovat dostatečnou přesnost orientace.

## 2.4.2 GPS/INS

GPS/INS je zkratkou pro inerciální navigační systém, který je pravidelně korigován měřením absolutní pozice z GPS přijímače. Základní stavy inerciálního navigačního systému jsou pozice, rychlost a orientace. Při znalosti počátečních hodnot stavu je možné propagovat stav v čase pouze pomocí měřených hodnot z tříosého gyroskopu a akcelerometru. Rovnice pro tuto dopřednou integraci lze nalézt např. v [12], [3], [13], [14], [15]. Jelikož jsou tyto hodnoty integrovány, chyba takto určeného stavu s časem nezastavitelně roste. Rychlost růstu chyby je závislá na přesnosti sensorů. Přesnost orientace je především závislá na přesnosti gyroskopu. Přesnost rychlosti a pozice je pak závislá jak na přesnosti gyroskopu, tak akcelerometru. Jelikož vektor specifické síly měřený akcelerometrem je vyjádřený v tělesové souřadné soustavě, je třeba ho přetransformovat do referenční souřadné soustavy. K tomuto

kroku je tedy potřebná orientace, jejíž chyba je závislá na gyroskopu.

U velmi přesných senzorů je možno dosáhnout dostatečných přesností i v řádu několika hodin. Toho je využíváno např. v navigaci letadel, či lodí, kdy doba letu/plavby je kratší než časový limit, kdy předpokládaná chyba překročí požadovanou hranici. Při použití cenově dostupných senzorů je však tato doba v řádu sekund. Tedy pouhá dopředná integrace hodnot z akcelerometru a gyroskopu je pro stanovení navigačního stavu nepoužitelná. Pokud je však část odhadnutého stavu pravidelně porovnávána s externím absolutním senzorem a na základě tohoto porovnání je provedena korekce stavu, je možné růst chyby zastavit na určité ustálené hodnotě, která je funkcí jak přesnosti všech použitých senzorů (jak pro integraci, tak pro porovnání), tak frekvence porovnávání a korekce stavu.

V případě GPS/INS je poziční část stavu porovnávána s pozicí stanovenou GPS přijímačem. Vzhledem k nutnosti použití orientace pro dopřednou integraci pozice a rychlosti (pro transformaci výstupu akcelerometru) je možné na základě porovnání pouze poziční části stavu provést korekci celého stavu včetně orientace. To je možné dokázat studiem pozorovatelnosti rovnic pro integraci a rovnic měření [16]. Často je stavový prostor rozšířen i o chybové stavy senzorů (biasy akcelerometru a gyroskopu) a i pro korekci těchto stavů je měření pozice dostačující. Jelikož pozorovatelnost kurzu (úhel natočení vůči směru k severu) je závislá na prováděných manévrech (pozorovatelnost pouze při nenulové horizontální akceleraci) je základní GPS/INS mnohdy doplněn rovněž o měření tříosého magnetometru [17].

Pro implementaci GPS/INS je snad výhradně používán rozšířený Kalmanův filtr či jeho modifikace (UKF, filtr druhého řádu atd.). Struktura Kalmanova filtru se totiž perfektně hodí na estimaci stavu, kdy je stav predikován na základě predikčních rovnic a vstupů (gyroskop a akcelerometr) a následně je provedena korekce na základě měření (pozice z GPS přijímače). Podrobné popisy algoritmů GPS/INS lze nalézt v [18], [19], [12], [20], [15]. Jednou z možností implementace je zahrnutí navigačního stavu přímo do stavového prostoru Kalmanova filtru. Jiným používaným způsobem je tzv. chybový Kalmanův filtr, kdy stavy samotného Kalmanova filtru jsou chyby/odchylky od referenčního stavu. Tyto odchylky mohou být každou iteraci aplikovány na referenční stav, v tom případě se jedná o chybový Kalmanův filtr s uzavřenou smyčkou nebo se neaplikují a jedná se o chybový Kalmanův filtr s otevřenou smyčkou. Volba otevřené smyčky je možná pouze s dostatečně přesnými senzory tak, aby odhadovaná chyba, která nezastavitelně roste, nepřekročila předpoklady, které byly použity v návrhu chybového modelu. Při uvažování levných, nepřesných senzorů není použití chybového Kalmanova filtru s otevřenou smyčkou možné.

### 2.4.3 Užití dynamického modelu

U předešlých metod nebyla funkčnost algoritmu podmíněna jakoukoliv znalostí o prostředí, jehož orientace či navigační stav byl estimován. To lze pokládat za jejich obrovskou výhodu, jelikož produkt implementující takovýto algoritmus najde širší uplatnění. Bude fungovat stejně bez jakýchkoliv úprav, ať již bude umístěn na letadlo, loď, auto či kolo. Ovšem zahrnutí znalosti o dynamickém chování prostředí přidává další nezávislé informace o pohybu, které mohou pomoci částečně potlačit chyby senzorů. Konkrétní podoba těchto algoritmů je již silně závislá na konkrétním typu létajícího stroje. Použití dynamického modelu letadla pro zpřesnění estimace orientace je studováno v [21], kde byl prokázán přínos použití dynamického modelu. Tato práce inspirovala použití podobného principu i u odhadu orientace multikoptér [22], [23], [24], [25], [26], [27].

Konkrétně u multikoptér hraje v dynamickém modelu velmi důležitou roli odpor vzduchu. Díky němu je možné odhadovat rychlost multikoptéry vůči vzduchu a tím efektivně z měření akcelerometru odstranit vliv externího zrychlení. Opět se jako ideální na implementaci ukazuje rozšířený (nelineární) Kalmanův filtr. Oproti algoritmu GPS/INS je jako vstup používán gyroskop a tahy jednotlivých motorů multikoptéry. Na korekci stavu se pak používá akcelerometr a volitelně magnetometr, GPS či barometr. Výhodou užití matematického modelu multikoptéry v algoritmu estimace orientace je schopnost omezit chybu i bez měření absolutní pozice (GPS přijímače). Ten totiž značně limituje použití v prostorách bez GPS signálů (uvnitř budov). Nevýhodou je pak nutná znalost dynamického modelu multikoptéry a jeho parametrů, které se typ od typu liší.

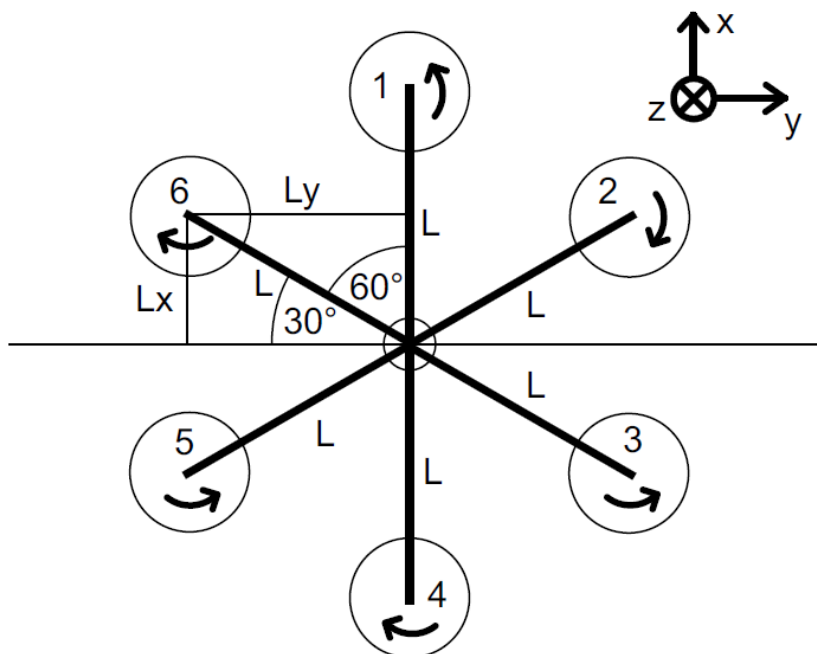
Aktuálnost tématu dokazuje výzkum několika skupin zabývajících se touto oblastí. V [24] byla možnost užití matematického modelu multikoptéry vyšetřována především pro překonání výpadků GPS signálu. Algoritmy uvedené v této publikaci byly úspěšně testovány v simulacích. V [25] byla snaha použít matematický model multikoptéry v algoritmech estimace orientace, tak aby nebyla funkčnost závislá na pravidelných měření pozice (např. GPS přijímačem). V práci je k návrhu algoritmů využíván chybový Kalmanův filtr a standardní chybové modely inerciální navigace. Také je zde uveden unikátní přístup fúzí informací ze dvou predikčních modelů. Výsledky práce jsou ověřovány jak v simulacích tak experimentálně. Poslední známou skupinou jsou autoři článku [22]. Zde je nově zaveden přístup zahrnutí parametrů modelu do stavového prostoru algoritmu. Jako přínos zahrnutí modelu multikoptéry je zde však uvedeno pouze prodloužení doby pravidelných korekcí z externího měření pozice pro zachování konstantní přesnosti. Práce skupin [24] a [22] uvažují pohyb multikoptéry v homogenním tíhovém poli a zároveň zanedbávají rotaci země. Naproti tomu v [25] uvažují standardní popis pohybu na zemi, kde je zahrnuta jak

rotace tak zakřivení země. Pro nízkou třídu senzorů lze předpokládat, že projevy rotace země zůstávají výrazně překryty chybovými vlastnostmi senzorů. Proto i v této práci bude uvažován zjednodušený pohyb v homogenním tíhovém poli.

Žádná z výše uvedených prací neuvažuje magnetometr jako senzor použitý především pro korekci kurzu. Automatický odhad parametrů je zmiňován v pracích posledně zmiňované skupiny. V žádné práci také zatím nebyl vyšetřován vliv rychlosti větru na funkčnost algoritmů. Algoritmy estimace orientace, které uvažují dynamický model multikoptéry, se zabývá i tato dizertační práce. Cílem je porovnat vlastnosti a přesnost těchto algoritmů ve srovnání s GPS/INS. Dále pak také studovat možnosti automatického odhadu parametrů dynamického modelu. Poslední je pak studium vlivu rychlosti větru na přesnost těchto algoritmů.

### 3 MODEL MULTIKOPTÉRY

V této kapitole bude odvozen matematický model multikoptéry pohybující se ve volném prostoru, který byl použit k mnoha účelům během celé práce. Multikoptéra je létající stroj sestávající z rámu, na kterém jsou ve stejné vzdálenosti od těžiště na ramenech umístěny motory s vrtulemi. Běžně se vyskytují multikoptéry se 4-mi, 6-ti a 8-mi vrtulemi. Ve výjimečných případech se vyskytují i jiné počty. Za jediné pohyblivé části lze tedy považovat pouze motory s vrtulemi, což činí multikoptéry mechanicky velmi jednoduchými a robustními. Právě proto se staly velmi oblíbenou létající platformou nejen v akademické sféře. Ovládání pohybu se tedy provádí výhradně změnou tahů vrtulí (otáček motorů). Typické schéma multikoptéry je na obr. 3.1.

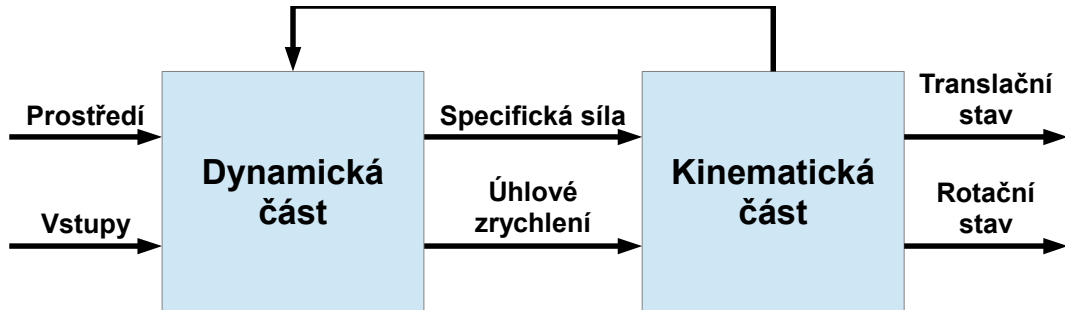


Obr. 3.1: Mechanické schéma multikoptéry se šesti motory

S ohledem na matematický model je možné multikoptéru aproximovat jako tuhé těleso ve volném prostoru, na které působí různé síly, jež určují jeho pohyb. Matematický model je vhodné rozdělit na dvě části a to kinematickou část a dynamickou část. Kinematická část obsahuje pouze matematický popis pohybu tuhého tělesa se šesti stupni volnosti (tři translační a tři rotační). Tento pohyb je určován na základě znalosti specifické síly a úhlového zrychlení. Dynamická část potom popisuje vznik



a působení sil na tuhé těleso. Výstupem dynamické části jsou právě vektory specifické síly a úhlového zrychlení, které jsou vstupem pro kinematickou část. Rozdělení matematického modelu ilustruje obr. 3.2.



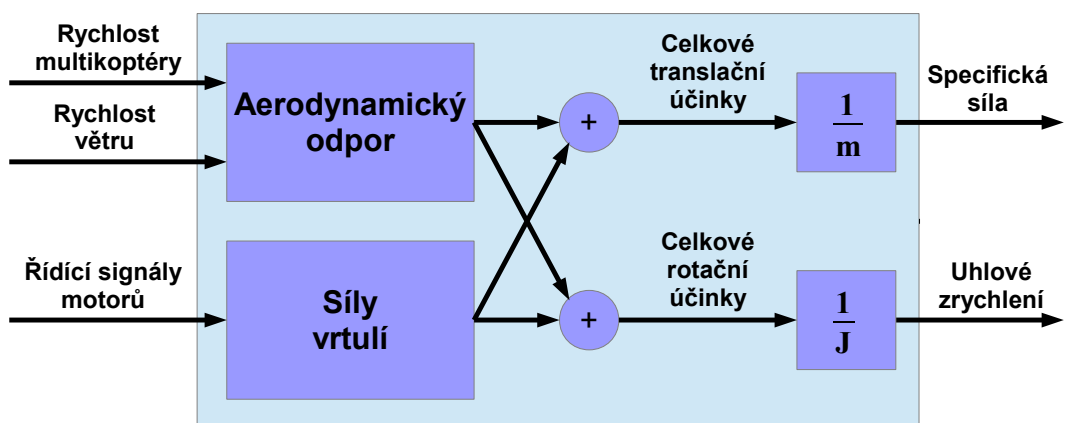
Obr. 3.2: Rozdělení matematického modelu multikoptéry

### 3.1 Dynamická část

Dynamická část zahrnuje všechny výpočty vedoucí k určení výsledné specifické síly a úhlového zrychlení. Prvním krokem je stanovení jednotlivých sil a momentů působících na multikoptéru. Zdroje těchto sil a momentů lze rozdělit do následujících skupin:

- Motory s vrtulemi
- Aerodynamický odpor

Schéma dynamické části modelu je na obr. 3.3



Obr. 3.3: Schéma dynamické části modelu

### 3.1.1 Motory s vrtulemi

Motory s vrtulemi slouží u multikoptér k produkci vztlaku (překonávající gravitaci) a dále také k rotačnímu ovládní multikoptéry. Nejprve jsou studovány síly a momenty vznikající na jednom motoru s vrtulí. Dále jsou pak stanoveny účinky všech motorů s vrtulemi a určeny výsledná síla a moment pocházející od motorů s vrtulemi.

Jednoduchým, avšak pro tuto práci dostačujícím modelem vztlakové síly točící se vrtule je:

$$f_{vz} = k_m \omega^2 \quad (3.1)$$

kde  $k_m$  je konstantní kladný parametr a  $\omega$  je úhlová rychlost vrtule. Směr vztlakové síly je totožný s osou otáčení vrtule. Jednotlivé vrtule tedy generují silové vektory:

$$\mathbf{f}_{vz}^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_m \omega^2 \end{pmatrix}^T \quad (3.2)$$

Ze zákona akce a reakce plyne, že na každém motoru s vrtulí musí vznikat zpětný moment, jehož smysl otáčení je opačný vůči smyslu otáčení vrtule. Je zde opět uvažován zjednodušený model tzv. reakčního momentu vrtule, který je přímo úměrný vztlaku vrtule:

$$\tau = k_t f_{vz} = k_t k_m \omega^2 \quad (3.3)$$

nebo vektorově:

$$\boldsymbol{\tau}_m^b = -k_t \mathbf{f}_{vz}^b \quad (3.4)$$

kde  $k_t$  je konstantní kladný parametr. Nyní je možné odvodit celkovou sílu a moment, který vytváří všechny motory s vrtulemi. Pro příklad bude uveden vztah pro šestirotorovou multikoptéru. Jako vstup pro tyto výpočty bude uvažována 6-tice čísel reprezentující kvadráty úhlových rychlostí (otáček) jednotlivých motorů s vrtulemi. S ohledem na obr. 3.1 lze jednoduše odvodit následující vztahy pro vektory celkové síly a momentu:

$$\mathbf{f}_m^b = \mathbf{F} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \dots & \omega_6^2 \end{pmatrix}^T \quad (3.5)$$

$$\boldsymbol{\tau}_m^b = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \dots & \omega_6^2 \end{pmatrix}^T \quad (3.6)$$

kde

$$\mathbf{F} = k_m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{T} = k_m \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\sqrt{3}l}{2} & \frac{\sqrt{3}l}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}l}{2} & \frac{\sqrt{3}l}{2} \\ l & \frac{l}{2} & \frac{-l}{2} & -l & \frac{-l}{2} & \frac{l}{2} \\ k_t & -k_t & k_t & -k_t & k_t & -k_t \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Obdobným způsobem lze odvodit matice  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{T}$  pro multikoptéry s jiným počtem rotorů.

### 3.1.2 Aerodynamický odpor

Aerodynamický odpor bývá často v modelech multikoptér určených pro testování řídicích algoritmů vynecháván. Ovšem s ohledem na odhad orientace má velmi důležitou roli. Na každý objekt pohybující se vůči vzduchu nenulovou rychlostí působí aerodynamická odporová síla, která například při volném pádu objektu způsobí ustálení pádové rychlosti na určité hodnotě. Při této mezní rychlosti dojde k vyrušení aerodynamické odporové síly a gravitační síly. Pro případ samotného draku multikoptéry by tato rychlost byla určitě poměrně velká (řádově stovky km/h). U multikoptér však nelze zanedbat vliv rotujících vrtulí, které tvoří dominantní část celkového odporu vzduchu působícího za letu. Model aerodynamického odporu používaný v této práci je založen na [28] a má následující vlastnosti:

- Odpor vzduchu je úměrný rychlosti vůči vzduchu
- Závislost odporu vzduchu na úhlové rychlosti jednotlivých vrtulí je zanedbána
- Koeficient úměrnosti je směrově závislý

Číselně je pak model aerodynamického odporu vzduchu vyjádřen:

$$\mathbf{f}_{ae}^b = \mathbf{U} \cdot \mathbf{v}_{air}^b = \begin{pmatrix} u_x v_{xair}^b \\ u_y v_{yair}^b \\ u_z v_{zair}^b \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_x & 0 & 0 \\ 0 & u_y & 0 \\ 0 & 0 & u_z \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

kde  $u_i < 0$  jsou jednotlivé koeficienty úměrnosti pro jednotlivé směry,  $\mathbf{v}_{air}^b$  je vektor rychlosti vůči vzduchu vyjádřený v soustavě multikoptéry (tělesové).

### 3.1.3 Výstup dynamické části

#### Specifická síla

Specifická síla je dle definice součet všech negravitačních sil normovaný na jednotku hmoty. Pro tento model tedy platí:

$$\mathbf{f}^b = \frac{\mathbf{f}_m^b + \mathbf{f}_{ae}^b}{m} \quad (3.10)$$

kde  $m$  je hmotnost multikoptéry.

#### Úhlové zrychlení

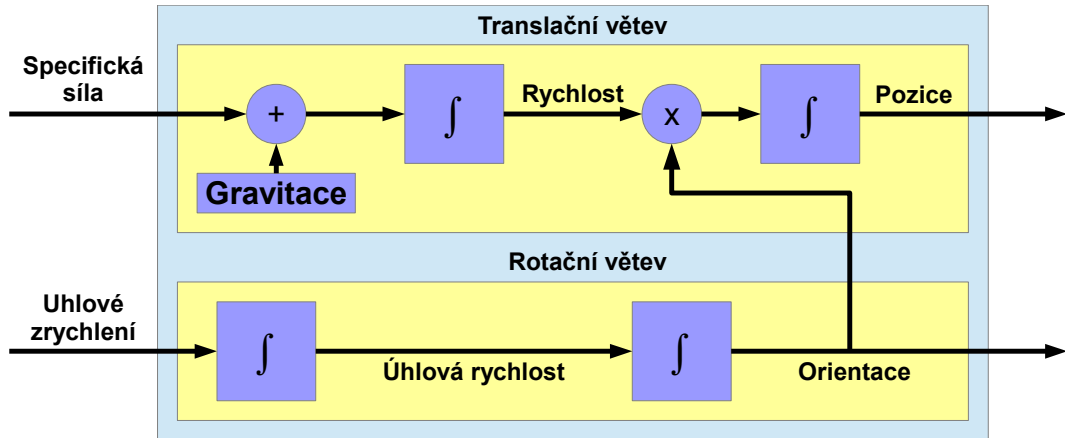
Celkové úhlové zrychlení lze určit pomocí vztahu:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^b = \frac{\boldsymbol{\tau}_m^b - \boldsymbol{\omega}^b \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}^b}{\mathbf{J}} \quad (3.11)$$

kde  $\mathbf{J}$  je tenzor momentu setrvačnosti multikoptéry.

## 3.2 Kinematická část

Zjednodušené schéma kinematické části je na obr. 3.4.



Obr. 3.4: Schéma kinematické části modelu

### 3.2.1 Rotační pohyb

Rotační pohyb je buzen úhlovým zrychlením, které je výstupem dynamické části. Časovou integrací úhlového zrychlení je získán vektor úhlové rychlosti:

$$\omega^b(t) = \omega^b(t_0) + \int_{t_0}^t \varepsilon^b(\tau) d\tau \quad (3.12)$$

Časový průběh vektoru úhlové rychlosti pak určuje časový vývoj samotné orientace (natočení tělesové soustavy vzhledem k soustavě navigační). Bohužel nelze využít znovu postup jednoduché časové integrace a to z důvodu složitosti popisu stavu orientace. Pro výpočet orientace je tedy nutné zvolit jednu z reprezentací uvedených v podkapitole 2.2. V rámci této práce bude pro vnitřní stavový popis orientace použito výhradně kvaternionů. Vývoj orientace bude tedy popsán vztahem (2.8).

