Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Žákovská řešení otevřených a polyvalentních úloh

Diplomová práce

Vypracovala: Bc. Petra Bézová

Vedoucí práce: doc. RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Žákovská řešení otevřených a polyvalentních úloh jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ....

Petra Bézová

Anotace

Tato diplomová práce se zabývá žákovskými řešeními otevřených a polyvalentních úloh na druhém stupni základních škol. Hlavním cílem práce je zjistit, jak žáci řeší úlohy, pro které existuje více postupů řešení nebo více řešení, a jaká variabilita se objevuje v žákovských řešeních. Práce je rozdělena do čtyř částí, Terminologie, Design výzkumu, Výsledky a Příklady v podobě Concept Cartoons. První část se věnuje rešerši slovních, otevřených a polyvalentních úloh a též rešerši metody Concept Cartoons. V druhé části se zaměřuji na kvalitativní výzkum a též zkoumám, jak žáci řeší již zmíněné úlohy. Třetí část se podrobně věnuje žákovským řešením a poslední část obsahuje užití metody Concept Cartoons v praxi.

Klíčová slova: slovní úlohy, otevřené a polyvalentní úlohy, žákovská řešení slovních úloh, více různých postupů, metoda Concept Cartoons

Abstract

This diploma theses deals with pupils' solving of open and polyvalent math word problems for 6^{th} to 9^{th} grade of Czech primary schools. The main aim of this work is to find out how the pupils solve the word problems which have a number of strategies used in solving or which have more solutions. Another aim is to find out the variability of the pupils' solutions. This diploma theses is divided into four parts - Terminology, Design of Research, Results and Examples in Concept Cartoons. The first part deals with the research of word problems, open and polyvalent word problems and the Concept Cartoons method. The second part deals with the qualitative research of the pupils' solving of these word problems. The third part deals with the pupils' practical solutions in detail and the last part deals with the practical Concept Cartoons method.

Keywords: Math Word Problems, Open and Polyvalent Word Problems, Pupils' Solving of Math Word Problems, Concept Cartoons Method

Poděkování

Ráda bych věnovala poděkování mé vedoucí diplomové práce doc. RNDr. Libuši Samkové, Ph.D., za odborné vedení mé práce, cenné rady, připomínky, trpělivost a věnovaný čas. Dále bych chtěla poděkovat rodině a přátelům, kteří mi byli oporou během studia.

Obsah

Úvod

Mezi nezbytnou součást matematiky patří slovní úlohy, s kterými se setká každý jednotlivec v každodenním životě. Ve své bakalářské práci jsem se věnovala otevřeným a polyvalentním úlohám a jejich řešením. Praktickou částí byla sbírka otevřených a polyvalentních úloh. Rozhodla jsem se zabývat se těmito úlohami i v mé diplomové práci. Protože jsem se v bakalářské práci věnovala zmíněným úlohám já, zajímalo mě, jak ve skutečnosti takové úlohy řeší žáci na 2. stupni základních škol. V diplomové práci se tedy zaměřuji na žákovská řešení, především na různorodost postupů pro otevřené a polyvalentní úlohy.

Pro zjištění zmíněných řešení jsem se rozhodla vytvořit kvalitativní výzkum, který je vypracován v 2. kapitole. Nejprve si shrnu má dosavadní zjištění, poté si naplánuji, jak bude výzkum probíhat. V další části sestavím pracovní list, který se bude skládat ze sedmi příkladů a bude žákům zadáván formou písemného testu v 7. ročnících. Všech sedm příkladů jsem převzala ze sbírky úloh z mé bakalářské práce. Žákovská řešení, která získám, nejprve opravím a poté budu analyzovat jednotlivé postupy řešení. Soustředit se budu na variabilitu řešení v jednotlivých třídách, ale i na variabilitu mezi třídami.

Z žákovských řešení vyberu ta, která jsou něčím zajímavá, obvyklá i neobvyklá, do kterých spadají i chybné odpovědi. Případně řešení a odpovědi, u kterých lze provést diskuzi mezi žáky.

Na závěr práce zařazuji 5 příkladů z již zmíněného pracovního listu a jejich žákovská řešení zpracovaná pomocí metody Concept Cartoons. Tyto příklady následně využiji ve své praxi při výuce matematiky. Část této poslední kapitoly je věnována právě tomu, jak probíhalo zařazení vytvořených obrázků do výuky matematiky.

1 Terminologie

1.1 Slovní úlohy

Slovní úlohy jsou nepostradatelnou součástí matematiky. Každý se s nimi setká primárně při výuce matematiky, avšak jejich řešení se prolíná v dalších předmětech při řešení problémů a mimo jiné i v každodenním životě. Vyjma znalostí matematiky je podstatné u slovní úlohy schopnost porozumět textu (Vondrová 2019).

Za slovní úlohu budeme považovat úlohu, která je zasazena do kontextu, tedy ne každou úlohu, která je formulována slovně. Proces jejího řešení je v odborné literatuře rozdělován do různého počtu kroků (Vondrová 2020, s. 67).

Abychom mohli diskutovat nad tím, kde žáci ve slovních úlohách dělají chyby, rozděluje se jejich řešení do pěti fází, které na sebe postupně navazují:

- zjednodušit si zadání slovní úlohy, uvědomit si, co je podstatné v zadání, říci si zadání vlastními slovy. Tuto fázi Vondrová (2019) nazývá: zpracování textového zadání do sémantického modelu;

- vypsat si podstatné informace ze zadání slovní úlohy, neboli vytvořit zápis slovní úlohy. Vondrová (2019) označuje tuto fázi: vytvoření situačního modelu;

- sestavit si výpočet, rovnici či grafickou podobu (schéma, obrázek, graf,...), díky které lze daná slovní úloha řešit. Zde vychází žák již pouze ze zápisu, který si vytvořil v předchozí fázi. Tuto fázi Vondrová (2019) pojmenovává: konstrukce matematického modelu;

- vyřešení matematického modelu, který si žák sestavil v třetí fázi. To znamená spočítat výpočet, rovnici a tak dále;

- poslední část se věnuje kontrole výpočtu, to znamená vykonání zkoušky a ověření si svých výpočtů. Po zkontrolování si svého výpočtu je nepostradatelné vytvoření odpovědi, v které je výsledek vyložen v návaznosti na zadání slovní úlohy (Vondrová 2019).

1.2 Otevřené úlohy

Otevřené úlohy jsou takové matematické úlohy, které splňují alespoň jednu z následujících vlastností:

- úlohy mají otevřenou vstupní situaci, což znamená, že existuje více způsobů, jak úlohy uchopit;
- úlohy mají otevřený postup řešení, jinými slovy existuje více způsobů, jak je řešit;
- úlohy mají otevřenou výslednou situaci, existuje tedy více výsledků;
- úlohy mají další cestu otevřenou, neboli existuje více způsobů, jak je rozvinout v úlohy nové (Samková 2018).

Všechny tyto zmíněné typy se mohou navzájem prolínat, což znamená, že úloha může mít např. jak otevřenou vstupní situaci, tak i otevřenou výslednou situaci apod. Soustředím se na úlohy, které mají otevřený postup řešení, a úlohy, které mají otevřenou výslednou situaci. Těmto úlohám jsem se již věnovala v bakalářské práci s názvem Matematické úlohy, pro které existuje více postupů řešení a/nebo více řešení. Nyní tedy na zmiňovanou bakalářskou práci navazuji.

1.3 Polyvalentní úlohy

Do úloh, které mají otevřený postup řešení, řadíme úlohy polyvalentní. Polyvalentní úlohy jsou takové úlohy, které mají různě náročné způsoby řešení. Lze je tedy řešit různě náročnými postupy. Žáci si tak mohou vybrat způsob řešení, který jim je bližší, který lépe ovládají, nebo který odpovídá jejich znalostem (Samková 2018).

1.4 Concept Cartoons

Concept Cartoons je výuková pomůcka, která vznikla ve Velké Británii v roce 1991. Jejími autory jsou Brenda Keoghová a Stuart Naylor. Tato pomůcka má dle autorů sloužit k lepšímu zapojení žáků do výuky a podpořit jejich myšlení a porozumění. Tito dva autoři čerpali informace především ze svých vlastních pedagogických zkušeností (Naylor, Keogh 2013).

Concept Cartoons jsou založeny na každodenních situacích, a to hlavně proto, aby se zapojili do výuky i méně sebevědomí žáci. Pokud by se netýkaly každodenních situací, zdály by se vědecké a někteří žáci by se jich mohli zaleknout. Další důvody jsou následující. Žáci se utužují v tom, že každý má jiný názor na běžnou situaci, učí se i to, že v mnoha případech může existovat více přijatelných alternativ. Osvojují si též argumentaci a obhajobu svých názorů (Naylor, Keogh 2013).

Tento typ úloh byl původně vytvořen pro 9 až 13leté žáky, ale v současné době jsou tyto úlohy používané v zahraničí ve všech fázích primárního i sekundárního vzdělávání (Hejnová 2014, s. 50).

Concept Cartoons je jednoduchý kreslený obrázek znázorňující bublinový rozhovor několika dětí. Děti se nacházejí v nějakém známém prostředí (školním i mimoškolním), texty v bublinách jsou stručné a používají jednoduchý jazyk. V rámci rozhovoru bývá nejdůležitější bublina umístěna vlevo nahoře, často je v ní blíže naznačeno diskutované téma. Jedna z bublin obsahuje místo textu otazník (Samková 2015, s. 215).

Zmíněná bublina, která obsahuje otazník, dává jasné prohlášení, že může existovat více nápadů, které ještě nejsou zahrnuty do dialogu. Tímto jsou studenti povzbuzováni ke zkoumání alternativních nápadů. Důležité je také zmínit, že v bublinách se objevují jak správné názory, tak i chybné odpovědi (Naylor, Keogh 2013).

Při této metodě vyučování musí být učitel otevřený nápadům studentů, umožňovat interakce a povzbuzovat studenty k přemýšlení a debatě pomocí různorodých otázek. Dialog pokračuje, dokud studenti nevypracují vlastní řešení pro nalezení správné myšlenky a její realizaci. Vyučující svým studentům neřekne, jaká odpověď je správná a naopak jaká je chybná. Podporuje reflexi, myšlení a poskytuje pouhá vodítka k nalezení řešení. Úspěch výuky tedy závisí nejen na kvalitě připraveného konceptu, ale také na tom, jak učitel vede diskuzi, jak pracuje s celou třídou a jaká vhodná vodítka použije (Kabapinar 2005).

Autoři Ed van den Berg a Patricia Kruit (2017) ve své publikaci navrhují možné způsoby využití této metody ve třídě. Doporučují 4 možnosti. Jako první možnost je pracovat s celou třídou najednou. Při aktivitě se vytváří soupis různých názorů a argumentů. Učitel vede diskuzi a pomáhá studentům prezentovat své nápady a vysvětlení, ale zůstává neutrální. Druhou možnost uvádějí nechat děti pracovat individuálně. Žáci samostatně odpovídají na pracovní list, s kým souhlasí a proč. Jako třetí možnost zmiňují pracovat v malých skupinkách. V každé skupince učitel přidělí žákům role pro kooperativní učení. Žáci přemýšlí o možnostech, které jim pomohou najít odpovědi na jednu z otázek nebo dále prozkoumávat tvrzení v obrázku. A jako poslední, čtvrtou možnost doporučují žáky rozdělit do skupin a přimět žáky, aby hlouběji přemýšleli o možnostech, které navrhují. Během hodiny žáci vyplní pracovní list, domluví se, jaké materiály a pomůcky si přinesou na další hodinu matematiky a následující den využijí pomůcky k tomu, aby reálně ztvárnili úlohu, která je zadaná v obrázku Concept Cartoons.

2 Design výzkumu

Cílem výzkumu je zjistit, jak žáci 2. stupně ZŠ řeší otevřené a polyvalentní úlohy a jaká variabilita se objevuje v žákovských řešeních. Variabilitu řešení sleduji mezi žáky v jedné třídě, ale i mezi třídami. Zaměřuji se nejen na správná žákovská řešení, ale i na řešení chybná a na základě výsledků analýzy dat přetvářím zadané úlohy do podoby Concept Cartoons. Metodu Concept Cartoons následně v rámci vlastní praxe osobně vyzkouším.

Má hlavní výzkumná otázka se naprosto shoduje s cílem výzkumu - jak žáci 2. stupně ZŠ řeší otevřené a polyvalentní úlohy. Další otázkou je, zda žáci při řešení těchto úloh využívají pouze jeden způsob řešení, či více způsobů. A poslední otázkou je, jak žáci budou reagovat na metodu Concept Cartoons a zda se s touto vyučující metodou již setkali.

2.1 Má dosavadní zjištění

V mé bakalářské práci Matematické úlohy, pro které existuje více postupů řešení a/neb více řešení jsem se seznámila s otevřenými a polyvalentními úlohami. V rámci praktické části jsem vyhledávala tyto úlohy a vytvořila jejich sbírku. Následně jsem analyzovala jejich různá řešení a různé možné postupy řešení. Polyvalentní úlohy mě velmi zaujaly, poněvadž se mi líbí myšlenka, že žák může řešit úlohu způsobem, který mu je nejpohodlnější.

Hlavním cílem mé bakalářské práce bylo sestavit takovou sbírku úloh, kterou by žáci 2. stupně základních škol mohli využívat jako učební pomůcku při přípravě na hodiny matematiky. Do sbírky jsem zahrnula typické a zajímavé úlohy, se kterými se žáci mohou setkat.

2.2 Kvalitativní analýza dat

V kvalitativním výzkumu se nejčastěji na začátku stanoví téma a položí se základní výzkumné otázky. V průběhu sběru dat a při jejich analýze můžeme doplňovat potřebné otázky. Z tohoto důvodu se kvalitativní výzkum označuje jako pružný typ výzkumu. Během výzkumu vznikají nová rozhodnutí, jak pokračovat ve sběru dat, a vznikají nové hypotézy, které vedou k již zmíněnému vytvoření nových otázek (Hendl 2005).

Metodolog Creswell definoval kvalitativní výzkum následovně: „Kvalitativní výzkum je proces hledání porozumění založený na různých metodologických tradicích zkoumání daného sociálního nebo lidského problému. Výzkumník vytváří komplexní, holistický obraz, analyzuje různé typy textů, informuje o názorech účastníků výzkumu a provádí zkoumání v přirozených podmínkách“ (Hendl 2005).

2.2.1 Volba výběru

Ve výběru dotazovaných žáků, přesněji tříd, bych chtěla postupovat takto:

1. Výzkum provádět na více školách; chtěla bych, aby jednotlivé třídy měly rozdílné učitele matematiky. Do výzkumu zařadit minimálně čtyři třídy.

2. Školy, třídy vybrat dle jejich umístění, tzn. dotazovat školy ve městě, ale i menší školy na vesnici či městysu.

3. Nejdříve bych osobně kontaktovala školy, či učitele matematiky a zjistila bych, jaké učebnice matematiky používají při výuce. Snažila bych se najít školu, která používá starší typy učebnic (například od autorů Odvárko, Kadleček) a zároveň bych ráda našla školu, která učí podle nových učebnic (např. Binterová a kolektiv).

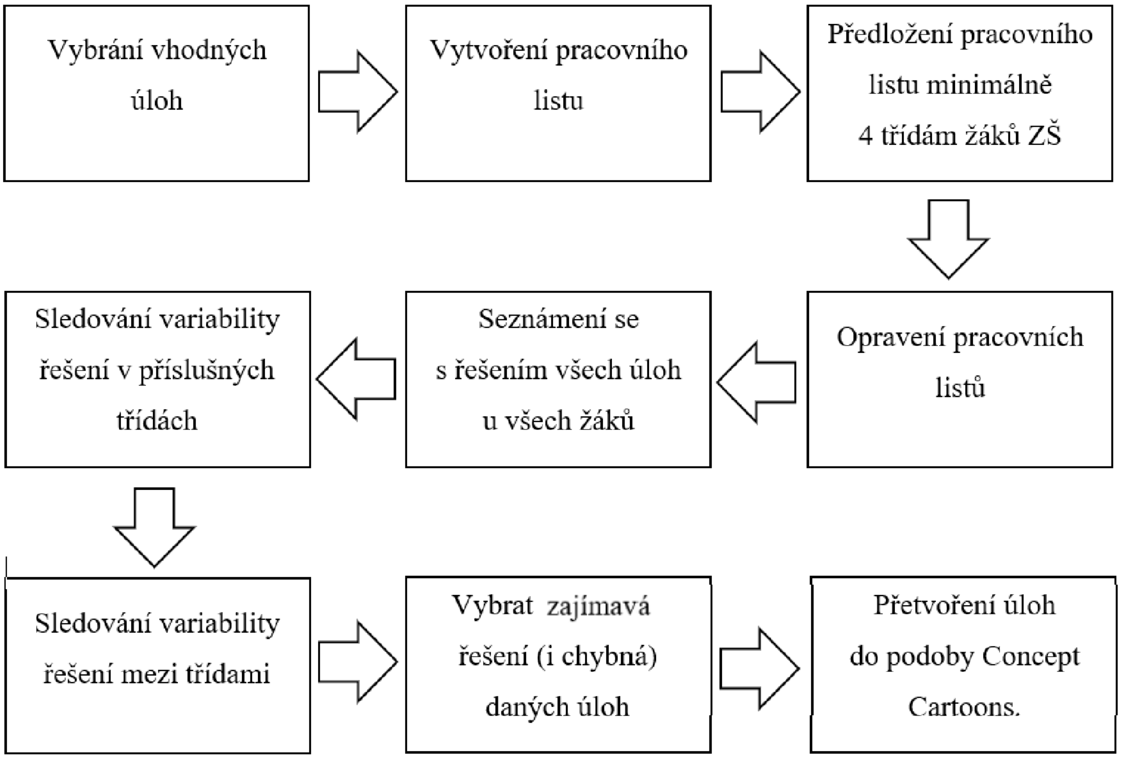
4. Pokud by se mi podařilo sehnat třídu z menší školy (vesnice, městys), která se učí dle starších učebnic, zajímalo by mě srovnání se třídou z města (která by učila dle stejných učebnic). Zajímala by mě variabilita žákovských řešení mezi třídami.

5. Ke všem vybraným třídám bych si zjistila celkové informace o třídě typu: zda této třídě (ne)jde výuka matematiky, zda je (ne)baví výuka, jsou

aktivní či nikoliv v hodinách matematiky, (ne)mají v matematice dobré známky apod. Tyto informace by sloužily k variabilitě žákovských řešení v rámci jedné třídy.

2.3 Průběh výzkumu

Průběh výzkumu bude probíhat dle grafického znázornění na obrázku číslo 1. Celý výzkum jsem rozdělila do 9 kroků:



Obrázek 1: Metoda výzkumu

Podrobnější popis pro průběh výzkumu:

1. Nejdříve z již zmiňované bakalářské práce vyberu vhodné otevřené a polyvalentní úlohy, které budou odpovídat náročnosti pro vybranou třídu, tzn. vyberu úlohy přiměřené znalostem ke konci 7. třídy.

2. Z vybraných úloh vytvořím pracovní list ve formě písemného testu.

3. Daný pracovní list předložím minimálně 4 vybraným třídám.

4. Opravím pracovní listy.

5. Další krok je zásadní. Seznámím se se všemi řešeními, které mi žáci uvedou do již zmíněných pracovních listů.

6. Provedu úvodní analýzu získaných dat: v rámci tříd budu sledovat variabilitu řešení úloh, tzn. budu sledovat, zda žáci, kteří mají stejného učitele, budou úlohy řešit obdobně, či budou používat různorodá řešení.

7. V pokročilé fázi analýzy dat se budu zabývat variabilitou řešení mezi třídami, které měly různé učitele.

8. Vyberu řešení něčím zajímavá, obvyklá i neobvyklá, do kterých budou spadat i chybné odpovědi. Případně odpovědi, u kterých lze provést diskuzi mezi žáky.

9. Vybrané odpovědi z předchozího kroku přetvořím do podoby Concept Cartoons. Následně bych v rámci své praxe provedla výuku metodou Concept Cartoons, kterou budu mít předpřipravenou z tohoto šetření.

