

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Přírodovědecká fakulta
Katedra algebry a geometrie



Mgr. Jana Kráčmarová

SBÍRKA ÚLOH Z DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE PRO NADANÉ

Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce:
Prof. RNDr. Josef Molnár, CSc.

Olomouc 2020

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vytvořila samostatně

za odborného vedení Prof. RNDr. Josefa Molnára, CSc.

a že jsem v seznamu literatury uvedla všechny zdroje, použité při zpracování práce.

V Olomouci, 1. června 2020

Mgr. Jana Kráčmarová

Abstrakt:

Předmětem této diplomové práce je sbírka úloh a učebního materiálu z deskriptivní geometrie pro nadané studenty středních škol. V teoretické části jsou vysvětlena vybraná témata z deskriptivní geometrie: platonská tělesa, archimedovská tělesa, deltatopy, grupy zákrytových pohybů platonských těles. Praktickou část tvoří sbírka úloh konstrukce řezů šesti různých mnohostěnů. Každá z nich je vyvedena ve čtyřech projekcích: v kótovaném promítání, v Mongeově projekci, v axonometrii a ve volném rovnoběžném promítání. V závěru jsou vypracována řešení všech příkladů. Náročnost úloh je vyšší, než je běžné na střední škole, zejména proto, že pracují s komplikovanějšími tělesy.

Klíčová slova:

deskriptivní geometrie, řezy těles, platonská tělesa, archimedovská tělesa, zákrytové pohyby, úlohy.

Title: Exercises in Descriptive Geometry for Talented Students

Abstract:

Subject of this diploma thesis is collection of theory and construction exercises in descriptive geometry for talented students of secondary schools. In the first part of the thesis selected topics are explained: Platonic solids, Archimedean solids, deltahedra and symmetry groups of platonic solids. The second part of the thesis is collection of exercises in construction of cross-section of six different polyhedrons. Each cross-section is realized in four projections: dimensioned projection, axonometry, Monge projection and isometric projection. Finally, solutions of all exercises are presented and explained. Presented topics and construction exercises are more difficult than is usual standard on secondary and grammar schools, because these exercises are based on more complicated solids.

Key words:

descriptive geometry, cross-sections, Platonic solids, Archimedean solids, symmetry groups, exercises.

Děkuji vedoucímu své diplomové práce, Prof. RNDr. Josefu Molnárovi, CSc.,
za cenné rady, připomínky a metodické vedení práce.

Děkuji svému manželovi a dětem za trpělivost a podporu během celého studia.

Obsah

I. Úvod	8
II. Nadání a podpora nadaných v deskriptivní geometrii.....	9
III. Stav literatury.....	12
IV. Sběrka úloh	14
Sběrka úloh z deskriptivní geometrie (nejen) pro nadané	16
Předmluva	16
1 Platonská tělesa	17
1.1 Charakteristické rysy platonských těles	21
1.2 Přirozený výskyt platonských těles	23
1.3 Úlohy k platonským tělesům	27
Úloha A: Počet rovin souměrnosti platonských těles	27
Úloha B: Rozpad platonských těles	27
2 Grupy zákrytových pohybů	28
2.1 Grupy zákrytových pohybů platonských těles	29
2.1.1 Prvky grupy zákrytových pohybů osmistěnu	29
2.2 Úloha ke grupám zákrytových pohybů platonských těles	38
Úloha C: Prvky grupy zákrytových pohybů platonských těles.....	38
3 Archimedovská tělesa	39
3.1 Charakteristické rysy archimedovských těles	39
3.2 Výskyt a uplatnění archimedovských těles	43
3.3 Úlohy k archimedovským tělesům	44
Úloha D: Řez osekane krychle rovinou.....	44
4 Deltatopy	45
4.1 Úlohy k deltatopům	46
Úloha E: Řez pravidelného osmistěnu rovinou	46
5 Hranoly a antihranoly	47

5.1	Úlohy k hranolům a antihranolům	48
	Úloha F: Řez antihranolu rovinou	48
	Úloha G: Dva řezy kosého pětibokého hranolu	48
6	Řezy těles.....	49
6.1	Zadání úloh ke konstrukci řezů těles	51
6.1.1	Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu	52
6.1.1.1	Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu v kótovaném promítání.....	52
6.1.1.2	Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu v Mongeově promítání.....	53
6.1.1.3	Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu v axonometrii	54
6.1.1.4	Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu ve volném rovnoběžném promítání	55
6.1.2	Dva řezy kosého pětibokého hranolu	56
6.1.2.1	Dva řezy kosého pětibokého hranolu v kótovaném promítání	56
6.1.2.2	Dva řezy kosého pětibokého hranolu v Mongeově promítání.....	58
6.1.2.3	Dva řezy kosého pětibokého hranolu v axonometrii	60
6.1.2.4	Dva řezy kosého pětibokého hranolu ve volném rovnoběžném promítání.....	62
6.1.3	Řez pravidelného osmistěnu.....	64
6.1.3.1	Řez pravidelného osmistěnu v kótovaném promítání	64
6.1.3.2	Řez pravidelného osmistěnu v Mongeově promítání.....	65
6.1.3.3	Řez pravidelného osmistěnu v axonometrii	66
6.1.3.4	Řez pravidelného osmistěnu ve volném rovnoběžném promítání ..	67
6.1.4	Řez komolé krychle.....	68
6.1.4.1	Řez komolé krychle v kótovaném promítání.....	68
6.1.4.2	Řez komolé krychle v Mongeově promítání.....	69
6.1.4.3	Řez komolé krychle v axonometrii.....	70
6.1.4.4	Řez komolé krychle ve volném rovnoběžném promítání	71
6.1.5	Řez antihranolu.....	72
6.1.5.1	Řez antihranolu v kótovaném promítání	72
6.1.5.2	Řez antihranolu v Mongeově promítání.....	73
6.1.5.3	Řez antihranolu v axonometrii	74
6.1.5.4	Řez antihranolu ve volném rovnoběžném promítání	75
6.1.6	Řez sjednocení těles.....	76

6.1.6.1	Řez sjednocení těles v kótovaném promítání.....	76
6.1.6.2	Řez sjednocení těles v Mongeově promítání.....	77
6.1.6.3	Řez sjednocení těles v axonometrii.....	78
6.1.6.4	Řez sjednocení těles ve volném rovnoběžném promítání	79
7	Řešení úloh	80
7.1	Řešení nekonstrukčních úloh.....	80
	Řešení úlohy A: Počet rovin souměrnosti platonských těles.....	80
	Řešení úlohy B: Rozpad platonských těles.....	80
	Řešení úlohy C: Grupy zákrytových pohybů platonských těles	80
	Řešení úlohy C(1): Grupa zákrytových pohybů čtyřstěnu.....	80
	Řešení úlohy C(2): Grupa zákrytových pohybů krychle	85
	Řešení úlohy C(3): Grupa zákrytových pohybů dvanáctistěnu	92
	Řešení úlohy C(4): Grupa zákrytových pohybů dvacetistěnu	99
7.2	Řešení konstrukčních úloh.....	105
7.2.1	Řešení: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu	105
7.2.1.1	Řešení: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu v kótovaném promítání	105
7.2.1.2	Řešení: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu v Mongeově promítání.....	107
7.2.1.3	Řešení: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu v axonometrii	108
7.2.1.4	Řešení: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu ve volném rovnoběžném promítání	110
7.2.2	Řešení: Dva řezy kosého pětibokého hranolu.....	111
7.2.2.1	Řešení: Dva řezy kosého pětibokého hranolu v kótovaném promítání.....	111
7.2.2.2	Řešení: Dva řezy kosého pětibokého hranolu v Mongeově promítání.....	114
7.2.2.3	Řešení: Dva řezy kosého pětibokého hranolu v axonometrii.....	117
7.2.2.4	Řešení: Dva řezy kosého pětibokého hranolu ve volném rovnoběžném promítání	119
7.2.3	Řešení: Řez pravidelného osmistěnu.....	123
7.2.3.1	Řešení: Řez pravidelného osmistěnu v kótovaném promítání.....	123
7.2.3.2	Řešení: Řez pravidelného osmistěnu v Mongeově promítání	124

7.2.3.3	Řešení: Řez pravidelného osmistěnu v axonometrii.....	126
7.2.3.4	Řešení: Řez pravidelného osmistěnu ve volném rovnoběžném promítání.....	127
7.2.4	Řešení: Řez komolé krychle	129
7.2.4.1	Řešení: Řez komolé krychle v kótovaném promítání	129
7.2.4.2	Řešení: Řez komolé krychle v Mongeově promítání	131
7.2.4.3	Řešení: Řez komolé krychle v axonometrii.....	132
7.2.4.4	Řešení: Řez komolé krychle ve volném rovnoběžném promítání .	134
7.2.5	Řešení: Řez antihranolu.....	135
7.2.5.1	Řešení: Řez antihranolu v kótovaném promítání.....	135
7.2.5.2	Řešení: Řez antihranolu v Mongeově promítání	137
7.2.5.3	Řešení: Řez antihranolu v axonometrii.....	139
7.2.5.4	Řešení: Řez antihranolu ve volném rovnoběžném promítání	140
7.2.6	Řešení: Řez sjednocení těles	142
7.2.6.1	Řešení: Řez sjednocení těles v kótovaném promítání	142
7.2.6.2	Řešení: Řez sjednocení těles v Mongeově promítání	143
7.2.6.3	Řešení: Řez sjednocení těles v axonometrii.....	145
7.2.6.4	Řešení: Řez sjednocení těles ve volném rovnoběžném promítání	146
	Seznam užitých symbolů a značek.....	149
	V. Závěr	151
	VI. Seznam použité literatury	152
	Internetové zdroje využitě v obrázcích	155

I. Úvod

Již od chvíle, kdy dítě udrží v ruce tužku, pokouší se zobrazit předměty a osoby ze svého okolí a ze své fantazie. S přibývajícím věkem se schopnost výtvarného vyjádření zdokonaluje a roste snaha o co nejuvěrnější zachycení zobrazovaného útvaru. To je jen jeden z projevů toho, že potřeba zachytit objekty na papír je člověku vrozená. Deskriptivní geometrie je vrcholnou disciplínou tohoto procesu, jelikož představuje přesné znázornění prostorového útvaru a v konečném důsledku zásadním způsobem ovlivňuje náš každodenní život. Její praktické využití je nejvíce zřetelné zejména v technických oborech, jako strojírenství a stavebnictví, kde se stává jazykem technické dokumentace a tak umožňuje realizaci myšlenky. Na pomezí techniky a umění pak nacházíme architekturu, která rovněž využívá deskriptivní geometrii jako způsob zachycení inspirace a přenosu informací od tvůrce k realizátorovi. Ve výtvarném umění můžeme díky deskriptivní geometrii lépe pochopit vztahy v uměleckém díle, např. díky studiu perspektivy, zlatého řezu atp. Rovněž přírodní vědy – biologie, chemie, fyzika – využívají poznatků deskriptivní geometrie při studiu stavby těl organismů, struktury molekul, konstrukci a vlastností těles atd. V neposlední řadě, studium deskriptivní geometrie pomáhá rozvíjet prostorovou představivost, logické myšlení, chápání mezioborových vztahů, přesnost a pečlivost.

Obsahem této práce je soubor úloh z deskriptivní geometrie pro nadané studenty středních škol. Téma nadaných žáků a studentů se právem stává stále častěji předmětem pedagogických a psychologických studií a výzkumů. Přestože je již i u nás dostupné množství literatury, věnující se dané problematice a podpora nadaných je formulována ve všech programových prohlášeních vlády, stále chybí národní strategie péče o nadané. Hlavní zodpovědnost za podporu a rozvoj nadaných studentů nese škola, školská poradenská zařízení a mimoškolní aktivity.¹ Školy mohou pro nadané žáky vytvářet vzdělávací skupiny, případně ad hoc vytvářet

¹ Viz stránky MŠMT, Koncepce podpory rozvoje nadání a péče o nadané na období let 2014–2020, str. 4.: „V současnosti je péče nadaným dětem, žákům a studentům poskytována především v rámci

- formálního vzdělávání na školách;
- služeb školských poradenských zařízení;
- zájmového vzdělávání;
- aktivit různých subjektů cíleně zaměřených na nadané (např. vysokých škol, Akademie věd ČR, NNO, některých firem a zahraničních subjektů).“ (Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy 2014)

individuální vzdělávací plány. Identifikace a podpora talentů v rámci předmětu bude vždy závislá především na aktivním přístupu pedagoga, jeho ochotě a schopnostech vypracovat individuální materiál pro nadané studenty. Pedagog, který se snaží individuálně podchytit potenciál a podpořit vývoj nadaných studentů, často bojuje s nedostatkem materiálu (učebnic, cvičebnic) a absencí ucelenějšího plánu a koncepce pro hlubší vzdělávání. Není ambicí této práce přinášet nebo suplovat chybějící metodiku či vzdělávací plán pro nadané studenty. Mým cílem bylo vytvořit sbírku úloh a učiva, která bude použitelná přímo ve výuce tak, aby podpořila a umožnila rozvinout potenciál nadaných studentů a poskytla jim motivaci a inspiraci přiměřenou jejich schopnostem. Vybraným tématům deskriptivní geometrie se věnuji jak po stránce teoretické (definice a vlastnosti mnohostěnů, jejich výskyt a využití), tak v praktické rovině formou konstrukčních úloh. Mojí snahou bylo připravit látku takovým způsobem, aby byla sbírka použitelná při tvorbě individuálních osnov pro konkrétní nadané studenty nebo pro specializované semináře v maturitních ročnících, či v prvních ročnících vysokých škol technického směru.

II. Nadání a podpora nadaných v deskriptivní geometrii

Ve své práci užívám pojem „nadaný“, považuji proto za vhodné krátce se vyjádřit k definici tohoto pojmu a ujasnit používanou terminologii. Školský zákon pojem „nadání“ ani „mimořádné nadání“ nespécifikuje,² vyhláška Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy č. 27 k tomuto zákonu je již sdílnější a říká, že za nadaného se považuje *„především žák, který při adekvátní podpoře vykazuje ve srovnání s vrstevníky vysokou úroveň v jedné či více oblastech rozumových schopností, v pohybových, manuálních, uměleckých nebo sociálních dovednostech.“*³ což je

² Zákon pouze v § 17 konstatuje, že *„(1) Školy a školská zařízení vytvářejí podmínky pro rozvoj nadání dětí, žáků a studentů. (2) K rozvoji nadání dětí, žáků a studentů lze uskutečňovat rozšířenou výuku některých předmětů nebo skupin předmětů [...]. (3) Ředitel školy může mimořádně nadaného nezletilého žáka na žádost jeho zákonného zástupce [...] přeřadit do vyššího ročníku bez absolvování předchozího ročníku.“* Viz Zákon 561/2004 Sb., Zákon o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání, §17, ve znění platném ke dni 1. 6. 2020.

³ Vyhláška MŠMT č. 27/2016 Sb., Vyhláška o vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami a žáků nadaných, §27, ve znění platném ke dni 1. 6. 2020: Za mimořádně nadaného pak vyhláška

značně vágní formulace, volně navazující na tzv. Marlandovu definici, o které bude řeč níže. V odborné literatuře lze najít mnoho vymezení a definic nadání, většina z nich ale není o mnoho konkrétnějších. U některých autorů pojem „nadání“ splývá s pojmem „talent“ jako ekvivalent, jiní tyto pojmy rozlišují podle různých kritérií. Neurčitost a vágnost těchto vymezení lze vysvětlit tím, že snad všechny odborné definice nadání se shodují na neschopnosti stanovit hranici, kdy už je jedinec nadaný a kdy ještě ne. Různé definice se tak odlišují především v přístupu k pojmu nadání – některé vycházejí z inteligenčního kvocientu, další z výkonu jedince, jiné pracují se statistickým rozšířením specifické mentální schopnosti v rámci populace atd. Zřejmě nejcitovanější komplexní definici zformuloval americký pedagog Sidney Percy Marland Jr. (1914–1992) v tzv. Marlandově zprávě z r. 1971 o stavu vzdělávací péče o nadané v USA: *„Nadané a talentované děti jsou ty, které jsou identifikovány kvalifikovanou osobou a které jsou vzhledem k výjimečnému potenciálu schopné vysokých výkonů. Tyto děti potřebují k realizaci svého přínosu pro společnost vzdělávací program a servis, který není běžně poskytován regulárními školami. [...]“* (Jurášková 2006, 14).⁴ Pro potřeby této diplomové práce není nutné pojem „nadání“ detailně definovat a vymezit jej přesně vůči pojmům „talent“, případně „mimořádné nadání“. Lze si dokonce dovolit „přepych“ jejich použití jako synonym. Klíčovým bodem Marlandovy obecně uznávané definice pro nás je konstatování (podobně jako ve vyhlášce MŠMT č. 27 a řadě dalších), že aby nadané děti mohly být prospěšné sobě a společnosti, potřebují diferencované vzdělávací programy a služby. Právě pro

považuje takového žáka, „jehož rozložení schopností dosahuje mimořádné úrovně při vysoké tvořivosti v celém okruhu činností nebo v jednotlivých oblastech rozumových schopností, v pohybových, manuálních, uměleckých nebo sociálních dovednostech.“

⁴ V plném znění má Marlandova definice pokračování, ze kterého vychází i výše zmíněná formulace z vyhlášky č. 27 MŠMT: *„Děti, schopné vysokého výkonu jsou ty, které vykazují úspěch nebo potencionální schopnosti v některých z následujících oblastí: 1. všeobecná intelektová schopnost; 2. specifické akademické schopnosti; 3. tvořivé nebo produktivní myšlení; 4. vůdčí schopnosti; 5. umělecké schopnosti; 6. psychomotorické schopnosti.“* (Jurášková 2006, 14). Jak správně poznamenává Jana Marie Havigerová, je velmi důležité, že tato definice zmiňuje „potenciál“: *„Toto slovo proměnilo vnímání nadaných prakticky po celém světě a přesunulo většinový zájem o nadané směrem od géníů a úspěšných jedinců [...] k dětem, jejichž potenciál se v dané chvíli vůbec nemusí projevat navenek, míněno především v tradičně chápaném kontextu školní výkonnosti, a přesto jsou hodnoceny jako „nadané“.“* (Havigerová 2014, 13).

pomoc při přípravě nadstandardního vzdělání, případně individuálního vzdělávacího programu nadaných studentů je tato práce určena.

Jako základní možnosti podněcování a podpory vysoce nadaných žáků se při výuce uplatňují dvě základní strategie uspořádání obsahu vyučování:

- a) urychlování (akcelerace): lze chápat jako urychlení učebního obsahu, redukce času potřebného k osvojení učiva proti běžným osnovám;
- b) obohacování učiva: rozšíření, prohloubení učiva nad rámec běžných osnov.

Zatímco urychlování je spíše kvantitativní přístup, obohacování je považováno za kvalitativní strategii (přestože pochopitelně předpokládá rychlé zpracování – čili akceleraci – učiva běžných učebních osnov, aby bylo možné využít zbylý čas pro obohacování). Vycházejme z předpokladu, že pedagog předmětu deskriptivní geometrie se musí věnovat celé skupině studentů (třídě), z nichž jen omezené množství jedinců představuje mimořádné talenty, vyžadující individuální přístup. Pro potřeby rozvoje nadaných studentů v rámci výuky, se technika obohacování učiva v rámci časového rozvrhu standardních učebních osnov (tzn. bez zkracování celkového časového rámce osnov) jeví jako nejlépe proveditelný přístup.

Podpora nadaného studenta (studentů) v rámci skupiny by tedy měla být založena na individuálním obohacování látky, probírané v celé skupině, kdy časový rámec zůstává společný pro celou skupinu, ale nadaní studenti mají možnost individuálně prohloubit probírané učivo, resp. procvičit, zdokonalit svoje schopnosti na náročnějších úlohách. Obohacování učiva v rámci předmětu deskriptivní geometrie by mělo v sobě rovnoměrně zahrnovat následující prvky:

- a) Procvičení a prohloubení konstrukčních schopností a prostorového vnímání.
- b) Podpora vlastní tvorby v zájmu rozvíjení kreativity a inspirace – zpravidla ve spojení s bodem a) výše.
- c) Obohacení a prohloubení teoretických znalostí s cílem umět formulovat a zdůvodnit konstrukční postupy.
- d) Propojení těchto poznatků s jinými obory (např. matematika, fyzika, chemie, biologie) a znalosti jejich uplatnění v praxi (umění, stavebnictví, konstrukce).

III. Stav literatury

Literatura, která se zabývá pedagogikou nadaných studentů, je poměrně bohatá a různorodá. Je náročné – a v kontextu této práce i zbytečné – snažit se ji v dostatečné míře obsáhnout a zhodnotit. Jelikož téma pedagogiky nadaných není hlavním předmětem této práce (tím je vypracování sbírky úloh z deskriptivní geometrie), vymezila jsem si okruh pedagogické literatury na vybrané zdroje, spíše propedeutického charakteru, jako např. *Základy pedagogiky nadaných*, slovenské pedagožky PhDr. Jany Juráškové, PhD.,⁵ spis *Nadání a nadaní*, z pera doc. PhDr. Lenky Hříbkové, CSc.,⁶ či publikaci *Nadání žáci a jejich učitelé v českých školách: zaměřeno na přírodovědu a matematiku*, autorského kolektivu pod vedením Doc. PaedDr. Jany Škrabánkové, Ph.D. a Doc. RNDr. Josefa Trny, CSc.⁷

Hlavní náplní mé práce bylo vypracování sbírky náročnějších úloh z deskriptivní geometrie, zejména s ohledem na využití při výuce nadaných studentů gymnázií, středních škol technického směru a prvních ročníků technických oborů vysokých škol. Pro tento účel je nutná znalost rozsahu učiva, orientace v osnovách a vzdělávacím plánu předmětu deskriptivní geometrie pro gymnázia a střední školy. Deskriptivní geometrie není obor nijak nový a proto i obsah učebnic se převážně shoduje a rozdíly najdeme především v množství probíraných témat, formě a hloubce jejich zpracování. Není nutné v tomto místě podrobně rozepisovat obsah a didaktický přístup v jednotlivých učebnicích. Takové informace poskytuje např. Michaela Krsová ve své diplomové práci *Interaktivní učebnice deskriptivní geometrie*.⁸ Zevrubnou rešerši dostupného učebního materiálu jak v podobě tištěných učebnic, tak zejména učebních textů a webových stránek na internetu, se zaměřením na deskriptivní geometrii, poskytuje RNDr. Vlasta Moravcová, PhD. ve svém příspěvku *Deskriptivní geometrie na internetu*.⁹ V praxi pedagogové pochopitelně různé učebnice kombinují.