### 3.2.2 Translační pohyb

Translační pohyb je popsán pozicí a rychlostí. Časový vývoj těchto veličin je buzen celkovým zrychlením, které je součtem specifické síly a gravitačního zrychlení. Gravitace by správně měla být zařazena do dynamické části, avšak pro lepší přehlednost je zmíněna až v kinematické části. Rychlost je možné vyjádřit jak v tělesové, tak v referenční soustavě. Záleží na konkrétní aplikaci, která ze dvou voleb je výhodnější.

Následující rovnice popisují časový vývoj rychlosti vyjádřené v tělesové (3.13) nebo navigační (3.14) souřadné soustavě:

$$\dot{\mathbf{v}}^b = \mathbf{f}^b + \mathbf{R}_n^b \mathbf{g}^n - \boldsymbol{\omega}^b \times \mathbf{v}^b \quad (3.13)$$

$$\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{R}_b^n \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^n \quad (3.14)$$

Rovnice pro časový vývoj pozice, která je vyjádřena v referenční souřadné soustavě, jsou různé podle toho, v jaké souřadné soustavě je vyjádřena rychlost:

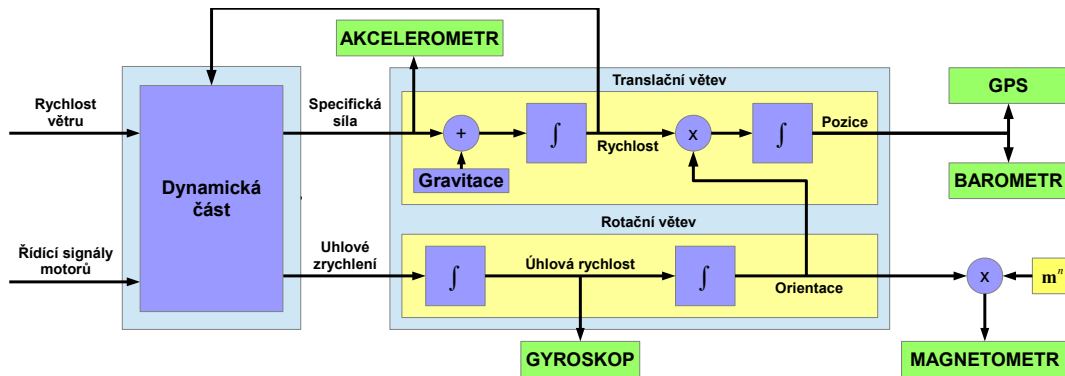
$$\dot{\mathbf{p}}^n = \mathbf{v}^n \quad (3.15)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^n = \mathbf{R}_b^n \mathbf{v}^b \quad (3.16)$$

### 3.3 Modely senzorů

Reálná multikoptéra je za účelem estimace orientace vybavena řadou senzorů, viz kapitola 2.3. Algoritmy uváděné v této práci byly testovány v simulacích, je tedy potřeba vytvořit náhradu za reálné senzory. Popis způsobu tvorby simulovaných senzorových hodnot je náplní této podkapitoly.

Základem pro všechny senzory je jejich tzv. pravá hodnota, která je určena referenčním modelem multikoptéry. Pravé hodnoty pro jednotlivé senzory jsou stručně popsány v následujících odstavcích. Na obr. 3.5 je pak ilustrováno navázání senzorů na model multikoptéry.



Obr. 3.5: Navázání senzorů na model multikoptéry

#### Tříosý akcelerometr

Tříosý akcelerometr měří tzv. specifickou sílu, což je součet všech negravitačních sil působících na jednotku hmoty. S ohledem na model multikoptéry je pravá hodnota akcelerometru přímo určena specifickou sílou, která je výstupem dynamické části:

$$\mathbf{acc}^b = \mathbf{f}^b \quad (3.17)$$

kde specifická síla  $\mathbf{f}^b$  je definovaná vztahem (3.10). Jelikož je akcelerometr pevně spojen s létajícím strojem, je hodnota vyjádřena v tělesové souřadné soustavě. Ze vztahů plyne, že součet sil od jednotlivých vrtulí se vždy projeví přírůstkem pouze v tělesové ose  $z$ . Aerodynamický odpor pak může podle aktuální rychlosti ovlivnit výstupy všech os akcelerometru. Pokud je uvažován lineární model odporu vzduchu, lze pak pomocí hodnot akcelerometru v osách  $x$  a  $y$  stanovit složky  $x$  a  $y$  vektoru rychlosti multikoptéry vůči vzduchu.

### Třiosý gyroskop

Gyroskop měří úhlovou rychlost. Pravá hodnota výstupu gyroskopu je tedy:

$$\mathbf{gyr}^b = \boldsymbol{\omega}^b \quad (3.18)$$

kde  $\boldsymbol{\omega}^b$  je definována vztahem (3.12). Opět je senzor pevně spojen s létajícím objektem a proto je vektor vyjádřený v tělesové souřadné soustavě. Při ustáleném letu je vektor úhlové rychlosti nulový. Nenulové hodnoty dosahuje při rotaci, tedy při změně orientace. Nastartování rotace je u multikoptér dosaženo rozvážením tahu jednotlivých vrtulí.

### Třiosý magnetometr

Magnetometr v reálném případě měří vektor magnetického pole. Užitečné je, s ohledem na estimaci orientace, pokud dominantní část tvoří magnetické pole země. Využívá se znalosti vektoru magnetického pole vyjádřeného v referenční souřadné soustavě. K tomu slouží např. magnetické mapy či modely. Pravou hodnotu simulovaného magnetometru tedy tvoří vektor magnetického pole země vyjádřený v tělesové souřadné soustavě:

$$\mathbf{mag}^b = \mathbf{R}_n^b \mathbf{m}_{ref}^n \quad (3.19)$$

kde  $\mathbf{m}_{ref}^n$  je vektor magnetického pole vyjádřený v referenční souřadné soustavě. Jedná se o parametr, který je obecně funkcí polohy, avšak u multikoptér se nepředpokládají lety na dlouhé vzdálenosti, takže pro účely simulací je možné uvažovat konstantní vektor. Skutečné magnetometry udávají svůj výstup v jednotkách magnetické indukce. Jelikož se v této práci bude měření magnetometru používat vždy pouze v podílu dvou hodnot, bude pro jednoduchost použit jako referenční vektor bezrozměrný normalizovaný vektor  $\mathbf{m}_{ref}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ , tedy i samotné měření magnetometru bude pro jednoduchost bezrozměrné.

## GPS přijímač

Ten obecně určuje pozici zpracováním signálů ze satelitů. Pravou hodnotou je tedy pozice:

$$\mathbf{GPS} = \mathbf{p}^n \quad (3.20)$$

kde časový vývoj  $\mathbf{p}^n$  se řídí vztahem (3.15)

## Barometr

Barometr obecně měří atmosférický tlak, který se dá přepočítat na nadmořskou výšku. V této práci však bude uvažován zjednodušený model, kdy barometr měří přímo výšku. Pravá hodnota je tedy:

$$baro = p_z^n \quad (3.21)$$

### 3.3.1 Univerzální chybový model senzoru

Pravé hodnoty sensorů jsou cíleně zkresleny tak, aby chybové vlastnosti co nejlépe odpovídaly reálným sensorům. Univerzální chybový model pro tříosé senzory je následující:

$$\mathbf{x}_{out} = \mathbf{S}\mathbf{x}_{in} + \mathbf{b} + \mathbf{w} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_x & m_{yx} & m_{zx} \\ m_{xy} & s_y & m_{zy} \\ m_{xz} & m_{yz} & s_z \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \mathbf{b}_{stat} + \mathbf{b}_{dyn} \quad (3.23)$$

kde  $\mathbf{x}_{in}$  je pravá hodnota,  $\mathbf{x}_{out}$  je výstupní vektor modelovaného tříosého senzoru,  $\mathbf{S}$  je matice odrážející multiplikativní chyby a chyby kolmosti os tříosých sensorů,  $\mathbf{b}$  je vektor celkových biasů skládajících se z konstantní (s časem neproměnné) části  $\mathbf{b}_{stat}$  a z dynamické části modelované Gauss-Markovským procesem 1. řádu  $\mathbf{b}_{dyn}$  [15],  $\mathbf{w}$  je vektor bílého (nekorelovaného) šumu s normálním rozdělením.

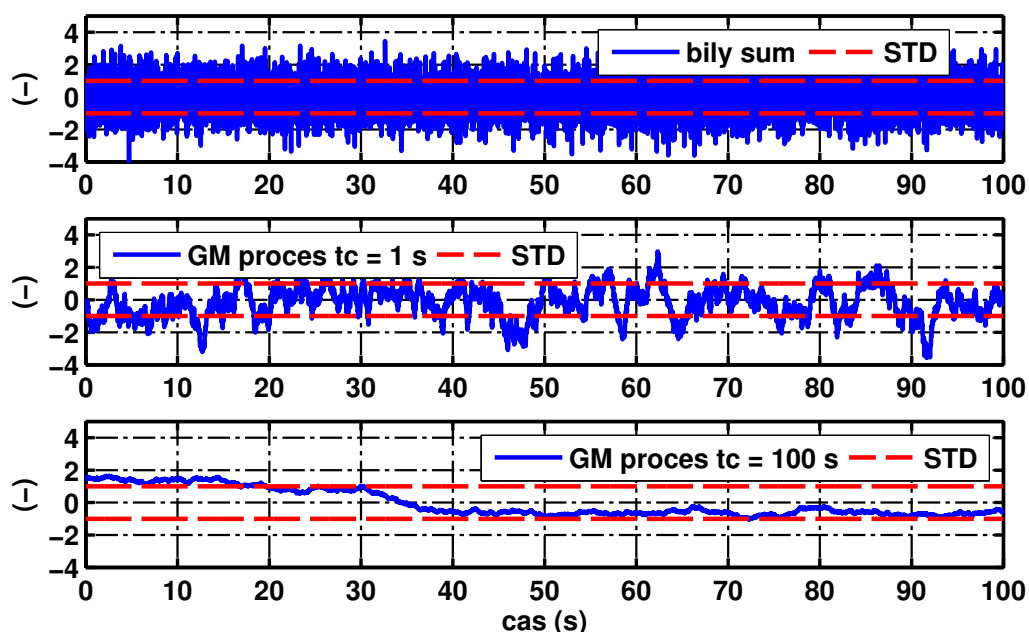
Model barometru jakožto jediného zástupce skalárního senzoru se řídí rovnicí:

$$x_{out} = kx_{in} + b + w \quad (3.24)$$

kde  $k = 1 + e$  je multiplikativní koeficient a  $e$  je multiplikativní chyba senzoru, zbylé veličiny jsou obdobné předchozímu vztahu s tím rozdílem, že se jedná o skalární veličiny.

V obou případech se jedná o standardní, často používaný chybový model senzoru, který naprosto dostačuje pro účely této práce. Chyby lze rozdělit na stochastické a deterministické. Stochastické jsou způsobeny náhodnými vlivy a patří mezi ně bílý

šum a korelovaný šum. Bílý šum je charakterizován standardní směrodatnou odchylkou, která udává hranice, ve kterých by mělo ležet 68.2 % všech hodnot. Korelovaný šum je charakterizovaný směrodatnou odchylkou a časovou konstantou. Standardní směrodatná odchylka opět udává hranice, ve kterých by mělo ležet přibližně 68.2 % všech hodnot. V případě korelovaného šumu je to však platné pouze pokud je použitý časový interval hodnot použitých pro stanovení směrodatné odchylky několikanásobně delší než časová konstanta. Grafy na obr. 3.6 ukazují rozdíly mezi bílým a korelovaným šumem (generovaný Gauss-Markovským procesem 1. řádu) a vliv časové konstanty Gauss-Markovského procesu. Charakteristikou stochastických chyb je nemožnost jejich kalibrace, která plyne z náhodné povahy těchto chyb.



Obr. 3.6: Ilustrace stochastických chyb senzorů

Mezi deterministické chyby patří ostatní složky chybového modelu a jejich dominantní část lze teoreticky odstranit kalibrací.



## 4 ALGORITMY ESTIMACE ORIENTACE

V této kapitole budou odvozeny jednotlivé algoritmy estimace stavu multikoptéry se zaměřením na orientaci. Nejprve bude popsána metoda Kalmanova filtru a odvozený rozšířený Kalmanův filtr. Ten je použit pro implementaci všech algoritmů. Potom budou následovat jednotlivé algoritmy. U každého algoritmu bude popsán princip, rovnice pro predikci stavu, rovnice pro měření a dále také způsob nastavení parametrů rozšířeného Kalmanova filtru.

### 4.1 Rozšířený Kalmanův filtr

Kalmanův filtr (KF) je standardní nástroj na estimaci (odhad) stavu dynamických systému [29], [20]. Tato estimace je prováděna iterativně ve dvou krocích. Predikce stavu na základě vstupů a predikčních rovnic (predikčního modelu). Dále pak korekce stavu na základě rovnic měření (modelu měření) a naměřených hodnot použitých senzorů. Rozšířený Kalmanův filtr je pak modifikace lineárního KF pro použití v případech, kdy predikční rovnice nebo rovnice měření nejsou lineární. Rozšířený KF již nemá takové charakteristiky jako lineární KF, ale i tak se jedná o velmi užitečný a používaný nástroj na estimaci stavu nelineárních dynamických systémů. Nelineární diskrétní dynamický systém lze pomocí stavového popisu vyjádřit rovnicemi:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_{k+1}) + \boldsymbol{\gamma} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\nu} \quad (4.2)$$

kde  $\mathbf{x}_k$  označuje stavový vektor v časovém kroku  $k$ ,  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{h}$  jsou nelineární vektorové funkce,  $\mathbf{u}_k$  je vektor vstupů do systému v časovém kroku  $k$ ,  $\mathbf{y}_k$  je vektor výstupů systému (měření) v časovém kroku  $k$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  označuje aditivní stavový šum a  $\boldsymbol{\nu}$  označuje aditivní šum měření.

Diskrétní rovnice pro rozšířený Kalmanův filtr odhadující stav systému popsaného výše jsou [29]:

#### Krok predikce

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_{k+1}) \quad (4.3)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \quad (4.4)$$

## Krok korekce

$$\mathbf{K} = \left( \hat{\mathbf{P}}_{k+1} \cdot \mathbf{H}^T \right) \left( \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{k+1} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{R} \right)^{-1} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1} + \mathbf{K} (\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1})) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{H}) \hat{\mathbf{P}}_{k+1} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{F} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_{k+1}} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k} \quad (4.9)$$

kde  $\mathbf{P}$  je kovarianční matice stavu,  $\mathbf{Q}$  je kovarianční matice aditivního stavového šumu,  $\mathbf{R}$  je kovarianční matice aditivního šumu měření a  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{H}$  jsou Jacobiho matice funkcí  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{h}$ . Tyto rovnice vychází z lineárního Kalmanova filtru a z toho také plynou předpoklady pro vlastnosti šumů  $\boldsymbol{\gamma}$  a  $\boldsymbol{\nu}$ . Předpokládá se, že tyto šумы jsou gaussovské s nulovou střední hodnotou a bílé (v čase nekorelované).

Krok predikce sestává z výpočtu stavových rovnic. Současně je také spočítána stavová kovarianční matice, která jednoduše řečeno udává odhad přesnosti jednotlivých složek stavového vektoru a to ve formě směrodatné odchylky. Tato informace je důležitá pro krok korekce, kdy na základě kovarianční matice stavu a kovarianční matice měření je spočítán tzv. zisk  $\mathbf{K}$ . Podle zisku jsou pak jednotlivé složky stavového vektoru korigovány na základě reziduí, což je rozdíl skutečně naměřených hodnot a predikovaných hodnot. Jelikož spolu se stavovým vektorem je odhadována i kovarianční matice, má uživatel v každém okamžiku k dispozici nejenom hodnotu odhadnutého stavu, ale také odhad jak přesná tato hodnota je.

Algoritmus odhadu stavu založený na rozšířeném Kalmanově filtru je primárně definován veličinami stavového prostoru a funkcemi  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{h}$ . Neméně důležité je ovšem i správné stanovení kovariančních matic  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$ .

Kovarianční matice  $\mathbf{Q}$  charakterizuje aditivní procesní šумы. Tyto šумы typicky odrážejí nejistoty vstupující do jednotlivých stavů při výpočtu funkce  $\mathbf{f}$ . Nejčastějším zdrojem těchto nejistot je vstupní vektor  $\mathbf{u}_k$ , jehož hodnoty jsou často tvořeny hodnotami z reálných senzorů. Dalším úkolem matice  $\mathbf{Q}$  je buzení procesů, které modelují vývoj stavu parametrů či chybových stavů senzorů. Typickým příkladem takového procesu je např. Gauss-Markovský (GM) proces 1. řádu či proces náhodné procházky (jedná se o limitní GM proces pro  $\tau = \infty$ ). Kovarianční matici  $\mathbf{Q}$  lze tedy rozdělit na dvě podmatice, kdy jedna reprezentuje šумы přidané do stavů přes vstupní vektor  $\mathbf{u}_k$  a druhá reprezentuje budící šумы procesů modelujících parametry:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_x + \mathbf{Q}_{gm} \quad (4.10)$$

Část  $\mathbf{Q}_x$  je vhodné vyjádřit jako funkci chybových vlastností vstupních dat. Toho lze dosáhnout oboustranným přenásobením kovarianční matice popisující chybové vlastnosti vstupů Jacobiho maticí parciálních derivací stavových rovnic podle jednotlivých vstupů [22]:

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{B}\mathbf{Q}_u\mathbf{B}^T \quad (4.11)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_k}, \mathbf{Q}_u = \begin{pmatrix} \sigma_{u_1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{u_n}^2 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

kde  $\sigma_{u_i}^2$  jsou rozptyly (variance) pro jednotlivé složky vstupního vektoru. Kovarianční matici budících šumů lze pak zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{Q}_{gm} = \left( \begin{array}{c|ccc} \mathbf{0}_{m \times m} & & & \\ \hline & \mathbf{0}_{m \times k} & & \\ & \sigma_{d|1}^2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{k \times m} & & & \\ & 0 & \cdots & \sigma_{d|k}^2 \end{array} \right) \quad (4.13)$$

kde  $n$  je dimenze stavového prostoru,  $k$  je počet stavů modelovaných GM procesem a  $m = n - k$ .

Kovarianční matice  $\mathbf{R}$  charakterizuje šumové vlastnosti použitých měření. Předpokládá se, že tyto šумы jsou opět bílé a gaussovské.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_{y|1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{y|r}^2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

kde  $r$  je dimenze vektoru měření. V tomto zápisu se apriorně předpokládá, že chyby pro jednotlivé složky vektoru měření jsou nekorelované (vzájemně nezávislé). Nejedná se o obecný případ, ale v rámci této práce budou uvažovány pouze chyby vstupů a měření bez vzájemných korelací.

Pomocí uvedených matic  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$  je možné popsat pouze nekorelované gaussovské šумы. Ne vždy je možné ať už procesní šумы či šумы měření takto aproximovat. Jak ukazuje příklad v kapitole 2.3 projevy korelovaných chyb (biasu) jsou řádově větší než projevy bílého šumu. Korelované chyby jsou bohužel přítomny téměř ve všech senzorech nižší třídy, na které je cílena i tato práce. Jednou z možností jak zmírnit projevy korelovaných chyb sensorů (ať už těch použitých jako vstupy nebo měření) je jejich zahrnutí do stavového prostoru. Zvětší se tím sice nároky na výpočetní výkon, avšak často je tato volba rozdílem mezi funkčností a nefunkčností algoritmu. Základními modely korelovaných chyb jsou již zmíněný Gauss-Markovský proces 1. řádu a proces náhodné procházky [15], které budou podrobněji popsány dále v práci.

Jelikož je Kalmanův filtr iterativní algoritmus, jinými slovy výpočet nového odhadu stavu je prováděn v pravidelných intervalech na základě předchozího stavu, aktuálních vstupů a měření, je nutné před prvním krokem stanovit počáteční hodnotu stavového vektoru  $\mathbf{x}_0$  a zároveň počáteční kovarianční matici stavu  $\mathbf{P}_0$ . Stanovení těchto hodnot je problém sám o sobě. Jelikož jsou algoritmy v rámci této práce ověřovány pouze v simulacích, kdy jsou známy skutečné hodnoty stavu, nebude problém reálné inicializace počátečních hodnot v práci dále rozebírán a bude se využívat skutečných hodnot.

Dále je vhodné zmínit, že krok korekce nemusí být nutně prováděn každou iteraci. Různé senzory totiž poskytují data na různých frekvencích. Krok korekce se tedy provádí až v momentě, kdy jsou k dispozici nová data z daného senzoru. Typickým příkladem je GPS přijímač, který je většinou schopen poskytovat údaj o poloze pouze jednou za vteřinu.

## 4.2 Stavové veličiny a rovnice

Stavový prostor jednotlivých algoritmů je možné rozdělit do několika skupin, kdy se tyto skupiny v algoritmech většinou opakují. Z toho důvodu budou v této kapitole tyto skupiny stavových veličin popsány. U jednotlivých algoritmů již pak bude uvedeno, které ze stavových skupin jsou součástí stavového prostoru daného algoritmu. Všechny algoritmy estimace orientace uvedené v této práci lze odvodit na základě matematického modelu multikoptéry. Jelikož rovnice uvedené v kapitole o matematickém modelu multikoptéry jsou spojité, je nutné je pro použití v diskretním Kalmanově filtru diskretizovat. Toho je dosaženo obdélníkovou metodou numerické integrace.

### Orientace

Jelikož cílem algoritmů je odhadovat orientaci, je zřejmé, že orientace bude součástí stavového prostoru u všech algoritmů. Pro stavovou reprezentaci orientace jsou v rámci této práce voleny kvaterniony. Výhodou kvaternionů je jejich nesingulární popis a menší počet prvků oproti rotačním maticím. Dalším důvodem je také jednodušší způsob normalizace kvaternionu. Kvaternion popisující orientaci musí být jednotkový vektor. Při numerických výpočtech je tato podmínka porušována a každý krok je třeba kvaternion normalizovat. U rotačních matic je analogicky třeba udržovat podmínku ortonormalnosti, což je složitější problém v porovnání s obyčejnou normalizací vektoru.