2.4 Pracovní list

Pracovní list je složen ze sedmi slovních úloh. Všechny slovní úlohy jsou otevřené úlohy. Jedna má otevřenou výslednou situaci, neboli existuje více správných výsledků. Zbylé úlohy mají otevřený postup řešení, úlohy lze řešit více způsoby. Příklad č. 5 je úloha polyvalentní.

Všechny úlohy, které obsahuje pracovní list, jsem již použila v mé bakalářské práci, kde jsem se podrobně zabývala jejich postupy a řešením. Celkově se praktická část mé bakalářské práce dá shrnout jako sbírka úloh, v které lze najít zadání a podrobné vypracovaní slovních úloh. Většina slovních úloh je řešena několika různými postupy. Naopak v této diplomové práci se zabývám řešeními žáků základních škol.

Většinu úloh jsem čerpala z učebnic od autorů Odvárko a Kadleček, a to z toho důvodu, že v dnešní době jsou tyto učebnice stále velmi využívané, ač je na trhu k dostání spousta novějších učebnic matematiky. Další část úloh jsem převzala z matematických olympiád a přijímacích zkoušek z předchozích ročníků. Důvodem bylo to, že tyto úlohy bývají nestandardní, žáci pro ně nemají naučené postupy, a tak je šance na větší variabilitu. Menší část úloh jsem čerpala ze sbírek matematiky (Běloun, Tichá) a v článcích mé vedoucí práce doc. Samkové. Důvodem je to, že zmíněné úlohy mě zaujaly a působily zajímavě. Samozřejmě jsem nejdříve musela učebnice prostudovat a vybrat z nich právě ty slovní úlohy, které splňují podmínku, že se jedná o otevřené nebo polyvalentní slovní úlohy.

Pracovní list jsem se rozhodla předložit do sedmi tříd základních škol. Tím, že každá škola má svůj tématický plán a ve výuce matematiky se může navzájem lišit, měli si žáci vybrat ze sedmi zmíněných úloh pouze pět z nich, které vypracují. Například některé třídy ještě neprobíraly téma procenta. Žáci tedy takovou úlohu vynechali a řešili úlohy jiné. Vyskytli se i žáci, kteří řešili všechny úlohy, ale i takoví žáci, kteří řešili i méně než pět úloh.

Pracovní list jsem zadala k vypracování na pěti školách do sedmi tříd. Celkový počet řešitelů byl 120. Každý žák měl svůj specifický kód, neboť vypracování pracovního listu bylo anonymní. Kód se skládá z písmene a čísla.

Písmeny jsem označila třídy - A, B, C, D, E, F a G. Tím, že všichni žáci z jedné třídy měli stejné písmeno ve svém specifickém kódu, jsem měla možnost zjišťovat variabilitu řešení v rámci jedné třídy, ale i variabilitu řešení napříč třídami.

V třídě A řešilo pracovní list 17 žáků, v třídě B 6 žáků, v třídě C 18 žáků, v třídě D 27 žáků, v třídě E 10 žáků, v třídě F 22 žáků a v třídě G 20 žáků.

Třída A a B jsou ze stejné školy, jedná se o paralelní ročníky, navíc každá třída měla jiného vyučujícího matematiky. Třída F a G jsou opět paralelní třídy na jedné škole, obě tyto třídy měly stejného vyučujícího.

Číslo, které je součástí kódu, přidělil(a) žákům jejich vyučující matematiky. Pro tento způsob přidělení jsem se rozhodla, neboť jsem poskytovala zpětnou vazbu vyučujícím. Vyučující a žáci se tedy mohli zpětně podívat na řešení a úspěšnost pracovních listů. Zároveň tento způsob zajistil, že pro mě řešitelé zůstali v anonymitě. Vyučující rozdali žákům čísla od jedné do x. Přičemž číslo x je roven počtu přítomných žáků na probíhající výuce, kde byl zadáván pracovní list.

Všechny úlohy, které jsou použité v pracovním listu, lze vidět na následující straně v tabulce č.1.

Označení	Zadání slovní úlohy
Příklad 1	*„Pavel roste jako z vody. „Už měřím jen o pět decimetrů méně než táta. A ten měří 185 centimetrů.“ Kolik měří Pavel*“ (Odvárko, Kadleček 1998a, s. 49)?
Příklad 2	*„Paní Mráčková bude kupovat novou konvici na čaj. Rozhoduje se mezi dvěma konvicemi: první má objem jeden a půl litru, druhá je dvoulitrová. Hezčí je menší. Paní Mráčková i pan Mráček jsou zvyklí na hrnky o objemu* $\frac{3}{8}$ *litru, jejich dvě děti používají hrnky čtvrtlitrové. Bude jim na společnou snídani stačit menší konvice?*“(Odvárko, Kadleček 1998b, s. 25)?
Příklad 3	*„Zvětšíme-li číslo x o 20 %, dostaneme 360. Kolik je x*“ (Odvárko, Kadleček 1998c, s. 59)?
Příklad 4	*„Petr šetří na kolo, které je za 960 Kč. Jestliže své dosavadní úspory ztrojnásobí, bude mu chybět ještě 30 Kč. Kolik Kč již Petr našetřil* “ (Tichá 1984, s. 9)?
Příklad 5	*„Jeden kilogram vážených pomerančů stojí 21 korun; 1,38 kg stejných pomerančů v balíčku je za 31,50 Kč. Které pomeranče jsou dražší - vážené, či balíčkované*“ (Odvárko, Kadleček 1998c, s. 32)?
Příklad 6	*„Pepa nese maminčiny tašky s nákupem. Je v nich půlka dvoukilogramového chleba, tři čtvrtě kilogramu pomerančů, dvě másla po 0,25 kg, 2 kg hrubé mouky a 1 kg hladké mouky. „Ten nákup má aspoň deset kilo,“ vzdychá Pepa. Má pravdu?*“ (Odvárko, Kadleček 1998a, s. 35).
Příklad 7	*„Standa, Pepa a Karel mají průměrně 15 kuliček. Kolik kuliček má Standa a kolik Pepa, jestliže Karel má 25 kuliček*“ (Samková 2019, s. 231)?

Tabulka 1: Pracovní list

3 Výsledky

V tabulce č. 2 lze vidět celkové shrnutí ze 120 žákovských řešení již zmíněného pracovního listu.

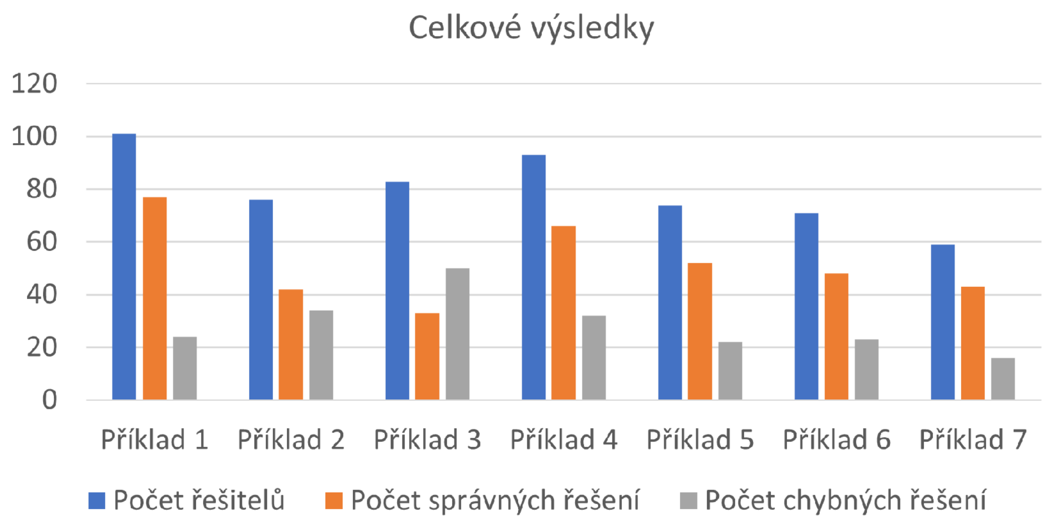
V této tabulce používám následující zkratky:
PSŘ = Počet správných řešení
PCHŘ = Počet chybných řešení
PŘBUP = Počet řešení bez uvedeného postupu

Úloha	Počet řešitelů	PSŘ	PCHŘ	PŘBUP
Příklad 1	101	77	24	24
Příklad 2	76	42	34	29
Příklad 3	83	33	50	29
Příklad 4	93	66	32	28
Příklad 5	74	52	22	45
Příklad 6	71	48	23	30
Příklad 7	59	43	16	29

Tabulka 2: Celkové výsledky

V následujícím obrázku číslo 2 lze vidět grafické znázornění k jednotlivým příkladům. V tomto obrázku můžeme pozorovat rozdíly mezi počtem řešitelů, počtem správných řešení a počtem chybných řešení.

Počet řešení bez uvedeného postupu není zahrnut do grafického znázornění. Tímto se podrobněji zabývám až v další části této diplomové práce.



Obrázek 2: Výsledky, n = 120

3.1 Žákovská řešení

V této části uvádím různorodá žákovská řešení k jednotlivým příkladům z pracovního listu. Vždy uvádím minimálně jedno správné a jedno špatné řešení a dále ta řešení, která mě ponejvíce zaujala bez ohledu na to, zda jsou či nejsou správná.
Aby čtenář nemusel dohledávat, jaké je přesné znění zadání slovní úlohy, přikládám jej na začátek každé podkapitoly.

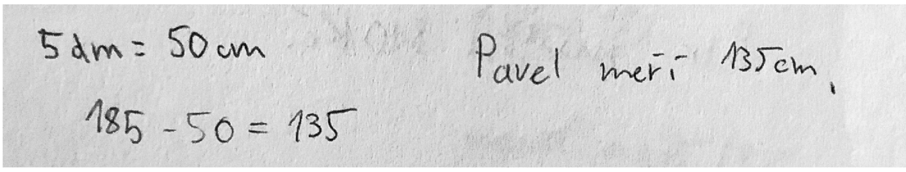
3.1.1 Příklad 1

„Pavel roste jako z vody. „Už měřím jen o pět decimetrů méně než táta. A ten měří 185 centimetrů.“ Kolik měří Pavel“ (Odvárko, Kadleček 1998a, s. 49)?

Tuto slovní úlohu se ze 120 žáků rozhodlo řešit právě 101 žáků. Počet správných řešení je 77, počet chybných řešení je 24 a počet řešení bez uvedeného postupu je také 24.

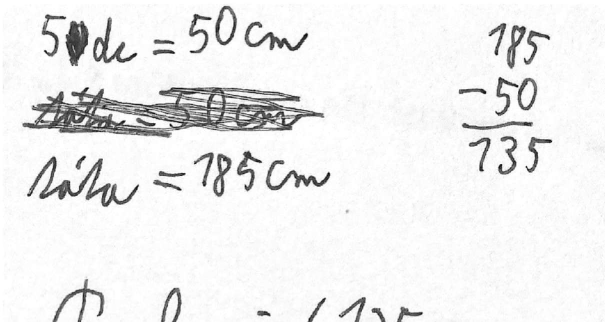
Podle mého názoru se jedná o nejjednodušší slovní úlohu, z tohoto důvodu jsem ji zařadila na začátek pracovního listu. Předpokládala jsem zde nejvyšší úspěšnost v řešení, která se potvrdila. Celková úspěšnost tohoto příkladu činí 76 % správných řešení. Nyní se podíváme na přesné zadání slovní úlohy a žákovská řešení.

Nejčastější řešení, které se v pracovních listech objevilo (označíme ho P1), můžeme vidět na obrázku č. 3. Žák si v prvním kroku převedl vše na stejné jednotky, v tomto případě na centimetry. Poté se odčítáním dopracoval ke správnému výsledku.



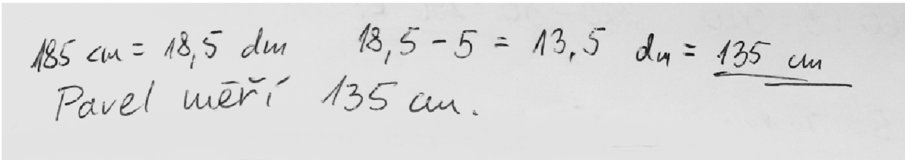
Obrázek 3: Žákovské řešení příkladu 1 (17F)

Velmi podobný postup (P2) můžeme vidět na obrázku č. 4. I zde proběhl převod na centimetry. Poté žák správně odčítal. Rozdíl od předchozího postupu je v metodě odčítání. V prvním případě šlo o odčítání zpaměti. V tomto postupu lze vidět odčítání pod sebou.



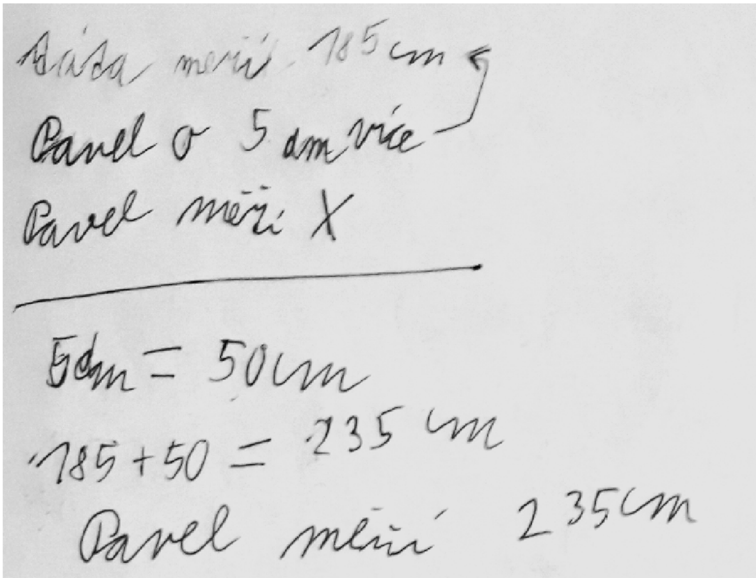
Obrázek 4: Žákovské řešení příkladu 1 (16F)

Takřka všechna správná řešení spočívala v převodu 5 dm na 50 cm. Pouze 2 žáci se rozhodli pro jiný způsob (P3), kdy si nejdříve 185 cm převedli na 18,5 dm. Poté pomocí odčítání zjistili, že Pavel měří 13,5 dm. V posledním kroku se rozhodli převést decimetry zpět na centimetry. Usuzuji, že tento krok učinili, protože si uvědomili, že výška se nejčastěji udává v centimetrech. Je však nutné podotknout, že kdyby tento poslední krok žáci neudělali, řešení by i tak bylo správné. Ukázku tohoto řešení můžeme vidět na obrázku č. 5.



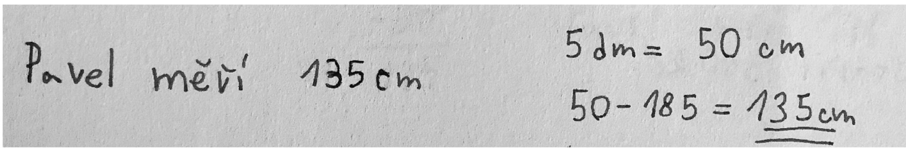
Obrázek 5: Žákovské řešení příkladu 1 (10A)

Zajímavé, avšak chybné řešení lze vidět na obrázku č. 6. Chyba byla způsobena záměnou slov "méně" a "více" v zápisu slovní úlohy. Pokud by nedošlo k této záměně, předpokládám, že by žák úlohu vyřešil správně, poněvadž převod jednotek i postup přesně odpovídá zápisu.



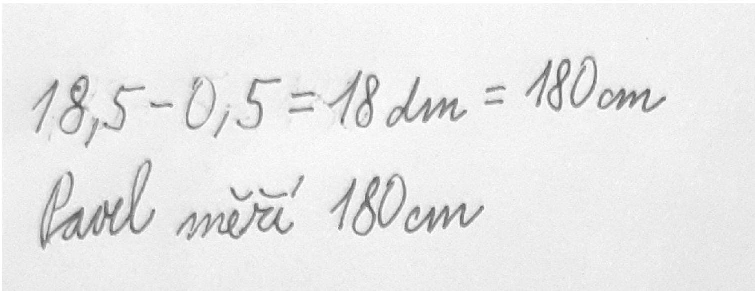
Obrázek 6: Žákovské řešení příkladu 1 (5A)

Další zajímavé řešení lze vidět na obrázku č. 7. Žák zde správně převedl 5 dm na 50 cm. Chyba však nastala při zápisu početní operace 185 - 50 = 135. Jak si lze všimnout, žák zde zaměnil menšenec s menšitelem. V tu chvíli mu měl výsledek vyjít -135 cm. Na znaménko mínus ovšem pozapomněl a výsledek uvedl 135 cm. Tento postup řešení jsem vyhodnotila jako chybný. Pokud bych však s danou třídou měla možnost zpětné vazby, mohla by být k tomuto příkladu velmi zajímavá diskuze.



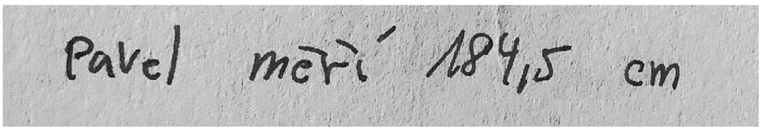
Obrázek 7: Žákovské řešení příkladu 1 (8F)

V dalším řešení žák pravděpodobně chtěl všechny jednotky převést na decimetry. 185 cm převedl správně na 18,5 dm. Druhý údaj, neboli 5 dm chtěl autor opět převést na decimetry, ovšem tento údaj již byl v decimetrech zadán. Z tohoto důvodu usuzuji, že se žák přehlédl. Nevšiml si jednotek a chtěl 5 cm převést na 0,5 dm. Tento postup můžeme vidět na obrázku č. 8.



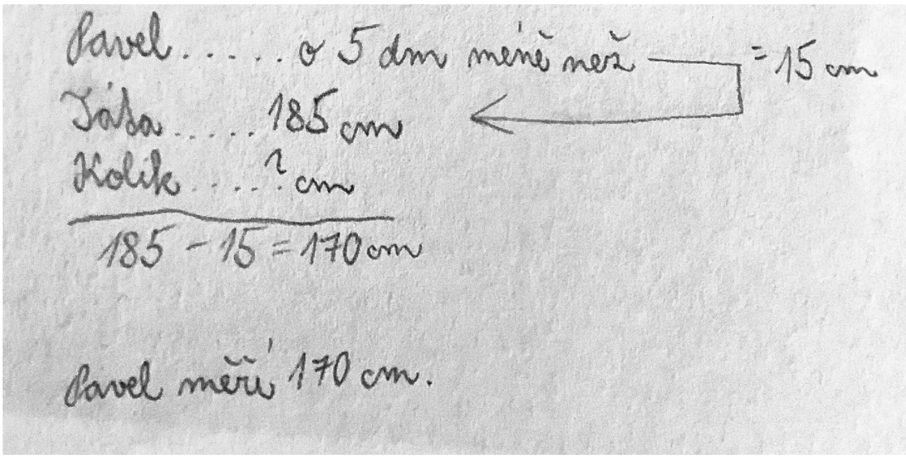
Obrázek 8: Žákovské řešení příkladu 1 (12A)

Chybné řešení bez uvedeného postupu vidíme na obrázku č. 9. Usuzuji, že žák špatně převedl 5 dm na centimetry. Dle odpovědi jej převedl na 0,5 cm.



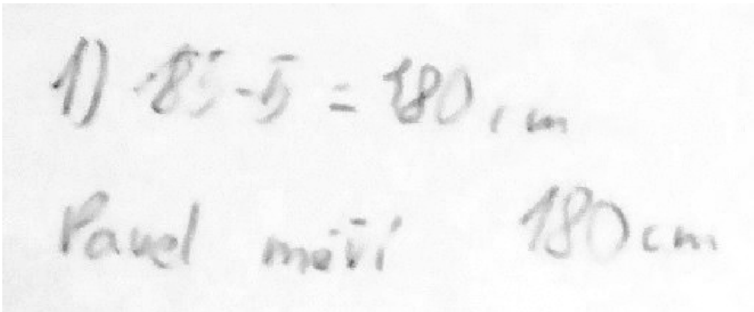
Obrázek 9: Žákovské řešení příkladu 1 (5A)

Velmi zajímavé, avšak chybné řešení lze vidět na obrázku č. 10. Žák má správně zapsaný zápis slovní úlohy. Pravděpodobně i početní operaci odčítání by zvládl. Úskalí však přichází u převodu jednotek. 5 dm se žákovi podařilo převést na 15 cm. Nenapadá mě zdůvodnění, proč tak žák učinil.