⁵ (Jurášková 2006).

⁶ (Hříbková 2009).

⁷ (Škrabánková 2013).

⁸ (Krsová 2011, 19–28).

⁹ (Moravcová 2011)

Bohatý zdroj materiálu dále poskytují diplomové a bakalářské práce, které se věnují vybraným tématům deskriptivní geometrie, uvedených i v mé sbírce: např. diplomová práce *Platonská a archimedovská tělesa a jejich vlastnosti ve výuce matematiky na středních školách* Evy Dohnalové¹⁰ a *Platonská tělesa v GeoGebře* Jana Doubravy¹¹ se zaměřují na platonská a archimedovská tělesa a popis jejich vlastností či způsob konstrukce v programu GeoGebra. Stejně tak i Radek Šmíd, který ovšem ve své bakalářské práci *Platonská tělesa*¹² pojímá danou problematiku z pozice stereometrie, nikoliv deskriptivní geometrie. Téma grupy, coby matematického pojmu, vysvětlují na platonských tělesech Lucie Gajďoková v bakalářské práci *Shodná zobrazení prostoru*¹³ a Lucie Horáková ve své bakalářské práci *Grupy symetrií*.¹⁴

Ještě početnější je skupina diplomových a bakalářských prací, které jsou koncipované – podobně jako moje práce – jako učebnice, či sbírky řešených úloh z vybraných okruhů. Z nich je mé práci nejbližší bakalářská práce *Řezy mnohostěnů* Žofie Borzíkové,¹⁵ která podrobně a velmi srozumitelně vysvětluje a znázorňuje základní principy konstrukcí řezů ve volném rovnoběžném promítání, včetně některých platonských a archimedovských těles. Podobně lze doporučit výše zmíněnou práci Michaely Krsové (Krsová 2011), která poskytuje výborný materiál pro výuku (či samostudium) základů Mongeovy projekce. Pokročilejší konstrukce v Mongeově promítání nabízí Blanka Morávková v diplomové práci *Úlohy s prostorovými tělesy v Mongeově zobrazovací metodě*.¹⁶ Ta se kromě konstrukcí základních hranatých a oblých těles zabývá i jejich rovinnými řezy a průniky přímky s tělesem. To přináší i diplomová práce *Cvičebnice Mongeova promítání* Nikoly

¹⁰ (Dohnalová 2016)

¹¹ (Doubrava 2019)

¹² (Šmíd 2012)

¹³ (Gajďoková 2007)

¹⁴ (Horáková 2006)

¹⁵ (Borzíková 2017)

¹⁶ (Morávková 2006)

Pajerové,¹⁷ která se navíc věnuje i průnikům těles. Rozsáhlou sbírku řešených příkladů v kótovaném promítání představuje bakalářská práce Marie Portešové, *Řešené příklady v kótovaném promítání*,¹⁸ která se v závěrečných úlohách zabývá i řezy oblých těles. Na rozdíl od těchto prací, nabízím ve své práci konstrukce řezů komplikovanějších mnohostěnů ne jen v jedné, ale ve čtyřech projekcích. Podobným způsobem – ve více projekcích, konkrétně v Mongeově promítání, kosoúhlém, kótovaném promítání a pravouhlé axonometrii, předkládá řešené konstrukce jehlanů, hranolů i Jan Helm v diplomové práci *Využití internetu při výuce mnohostěnů na střední škole*.¹⁹ Ten se však zaměřuje na průniky těchto mnohostěnů a řezy těles se nezabývá.

Výše uvedené práce tedy představují kvalitní materiál pro výuku a poskytují i dostatečné množství příkladů a úloh k řešení a procvičování. Žádná z nich si ovšem neklade za cíl spojit výše zmíněná témata v ucelený materiál, který by sice v teoretické a praktické rovině vycházel z osnov předmětu deskriptivní geometrie na středních školách, přitom však poskytoval informace nad jejich rámec v takovém rozsahu a hloubce, aby byl vhodný pro rozvoj nadaných studentů. Návrh na alespoň částečné zaplnění této skuliny v učebních materiálech představuje tato práce.

IV. Sbíрка úloh

Rozsah sbírky pokrývá pouze vybraný úsek učiva deskriptivní geometrie, totiž řezy hranatých těles. Toto téma jsem vybrala z několika důvodů:

- a) Precizní zvládnutí učiva řezů těles umožní rychlé pochopení další látky, např. konstrukce průsečíků přímek s rovinou či tvorba sítí těles.
- b) Většina dostupné literatury a sbírek úloh se zabývá řezy běžných těles, jako jsou hranol, jehlan, válec, kužel – tedy látkou, běžně probíranou v rámci osnov předmětu deskriptivní geometrie na gymnáziích a středních školách.

¹⁷ (Pajerová 2016)

¹⁸ (Portešová 2009)

¹⁹ (Helm 2011)

Moje sbírka nabízí úlohy s tvarově složitějšími tělesy, které jsou nad rámec běžných osnov předmětu.

- c) Zpracování řezů těles vyžaduje komplexní pochopení učiva deskriptivní geometrie. Navíc umožňuje propojení se stereometrií. Propojování disciplín a pochopení mezioborových vztahů vnímám jako velmi důležitý prvek rozvíjení nadání a prohlubování znalostí.
- d) Hranatá tělesa jsem zvolila záměrně proto, že na rozdíl od oblých těles, která se na středních školách obvykle konstruují pouze s podstavou v jedné z průměten, s hranatými tělesy umí studenti pracovat i s podstavou v obecné rovině.

Sbírka úloh z deskriptivní geometrie (nejen) pro nadané

Předmluva

Milí nadšenci pro deskriptivní geometrii,

sbírka, kterou držíte v ruce, je určena pro nadané a zvědavé studenty, aby jim poskytla výzvy pro jejich další rozvoj v deskriptivní geometrii. Může však být užitečná všem, kteří mají geometrii rádi a chtěli by se v ní procvičit či dovzdělat. Sbírka je rozdělena do dvou hlavních částí – teoretické a praktické, které se vzájemně doplňují a částečně prolínají.

Úvodní kapitoly, zaměřené na teoretické znalosti z oblasti deskriptivní geometrie, se věnují vybraným typům mnohostěnů: platonská tělesa, archimedovská tělesa, deltatopy. V návaznosti na platonská tělesa je začleněna i problematika grup zákrytových pohybů. Součástí tohoto oddílu jsou i některé nekonstrukční úlohy, jejichž předmětem je symetrie platonských těles a grupy jejich zákrytových pohybů.

Těžištěm práce je pak část praktická, kterou tvoří sbírka úloh konstrukce řezů šesti různých mnohostěnů. Každá z těchto šesti úloh je vyvedena ve čtyřech projekcích: v kótovaném promítání, v Mongeově projekci, v axonometrii a ve volném rovnoběžném promítání. S poslední uvedenou projekcí se sice studenti středních škol v deskriptivní geometrii setkávají jen okrajově, ale její nespornou výhodou je propojení s učivem stereometrie v matematice a především velká názornost – čili vytvoření jasné představy vedení řezu tělesem. V závěrečné kapitole jsou k dispozici řešení všech příkladů.

Náročnost těchto úloh je vyšší, než obtížnost úloh obvykle řešených v předmětu deskriptivní geometrie na střední škole, zejména proto, že jsou zaměřeny na práci s komplikovanějšími tělesy, a jsou proto vhodné pro procvičení již zvládnutých konstrukčních technik.

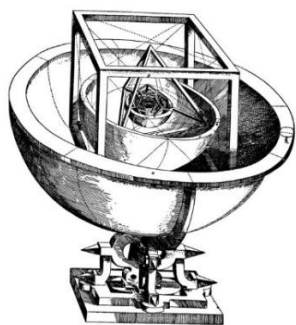
Pokud tato sbírka pomůže rozvinout nadání a probudit zvědavost u alespoň jednoho studenta, pak moje práce měla smysl.

Autorka

1 Platonská tělesa

Platónské těleso je pravidelný konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou vzájemně shodné pravidelné rovinné konvexní n-úhelníky a v jehož všech vrcholech se stýká stejný počet hran. Takových těles je právě pět: čtyřstěn (tetraedr), krychle (hexaedr), pravidelný osmistěn (oktaedr), pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr) a pravidelný dvacetistěn (ikosaedr).

Konstrukcí pravidelných mnohostěnů se filozofové zabývali již od starověku. Ve starém Řecku hrála důležitou roli v úvahách myslitelů o složení světa z malých částic. Označení „platonská“ je odvozeno od řeckého filozofa Platona (427–347 př. n. l.), který je mimo jiné považoval za představitele pěti živlů.²⁰ Studium platónských těles se zabýval rovněž Euklides (323–285 př. n. l.), který pro každé platónské těleso našel poměr průměru opsané kulové plochy s délkou strany a stanovil jejich počet. V pozdější době je studoval např. Johannes Kepler (1571–1630), který se pokusil vložit pět platónských těles mezi sféry šesti planet sluneční soustavy, aby vysvětlil vztah jejich vzdáleností.²¹ Tato teorie byla později vyvrácena zjištěním, že vzdálenost kulových ploch neodpovídá skutečným vzdálenostem planet od Slunce, nicméně zřetelně ukazuje Keplerovo přesvědčení, že svět byl stvořen podle přesného geometrického plánu – jeho pochopení Kepler vnímal jako svůj vědecký úkol.



Obr. 1. 1: Keplerův model vesmíru, tzv. Keplerův pohár

²⁰ Podle Platona symbolizují jednotlivé mnohostěny tyto živly: země (hexaedr), oheň (tetraedr), vzduch (oktaedr), voda (ikosaedr), vesmír (dodekaedr).

²¹ Kulové ploše dráhy Merkuru Kepler opsal pravidelný osmistěn, který byl zároveň vepsaným tělesem planetární sféry Venuše. Kulové ploše dráhy Venuše opsal pravidelný dvacetistěn, jenž je pak tělesem vepsaným sféře dráhy Země. Kulová plocha dráhy Země má opsaný pravidelný dvanáctistěn, který je zároveň vepsaným sféře Jupiteru. Analogicky sféře dráhy Jupiteru je pak opsána krychle. Další planety v Keplerově době nebyly známy.

Pro rychlou a přehlednou definici mnohostěnu se běžně používá tzv. Schläfliho symbol, což je dvojice čísel oddělených čárkou v závorce, kdy první hodnota uvádí počet vrcholů každé stěny a druhá pak počet hran procházejících každým vrcholem.²²

Tak jako v každém konvexním mnohostěnu platí i ve všech platonských tělesech tzv. Eulerův vztah: $s + v = h + 2$, přičemž s značí počet stěn, v počet vrcholů a h počet hran daného konvexního mnohostěnu. Eulerovu větu je možné dokázat pomocí tzv. *Descartovy věty*, která říká, že: „pro každý konvexní mnohostěn platí

$$\sigma = (v - 2) \cdot 2\pi,$$

kde σ je součet všech vnitřních úhlů všech stěn mnohostěnu a v je počet vrcholů mnohostěnu. Za předpokladu, že daný mnohostěn obsahuje s_3 trojúhelníků, s_4 čtyřúhelníků atd. až s_k k -úhelníků, kde $k \geq 3$, pak platí

$$s = s_3 + s_4 + \dots + s_k = \sum_{n=3}^k s_n \quad (1)$$

Počet hran daného mnohostěnu je

$$h = \frac{1}{2}(3s_3 + 4s_4 + \dots + k \cdot s_k) = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^k n \cdot s_n \quad (2)$$

Nechť má daný mnohostěn v_3 vrcholů, z nichž vycházejí tři hrany, v_4 vrcholů, z nichž vycházejí čtyři hrany atd. až v_r vrcholů, z nichž vychází r hran, kde $r \geq 3$. Pak pro počet vrcholů a hran mnohostěnu platí

$$v = v_3 + v_4 + \dots + v_r$$

$$h = \frac{1}{2}(3v_3 + 4v_4 + \dots + r \cdot v_r)$$

Vypočítejme součet všech vnitřních úhlů všech stěn mnohostěnu. Dostaneme

$$\sigma = s_3 \cdot \pi + s_4 \cdot 2\pi + \dots + s_k (k - 2) \cdot \pi = \pi \sum_{n=3}^k (n - 2)s_n$$

Z rovnic (1) a (2) vyplývá

²² Schläfliho symboly pro pravidelné mnohostěny: pravidelný čtyřstěn (3, 3), pravidelný šestistěn (4, 3), pravidelný osmistěn (3, 4), pravidelný dvanáctistěn (5, 3), pravidelný dvacetistěn (3, 5).

$$2h - 2s = \sum_{n=3}^k n \cdot s_n - \sum_{n=3}^k 2 \cdot s_n = \sum_{n=3}^k (n - 2) \cdot s_n$$

Tento výraz dosadíme do výrazu pro σ a dostaneme

$$\sigma = \pi(2h - 2s) = 2\pi(h - s)$$

Porovnáme-li nyní tento vztah s Descartovou větou, dojdeme k Eulerově rovnici

$$(v - 2) \cdot 2\pi = (h - s) \cdot 2\pi$$

$$s + v = h + 2 \quad \text{“ (Helm 2011, 7) }^{23}$$

Již Platon byl přesvědčen, že pravidelných konvexních mnohostěnů je právě pět. Euklides to dokazoval definováním pravidelných mnohoúhelníků a jejich maximálního možného počtu pro vytvoření prostorového úhlu v pravidelném mnohostěnu. Další důkaz existence právě pěti platonských těles je možný pomocí Eulerovy věty:

„Předpokládejme existenci pravidelného konvexního mnohostěnu charakterizovaného Schläfliho symbolem $\{p, q\}$.

Každá stěna je tedy pravidelný p -úhelník, zároveň každá hrana náleží dvěma stěnám. Pro počet stěn a hran tedy platí vztah $\frac{ps}{2} = h$, po úpravě $s = \frac{2h}{p}$.

Také z každého vrcholu vede q hran a každá hrana spojuje dva vrcholy. Analogicky tedy platí $\frac{qv}{2} = h$, potažmo $v = \frac{2h}{q}$. Upravené vztahy dosadíme do Eulerovy věty:

$$\frac{2h}{q} + \frac{2h}{p} = 2 + h \quad \text{Na levé straně je stejný číselník, kterým obě strany rovnice vydělíme}$$

a dostaneme $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{h} + \frac{1}{2}$ a tuto rovnici řešíme jako diofantovskou s omezením

$p \geq 3$ a $q \geq 3$; připomeňme, že stěna je p -úhelník a q je počet stěn nebo hran u vrcholu, pro obě čísla je tedy minimum 3. Zároveň i počet hran je kladný, takže aby

rovnost mohla být splněna, musí platit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$, což nemůže být splněno, pokud

jsou $p > 3$ a zároveň $q > 3$. Alespoň jedno z čísel p, q tedy musí být rovno 3.

Nechť napřed $p = 3$, potom $\frac{1}{q} + \frac{1}{3} = \frac{1}{h} + \frac{1}{2}$ a po úpravě $\frac{1}{q} - \frac{1}{6} = \frac{1}{h}$.


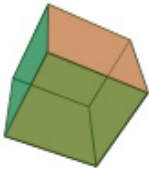



²³ Jan Helm zde odkazuje na publikaci Stanislava Horáka *Mnohostěny* (Horák, 1970). Pozn.: Eulerovu rovnici lze použít za předpokladu, že pracujeme s konvexním tělesem. Mezi tzv. Eulerovy mnohostěny, tedy tělesa, která splňují uvedenou rovnici, ale patří i některé nekonvexní mnohostěny.

Víme, že h je kladné, přípustné hodnoty q jsou tedy z množiny $\{3, 4, 5\}$. Stejného výsledku se nám dostane i při volbě $q = 3$, kde z rovnice $\frac{1}{p} - \frac{1}{6} = \frac{1}{h}$ dostáváme množinu $\{3, 4, 5\}$ jako množinu možných hodnot p .

Dvakrát jsme tedy získali tři možné kombinace, už na první pohled je ale vidět, že kombinace $p = 3$ a $q = 3$ se vyskytuje dvakrát. Omezili jsme tedy počet pravidelných těles na pět.“ (Šmíd 2012, 18–19)

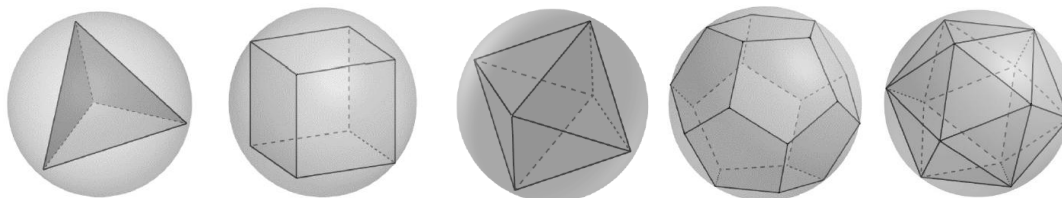
1.1 Charakteristické rysy platonských těles

Základní charakteristiky pěti platonských těles stručně shrnuje tabulka č. 1. 1:

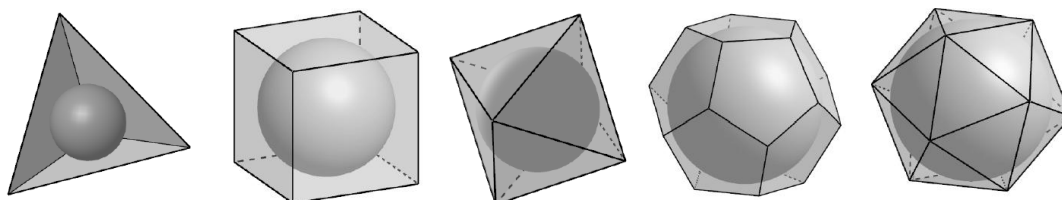
Název	Počet			Počet hran		
	stěn (s)	vrcholů (v)	hran (h)	jedné stěny (stupeň m)	v jednom vrcholu (valence n)	
Pravidelný čtyřstěn (tetraedr)	4	4	6	3	3	
Krychle (hexaedr)	6	8	12	4	3	
Pravidelný osmistěn (oktaedr)	8	6	12	3	4	
Pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr)	12	20	30	5	3	
Pravidelný dvacetistěn (ikosaedr)	20	12	30	3	5	

Tabulka č. 1. 1: Základní charakteristika pěti platonských těles.

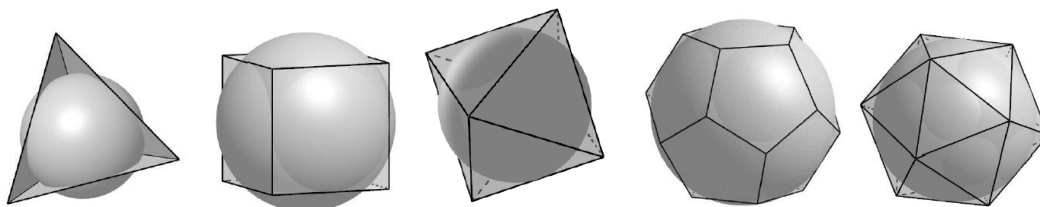
K charakteristickým vlastnostem platonských těles patří skutečnost, že každému z nich je možné vepsat a opsat kulovou plochu a sestrojít takovou kulovou plochu, která bude protínat středy všech jejích hran. Středem všech takových kulových ploch (opsaných, vepsaných a procházejících středy hran) je těžiště daného tělesa.



Obr. 1. 2: Kulové plochy opsané platonským tělesům.



Obr. 1. 3: Kulové plochy vepsané platonským tělesům.

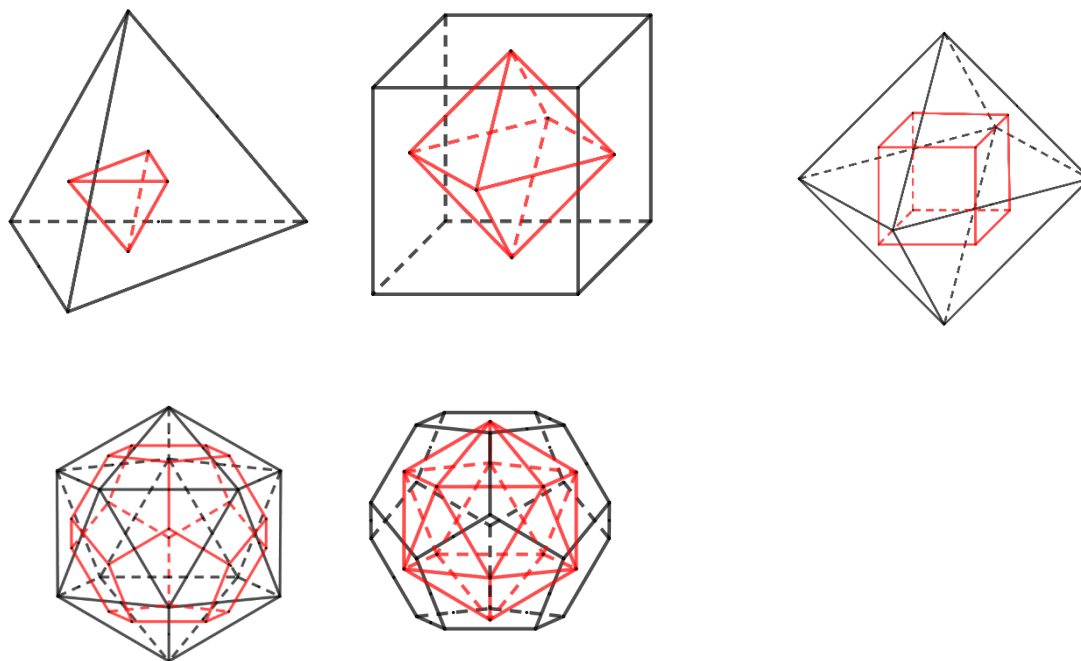


Obr. 1. 4: Kulové plochy procházející středy hran platonských těles.²⁴

Dalším specifickým rysem platonských těles je tzv. dualita. Dvě tělesa jsou duální, je-li možné jedno vepsat druhému. Což znamená, že počet stěn vnějšího tělesa je roven počtu vrcholů tělesa vnitřního. Obě duální tělesa mají stejný počet hran. Do každého z platonských těles lze zkonstruovat vepsané těleso, jehož vrcholy jsou středy stěn původního tělesa. Toto vepsané těleso bude vždy rovněž platonské. Budeme-li tento postup opakovat, tzn. vepíšeme-li vnitřnímu tělesu další těleso, vznikne opět původní vnější útvar, pouze menší. Krychli lze takto vepsat pravidelný osmistěn a naopak pravidelnému osmistěnu lze vepsat krychli. Pravidelný

²⁴ Obrázky kulových ploch převzaty z diplomové práce Jana Doubravy (Doubrava 2019).

dvanáctistěn je duální s pravidelným dvacetistěnem a pravidelný čtyřstěn je duální sám se sebou. U pravidelných – a tedy i platonských – těles mají duální tělesa inverzní Schläfliho symbol, např. pravidelný dvanáctistěn (5, 3) a pravidelný dvacetistěn (3, 5).