Orientace se ve stavovém prostoru objevuje ve formě kvaternionu:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix}^T \quad (4.15)$$

Diskrétní stavová rovnice pro vývoj kvaternionu je pak:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta \mathbf{q}_k(\mathbf{q}_k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k+1}) \quad (4.16)$$

$$\Delta \mathbf{q}_k(\mathbf{q}_k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k+1}^b) = \frac{\Delta t}{2} \begin{pmatrix} -q_2 \tilde{\omega}_x - q_3 \tilde{\omega}_y - q_4 \tilde{\omega}_z \\ +q_1 \tilde{\omega}_x - q_4 \tilde{\omega}_y + q_3 \tilde{\omega}_z \\ +q_4 \tilde{\omega}_x + q_1 \tilde{\omega}_y - q_2 \tilde{\omega}_z \\ -q_3 \tilde{\omega}_x + q_2 \tilde{\omega}_y + q_1 \tilde{\omega}_z \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k+1}^b = (\mathbf{gyr}_{k+1}^b - \mathbf{b}_{g|k}) \quad (4.18)$$

kde  $\Delta t$  je perioda vzorkování,  $\mathbf{gyr}^b$  je vektor úhlové rychlosti měřený gyroskopem,  $\mathbf{b}_g$  je odhadnutý bias gyroskopu. U jednotlivých složek kvaternionu a vektoru kompenzované úhlové rychlosti  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^b$  v rovnici (4.17) jsou pro přehlednost vynechány indexy kroku a souřadné soustavy. Tato stavová rovnice vychází přímo ze vztahu (2.8) využitím obdélníkové integrace mezi časovými kroky  $k$  a  $k + 1$ . Jediným rozdílem je použití vektoru kompenzovaného úhlového zrychlení, což je rozdíl vektoru měřeného gyroskopem a odhadnutého biasu gyroskopu (4.18). Bias gyroskopu je také součástí stavu všech algoritmů a bude podrobněji zmíněn později. Ke kvaternionu se ještě pojí již zmíněná normalizace, kterou je nutné provést po každé iteraci Kalmanova filtru. Jak již bylo zmíněno, jedná se o obyčejnou normalizaci vektoru na jednotkovou velikost, kterou lze vyjádřit vztahem:

$$\mathbf{q}_{norm} = \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \quad (4.19)$$

## Rychlost

Vektor rychlosti je opět stavem vyskytujícím se ve všech algoritmech v rámci této práce. Je voleno vyjádření v tělesové souřadné soustavě a to především kvůli jednodušším výpočtům v algoritmech uvažujících dynamický model multikoptéry. Stavové rovnice pro rychlost jsou založeny na integraci součtu specifické síly a gravitačního zrychlení:

$$\mathbf{v}_{k+1}^b = \mathbf{v}_k^b + \Delta \mathbf{v}_k^b(\mathbf{q}_k, \mathbf{f}_{k+1}^b, \mathbf{v}_k^b, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k+1}^b) \quad (4.20)$$

$$\Delta \mathbf{v}_k^b = \Delta t [\mathbf{R}_n^b(\mathbf{q}_k) \mathbf{g}^n + \mathbf{f}_{k+1}^b - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^b \times \mathbf{v}_k^b] \quad (4.21)$$

kde  $\Delta t$  je perioda vzorkování,  $\mathbf{R}_n^b(\mathbf{q}_k)$  je rotační matice definovaná v (2.10),  $\mathbf{g}^n = (0 \ 0 \ 9.81)^T \text{ ms}^{-2}$  je vektor gravitačního zrychlení,  $\mathbf{f}_{k+1}^b$  je vektor specifické síly, jehož konkrétní výpočet je různý v různých algoritmech a bude blíže specifikován v podrobnějším popisu jednotlivých algoritmů. Diskrétní rovnice pro rychlost je opět odvozena ze spojitě verze (3.13).

## Pozice

Vektor pozice je nutnou součástí stavu pouze některých algoritmů. Při výpočtu se vychází ze vztahu k rychlosti (3.16):

$$\mathbf{p}_{k+1}^n = \mathbf{p}_k^n + \Delta t \mathbf{R}_b^n(\mathbf{q}_k) \mathbf{v}_k^b \quad (4.22)$$

kde byl zanedbán vliv zrychlení. To je možné pro krátké periody vzorkování.

## Stavy modelované jako Gauss-Markovský proces 1. řádu

Gauss-Markovský (GM) proces 1. řádu byl již zmiňován na několika místech v této práci. Jedná se o stochastický proces, který se často používá pro modelování stavů v Kalmanově filtru, u kterých nelze zanedbat časovou korelaci. Spojitý Gauss-Markovský proces 1. řádu je definován rovnicí [15]:

$$\dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{\tau} + w \quad (4.23)$$

kde  $\tau > 0$  je časová konstanta procesu a  $w$  je bílý šum se spektrální hustotou výkonu  $N$ . Ustálená standardní odchylka procesu je:

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{N\tau}{2}} \quad (4.24)$$

Diskrétní forma Gauss-Markovského procesu 1. řádu je [15]:

$$x_{k+1} = \beta_D x_k + W \quad (4.25)$$

kde  $\beta_D = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}$  a  $W$  je diskrétní bílý šum se standardní směrodatnou odchylkou  $\sigma_d = \sqrt{\sigma_s \left[1 - e^{-\frac{2\Delta t}{\tau}}\right]}$ . Bílý šum  $W$  je také někdy nazýván budícím šumem procesu. Pokud je stav Kalmanova filtru modelován jako Gauss-Markovský proces 1. řádu, je použita stavová predikční rovnice ve tvaru:

$$x_{k+1} = \beta_D x_k \quad (4.26)$$

Bílý šum je v této rovnici vynechán, jelikož se předpokládá nulová střední hodnota. Vlastnosti budícího bílého šumu jsou součástí kovarianční matice  $\mathbf{Q}$ , tak jak je ukázáno v rovnici (4.13). Výhodnou vlastností GM procesu je jeho stabilita. Tu lze chápat tak, že proces má omezenou varianci i bez jakékoliv pozorovatelnosti. Limitními případy GM procesu jsou:

- Pro  $\tau \rightarrow 0$  tzn. pro  $\beta_D = 0$  je GM proces degradován na budící bílý šum.
- Pro  $\tau \rightarrow \infty$  tzn. pro  $\beta_D = 1$  ztrácí GM proces svoji stabilitu. Tento speciální případ se nazývá tzv. náhodná procházka (z angl. random walk). Tento proces již není stabilní a jeho variance roste lineárně s časem, tedy směrodatná odchylka roste s odmocninou z času.

Následuje výčet veličin, které jsou v rámci algoritmů modelovány jako Gauss-Markovský proces 1. řádu:

- Biasy akcelerometru a gyroskopu (přítomny ve všech algoritmech)
- Parametry modelu multikoptéry u algoritmů s automatickým odhadem těchto parametrů

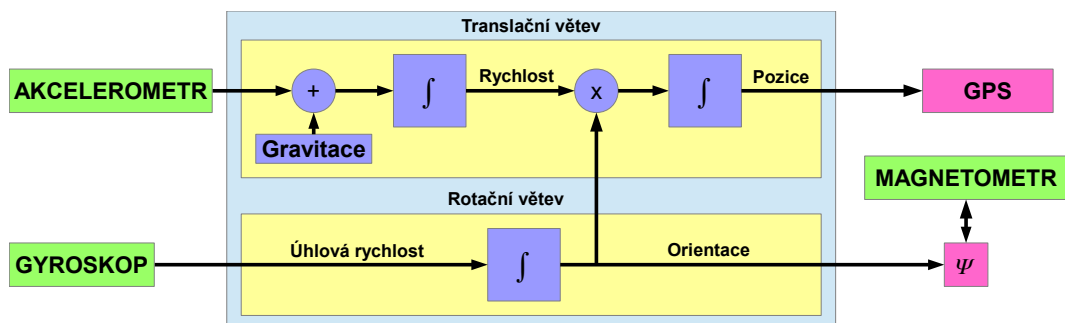
## 4.3 GPS/INS

Algoritmus GPS/INS je v této práci uveden především pro srovnávací účely. Hlavním přínosem práce jsou algoritmy založené na matematickém modelu multikoptéry, ovšem tyto algoritmy mají s GPS/INS mnoho společného. Navíc nově navržené algoritmy by měli být náhradou za GPS/INS, proto je vhodné jejich výsledky srovnávat právě s tímto algoritmem.

Název GPS/INS je složenina dvou zkratk:

- GPS (z angl. Global Positioning System) což znamená globální poziční systém. Jedná se o původní Americký systém založený na konstelaci satelitů, které vysílají specifické rádiové signály. Na základě zpracování těchto signálů je možné určit absolutní polohu přijímače vůči zemi.
- INS (z angl. Inertial Navigation System) což v překladu znamená inerciální navigační systém. INS je standardem v oblasti navigace a rozumí se tím způsob určení kinematického stavu (orientace, rychlost, pozice) zpracováním dat z tzv. inerciální měřicí jednotky (angl. Inertial Measurement Unit - IMU), která je složená z tříosého gyroskopu a tříosého akcelerometru.

Algoritmus GPS/INS pak obecně vytváří systém, který využívá obou podsystémů k určení kinematického stavu. Výhodou integrace obou systémů do jednoho je zvýšení přesnosti či zmírnění požadavků na přesnost inerciálních senzorů při zachování přesnosti odhadnutého kinematického stavu.



Obr. 4.1: Schéma predikčního modelu algoritmu GPS/INS

Schéma algoritmu je patrné z obr. 4.1, které vychází z kinematické části matematického modelu multikoptéry. Růžově jsou označeny predikované hodnoty měření, které jsou následně porovnávány se skutečně naměřenými hodnotami. Inerciální senzory (gyroskop a akcelerometr) jsou použity jako vstupy Kalmanova filtru:

$$\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{gyr}_k^b \\ \mathbf{acc}_k^b \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Odpovídající kovarianční matice vstupů:

$$\mathbf{Q}_u = \text{diag} \left( \sigma_{gx}^2 \quad \sigma_{gy}^2 \quad \sigma_{gz}^2 \quad \sigma_{ax}^2 \quad \sigma_{ay}^2 \quad \sigma_{az}^2 \right) \quad (4.28)$$

Stavový prostor obsahuje kinematický stav (pozice, rychlost, orientace) a biasy gyroskopu a akcelerometru:

$$\mathbf{x} = \left( \mathbf{q} \quad \mathbf{v}^b \quad \mathbf{p}^n \quad \mathbf{b}_g \quad \mathbf{b}_a \right)^T \quad (4.29)$$

Stavové rovnice jsou tvořeny rovnicemi (4.16), (4.20), (4.22). Pro časový vývoj jednotlivých složek biasů je pak použit vztah (4.26), který je možné přepsat do tvaru:

$$\mathbf{b}_{g|k+1} = \beta_d^g \mathbf{b}_{g|k} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{b}_{a|k+1} = \beta_d^a \mathbf{b}_{a|k} \quad (4.31)$$

kde  $\mathbf{b}_g$  je vektor biasů gyroskopu,  $\mathbf{b}_a$  je vektor biasů akcelerometru,  $\beta_d^g$  a  $\beta_d^a$  jsou parametry odrážející časové konstanty GM procesů. Parametry budících šumů GM procesů jsou obsaženy v kovarianční matici:

$$\mathbf{Q}_{gm} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{10 \times 10} & \mathbf{0}_{10 \times 6} \\ \hline \mathbf{0}_{6 \times 10} & \mathbf{Q}' \end{array} \right) \quad (4.32)$$

$$\mathbf{Q}' = \text{diag} \left( \sigma_{d|gx}^2 \quad \sigma_{d|gy}^2 \quad \sigma_{d|gz}^2 \quad \sigma_{d|ax}^2 \quad \sigma_{d|ay}^2 \quad \sigma_{d|az}^2 \right) \quad (4.33)$$

Specifická síla vyskytující se v rovnici (4.20) je v případě GPS/INS stanovena přímo z měření akcelerometru s tím, že je od vektoru odečtena hodnota odhadnutého biasu:

$$\mathbf{f}_{k+1}^b = \mathbf{acc}_{k+1}^b - \mathbf{b}_{a|k} \quad (4.34)$$

## Rovnice měření

Rovnice měření slouží k výpočtu predikovaných hodnot senzorů, které jsou použity pro korekci. Pro korekci stavu algoritmu GPS/INS je použita měřená pozice (v tomto případě určená GPS přijímačem) a měření z magnetometru:

$$\mathbf{y}_k = \left( \mathbf{GPS}_k \quad \psi_m \left( \mathbf{mag}_k^b, \hat{\mathbf{q}}_k \right) \right)^T \quad (4.35)$$



kde způsob výpočtu kurzu  $\psi_m$  z magnetického měření je popsán v kapitole 2.3. Data z GPS přijímače jsou použity přímo bez jakéhokoliv předzpracování.

Predikovaná hodnota pro výstup GPS přijímače se určí ze stavového prostoru jednoduše:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{GPS} = \mathbf{p}^n \quad (4.36)$$

Kurz je potom ze stavového prostoru určen vztahem:

$$\tilde{y}_{kurz} = \arctg2 \left[ 2(q_2q_3 + q_1q_4), (q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2) \right] \quad (4.37)$$

kde funkce  $\arctg2$  je čtyř-kvadrantový ekvivalent funkce  $\arctg$ . Celkově tedy pro predikovanou hodnotu měření vychází:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k) = \left( \tilde{\mathbf{y}}_{GPS} \quad \tilde{y}_{kurz} \right)^T \quad (4.38)$$

Měřená a predikovaná hodnota kurzu se v Kalmanově filtru vyskytují ve formě rozdílu, tzv. rezidua. Jelikož úhel kurzu může nabývat hodnot pouze od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ , pak úhlová vzdálenost mezi dvěma úhly může nabývat hodnot pouze od  $-180^\circ$  do  $180^\circ$ . Obyčejný rozdíl však může vyprodukovat větší hodnoty. Je proto nutné kontrolovat velikost rozdílu a případné překročení mezí korigovat přičtením, či odečtením  $360^\circ$ .

Kovarianční matice měření má tvar:

$$\mathbf{R} = \text{diag} \left( \sigma_{gps|x}^2 \quad \sigma_{gps|y}^2 \quad \sigma_{gps|z}^2 \quad \sigma_{kurz}^2 \right) \quad (4.39)$$

kde  $\sigma_{gps|i}$  je standardní odchylka bílého šumu, který aproximuje všechny chyby polohy určené GPS přijímačem,  $\sigma_{kurz}$  je pak standardní směrodatná odchylka vypočteného kurzu.

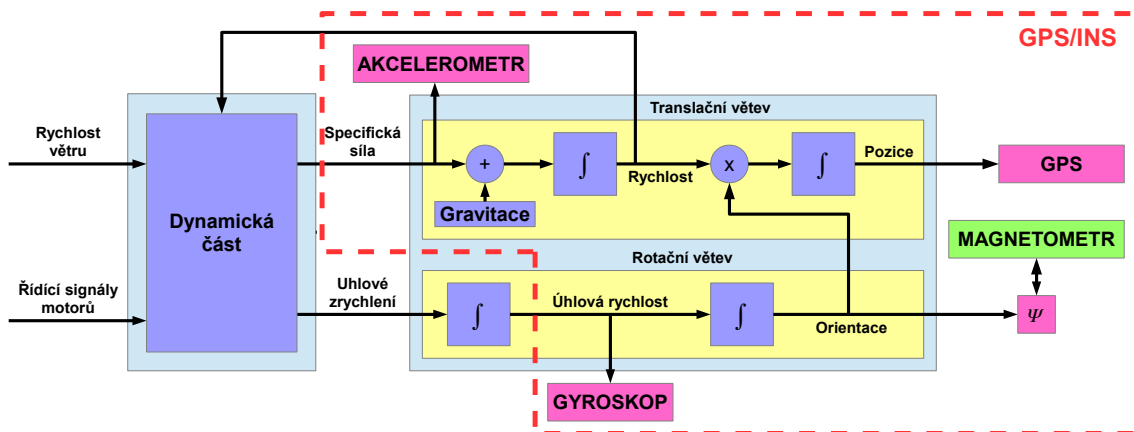
## 4.4 Použití dynamického modelu

Jak bude vidět dále v práci, algoritmus GPS/INS je při použití levných senzorů závislý na měření pozice. Bez této informace dochází rychle k degradaci přesnosti. Algoritmy zahrnující matematický model multikoptéry si kladou za cíl odstranit tuto závislost a poskytnou orientaci s omezenou chybou i bez měření absolutní pozice. Svým způsobem jsou tyto algoritmy pouhým rozšířením algoritmu GPS/INS. Hlavní rozdíly oproti algoritmu GPS/INS jsou patrné z obr. 4.2, na kterém je přerušovanou červenou čarou vyznačena oblast odpovídající algoritmu GPS/INS.

Zahrnutí dynamického modelu přináší v první řadě alternativní způsob získání hodnot specifické síly a úhlové rychlosti. Pokud jsou dobře definované chybové vlastnosti těchto hodnot, je možné dokázat, že váženým průměrováním se senzorickými

hodnotami je dosaženo hodnot, které jsou přesnější než původní hodnoty samotné. Důsledkem toho je zpřesnění odhadu všech ostatních stavů, jelikož jsou přímo závislé na specifické síle nebo úhlové rychlosti.

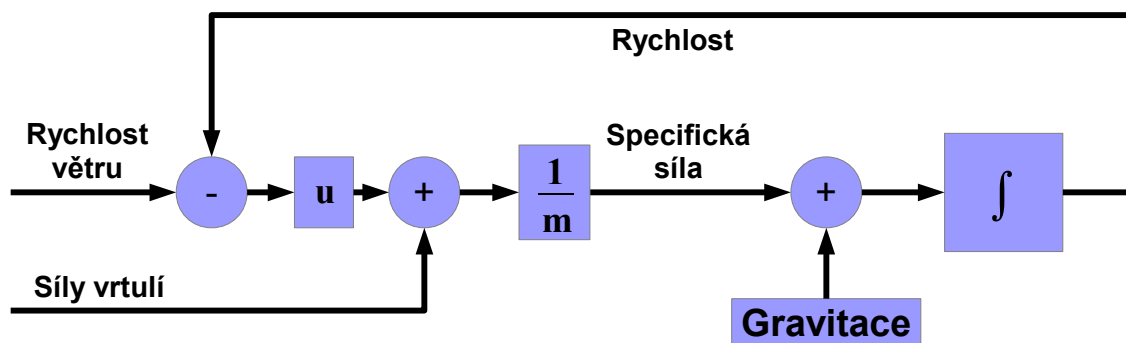
Dalším, méně patrným přínosem je zpětná vazba vedoucí od rychlosti zpět do dynamické části, kde je tato rychlost použita pro výpočet aerodynamické odporové síly. Zjednodušené schéma této vazby je vykresleno na obr. 4.3. Tato vazba je díky chování odporu vzduchu záporná a způsobuje vlastní stabilitu této části modelu. Stabilita je poměrně lehce odůvodnitelná pozorováním reálného světa. V prostředí, kde na tělesa působí aerodynamická odporová síla, která se s rostoucí rychlostí zvětšuje, má jakýkoliv pohyb tendenci se ustalovat i při konstantním silovém působení. Důkazem může být kámen hozený z letadla. Rychlost takového kamene poroste až do chvíle, kdy odporová síla dosáhne právě takové velikosti jako gravitační síla působící na kámen.



Obr. 4.2: Základní schéma predikčního modelu algoritmu zahrnujícího model multikoptéry

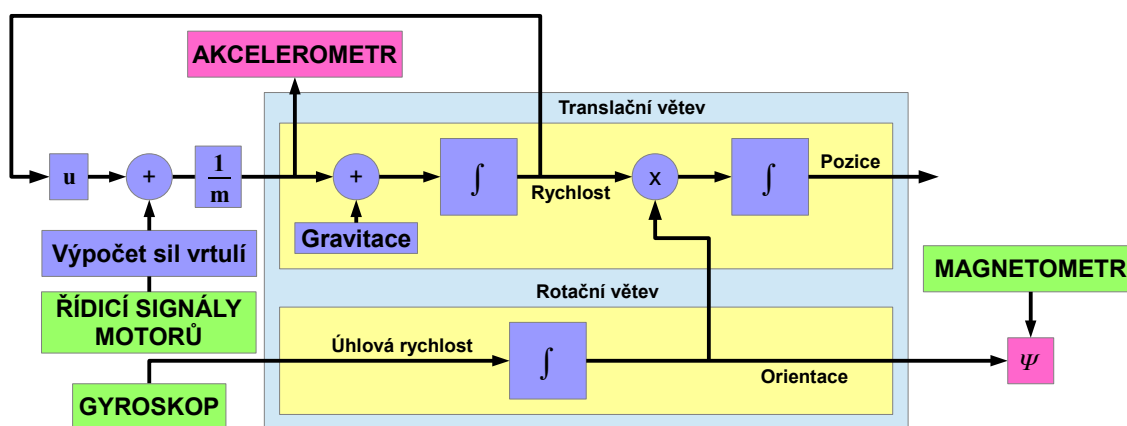
Vliv zpětné vazby na chování algoritmu má naprosto dominantní vliv oproti zpřesnění plynoucího z nového zdroje informace pro specifickou sílu a úhlové zrychlení. Proto je vhodné vynechat rotační část dynamického modelu [25], u které dochází pouze ke zpřesnění. Nárůst přesnosti při použití rotační části je totiž zanedbatelný. Je patrné, že oproti GPS/INS je nutné mít k dispozici informaci o silách, které produkují jednotlivé motory s vrtulemi. Tuto informaci lze získat například ve formě řídicích signálů, které jsou pravidelně posílány do budičů motorů. Dále je potřebná znalost parametrů multikoptéry.

Na obr. 4.4 je finální schéma algoritmu estimace orientace založeném na modelu multikoptéry při nevyužití rotační části modelu. Rotační část je buzena pouze gy-



Obr. 4.3: Zpětná vazba při použití dynamického modelu

roskopem. V translační části se pro výpočet specifické síly vyžívá matematického modelu a akcelerometr je tudíž použit pro korekci stavu jako měření. V základní verzi je také vynecháno měření pozice. Důležitým předpokladem algoritmů uvedených v této kapitole je nulová rychlost větru. U algoritmů, které mají na vstupu řídicí signály motorů se uvažuje multikoptéra se šesti rotory - hexakoptéra. Jednoduchou modifikací lze však algoritmy upravit na jiné počty rotorů.



Obr. 4.4: Schéma predikčního modelu základního algoritmu s modelem multikoptéry

### 4.4.1 Základní algoritmus založený na modelu multikoptéry

Jako vstupy do základního algoritmu jsou uvažovány gyroskop a řídicí signály motorů:

$$\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{gyr}_k^b \\ d_{1|k} \\ \vdots \\ d_{6|k} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

kde  $d_i$  je řídicí signál  $i$ -tého motoru, který má k úhlové rychlosti vrtule vztah  $\omega_i = c_m d_i$ . Kovarianční matice vstupů je tentokrát:

$$\mathbf{Q}_u = \text{diag} \left( \sigma_{gx}^2 \quad \sigma_{gy}^2 \quad \sigma_{gz}^2 \quad \sigma_c^2 \quad \cdots \quad \sigma_c^2 \right) \quad (4.41)$$

kde  $\sigma_c$  je standardní směrodatná odchylka bílého šumu aproximující všechny chyby řídicích signálů motorů.