Obrázek 10: Žákovské řešení příkladu 1 (3F)

Poslední ukázka na obrázku č. 11 je řešení, kde si žák nevšiml, že v zadání jsou uvedené různé jednotky délky. Nic tedy nepřeváděl na společné jednotky a rovnou počítal. Z tohoto důvodu je tento typ řešení také špatný.

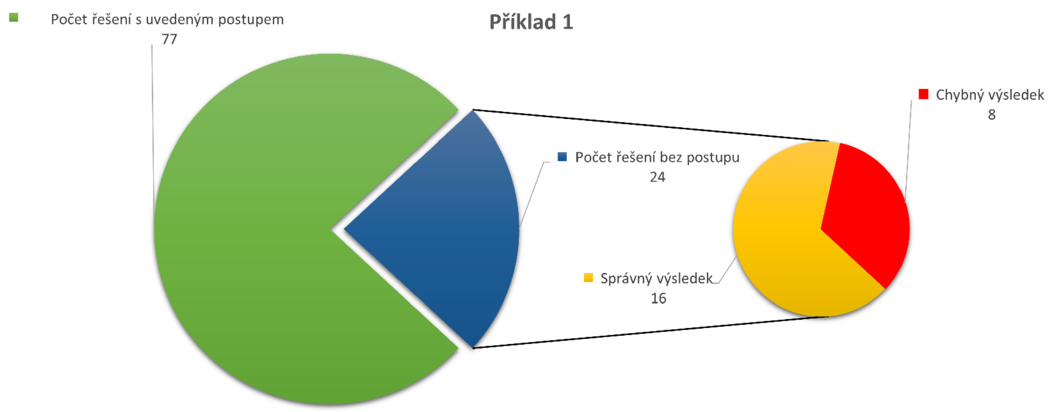


Obrázek 11: Žákovské řešení příkladu 1 (2B)

Celkově hodnotím velmi pozitivně, že většina žáků (86 ze 101) si všimla, že v zadání slovní úlohy se objevují dvě jednotky délky, decimetry a centimetry. Nejvíce chyb bylo způsobeno jejich špatným převodem.

Řešení bez uvedeného postupu

Nyní se zaměřuji na řešení bez uvedeného postupu. Žáků, kteří uvedli svůj postup řešení, je 77. Z 24 žáků, kteří neuvedli postup řešení, má správný výsledek 16 řešitelů. Naopak 8 řešitelů, kteří neuvedli postup řešení, má výsledek chybný. Grafické znázornění můžeme vidět na obrázku č. 12.



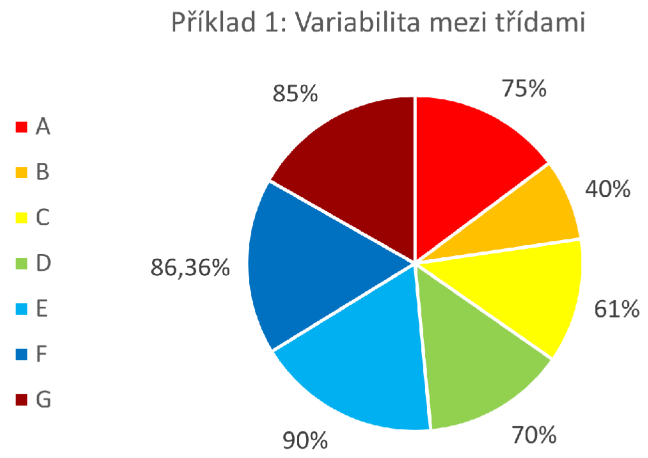
Obrázek 12: Řešení bez uvedeného postupu u příkladu 1, n = 101

Správná řešení bez uvedeného postupu se vyskytla hlavně v pracovních listech, které povětšinou byly vyplněny takřka bezchybně. Z tohoto důvodu usuzuji, že těchto 16 žáků nepotřebovalo zapisovat postup a věděli řešení z hlavy, tudíž napsali do pracovního listu rovnou správnou odpověď.

Variabilita mezi třídami

Pro zjištění rozdílů úspěšnosti mezi třídami jsem určitá data musela přepočítat na procenta. Je to z toho důvodu, že každá třída má jiný počet žáků a že si žáci vybírali pět ze sedmi zadaných slovních úloh. Vždy je tedy jiný počet řešitelů z jednotlivých tříd. Aby variabilita mezi třídami byla dostatečně přehledná, používám grafické znázornění.

K příkladu 1 se váže grafické znázornění na obrázku č. 13. Můžeme si všimnout, že největší úspěšnost v příkladu 1 měla třída E, a to 90 %. Další byla třída F s 86,36 %. Třídy F a G měly navzájem velmi podobnou úspěšnost. Tyto dvě třídy, jak jsem už zmínila dříve, jsou paralelní na jedné škole a mají stejného vyučujícího na matematiku. Nejméně úspěšná byla třída B, což předpokládala již jejich vyučující. Ihned po shlédnutí zadání tohoto příkladu správně odhadla, že si žáci nevšimnou různých jednotek délky.



Obrázek 13: Příklad 1: Porovnání úspěšnosti mezi třídami, n = 77

V tabulce č. 3 můžeme vidět rozmanitost řešení napříč třídami. Do této i dalších tabulek, které zobrazují variabilitu mezi třídami, jsem zařadila pouze postupy, které vedou ke správnému výsledku. V horní legendě nalezneme třídy, v postranní legendě vidíme typ postupů. Počet v tabulce nám uvádí, kolikrát se daný postup v dané třídě vyskytl.

	A	B	C	D	E	F	G
P1	10	2	11	6	7	10	8
P2	-	-	-	1	-	4	-
P3	1	-	-	-	-	1	-

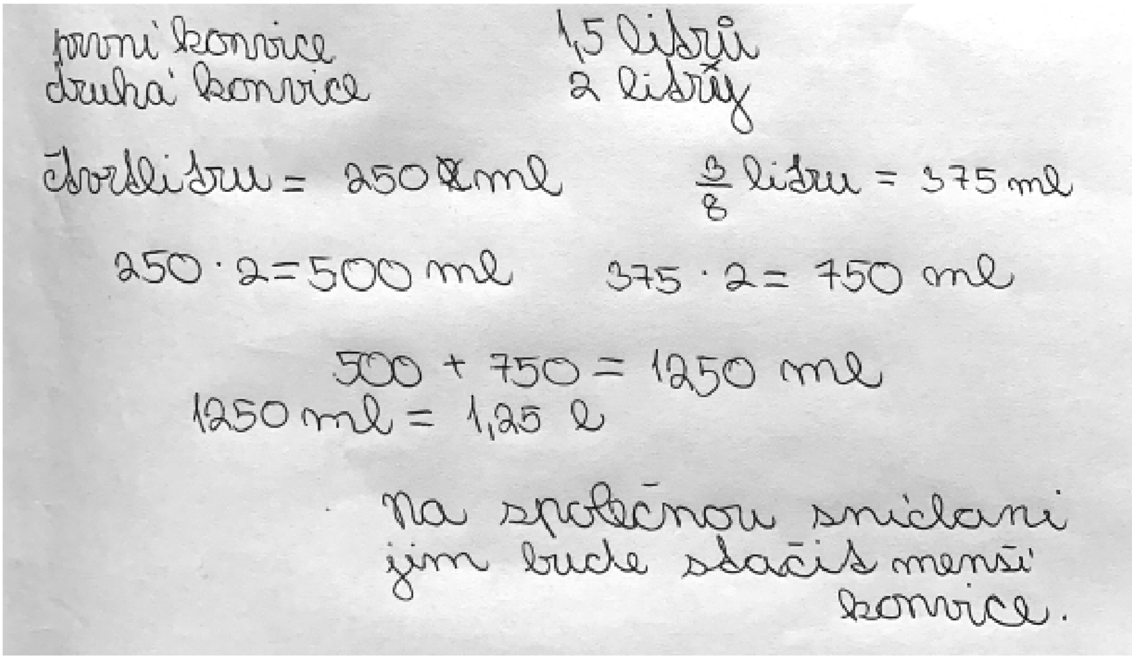
Tabulka 3: Příklad 1: Variabilita postupů řešení mezi třídami

3.1.2 Příklad 2

„Paní Mráčková bude kupovat novou konvici na čaj. Rozhoduje se mezi dvěma konvicemi: první má objem jeden a půl litru, druhá je dvoulitrová. Hezčí je menší. Paní Mráčková i pan Mráček jsou zvyklí na hrnky o objemu $\frac{3}{8}$ litru, jejich dvě děti používají hrnky čtvrtlitrové. Bude jim na společnou snídani stačit menší konvice“ (Odvárko, Kadleček 1998b, s. 25)?

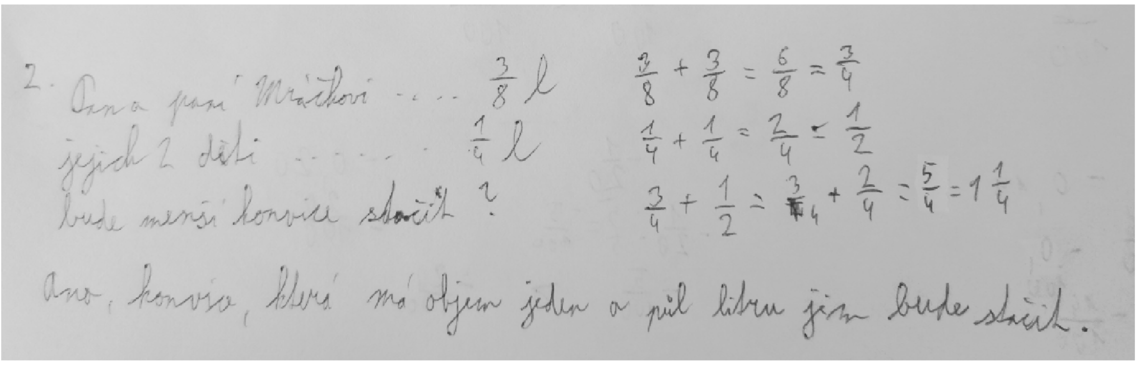
Tento příklad měl celkovou úspěšnost 55 %. Celkový počet řešitelů, kteří se rozhodli tuto úlohu řešit, byl 76.

Pěkné řešení (P1) můžeme vidět na obrázku č. 14. Principem řešení je převod na mililitry. Řešení je velmi přehledné, proto si myslím, že netřeba ho více komentovat.



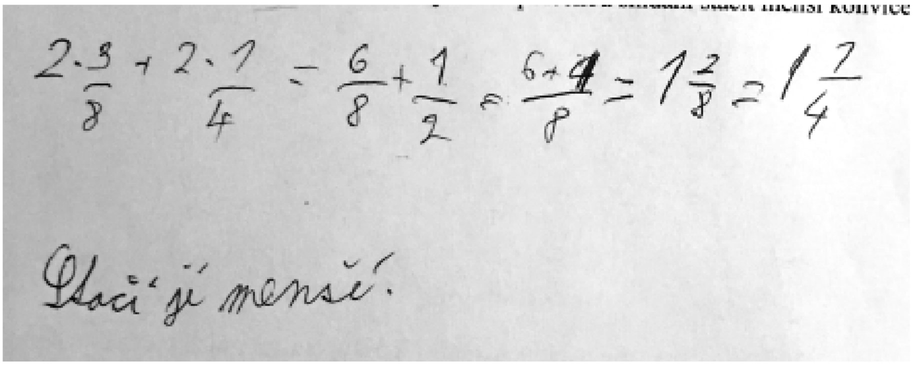
Obrázek 14: Žákovské řešení příkladu 2 (3C)

Další správné řešení a pěkný postup (P2) znázorňuje obrázek č. 15. Zde autor využil znalost zlomků a početní operace s nimi. Žák uplatňuje především sčítání zlomků.



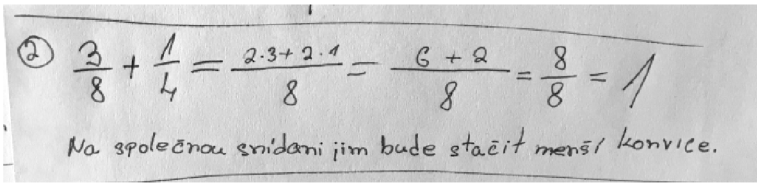
Obrázek 15: Žákovské řešení příkladu 2 (14C)

Početní operace se zlomky využil i žák v řešení (P3) na obrázku č. 16. Všimneme si zde rozdílu od předchozího řešení. Kromě toho, že žák začal rovnou počítat a nevypracoval si zápis slovní úlohy, dává navíc přednost násobení zlomků. Oproti předchozímu postupu je tento i kratší; to však nemá vliv na správnost obou zmíněných řešení.



Obrázek 16: Žákovské řešení příkladu 2 (2C)

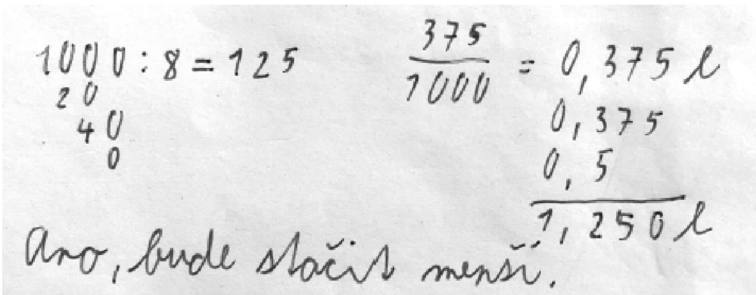
Řešením, kde hrají hlavní roli zlomky, budeme pokračovat u obrázku č. 17. Výslednou odpověď sice má žák správně, ale výsledek a postup jako takový je chybný. Žák začal sečtením $\frac{3}{8}$ a $\frac{1}{4}$, neboli sečtením jednoho hrnku rodiče a jednoho hrnku dítěte. Pokud by součet těchto zlomků byl správný, byla by správná myšlenka tento součet vynásobit dvěma a v tu chvíli bychom dostali výsledný minimální objem potřebné konvice. Žák však místo počítání součtu zlomků ($\frac{3}{8}$ a $\frac{1}{4}$), začal s násobením u čitatele.



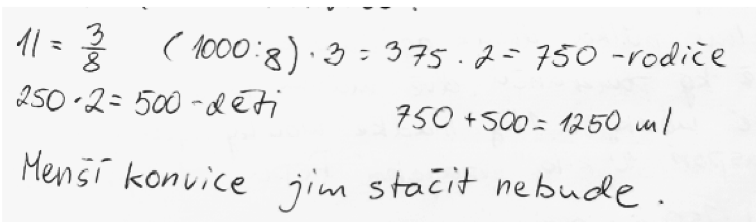
Obrázek 17: Žákovské řešení příkladu 2 (8C)

Následující postup (P4) na obrázku č. 18 je velmi podobný postupu na obrázku č. 19. Oba autoři měli takřka stejnou myšlenku, jak tento příklad vyřešit. Jediný rozdíl mezi těmito postupy je ten, že žák, který je autorem postupu na obrázku č. 18, má jak správný výsledek, tak i správnou odpověď. Kdežto žák, kterému patří postup na obrázku č. 19, má sice správný výsledek, ovšem odpověď je chybná. Dle mého názoru si neuvědomil, že menší konvice o objemu 1,5 l je stejná jako konvice o objemu 1 500 ml.

K postupu na obrázku č. 18 je ještě nutné zmínit, že pouze 5 žáků převádělo mililitry na litry. Všichni ostatní řešitelé buď převáděli vše na mililitry, a nebo využili početních operací se zlomky.



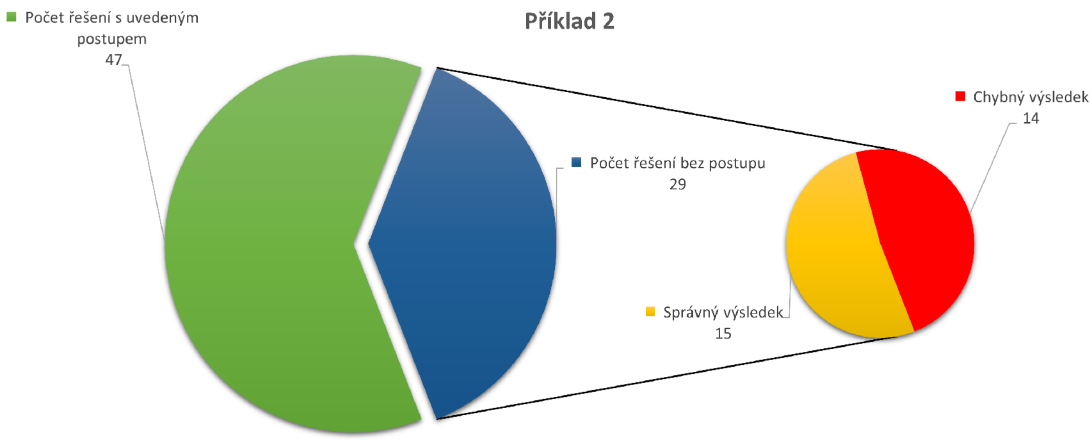
Obrázek 18: Žákovské řešení příkladu 2 (2D)



Obrázek 19: Žákovské řešení příkladu 2 (10A)

Řešení bez uvedeného postupu

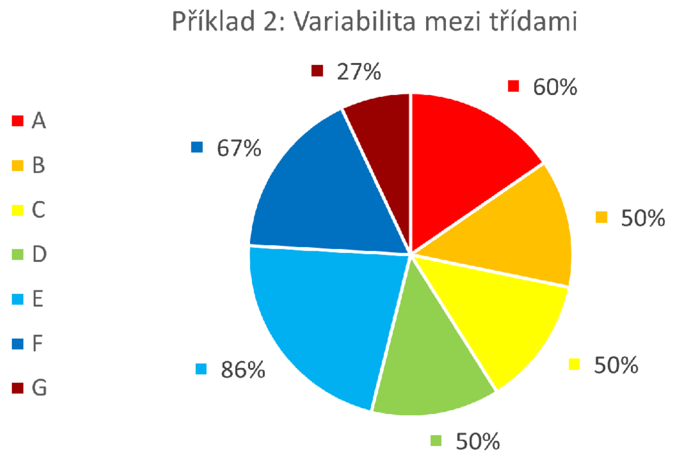
Na obrázku číslo 20 můžeme vidět počet správných a chybných řešení žáků, kteří neuvedli postup řešení. Těchto žáků bylo dohromady 29. V tomto případě jsem neshledala, že by se jednalo o žáky, kteří by ostatní příklady měli správně či naopak chybně. Dle mého názoru si žáci mohli odpověď tipnout, opsat ji a nebo si řešení uvést na vedlejší papír. Uvedení řešení na vedlejší papír je dle mého názoru méně pravděpodobné, ale zavrhnout jej nemůžu. Musím totiž připomenout, že někteří žáci vyplňovali pracovní list doma, ať už z důvodu nemoci, karantény, či z osobních důvodů nebyli přítomni ve škole.



Obrázek 20: Řešení bez uvedeného postupu u příkladu 2, n = 76

Variabilita mezi třídami

Úspěšnost mezi třídami lze vidět na obrázku č. 21. Tak jako tomu bylo u příkladu 1, nejvíce správných výsledků měla třída E a F. Ostatní třídy na tom byly s výsledky velmi podobně, avšak třída G dopadla nejhůře. Je zde důležité poznamenat, že zmíněné třídy E a F se moc neprojevily v postupech. Například v třídě F bylo 15 žáků, kteří se rozhodli tuto úlohu řešit. 10 z nich mělo řešení správné, avšak pouze 3 žáci uvedli svůj postup řešení. Zbylých 7 žáků neuvedlo postup žádný. Podle předchozího obrázku je zřejmé, že polovina žáků měla správný výsledek, ale postup neuvedli.



Obrázek 21: Příklad 2: Porovnání úspěšnosti mezi třídami, n = 42

Z tabulky č. 4 je zřejmé, že pouze 27 uvedených postupů bylo správných. Objevily se 4 typy postupů.