Obr. 1. 5: Duální platonská tělesa.

Jak uvidíme v kapitole o grupách zákrytových pohybů platonských těles, duální tělesa mají stejný počet prvků grupy zákrytových pohybů. Své duální těleso má každé eulerovské těleso, tzn. takové, které splňuje Eulerovu větu $v + s = h + 2$. Kulová plocha vepsaná vnějšímu tělesu je zároveň kulovou plochou opsanou duálnímu tělesu vnitřnímu.

1.2 Přirozený výskyt platonských těles

S platonskými tělesy je možné se běžně setkat v přírodě v různých formách. Zřejmě nejzřetelnější jsou tyto útvary v krystalech minerálů, např. krystal sfaleritu má tvar pravidelného čtyřstěnu, krystaly železa, soli kamenné, fluoritu či pyritu najdeme v přírodě ve tvaru krychle. Pravidelný osmistěn lze zase spatřit např. v krystalu magnetitu či kupritu. (Voráčková 2012, 100)



Krystal sfaleritu ZnS ve tvaru čtyřstěnu.



Krystal magnetitu Fe_3O_4 ve tvaru osmistěnu.



Zelený krystal fluoritu CaF_2 ve tvaru krychle.



Krystal kupritu Cu_2O ve tvaru osmistěnu.



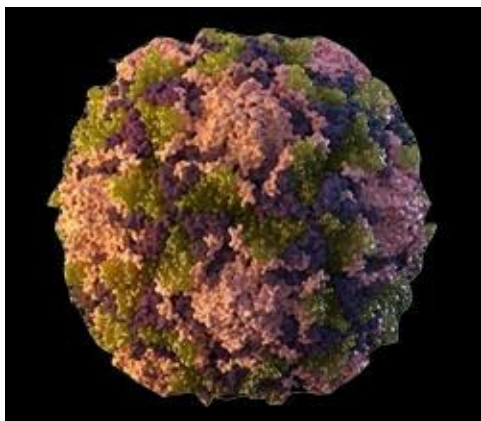
Krystal soli kamenné $NaCl$ ve tvaru krychle.

Obr. 1. 6: Krystaly minerálů ve tvarech některých platonských těles.

Další výskyt lze najít i u rostlin a organismů: zralá plodnice houby mřížovky červené dorůstá do tvaru dvanáctistěnu. U živočichů lze platonská tělesa najít například u mřížovců.²⁵ Konvexní a tedy energetický úsporný tvar platonských těles je výhodný

²⁵ Mřížovci (Radiozoa) jsou mořští jednobuněční živočichové, kteří vytvářejí své buňce podpůrné mřížovité struktury z oxidu křemičitého. Tyto jejich křemičité schránky se usazují na dně moří v podobě tzv. radiolariového bahna a mohou se vyskytovat i v planktonu.

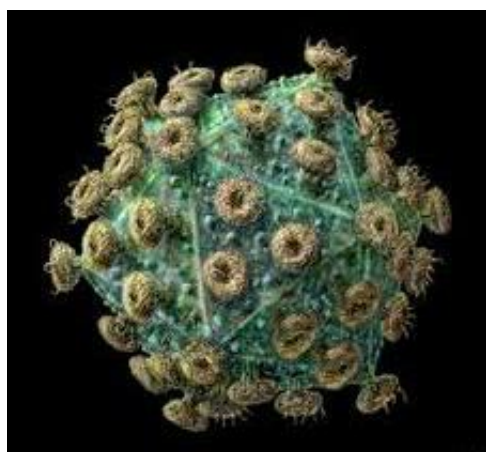
pro mikroorganismy, proto těchto útvarů nacházíme v mikrobiologii celou řadu, např. u viru HIV, herpetických virů či u viru dětské obrny.



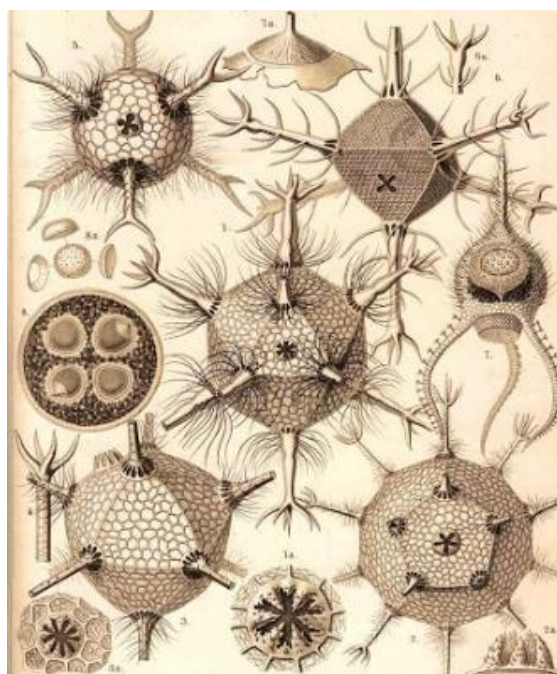
Virus dětské obrny



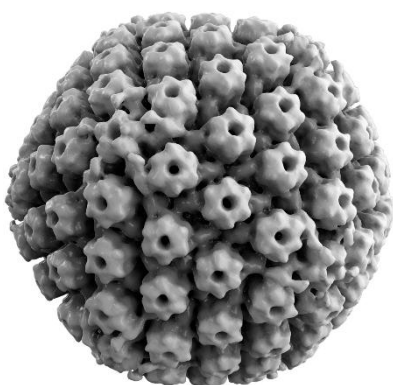
Mřížovka červená



Virus HIV



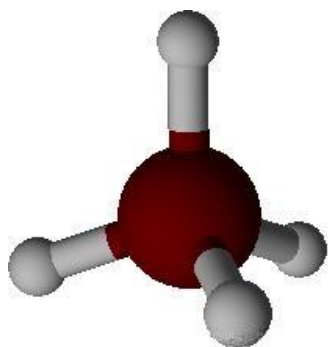
Mřížovci



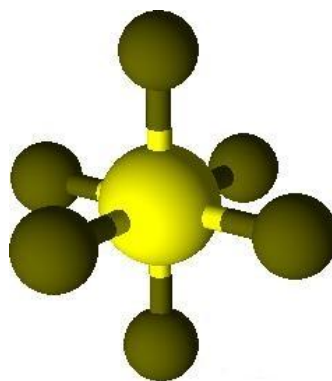
Herpes virus

Obr. 1. 7: Příklady platonských těles u organismů a mikroorganismů.

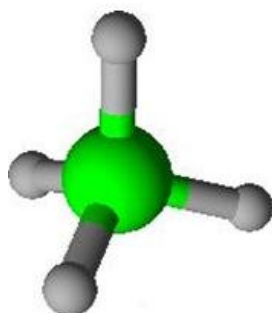
V chemii uspořádání platonských těles umožňuje energeticky nenáročnou tvorbu stabilních vazeb: např. tetraedr v molekulách metanu CH_4 , amonných kationtů NH_4^+ nebo bílého fosforu P_4 , oktaedr v molekule fluoridu sírového SF_6 a např. dvacetistěn v molekule boru B_{12} .



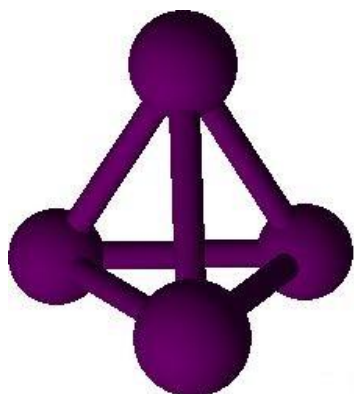
Molekula metanu CH_4 .



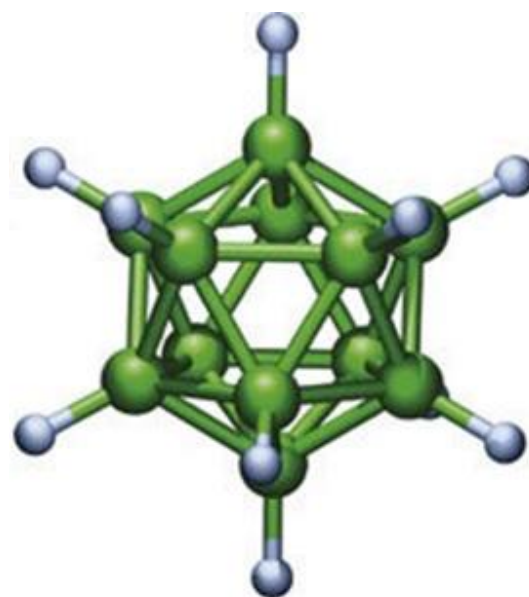
Molekula fluoridu sírového SF_6 .



Molekula amonného kationtu NH_4^+ .



Molekula bílého fosforu P_4 .



Molekula boru B_{12} .

Obr. 1. 8: Příklady molekul ve tvaru platonských těles

1.3 Úlohy k platonským tělesům

Úloha A: Počet rovin souměrnosti platonských těles

Kolik rovin souměrnosti mají jednotlivá platonská tělesa?

Úloha B: Rozpad platonských těles

Na kolik částí se rozpadne platonské těleso, jestliže jej rozřežeme řezy, vedenými všemi jeho rovinami souměrnosti současně?

2 Grupy zákrytových pohybů

Zákrytovým pohybem rozumíme shodné zobrazení v prostoru, které zobrazí pravidelný mnohostěn na sebe. Přímé praktické využití nachází studium grup zákrytových pohybů zejména v krystalografii a v chemii.²⁶

Grupou nazýváme množinu prvků (zde množinu zákrytových pohybů) s operací (v našem případě se „operací“ rozumí skládání zobrazení), která splňuje následující axiomy:

Axiom 1. Uzavřenost:

Libovolné dva zákrytové pohyby A , B složené v určitém pořadí vytvoří opět zákrytový pohyb $C = AB$.

Axiom 2. Asociativita:

Pořadí uskutečněných zákrytových pohybů nehraje roli. Můžeme tedy jednoznačně definovat složení tří (a více) zákrytových pohybů v daném pořadí rovnostmi

$$ABC = (AB)C = A(BC).$$

Axiom 3. Existence jednotkového prvku:

Mezi zákrytovými pohyby je i pohyb tzv. identický (značíme I), který ponechává s ním složený pohyb nezměněný. To znamená, že identický pohyb v důsledku není patrný: $AI = IA = A$. Identický zákrytový pohyb I nazýváme jednotkovým prvkem grupy.

Axiom 4. Existence inverzního prvku:

Ke každému zákrytovému pohybu A existuje právě jeden zpětný pohyb A^{-1} , kterým se těleso vrátí zpět do výchozí polohy: $A^{-1}A = I$.

Počet prvků grupy G nazýváme řád této grupy a označujeme jej symbolem $|G|$.

²⁶ V chemii se grupy zákrytových pohybů uplatní především při studiu prostorového uspořádání izomerů, tzn. v nauce o chemických sloučeninách, jejichž molekuly mají totožné složení, ale jiné prostorové uspořádání atomů.

2.1 Grupy zákrytových pohybů platonských těles

V prostoru známe sedm shodností, které dělíme na přímé a nepřímé. Mezi přímé shodnosti, tedy ty, jež jsou reálně proveditelné, patří identita, posunutí v prostoru, otočení kolem přímky v prostoru a šroubový pohyb. Nepřímé shodnosti jsou rovinová souměrnost, posunutá souměrnost a otočená souměrnost.

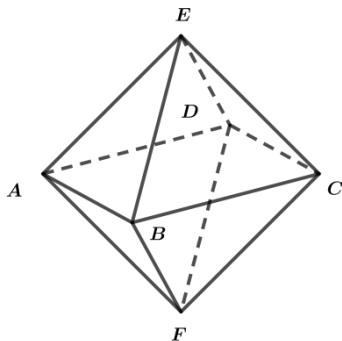
U platonských těles můžeme najít tyto přímé shodnosti:

- 1) Identitu I
- 2) Rotaci R (rotaci o úhel 180° nazýváme osovou souměrností)

Nepřímé shodnosti platonských těles jsou tyto:

- 1) Rovinová souměrnost Ω
- 2) Středová souměrnost (otočené zrcadlení) $S = R\Omega$

2.1.1 Prvky grupy zákrytových pohybů osmistěnu



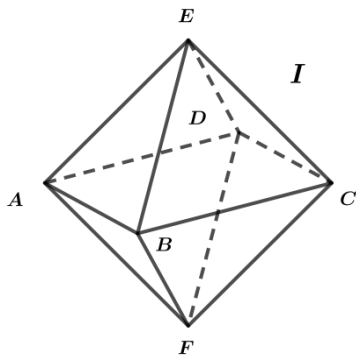
Obr. 2. 1: Osmistěn $ABCDEF$ v původní poloze.

Grupa zákrytových pohybů oktaedru $ABCDEF$ má 48 prvků.

Přímé shodnosti:

1) Identické zobrazení I

Tímto pohybem se poloha vrcholů oktaedru nemění (těleso zůstává na místě).

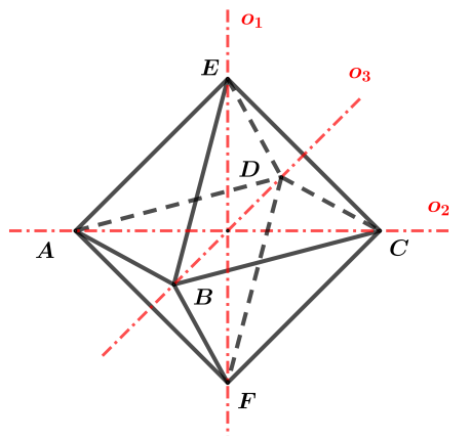


Obr. 2. 2: Osmistěn $ABCDEF$ po identickém zobrazení.

2) Rotace R_x

a) kolem tří čtyřčetných os o_1, o_2, o_3 , které procházejí protějšími vrcholy osmistěnu.

Otočením kolem každé této osy o úhel $90^\circ, 180^\circ$ či 270° získáme 9 prvků grupy:



Obr. 2. 3: Osmistěn $ABCDEF$ se třemi čtyřčetnými osami o_1, o_2, o_3 .

$$R_1: (o_1 = EF; \alpha = 90^\circ),$$

$$R_4: (o_2 = AC; \alpha = 90^\circ),$$

$$R_7: (o_3 = BD; \alpha = 90^\circ),$$

$$R_2: (o_1 = EF; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_5: (o_2 = AC; \alpha = 180^\circ),$$

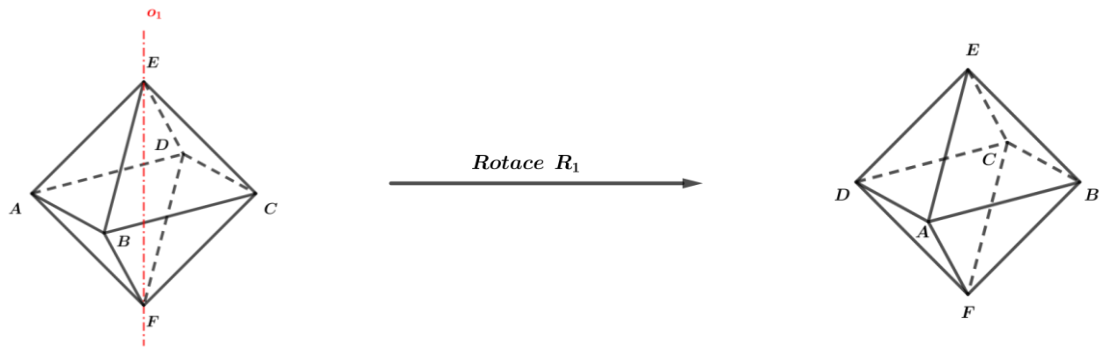
$$R_8: (o_3 = BD; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_3: (o_1 = EF; \alpha = 270^\circ),$$

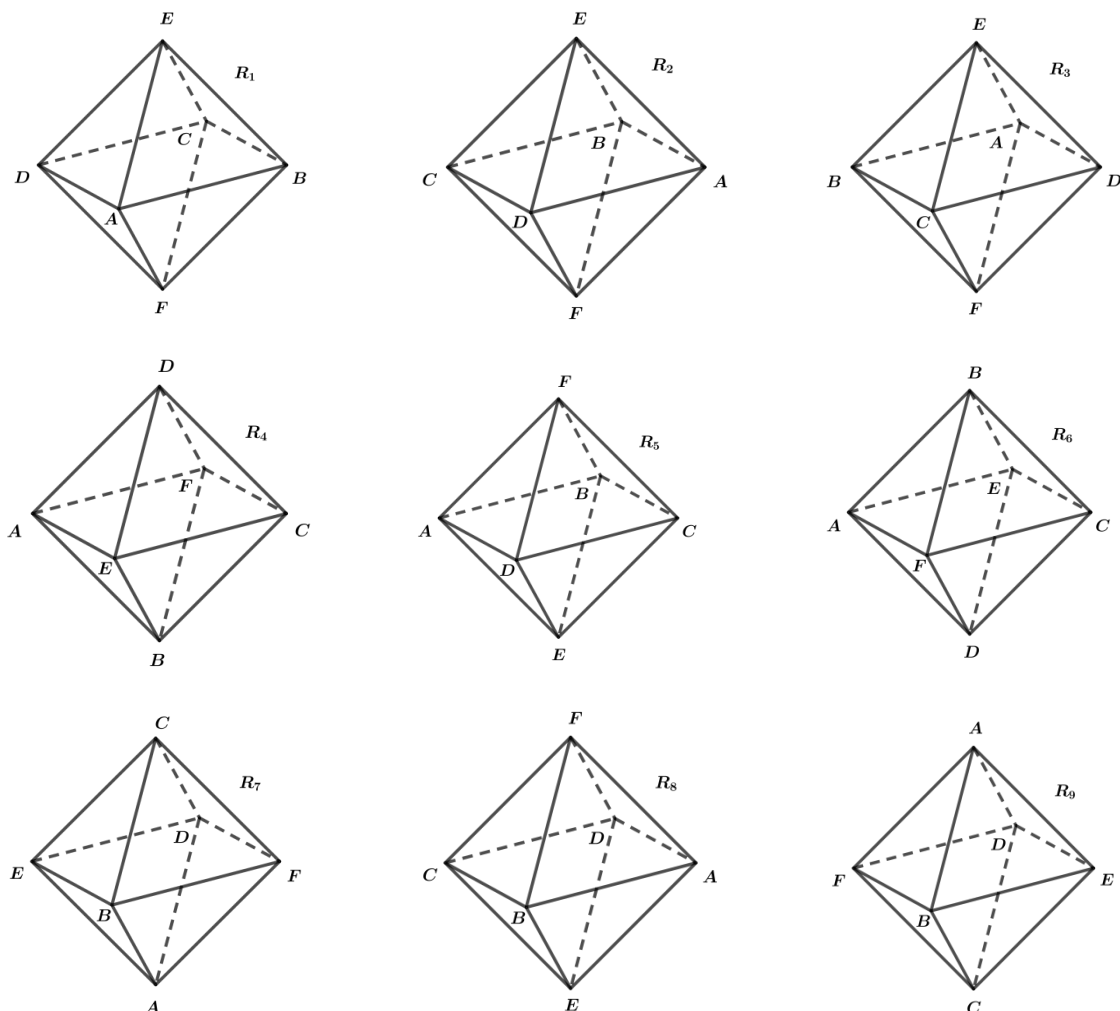
$$R_6: (o_2 = AC; \alpha = 270^\circ),$$

$$R_9: (o_3 = BD; \alpha = 270^\circ).$$

Např: Rotace R_1 je určena osou $o_1 = EF$ a velikostí úhlu $\alpha = 90^\circ$ (viz obr. 2. 4).