Stavový prostor základního algoritmu je totožný s GPS/INS:

$$\mathbf{x} = \left( \mathbf{q} \quad \mathbf{v}^b \quad \mathbf{p}^n \quad \mathbf{b}_g \quad \mathbf{b}_a \right)^T \quad (4.42)$$

Ovšem v tomto případě je pozice volitelný stav, který nemá na odhad orientace žádný vliv.

Stavové rovnice jsou překvapivě totožné s algoritmem GPS/INS a jsou určeny vztahy (4.16), (4.20), (4.22), (4.30), (4.31). Fundamentálním rozdílem je pouze výpočet specifické síly vystupující v rovnici (4.20). Specifická síla je totiž spočtena na základě translační části dynamického modelu multikoptéry s použitím aktuálně odhadnuté rychlosti a řídicích signálů motorů:

$$\mathbf{f}_{k+1}^b = \frac{\mathbf{f}_{m|k+1}^b + \mathbf{f}_{ae|k+1}^b}{m} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{f}_{m|k+1}^b = -k_m \sum_{i=1}^6 \left( c_m d_{i|k+1} \right)^2 \mathbf{z}^b \quad (4.44)$$

$$\mathbf{f}_{ae|k+1}^b = \mathbf{U} \mathbf{v}_k^b \quad (4.45)$$

kde  $\mathbf{z}^b$  je jednotkový vektor ve směru osy  $z$  tělesové souřadné soustav,  $\mathbf{U}$  je matice definovaná ve vztahu (3.9) a parametr  $k_m$  je definován ve vztahu (3.1).

Biasy akcelerometrů a gyroskopů jsou modelovány stejným způsobem jako v algoritmu GPS/INS, tudíž i kovarianční matice budících šumů má stejný tvar jako v rovnicích (4.32), (4.33).

#### Rovnice měření

Jak již bylo zmíněno, akcelerometr se v tomto algoritmu používá pro korekci stavu, je tedy součástí měření. Spolu s ním je opět použit magnetometr na určení kurzu:

$$\mathbf{y}_k = \left( \mathbf{acc}_k^b \quad \psi_m \left( \mathbf{mag}_k^b, \hat{\mathbf{q}}_k \right) \right)^T \quad (4.46)$$

Predikovaná hodnota výstupu akcelerometru je založena na vypočtené specifické síle, ke které je připočten odhadnutý bias akcelerometru:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{acc|k} = \mathbf{f}_k^b + \hat{\mathbf{b}}_{a|k} \quad (4.47)$$

Predikovaná hodnota pro kurz je opět stanovena pomocí vztahu (4.37). Kovarianční matice měření

$$\mathbf{R} = \text{diag} \left( \sigma_{acc|x}^2 \quad \sigma_{acc|y}^2 \quad \sigma_{acc|z}^2 \quad \sigma_{kurz}^2 \right) \quad (4.48)$$

kde  $\sigma_{acc|i}^2$  je standardní odchylka bílého šumu akcelerometru,  $\sigma_{kurz}$  je opět standardní směrodatná odchylka kurzu vypočteného z magnetometru.

#### 4.4.2 Algoritmus založený na modelu multikoptéry s automatickým odhadem parametrů

Předchozí algoritmus předpokládá dokonalou znalost parametrů modelu multikoptéry. Jmenovitě se jedná o tyto parametry:

- $m$  - hmotnost multikoptéry
- $c_m$  - koeficient pro přepočítání řídicího signálu motoru na otáčky vrtule
- $k_m$  - koeficient pro přepočítání otáček vrtule na vztlakovou sílu
- $\mathbf{U}$  - matice obsahující koeficienty odporu vzduchu pro jednotlivé osy

Hmotnost multikoptéry je jistě parametr, jehož určení nečiní v reálném případě velké problémy. U zbylých parametrů je situace poněkud složitější, vyžadující většinou složité měřicí aparatury nebo v případě parametrů odporu vzduchu návštěvu aerodynamického tunelu. Myšlenkou je tedy zprostit potenciálního uživatele zařízení obsahujícího zde odvozené algoritmy od povinnosti stanovit tyto parametry pro jeho konkrétní multikoptéru.

Nejednodušším způsobem je zahrnutí těchto parametrů do stavového prostoru. Pro výše zmíněné parametry by se tím zvedla dimenze stavového prostoru o 6. Analýzou vztahů, ve kterých tyto parametry vystupují, lze však tento nárůst dimenze redukovat a tím zvýšit pravděpodobnost, že systém i s parametry ve stavu bude pozorovatelný. Veškeré parametry modelu se vyskytují pouze ve vztahu pro výpočet specifické síly (4.43). Přeskupením lze dosáhnout následujícího výrazu:

$$\mathbf{f}^b = \frac{\mathbf{f}_m^b}{m} + \frac{\mathbf{f}_{ae}^b}{m} = \frac{-k_m c_m^2}{m} \mathbf{z}^b \sum_{i=1}^6 (d_i^2) + \left( \frac{u_x}{m} v_x^b \quad \frac{u_y}{m} v_y^b \quad \frac{u_z}{m} v_z^b \right)^T \quad (4.49)$$

Nyní je již patrné, že lze substitucí vytvořit pouze čtyři skalární parametry:

$$k'_m = \frac{k_m c_m^2}{m}, u'_x = \frac{u_x}{m}, u'_y = \frac{u_y}{m}, u'_z = \frac{u_z}{m} \quad (4.50)$$

Stavový prostor algoritmu s automatickým odhadem parametru bude rozšířen o výše uvedené parametry:

$$\mathbf{x} = \left( \mathbf{q} \quad \mathbf{v}^b \quad \mathbf{p}^n \quad \mathbf{b}_g \quad \mathbf{b}_a \quad k'_m \quad \mathbf{u}' \right)^T \quad (4.51)$$

kde  $\mathbf{u}' = \left( u'_x \quad u'_y \quad u'_z \right)^T$ . Stavové rovnice algoritmu jsou opět tvořeny rovnicemi (4.16), (4.20), (4.22), (4.30), (4.31). Navíc jsou přidány stavové rovnice pro parametry, které jsou opět modelovány GM procesem 1. řádu:

$$k'_{m|k+1} = \beta_d^k k'_{m|k} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{u}'_{k+1} = \beta_d^u \mathbf{u}'_k \quad (4.53)$$

Kovarianční matice budících šumů je doplněna o budící šumy nově přidaných parametrů:

$$\mathbf{Q}_{gm} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{10 \times 10} & \mathbf{0}_{10 \times 10} \\ \hline \mathbf{0}_{10 \times 10} & \mathbf{Q}' \end{array} \right) \quad (4.54)$$

$$\mathbf{Q}' = \text{diag} \left( \sigma_{d|gx}^2 \quad \sigma_{d|gy}^2 \quad \sigma_{d|gz}^2 \quad \left| \quad \sigma_{d|ax}^2 \quad \sigma_{d|ay}^2 \quad \sigma_{d|az}^2 \quad \left| \quad \sigma_{d|km}^2 \quad \left| \quad \sigma_{d|ux}^2 \quad \sigma_{d|uy}^2 \quad \sigma_{d|uz}^2 \right. \right. \right) \quad (4.55)$$

Ke změně dochází také ve výpočtu specifické síly, která je v tomto algoritmu spočítána užitím vztahu (4.49), kde jsou místo pevných parametrů použity odhadnuté parametry, jež jsou součástí stavového prostoru:

$$\mathbf{f}_{k+1}^b = k'_{m|k} \mathbf{z}^b \sum_{i=1}^6 \left( d_{i|k+1}^2 \right) + \left( u'_{x|k} v_{x|k}^b \quad u'_{y|k} v_{y|k}^b \quad u'_{z|k} v_{z|k}^b \right)^T \quad (4.56)$$

Ostatní nezmíněné rovnice jsou totožné s předchozím algoritmem.

### 4.4.3 Algoritmus založený na modelu multikoptéry bez využití řídicích signálů motorů

Dalším možným limitujícím faktorem pro reálnou implementaci algoritmu založeného na modelu multikoptéry je požadavek na znalost řídicích signálů motorů či podobných veličin sloužících pro stanovení výsledné síly od všech vrtulí. Při tomto požadavku je nutná úzká spolupráce systému zajišťujícího nízkoúrovňové řízení multikoptéry a systému estimujícího orientaci. To v základě zamezuje oddělený vývoj univerzálního systému pro odhad orientace multikoptéry založeného na matematickém modelu.

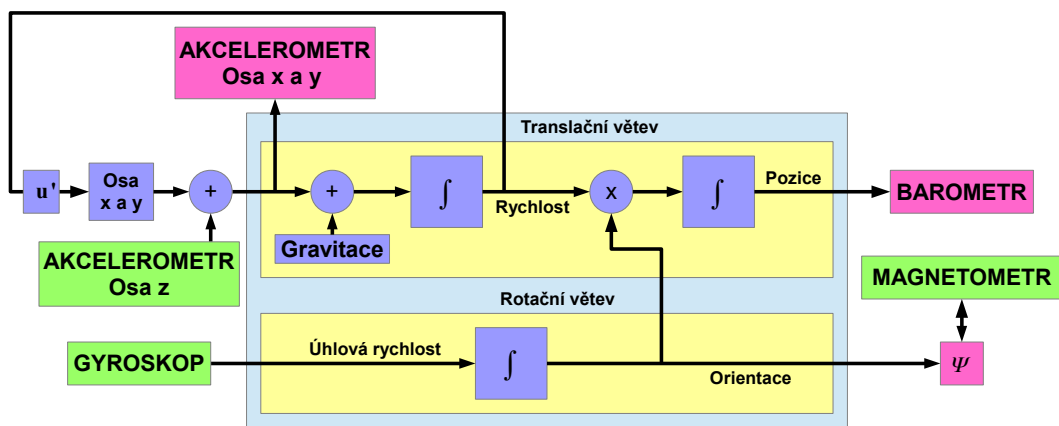
Zhruba v polovině reálných případů jsou všechny senzory a algoritmy součástí jedné výpočetní jednotky a předávání jakýchkoliv informací není principiálně problémem. Existuje však také velké množství případů, kdy je celý systém multikoptéry

sestaven z různých podsystému, které byly vyvíjeny nezávisle bez znalosti vlastností ostatních částí. Cílem je tedy přijít s řešením, které by nevyžadovalo znalost řídicích signálů motorů, avšak současně využívalo přínosů využití modelu multikoptéry.

K odvození takového algoritmu je vhodné se detailněji zaměřit na vztah, kde se řídicí signály motorů vyskytují. Již v kapitole o matematickém modelu multikoptéry bylo zmíněno, že všechny vrtule produkují síly pouze v ose  $z$  tělesové souřadné soustavy. Při nepoužití řídicích signálů motorů tedy dojde k nemožnosti určit složku  $z$  specifické síly. Ostatní dvě složky je možné vypočítat i bez znalosti řídicích signálů. Nabízející se možností je použít pro stanovení složky  $z$  specifické síly přímo z složku měření akcelerometru kompenzovanou odhadnutým biasem:

$$\mathbf{f}_{k+1}^b = \left( u'_{x|k} v_{x|k}^b \quad u'_{y|k} v_{y|k}^b \quad (acc_{z|k+1}^b - b_{z|k}^a) \right)^T \quad (4.57)$$

V tomto případě však daná složka algoritmu chybí v korekčním kroku. Není totiž možné použít tutéž informaci na dvou různých místech Kalmanova filtru. Čistě technicky to možné je, narušuje to však předpoklad nezávislosti chyb jednotlivých informací. Důsledkem tak často bývá divergence Kalmanova filtru. Je tedy nutné poskytnout novou nezávislou informaci o pohybu v ose  $z$  multikoptéry. Nabízí se barometr, který měří výšku. Výška je však měřena v ose  $z$  navigační souřadné soustavy. Obě osy jsou tedy totožné pouze v případě kdy jsou úhly podélného i příčného sklonu rovny nule:  $\theta = \phi = 0$ . Ukazuje se však, že barometr je schopen dostatečně stabilizovat filtr i pro nenulové úhly mezi osami  $z$  tělesové a navigační souřadné soustavy, kdy tato schopnost zcela vymizí pro momenty, kdy je úhel mezi osami roven  $90^\circ$ . Nepředpokládá se však, že by multikoptéra během své mise musela setrvávat v této nezvyklé poloze po delší dobu. Uvedené modifikace algoritmu jsou patrné z obr. 4.5.



Obr. 4.5: Schéma predikčního modelu algoritmu bez použití řídicích signálů motorů

Vstupní vektor algoritmu je pro tento případ následující:

$$\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{gyr}_k^b \\ acc_{z|k}^b \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

Odpovídající kovarianční matice vstupů:

$$\mathbf{Q}_u = \text{diag} \left( \sigma_{gx}^2 \quad \sigma_{gy}^2 \quad \sigma_{gz}^2 \quad \sigma_{az}^2 \right) \quad (4.59)$$

Stavový prostor je opět stejný, viz rovnice (4.42), s tím rozdílem, že pozice již není volitelný stav. Složka  $z$  pozice je totiž nutná kvůli možnosti predikovat měření barometru. Stavové rovnice jsou opět tvořeny vztahy (4.16), (4.20), (4.22), (4.30), (4.31) s rozdílem pouze u výpočtu specifické síly (4.57).

### Rovnice měření

Změny nastávají také v rovnicích měření. V uvažovaných veličinách pro korekci je vynechána již použitá složka  $z$  akcelerometru a přidáno je měření výšky  $z$  barometru:

$$\mathbf{y}_k = \left( acc_{x|k}^b \quad acc_{y|k}^b \quad baro \quad \psi_m(\mathbf{mag}_k^b, \hat{\mathbf{q}}_k) \right)^T \quad (4.60)$$

Predikované hodnoty měření jsou:

$$\tilde{y}_{accx} = f_x^b + b_{a|x} \quad (4.61)$$

$$\tilde{y}_{accy} = f_y^b + b_{a|y} \quad (4.62)$$

$$\tilde{y}_{baro} = p^n \quad (4.63)$$

$$\tilde{y}_{kurz} = \arctg2 \left[ 2(q_2q_3 + q_1q_4), (q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2) \right] \quad (4.64)$$

Kovarianční matice měření pak analogicky s předchozími algoritmy je:

$$\mathbf{R} = \text{diag} \left( \sigma_{acc|x}^2 \quad \sigma_{acc|y}^2 \quad \sigma_{baro}^2 \quad \sigma_{kurz}^2 \right) \quad (4.65)$$

kde se nově objevuje standardní směrodatná odchylka bílého šumu  $\sigma_{baro}$ , která aproximuje všechny chyby výšky určené barometrem.

### Rozšíření o automatický odhad parametrů

S ohledem na modifikace algoritmu je zřejmé, že se počet parametrů redukoval na koeficienty odporu vzduchu pro osy  $x$  a  $y$ . Opět je možné rozšířit uvedený algoritmus o automatický odhad parametrů. Rozdílné jsou pouze některé části algoritmu. Stavový prostor je:

$$\mathbf{x} = \left( \mathbf{q} \quad \mathbf{v}^b \quad \mathbf{p}^n \quad \mathbf{b}_g \quad \mathbf{b}_a \quad u'_x \quad u'_y \right)^T \quad (4.66)$$



Stavové rovnice pro přidané parametry opět vychází z definice GM procesu 1. řádu:

$$u'_{x|k+1} = \beta_d^u u'_{x|k} \quad (4.67)$$

$$u'_{y|k+1} = \beta_d^u u'_{y|k} \quad (4.68)$$

Kovarianční matice budících šumů je:

$$\mathbf{Q}_{gm} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{10 \times 10} & \mathbf{0}_{10 \times 8} \\ \hline \mathbf{0}_{8 \times 10} & \mathbf{Q}' \end{array} \right) \quad (4.69)$$

$$\mathbf{Q}' = \text{diag} \left( \sigma_{d|gx}^2 \quad \sigma_{d|gy}^2 \quad \sigma_{d|gz}^2 \quad \left| \quad \sigma_{d|ax}^2 \quad \sigma_{d|ax}^2 \quad \sigma_{d|ax}^2 \quad \left| \quad \sigma_{d|ux}^2 \quad \sigma_{d|uy}^2 \right. \right) \quad (4.70)$$

Zbylé části algoritmu jsou totožné s verzí bez automatického odhadu parametrů.

## 4.5 Shrnutí kapitoly

Celkově bylo v této kapitole navrženo 5 algoritmů:

1. GPS/INS
2. Základní algoritmus uvažující model multikoptéry (zkr. baseModel)
3. Algoritmus uvažující model multikoptéry s automatickým odhadem parametrů (zkr. Model + Param.)
4. Algoritmus uvažující model multikoptéry bez motorů s barometrem (zkr. ModelBaro)
5. Algoritmus uvažující model multikoptéry bez motorů s barometrem a automatickým odhadem parametrů (zkr. ModelBaro + Param.)

První z nich, GPS/INS je standardem v oblasti navigace i v případě použití levných senzorů. Přirozeně se nejedná o přínos práce, ovšem jeho návrh ve stejném stylu jako jsou navrženy ostatní algoritmy poskytuje nástroj pro efektivní srovnání. Další dva algoritmy (2. a 3.) jsou sice původní, ale z velké části založeny na publikacích zabývajících se touto problematikou, např. [24], [22] a [25]. U obou algoritmů lze za novinku považovat korekci kurzu pomocí magnetometru. U algoritmu s automatickým odhadem je to také nově odhad parametru převádějící řídicí signály motorů na tah vrtulí. Poslední dva algoritmy jsou pak zcela původní a nově eliminují potřebu znát jakoukoliv informaci o silovém působení vrtulí multikoptéry.

Následující tabulky přehledně srovnávají důležité rozdíly jednotlivých algoritmů. V následující kapitole budou uvedeny výsledky důkladné analýzy chování jednotlivých algoritmů v simulacích.

Algoritmus	Stavový prostor
GPS/INS	$\mathbf{x} = \left( \mathbf{q} \ \mathbf{v}^b \ \mathbf{p}^n \ \mathbf{b}_g \ \mathbf{b}_a \right)^T$
baseModel	$\mathbf{x} = \left( \mathbf{q} \ \mathbf{v}^b \ \mathbf{p}^n \ \mathbf{b}_g \ \mathbf{b}_a \right)^T$
Model + Param.	$\mathbf{x} = \left( \mathbf{q} \ \mathbf{v}^b \ \mathbf{p}^n \ \mathbf{b}_g \ \mathbf{b}_a \ k'_m \ \mathbf{u}' \right)^T$
ModelBaro	$\mathbf{x} = \left( \mathbf{q} \ \mathbf{v}^b \ \mathbf{p}^n \ \mathbf{b}_g \ \mathbf{b}_a \right)^T$
ModelBaro + Param.	$\mathbf{x} = \left( \mathbf{q} \ \mathbf{v}^b \ \mathbf{p}^n \ \mathbf{b}_g \ \mathbf{b}_a \ u'_x \ u'_y \right)^T$

Tab. 4.1: Stavové prostory jednotlivých algoritmů

Algoritmus	Vstupní veličiny
GPS/INS	$\mathbf{u} = \left( \mathbf{gyr}^b \ \mathbf{acc}^b \right)^T$
baseModel	$\mathbf{u} = \left( \mathbf{gyr}^b \ d_1 \ \dots \ d_6 \right)^T$
Model + Param.	$\mathbf{u} = \left( \mathbf{gyr}^b \ d_1 \ \dots \ d_6 \right)^T$
ModelBaro	$\mathbf{u} = \left( \mathbf{gyr}^b \ \mathbf{acc}_z^b \right)^T$
ModelBaro + Param.	$\mathbf{u} = \left( \mathbf{gyr}^b \ \mathbf{acc}_z^b \right)^T$

Tab. 4.2: Uvažované vstupní veličiny pro jednotlivé algoritmy

Algoritmus	Měřené veličiny
GPS/INS	$\mathbf{y} = \left( \mathbf{GPS} \ \psi_m \left( \mathbf{mag}^b, \mathbf{q} \right) \right)^T$
baseModel	$\mathbf{y} = \left( \mathbf{acc}^b \ \psi_m \left( \mathbf{mag}^b, \mathbf{q} \right) \right)^T$
Model + Param.	$\mathbf{y} = \left( \mathbf{acc}^b \ \psi_m \left( \mathbf{mag}^b, \mathbf{q} \right) \right)^T$
ModelBaro	$\mathbf{y} = \left( \mathbf{acc}_x^b \ \mathbf{acc}_y^b \ \mathit{baro} \ \psi_m \left( \mathbf{mag}^b, \mathbf{q} \right) \right)^T$
ModelBaro + Param.	$\mathbf{y} = \left( \mathbf{acc}_x^b \ \mathbf{acc}_y^b \ \mathit{baro} \ \psi_m \left( \mathbf{mag}^b, \mathbf{q} \right) \right)^T$

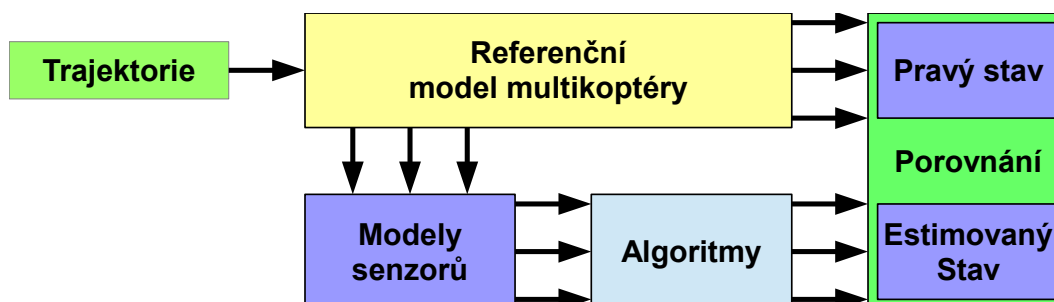
Tab. 4.3: Uvažované měřené veličiny pro jednotlivé algoritmy

Algoritmus	Vzorec pro specifickou sílu
GPS/INS	$\mathbf{f}^b = \mathbf{acc}^b - \mathbf{b}_a$
baseModel	$\mathbf{f}^b = \frac{-k_m c_m^2}{m} \mathbf{z}^b \sum_{i=1}^6 (d_i^2) + \left( \frac{u_x}{m} v_x^b \quad \frac{u_y}{m} v_y^b \quad \frac{u_z}{m} v_z^b \right)^T$
Model + Param.	$\mathbf{f}^b = k'_m \mathbf{z}^b \sum_{i=1}^6 (d_i^2) + \left( u'_x v_x^b \quad u'_y v_y^b \quad u'_z v_z^b \right)^T$
ModelBaro	$\mathbf{f}^b = \left( u'_x v_x^b \quad u'_y v_y^b \quad (acc_z^b - b_z^a) \right)^T$
ModelBaro + Param.	$\mathbf{f}^b = \left( u'_x v_x^b \quad u'_y v_y^b \quad (acc_z^b - b_z^a) \right)^T$

Tab. 4.4: Výpočet specifické síly u jednotlivých algoritmů

## 5 SIMULACE

Všechny výše uvedené algoritmy byly testovány v simulacích pro ověření jejich funkčnosti a pro porovnání dosažených přesností. Pro účely testování byly vytvořené testovací trajektorie. Pro tyto trajektorie byly na základě matematického modelu uvedeného v kapitole 3 vygenerovány pravé hodnoty kinematického stavu a simulované hodnoty všech sensorů. Simulované hodnoty sensorů byly následně použity pro běh jednotlivých algoritmů. Vypočítané hodnoty stavu byly následně porovnány se skutečným stavem. Schéma simulací je zobrazeno na obr. 5.1. U všech simulací uvedených v této kapitole je uvažována nulová rychlost větru.