Povšimněme si, že třída B neuvedla ani jeden postup správný. Je to z toho důvodu, že pouze dva žáci z této třídy se rozhodli tento příklad řešit. Jeden žák měl postup a výsledek chybný a druhý žák postup neuvedl a měl uvedený pouze správný výsledek. Celkově třída B moc neuváděla postupy, tudíž se prázdný sloupeček v tabulce bude objevovat i v některé další tabulce, která se zaobírá variabilitou řešení mezi třídami.

	A	B	C	D	E	F	G
P1	3	-	2	1	1	-	1
P2	3	-	3	1	-	1	-
P3	2	-	2	-	-	2	-
P4	-	-	-	2	3	-	-

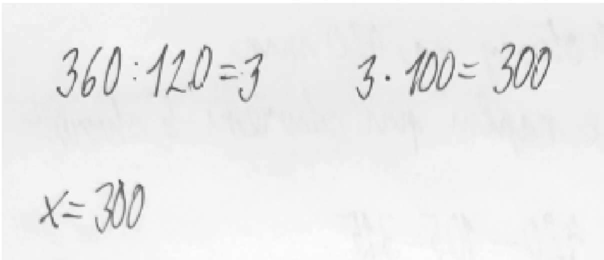
Tabulka 4: Příklad 2: Variabilita postupů řešení mezi třídami

3.1.3 Příklad 3

„Zvětšíme-li číslo x o 20 %, dostaneme 360. Kolik je x“ (Odvárko, Kadleček 1998c, s. 59)?

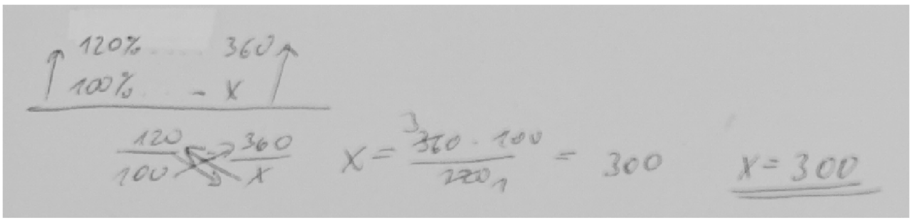
U úlohy s procenty jsem očekávala velmi malou úspěšnost. 4 ze 7 vyučujících mi sdělili, že procenta ještě neprobírali a nebo že s nimi teprve začínají. Překvapilo mě tedy, že poměrně velká část žáků (83 ze 120) se rozhodlo tuto úlohu řešit.

Správné řešení můžeme vidět na obrázku 22. Tento postup (P1) se vyskytoval mezi správnými řešeními nejčastěji. Žáci, kteří takto postupovali, si uvědomili, že 360 je 120 %. Vypočítali tedy, že 1 % jsou 3, a k získání výsledku jim stačilo číslo 3 vynásobit 100 %.



Obrázek 22: Žákovské řešení příkladu 3 (3D)

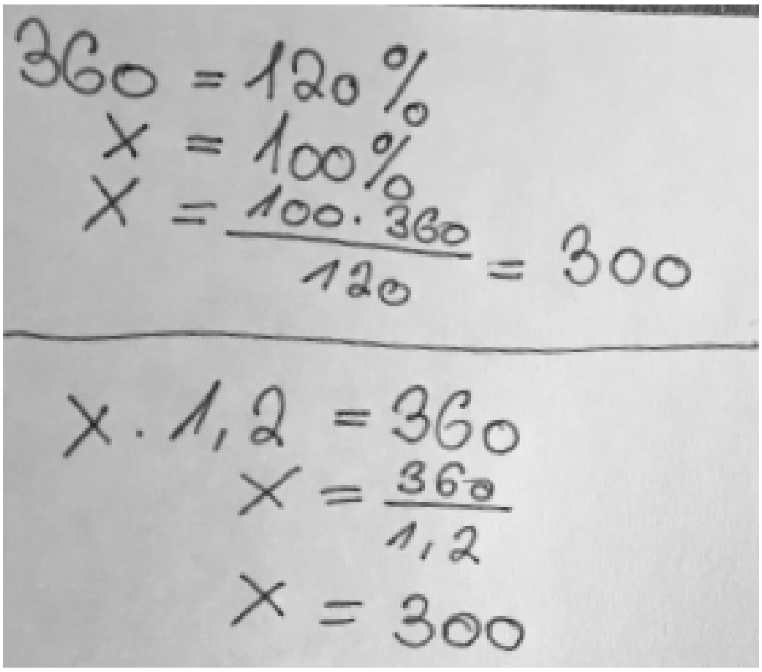
Další řešení můžeme vidět od žáka na obrázku 23. Žák zde využil zapsání postupu (P2) pomocí trojčlenky a díky správnému určení přímé úměry získal náležitý výsledek.



Obrázek 23: Žákovské řešení příkladu 3 (5D)

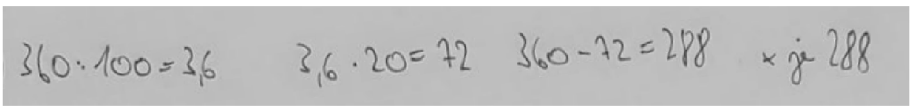
Velmi pěkné řešení, dokonce s dvěma postupy, můžeme vidět na obrázku 24.

V prvním případě (označíme ho P3) žák počítal s využitím procent. Principem je to výpočet totožný, jako kdyby byla použita trojčlenka. Zapsáním se však postupy liší. Typické zapsání trojčlenky jsme viděli v předchozím žákovském řešení. V druhém postupu (P4) žák počítal rovnici o jedné neznámé s desetinnými čísly. Tento žák jako jediný uvedl 2 postupy a jako jediný řešil tuto slovní úlohu s použitím desetinných čísel.



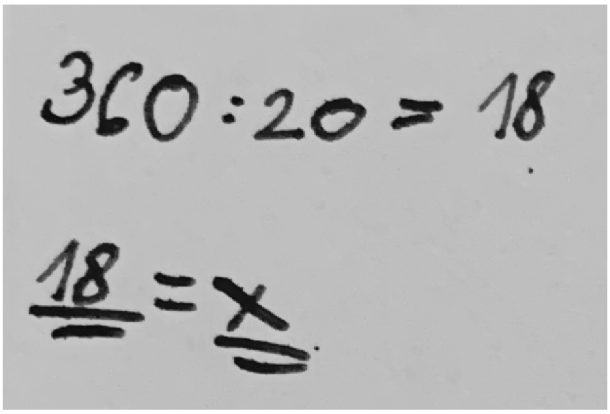
Obrázek 24: Žákovské řešení příkladu 3 (8C)

Nejčastější chybné řešení můžeme vidět na obrázku 25 a obrázku 26. Postup na obrázku 25 se vyskytoval velmi často. Našli se i tací žáci, kteří uvedli jako výsledek číslo 72. To je samozřejmě stejně špatně jako výsledek 288. Žáci, kteří se dopracovali k výsledku 288, si neuvědomili, že 360 není 100 % ale právě 120 %. Je to však je hrubá chyba.



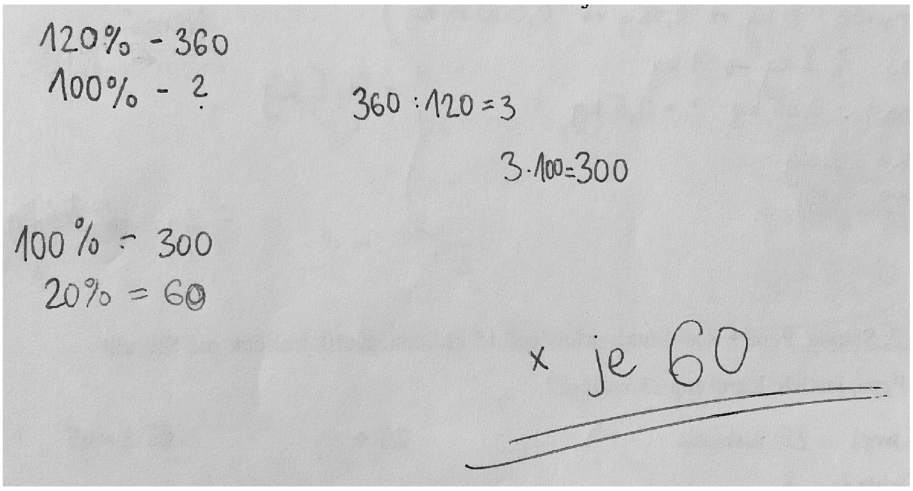
Obrázek 25: Žákovské řešení příkladu 3 (1A)

Postup na obrázku 26 mě až zarazil. Ve chvíli, kdy jsem tento postup uviděla poprvé, vyhodnotila jsem ho jako chybný a pokračovala jsem v opravě pracovního listu dál. Když jsem na toto řešení narazila podruhé, bylo to pro mě velmi překvapivé. Celkově se tento způsob řešení vyskytl 8 krát. Ráda bych více didakticky okomentovala, kde žák udělal chybu, ovšem doteď stále nevím, jak toto řešení mohlo žáky napadnout. Jediná moje myšlenka je, že si žák řekl 120 % - 100 % = 20 % a proto číslo 360 vydělil číslem 20. Těžko však říct, zda je moje myšlenka správná. Velmi mě mrzí, že jsem nemohla provést s dotazovanými třídami diskuzi na tento postup řešení.



Obrázek 26: Žákovské řešení příkladu 3 (5G)

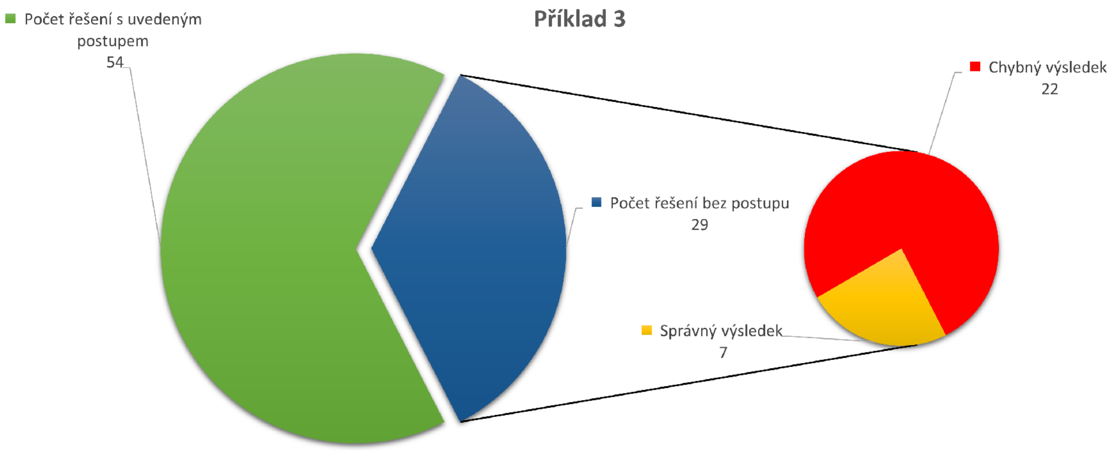
Na obrázku 27 můžeme vidět řešení, kde žák nejprve postupoval správně. Z postupu je znát, že i on si uvědomil, že 360 = 120 %. K výsledku 300 se také dopracoval. Správně i určil, že 100 % = 300 a 20 % = 60. Pravděpodobně však bohužel nepochopil zcela správně zadání slovní úlohy. Tento žák je jediný, který uvedl tento postup, kde výsledek vyšel 60. Je však nutné podotknout, že výsledek 60 se neobjevil pouze u tohoto žáka, ale dokonce 4 krát. U zbývajících třech žáků se neobjevil žádný postup. 2 žáci, kteří uvedli výsledek 60, byli ze stejné třídy F jako již zmiňovaný autor postupu na obrázku 27. Poslední žák byl ze třídy E a netuším, co jej k tomuto výsledku vedlo.



Obrázek 27: Žákovské řešení příkladu 3 (6F)

Řešení bez uvedeného postupu

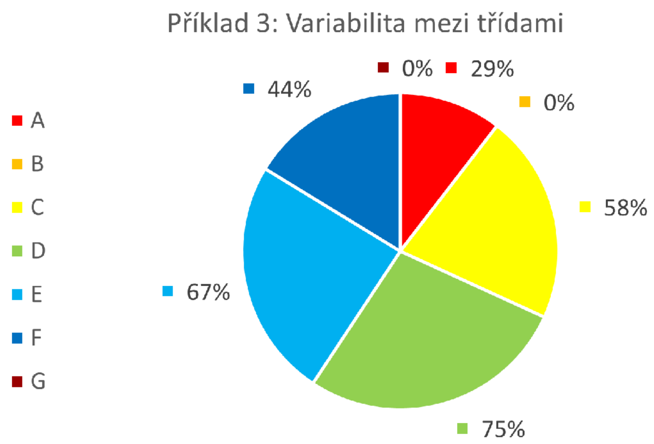
Příklad 3 měl nejnižší úspěšnost, a to 40 %. Jak jsem již zmínila, nejméně správných řešení jsem u této úlohy předpokládala. Nepřekvapilo mě tedy, že převyšovaly i chybné odpovědi, u kterých nebyly zaznamenané postupy, viz obrázek 28. Žáci si dané číslo mohli pouze tipnout, případně si postup mohli psát na jiný papír a do mého pracovního listu přepsali pouze výsledek.



Obrázek 28: Řešení bez uvedeného postupu u příkladu 3, n = 83

Variabilita mezi třídami

Z obrázku č. 29 je zřejmé, že tentokrát získala nejlepší výsledky třída D. Následovala ji třída E a dále třída C. Nejhůře na tom byly třídy B a G. Ani jednomu žákovi z těchto tříd se nepodařilo slovní úlohu vypočítat správně. Přičemž třída B ještě téma procenta vůbec neprobírala. Udivilo mě tedy, že se našli žáci této třídy, kteří se i tak rozhodli tuto úlohu řešit. Třída G s procenty počítá, ale od jejich vyučující jsem měla informaci, že jim procenta dělají velké problémy. To se zde potvrdilo. Třída A získala 29 %. Předem jsem o ní věděla, že téma procenta teprve začíná, tudíž já i jejich vyučující jsme celkový výsledek 29 % považovaly za úspěch.



Obrázek 29: Příklad 3: Porovnání úspěšnosti mezi třídami, n = 33

V následující tabulce číslo 5 můžeme vidět různorodost postupů u příkladu 2. Jak jsem již zmínila, nejvíce se objevoval postup P1, a to 13 krát. Všimněme si, že třídy B a G neuvedly ani jeden správný postup. Správný výsledek bez uvedeného postupu se u těchto tříd také neobjevil. Tuto informaci nám však již znázornil předchozí obrázek.

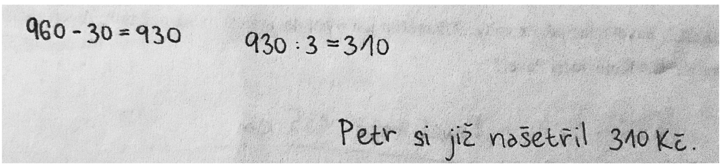
	A	B	C	D	E	F	G
P1	2	-	4	4	1	2	-
P2	1	-	-	3	-	1	-
P3	1	-	2	3	-	2	-
P4	-	-	-	1	-	-	-

Tabulka 5: Příklad 3: Variabilita postupů řešení mezi třídami

3.1.4 Příklad 4

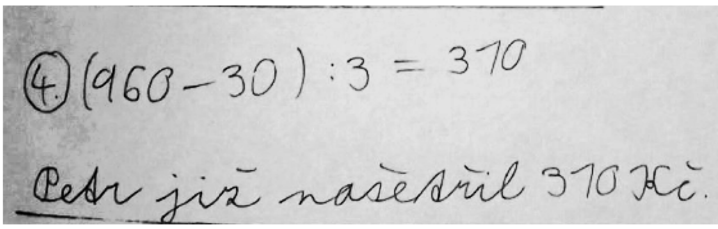
„Petr šetří na kolo, které je za 960 Kč. Jestliže své dosavadní úspory ztrojnásobí, bude mu chybět ještě 30 Kč. Kolik Kč již Petr našetřil“ (Tichá 1984, s. 9)?

Obrázek 30 prezentuje nejčastější správný postup P1, který se vyskytl od žáků v pracovních listech. V prvním kroku žáci odečetli od ceny 960 Kč částku 30 Kč a poté tento rozdíl neboli 930 Kč vydělili třemi.



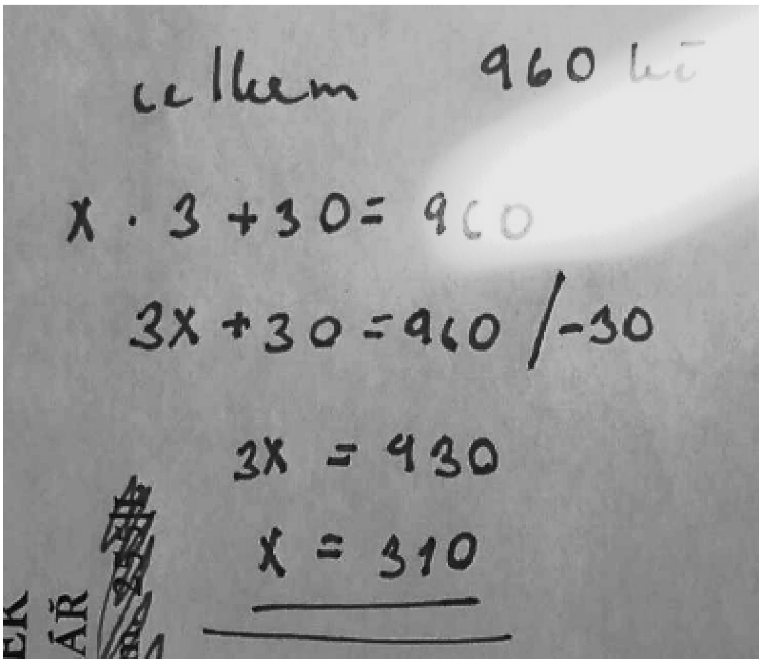
Obrázek 30: Žákovské řešení příkladu 4 (6F)

Velmi podobný postup P2 zobrazuje obrázek 31. Zde autor využil počítání se závorkami. Zkrátil si tím zapsání oproti postupu na obrázku 30. V tomto postupu je důležité správné umístění závorek. Tento postup uvedl pouze jeden žák.



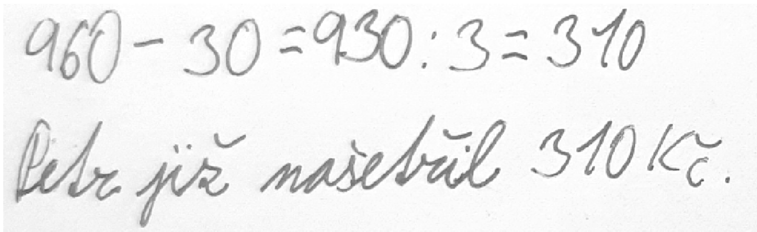
Obrázek 31: Žákovské řešení příkladu 4 (8A)

Další správný a jiný postup P3 lze vidět na obrázku 32, kde žák použil pro řešení rovnici s jednou neznámou. Opět tento postup uvedl pouze jeden žák. Poměrně mě překvapilo, že žák 7. třídy dokázal řešit tento příklad právě pomocí rovnice. Při zpětné vazbě s vyučující třídy A jsem se jí na tento postup daného žáka zeptala. Zajímalo mě, zda již probírali téma rovnice nebo zda danému žákovi mohl někdo pomáhat. Paní učitelka, aniž by musela hledat ve svém seznamu kódování, ihned věděla, o jakého žáka se jedná. Je to velký talent na matematiku. Sice mají rovnice až v tématickém plánu pro 8. třídu, ale tento žák se nejen rovnice učí dopředu, ale dostává z matematiky i práci navíc. Po této informaci pravděpodobně nikoho nepřekvapí, že zmíněný žák vyřešil bezchybně všech 7 příkladů pracovního listu.