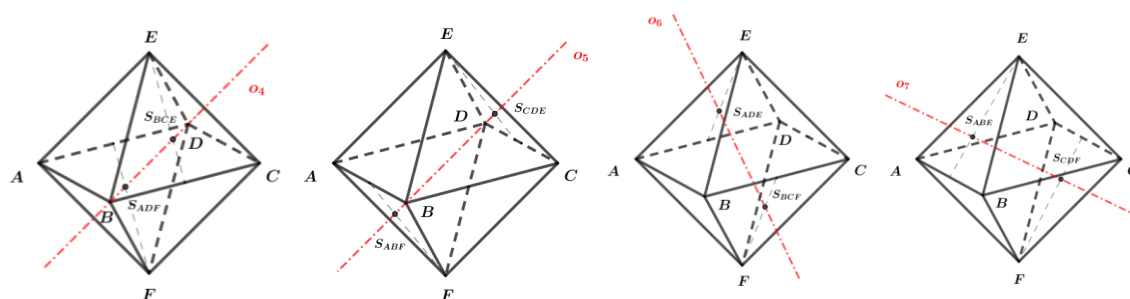


Obr. 2. 4: Zákrytový pohyb osmistěnu $ABCDEF$ vzniklý rotací R_1 : ($o_1 = EF$; $\alpha = 90^\circ$) z pohledu vektoru \overrightarrow{EF} .



Obr. 2. 5: Zákrytové pohyby osmistěnu $ABCDEF$ vzniklé rotacemi $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9$. Pohyby R_1, R_2, R_3 zobrazeny z pohledu vektoru \overrightarrow{EF} , pohyby R_4, R_5, R_6 zobrazeny z pohledu vektoru \overrightarrow{CA} , pohyby R_7, R_8, R_9 zobrazeny z pohledu vektoru \overrightarrow{BD} .

b) kolem čtyř trojčetných os o_4, o_5, o_6, o_7 , které procházejí středy dvou rovnoběžných stěn oktaedru, můžeme otočit osmistěn o úhel 120° či 240° .



Obr. 2. 6: Osmistěn $ABCDEF$ se čtyřmi trojčetnými osami o_4, o_5, o_6, o_7 .²⁷

Počet takovýchto rotací je osm.

$$R_{10}: (o_4 = S_{BCE}S_{ADF}, \alpha = 120^\circ),$$

$$R_{11}: (o_4 = S_{BCE}S_{ADF}, \alpha = 240^\circ),$$

$$R_{12}: (o_5 = S_{CDE}S_{ABF}, \alpha = 120^\circ),$$

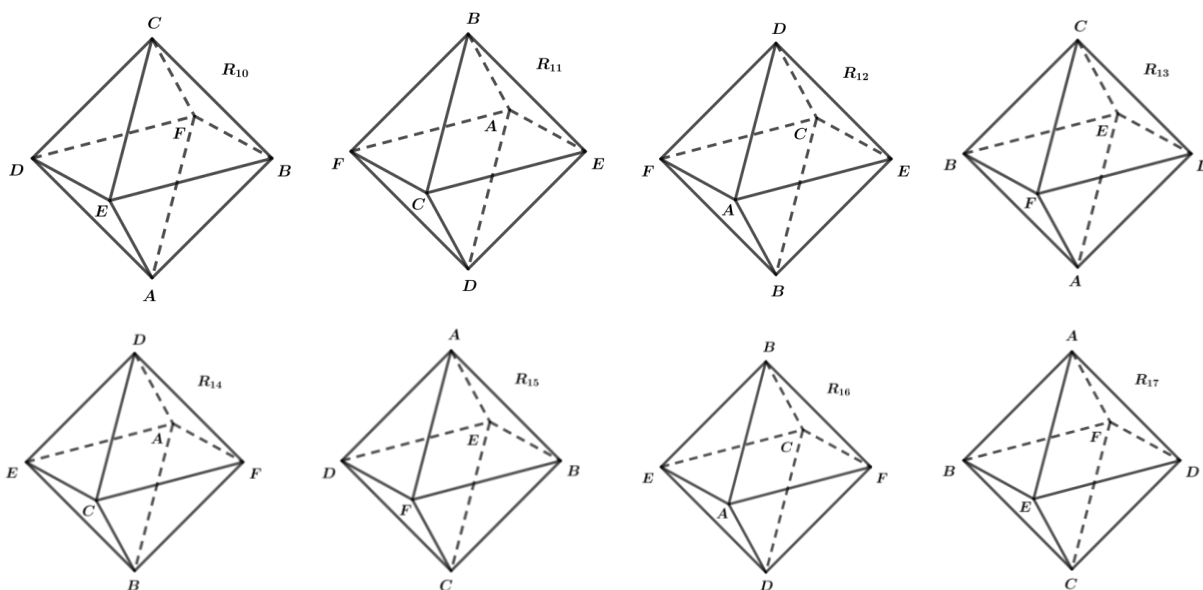
$$R_{13}: (o_5 = S_{CDE}S_{ABF}, \alpha = 240^\circ),$$

$$R_{14}: (o_6 = S_{ADE}S_{BCF}, \alpha = 120^\circ),$$

$$R_{15}: (o_6 = S_{ADE}S_{BCF}, \alpha = 240^\circ),$$

$$R_{16}: (o_7 = S_{ABE}S_{CDF}, \alpha = 120^\circ),$$

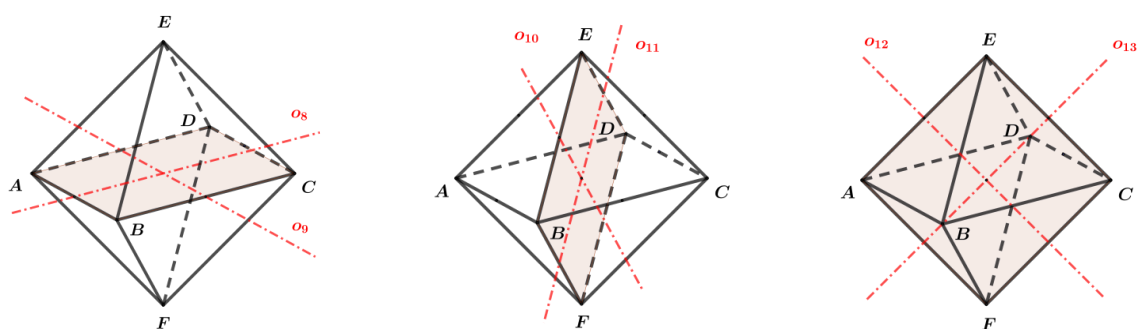
$$R_{17}: (o_7 = S_{ABE}S_{CDF}, \alpha = 240^\circ).$$



Obr. 2. 7: Zákrytové pohyby osmistěny $ABCDEF$ vzniklé rotacemi $R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}, R_{17}$. Pohyby R_{10} a R_{11} zobrazeny z pohledu vektoru $\overrightarrow{S_{BCE}S_{ADF}}$, pohyby R_{12} a R_{13} z pohledu vektoru $\overrightarrow{S_{CDE}S_{ABF}}$, pohyby R_{14} a R_{15} z pohledu vektoru $\overrightarrow{S_{BCF}S_{ADE}}$, pohyby R_{16} a R_{17} z pohledu vektoru $\overrightarrow{S_{ABE}S_{CDF}}$.

²⁷ Symbol S_{BCE} značí střed stěny BCE . Další středy stěn osmistěny jsou značeny analogicky.

c) kolem šesti dvoučetných os $o_8, o_9, o_{10}, o_{11}, o_{12}, o_{13}$.



Obr. 2. 8: Šest dvoučetných os $o_8, o_9, o_{10}, o_{11}, o_{12}, o_{13}$ osmistěnu $ABCDEF$.

Otočením oktaedru okolo každé z těchto os o 180° získáme šest zákrytových poloh:

$$R_{18}: (o_8 = S_{AB}S_{CD}; \alpha = 180^\circ),^{28}$$

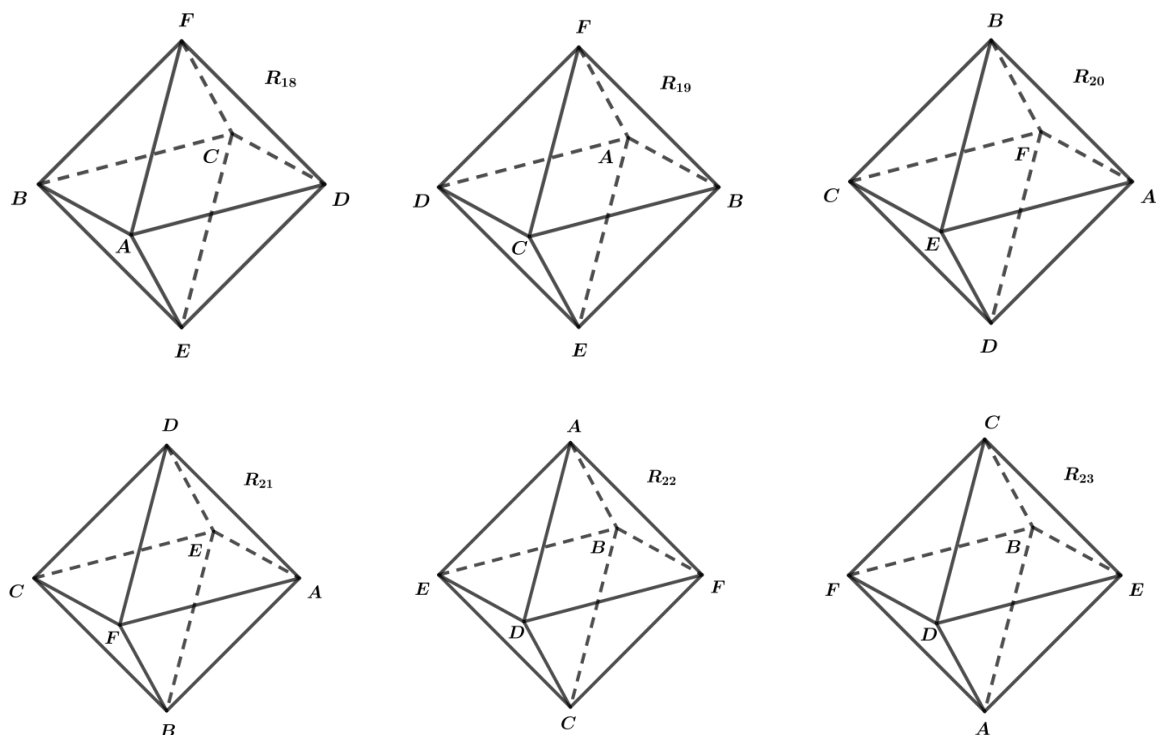
$$R_{21}: (o_{11} = S_{BF}S_{DE}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{19}: (o_9 = S_{AD}S_{BC}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{22}: (o_{12} = S_{AE}S_{CF}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{20}: (o_{10} = S_{BE}S_{DF}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{23}: (o_{13} = S_{AF}S_{CE}; \alpha = 180^\circ).$$



Obr. 2. 9: Zákrytové polohy osmistěnu $ABCDEF$ po provedení rotací $R_{18}, R_{19}, R_{20}, R_{21}, R_{22}, R_{23}$.

²⁸ S_{AB} značí střed strany AB . Středů jednotlivých stran jsou značeny analogicky v celé sbírce.

Nepřímé shodnosti:

1) Rovinové souměrnosti Ω_x

Oktaedr má devět různých rovin symetrie. Každá z nich je kolmá k jedné z dvoučetných či čtyřčetných os.

$$\Omega_1 = ABCD, \text{ kde } \Omega_1 \perp o_1,$$

$$\Omega_2 = BFDE, \text{ kde } \Omega_2 \perp o_2,$$

$$\Omega_3 = AFCE, \text{ kde } \Omega_3 \perp o_3,$$

$$\Omega_4 = ES_{BC}FS_{AD}, \text{ kde } \Omega_4 \perp o_8,$$

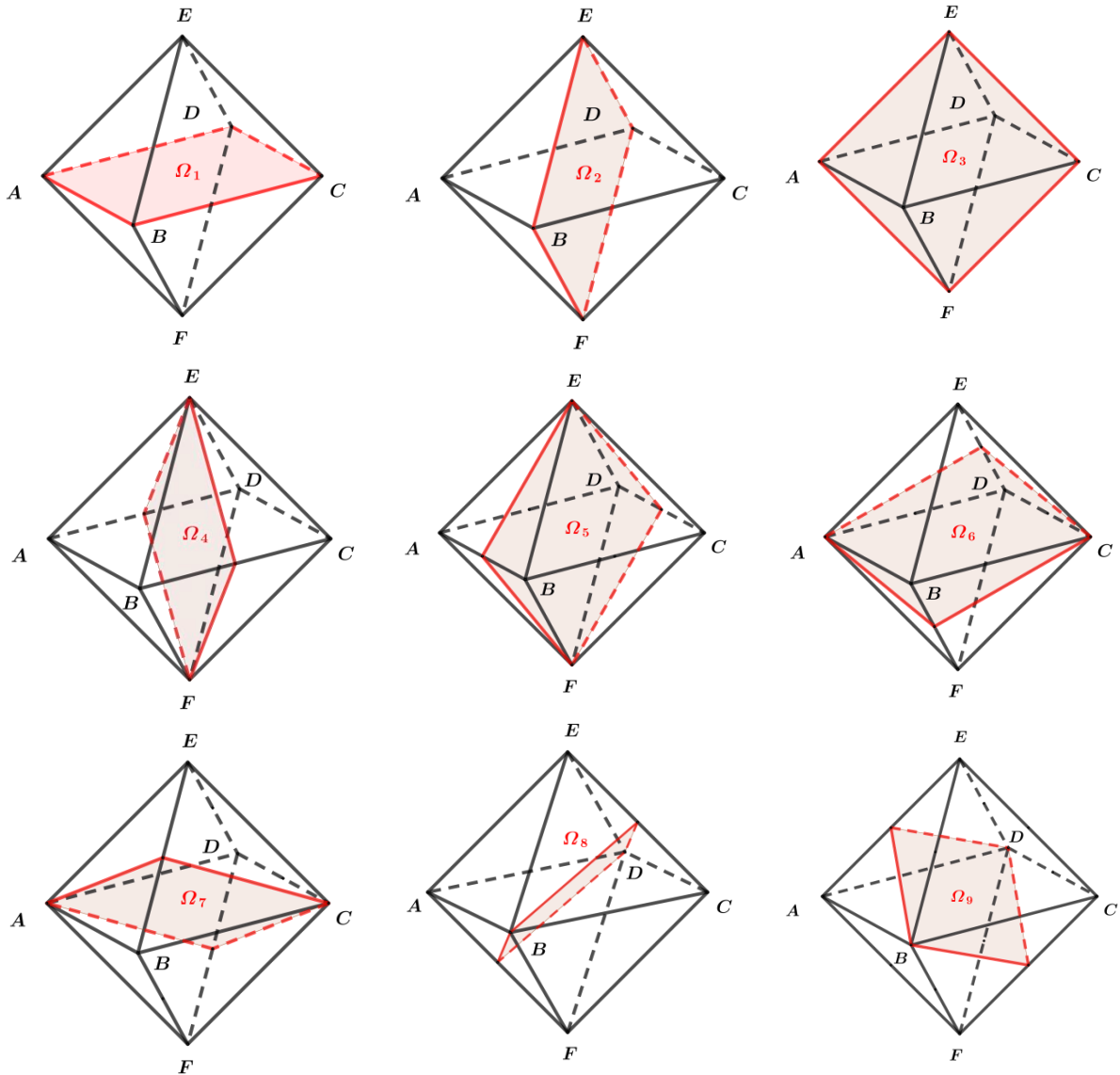
$$\Omega_5 = ES_{CD}FS_{AB}, \text{ kde } \Omega_5 \perp o_9,$$

$$\Omega_6 = AS_{BF}CS_{DE}, \text{ kde } \Omega_6 \perp o_{10},$$

$$\Omega_7 = AS_{BE}CS_{DF}, \text{ kde } \Omega_7 \perp o_{11},$$

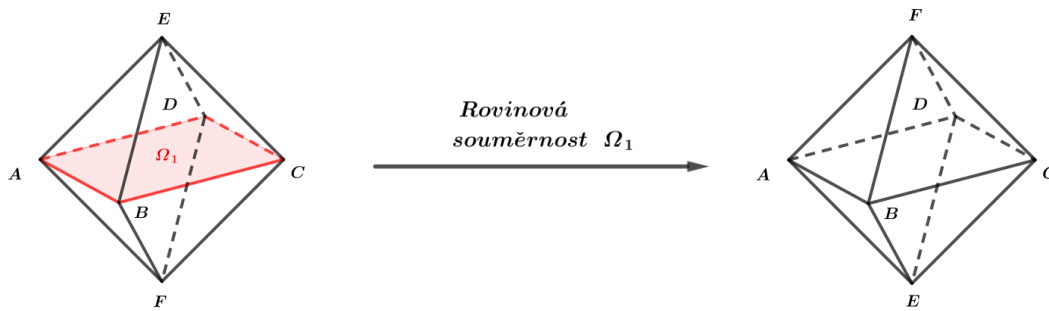
$$\Omega_8 = BS_{AF}DS_{CE}, \text{ kde } \Omega_8 \perp o_{12},$$

$$\Omega_9 = BS_{AE}DS_{CF}, \text{ kde } \Omega_9 \perp o_{13}.$$

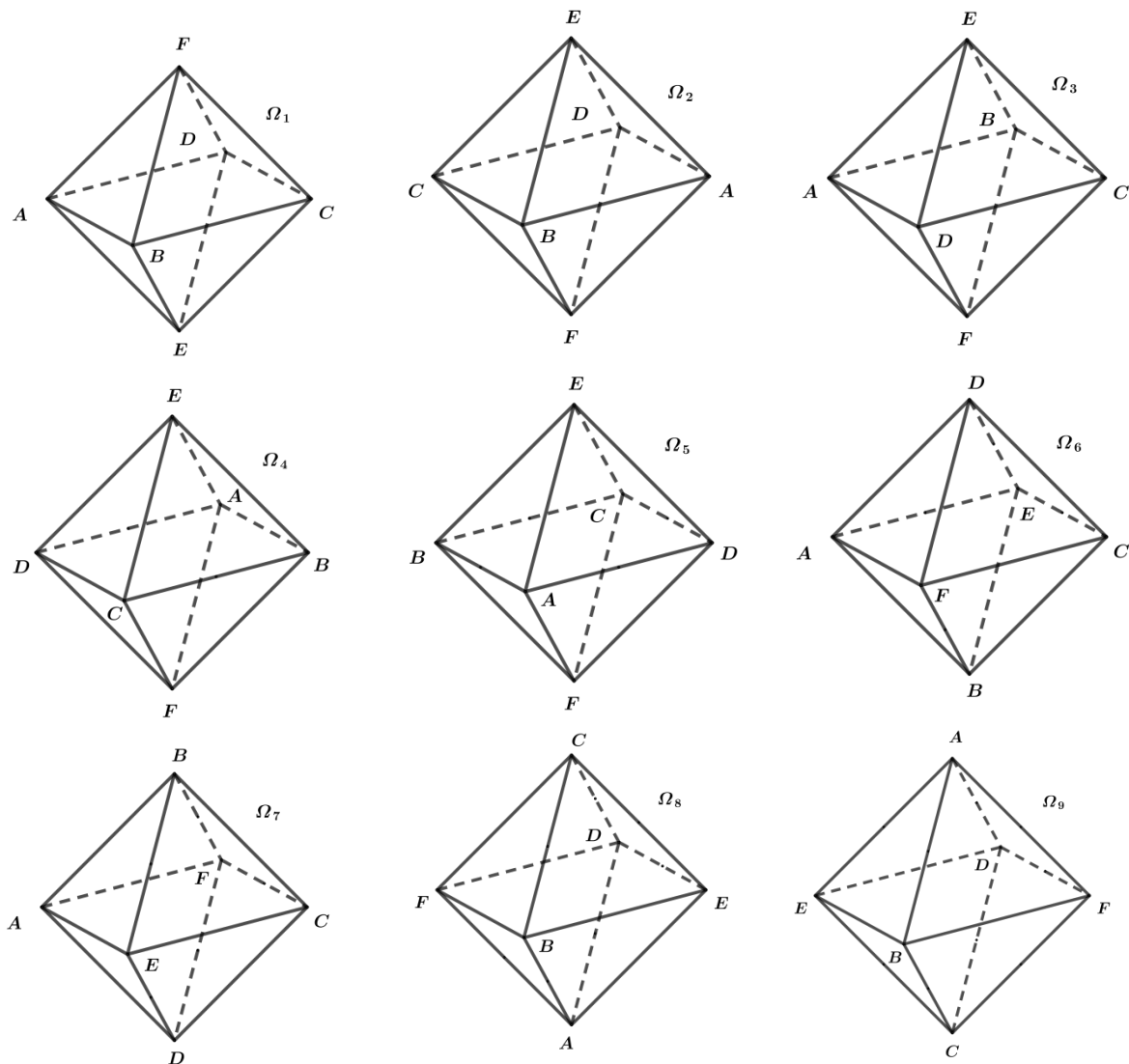


Obr. 2. 10: Devět rovin symetrie osmistěnu $ABCDEF$.

Zobrazením oktaedru v jedné každé rovinové souměrnosti Ω_x získáme devět zákrytových poloh osmistěny.



Obr. 2. 11: Výsledný zákrytový pohyb osmistěny $ABCDEF$ po zobrazení v rovinové souměrnosti Ω_1 .



Obr. 2. 12: Zákrytové pohyby vzniklé zobrazením osmistěny $ABCDEF$ v rovinových souměrnostech $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5, \Omega_6, \Omega_7, \Omega_8, \Omega_9$.

2) Shodnosti složené

Středová souměrnost $S(S)$

Středová symetrie $S_x(S)$, kde bod S je středem osmistěnu $ABCDEF$, je výsledkem skládání rotací kolem čtyřčetných či dvoučetných os a rovinových symetrií ($S_x = R_x\Omega_x$), kde použijeme rovinu kolmou k ose. Získáme tak patnáct zákrytových pohybů.

Zobrazení, která vzniknou složením rotace okolo čtyřčetné osy a souměrnosti dle roviny kolmé k této ose rotace, je devět:

$S_1 = R_1\Omega_1$, kde R_1 : ($o_1 = EF$; $\alpha = 90^\circ$) a poté $\Omega_1 \perp o_1$.

$S_2 = R_2\Omega_1$, kde R_2 : ($o_1 = EF$; $\alpha = 180^\circ$) a poté $\Omega_1 \perp o_1$.