Obr. 5.1: Simulační schéma testování algoritmů

### 5.1 Testovací trajektorie

Byly vytvořeny 4 testovací trajektorie tak, aby byly otestovány různé případy letu a jejich vliv na funkčnost algoritmů odhadu orientace. Každá trajektorie obsahuje v úvodu statickou část trvající 10 s kdy je multikoptéra v klidu. Tato část slouží pro ustálení Kalmanova filtru. Následuje seznam trajektorií spolu s jejich charakteristikami a očekávanými vlivy na algoritmy.

#### 1. Klasický let na traťové body

- Jedná se o typickou misi multikoptéry. Před letem jsou stanoveny body průletů. Po startu multikoptéra přímočarým letem postupně dosahuje jednotlivých průletových bodů.
- Délka trajektorie je 6 min.
- Jelikož se jedná o standardní let, neočekává se mimořádné chování žádného z algoritmů

#### 2. Dynamický let

- Agresivní manévry, velké náklony a přetížení po celou dobu letu.
- Délka trajektorie je 2 min.

- Cílem je otestovat schopnost algoritmů založených na matematickém modelu odhadovat orientaci s omezenou chybou v kontinuálním dynamickém letu bez použití absolutního senzoru pozice.

### 3. Statický let

- Po startu je multikoptéra dlouhou dobu ve visu, následuje prudký manévr přecházející do pohybu rovnoměrného přímočarého, který trvá až do konce trajektorie
- Délka trajektorie je 6 min.
- Statický let má paradoxně negativní vliv na pozorovatelnost stavu. Cílem je otestovat imunitu algoritmů vůči dlouhým úsekům s omezenou pozorovatelností. Problémy se očekávají především u algoritmů s automatickým odhadem parametrů modelu.

### 4. Statický let s kalibračním manévrem

- Po startu provede multikoptéra sérii kalibračních manévrů, poté následuje stejný scénář jako u předchozí trajektorie.
- Délka trajektorie je 6 min.
- Úvodní kalibrační manévry slouží k odhadu parametrů ve stavovém prostoru. Testuje se především možnost odstranění nežádoucích jevů při dlouhé počáteční snížené pozorovatelnosti zajištěním krátké, silné pozorovatelnosti těsně po startu.

Pro jednotlivé trajektorie jsou v příloze A uvedeny grafy průmětu trajektorie do horizontální roviny, výškový profil trajektorie a průběhy jednotlivých Eulerových úhlů.

## 5.2 Nastavení parametrů modelu multikoptéry a senzorů pro generování dat

V této podkapitole bude uvedeno nastavení jednotlivých parametrů nutných pro běh simulací. Jedná se především o parametry multikoptéry, dále pak nastavení parametrů chybových modelů pro jednotlivé senzory.

### Parametry multikoptéry

Jako vstupní signály do referenčního modelu multikoptéry jsou uvažovány řídicí signály motorů. V tabulce 5.1 jsou uvedeny všechny potřebné parametry multikoptéry. Tyto parametry byly stanoveny analýzou reálné hexakoptéry (multikoptéra se šesti rotory) a také subjektivním srovnáváním reálného chování a chování modelu v simulacích.

Parametr	Hodnota
Hmotnost - $m$	1 kg
Tenzor setrvačnosti - $\mathbf{J}$	$\text{diag} \left( \begin{matrix} 0.001 & 0.001 & 0.001 \end{matrix} \right) \text{ kg.m}^2$
Koeficienty odporu vzduchu - $\mathbf{u}$	$\left( \begin{matrix} -2 & -2 & -0.8 \end{matrix} \right)^T \text{ N.m.s}^{-2}$
Koeficient přepočtu úhlové rychlosti vrtule na tah - $k_m$	$1.14 \cdot 10^{-5} \text{ N.s}^2.\text{rad}^{-2}$
Koeficient přepočtu řídicího signálu na úhlovou rychlost vrtule - $c_m$	$2.45 \text{ rad.s}^{-1}$
Koeficient reakčního momentu vrtule - $k_t$	0.05 m
Délka ramene - $l$	0.2 m

Tab. 5.1: Hodnoty parametrů referenčního modelu multikoptéry použité pro generování pravého stavu

### Parametry senzorů

V tabulkách 5.2 a 5.3 jsou hodnoty pro chybové modely jednotlivých senzorů, které byly použity pro generování hodnot senzorů. U tříslžkových senzorů jsou parametry stejné pro všechny tři osy.

Senzor	Bílý šum	Dynamický bias - GM proces	
		Časová konstanta	Směrodatná odchylka
Gyroskop	$1 \text{ }^\circ/\text{s}$	300 s	$1 \text{ }^\circ/\text{s}$
Akcelerometr	$1 \text{ m.s}^{-2}$	300 s	$0.1 \text{ m.s}^{-2}$
Magnetometr	0.02	300 s	0.02
GPS	2 m	300 s	2 m
Barometr	2 m	300 s	2 m

Tab. 5.2: Hodnoty parametrů chybových modelů pro jednotlivé senzory - bílý šum a dynamický bias

Senzor	Statický bias	Matice <b>S</b>
Gyroskop	0.5 °/s	$\begin{pmatrix} 1.01 & 0.001 & -0.001 \\ 0.001 & 0.99 & -0.001 \\ -0.001 & 0.001 & 1.01 \end{pmatrix}$
Akcelerometr	0 ms <sup>-2</sup>	$\begin{pmatrix} 1.01 & 0.001 & -0.001 \\ 0.001 & 0.99 & -0.001 \\ -0.001 & 0.001 & 1.01 \end{pmatrix}$
Magnetometr	0.02	$\begin{pmatrix} 1.01 & 0.001 & -0.001 \\ 0.001 & 0.99 & -0.001 \\ -0.001 & 0.001 & 1.01 \end{pmatrix}$
GPS	0 m	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
		<b>Multiplikativní koeficient <math>k</math></b>
Barometr	0 m	1

Tab. 5.3: Hodnoty parametrů chybových modelů pro jednotlivé senzory - statický bias a **S** matice

### 5.3 Nastavení parametrů algoritmů a simulace

Výše byly zmíněny parametry, které sloužili pro generování testovacích dat. Dalším krokem je pak nastavení parametrů jednotlivých algoritmů. Týká se to především kovariančních matic **Q** a **R**, ale také parametrů, které vystupují v predikčních rovnicích či v rovnicích měření. Parametry kovariančních matic jsou nastaveny podle skutečných šumových vlastností chybových modelů senzorů. Pro bílý šum jsou standardní odchylky v druhé mocnině přímo součástí kovarianční matice. V případě buzení GM procesů pro biasy senzorů jsou dle rovnice (4.25) vypočítány budící bílé šumy a také diskrétní parametry  $\beta$  vyskytující se v predikčních rovnicích, kde jako vstupy do těchto výpočtů jsou použity hodnoty směrodatných odchylek a časových konstant z tabulky 5.2.

U charakteristik GM procesů, které modelují vývoj parametrů je již situace komplikovanější, jelikož jejich nastavení je volitelné a do značné míry ovlivňuje chování algoritmu. Z reálného hlediska je možné předpokládat, že jsou všechny parametry konstantní a s časem neproměnné, avšak takto modelované parametry dokáží často vyvolat nestabilitu Kalmanova filtru. U stavu, který je modelován jako konstanta

může totiž docházet pouze ke snížení variance. Limitně se pak s časem variance blíží k nule a tudíž nemůže dále docházet ke korekci daného stavu. U rozšířeného KF pak hrozí, že odhadnutá hodnota není zcela přesná, ale filtr s ní pracuje jakoby byla. To je zdrojem možné nestability filtru. Řešením je konstantní parametry modelovat např. GM procesy 1. řádu. Potom již variance stavu nikdy nemůže klesnout k nule. V tomto případě jsou parametry modelované procesem náhodné procházky, tedy limitním případem GM procesu 1. řádu.

Budící šumy procesu náhodné procházky pro parametry jsou shrnuty v tabulce 5.4. Hodnota diskrétního parametru  $\beta_d$  je pro proces náhodné procházky rovna jedné.

Parametr	Směrodatná odchylka
Koeficienty odporu vzduchu - $\mathbf{u}'$	0.001
Koeficient tahu vrtule - $k'_m$	0.005

Tab. 5.4: Hodnoty budících šumů procesu náhodné procházky pro stavy parametrů

Co se týče parametrů vystupujících v predikčních rovnicích, tak pokud nebude uvedeno jinak, jsou použity skutečné hodnoty z referenčního modelu multikoptéry.

### Počáteční stav a kovarianční matice

Před spuštěním jakéhokoliv Kalmanova filtru je třeba stanovit počáteční hodnoty stavového vektoru a jejich přesnosti v podobě kovarianční matice. Problém odhadu počátečního stavu není v této práci studován. U kinematického stavu tzn. orientace rychlost a pozice je vždy použito pravých hodnot pro inicializaci stavu. U biasů senzorů jsou pak použity nulové hodnoty.

Počáteční variance jednotlivých stavů pak odráží následující tabulka 5.5, kde  $\sigma_{s|GM}$  značí ustálenou standardní směrodatnou odchylku GM procesu modelujícího odpovídající bias.

### Parametry simulace

Všechny algoritmy jsou simulovány s periodou vzorkování  $\Delta t = 0.01$  s, tedy na frekvenci  $f_s = 100$  Hz. Na stejné frekvenci jsou generovaná data pro gyroskop, akcelerometr a barometr a zaznamenávány hodnoty řídicích signálů motorů. U magnetometru a GPS jsou uvažovány vzorkovací frekvence 5 Hz. Pro tyto senzory je tedy korekční krok prováděn pouze 5-krát za vteřinu.



Stav	Počáteční variance
<b>q</b>	$0.1^2$
<b>v</b>	$2^2$
<b>p</b>	$2^2$
<b>b</b>	$\sigma_{s GM}^2$
<b>u'</b>	$4^2$
$k'_m$	$1^2$

Tab. 5.5: Počáteční variance stavu

## 5.4 Kvantitativní hodnocení algoritmů

Aby bylo možné objektivně porovnávat jednotlivé běhy simulací mezi sebou (ať už různé algoritmy na jedné trajektorii či stejný algoritmus na různých trajektoriích), je nutné zavést nějaké kvantitativní hodnocení daného běhu simulace. Jelikož se práce zabývá estimací orientace, bude hodnocení spočívat ve stanovení průměrné chyby orientace pro jednotlivé Eulerovy úhly. Dále pak také bude pro každý běh stanovena maximální chyba pro jednotlivé Eulerovy úhly. Díky tomu, že jsou algoritmy testovány v simulacích, jsou k dispozici skutečné stavy a je tedy možné spočítat skutečné chyby v každém okamžiku. Průměrná chyba úhlu pro daný běh je stanovena pomocí kvadratického průměru chyby přes celý běh trajektorie:

$$RMSe = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\tilde{\alpha}(i) - \alpha(i)]^2} \quad (5.1)$$

kde  $n$  je celkový počet vzorků v daném běhu,  $\tilde{\alpha}(i)$  je estimovaná hodnota úhlu v kroku  $i$  a  $\alpha(i)$  je skutečná hodnota úhlu v kroku  $i$ . Maximální chyba je pak stanovena pomocí vztahu:

$$MAXe = \max_{i \in \langle 1, n \rangle} |\tilde{\alpha}(i) - \alpha(i)| \quad (5.2)$$

Z kvantitativního hodnocení je vždy vynecháno prvních 10 s každého běhu. Dochází zde k počátečnímu ustalování stavů Kalmanova filtru, kde bývají chyby obvykle větší než ve zbytku běhu. Zahrnutí tohoto úseku by mohlo zkreslit především ukazatele maximálních chyb pro daný běh.

## 5.5 Způsob prezentace výsledků

Výsledky simulací jsou prezentovány ve formě čísel spočítaných pomocí vztahů (5.1) a (5.2) nebo ve formě grafů. Grafy obsahují buď průběhy absolutních hodnot pro pravou hodnotu a estimovanou hodnotu nebo obsahují průběh chyby, tzn. průběh rozdílu estimované a pravé hodnoty. U grafů s průběhem chyby je obvyklé zobrazit i průběh směrodatné odchylky Kalmanova filtru pro daný stav. Variance pro jednotlivé stavy leží na diagonále kovarianční matice  $\mathbf{P}$ . Pro  $i$ -tý stav je tedy směrodatná odchylka stanovena pomocí vztahu:

$$\sigma_i = \sqrt{\mathbf{P}(i, i)} \quad (5.3)$$

Dle teorie a při dodržení předpokladů Kalmanova filtru by mělo platit, že v průměru zhruba 68.2 % všech hodnot průběhu chyby by mělo ležet v pásu vymezeném průběhy kladně a záporně vzaté směrodatné odchylky Kalmanova filtru. Často tento fakt slouží pro kontrolu správného fungování a nastavení Kalmanova filtru. Používané bývají také celočíselné násobky hodnot směrodatné odchylky. Např. v pásu vymezeném dvojnásobkem směrodatné odchylky by mělo ležet v průměru 95.4 % průběhu chyby a pro trojnásobek je to 99.7 %. Grafy v této práci obsahují průběhy pro jednonásobek a trojnásobek směrodatné odchylky, viz obr. 5.2.

Většina chybových grafů budou průběhy Eulerových úhlů. Avšak přímo ve stavovém prostoru je orientace reprezentovaná kvaternionem a směrodatné odchylky jsou také platné pro složky kvaternionu. Pro chybové průběhy je tedy nutný přepočet kvaternionu a jeho směrodatné odchylky do domény Eulerových úhlů. Výpočet Eulerových úhlů z kvaternionu je snadnou záležitostí. Využívá se známých vztahů [3]:

$$\phi = \arctg2(2q_1q_2 + 2q_3q_4, q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \quad (5.4)$$

$$\theta = \text{asin}(2q_1q_3 - 2q_2q_4) \quad (5.5)$$

$$\psi = \arctg2(2q_2q_3 + 2q_1q_4, q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2) \quad (5.6)$$

Výpočet směrodatných odchylek je poněkud složitější. Možným řešením je lineární transformace směrodatných odchylek kvaternionu přes Jacobiho matici parciálních derivací vztahů (5.4)-(5.6) podle jednotlivých složek kvaternionu:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{A} \mathbf{P}_q \mathbf{A}^T \quad (5.7)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{q}} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{q}) \\ \theta(\mathbf{q}) \\ \psi(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Z takto vypočítané kovarianční matice pro Eulerovy úhly  $\mathbf{P}_e$  jsou směrodatné odchylky pro jednotlivé Eulerovy úhly spočteny opět odmocninou z prvků na diagonále:

$$\sigma_\phi = \sqrt{\mathbf{P}_e(1,1)} \quad (5.10)$$

$$\sigma_\theta = \sqrt{\mathbf{P}_e(2,2)} \quad (5.11)$$

$$\sigma_\psi = \sqrt{\mathbf{P}_e(3,3)} \quad (5.12)$$

## 5.6 Výsledky simulací

### Algoritmus GPS/INS

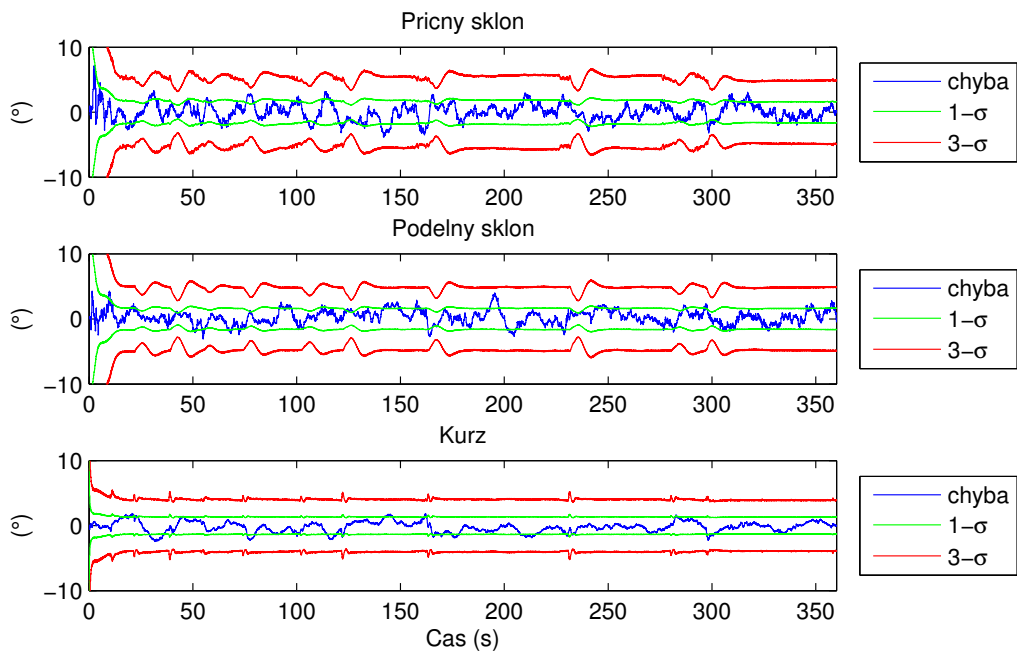
Výsledky tohoto algoritmu jsou prezentovány především pro účely porovnání s ostatními algoritmy. Jedna simulace je také věnována ilustraci prudkého nárůstu chyby při ztrátě GPS signálu. Tabulka 5.6 shrnuje průměrné a maximální chyby pro jednotlivé trajektorie. Pro každou trajektorii proběhlo 10 běhů, kdy RMSe hodnoty vznikly zprůměrováním přes všechny běhy. U maximálních chyb byly vzaty maximální hodnoty přes všechny běhy.

Trajektorie	RMSe (°)			MAXe (°)		
	$\phi$	$\theta$	$\psi$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
1. Klasická	1.37	1.24	1.05	6.27	5.28	3.94
2. Dynamická	1.95	1.04	0.79	8.38	4.22	3.06
3. Statická	1.38	1.22	0.86	7.50	4.92	5.70
4. S manévrem	1.28	1.20	0.96	7.09	4.98	4.38

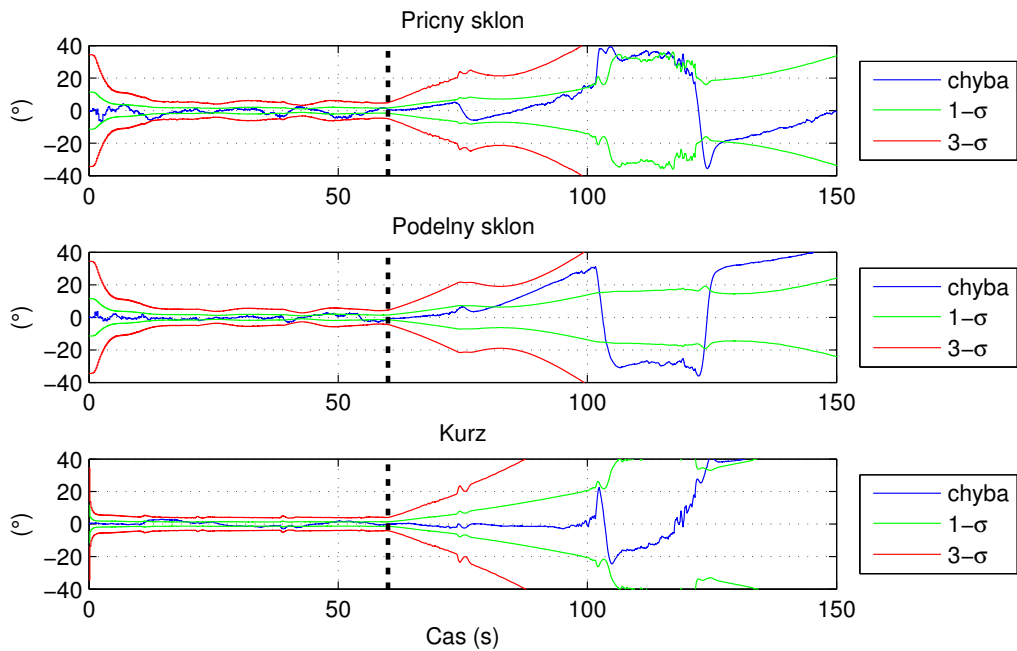
Tab. 5.6: Výsledky simulací algoritmu GPS/INS pro jednotlivé trajektorie

Hodnoty v tabulce potvrzují očekávané chování algoritmu. Jedná se o ověřený způsob estimace stavu, tento výsledek tedy není překvapující. S ohledem na třídu přesnosti senzorů jsou dosažené přesnosti dostačující. Další závěr, který lze na základě hodnot udělat je, že typ trajektorie má jen mírný vliv na přesnost. Na obr. 5.2 je průběh chyb jednotlivých Eulerových úhlů jednoho běhu pro klasickou trajektorii.

Jak již bylo zmíněno je pro uvažovanou třídu senzorů chod algoritmu podmíněn pravidelnou korekcí stavu za pomoci externě měřené pozice. Pokud dojde k výpadku GPS signálu, algoritmus většinou v krátké době ztrácí požadovanou přesnost. Vývoj chyby po výpadku GPS signálu ilustruje obr. 5.3. Výpadek byl simulován v čase 60s. Graf potvrzuje závislost algoritmu GPS/INS na periodické informaci o poloze.