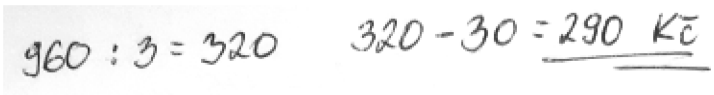
Obrázek 32: Žákovské řešení příkladu 4 (6A)

Další postup P4 lze vidět na obrázku 33. Musím zde zmínit, že tento postup není didakticky správný, ovšem pravděpodobně všichni pochopíme, co měl autor na mysli. Rozhodla jsem se uvést tento postup, poněvadž byl předložen od žáků opakovaně. Já jsem toto řešení i přes špatné didaktické zapsání vyhodnotila jako správné.


960 - 30 = 930 : 3 = 310
Petr již našetřil 310 Kč.

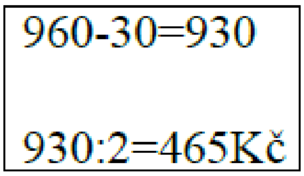
Obrázek 33: Žákovské řešení příkladu 4 (4E).jpg

Nyní přejdeme k chybným postupům a výsledkům. Na obrázku 34 můžeme vidět nejčastější špatný postup, kde je využité odčítání a dělení jako v předchozích postupech. Nyní jsou zmíněné početní operace ve špatném pořadí. Tento postup se vyskytl 15 krát z 32, což je dle mého názoru velmi velký počet žáků.


960 : 3 = 320 320 - 30 = 290 Kč

Obrázek 34: Žákovské řešení příkladu 4 (10A)

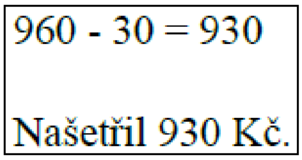
Další chybu pravděpodobně způsobilo nesprávné porozumění slovní úloze. Lze jej vidět na obrázku 35. Žáci správně odečetli 30 Kč od celkové částky 960 Kč. Chyba nastala ve chvíli, kdy žáci částku 930 Kč nedělili trojkou, ale dvojkou. Tento postup se vyskytl dvakrát a to v různých třídách (v B a E).


960-30=930

930:2=465Kč

Obrázek 35: Žákovské řešení příkladu 4 (3B)

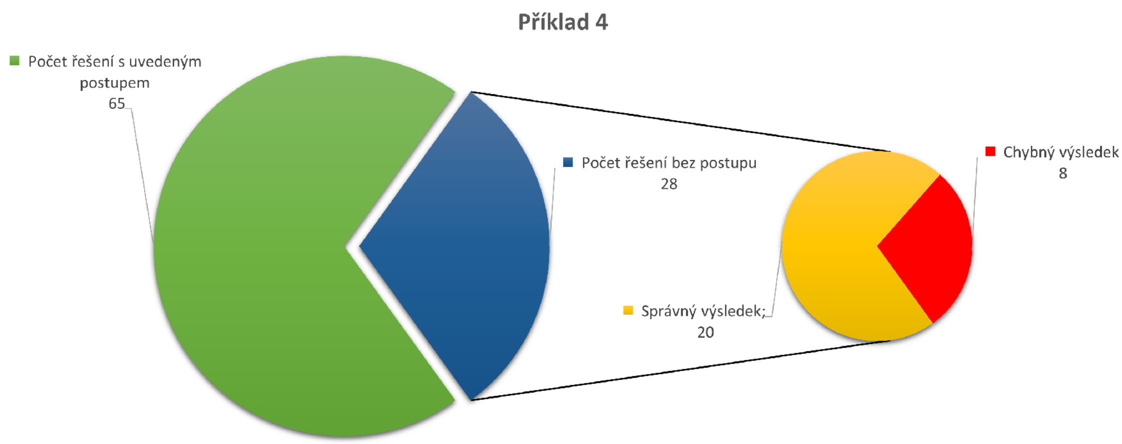
Poslední postup, který uvádím, znázorňuji na obrázku 36. Zde žák odečetl pouze 30 Kč a to považoval za celkový výsledek. Toto řešení se objevilo celkem 3 krát.



Obrázek 36: Žákovské řešení příkladu 4 (4C)

Řešení bez uvedeného postupu

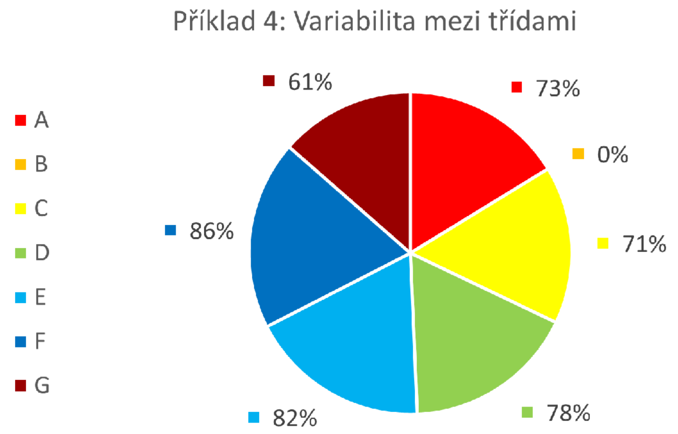
Čtvrtý příklad měl celkovou úspěšnost 71%. Váže se k němu 28 řešení, u kterých nebyl uvedený postup. Obrázek č. 37 vyjadřuje převahu správných výsledků v těchto řešeních bez uvedeného postupu. Opět se vyskytlo, že žáci, kteří neuvedli u příkladu postup, měli takřka bezchybně vypracovaný pracovní list a postupy řešení jiných příkladů měli uvedené. Dle mého názoru tedy nepovažovali za důležité postup u tohoto příkladu zapsat a řešení i s odpovědí zapsali rovnou.



Obrázek 37: Řešení bez uvedeného postupu u příkladu 4, n = 93

Variabilita mezi třídami

Dle obrázku 38 je zřejmé, že nejlépe si vedla třída F, a to 86 %. Kromě třídy B si ostatní třídy vedly také poměrně dobře. Třída E získala 82 %, což není velký rozdíl od třídy F. Třída B bohužel nezískala žádné procento. Opět mě překvapuje rozdíl v paralelních třídách F a G.



Obrázek 38: Příklad 4: Porovnání úspěšnosti mezi třídami, n = 66

V tabulce číslo 6 vidíme různorodost a početní zastoupení různých typů správných postupů mezi třídami.

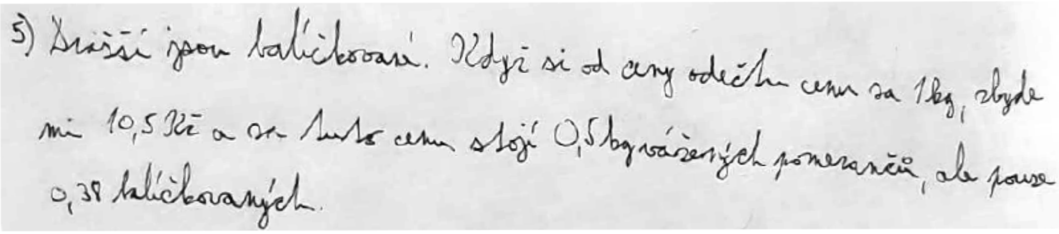
	A	B	C	D	E	F	G
P1	5	-	8	3	5	9	7
P2	1	-	-	-	-	-	-
P3	1	-	-	-	-		-
P4	2	1	-	1	1	1	-

Tabulka 6: Příklad 4: Variabilita postupů řešení mezi třídami

3.1.5 Příklad 5

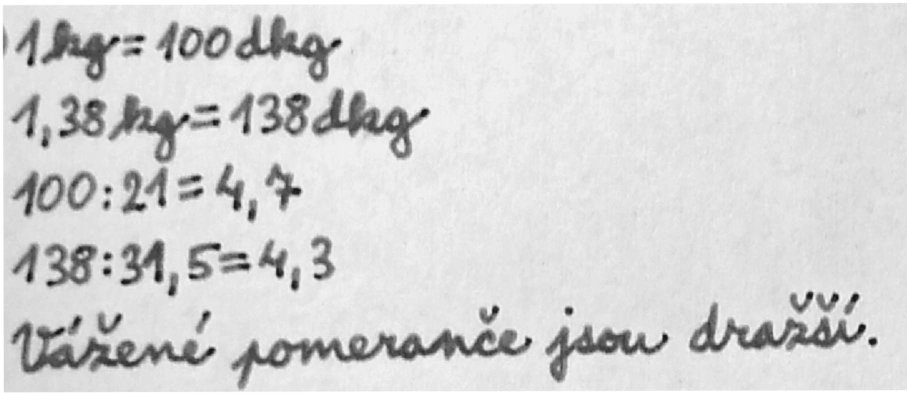
„Jeden kilogram vážených pomerančů stojí 21 korun; 1,38 kg stejných pomerančů v balíčku je za 31,50 Kč. Které pomeranče jsou dražší - vážené, či balíčkované“ (Odvárko, Kadleček 1998c, s. 32)?

V prvním zajímavém řešení (P1) usuzoval žák logicky a neprováděl nijak náročné početní operace. O tom vypovídá i jeho řešení, které není rozsáhlé. Zápis slovní úlohy ani postup nezapisoval. Své řešení shrnul pouze do dvou stručných, avšak výstižných a pochopitelných vět, které můžeme vidět na obrázku č. 39. Úvaha zmíněného žáka je samozřejmě správná a také je nutné zmínit, že takové řešení se vyskytlo pouze jednou. Podle mého názoru není potřeba toto řešení dále komentovat.



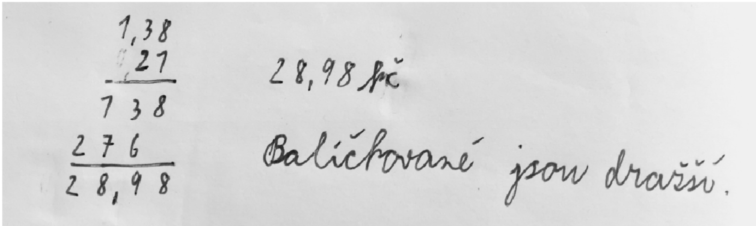
Obrázek 39: Žákovské řešení příkladu 5 (11A)

Druhé zajímavé řešení (P2) je založeno na principu převodů kilogramů na dekagramy. Oceňuji zde nápaditost, poněvadž toto řešení se objevilo napříč třídami také jen jednou, a to právě u tohoto žáka. Postup řešení lze vidět na obrázku číslo 40.



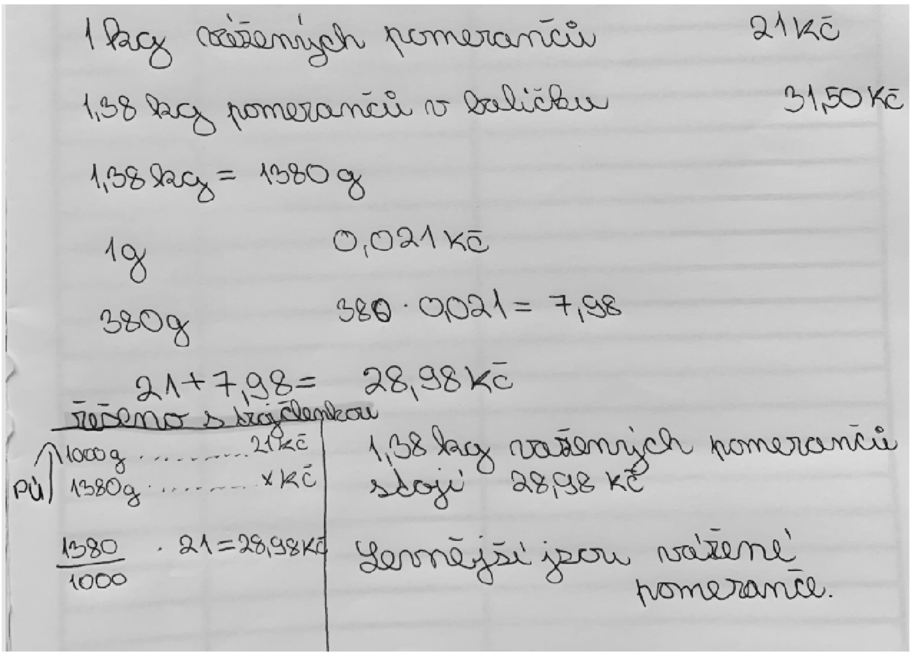
Obrázek 40: Žákovské řešení příkladu 5 (16A)

Obrázek č. 41 nám představuje další správné žákovské řešení (P3), kde si autoři vypočítali cenu za 1,38 kg volně vážených pomerančů. Předpokládám, že si cenu pravděpodobně porovnali pouze v hlavě s cenou 31,50 Kč za 1,38 kg pomerančů v balíčku a podle toho uvedli správnou odpověď. Odhadovala jsem, že tento postup bude nejčastější. To se však nestalo. Na nejčastější žákovské řešení se podíváme později.



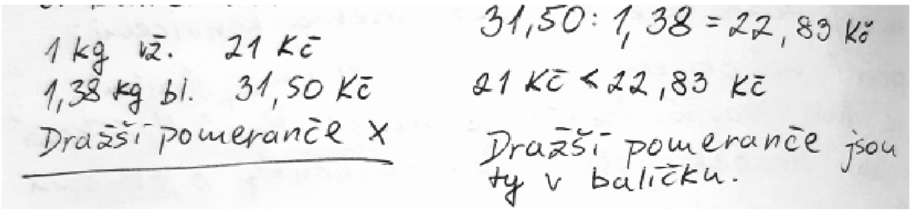
Obrázek 41: Žákovské řešení příkladu 5 (2D)

Na obrázku č. 42 můžeme vidět žákovské řešení, jehož autor uvedl dokonce 2 různé postupy. V prvním postupu (P4) můžeme vidět využití převodů jednotek hmotnosti, přesněji z kilogramů na gramy. V druhém způsobu řešení (P5) můžeme vidět řešení pomocí trojčlenky. Obě řešení jsou správná a přehledná, tudíž není potřeba dalšího komentáře.



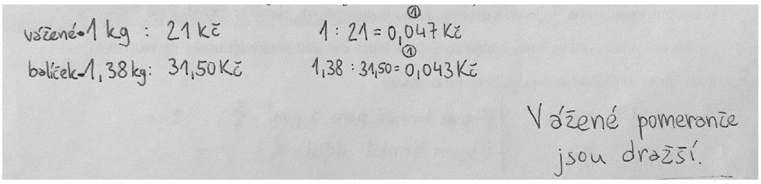
Obrázek 42: Žákovské řešení příkladu 5 (3C)

Pro srovnání s předchozími řešeními přikládám i řešení (P6) na obrázku č. 43, které se vyskytlo nejčastěji. Principem tohoto způsobu řešení je výpočet, kolik stojí 1 kg vážených a balíčkovaných pomerančů. Přičemž cenu za 1 kg vážených pomerančů nám říká již zadání slovní úlohy. Žáci si tedy dopočítali, že 1 kg balíčkovaných pomerančů by stálo 22,83 Kč. Zmíněné dvě ceny následně porovnali a v závěru uvedli správnou odpověď, že pomeranče v balíčku jsou dražší.



Obrázek 43: Žákovské řešení příkladu 5 (10A)

Chybné řešení můžeme vidět na obrázku č. 44. Zde žák vydělil hmotnosti pomerančů jejich cenou, což byla nesprávná úvaha. Jeho postup by byl správný ve chvíli, pokud by prohodil dělenec a dělitel, tudíž by dělil ceny pomerančů jejich uvedenou hmotností.



Obrázek 44: Žákovské řešení příkladu 5 (6F)

Poslední postup řešení, který uvádím k příkladu 5, můžeme vidět na obrázku č. 45. Autor absolutně nepostřehl ze zadání slovní úlohy, že se vždy jedná o jinou hmotnost pomerančů. Porovnal tedy obě ceny a vyhodnotil, jaká z nich je nižší. Tento postup řešení je samozřejmě chybný.

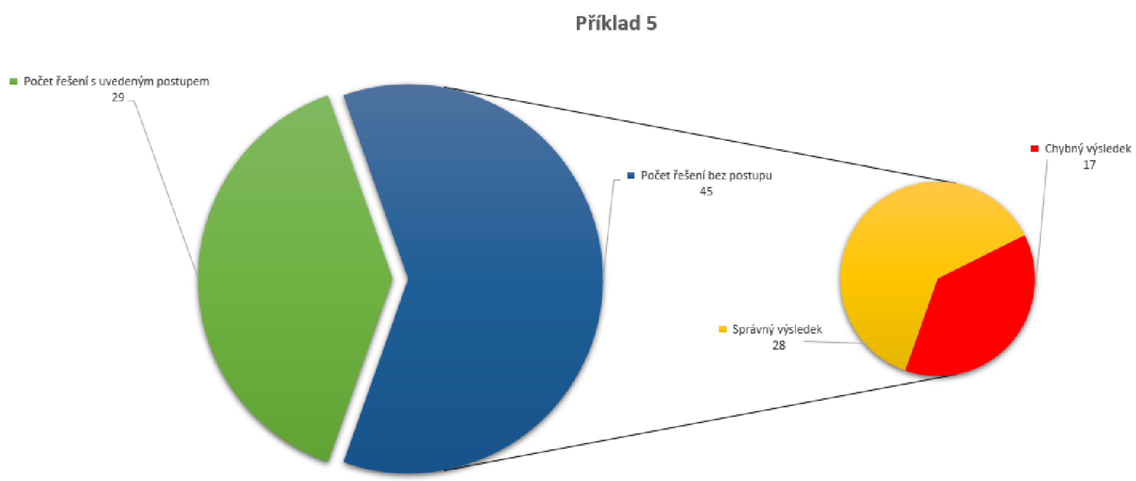
21 je menší než 31,50 vážený pomeranče jsou levnější.

Obrázek 45: Žákovské řešení příkladu 5 (25D)

Řešení bez uvedeného postupu

Tento příklad měl poměrně velkou úspěšnost, a to 70 %. Žáků, kteří se rozhodli tento příklad řešit, bylo 74, přičemž 52 žáků mělo správný výsledek. Vyskytl se zde největší počet (45) řešení bez uvedeného postupu. Ze zadání je zřejmé, že se žáci mají rozhodnout mezi dvěma možnostmi výsledku.

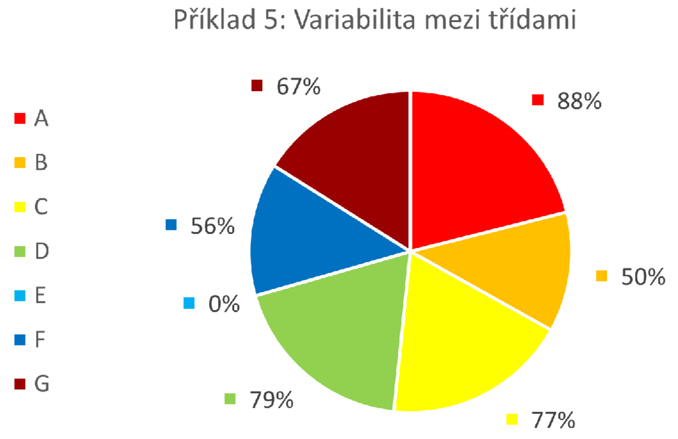
Myslím si, že nastala chyba z mé strany při zadávání tohoto příkladu. Zpětně bych zadání příkladu doplnila o otázku "Proč?". Na obrázku č. 46 si můžeme všimnout, že více jak polovina řešitelů měla správný výsledek, a to že balíčkované pomeranče jsou dražší. Nelze však určit, zda žáci příklad opravdu počítali a nebo si pouze odpověď tipli.



Obrázek 46: Řešení bez uvedeného postupu u příkladu 5, n = 74

Variabilita mezi třídami

Z obrázku č. 47 lze vyčíst následující informace. Nejlépe si vedla třída A, u níž se objevila většina postupů, které jsem uváděla v předchozí části. Tato třída také uvedla nejvíce typů postupů. Ve třídě B se neobjevil ani jeden postup, což lze vidět i v následující tabulce. U této třídy tedy usuzuji, že si odpověď tipovali. Třída E měla nulovou úspěšnost. Překvapilo mě, že ani možnost tipu nevedla ke správnému výsledku. Třídy C a D měly velmi podobné výsledky v úspěšnosti.