$S_3 = R_3\Omega_1$, kde R_3 : ($o_1 = EF$; $\alpha = 270^\circ$) a poté $\Omega_1 \perp o_1$.

$S_4 = R_4\Omega_2$, kde R_4 : ($o_2 = AC$; $\alpha = 90^\circ$) a poté $\Omega_2 \perp o_2$.

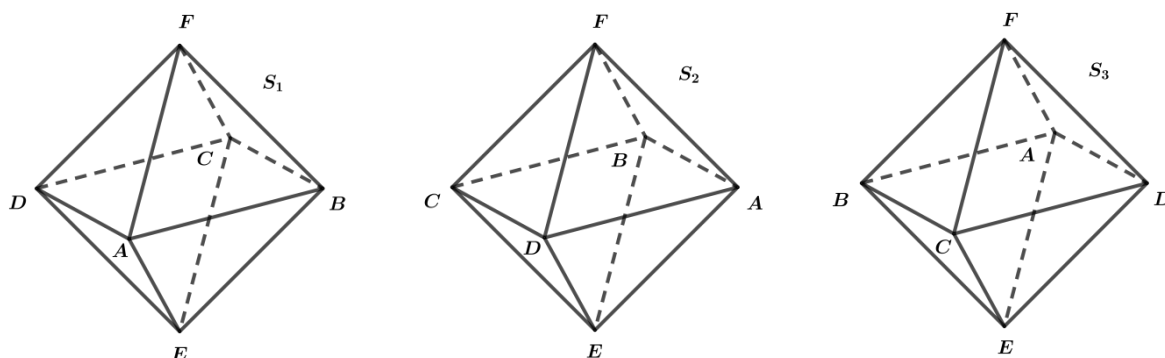
$S_5 = R_5\Omega_2$, kde R_5 : ($o_2 = AC$; $\alpha = 180^\circ$) a poté $\Omega_2 \perp o_2$.

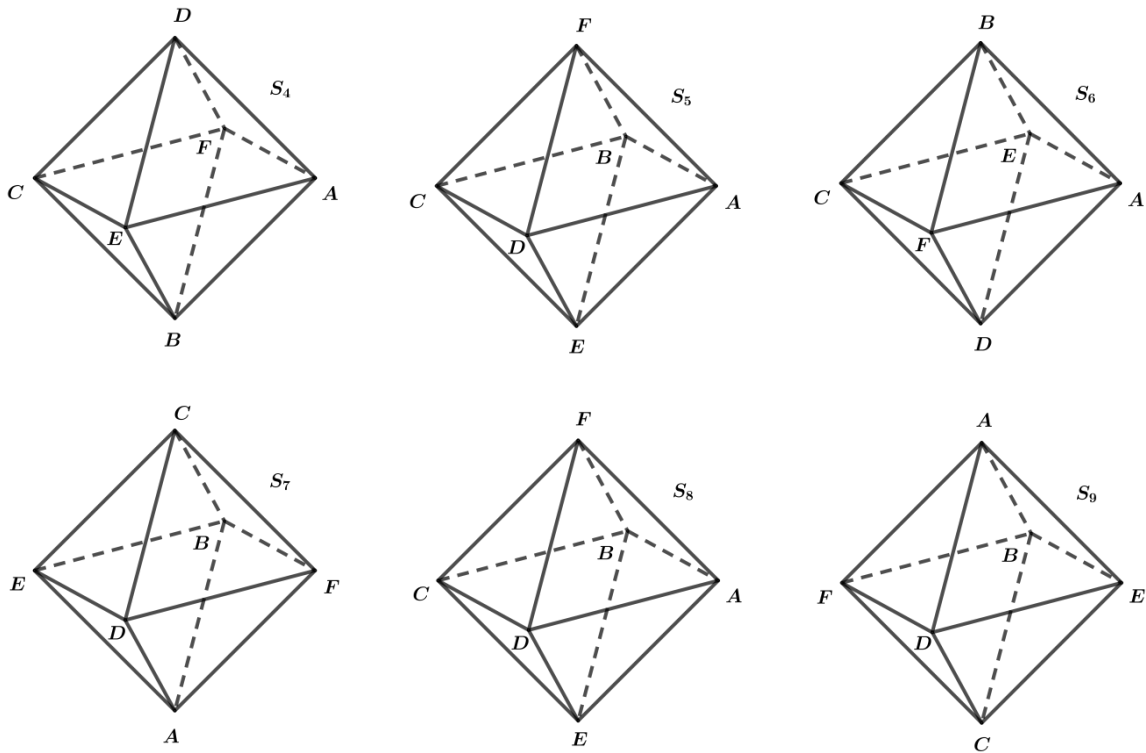
$S_6 = R_6\Omega_2$, kde R_6 : ($o_2 = AC$; $\alpha = 270^\circ$) a poté $\Omega_2 \perp o_2$.

$S_7 = R_7\Omega_3$, kde R_7 : ($o_3 = BD$; $\alpha = 90^\circ$) a poté $\Omega_3 \perp o_3$.

$S_8 = R_8\Omega_3$, kde R_8 : ($o_3 = BD$; $\alpha = 180^\circ$) a poté $\Omega_3 \perp o_3$.

$S_9 = R_9\Omega_3$, kde R_9 : ($o_3 = BD$; $\alpha = 270^\circ$) a poté $\Omega_3 \perp o_3$.





Obr. 2. 13: Výsledný zákrytový pohyb osmistěnu $ABCDEF$ po provedení složeného zobrazení $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9$.

Složených zobrazení, ve kterých uplatníme rotaci okolo dvoučetné osy a následně pak souměrnost dle roviny kolmé k ose rotace, je šest:

$$S_{10} = R_{18}\Omega_4, \text{ kde } R_{18}: (o_8 = S_{AB}S_{CD}; \alpha = 180^\circ) \text{ a poté } \Omega_4 \perp o_8).$$

$$S_{11} = R_{19}\Omega_5, \text{ kde } R_{19}: (o_9 = S_{AD}S_{BC}; \alpha = 180^\circ) \text{ a poté } \Omega_5 \perp o_9).$$

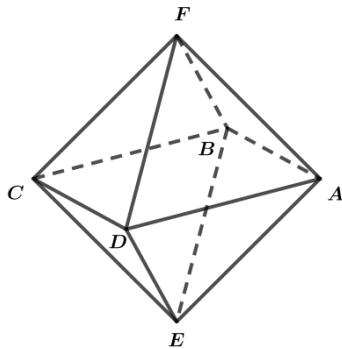
$$S_{12} = R_{20}\Omega_6, \text{ kde } R_{20}: (o_{10} = S_{BE}S_{DF}; \alpha = 180^\circ) \text{ a poté } \Omega_6 \perp o_{10}).$$

$$S_{13} = R_{21}\Omega_7, \text{ kde } R_{21}: (o_{11} = S_{BF}S_{DE}; \alpha = 180^\circ) \text{ a poté } \Omega_7 \perp o_{11}).$$

$$S_{14} = R_{22}\Omega_8, \text{ kde } R_{22}: (o_{12} = S_{AE}S_{CF}; \alpha = 180^\circ) \text{ a poté } \Omega_8 \perp o_{12}).$$

$$S_{15} = R_{23}\Omega_9, \text{ kde } R_{23}: (o_{13} = S_{AF}S_{CE}; \alpha = 180^\circ) \text{ a poté } \Omega_9 \perp o_{13}).$$

Provedením těchto šesti složených zobrazení vznikne stejný výsledný zákrytový pohyb (viz obr. 2. 14).



Obr. 2. 14: Výsledný zákrytový pohyb osmistěnu $ABCDEF$ po provedení kteréhokoliv složeného zobrazení $S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}$.

2.2 Úloha ke grupám zákrytových pohybů platonských těles

Úloha C: Prvky grupy zákrytových pohybů platonských těles

Určete prvky grupy zákrytových pohybů zbývajících platonských těles: pravidelného čtyřstěnu, krychle, pravidelného dvanáctistěnu a pravidelného dvacetistěnu.

3 Archimedovská tělesa

Pod pojmem archimedovská tělesa rozumíme konvexní polopravidelné mnohostěny, jejichž stěny jsou tvořeny pouze dvěma nebo třemi typy pravidelných mnohoúhelníků (kromě sedmiúhelníku a devítiúhelníku se jedná o všechny mnohoúhelníky až po desetiúhelník) a v jejichž vrcholech jsou tyto mnohoúhelníky uspořádány vždy se stejnou posloupností. Označení „polopravidelné“ znamená, že strany tělesa tvoří sice pravidelné mnohoúhelníky, ale (na rozdíl od platonských těles) je jich více druhů (např. kuboktaedr je tvořen osmi trojúhelníky a šesti čtverci).

Všem archimedovským tělesům lze opsat kulovou plochu, která prochází všemi vrcholy tělesa, kulovou plochu vepsanou, která se dotýká středů všech stran tělesa a jinou, která prochází středy všech hran. Dále jim lze pro všechny shodné stěny zkonstruovat kulovou plochu vepsanou, tzn. dotýkající se středů všech shodných stěn. Každé archimedovské těleso tedy definuje jedním středem čtyři až pět kulových ploch.

Název „archimedovská“ získala tato tělesa podle řeckého filozofa Archimeda ze Syrakus (287–212 př. n. l.), který se jimi údajně zabýval v jednom ze svých (dnes již ztracených) spisů.²⁹ Na přelomu šestnáctého a sedmnáctého století se těmito tělesy znovu zabýval a detailně je popsal Johannes Kepler (1571–1630) ve svém spise *Harmonices Mundi* z roku 1619.



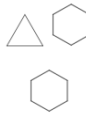
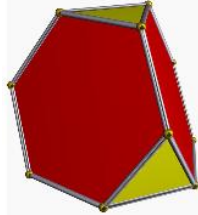


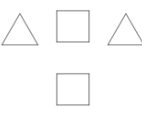
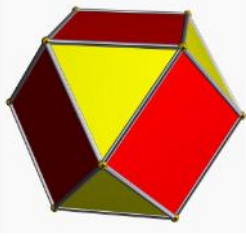



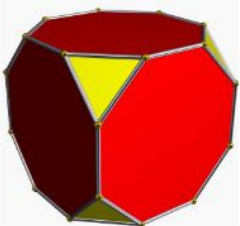



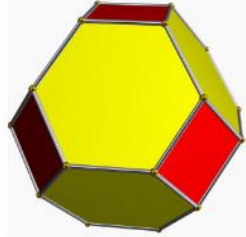
3.1 Charakteristické rysy archimedovských těles

Tradičně rozlišujeme třináct archimedovských těles, a to deset s dvěma tvary stěn (stěny tělesa tvoří dva různé n -úhelníky, např. kuboktaedr) a tři s třemi tvary stěn (stěny tělesa vytvářejí tři různé n -úhelníky, například rhombický dodekaedr). Konfigurace polopravidelných – a tedy i archimedovských – těles se zapisuje čísly v závorce, oddělenými čárkou, která označují jednotlivé n -úhelníky, střetávající se v každém vrcholu, přičemž každé číslo je číslem „ n “ daného n -úhelníku (značí počet







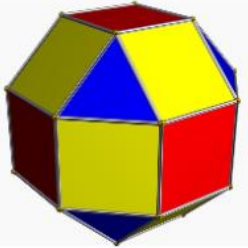






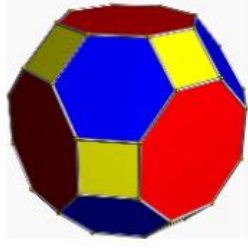






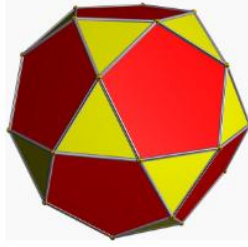





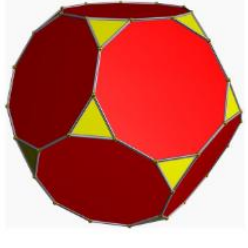





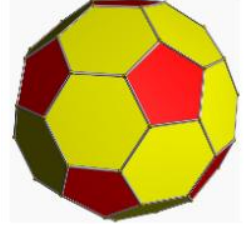







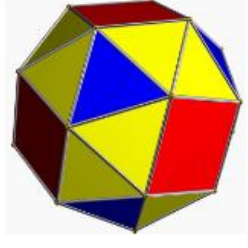
²⁹ O existenci tohoto spisu se zmiňuje řecký matematik Pappos z Alexandrie (290–350) ve svém díle *Synagogé*.








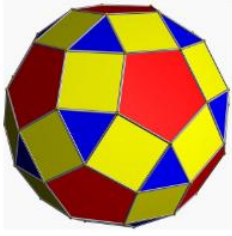






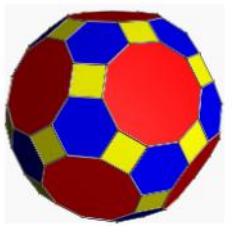







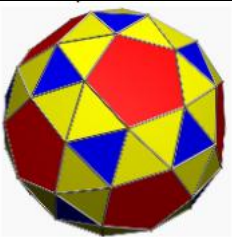
úhlů daného n -úhelníku) podílejícího se na tvorbě vrcholu.³⁰ Pro všechna archimedovská tělesa platí Eulerova věta.

Archimedovská tělesa lze odvodit z platonských těles odříznutím vrcholů (tak, že ve stěnách vzniknou pravidelné shodné n -úhelníky), odříznutím vrcholů a současně celých hran, deformací, spojením různých stran, či prolnutím dvou různých těles. Podle toho, jak byla tato tělesa zkonstruována, se také jmenují.

Název	s	v	h	Počet a druhy stěn	Uspořádání ve vrcholu	
Osekaný čtyřstěn (komolý čtyřstěn)	8	12	18	4  4 		
Krychloctaedr (kuboktaedr)	14	12	24	8  6 		
Osekaná krychle (osekaný šestistěn, komolá krychle)	14	24	36	8  6 		
Osekaný osmistěn	14	24	36	6  8 		

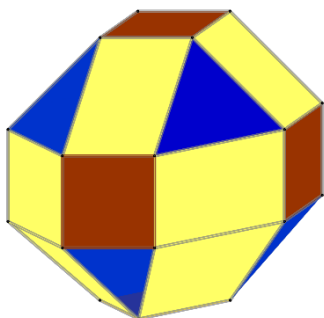
³⁰ Např. zmíněný kuboktaedr má označení (3, 4, 3, 4).

Rombická krychle (malý rombokuboktaedr)	26	24	48	8  18 	   	
Komolý krychloctaedr (velký rombokuboktaedr)	26	48	72	12  8  6 	  	
Ikosododekaedr	32	30	60	20  12 	   	
Osekaný dvanáctistěn	32	60	90	20  12 	  	
Komolý dvacetistěn	32	60	90	12  20 	  	
Přitlačená krychle (otupený kuboktaedr)	38	24	60	32  6 	    	

Rombický dodekaedr (malý romboikosododekaedr)	62	60	12 0	20  30  12 	   	
Komolý ikosidodekaedr (velký romboikosododekaedr)	62	12 0	18 0	30  20  12 	  	
Přitlačený dvanáctistěn (otupený ikosododekaedr)	92	60	15 0	80  12 	    	

Tabulka 3. 1: Přehled archimedovských těles.

Kromě těchto tradičních třinácti archimedovských těles existuje ještě tzv. Aškinuzeho těleso, nebo též pseudorombokuboktaedr. Toto těleso, které lze zkonstruovat z rombokuboktaedru pootočením jednoho jeho osmihranného vrchlíku o 45° jako první popsal teprve v roce 1957 Vladimir Georgievič Aškinuze, ale nejspíš jej znal už Kepler. Jeho vrcholy jsou sice obklopeny stejnými pravidelnými mnohoúhelníky jako u rombokuboktaedru, ale není dodržena posloupnost stěn u všech vrcholů.

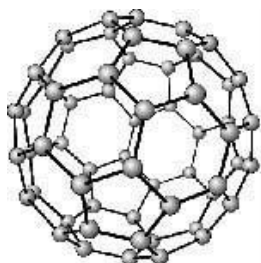


Obr. 3. 1: Aškinuzeho těleso (pseudorombokuboktaedr).

Duální mnohostěny k archimedovským tělesům jsou katalánská tělesa, což je třináct těles, která nejsou ani pravidelná, ani polopravidelná, ale zůstávají konvexní. Stěny katalánských těles jsou tvořeny vždy jen jedním typem vždy nepravidelného n -úhelníku. Jsou pojmenovány po belgicko-francouzském matematikovi Eugènu Charlesu Catalanovi (1814–1894), který je jako první v roce 1865 popsal.

3.2 Výskyt a uplatnění archimedovských těles

Přirozený výskyt a uplatnění archimedovských těles je s ohledem na jejich komplikovanější stavbu (např. ve srovnání s platonskými tělesy) relativně nižší. Stabilní molekula uhlíku, tzv. fulleren C_{60} , obsahuje šedesát atomů uhlíku, umístěných ve vrcholech komolého dvacetistěnu. Asi nejznámější uplatnění komolého dvacetistěnu je tradiční fotbalový míč. Pozoruhodným uplatněním komolých čtyřstěňů, kuboktaedrů a komolých osmistěňů v architektuře je synagoga v izraelské poušti Negev z dílny rakouského architekta Alfreda Neumanna (1900–1968) a jeho žáka Zvi Heckera (nar. 1931).



Molekula fullerenu C_{60}



Fotbalový míč



Synagoga v izraelské poušti Negev



Interiér synagogy v poušti Negev

Obr. 3. 2: Příklady výskytu a využití archimedovských těles.

3.3 Úlohy k archimedovským tělesům

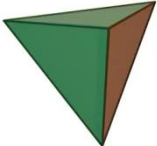

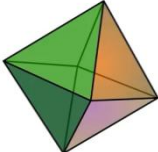

Úloha D: Řez osekane krychle rovinou

viz úlohy 6. 1. 4





4 Deltatopy

Pravidelné konvexní mnohostěny s různou valencí vrcholů, jejichž stěny jsou tvořeny rovnostrannými trojúhelníky, nazýváme deltatopy.³¹

Nekonvexních deltatopů existuje nekonečně mnoho, avšak – jak dokázal Hans Freudenthal (1905–1990) – konvexních deltatopů je právě osm: čtyřstěn, dvojitý čtyřstěn, osmistěn, dvojitý pětiboký jehlan, siamský dvanáctistěn, delta-čtrnáctistěn, delta-šestnáctistěn, dvacetistěn. Jejich základní charakteristiky jsou uvedeny v přehledné tabulce 4. 1 níže.

Název	Počet			Počet vrcholů s valencí n			
	vrcholů (v)	stěn (s)	hran (h)	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	
Čtyřstěn	4	4	6	4	0	0	
Dvojitý čtyřstěn	5	6	9	2	3	0	
Osmistěn	6	8	12	0	6	0	
Dvojitý pětiboký jehlan	7	10	15	0	5	2	

³¹ Delta = trojúhelník, top = vrchol.

Siamský dvanáctistěn	8	12	18	0	4	4	
Delta - čtrnáctistěn	9	14	21	0	3	6	
Delta - šestnáctistěn	10	16	24	0	2	8	
Dvacetistěn	12	20	30	0	0	12	

Tabulka 4. 1: Přehled charakteristik deltatopů.³²

4.1 Úlohy k deltatopům

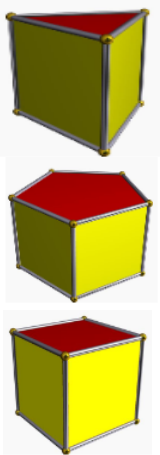
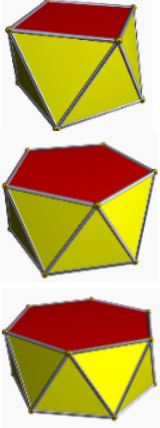
Úloha E: Řez pravidelného osmistěnu rovinou

viz úlohy 6. 1. 3

³² Jak upozorňují Josef Molnár a Jiří Kobza (Molnár a Kobza 1990), ve výčtu se nenachází deltatop s parametry $v = 11$, $s = 28$, $h = 27$, počty vrcholů s valencí 0, 1, 10, přestože se taková konfigurace z logiky posloupnosti narůstajícího počtu vrcholů, stěn a hran nabízí. Takový deltatop neexistuje.

5 Hranoly a antihranoly

Spolu se třinácti archimedovskými tělesy se mezi poloprávebná tělesa řadí rovněž dvě nekonečné množiny hranolů (prizem) a rovnostranných antihranolů (antiprizem). I tato tělesa jsou konvexní poloprávebné mnohostěny se stejným uspořádáním stěn v každém vrcholu. Pro potřeby této práce budeme rozlišovat následující pojmy k označení těchto těles: **Hranol** je těleso, jehož dvě podstavy jsou pravidelné n -úhelníky a plášť je složen z pravouhlých čtyřúhelníků (obdélníků, nebo čtverců). Pravidelný hranol, tedy takový, jehož plášť je tvořen čtverci, označujeme jako *prizma*. Podobně **Antihranol** je těleso, jehož dvě podstavy jsou pravidelné n -úhelníky, které jsou vůči sobě pootočené o π/n , plášť je tvořen rovnostrannými, nebo rovnoramennými trojúhelníky. Antihranol, jehož plášť je složen z rovnostranných trojúhelníků, nazýváme *antiprizma*.

Název	s	v	h	Počet a druhy stěn	Uspořádání ve vrcholu	
Prizma (hranol)	$n + 2$	$2n$	$3n$	n čtverců (n obdélníků), n -úhelník	dva čtverce (obdélníky), n -úhelník	
Antiprizma (antihranol)	$2n + 2$	$2n$	$4n$	n trojúhelníků, n -úhelník	tři trojúhelníky n -úhelník	

Tabulka 5. 1: Přehled hranolů a antihranolů.