Obr. 5.2: Průběh chyb pro jednotlivé Eulerovy úhly - algoritmus GPS/INS - klasická trajektorie



Obr. 5.3: Průběh chyb pro jednotlivé Eulerovy úhly - simulace výpadku GPS signálu v čase 60 s

## Základní algoritmus zahrnující model

Tabulka 5.7 shrnuje výsledky základního algoritmu založeného na modelu multikoptéry. Hodnoty v tabulce vznikly opět zpracováním 10-ti běhů simulace pro každou trajektorii. Čísla v tabulce indikují předpokládané vlastnosti algoritmů uvažující matematický model multikoptéry. Je však vhodné připomenout, že parametry vstupující do algoritmu jsou totožné s těmi v referenčním modelu multikoptéry. Jinými slovy tyto výkony algoritmu lze očekávat pouze při absolutně přesném stanovení potřebných parametrů multikoptéry. Opět je patrná mírná závislost přesnosti na stylu trajektorie. Na obr. 5.4 je průběh chyb Eulerových úhlů pro klasickou trajektorii.

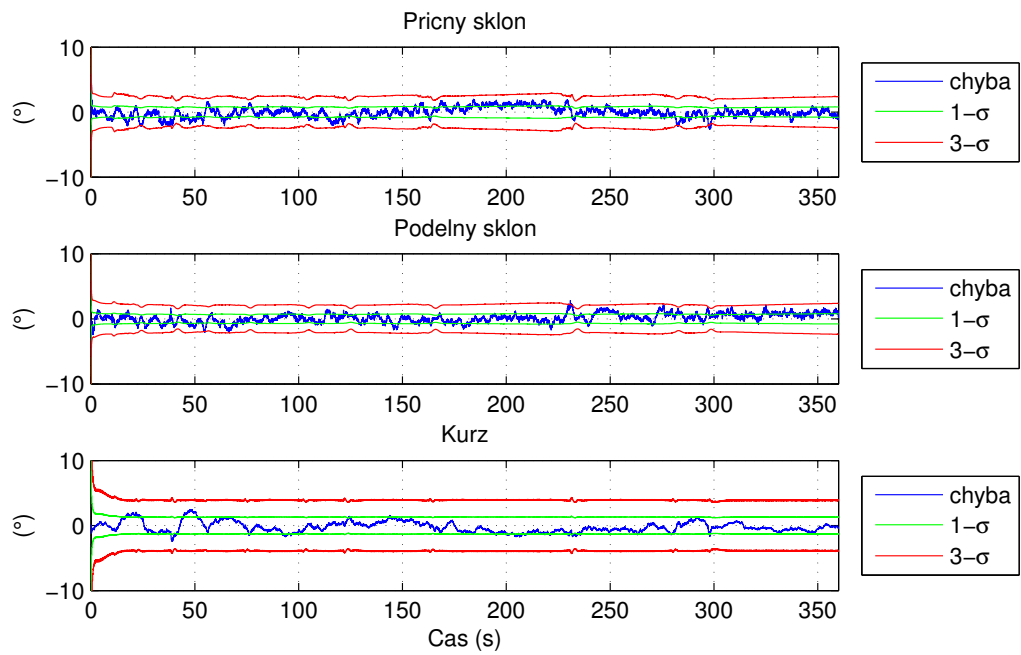
Ukazuje se tedy, že zahrnutí dynamického modelu do algoritmu odhadu orientace umožňuje i bez absolutního senzoru pozice estimovat orientaci se stabilní přesností.

Trajektorie	RMSe (°)			MAXe (°)		
	$\phi$	$\theta$	$\psi$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
1. Klasická	0.78	0.65	0.84	3.38	2.90	2.94
2. Dynamická	1.00	0.70	0.71	4.74	3.09	2.52
3. Statická	1.01	0.73	0.70	4.81	2.81	3.53
4. S manévrem	0.76	0.73	0.78	3.02	2.68	3.03

Tab. 5.7: Výsledky simulací základního algoritmu s modelem multikoptéry pro jednotlivé trajektorie - algoritmus baseModel

## Algoritmus zahrnující model, bez řídicích signálů motorů

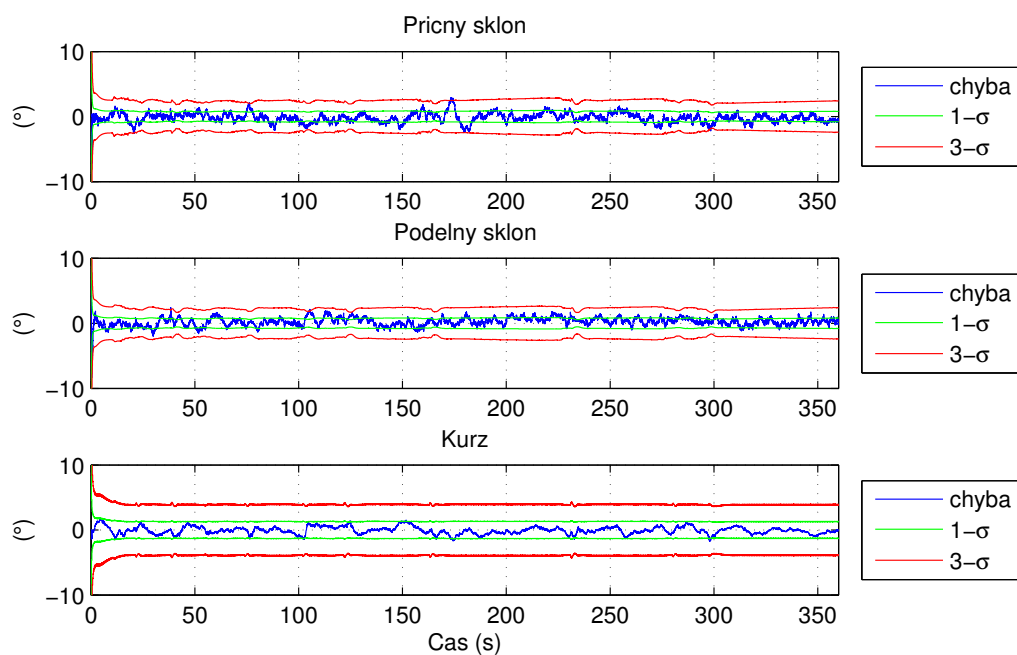
Algoritmus modelBaro má oproti předchozímu algoritmu výhodu, že nepotřebuje znát řídicí signály motorů. Výsledky simulací tohoto algoritmu jsou v tabulce 5.8. Je zde zřejmá podobnost s výsledky předchozího algoritmu. Potvrzuje se tím úspěšnost návrhu nového algoritmu a ukazuje se, že i bez znalosti řídicích signálů jednotlivých motorů je možné dosáhnout stejných výsledků, avšak s použitím barometru. Při použití tohoto algoritmu není požadována žádná pravidelná informace od řídicí části multikoptéry, což umožňuje oddělený vývoj zařízení pro estimaci orientace a zbylých systémů multikoptéry. Na obr. 5.5 je průběh chyby Eulerových úhlů pro klasickou trajektorii.



Obr. 5.4: Průběh chyb pro jednotlivé Eulerovy úhly - algoritmus baseModel - klasická trajektorie

Trajektorie	RMSe (°)			MAXe (°)		
	$\phi$	$\theta$	$\psi$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
1. Klasická	0.78	0.68	0.84	3.35	2.78	2.84
2. Dynamická	1.06	0.68	0.73	5.40	2.56	2.75
3. Statická	1.03	0.76	0.71	4.99	3.21	3.58
4. S manévrem	0.80	0.77	0.80	4.78	3.09	3.28

Tab. 5.8: Výsledky simulací algoritmu s modelem multikoptéry bez řídicích signálů motorů - algoritmus modelBaro



Obr. 5.5: Průběh chyb pro jednotlivé Eulerovy úhly - algoritmus modelBaro - klasická trajektorie

### Algoritmus zahrnující model s automatickým odhadem parametrů

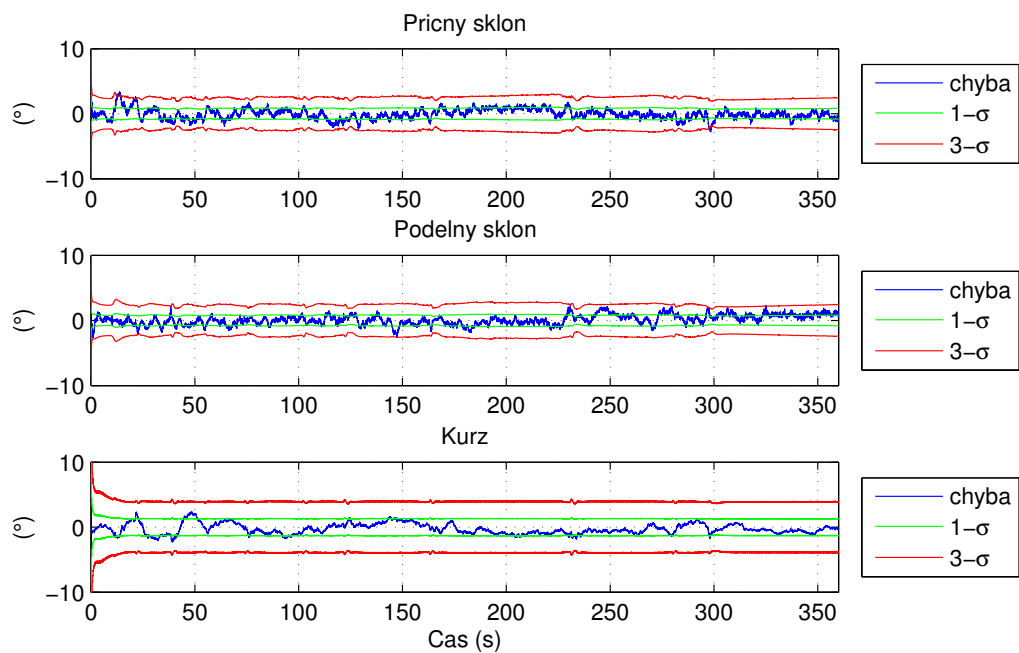
Výsledky algoritmu s automatickým odhadem parametrů jsou v tabulce 5.9. Čísla v tabulkách vznikla opět zpracováním 10-ti běhů pro každou trajektorii. V tomto případě již pro běh algoritmu nebyla nutná znalost parametrů modelu multikoptéry. Počáteční hodnoty stavů, které odpovídají parametrů multikoptéry byly nastaveny na následující hodnoty:  $\mathbf{u}' = (-8 \quad -8 \quad -3.2)^T \text{ s}^{-1}$ ,  $k'_m = 0 \text{ N}$ . Výsledky opět prokazují funkčnost algoritmu. Dokonce i bez znalosti potřebných parametrů multikoptéry lze využívat přínosu modelu pro zpřesnění estimace orientace. Dokonce se ani nepotvrdila hypotéza špatné pozorovatelnosti u statické trajektorie, avšak jistý nárůst u maximálních chyb je patrný. Průběh chyb Eulerových úhlů pro klasickou trajektorii je na obr. 5.6

### Algoritmus zahrnující model, bez řídicích signálů motorů s automatickým odhadem parametrů

Následují výsledky algoritmu modelBaro + Param tedy s automatickým odhadem parametrů odporu vzduchu pro osy  $x$  a  $y$ . Jednotlivé hodnoty průměrných a maximálních chyb pro Eulerovy úhly jsou v tabulce 5.10. Hodnoty vznikly opět zpracováním 10-ti běhů simulace. Pro všechny trajektorie jsou výsledky dostačující. Pro

Trajektorie	RMSe (°)			MAXe (°)		
	$\phi$	$\theta$	$\psi$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
1. Klasická	0.81	0.69	0.86	3.34	2.88	3.02
2. Dynamická	1.11	0.71	0.69	5.47	2.76	2.58
3. Statická	1.33	1.01	0.79	7.31	7.39	4.31
4. S manévrem	0.79	0.87	0.79	3.70	6.08	2.94

Tab. 5.9: Výsledky simulací algoritmu s modelem multikoptéry a automatickým odhadem parametrů - algoritmus Model + Param



Obr. 5.6: Průběh chyb pro jednotlivé Eulerovy úhly - algoritmus model + Param - klasická trajektorie



statickou trajektorii se ani u tohoto algoritmu nepotvrdila předpovídaná špatná pozorovatelnost parametrů. Jako důkaz je na obr. 5.7 zobrazen průběh chyby odhadnutých parametrů odporu vzduchu pro osy  $x$  a  $y$  z běhu simulace na statické trajektorii. S ohledem na průběh statické trajektorie (viz příloha A) je zřejmé, že koeficienty jsou úspěšně odhadnuty až v momentě kdy pro danou osu nastane manévr. Do té doby hodnota odporu zůstává sice nepřesná, ale její variance odpovídá její chybě. Navíc v momentech kdy není multikoptéra v pohybu (což je případ první části statické trajektorie), nemají koeficienty odporu vzduchu žádný vliv na odhad orientace. Průběh chyb Eulerových úhlů pro klasickou trajektorii je na obr. 5.8. Příloha B obsahuje grafy jednotlivých stavových veličin pro dynamickou trajektorii.

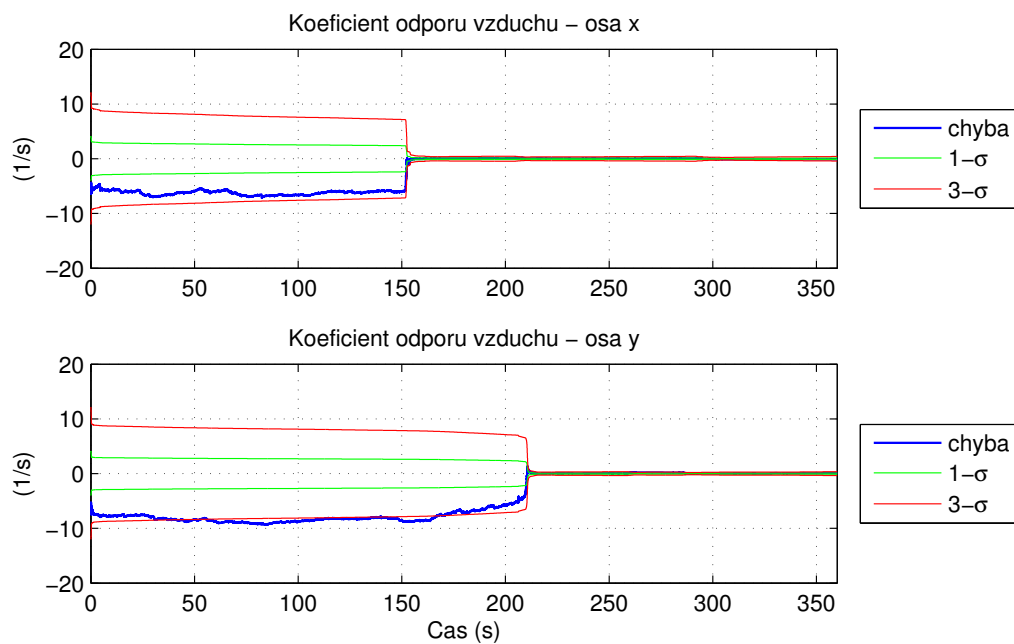
Trajektorie	RMSe (°)			MAXe (°)		
	$\phi$	$\theta$	$\psi$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
1. Klasická	1.04	0.76	0.86	6.92	7.46	3.36
2. Dynamická	1.11	0.74	0.78	5.00	2.88	3.50
3. Statická	1.14	0.77	0.73	4.28	4.16	3.20
4. S manévrem	1.04	0.83	0.78	5.36	6.97	3.54

Tab. 5.10: Výsledky simulací algoritmu s modelem multikoptéry bez řídicích signálů motorů s automatickým odhadem parametrů - algoritmus modelBaro + Param

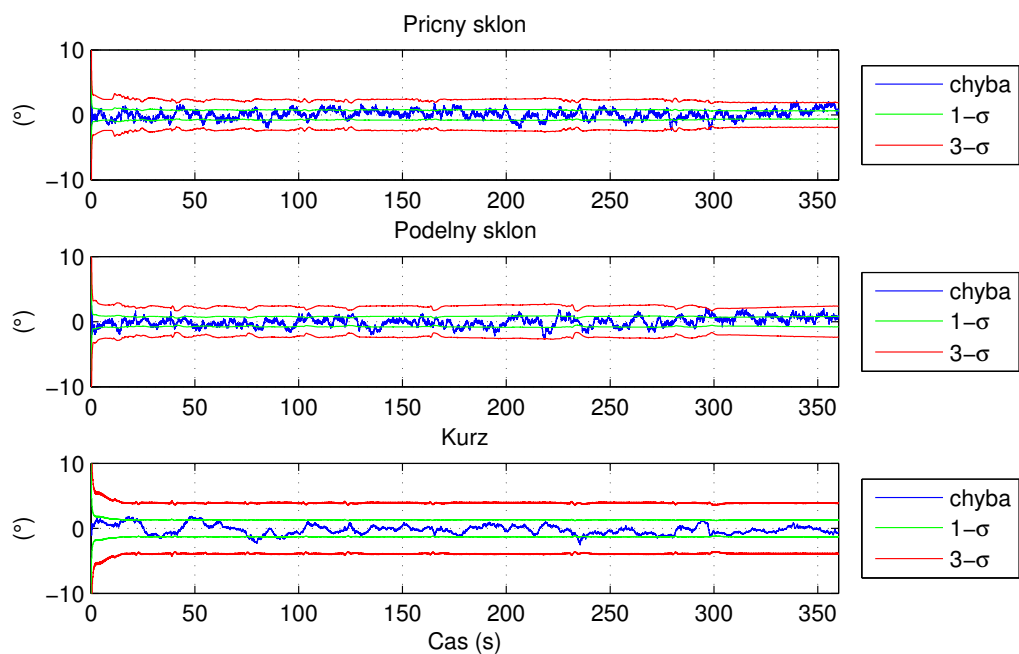
### 5.6.1 Citlivost algoritmů na nepřesnosti parametrů

Jak již bylo zmíněno, byly v algoritmech bez automatického odhadu parametrů použity totožné hodnoty s těmi použitými v referenčním modelu multikoptéry pro generování dat. V reálném případě však tento stav nikdy nenastane a určené konstanty budou vždy zatíženy chybami. Zde jsou prezentovány výsledky simulací, kdy byly algoritmům předány parametry, které nesouhlasily přesně s těmi použitými v referenčním modelu. Právě parametry byly vynásobeny poruchovým koeficientem a výsledná hodnota pak byla použita v algoritmu. Nejprve byly provedeny simulace poruchy parametrů odporu vzduchu. Logicky byly testovány algoritmy model a modelBaro. Závislosti přesnosti výsledku na koeficientu poruchy jsou na obr. 5.9. Simulace byly prováděny na klasické trajektorii.

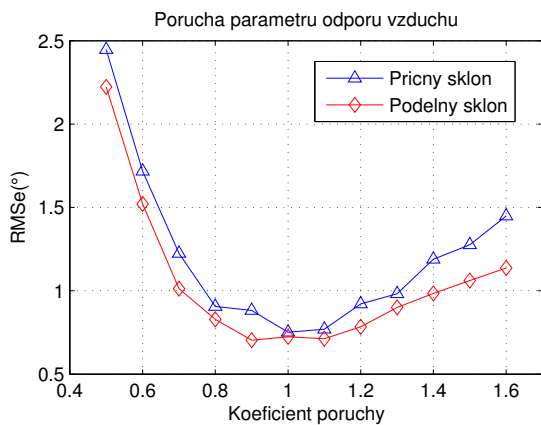
Vliv poruchy parametru přepočtu tahu byl přirozeně zkoumán jen pro algoritmus baseModel, jelikož algoritmus modelBaro nepoužívá řídicí signály motorů jako vstupy. Závislost chyby orientace na poruše tohoto parametru je na obr. 5.10.



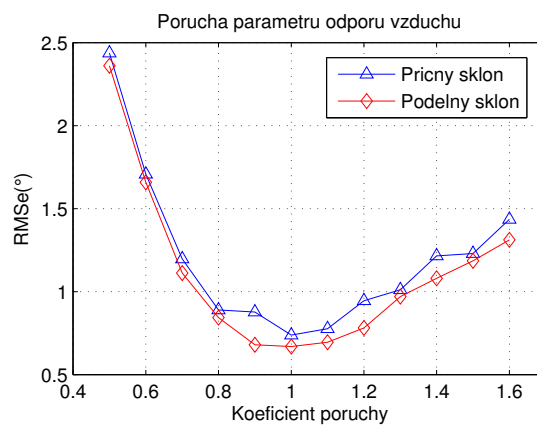
Obr. 5.7: Průběh chyb pro odhadnuté koeficienty odporu vzduchu - algoritmus modelBaro + Param - statická trajektorie



Obr. 5.8: Průběh chyb pro jednotlivé Eulerovy úhly - algoritmus modelBaro + Param - klasická trajektorie

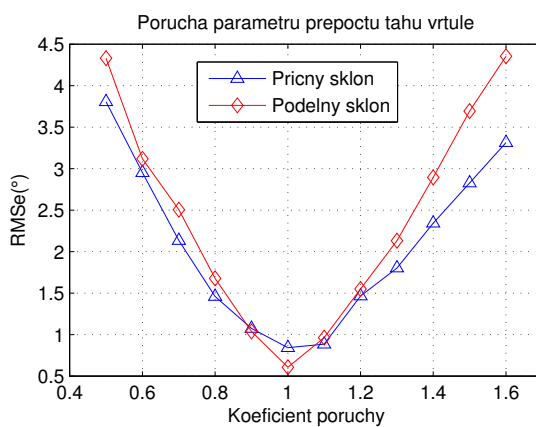


(a) Algorithmus baseModel



(b) Algorithmus modelBaro

Obr. 5.9: Závislost chyby algoritmů při poruše parametrů odporu vzduchu



Obr. 5.10: Závislost chyby algoritmu při poruše parametru přepočtu tahu vrtule - Algorithmus baseModel

Citlivost algoritmů s pevným nastavením parametrů modelu multikoptéry vykazují jistou, ne však závažnou míru citlivosti na přesnost těchto parametrů. I pro parametry určené s 50% přesností poskytují algoritmy pořád dostačující přesnosti. Z grafů je dále možné stanovit, že nepřesnosti v parametru přepočtu tahu se projevují přibližně dvojnásobným nárůstem chyb orientace než u parametrů odporu vzduchu.