Obrázek 47: Příklad 5: Porovnání úspěšnosti mezi třídami, n = 52

V následující tabulce č. 7 můžeme vidět početní zastoupení různých postupů napříč třídami.

	A	B	C	D	E	F	G
P1	1	-	-	-	-	-	
P2	1	-	-	-	-	-	-
P3	2	-	1	2	-	-	1
P4	1	-	2	1	-	1	1
P5	-	-	1	-	-	-	-
P6	2	-	3	1	-	1	2

Tabulka 7: Příklad 5: Variabilita postupů řešení mezi třídami

3.1.6 Příklad 6

„Pepa nese maminčiny tašky s nákupem. Je v nich půlka dvoukilogramového chleba, tři čtvrtě kilogramu pomerančů, dvě másla po 0,25 kg, 2 kg hrubé mouky a 1 kg hladké mouky. „Ten nákup má aspoň deset kilo,“ vzdychá Pepa. Má pravdu?“ (Odvárko, Kadleček 1998a, s. 35).

U uvedeného příkladu bych chtěla zmínit, že pro mě osobně bylo nejvíce náročné právě tuto úlohu vyhodnocovat. Žáci totiž měli odpovědět, zda má Pepa pravdu, když tvrdí, že nákup má alespoň 10 kg. Tomu samozřejmě předcházelo, že si museli vypočítat, kolik skutečně nákup váží. Správný výpočet byl, že nákup váží 5,25 kg. Odpověď tedy zněla, že Pepa nemá pravdu.

Problém přišel ve chvíli, když žáci došli k jinému výpočtu, např. uvedli hmotnost 6,25 kg a odpověď tedy opět zněla, že Pepa nemá pravdu. V tento okamžik jsem si nevěděla rady, jak úlohu vyhodnocovat. Nakonec jsem se rozhodla, že odpověď pro mě není rozhodující, ale prioritou je pro mě postup a hmotnost nákupu, kterou žáci vypočítali.

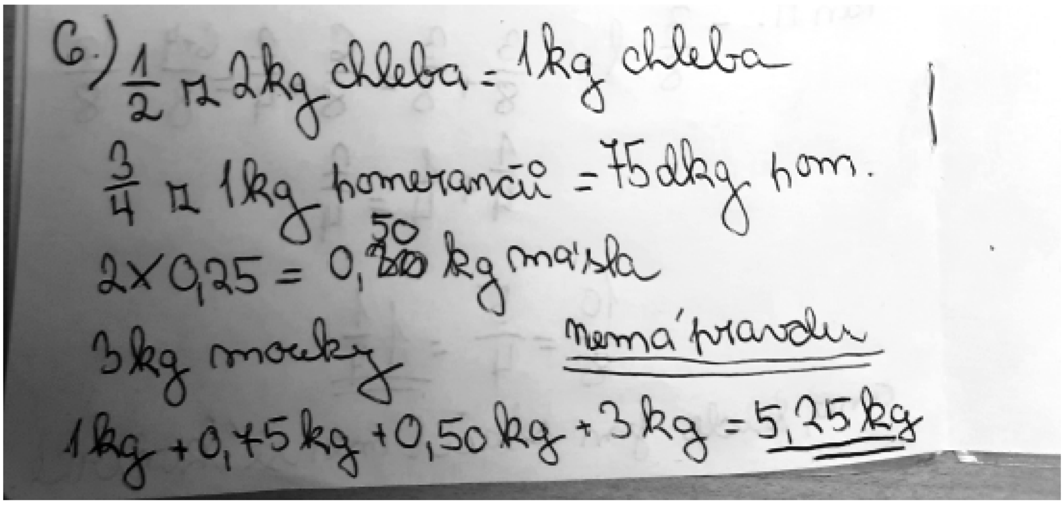
Pokud bych se však s tímto setkala z pozice učitelky v testu, předností by pro mě bylo, v jaké početní operaci udělal žák chybu. Myslím si, že pokud by například udělal chybu v přepsání se některého čísla (například při sčítání pod sebou) a zbylý postup by byl správný, asi bych jej ohodnotila známkou 1. V případě, že by naopak žák špatně přepočítal ze zlomků množství potravin, ale výslednou odpověď by měl "Pepa nemá pravdu,"hodnotila bych výsledek jako chybný.

Zpětně jsem velmi ráda, že jsem tuto úlohu použila při pracovním listu, poněvadž jsem měla dostatek času si promyslet její vyhodnocení. Pokud bych se však s takovýmto řešením setkala až v mé pedagogické praxi, musela bych se rozhodovat daleko rychleji a pravděpodobně bych vyhodnocení uspěchala a nehodnotila žáky spravedlivě. Obecně jsou tyto úlohy velmi vhodné pro ukázku a jejich řešení ve třídě. Vedení diskuze nad vyhodnocováním s žáky též vnímám jako přínosné. Jako začínající učitelka bych se však tomuto typu úloh v rámci zadávaných testů prozatím vyhnula.

Je možné, že názor na tuto úlohu a její vyhodnocení budu mít za pár let úplně odlišný, než prezentuji nyní. Dle mého názoru je spousta situací a slovních úloh, které dokáže vyhodnotit nejspravedlivěji až velmi zkušený pedagog, který má za sebou několikaletou praxi.

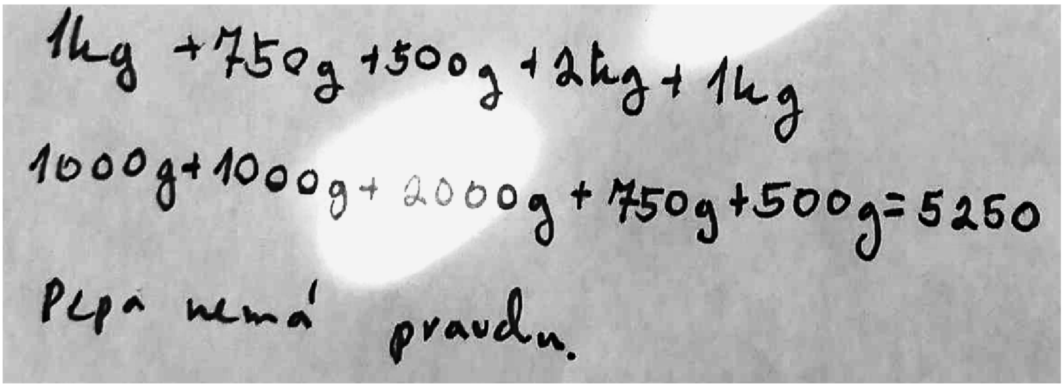
Pro ukázku žákovských řešení je nutné uvést sedm postupů. První řešení

(P1) vidíme na obrázku č. 48. Zde jsou postup, výpočet i odpověď bezchybné. Postup je dle mého názoru pěkně přehledný, tudíž netřeba dalšího komentáře.



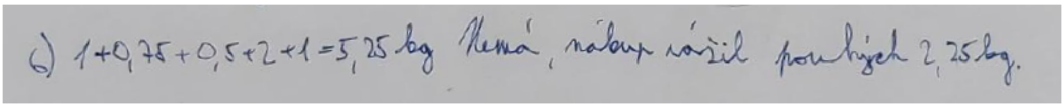
Obrázek 48: Žákovské řešení příkladu 6 (25D)

Druhý postup (P2) vidíme na obrázku č. 49. Postup je velmi podobný předchozímu, ale rozdíl je v jednotkách hmotnosti. V tomto případě autor počítal v gramech, kdežto žák předchozího postupu počítal v kilogramech.



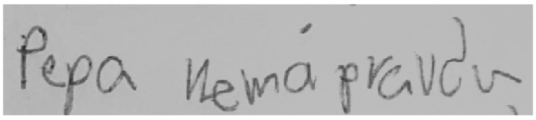
Obrázek 49: Žákovské řešení příkladu 6 (16A)

Třetí řešení (P3) na obrázku č. 50 jsem se rozhodla vyhodnotit jako správné, poněvadž, jak si můžeme všimnout, postup i výsledek má žák správně. V odpovědi však udělal chybu. Dle mého názoru se jednalo pouze o nepozornost a omylem se žák přepsal. Takové řešení se objevilo vícekrát, postup a výsledek byl správný, ale v odpovědích se lišilo číslo. Nehledě na jiné číslo v odpovědích, všechny tyto typy postupů zařazuji do P3.


6) 1+0,75+0,5+2+1=5,25 kg Nemá, nákup vážil pouhých 2,25 kg.

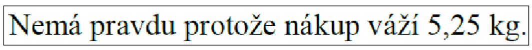
Obrázek 50: Žákovské řešení příkladu 6 (11A)

Čtvrtou ukázku na obrázku č. 51 jsem se také rozhodla vyhodnotit jako správnou, poněvadž autor zde neuvedl ani postup řešení, ani hodnotu hmotnosti nákupu, kterou se mu podařilo vypočítat. Postup sice toto řešení nemá, ale pro zajímavost jej i tak zařadím pod údajem P4 do tabulky pro variabilitu mezi třídami.


Pepa nemá pravdu

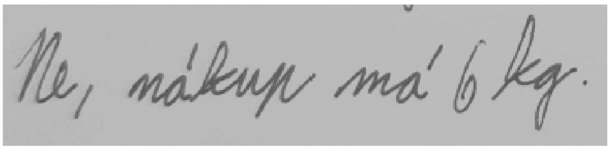
Obrázek 51: Žákovské řešení příkladu 6 (2B)

Řešení na obrázku č. 52 je také bez postupu. Zde je však odpověď správná i správný výsledek 5,25 kg, proto jej zařazuji do tabulky č. 8 pod typem P5. Předpokládám, že si žáci, kteří tento výsledek uvedli, museli vypočítat hmotnost nákupu na jiný papír, popřípadě počítali z hlavy.


Nemá pravdu protože nákup váží 5,25 kg.

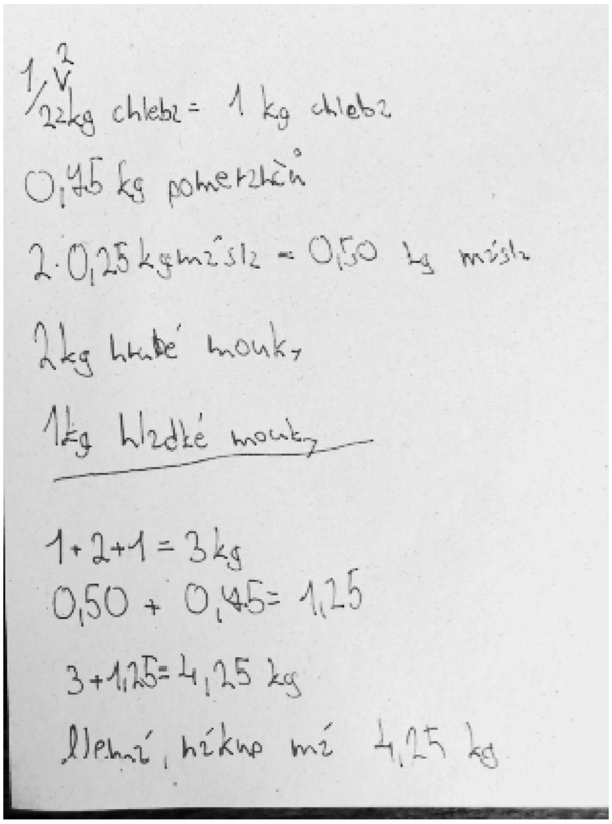
Obrázek 52: Žákovské řešení příkladu 6 (3D)

Šesté uvedené řešení lze vidět na obrázku č. 53. Vyhodnotila jsem jej jako chybné. Žák sice správně zodpověděl, že Pepa nemá pravdu, ovšem došel k výsledku, že nákup váží 6 kg, což není správný výpočet. Tento typ řešení také nemá postup, ale i přesto ho opět zobrazuji do tabulky pro variabilitu mezi třídami pod údajem P6. To znamená, že pokud žák uvedl pouze tuto odpověď a uvedl chybnou hmotnost nákupu, nehledě na odlišnost od zde zmíněných 6 kg, je toto řešení řazené mezi ta špatná a do typu P6.


Ne, nákup má 6 kg.

Obrázek 53: Žákovské řešení příkladu 6 (7A)

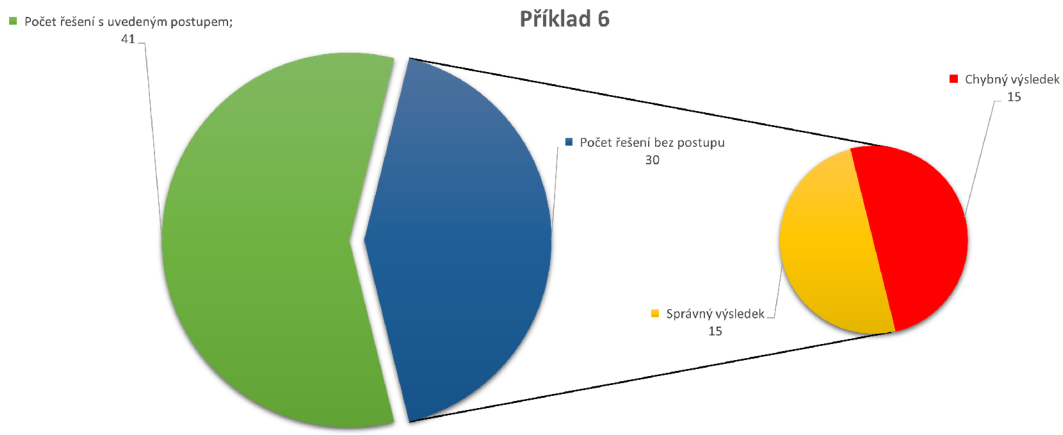
V posledním postupu P7, který ukazuji, si žák vše převedl správně a začal počítat váhu nákupu. Autor obrázku č. 54 si špatně vypočítal $1 + 2 + 1 = 4$. Uvedl jako součet těchto sčítanců 3. Můžeme si všimnout, že následný postup má již správně. Ovšem kvůli zmíněné chybě mu již nevyšel správný výsledek 5,25 kg, ale 4,25 kg. Odpověď, že nákup nemá 10 kg, je sice správná, ale toto žákovské řešení bylo mnou vyhodnoceno jako chybné. Myslím si, že žák udělal zmíněnou chybu pouze z nepozornosti či omylem. Pokud by tomu tak bylo, nejednalo by se podle mého názoru o nijak závažnou chybu.


1/2 2kg chleba = 1 kg chleba
0,75 kg pomerančů
2·0,25 kg másla = 0,50 kg másla
2kg hrubé mouky
1kg hladké mouky
1+2+1 = 3kg
0,50 + 0,75 = 1,25
3+1,25 = 4,25 kg
Nemá, nákup má 4,25 kg

Obrázek 54: Žákovské řešení příkladu 6 (14C)

Řešení bez uvedeného postupu

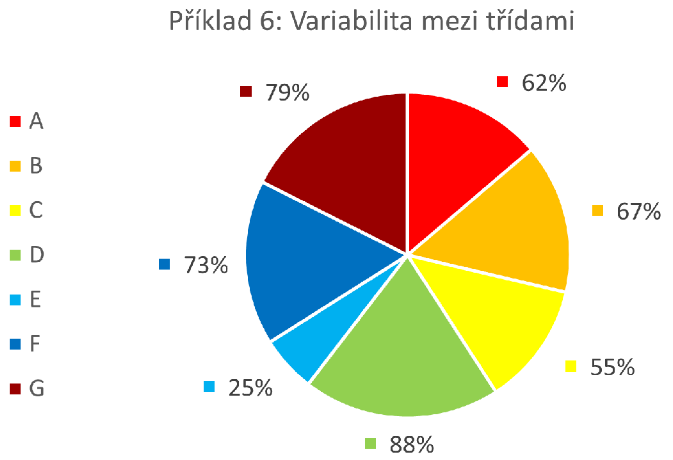
Šestý příklad měl celkovou úspěšnost 68 %. Ze 71 řešitelů jich 30 neuvedlo postup řešení a dle obrázku č. 54 si všimneme, že přesně polovina těchto řešitelů měla výsledek správný. Tato vyhovující žákovská řešení bez postupu jsou uvedena v předchozí části jako P4 a P5. I zde je na místě otázka, zda jsem do zadání neměla dopsat doplňující otázku "Proč?". Nedovolím si odhadnout, zda by se počet žákovských řešení bez uvedeného postupu snížil či nikoliv.



Obrázek 55: Řešení bez uvedeného postupu u příkladu 6, n = 71

Variabilita mezi třídami

Úspěšnost napříč třídami lze vidět na obrázku 55. Nejlépe si vedla třída D, naopak nejhůře třída E. U třídy B se očekávala malá úspěšnost, poněvadž paní učitelka této třídy předpokládala chyby z důvodu chybování třídy ve zlomcích. Mile ji potěšilo, když jsem jí sdělila, že ze sedmi tříd byla ta její na čtvrtém místě. Paralelní třídy F a G měly velmi podobnou procentuální úspěšnost, což jejich vyučující hodnotila též pozitivně. Je však nutné podotknout, že v třídě F se vyskytovalo daleko více řešení bez uvedeného postupu, než v třídě G.



Obrázek 56: Příklad 6: Porovnání úspěšnosti mezi třídami, n = 48

V tabulce č. 8 lze vidět početní zastoupení zmíněných typů žákovských postupů příkladu 6.

	A	B	C	D	E	F	G
P1	2	-	2	2	-	1	5
P2	5	2	3	3	1	1	3
P3	1	-	1	-	-	-	1
P4	-	2	-	1	-	5	1
P5	-	-	-	1	-	4	1
P6	4	2	3	-	1	2	3
P7	1	-	2	-	-	-	-

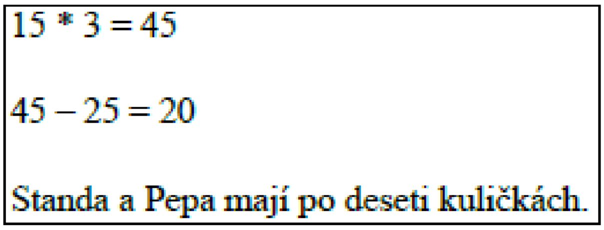
Tabulka 8: Příklad 6: Variabilita postupů řešení mezi třídami

3.1.7 Příklad 7

„Standa, Pepa a Karel mají průměrně 15 kuliček. Kolik kuliček má Standa a kolik Pepa, jestliže Karel má 25 kuliček“ (Samková 2019, s. 231)?

Úspěšnost příkladu je 73 %. Právě tento příklad se rozhodlo řešit nejméně žáků, přesněji 59 žáků z 120. Musím zde podotknout, že jako správného řešitele jsem uvedla toho žáka, který měl alespoň jedno možné řešení. Celkový počet řešitelů i úspěšnost jsem zde očekávala větší, neboť tato úloha má 21 možných výsledků. Je také nezbytné zmínit, že žádný z žáků neuvedl více jak 3 možné výsledky.

Z 43 žáků, kteří měli správný výsledek, uvedlo 40 žáků stejnou variantu řešení, a to: Standa i Pepa mají po 10 kuličkách. Pro tento výpočet žáci nalezli celkem 5 postupů. Nejčastější postup (P1) lze vidět na obrázku č. 57.

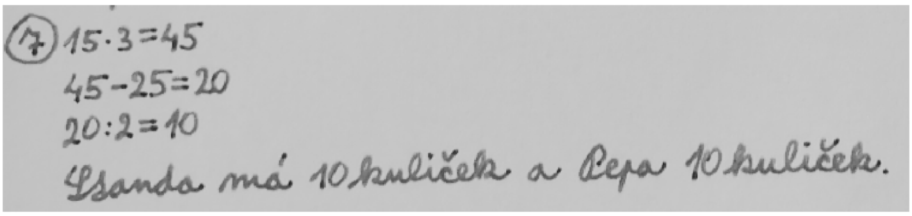

15 * 3 = 45

45 – 25 = 20

Standa a Pepa mají po deseti kuličkách.

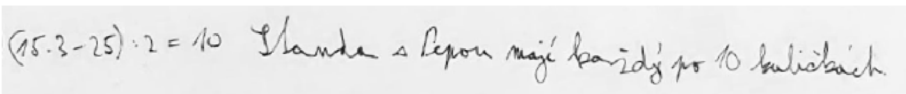
Obrázek 57: Žákovské řešení příkladu 7 (11C)

Velmi podobný postup (P2), kdy žáci přišli na stejný výsledek jako v předchozím řešení, lze vidět na obrázku č. 58. Zde žáci uvedli oproti předchozímu postupu pouze jeden krok navíc, a to takový, že číslo 20 vydělili 2.