5.1 Úlohy k hranolům a antihranolům

Úloha F: Řez antihranolu rovinou

viz úlohy 6. 1. 5

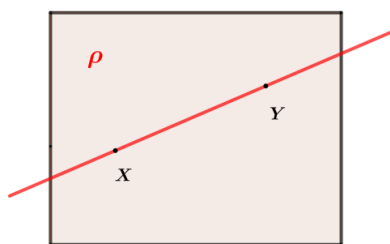
Úloha G: Dva řezy kosého pětibokého hranolu

viz úlohy 6. 1. 2

6 Řezy těles

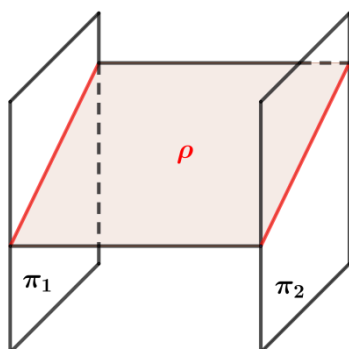
Řezem tělesa rovinou rozumíme průnik daného tělesa a dané roviny. K sestavení řezu tělesa rovinou je tedy nutné najít průsečnice roviny řezu s jednotlivými stěnami tělesa. Tyto průsečnice jsou v případě hranatých těles vždy úsečky (v případě oblých těles i křivky). Proto je řezem mnohoúhelník. Pro konstrukci řezu hranatého mnohostěnu platí tři základní axiomy:

Axiom 1: Pokud dva různé body X , Y leží v rovině ρ , potom přímka jimi určená leží také v rovině ρ . V situaci, kdy jsou v daném mnohostěnu známy dva různé body řezu v jedné jeho stěně, je možné jimi vést přímku, jejíž část bude jednou ze stran hledaného řezu.



Obr. 6. 1: Axiom 1.

Axiom 2: Průsečnice roviny ρ se dvěma různými, navzájem rovnoběžnými rovinami π_1 , π_2 jsou rovnoběžné. Známe-li tedy v některé ze stěn daného mnohostěnu stranu řezu a v rovnoběžné stěně jeden bod řezu, získáme další stranu řezu tak, že tímto bodem vedeme rovnoběžku se známou stranou řezu.



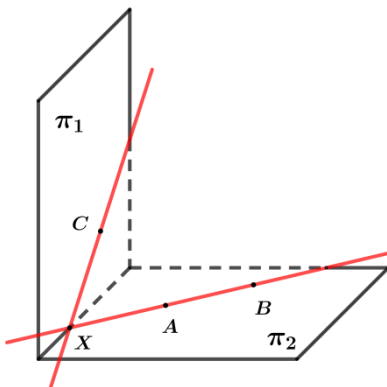
Obr. 6. 2: Axiom 2.

Axiom 3: Průsečnice roviny ρ se dvěma různými rovinami π_1, π_2 se protínají v bodě ležícím na průsečnici rovin π_1, π_2 , nebo jsou rovnoběžné.



Obr. 6. 3 Axiom 3.

Jsou-li definovány tři body A, B, C , které určují rovinu řezu ρ a zároveň náležejí dvěma stěnám mnohostěnu, potom najdeme řez ve stěně mnohostěnu, v níž se nachází bod C tak, že body A, B vedeme přímkou, která náleží rovině π_2 , (viz axiom 1). Průsečík X této přímky s rovinou π_1 , v níž leží stěna mnohostěnu incidentní s bodem C , leží na průsečnici obou rovin π_1 a π_2 . Průnik přímky vedené body X, C a stěny mnohostěnu v rovině π_1 , je stranou řezu této stěny.



Obr. 6. 4: Aplikace axiomů 1 – 3.

Řezy hranolu lze uplatnit (i) při konstrukci sítě kosého hranolu: Zkonstruujeme-li normálový řez kosého hranolu, vrcholy řezu budou v rozvinuté síti ležet v jedné přímce kolmé k bočním hranám. (ii) Při hledání průsečíků přímky s hranolem: Stačí danou přímkou proložit pomocnou rovinu (volíme zpravidla rovinu směrovou nebo promítací) a sestrojít řez hranolu touto rovinou. Hledanými průsečíky jsou společné body dané přímky a obvodu sestrojeného řezu.

Řezy jehlanu lze využít při hledání průsečíků přímky s jehlanem: podobně jako u hranolu proložíme danou přímkou promítací, resp. vrcholovou rovinu a touto rovinou sestrojíme řez jehlanu. Hledanými průsečíky jsou společné body dané přímky a obvodu sestrojeného řezu.

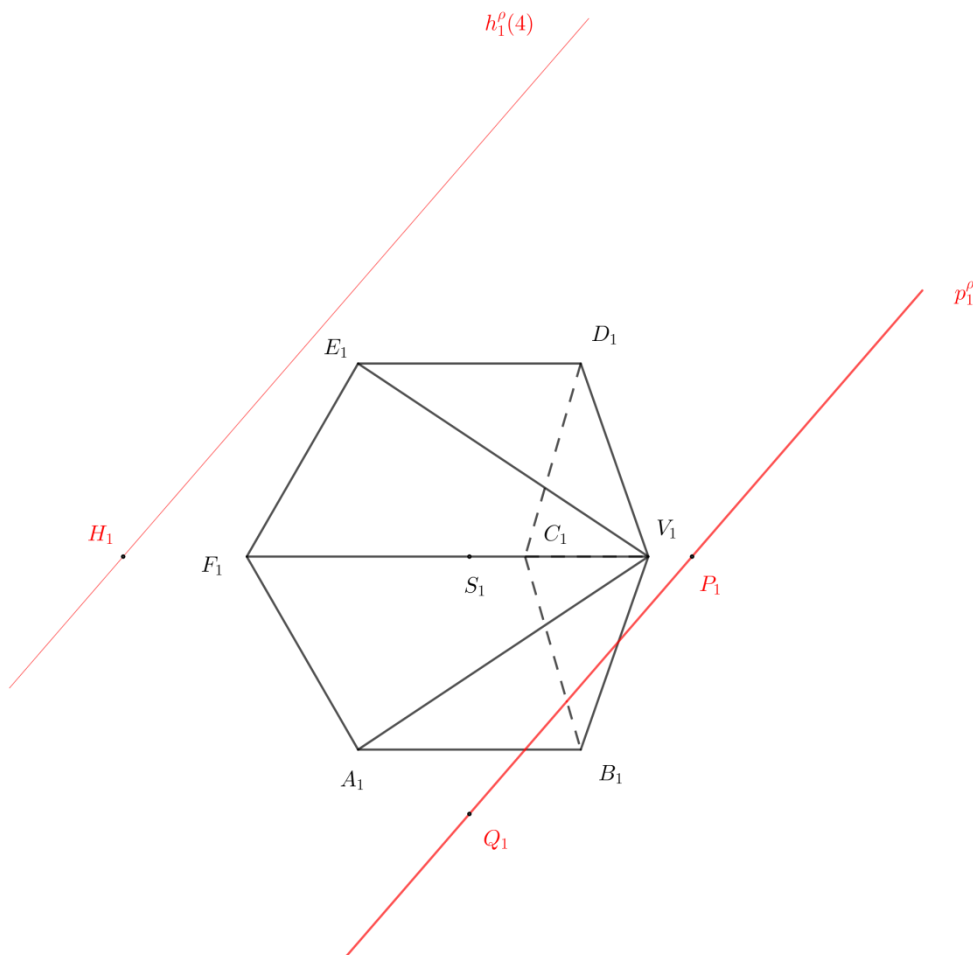
6.1 Zadání úloh ke konstrukci řezů těles

Do této kapitoly je zařazeno dvacet čtyři konstrukčních příkladů, zaměřených na sestrojení řezů šesti různých těles: šestibokého kosého nekonvexního jehlanu, pětibokého kosého hranolu, pravidelného osmistěnu, komolé krychle, antihranolu a sjednocení těles. Řez každého z těchto těles je zkonstruován ve čtyřech různých projekcích: v kótovaném promítání, v Mongeově promítání, v axonometrii a ve volném rovnoběžném promítání. Pro potřeby sbírky jsou záměrně vybrána tvarově komplikovanější tělesa, s nimiž se středoškolští studenti ve výuce deskriptivní geometrie ani stereometrie (v matematice) běžně nesetkají. Přitom schopný student střední školy má dostatečné informace ke zvládnutí vedení řezu takovým tělesem. Konstrukce jednoho tělesa v různých projekcích umožňuje ověřit správnost postupu a porovnat zobrazení téhož řezu tělesa pomocí různých zobrazovacích metod. Volné rovnoběžné promítání je přiřazeno k vybraným projekcím proto, že rozvíjí učivo stereometrie. Ke slovnímu zadání každé úlohy je připojen obrázek se zkonstruovaným tělesem a zadanými prvky, určujícími rovinu řezu. Je tedy možné vybrat si zadání úlohy slovní, nebo obrázkem.

6.1.1 Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu

6.1.1.1 Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu v kótovaném promítání

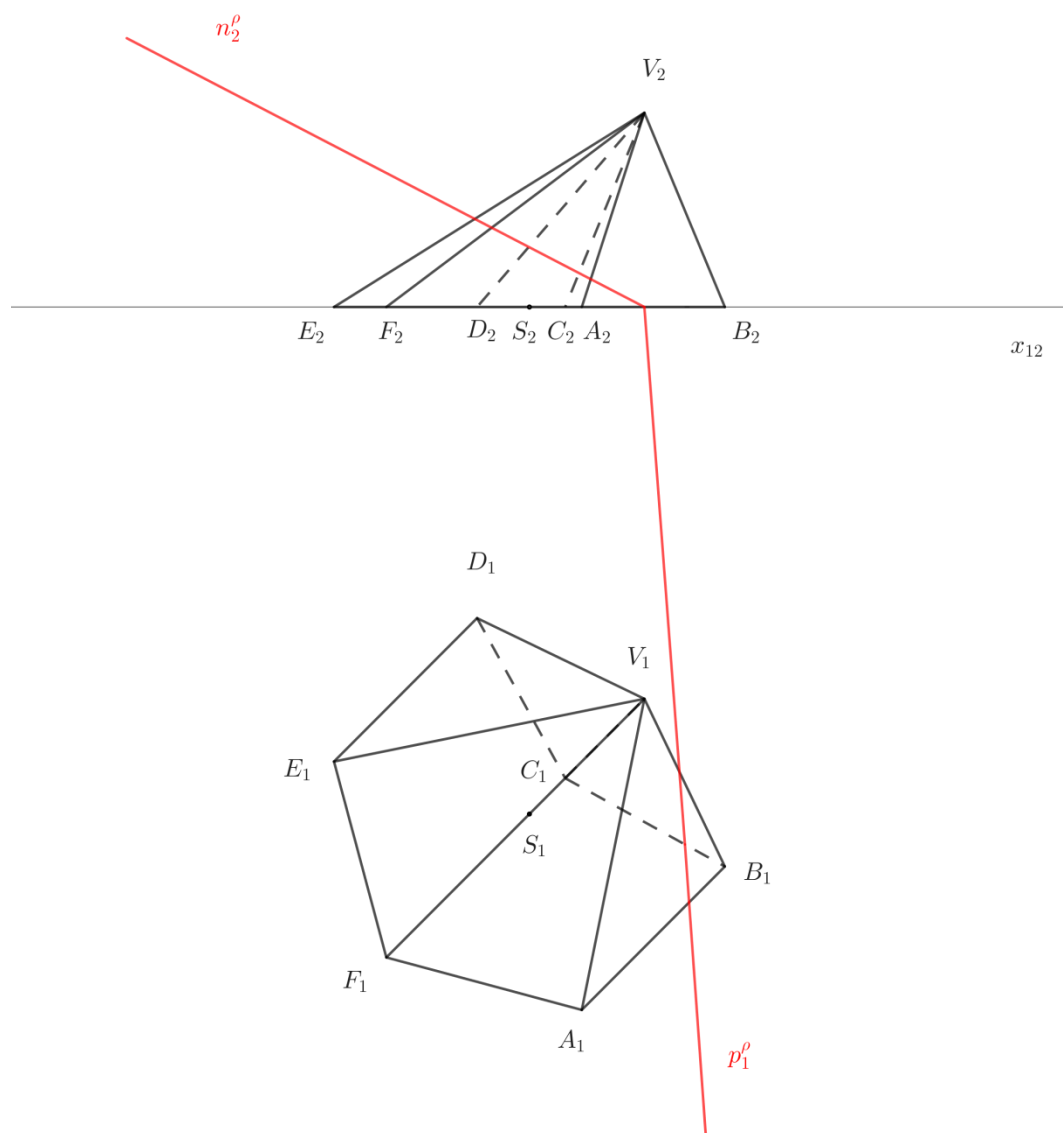
V kótovaném promítání sestrojte kosý nekonvexní šestiboký jehlan $ABCDEFV$ s podstavou v půdorysně π , kterou – s výjimkou bodu C – tvoří pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ určený kružnicí opsanou $k = (S; r)$ a vrcholem A . Bod C leží na polopřímce FS tak, že $|FC| = 5$ j. Vrchol V jehlanu leží v rovině CSV kolmé k π , úhel $|CSV| = 50^\circ$ a délka $|SV| = 5$ j. Poté sestrojte řez tělesa rovinou ρ , určenou stopou $p_1^\rho = \leftrightarrow PQ$ a bodem H ($S = [0; 0; 0]$, $r = 4$, $A = [2; 3,5; 0]$, $P = [4; 0; 0]$, $Q = [0; 4,6; 0]$, $H = [-6,2; 0; 4]$).



Obr. 6. 1. 1. 1: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu rovinou ρ v kótovaném promítání.

6.1.1.2 Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu v Mongeově promítání

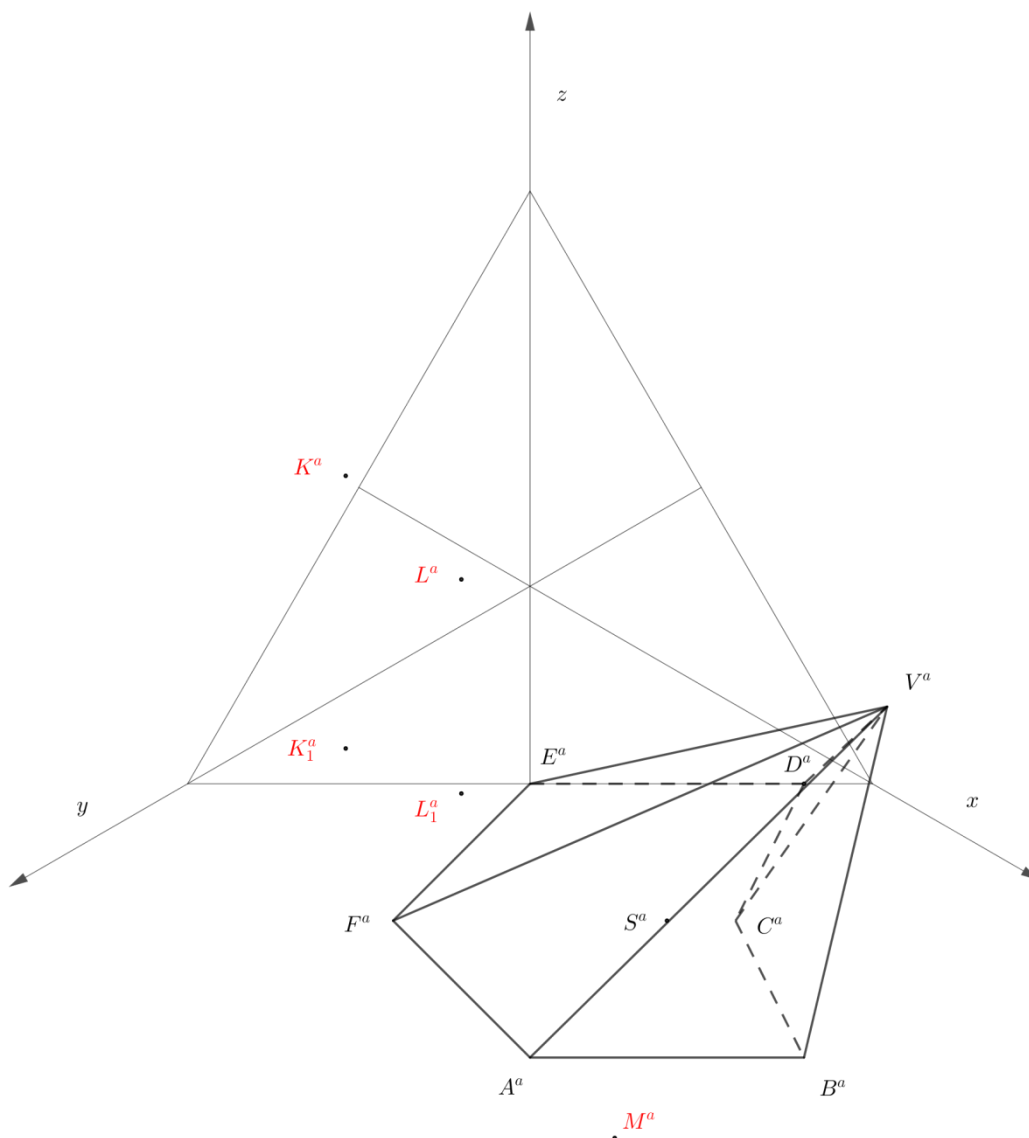
V Mongeově promítání sestrojte kosý nekonvexní šestiboký jehlan $ABCDEFV$ s podstavou v půdorysně π , kterou – s výjimkou bodu C – tvoří pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ určený kružnicí jemu opsanou $k = (S; r)$ a vrcholem A . Bod C leží na polopřímce FS tak, že $|FC| = 5$ j. Vrchol V jehlanu leží v rovině CSV kolmé k π , úhel $|CSV| = 50^\circ$, délka $|SV| = 5$ j. Poté sestrojte řez tělesa rovinou $\rho = (12,3; 94,2^\circ; 27,4^\circ)$. Souřadnice bodů: $S = [10; 10; 0]$, $A = [11; 13,9; 0]$, $r = 4$ j.



Obr. 6. 1. 1. 2: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu rovinou ρ v Mongeově promítání.

6.1.1.3 Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu v axonometrii

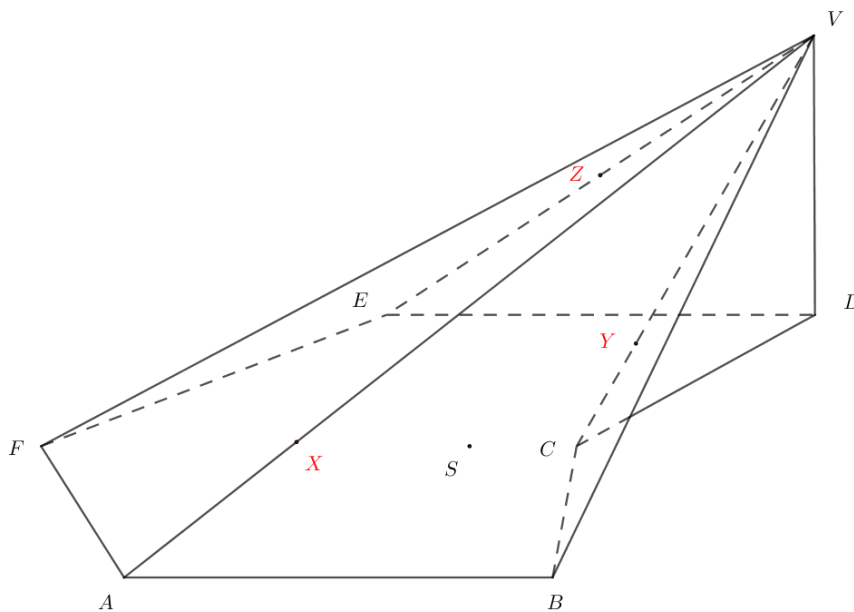
V izometrii ($|XY| = |YZ| = |XZ| = 10$) sestrojte kosý nekonvexní šestiboký jehlan $ABCDEFV$ s podstavou v půdorysně π , kterou – s výjimkou bodu C – tvoří pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ určený kružnicí opsanou $k = (S; r)$ a vrcholem A . Bod C leží na polopřímce FS tak, že $|FC| = 5$ j. Vrchol V jehlanu leží v rovině CSV kolmé k půdorysně π , úhel $|CSV| = 50^\circ$ a délka $|SV| = 5$ j. Poté sestrojte řez tělesa rovinou $\rho = \leftrightarrow KLM$. Souřadnice bodů: $S = [7,4; 4,6; 0]$, $A = [8,4; 8,4; 0]$, $K = [1; 4,8; 4,9]$, $L = [3; 4,4; 3,8]$, $M = [10,8; 9; 0]$, $r = 4$ j.



Obr. 6. 1. 1. 3: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu rovinou ρ v axonometrii.

6.1.1.4 Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu ve volném rovnoběžném promítání

Ve volném rovnoběžném promítání sestrojte kosý nekonvexní šestiboký jehlan $ABCDEFV$ s podstavou ležící ve vodorovné rovině, s hranou AB v průčelné poloze, kde $|AB| = 4$ cm. Bod C leží na polopřímce FS tak, že $|FC| = 5$ cm. Vrchol V jehlanu leží v rovině CSV kolmé k rovině podstavy, úhel $|CSV| = 50^\circ$ a délka $|SV| = 5$ cm. Poté sestrojte řez tělesa rovinou $\rho = \leftrightarrow XYZ$, platí-li $|XA| = \frac{1}{4}|AV|$, $|CY| = \frac{1}{4}|CV|$ a Z je střed hrany EV .