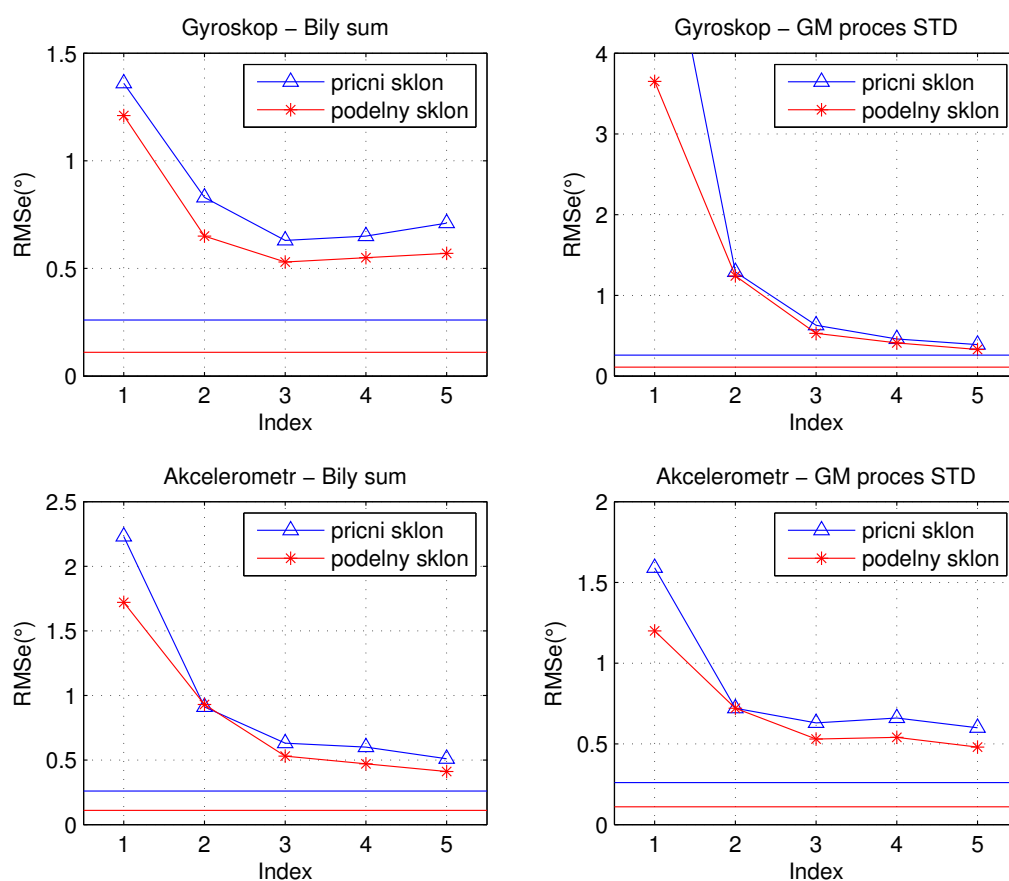
### 5.6.2 Vliv parametrů senzorů na přesnost algoritmů

Všechny doposud zmíněné simulace byly prováděny pro jednu třídu senzorů, jejichž parametry vystihují tabulky 5.2 a 5.3. Tato podkapitola shrnuje výsledky analýzy vlivu vlastností senzorů na přesnost algoritmů. Při požadavku na větší přesnost, než byla dosud prezentována by bylo dobré vědět, jaké senzory nahradit přesnějšími, aby bylo dosaženo optimálního nárůstu přesnosti. Analýza je zaměřena pouze na akcelerometr a gyroskop, jelikož ze zkušeností právě tyto senzory mají zásadní vliv na přesnost orientace. U těchto senzorů budou postupně měněny parametry bílého šumu a korelovaného šumu za účelem stanovení parametru, který má největší vliv. Analýza byla provedena na klasické trajektorii a s algoritmem modelBaro. Nastavení parametrů je patrné z tabulky 5.11. Prostřední sloupec pak odpovídá hodnotě daného parametru, která byla použita pro předchozí simulace. Zároveň nebyly v této analýze uvažovány chyby špatného zarovnání os a multiplikativní chyby. Výsledky analýzy jsou pak zobrazeny v grafech na obr. 5.11. Na závěr byla také provedena simulace, kdy byly všechny testované parametry nastaveny u obou senzorů na minimální hodnoty z tabulky 5.11. Výsledky této simulace jsou v grafech zobrazeny vodorovnými čarami.

Z výsledků je zřejmé, že hodnoty přesnosti mají největší variabilitu při změnách parametru biasu gyroskopu. Tento výsledek je však lehce odůvodnitelný. Kdyby totiž existoval ideální gyroskop, který by měřil úhlovou rychlost bez chyb, nebylo by třeba žádných korekčních algoritmů. Je tedy logické, že s přesností gyroskopu poroste i přesnost orientace. To, že má proměnný bias gyroskopu větší vliv než bílý šum bylo již demonstrováno na jednoduchém příkladu v úvodu této práce.

Index		1	2	3	4	5
gyr.	Bílý šum ( $^{\circ}/s$ )	0.1	0.3	1	3	10
	GM proces STD ( $^{\circ}/s$ )	0.1	0.3	1	3	10
akc.	Bílý šum ( $m.s^{-2}$ )	0.1	0.3	1	3	10
	GM proces STD ( $m.s^{-2}$ )	0.01	0.03	0.1	0.3	1

Tab. 5.11: Nastavení parametrů senzorů pro analýzu vlivu na přesnost orientace



Obr. 5.11: Výsledky analýzy vlivu parametrů senzorů na přesnost orientace

## 6 TESTY S REÁLNÝMI DATY

Dalším krokem po úspěšném ověření algoritmů v simulacích je jistě kontrola funkčnosti v reálných podmínkách s reálnými senzory. Hlavní nevýhodou testů v reálných podmínkách je neznalost pravého stavu. Některé stavové veličiny (např. pozice či orientace) je možné měřit jiným zařízením, které dosahuje řádově vyšších přesností než je očekáváno u testovaného systému a tyto hodnoty považovat za pravé (referenční).

Jelikož realizace i provádění těchto experimentů je časově i finančně náročné, nebyly testy v reálných podmínkách v rámci této disertační práce prováděny. Aby však celá práce nepůsobila odtrženě od reality, bylo provedeno alespoň hrubé ověření algoritmů na krátké sadě reálných dat poskytnutých zahraničním pracovištěm. Výsledky těchto testů tvoří náplň této kapitoly. Data pochází z Flying Machine Arena (ETH Zurich).

Použitá data jsou záznamem z přibližně 88 s trvajícím letu kvadrokoptéry (multikoptéra se čtyřmi rotory). Zaznamenány byly hodnoty tříosého akcelerometru a gyroskopu a také úhlové rychlosti jednotlivých vrtulí. Dále byly zaznamenány hodnoty pozice, rychlosti a orientace multikoptéry pomocí externího měřicího zařízení založeného na systému vysokorychlostních kamer (Vicon). Přesnost určené orientace a pozice tímto systémem je mnohem větší než uvažované přesnosti testovaných algoritmů. U orientace lze počítat s přesností pod desetinu stupně a u pozice řádově v milimetrech. Tyto hodnoty jsou tedy považovány za referenční (pravé) a použity pro ověření funkčnosti stejným způsobem, jak tomu bylo v případě simulací. Magnetometr nebyl součástí multikoptéry a tak jsou hodnoty vygenerované na základě skutečného stavu pomocí standardního chybového modelu používaného v této práci (v případě magnetometru jsou pravé hodnoty funkcí orientace a referenčního vektoru magnetického pole). Pro hodnoty pozice a barometrické výšky byla jako referenční použita poloha udaná kamerovým systémem Vicon. Hodnoty vstupující do algoritmů byly opět zkresleny pomocí chybového modelu.

Druh trajektorie lze přirovnat k dynamické trajektorii použité v simulacích. Multikoptéra se pohybuje po kružnici a přibližně v polovině trajektorie (mezi 40. s a 50. s) dojde dvěma agresivními manévry ke změně smyslu otáčení. Grafy vybraných veličin jsou opět v příloze C.1.

Oproti simulacím je multikoptéra v pohybu již od prvního okamžiku, není zde tedy prostor pro úvodní ustálení Kalmanova filtru, avšak algoritmům to nečiní žádné větší potíže. Dalším problémem je identifikace parametrů akcelerometru a gyroskopu. Jelikož nebyly k dispozici hodnoty senzorů ve statických podmínkách, nebylo možné tyto parametry, které jsou nutné pro správné nastavení Kalmanova filtru, určit. Z toho důvodu byly použity stejné parametry jako pro simulace a bylo tiše doufáno, že se parametry skutečně použitých senzorů příliš neliší.

I přesto, že byla v celé práci uvažována multikoptéra se šesti rotory (hexakoptéra), nebylo nutné v algoritmech provádět žádné změny při použití pro kvadroptéru. Tato vlastnost plyne z toho, že informace o pohybu vrtulí jsou zkombinovány za účelem stanovení celkové síly od všech vrtulí. Z hlediska zde uvedených algoritmů tedy není důležité kolik vrtulí na multikoptéře je a kde se nachází. Jediným předpokladem je, že jsou všechny soustavy motor + vrtule totožné.

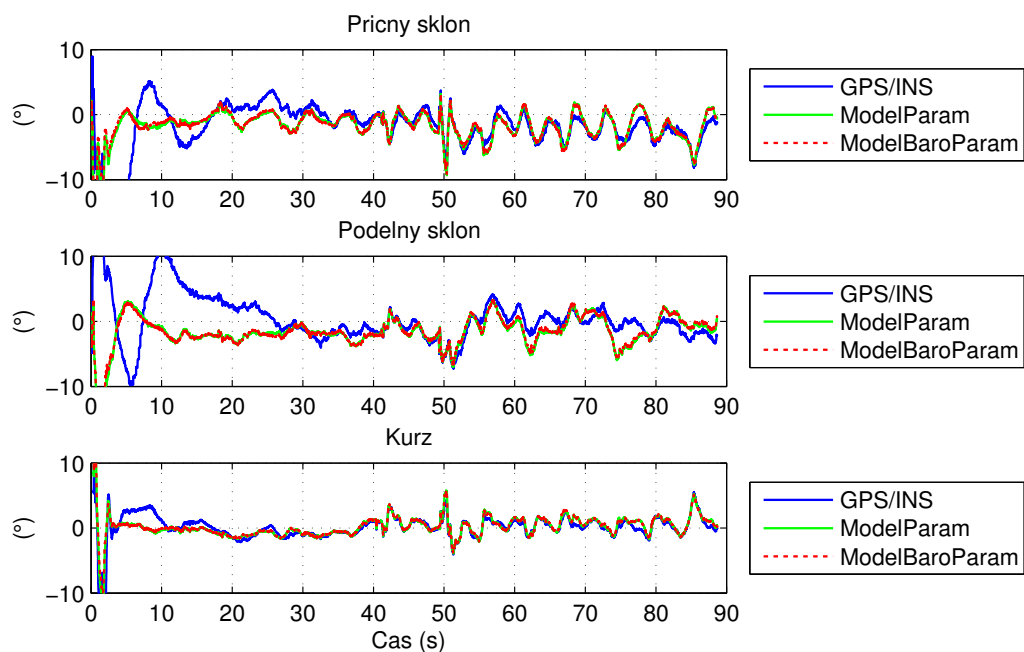
Z důvodu neznalosti parametrů reálné multikoptéry, jako jsou koeficienty odporu vzduchu a koeficient přepočtu úhlové rychlosti vrtule na tah, byly testovány pouze algoritmy s automatickým odhadem parametrů. Zároveň byl pro srovnání testován také algoritmus GPS/INS. Výsledky testů jsou shrnuty v tabulce 6.1. Z tabulky je zřejmé více jak dvojnásobné zhoršení přesnosti oproti simulacím. Jelikož však došlo ke zhoršení i u algoritmu GPS/INS, lze tuto degradaci přesnosti přisuzovat nedokonalému nastavení parametrů senzorů (gyroskopu a akcelerometru) do Kalmanova filtru nebo celkově horším parametrům těchto senzorů, než které byly uvažovány v simulacích. Avšak i tak výsledky ukazují robustnost a správnost navržených algoritmů uvažující dynamický model multikoptéry.

Algoritmus	RMSe (°)			MAXe (°)		
	$\phi$	$\theta$	$\psi$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
1. GPS/INS	2.51	2.74	1.20	8.16	11.01	5.50
2. Model + Param.	2.36	2.27	1.28	9.32	7.02	5.80
3. ModelBaro + Param.	2.35	2.23	1.27	9.14	6.75	5.59

Tab. 6.1: Výsledky testů algoritmů na reálných datech

Na obr. 6.1 jsou průběhy odhadnutých Eulerových úhlů pro jednotlivé algoritmy. Je zde patrná výrazná korelace chyb obou algoritmů využívající dynamický model multikoptéry a také částečná korelace s algoritmem GPS/INS. Žádná s těchto korelací však není překvapivá. Za prvé všechny algoritmy totiž používají ty samé hodnoty senzorů. Dále u algoritmů s dynamickým modelem je pak princip natolik podobný, že lze očekávat pouze minimální odchylky ve výstupech. Kompletní průběhy odhadnutých stavových veličin algoritmu Model + Param pro reálná data jsou v příloze C.2. Zajímavé jsou především průběhy odhadnutých parametrů multikoptéry (obr. C.9, obr. C.10), které částečně potvrzují správnost jak použitého modelu vzlaku na vrtuli, tak lineárního modelu odporu vzduchu. K úplnému potvrzení by bylo třeba provést více testů s větší variabilitou režimů letu a ideálně i pro více typů multikoptér.

Celkově lze testy na reálných datech považovat za úspěšné. Jak již bylo zmíněno nejedná se o důkladnou analýzu, nýbrž o jednoduchý test na jedné konkrétní trajektorii. I tak jsou ale výsledky cenné a potvrzují výhody použití matematického modelu multikoptéry v algoritmech pro estimaci orientace.



Obr. 6.1: Průběh chyb Eulerových úhlů pro jednotlivé algoritmy



## 7 VLIV VĚTRU

Do této doby bylo předpokládáno, že je rychlost větru nulová. To je předpoklad, který lze splnit ve vnitřním prostředí. Ve vnějším prostředí je třeba z nenulovou rychlostí větru počítat vždy. Cílem je tedy zjistit jakou degradaci přesnosti nenulová rychlost větru způsobí na již otestovaných algoritmech. Snahou je také stanovit vlastnosti větru, pro který lze již otestované algoritmy bezpečně použít. Další snahou je modifikovat algoritmy tak, aby se pokud možno mohly použít za libovolného větru.

U komplementárního filtru či GPS/INS není třeba se věnovat vlivu větru na přesnost algoritmů. Důvodem je nezávislost těchto algoritmů na povětrnostních podmínkách. U algoritmů zahrnující model multikoptéry hraje důležitou roli aerodynamická odporová síla, která je úměrná rychlosti multikoptéry vůči vzduchu. Pro správnou predikci specifické síly je tedy znalost rychlosti větru důležitá. Vybavit multikoptéru senzory rychlosti vůči vzduchu by nebylo nereálné, ovšem takový požadavek by určitě potlačil ostatní výhody použití algoritmů uvažující dynamický model. Je tedy nutné předpokládat, že o rychlosti větru nemá algoritmus žádnou externí informaci. Pro jednoduchost je předpokládáno, že je vítr v čase proměnný, avšak v daném okamžiku pro všechny body prostoru stejný. Jedná se samozřejmě o nereálný, ale pro účely této analýzy dostačující model.

Nejprve je vhodné provést analýzu matematického modelu a snažit se odhadnout jakým způsobem vítr algoritmy ovlivní a až následně predikované chování ověřit v simulacích. Při pohledu na obr. 4.3 je zřejmé, že při předpokladu nulové rychlosti větru bude špatně predikována specifická síla, tedy predikovaná hodnota měření akcelerometru. Na zjednodušeném modelu bude odvozen předpokládaný vliv větru na chybu predikce akcelerometru. Bude uvažován vis multikoptéry a vítr pouze v ose  $x$ . Poté je možné vyjádřit diferenciální rovnici pro skutečnou rychlost v ose  $x$  jako:

$$\dot{v}_x = -u'_x (v_x - w_x) \quad (7.1)$$

kde  $v_x$  je rychlost vůči zemi,  $u'_x$  je koeficient odporu vzduchu a  $w_x$  je rychlost větru vůči zemi. Jedná se o systém prvního řádu a rychlost  $v_x$  lze chápat jako výstup filtru typu dolní propust pro vstupní signál rychlosti větru:

$$\frac{V(s)}{W(s)} = \frac{u'_x}{u'_x + s} \quad (7.2)$$

Zesílení je rovno jedné a dělicí frekvenci filtru určuje koeficient odporu vzduchu  $f_c = \frac{u'_x}{2\pi}$ . Predikce měření akcelerometru je však derivací rychlosti. Tento signál je opět možné považovat za výstup filtru, ovšem nyní je to filtr typu horní propust:

$$\frac{sV(s)}{W(s)} = \frac{u'_x s}{u'_x + s} \quad (7.3)$$

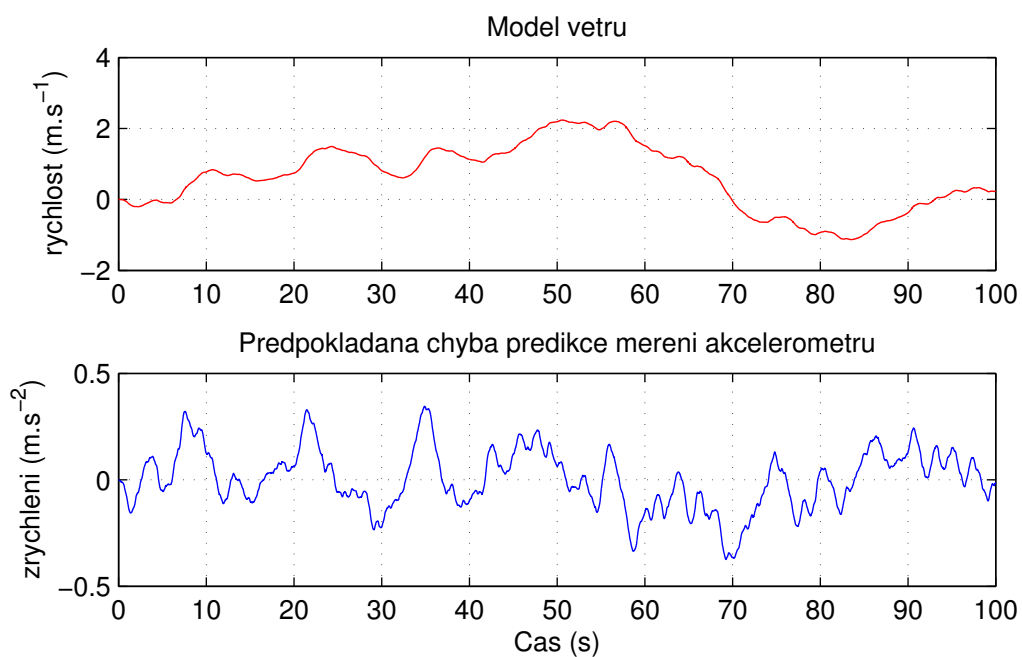
Zesílení je  $K = u'_x$  a dělicí frekvence  $f_c = \frac{u'_x}{2\pi}$ . V případě visu multikoptéry by model uvažující nulovou rychlost předpovídal nulovou hodnotu akcelerometru v ose  $x$ . Jakákoliv nenulová hodnota by v tomto případě byla chybou. Skutečná hodnota akcelerometru v ose  $x$  je však právě výstupem filtru typu horní propust, kde na vstupu je rychlost větru. Při znalosti charakteristik rychlosti větru je tedy možné přibližně odhadnout amplitudu a frekvenční spektrum signálu, který tvoří rozdíl mezi predikovanou a skutečnou hodnotou akcelerometru, která není způsobena nesprávnou hodnotou odhadnutého stavu, nýbrž nenulovou rychlostí větru.

Na první pohled je zajímavé, že vyšší hodnoty koeficientu odporu vzduchu znamenají větší chyby v predikci měření akcelerometru v případě nenulového větru. Při bližším pohledu však logicky vyplývá, že pro nulový koeficient odporu vzduchu nemůže vítr na multikoptéru nijak silově působit. Tedy čím menší koeficient odporu vzduchu, tím menší vliv větru. Druhým závěrem je také to, že problémy způsobují pouze změny v rychlosti větru, což plyne ze vztahu mezi akcelerací a rychlostí větru, který je typu horní propust.

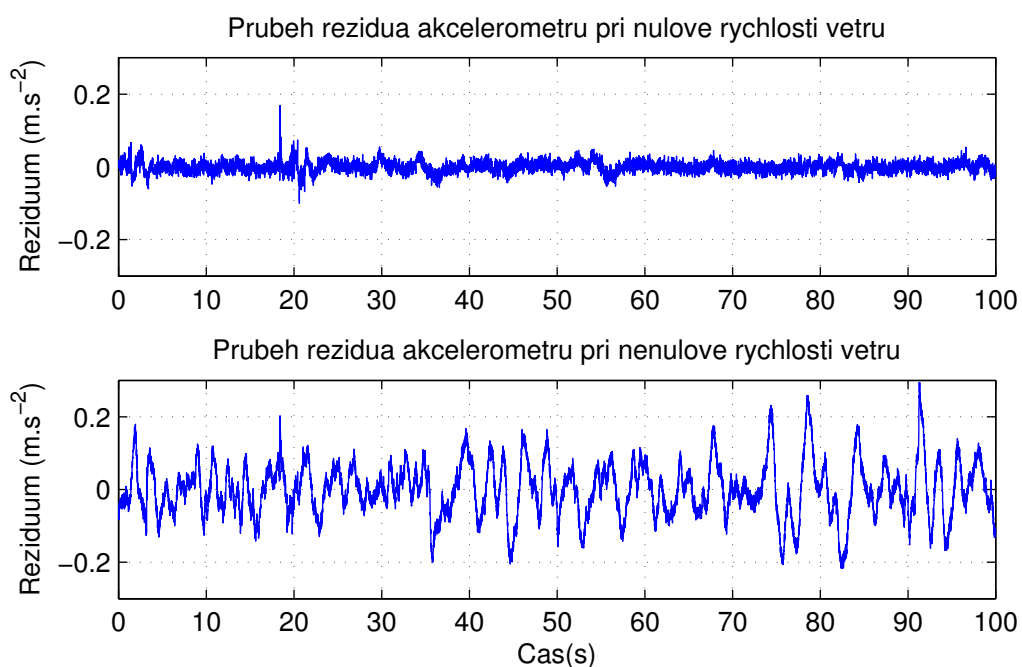
## 7.1 Model větru

Pro ověření vlivu větru na algoritmy estimace orientace byl vytvořen jednoduchý model rychlosti větru. Vítr je v tomto modelu popsán 3D vektorem. Jednotlivé složky tohoto vektoru jsou generovány GM procesem, jehož hodnoty prochází filtrem typu dolní propust s jednotkovým zesílením a s dělicí frekvencí  $f_c = 0.1$  Hz. Na obr. 7.1 je vidět průběh jedné složky vektoru rychlosti větru a predikovaná chybová složka měření akcelerometru, dle úvahy popsané výše. Parametry generujícího GM procesu byly  $\sigma_s = 1$  m a  $\tau = 30$  s.