7 15·3=45
45-25=20
20:2=10
Standa má 10 kuliček a Pepa 10 kuliček.

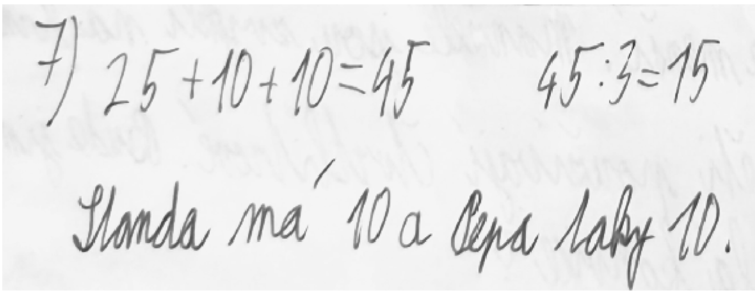
Obrázek 58: Žákovské řešení příkladu 7 (6A)

Na obrázku č. 59 lze vidět postup (P3), který je oproti předchozím dvěma postupům kratší díky početním operacím s využitím závorek.


(15·3-25):2 = 10 Standa s Pepou mají každý po 10 kuličkách.

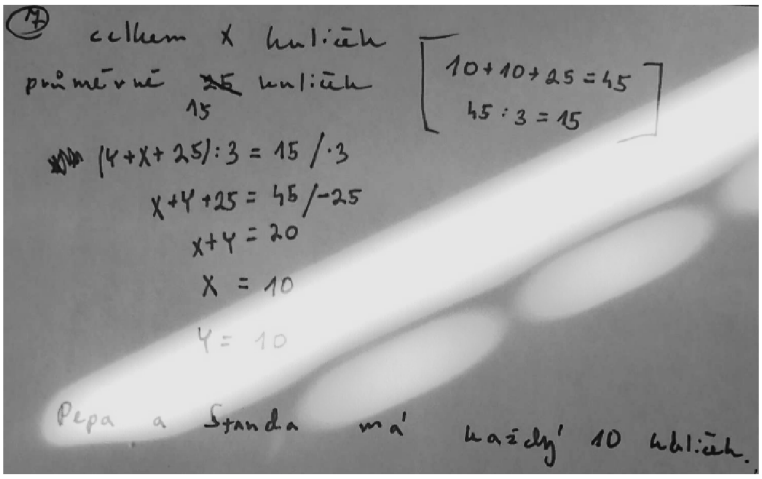
Obrázek 59: Žákovské řešení příkladu 7 (11A)

Předposlední postup (P4) týkající se řešení 10 a 10 kuliček lze vidět na obrázku č. 60. Zde autor pravděpodobně nejprve odhadl, kolik kuliček by mohl mít Standa a Pepa, poté kuličky sečetl a zjišťoval, zda průměr 15 kuliček vychází.



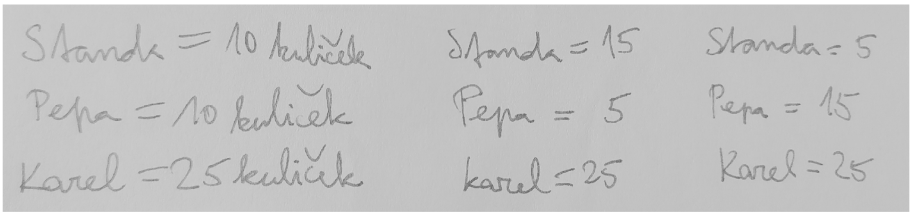
Obrázek 60: Žákovské řešení příkladu 7 (3A)

Postup (P5), který vidíme na obrázku č. 61, se vyskytl od jednoho již několikrát zmíněného žáka, který nyní použil řešení pomocí rovnice o dvou neznámých. Pravděpodobně nikoho nepřekvapí, že dotyčný žák byl jediný, kdo tímto způsobem řešil tento příklad.



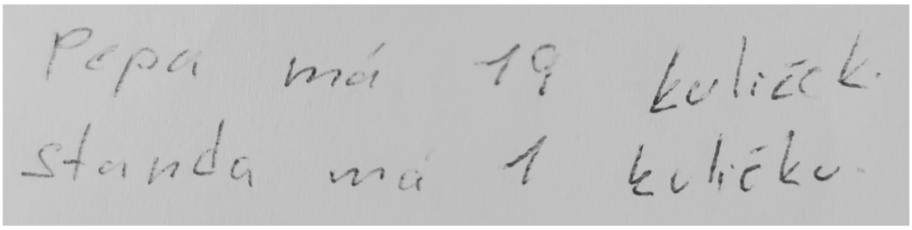
Obrázek 61: Žákovské řešení příkladu 7 (16A)

Řešení (P6) příkladu, kdy žák uvedl 3 správné výsledky, můžeme vidět na obrázku číslo 62. Bohužel zde neuvedl postup, který by byl velmi vhodný. Tento žák jako jediný uvedl řešení, kdy Standa má 15 kuliček a Pepa má 5 kuliček a obráceně.



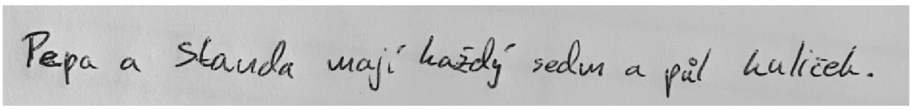
Obrázek 62: Žákovské řešení příkladu 7 (12G)

Pouze dva žáci přišli na řešení (P7), které lze vidět na obrázku č. 63. I v tomto případě bohužel ani jeden z autorů neuvedl postup řešení. Překvapilo mě, že ani jednoho ze zmíněných dvou žáků nenapadlo počet kuliček přehodit mezi Pepu a Standu. Přesněji, že ani jeden neuvedl řešení: "Pepa má 1 kuličku a Standa má 19 kuliček."



Obrázek 63: Žákovské řešení příkladu 7 (2F)

Dle mého názoru nejhorší řešení, které se v pracovních listech objevilo, lze vidět na obrázku č. 64. Zde žák sice neuvedl postup řešení, ale z odpovědi je jasné, že jednu kuličku chtěl rozdělit napůl mezi dva žáky. Následné řešení uvedl naštěstí pouze jeden žák. Toto řešení jsem se rozhodla nezařazovat do tabulky, která se týká variability řešení mezi třídami.

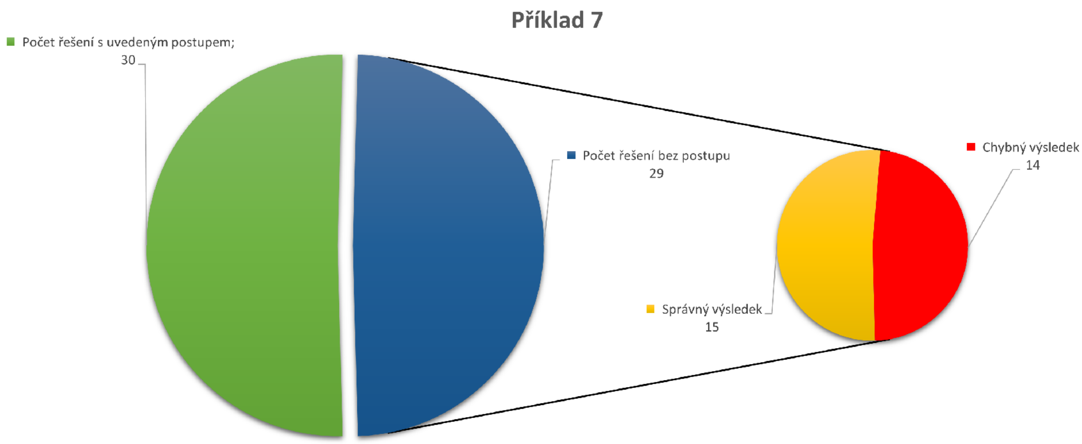


Obrázek 64: Žákovské řešení příkladu 7 (17A)

Řešení bez uvedeného postupu

Žáků, kteří neuvedli postup řešení, bylo 29 a rozdělení na správné a chybné výsledky nám ukazuje obrázek č. 65. Z grafu lze vidět, že hodnoty, kde byl a nebyl uvedený postup, se takřka shodují. Stejně tak v řešení bez postupů se téměř shodují hodnoty pro správné a pro chybné výsledky.

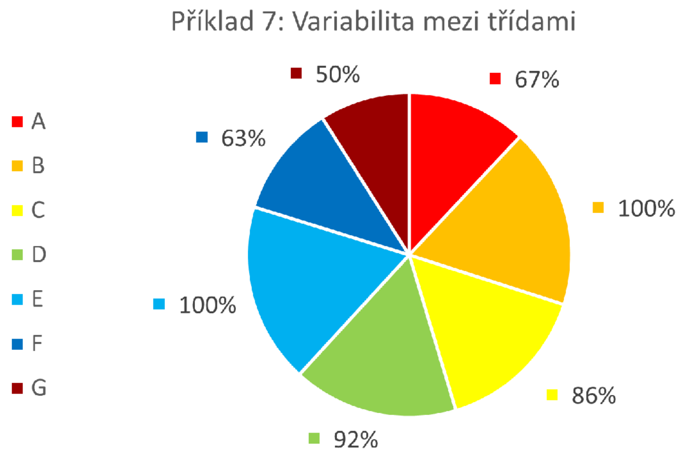
Z chybných výsledků bez uvedeného postupu se vyskytovaly výsledky: "Standa a Pepa mají každý po pěti kuličkách", "Standa a Pepa mají každý po patnácti kuličkách" a "Standa má patnáct kuliček a Pepa deset kuliček". Poslední možnost se samozřejmě opakovala i obráceně, to znamená "Standa má deset kuliček a Pepa má patnáct kuliček". Tyto čtyři možnosti se vyskytly celkově 14 krát.



Obrázek 65: Řešení bez uvedeného postupu u příkladu 7, n = 59

Variabilita mezi třídami

Na obrázku č. 66 lze vidět, že nejúspěšnější třídy zde byly třídy B a E. Hned po nich následuje třída D. Zde bych chtěla zmínit rozdílné množství žáků ve třídě B, E a D, kteří se rozhodli daný příklad řešit. Ve třídě B se rozhodli 3 žáci tuto úlohu počítat a všichni 3 žáci byli úspěšní. Ani jeden z nich však neuvedl postup pro svůj výsledek. V třídě E se rozhodl řešit tento příklad pouze 1 žák, který uvedl postup P2. Ve třídě D se rozhodlo řešit tuto slovní úlohu 12 žáků, přičemž 11 z nich mělo zdárné řešení. V této třídě se objevily odlišné postupy viz tabulka 9.



Obrázek 66: Příklad 7: Porovnání úspěšnosti mezi třídami, n = 43

V následující tabulce č. 9 můžeme vidět početní různorodost postupů k příkladu 7.

	A	B	C	D	E	F	G
P1	2	-	2	4	-	3	1
P2	1	-	1	2	1	1	-
P3	1	-	-	2	-	1	-
P4	1	-	1	1	-	2	-
P5	1	-	-	-	-	-	-
P6	-	-	-	-	-	-	1
P7	-	-	-	-	-	1	1

Tabulka 9: Příklad 7: Variabilita postupů řešení mezi třídami

3.2 Chyby, jichž se žáci dopustili

Nepostradatelnou součástí řešení slovních úloh je také práce s chybou. Žáci dělali chyby v různých fázích řešení slovních úloh. Rozdělením slovních úloh do fází jsem se zabývala na začátku diplomové práce, proto nyní přistoupím rovnou k žákovským řešením.

První fáze se věnuje porozumění zadání slovní úlohy. Kvůli pandemii Covid-19 jsem při řešení pracovního listu nemohla být přítomna ve všech třídách. Proto si nedovolím konstatovat, zda žáci měli či neměli problém se zadáním úloh. Mohli si vybrat, jaký příklad budou řešit. Předpokládám, že pokud některé slovní úloze neporozuměli, vynechali ji a zabývali se úlohou jinou. Našli se i jedinci, kteří mi přímo do pracovního listu napsali: "Toto jsem moc nepochopil."

Druhá fáze se věnuje zápisu slovní úlohy. Popravdě mě překvapilo, že převažovala řešení bez uvedeného zápisu. Zde bylo velmi vidět, jaká třída je vedená k psaní zápisů slovních úloh a jaká nikoliv. Většina žáků v třídě C dělala zápisy slovních úloh, naopak žáci z tříd F a G je dělali minimálně. Obecně lze říci, že pokud si žáci zápis udělali, ve většině případů ho měli správně.

V matematickém modelu se již objevovalo nejvíce chyb. Toto dle mého názoru úzce souvisí s tím, jak žáci dané zadání slovní úlohy pochopili. Ve chvíli, kdy jej nepochopí, nejsou schopni správně vytvořit matematický model. Samozřejmě ne vždy to bylo kvůli nepochopení. Objevily se i postupy, kde jsem přesvědčena, že se daný žák pouze přehlédl nebo upsal. Například místo toho, aby dělil třemi (jak je vyžadováno v zadání) dělil dvěma.

Provedení výpočtu bylo povětšinou v pořádku. Samozřejmě se vyskytly i chyby typu "$1 + 2 + 1 = 3$". Těžko však konstatovat, zda se žák pouze přehlédl nebo opravdu špatně počítal.

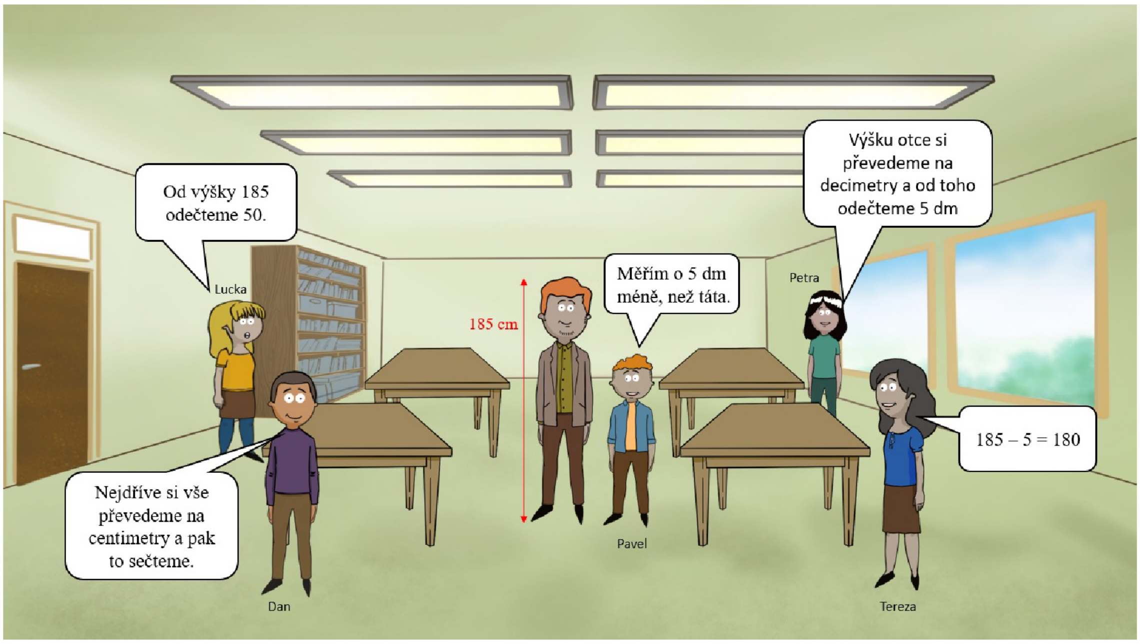
Poslední fází je vytvoření odpovědi, kde se také vyskytovaly chyby. Například, výsledek vyšel 5,25 kg a v odpovědi je zaznamenána hodnota 2,25 kg. Dle mého názoru chyby při tvoření odpovědi jsou ponejvíce z nepozornosti.

Celkově hodnotím velmi kladně, že se objevila i chybná řešení. Díky nim jsem se musela i opakovaně zamýšlet nad tím, jak žáci postupovali a proč zrovna tato chyba nastala. Některá chybná řešení byla opravdu zajímavá. Tuto kapitolu bych ráda zakončila českým příslovím: "Chybami se člověk učí".

4 Příklady v podobě Concept Cartoons

Ze 7 slovních úloh, kterých se týká tato diplomová práce, jsem si vybrala 5 příkladů, které jsem vytvořila v podobě Concept Cartoons. Veškeré komentáře v bublinách se objevily v pracovních listech jakožto žákovská řešení. Důvodem, proč jsem si zvolila právě těchto 5 příkladů, je to, že si myslím, že jsou velmi vhodné pro diskuzi mezi žáky. Příklad 6 jsem zde zařadila, abych zjistila žákovský názor a různorodost diskuze na vyhodnocování této úlohy.

Začneme příkladem 1, jehož podobu můžeme vidět na obrázku č. 67. Zde čtyři děti diskutují nad tím, jak vysoký je Pavel. Některá řešení, která se objevují v bublinách, jsou správná, některá naopak chybná.



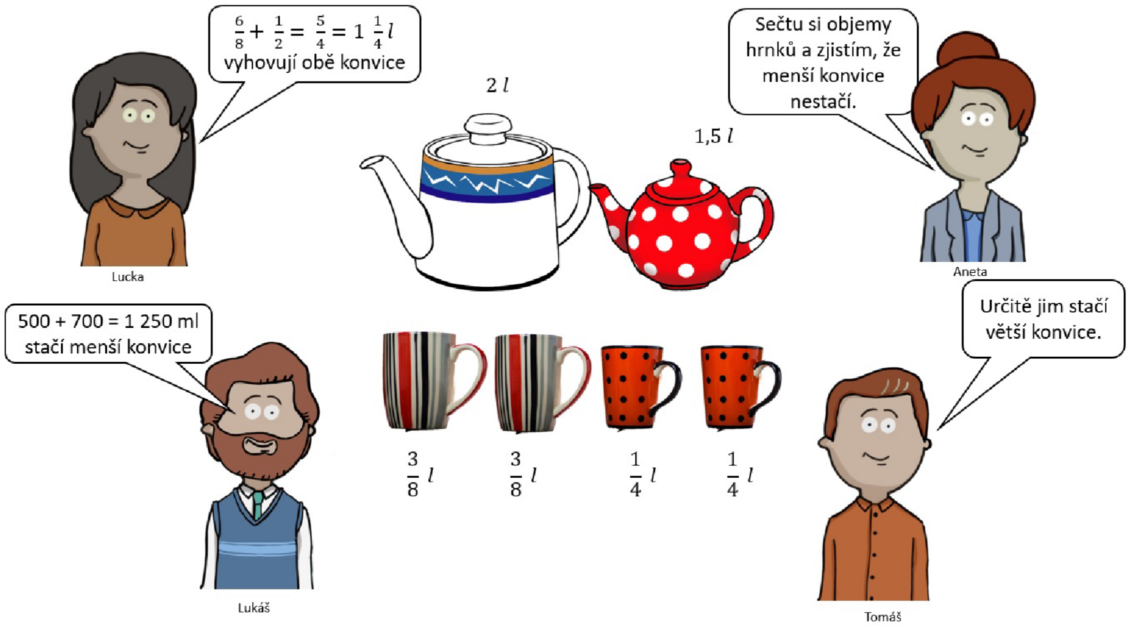
Obrázek 67: Concept Cartoons - příklad 1

Ve chvíli, kdy jsme si obrázek pozorně prohlédli, můžeme přestoupit k jeho rozboru.

Správné řešení nám uvádí Lucka a Petra. Lucka si 5 dm převedla na 50 cm a to odečetla od výšky otce, tudíž od 185. Pokud bych chtěla v Luccině bublině komentář upřesnit, mohla bych přidat informaci, že výška Pavla je tedy 135 cm. Petra ve své bublině použila postup, že si všechny údaje převedla na stejné jednotky délky, přesněji na decimetry. Poté by odečetla od výšky otce 5 dm a získala by správný výsledek. Opět bychom mohli komentář v bublině upřesnit informací, že převedení 185 cm je 18,5 dm. Výsledek této bubliny je tedy 13,5 dm.