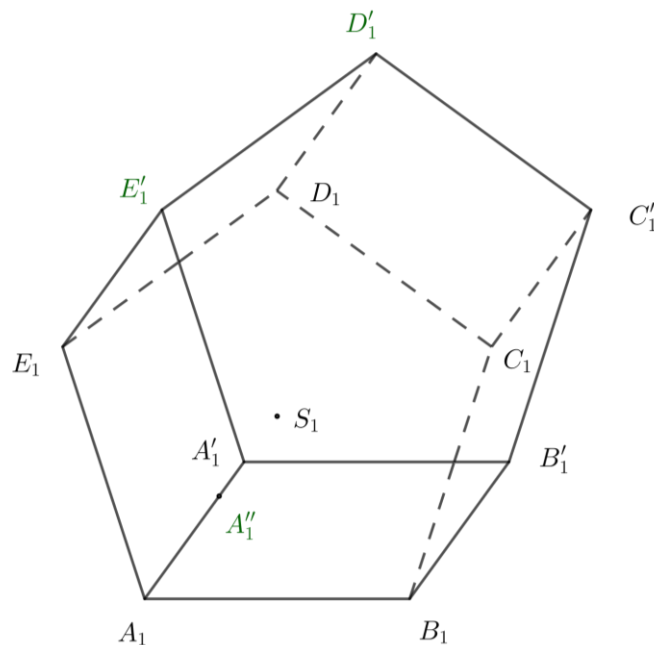


Obr. 6. 1. 1. 4: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu rovinou XYZ ve volném rovnoběžném promítání.

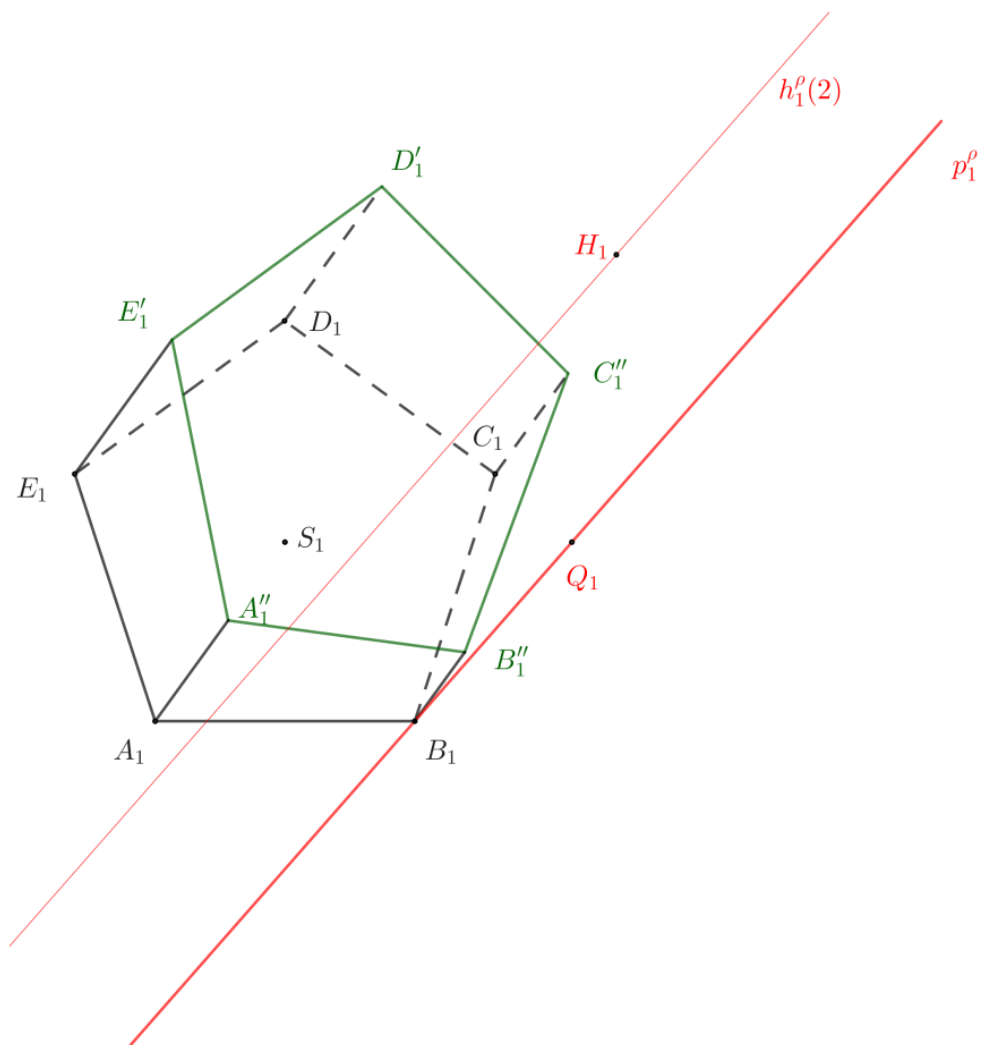
6.1.2 Dva řezy kosého pětibokého hranolu

6.1.2.1 Dva řezy kosého pětibokého hranolu v kótovaném promítání

V kótovaném promítání sestrojte pravidelný kosý pětiboký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$, jehož spodní podstava leží v půdorysně a je určena bodem $B = [2,4; 3,2; 0]$ a kružnicí opsanou $k = (S, r)$, kde $S = [0; 0; 0]$ a $r = 4$ j. Úhel $|A'AS| = 60^\circ$ leží v rovině kolmé k půdorysně π a délka boční hrany $b = 6$ j. Poté (i) těleso seřízněte rovinou $A''E'D'$, kde $|AA''| = 3/4 |AA'|$ a (ii) nově vzniklým seříznutým hranolem $ABCDEA''B''C''D'E'$ ved'te řez rovinou ρ určenou stopou $\rho \cap \pi = \leftrightarrow BQ$ a bodem H ($Q = [5,2; 0; 0]$, $H = [6; -5,2; 2]$).



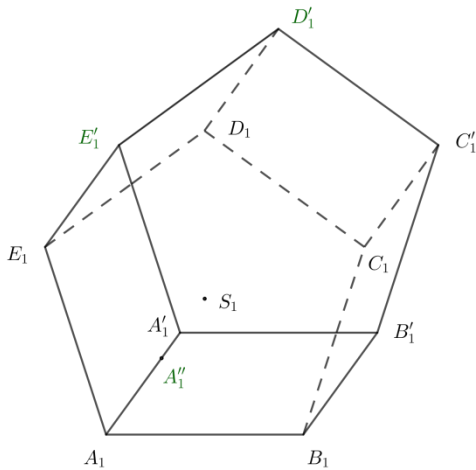
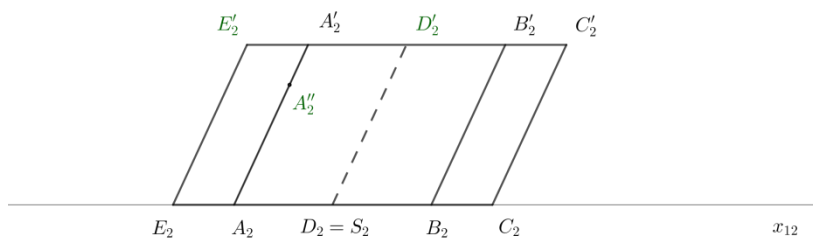
Obr. 6. 1. 2. 1(i): Řez kosého pětibokého hranolu rovinou $E'D'A''$ v kótovaném promítání.



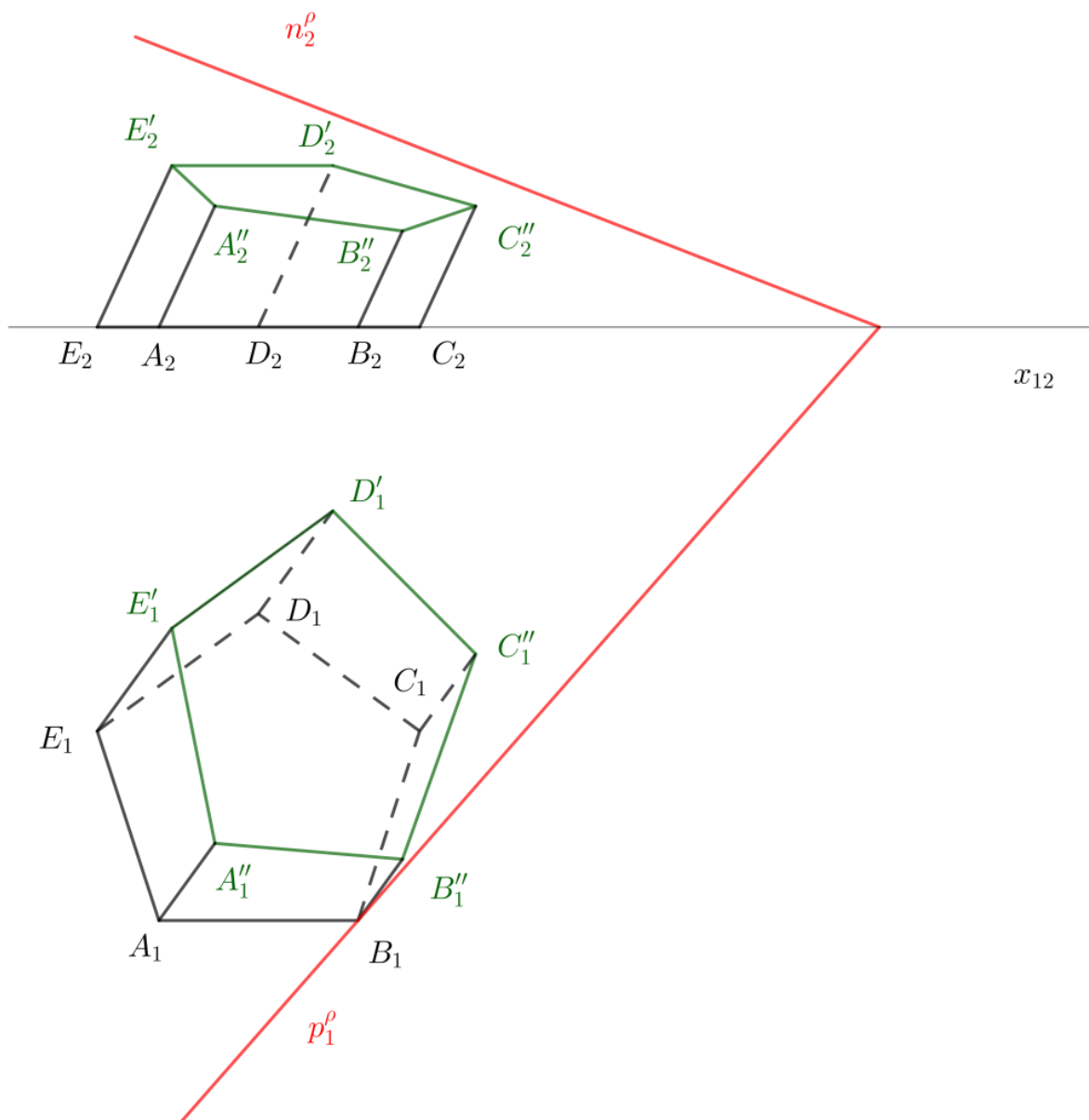
Obr. 6. 1. 2. 1(ii): Řez kosého pětibokého hranolu rovinou ρ v kótovaném promítání.

6.1.2.2 Dva řezy kosého pětibokého hranolu v Mongeově promítání

V Mongeově promítání sestrojte pravidelný kosý pětiboký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$, jehož spodní podstava leží v půdorysně π a je určena bodem $B = [0; 14; 0]$ a kružnicí opsanou $k = (S, r)$, kde $S = [-2,4; 10,8; 0]$ a $r = 4$ j. Úhel $|A'AS| = 60^\circ$ leží v rovině kolmé k půdorysně π a délka boční hrany $b = 6$ j. Potom (i) těleso seřízněte rovinou $A''E'D'$, kde $|AA''| = \frac{3}{4}|AA'|$. (ii) Nově vzniklým seříznutým hranolem $ABCDEA''B''C''D'E'$ vedte řez rovinou $\rho = (12,3; 14; 4,8)$.



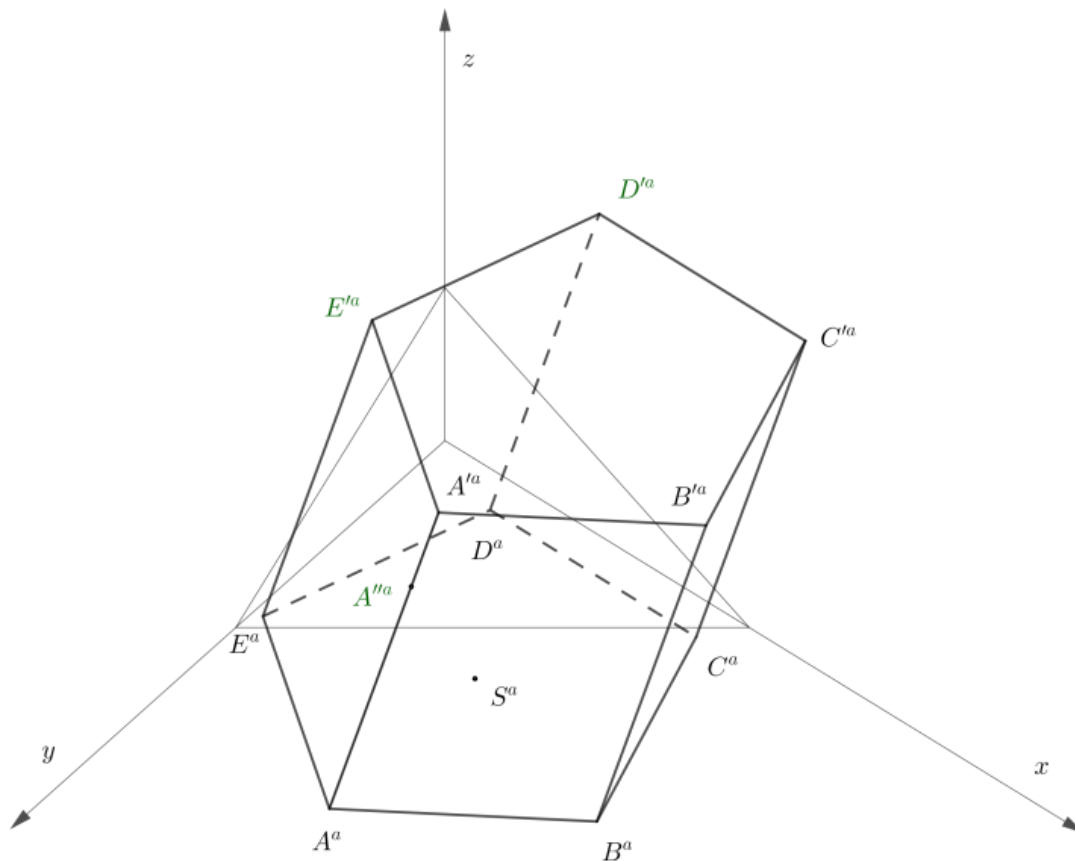
Obr. 6. 1. 2. 2(i): Řez kosého pětibokého hranolu rovinou $E'D'A''$ v Mongeově promítání.



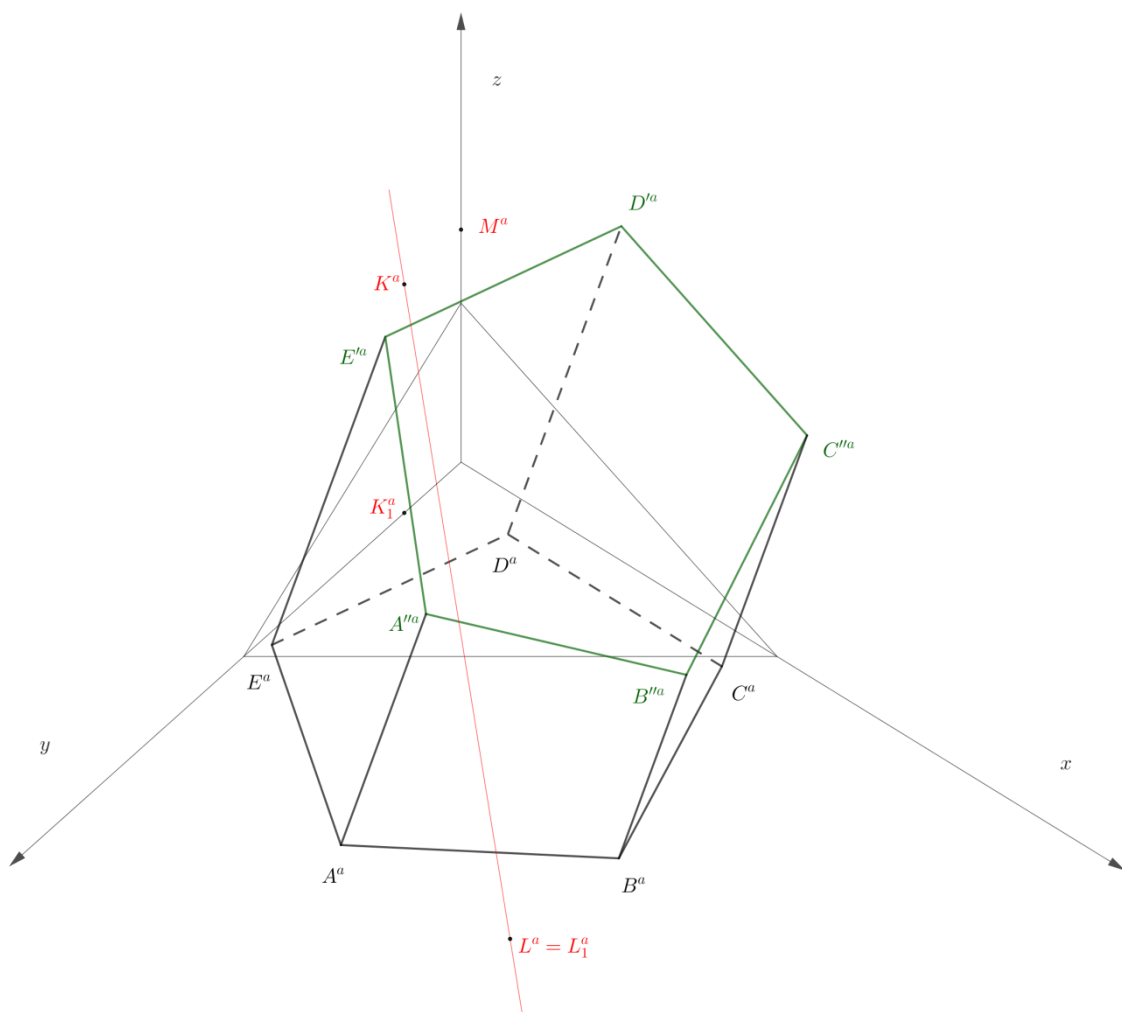
Obr. 6. 1. 2. 2(ii): Řez kosého pětibokého hranolu rovinou p v Mongeově promítání.

6.1.2.3 Dva řezy kosého pětibokého hranolu v axonometrii

V axonometrii ($|XY| = 9$, $|YZ| = 7$, $|XZ| = 8$) sestrojte pravidelný kosý pětiboký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$, jehož spodní podstava určená vrcholem $A = [4; 8; 0]$ a středem podstavy $S = [4; 4; 0]$ leží v půdorysně π . Úhel $\angle A'AS = 60^\circ$ leží v rovině kolmé k π a délka boční hrany $b = 6$ j. Poté (i) těleso seřízněte rovinou $A''E'D'$, kde $|AA''| = \frac{3}{4}|AA'|$. (ii) Nově vzniklým seříznutým hranolem $ABCDEA''B''C''D'E'$ ved'te řez rovinou ρ , určenou přímkou KL a bodem M ($K = [0; 1,5; 5,8]$, $L = [7,6; 7,8; 0]$, $M = [0; 0; 5,9]$).



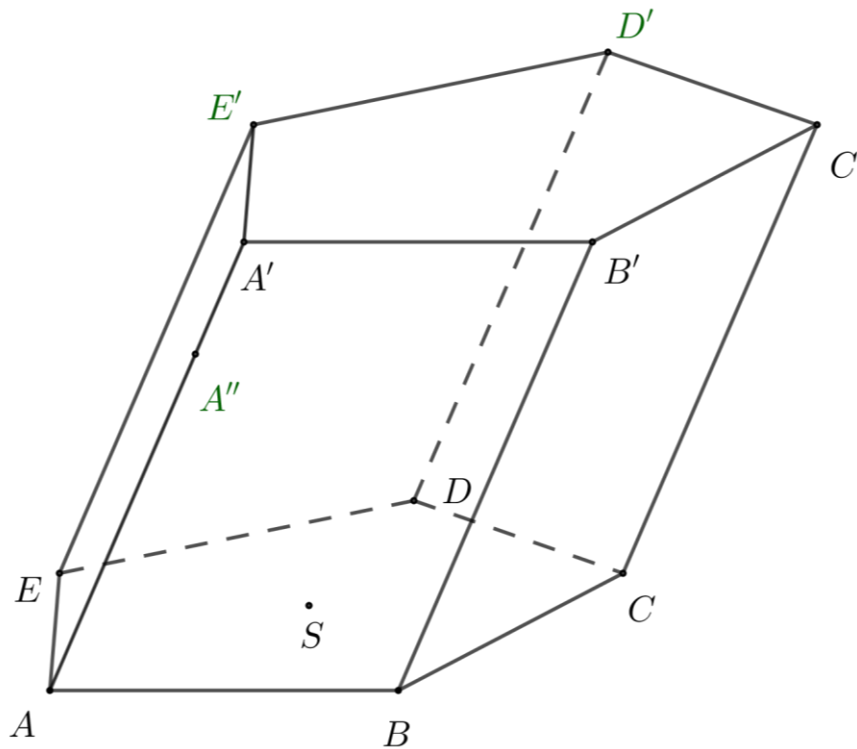
Obr. 6. 1. 2. 3(i): Řez kosého pětibokého hranolu rovinou $E'D'A''$ v axonometrii.