Shodu predikce se skutečně měřenými hodnotami je možné sledovat na tzv. reziduích, což je právě rozdíl predikované a měřené veličiny. Na základě těchto rozdílů provádí Kalmanův filtr korekce estimovaného stavu. Průběh rezidua pro osu  $x$  akcelerometru při simulaci algoritmu modelBaro na klasické trajektorii bez přítomnosti a s přítomností větru je možné vidět na obr. 7.2. Pro tuto simulaci byl bílý šum akcelerometru cíleně snížen, aby lépe vynikl vliv větru na reziduum akcelerometru. Parametry větru byly stejné jako v předchozím případě. Na základě porovnání predikované (spodní graf obr. 7.1) a skutečné chyby (spodní graf obr. 7.2) lze potvrdit správnost úvahy pro přibližné stanovení chyby predikce měření akcelerometru při nenulovém větru.



Obr. 7.1: Průběh složky vygenerované rychlosti větru a průběh odhadnuté chyby predikce měření akcelerometru



Obr. 7.2: Průběh reziduí akcelerometru pro případ bez větru a s větrem

## 7.2 Vliv větru na přesnost orientace

Pro stanovení parametrů větru, pro které je ještě možné algoritmy bezpečně použít bylo opět provedeno několik simulací. Bylo vytvořeno celkem pět trajektorií, které měly podobný průběh jako klasická trajektorie. V každé působil vítr s různými parametry. Konkrétní nastavení parametrů větru i výsledné přesnosti orientace pro jednotlivé algoritmy shrnuje tabulka 7.1. Všechny algoritmy reagují přibližně stejným způsobem na nenulovou rychlost větru. Ovšem u algoritmů s automatickým odhadem parametrů již občas docházelo k neúměrnému nárůstu chyby pro větší amplitudy rychlosti větru. To lze pravděpodobně přisuzovat špatnému odhadu parametrů při nepřesně predikovaném měření akcelerometru. Ještě pro  $STD = 2 \text{ m.s}^{-2}$  lze hovořit o dostačujících přesnostech. Při vyšších hodnotách amplitudy rychlosti větru je již přesnost nedostačující, navíc hrozí nestabilní chování Kalmanova filtru pro algoritmy s automatickým odhadem parametrů.

Byly projeveny snahy o zmírnění nárůstu chyb při nenulové rychlosti větru, jmenovitě navýšení směrodatné odchylky GM procesu, který modeluje bias akcelerometru a dále přidání rychlosti větru do stavového prostoru. Ovšem ani jedna z uvedených metod nedokázala projevy nenulové rychlosti větru snížit.

Algoritmus	RMSe(°)			MAXe(°)		
	$\phi$	$\theta$	$\psi$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
Parametry větru: $\tau = 30$ s, STD = 1 m.s <sup>-1</sup>						
baseModel	1.22	0.98	1.10	3.41	3.20	2.37
modelBaro	1.39	1.18	1.09	4.66	3.28	3.17
modelParam	1.39	1.11	1.01	3.92	3.07	2.47
modelBaroParam	1.20	1.21	1.13	5.32	3.55	2.93
Parametry větru: $\tau = 30$ s, STD = 2 m.s <sup>-1</sup>						
baseModel	1.87	2.29	1.15	5.46	7.13	2.84
modelBaro	2.07	2.92	1.05	6.48	7.30	3.07
modelParam	1.98	2.14	1.20	6.41	5.96	3.07
modelBaroParam	2.18	2.65	0.97	7.21	6.93	2.49
Parametry větru: $\tau = 30$ s, STD = 3 m.s <sup>-1</sup>						
baseModel	2.92	2.82	1.35	7.74	7.73	3.58
modelBaro	3.12	3.76	1.52	8.56	9.90	3.50
modelParam	2.76	3.27	1.12	7.16	10.11	2.95
modelBaroParam	3.25	3.20	1.45	7.66	8.64	4.41
Parametry větru: $\tau = 30$ s, STD = 4 m.s <sup>-1</sup>						
baseModel	4.04	3.77	1.48	10.08	10.84	4.32
modelBaro	4.64	4.69	1.77	10.66	12.10	5.43
modelParam	3.68	4.99	1.55	9.94	12.01	4.40
modelBaroParam	4.82	4.27	2.37	11.29	10.81	5.63
Parametry větru: $\tau = 30$ s, STD = 5 m.s <sup>-1</sup>						
baseModel	4.54	4.65	1.84	12.18	13.37	4.72
modelBaro	5.31	5.40	2.19	13.74	14.98	6.03
modelParam	4.79	5.31	1.85	16.75	12.67	5.03
modelBaroParam	15.52	6.22	8.86	35.44	17.62	23.37

Tab. 7.1: Vliv větru na přesnost orientace pro jednotlivé algoritmy

## 8 ZÁVĚR

Disertační práce pojednává o estimaci orientace multikoptér. Byly představeny různé algoritmy zahrnující model multikoptéry a bylo ukázáno, že tyto algoritmy umožňují i bez periodického měření absolutní pozice poskytovat orientaci s omezenou chybou. Tím jsou potlačeny nevýhody konkurenčních algoritmů. U GPS/INS je hlavní nevýhodou závislost na pravidelném měření absolutní pozice, které je většinou realizováno GPS přijímačem. U komplementárního filtru pak nelze zaručit omezenou přesnost při všech režimech letu. Především pro delší časové úseky s přetížením jsou chyby komplementárního filtru těžko předvídatelné a v podstatě neomezené.

Návrh jednotlivých algoritmů byl navázán na matematický model multikoptéry, jehož popis je také součástí práce. Byly také navrženy algoritmy s automatickým odhadem parametrů, čímž je potenciální uživatel zbaven jakékoliv povinnosti identifikovat parametry konkrétní multikoptéry.

### Shrnutí výsledků

Všechny navržené algoritmy byly úspěšně otestovány v simulacích. Každý algoritmus byl otestován pro 4 různé trajektorie. Typické dosažené přesnosti kolem  $1^\circ$  RMSe lze považovat za velmi dobré vzhledem k třídě použitých senzorů.

Další analýza byla věnována vlivu nepřesných parametrů na přesnost orientace u algoritmů bez automatického odhadu parametrů. Výsledky ukazují, že nepřesnost koeficientů odporu vzduchu způsobuje přibližně poloviční nárůst chyby než stejná relativní nepřesnost koeficientu přepočtu řídicího signálu na tah. Výsledky dále ukazují, že stanovení parametrů s 10% relativní přesností je pro bezproblémový chod testovaných algoritmů naprosto dostačující.

Pro vybrané algoritmy byly také provedeny testy na reálných datech. Výsledky testů sice vykazovaly zhoršení přesnosti v porovnání se simulacemi, avšak z největší pravděpodobností za touto degradací přesnosti stojí nedokonalá identifikace parametrů senzorů, která nebyla možná z důvodu omezených informací k reálným datům. I tak ale výsledky ukazují schopnost algoritmů odhadovat orientaci s omezenou chybou.

Dále byl také studován vliv větru na algoritmy uvažující model multikoptéry. Bylo zjištěno, že pouze proměnlivý vítr způsobuje nárůst chyb odhadnuté orientace. Dalšími simulacemi bylo zjištěno, že proměnlivý vítr s amplitudou do  $2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  je stále přijatelný pro bezpečný chod algoritmů.

## **Přínos práce**

Celkově práce přináší ucelený přehled o estimaci orientace pro multikoptéry s uvažovaným dynamickým modelem. Hlavním přínosem je důkladné testování navržených algoritmů v simulacích. Byl také navržen nový, doposud v literatuře nevyskytující se algoritmus čerpající výhody zahrnutí dynamického modelu, ovšem bez potřeby znát průběhy řídicích signálů motorů. Tato informace je nahrazena měřením výšky barometrem. Jedná se tedy částečně o absolutní měření pozice, avšak barometr je senzor, jehož funkce není tak omezena jako v případě GPS (viditelnost nebe). Vyšetřování vlivu větru je také důležitým přínosem, jelikož v literatuře jsou vždy u těchto algoritmů použity předpoklady nulové rychlosti větru a vliv na přesnost studován není.

## **Podněty pro navazující práci**

V práci byla provedena důkladná analýza algoritmů v simulacích. Ověření na reálných datech proběhlo pouze okrajově. Důkladná analýza chování algoritmů s reálnými daty je tedy dalším potřebným krokem před úspěšným nasazením algoritmů do praxe. Nutné je především ověřit správnost lineárního modelu odporu vzduchu ve všech režimech letu. V literatuře se u těchto algoritmů vyskytují jak lineární tak kvadratické modely odporu vzduchu. U obou případů jsou prezentovány úspěšné výsledky v reálných experimentech. Lze tedy předpokládat, že ani jeden z modelů nebude daleko od pravdy a že oba modely poskytují dostatečnou aproximaci reálného aerodynamického chování pro uvažované rychlosti. U reálných multikoptér se často do měření inerciálních senzorů promítají velké vibrace. Analýza vlivu vibrací by také přispěla k úspěšné implementaci na reálné multioptéry.

Dalším aspektem je magnetometrické měření kurzu. Ten byl v této práci značně zjednodušen a bylo předpokládáno, že magnetometr poskytuje dostatečně přesnou informaci o kurzu za všech podmínek. To jistě není reálný případ. Jedná se však o relativně často řešené téma. Mělo by být tedy možné velké množství poznatků zjistit z již publikované literatury.

## LITERATURA

- [1] N.A. Chaturvedi, A.K. Sanyal, and N.H. McClamroch. Rigid-body attitude control. *Control Systems, IEEE*, 31(3):30–51, June 2011.
- [2] ČSN 31 0001. Letectví a kosmonautika - terminologie, 2005.
- [3] D. Titterton, J.L. Weston, and Institution of Electrical Engineers. *Strapdown Inertial Navigation Technology, 2nd Edition*. Electromagnetics and Radar Series. Institution of Engineering and Technology, 2004.
- [4] M. Euston, P. Coote, R. Mahony, Jonghyuk Kim, and T. Hamel. A complementary filter for attitude estimation of a fixed-wing uav. In *Intelligent Robots and Systems, 2008. IROS 2008. IEEE/RSJ International Conference on*, pages 340–345, Sept 2008.
- [5] R. Mahony, T. Hamel, and Jean-Michel Pflimlin. Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 53(5):1203–1218, June 2008.
- [6] G. Baldwin, R. Mahony, J. Trumpf, T. Hamel, and T. Cheviron. Complementary filter design on the special euclidean group  $se(3)$ . In *Control Conference (ECC), 2007 European*, pages 3763–3770, July 2007.
- [7] Robert Mahony, Vijay Kumar, and Peter Corke. Multirotor aerial vehicles: Modeling, estimation, and control of quadrotor. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2012.
- [8] Hyon Lim, Jaemann Park, Daewon Lee, and H.J. Kim. Build your own quadrotor: Open-source projects on unmanned aerial vehicles. *Robotics Automation Magazine, IEEE*, 19(3):33–45, Sept 2012.
- [9] Michal Šilhán. Odhad orientace uav v prostoru. Diplomová práce, České vysoké učení technické v Praze, 2010.
- [10] N.Shantha Kumar and T. Jann. Estimation of attitudes from a low-cost miniaturized inertial platform using kalman filter-based sensor fusion algorithm. *Sadhana*, 29(2):217–235, 2004.
- [11] A.M. Sabatini. Quaternion-based extended kalman filter for determining orientation by inertial and magnetic sensing. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 53(7):1346–1356, July 2006.



- [12] Eun-Hwan Shin. *Estimation Techniques for Low-cost Inertial Navigation*. PhD thesis, The University of Calgary, 2005.
- [13] Xiaoying Kong. Ins algorithm using quaternion model for low cost imu. *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 46(issue 4):221–246, 2004.
- [14] Jay Farrell. *Aided navigation : GPS with high rate sensors*. McGraw-Hill, New York, 2008.
- [15] Robert Rogers. *Applied mathematics in integrated navigation systems*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, Va, 2007.
- [16] I. Rhee, M.F. Abdel-Hafez, and J.L. Speyer. Observability of an integrated gps/ins during maneuvers. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 40(2):526–535, April 2004.
- [17] Pifu Zhang, J. Gu, E.E. Milios, and P. Huynh. Navigation with imu/gps/digital compass with unscented kalman filter. In *Mechatronics and Automation, 2005 IEEE International Conference*, volume 3, pages 1497–1502 Vol. 3, 2005.
- [18] Jan Wendel, Oliver Meister, Christian Schlaile, and Gert F. Trommer. An integrated gps/mems-imu navigation system for an autonomous helicopter. *Aerospace Science and Technology*, 10(6):527–533, 2006.
- [19] Eun-Hwan Shin. Accuracy improvement of low cost ins/gps for land applications. Master’s thesis, The University of Calgary, 2001.
- [20] John Crassidis. *Optimal estimation of dynamic systems*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2012.
- [21] M. Koifman and I. Y. Bar-Itzhack. Inertial navigation system aided by aircraft dynamics. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(4):487–493, July 1999.
- [22] John Macdonald, Robert Leishman, Randal Beard, and Timothy McLain. Analysis of an improved imu-based observer for multicopter helicopters. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 2013.
- [23] John C. Macdonald. *Efficient Estimation for Autonomous Multi-Rotor Helicopters Operating in Unknown, Indoor Environments*. PhD thesis, Brigham Young University, 2012.
- [24] Murray Ireland and David Anderson. Development of navigation algorithms for nap-of-the-earth uav flight in a constrained urban environment. *28th International Congress of the Aeronautical sciences*, 2012.

- [25] Philipp Crocoll, Justus Seibold, Georg Scholz, and Gert F. Trommer. Model-aided navigation for a quadrotor helicopter: A novel navigation system and first experimental results. *NAVIGATION: Journal of The Institute of Navigation*, 61(4), 2014.
- [26] Robert C. Leishman, John Macdonald, Randal W. Beard, and Timothy W. McLain. State estimation with an improved dynamic model. *IEEE Control Systems*, 34(1):28–41, 2014.
- [27] Robert Leishman, John Macdonald, Stephen Quebe, Jeff Ferrin, Randal Beard, and Timothy McLain. Utilizing an improved rotorcraft dynamic model in state estimation. *2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 5173–5178, September 2011.
- [28] Philippe Martin and Erwan Salaun. The true role of accelerometer feedback in quadrotor control. *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2010.
- [29] Dan Simon. *Optimal state estimation : Kalman, H [infinity] and nonlinear approaches*. Wiley-Interscience, Hoboken, N.J, 2006.
- [30] Pierre-Jean Bristeau, Francois Callou, David Vissiere, and Nicolas Petit. The navigation and control technology inside the ar.drone micro uav. *Proceedings of the 18th IFAC World Congress, 2011*, pages 1477–1484, 2011.
- [31] Pierre-Jean Bristeau, Philippe Martin, Erwan Salaun, and Nicolas Petit. The role of propeller aerodynamics in the model of quadrotor uav. *Proceedings of the European Control Conference 2009*, pages 683–688, 2009.
- [32] Sergej Čelikovský. *Nelineární Systémy*. Vydavatelství ČVUT, 2005.
- [33] John L. Crassidis, F. Landis Markley, and Yang Cheng. Survey of nonlinear attitude estimation methods. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 30(1):12–28, January 2007.
- [34] Mohinder Grewal. *Global positioning systems, inertial navigation, and integration*. Wiley-Interscience, Hoboken, N.J, 2007.
- [35] Robert Hermann and Arthur J. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977.
- [36] Reza Jazar. *Theory of applied robotics kinematics, dynamics, and control*. Springer, New York London, 2010.

- [37] W. Johnson. *Helicopter Theory*. Princeton University Press, 1980.
- [38] Philippe Martin and Erwan Salaun. Design and implementation of a low-cost observer-based attitude and heading reference system. *Control Engineering Practice*, pages 712–722, 2010.
- [39] Alexandra Moutinho, Miguel Figueirôa, and JoséRaul Azinheira. Attitude estimation in  $so(3)$ : A comparative uav case study. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, pages 1–10, 2014.
- [40] J. R. Raol. *Multi-sensor data fusion with MATLAB*. CRC Press, Boca Raton, 2010.
- [41] Shankar Sastry. *Nonlinear system : analysis, stability, and control*. Springer, New York, 1999.
- [42] Malcolm D. Shuster. Survey of attitude representations. *Journal of the Astronautical Sciences*, 41(4):439–517, 1993.
- [43] D. Simon. Kalman filtering with state constraints: a survey of linear and non-linear algorithms. *Control Theory Applications, IET*, 4(8):1303–1318, August 2010.
- [44] T. Tomic, K. Schmid, P. Lutz, A. Domel, M. Kassecker, E. Mair, I.L. Grixia, F. Ruess, M. Suppa, and D. Burschka. Toward a fully autonomous uav: Research platform for indoor and outdoor urban search and rescue. *Robotics Automation Magazine, IEEE*, 19(3):46–56, Sept 2012.
- [45] M. Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1993.

## VLASTNÍ PUBLIKAČNÍ ČINNOST

BARÁNEK, R. *Multicopter Attitude Estimation Using Dynamic Model*. In Proceedings of the 21st Conference STUDENT EEICT 2015. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních, 2015. p. 445-449. ISBN: 978-80-214-5148- 3.

DUNÍK, J; STRAKA, O.; ŠIMANDL, M.; KOST, O.; AJGL, J.; SOTÁK, M.; BARÁNEK, R.; KAŇA, Z. *Estimation of State and Measurement Noise Characteristics*. In Proceedings of the 18th International Conference on Information Fusion, Washington, DC, USA, 2015.

BARÁNEK, R.; ŠOLC, F. *Model-Based Attitude Estimation for Multicopters*. Advances in Electrical and Electronic Engineering - internetový časopis, (<http://advances.utc.sk>), 2014, vol. 2014, no. 5, p. 501-510. ISSN: 1804- 3119.

BARÁNEK, R. *Motor Failure Detection for Multicopters*. In Proceedings Of The 20th Conference Student EEICT 2014 Volume 3. Brno: LITERA Brno, 2014. p. 52-56. ISBN: 978-80-214-4924- 4.

BARÁNEK, R.; ŠOLC, F. *Tuning of Complementary Filter Attitude Estimator Using Precise Model of Multicopter*. ElectroScope - <http://www.electroscope.zcu.cz>, 2013, vol. 2013, no. 5, p. 1-6. ISSN: 1802- 4564.

BARÁNEK, R.; ŠOLC, F. *Model of Multicopter for Development of Algorithms for Autonomous Flight*. In Mechatronics 2013, Recent Technological and Scientific Advances. Switzerland: Springer, 2013. p. 519-526. ISBN: 978-3-319-02293- 2.

BARÁNEK, R.; ŠOLC, F. *Hexacopter Pitch Estimator for a Pitch Stabilizer*. In Proceedings of the IFAC/ IEEE PDES 2012 International Conference. IFAC- PapersOnLine, 10344 Virginia Lee Dr. Centerville, OH 45458, U.S.A.: IFAC-PapersOnLine / Elsevier, 2013. p. 326-329. ISBN: 978-3-902823-21- 2.

FLORIÁN, T.; ŽALUD, L.; BARÁNEK, R.; SCHIOLER, H. *Robot path planning under line of sight constraints*. In MENDEL 2013, 19th International Conference on Soft Computing. Mendel Journal series. 1. Brno, CZ: Nosová Hana, Koperníkova 4362/21, Brno, 2013. p. 307-310. ISBN: 978-80-214-4755- 4. ISSN: 1803- 3814.

BARÁNEK, R. *Tuning of Complementary Filter Attitude Estimator Using Precise Model of Multicopter*. In Proceedings Of The 18th Conference Student EEICT 2012 Volume 3. Brno: LITERA Brno, 2013. p. 62-66. ISBN: 978-80-214-4695- 3.

BARÁNEK, R.; ŠOLC, F. *Attitude Control of Multicopter*. ElectroScope - <http://www.electroscope.zcu.cz>, 2012, vol. 2012, no. 5, p. 1-5. ISSN: 1802- 4564.

BARÁNEK, R. *Inertial Measurement Unit – Data Fusion and Visualization using MATLAB*. In Proceedings of the IFAC/ IEEE PDES 2012 International Conference. IFAC- PapersOnLine, 10344 Virginia Lee Dr. Centerville, OH 45458, U.S.A.: IFAC- PapersOnLine / Elsevier, 2012. p. 12-17. ISBN: 978-3-902823-21- 2.

BARÁNEK, R.; ŠOLC, F. *Senzor Orientace Založený na Zpracování Dat z Inerciálních Snímačů*. In Workshop Perspektivní projekty vývoje řídicích a senzorických technologií 2012 - Sborník příspěvků. Brno: VUT- FEKT, 2012. s. 33-38. ISBN: 978-80-214-4527- 7.

BARÁNEK, R.; ŠOLC, F. *Modelling and Control of a Hexa-copter*. In Proceedings of the 2012 13th International Carpathian Control Conference (ICCC). 1. Faculty of BERG, Technical University of Košice, B. Němcovej 3, 042 00 Košice: ICC 2012, Institute of Control and Informatization of Production Processes, 2012. p. 19-23. ISBN: 978-1-4577-1866- 3.

BARÁNEK, R. *Attitude Control of Multicopter*. In Proceedings Of The 18th Conference Student EEICT 2012 Volume 3. Brno: LITERA Brno, 2012. p. 96-100. ISBN: 978-80-214-4462- 1.

BARÁNEK, R.; ŠOLC, F. *Mnohorotorové vrtulníky k použití v budovách i otevřeném terénu*. Automa, 2011, roč. 17, č. 12, s. 45-47. ISSN: 1210- 9592.

# PODĚKOVÁNÍ

Za finanční podporu při doktorském studiu patří dík následujícím projektům:

- Výzkum nových řídicích metod, měřicích postupů a inteligentních prostředků v automatizaci - FEKT-S-14-2429, 2014-2016
- Podpora výzkumu moderních metod a prostředků v automatizaci - FEKT-S-11-6, 2011-2013
- Synergie - Mobilní senzorické systémy a sítě - GD102/09/H081, 2009-2012
- Inteligentní systémy v automatizaci - výzkumný záměr MSM0021630529, 2007-2011
- CAK - Centrum aplikované kybernetiky - 1M0567, 2005-2011

Poděkování patří také Markovi Muellerovi z Flying Machine Arena (ETH Zurich) za bezplatné poskytnutí dat z reálného experimentu letu multikoptéry.