Chybné řešení nám udává Dan a Tereza. Dan správně tvrdí, že je potřeba nejdříve si vše převést na stejné jednotky, v tomto případě na centimetry. Poté však místo odečtení použije operaci sčítání, která je chybná. V Terezině bublině si můžeme všimnout, že ignoruje informaci o různých jednotkách délky a rovnou odčítá zadaná čísla.

Druhou slovní úlohou, kterou jsem vytvořila v podobě Concept Cartoons, je příklad 2. Na obrázku č. 68 můžeme vidět diskuzi mezi čtyřmi lidmi, kteří řeší, jaká konvice je potřeba pro 4 zobrazené hrnky.



Obrázek 68: Concept Cartoons - příklad 2

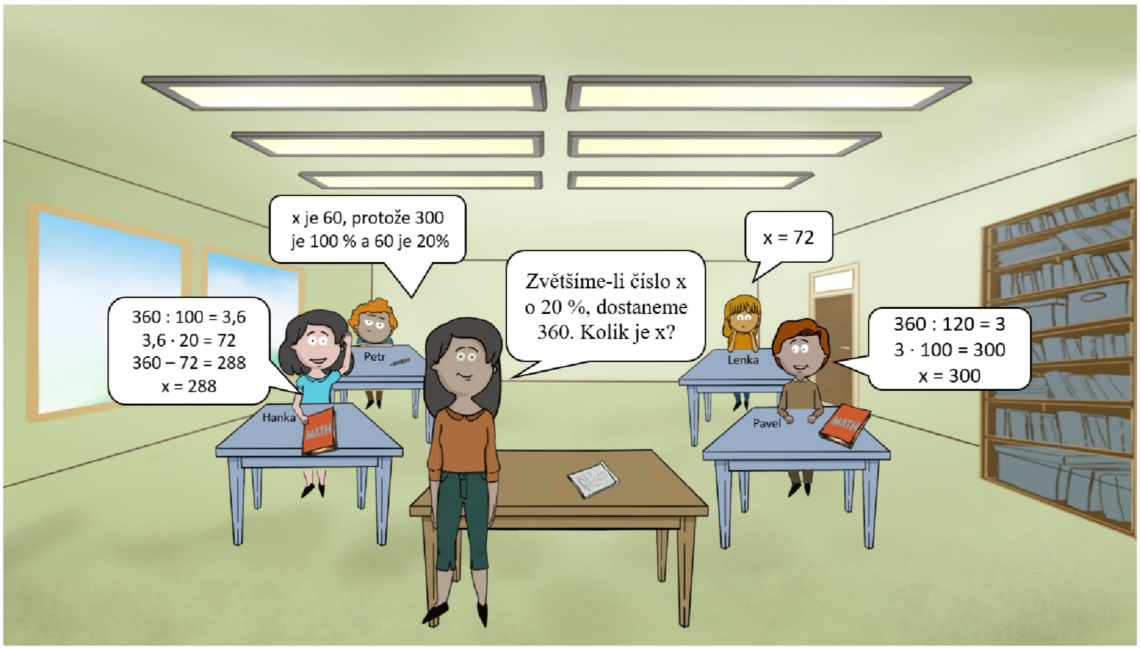
Po prohlédnutí obrázku se podrobněji podíváme na řešení v bublinách. Správné řešení se nám tentokrát zobrazuje ve třech bublinách, v jedné bublině je řešení chybné.

Lucčino řešení je správné. V tomto postupu si nejprve sečetla objem všech hrnků, které je potřeba zalít. Poté si zlomek upravila do smíšeného čísla, který nám říká, že je potřebná konvice o objemu $1\,\frac{1}{4}$ litru. Její odpověď, že vyhovují obě konvice, je tudíž správná.

Lukáš si objemy hrnků převedl na mililitry a poté sečetl jejich objem. Správně určil, že pro celou rodinu stačí menší konvice. Tomášova bublina je také správná. Není však nijak podrobná a nezabývá se tím, zda stačí či nestačí menší konvice.

Anetino řešení je chybné. Úvaha, že sečte objemy hrnků, je sice správná, ovšem pokud by je sečetla správně, zjistila by, že menší konvice naopak stačí. Podrobnější postup nevidíme, tudíž nelze určit, kde ve výpočtu udělala chybu.

Obrázek č. 69 znázorňuje příklad 3. Žáci zde řeší slovní úlohu týkající se procent, kterou jim zadává paní učitelka.



Obrázek 69: Concept Cartoons - příklad 3

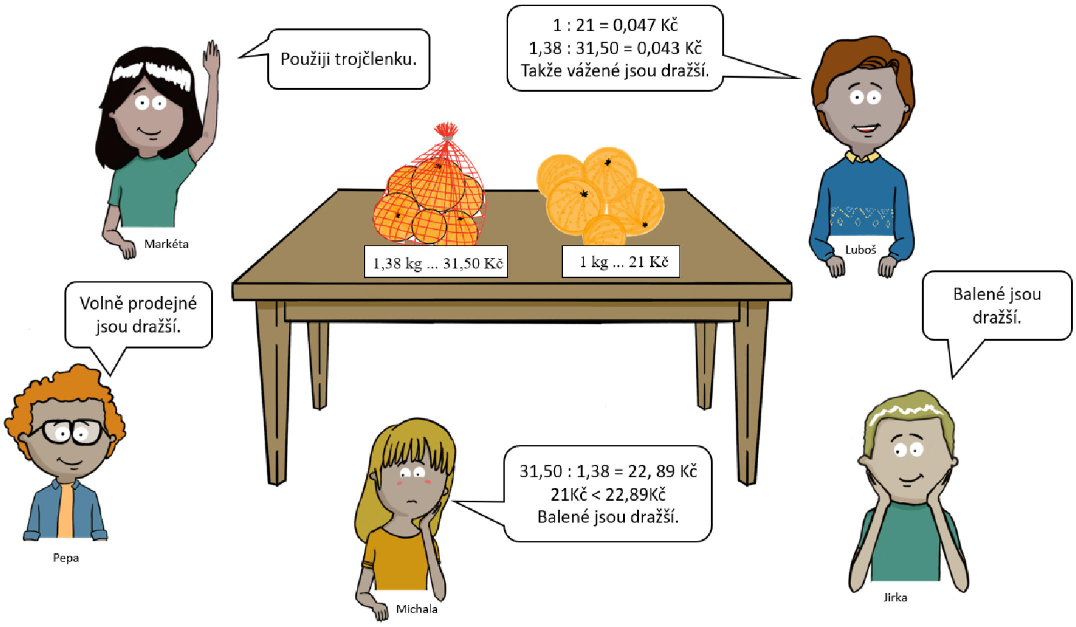
V tomto případě je pouze jedna správná bublina a to je bublina Pavla. Ten uvádí podrobný návod, jak k výsledku přišel. Myslím, že více to netřeba komentovat.

Chybné řešení se objevuje v bublinách Hanky, Petra a Lenky. Hančino řešení je chybné, poněvadž hned první řádek jejího postupu, kde se snažila vypočítat si hodnotu 1 %, není správný. Neuvědomila si, že číslo 360 není 100 %. Ze zadání totiž víme, že je to 120 %. Pokračování v jejím postupu tudíž nemá smysl.

Petrova odpověď je také chybná a důvod je stejný. Opět přisuzuje číslu 360 již zmíněných 100 %.

Lenčina chybná odpověď je velmi stručná. Nevíme, jak k výsledku dospěla. Dle mého názoru se mohlo jednat o postup totožný dvou prvních řádků v Hančině řešení.

Následný obrázek č. 70 se týká příkladu 5 z pracovního listu. Poněvadž v žákovských řešeních bylo poměrně časté, že neuváděli postup, využila jsem toho i v bublinách.



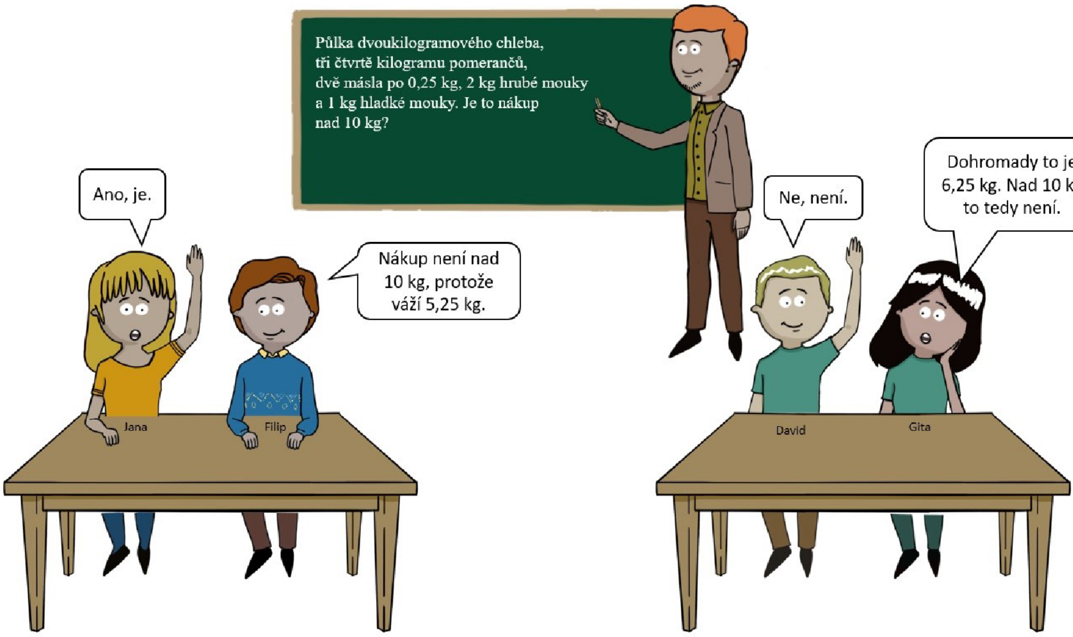
Obrázek 70: Concept Cartoons - příklad 5

Správné řešení lze vidět v bublinách Markéty, Michaly a Jirky. Markétino řešení je velmi stručné, avšak správné, jelikož k výsledku lze dojít i pomocí trojčlenky.

Michala si korektně vypočítala, kolik by zaplatila za 1 kg balených pomerančů a tuto částku porovnala s cenou 1 kg volně prodejných pomerančů. Jirka zobrazuje správné řešení bez uvedeného postupu.

Naopak chybná řešení lze vidět u Pepy a Luboše. Odpovědi Pepy a Jirky jsou protikladné, zatímco Luboš se snažil získat řešení pomocí početní operace dělení. Učinil tak však v nesprávném pořadí.

Obrázek č. 71 představuje příklad 6 z pracovního listu. Přesné zadání slovní úlohy lze vidět v podobě Concept Cartoons na tabuli. Opět jsem zde použila nejčastěji objevující se řešení od žáků, kteří pracovní list vypracovávali.



Obrázek 71: Concept Cartoons - příklad 6

Jana a David mají velmi stručné odpovědi bez uvedeného postupu řešení. Jedna z nich tedy zaručeně musí být chybná a tou je odpověď v bublině Jany. Davidova je tedy správná.

Ve Filipově bublině není podrobný postup, jak se dopočítal hmotnosti 5,25 kg. Jeho výpočet je však správný, tudíž celý jeho komentář v bublině považuji za přesný.

Gitina bublina je velmi podobná té Filipově. Samozřejmě jsem tak učinila záměrně. Výsledná váha 6,25 kg je chybná, avšak to, že nákup je lehčí než

10 kg, tvrdí Gita správně. Vyhodnocováním této situace jsem se již zabývala podrobněji v části žákovských řešení u příslušného příkladu 6.

4.1 Ověření metody Concept Cartoons v praxi

V praxi jsem měla možnost vyzkoušet si vést matematiku s využitím metody Concept Cartoons začátkem června 2022, a to ve dvou paralelních třídách, které mají odlišné vyučující matematiky. První třídu nazývám pro přehlednost jako třídu X, druhou třídu označuji jako třídu Y.

Třídy X a Y jsou ze stejné školy jako třídy F a G, ovšem s tím rozdílem, že když byl předkládán pracovní list v květnu roku 2021, byly v 7. ročnících třídy F a G. O rok se tedy posunuly.

V třídě X jsem vyzkoušela dva obrázky. Jednalo se o příklad 1 (zjišťování výšky Pavla) a příklad 6 (hmotnost nákupu). Ve třídě Y jsem vyzkoušela tři příklady, dva již zmíněné a k tomu navíc příklad 2 (rodina Mráčků a jejich výběr konvice).

Žáci zpočátku na obrázky nechápavě koukali a nerozuměli, co je po nich žádáno. Po chvíli začali pracovat. Takřka všem žákům se podařilo bezchybně vyřešit příklad 1.

Ve třídě X jsme se pozastavovali nad diskuzí k příkladu 6. Já jsem nejprve rozvedla diskuzi, kde jsem se chtěla zabývat hlavně řešením, které uvádí v obrázku Gita. Žáci však sami stočili diskuzi k tomu, co by se stalo, kdyby tohle řešení měl někdo v testu. Začali jsme tedy společně prodiskutovávat, co by oni z pohledu učitele dělali. Dokonce se jeden žák ujal vedení diskuze a na tabuli rozepsal možnosti, kdyby Gita měla uvedený postup, jak by mohl vypadat, kde přesně by byla chyba atd. Nakonec se mě tento žák zeptal, jak bych uvedené řešení jako učitelka známkovala. Zajímal mě však nejprve názor ostatních žáků. Nikdo z nich by Gitu nehodnotil známkou 4 a 5, což mě potěšilo. Dále se shodli na tom, že pokud by byl uvedený opravdu zmiňovaný Gitin komentář, navrhli by známku 3. A to z důvodu, že polovinu má špatně a polovinu správně. Mezi známkou 1 a 2 by se rozhodovali až na základě postupu. Jedničku by dávali tehdy, kdy by Gita měla vypočítaný správný výsledek 5,25 kg, ale v odpovědi by se upsala a uvedla by 6,25 kg. Podobně tomu bylo i v řešení P3 na obrázku 50.

Ve třídě Y jsme diskuzi nad příkladem 6 lehce zkrátili, abychom stihli i příklad 2. Je nutné však podotknout, že i zde žáci sami od sebe začali řešit známkování tohoto řešení. Příklad 5 pro ně byl pravděpodobně nejnáročnější. Zde uvedli Tomáše jako správného řešitele a dál nechtěli pokračovat v diskuzi nad daným příkladem. Musela jsem je k tomu nasměřovat. V následné diskuzi jsme si zopakovali převody jednotek objemů, poněvadž třetina třídy si nevěděla rady s tím, zda má Lukáš pravdu či nikoliv.

Celkově tuto zkušenost hodnotím velmi kladně. Třída X byla velmi aktivní a dle mého názoru z obrázků nadšená. Sama si dokázala vést diskuzi a já jsem ji pouze směřovala jistým směrem. Ve třídě Y jsem musela vést diskuzi já a lehce jsem žáky nutila, aby se nad příklady zamýšleli a obhajovali své názory. Pro obě třídy byla metoda Concept Cartoons nová a žádný z žáků se s ní nesetkal.

Závěr

Ve své diplomové práci jsem se zabývala žákovským řešením otevřených a polyvalentních úloh. Hlavním cílem práce bylo zjistit, jakými postupy žáci sedmých ročníků základních škol řeší otevřené a polyvalentní úlohy. Jaká je variabilita řešení v jedné třídě a mezi ostatními třídami.

V první kapitole jsem se věnovala terminologii, do které jsem zařadila rešerši týkající se slovních, otevřených a polyvalentních úloh a metody Concept Cartoons.

V druhé části s názvem Design výzkumu jsem prezentovala můj plán pro průběh výzkumu. Stanovila jsem si výzkumné otázky a cíle. V této části jsem sestavila pracovní list, který byl předložen sedmi třídám 7. ročníků základních škol.

Ve třetí kapitole jsem se zabývala již žákovskými řešeními. Celkový počet žáků, kteří se podíleli na vypracování pracovního listu, bylo 120. Ke každému příkladu jsem uvedla několik různorodých postupů od zmíněných žáků. Dále jsem se věnovala řešením bez uvedeného postupu řešení. Na závěr každého příkladu jsem shrnula úspěšnost pomocí grafu a variabilitu postupů řešení mezi třídami. Z žákovských řešení jsem vybírala ta, která byla něčím zajímavá, obvyklá i neobvyklá, do kterých budou spadat i chybné odpovědi. Případně řešení a odpovědi, u kterých lze provést diskuzi mezi žáky.

Dle vypracovaných tabulek 3 až 9 je zřejmé, že variabilita postupů řešení jednotlivých příkladů napříč třídami se lišila. Vyskytly se postupy řešení, které výrazně převažovaly ve všech třídách (např. u příkladu 1 postup P1, u příkladu 4 postup P1, a u příkladu 7 postup P1). Zatímco u jiných příkladů (např. příkladů 2 a 5) nebylo žádné řešení ve výrazné převaze.

V poslední, čtvrté kapitole s názvem Příklady v podobě Concept Cartoons jsem zpracovala pět slovních úloh z pracovního listu do metody Concept Cartoons. Vytvořené příklady jsem si ověřila v rámci své praxe. Tři ze zmíněných pěti příkladů jsem již měla možnost využít během své učitelské praxe.

Vzhledem k tomu, že testovaní žáci byli tímto netradičním typem úloh nadšeni, věřím, že i v budoucnu budu metodu Concept Cartoons zařazovat do výuky.

Seznam použité literatury a zdrojů

HEJNOVÁ, E. (2014).*Úlohy s bublinou aneb jak lze rozvíjet myšlení a učení žáků.* In 19. ročník veletrhu nápadů učitelů fyziky s. 50-54.

HENDL, J. (2005). *Kvalitativní výzkum: základní metody a aplikace.* Praha: Portál. ISBN 80-7367-040-2.

NAYLOR, S. KEOGH, B. (2013). *Concept Cartoons: What Have We Learnt?* Journal of Turkish Science Education. roč. 10, č. 1, s. 3–11. ISSN 1304-6020.

ODVÁRKO, O. KADLEČEK J. (1998a). *Matematika (1) pro 6. ročník základní školy.*dot.1.vyd. Praha:Prometheus. ISBN 80-7196-066-7.

ODVÁRKO, O. KADLEČEK J. (1998b). *Matematika (1) pro 7. ročník základní školy.* Praha:Prometheus. ISBN 80-7196-111-6.

ODVÁRKO, O. KADLEČEK J. (1998c). *Matematika (2) pro 7. ročník základní školy.* Praha:Prometheus. ISBN 80-7196-126-4.

Kabapinar, F. (2005).*Effectiveness of Teaching via Concept Cartoons from the Point of View of Constructivist Approach.* Educational Sciences: Theory Practice, 5.

SAMKOVÁ, L. (2020)*Metoda Concept Cartoons.* České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. ISBN 978-80-7394-798-9.

SAMKOVÁ, L. (2019). *Polyvalentní úlohy v matematice.* Učitel matematiky, 27(4), s. 244-251.

SAMKOVÁ, L. (2018). *Uplatnění otevřeného přístupu k matematice v přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ* – empirická studie v kontextu badatelsky orientovaného kurzu. Studia Paedagogica, 23(3), s. 49-60.

SAMKOVÁ, L. (2015).*Concept Cartoons a jejich interaktivní možnosti.* Sborník 7. konference Užití počítačů ve výuce matematiky, s. 214-218.

TICHÁ, M. (1984). *M4 - Sbírka úloh.* Praha: Jednota čs. matematiků a fyziků.

van den BERG, E. KRUIT, P. (2017). *Investigating with Concept Cartoons: Practical suggestions for using concept cartoons to start student investigations in elementary school and beyond.* Scientia in educatione, 8.

VONDROVÁ, N. (2020). *Příčiny používání povrchových strategií řešení slovních úloh a jak jim předcházet.* Učitel matematiky, 28, s. 66-93.

VONDROVÁ, N. (2019). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice.* Praha: Univerzita Kalova, Pedagogická fakulta. ISBN: 978-80-7603-109-8.

Seznam obrázků

Seznam tabulek