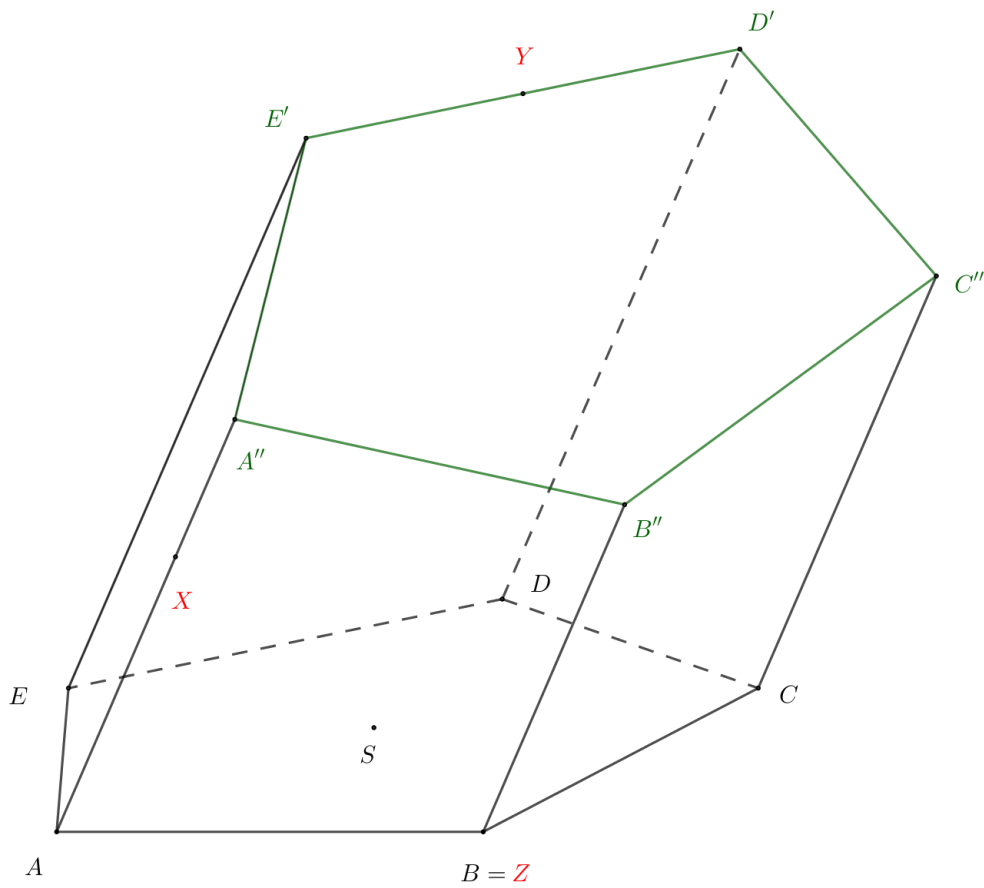
Obr. 6. 1. 2. 3(ii): Řez kosého pětibokého hranolu rovinou ρ v axonometrii.

6.1.2.4 Dva řezy kosého pětibokého hranolu ve volném rovnoběžném promítání

Ve volném rovnoběžném promítání sestrojte pravidelný kosý pětiboký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$, jehož spodní podstava leží ve vodorovné rovině a je určena hranou AB v průčelné poloze, kde $|AB| = 4,7$ cm. Délka boční hrany $|AA'| = 6$ cm, velikost úhlu $|A'S| = 60^\circ$. Následně (i) těleso seřízněte rovinou $A''E'D'$, kde $|AA''| = \frac{3}{4}|AA'|$. (ii) Nově vzniklým seříznutým hranolem $ABCDEA''B''C''D'E'$ vedte řez rovinou $\rho = \leftrightarrow XYZ$, kde X je střed hrany AA'' , Y je středem hrany $E'D'$ a $Z = B$.



Obr. 6. 1. 2. 4(i): Řez kosého pětibokého hranolu rovinou $E'D'A''$ ve volném rovnoběžném promítání.

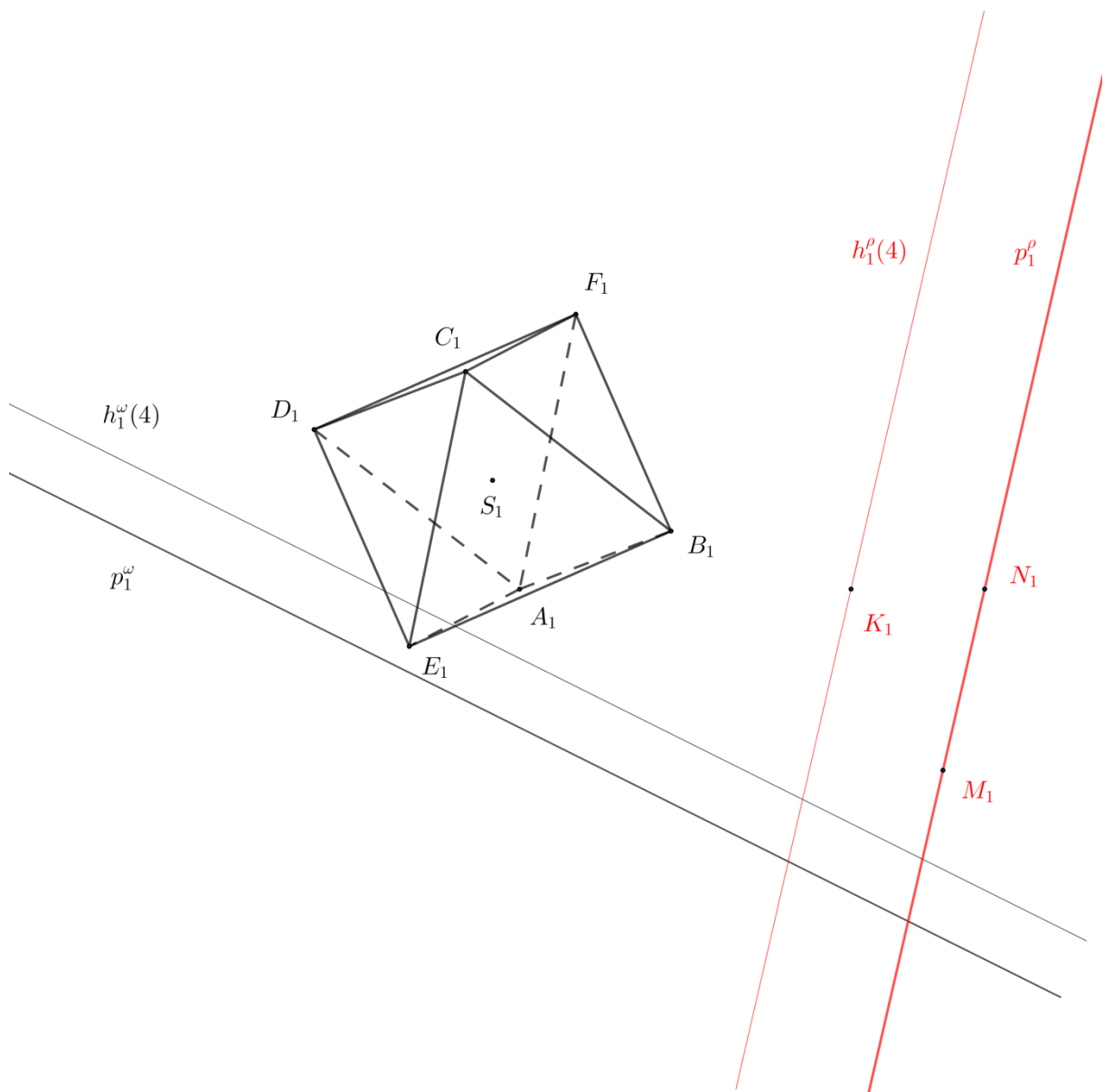


Obr. 6. 1. 2. 4(ii): Řez kosého pětibokého hranolu rovinou XYZ ve volném rovnoběžném promítání.

6.1.3 Řez pravidelného osmistěnu

6.1.3.1 Řez pravidelného osmistěnu v kótovaném promítání

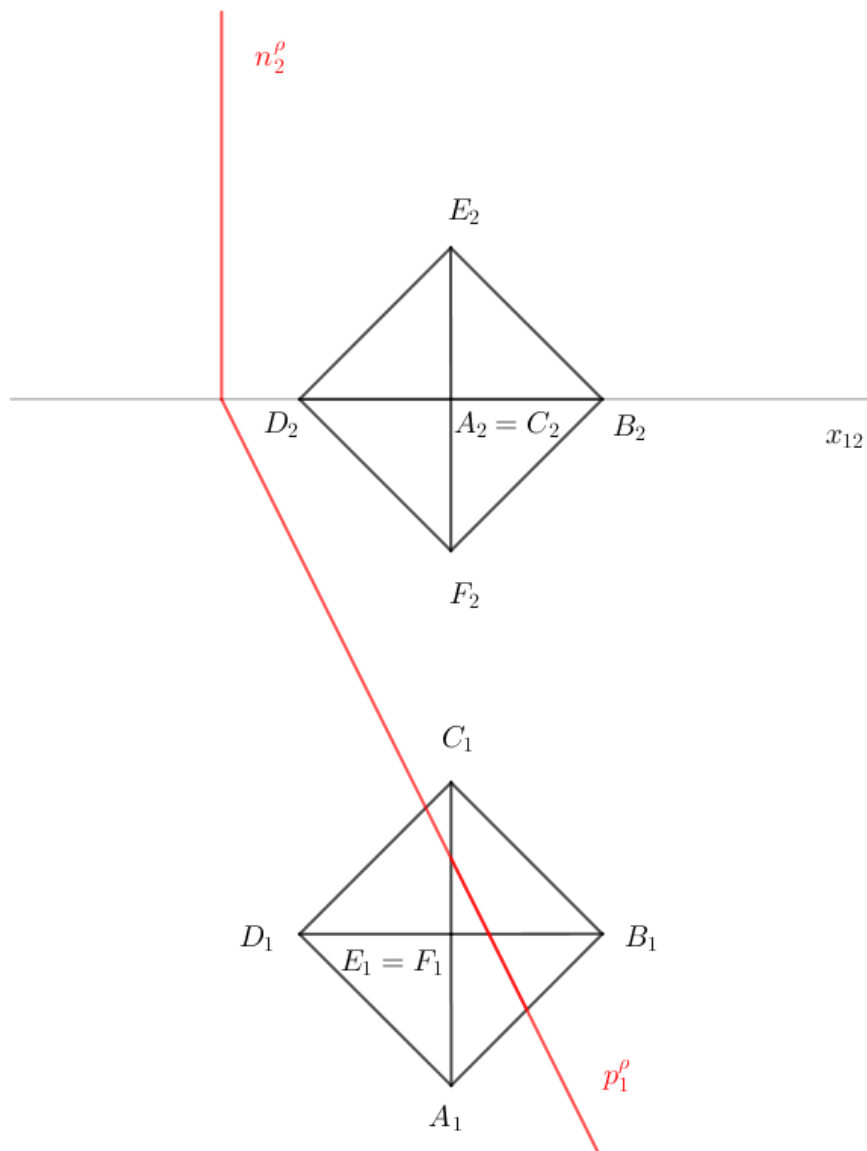
V kótovaném promítání sestrojte pravidelný osmistěn $ABCDEF$, kde body A, B, C určují rovinu ω . Následně sestrojte řez tělesa rovinou ρ určenou stopou $p_1^\rho = \leftrightarrow MN$ a bodem K ($A = [0; 0; 8], B = [3,3; 1,3; 15,7] C = [-1,2; 4,7; 19]; M = [9,1; 3,9; 0], N = [10; 0; 0], K = [7,2; 0; 4]$).



Obr. 6. 1. 3. 1: Řez pravidelného osmistěnu rovinou ρ v kótovaném promítání.

6.1.3.2 Řez pravidelného osmistěnu v Mongeově promítání

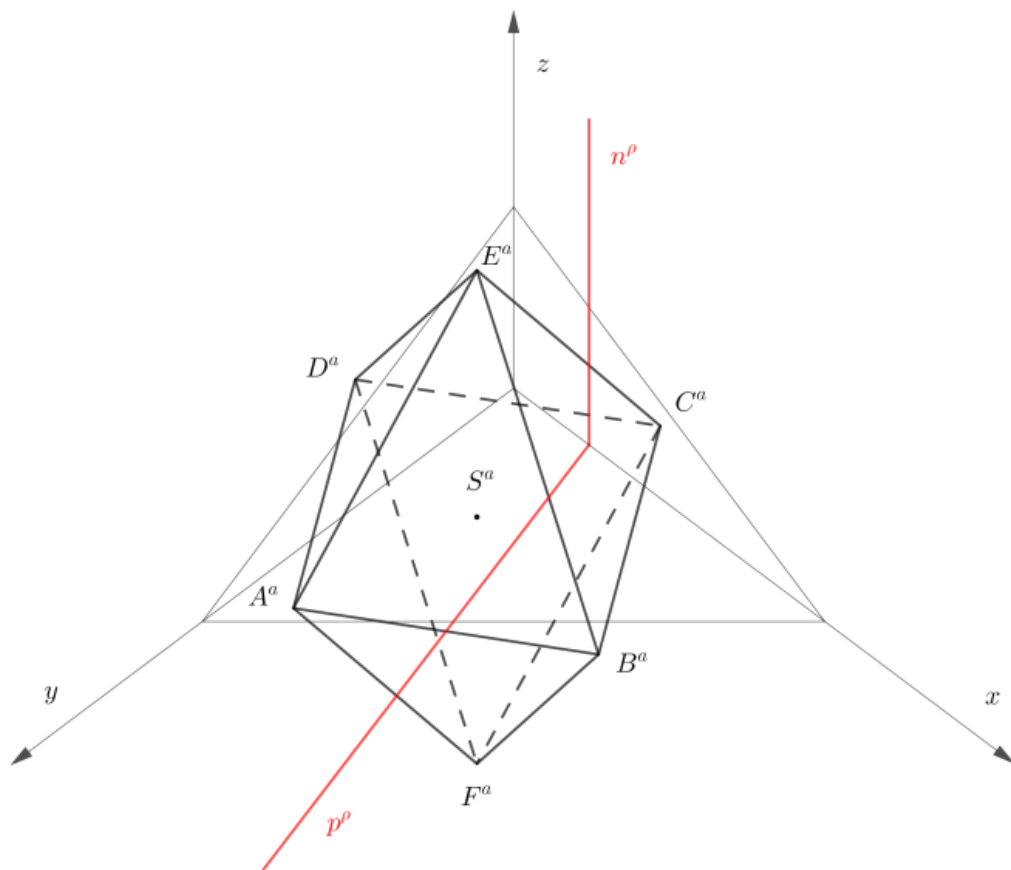
V Mongeově promítání sestrojte pravidelný osmistěn $ABCDEF$, který je určen vrcholy A, B, C , ležícími v půdorysně π a bodem E . Následně sestrojte řez tělesa rovinou ρ , je-li dáno: $A = [1; 38,5; 0]$, $B = [9,5; 30; 0]$, $E = [1; 38,5; 8,5]$; $\rho = (-11,9; 23,7; \infty)$.



Obr. 6. 1. 3. 2: Řez pravidelného osmistěnu rovinou ρ v Mongeově promítání.

6.1.3.3 Řez pravidelného osmistěnu v axonometrii

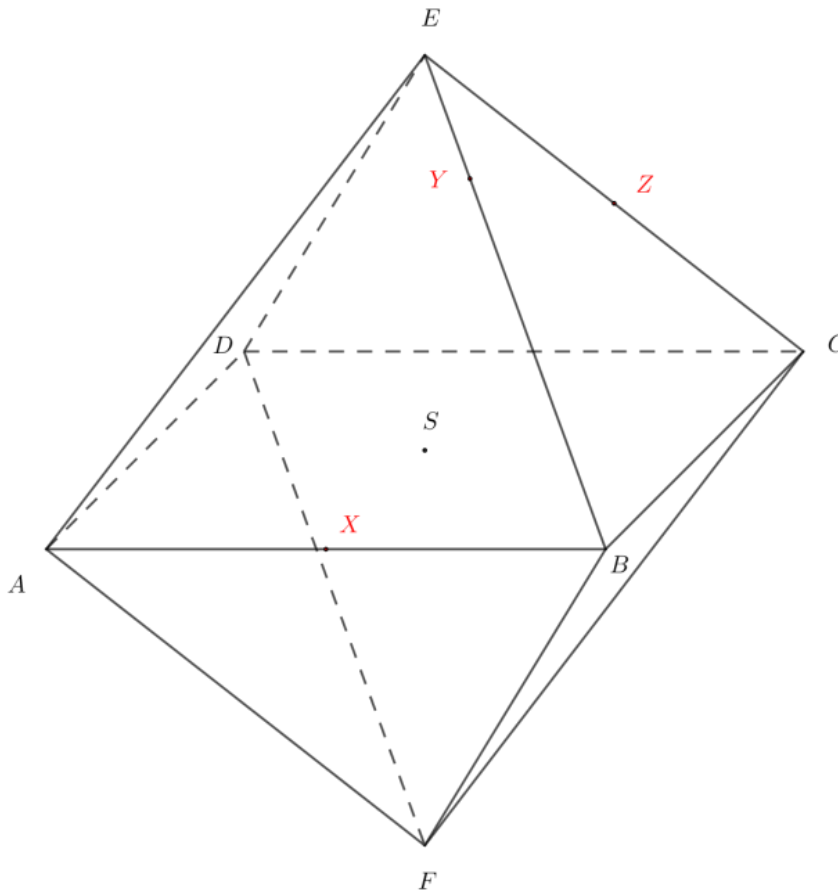
V axonometrii ($|XY| = 12$, $|YZ| = 10$, $|XZ| = 10$) sestrojte pravidelný osmistěn $ABCDEF$, který je určen vrcholy A , B , C , ležícími v půdorysně π a bodem E . Pak sestrojte řez tělesa rovinou ρ , je-li dáno: $A = [1; 7; 0]$, $B = [6; 3,7; 0]$, $E = [1,8; 2,8; 7,2]$; $\rho = (2; -7,6; \infty)$.



Obr. 6. 1. 3. 3: Řez pravidelného osmistěnu rovinou ρ v axonometrii.

6.1.3.4 Řez pravidelného osmistěnu ve volném rovnoběžném promítání

Ve volném rovnoběžném promítání sestrojte pravidelný osmistěn $ABCDEF$, jehož podstava leží ve vodorovné rovině a hrana AB je v průčelné poloze, kde $|AB| = 6$ cm. Poté sestrojte řez tělesa rovinou $\rho = \leftrightarrow XYZ$, kde X je střed hrany AB , $|EY| = 1/4|EB|$ a bod Z je středem hrany CE .

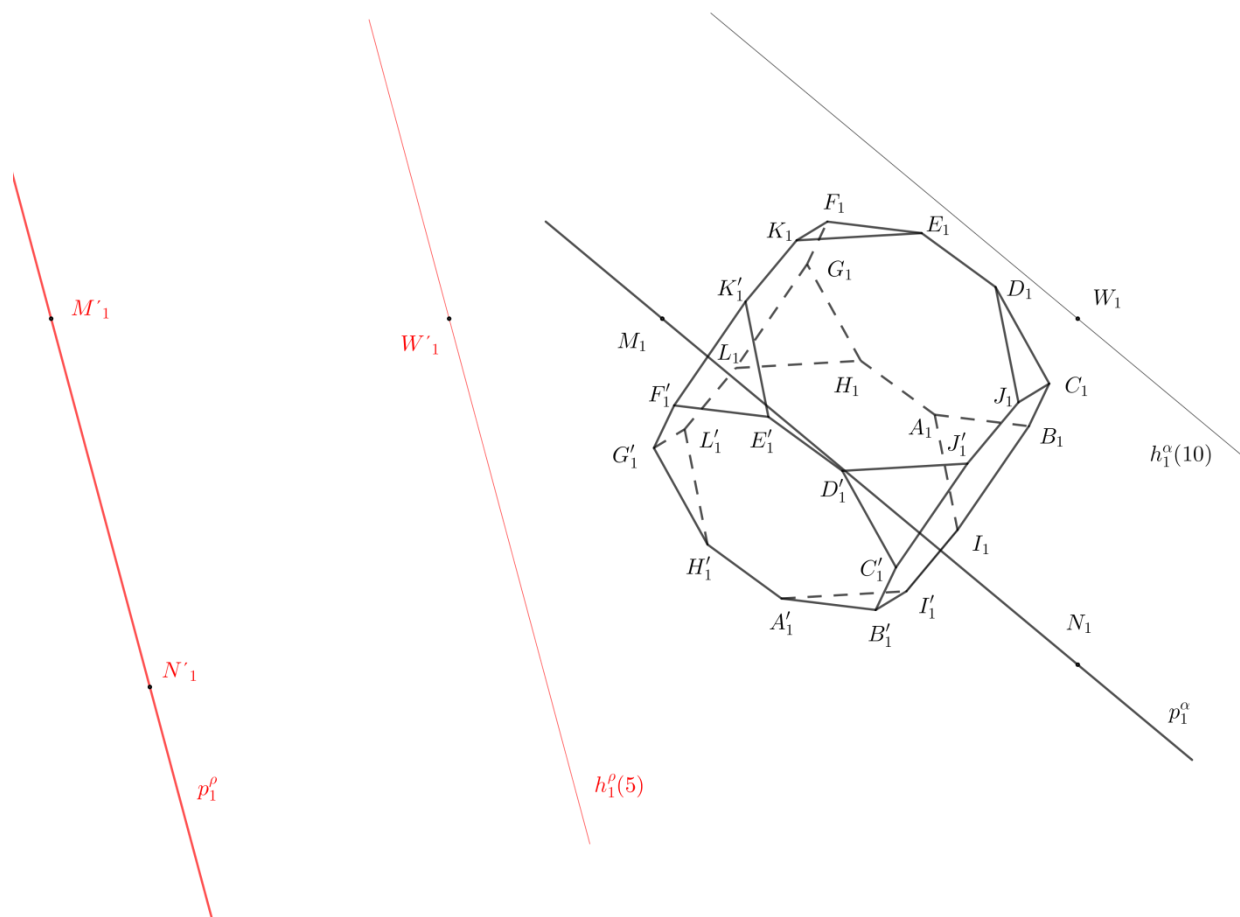


Obr. 6. 1. 3. 4: Řez pravidelného osmistěnu rovinou XYZ ve volném rovnoběžném promítání.

6.1.4 Řez komolé krychle

6.1.4.1 Řez komolé krychle v kótovaném promítání

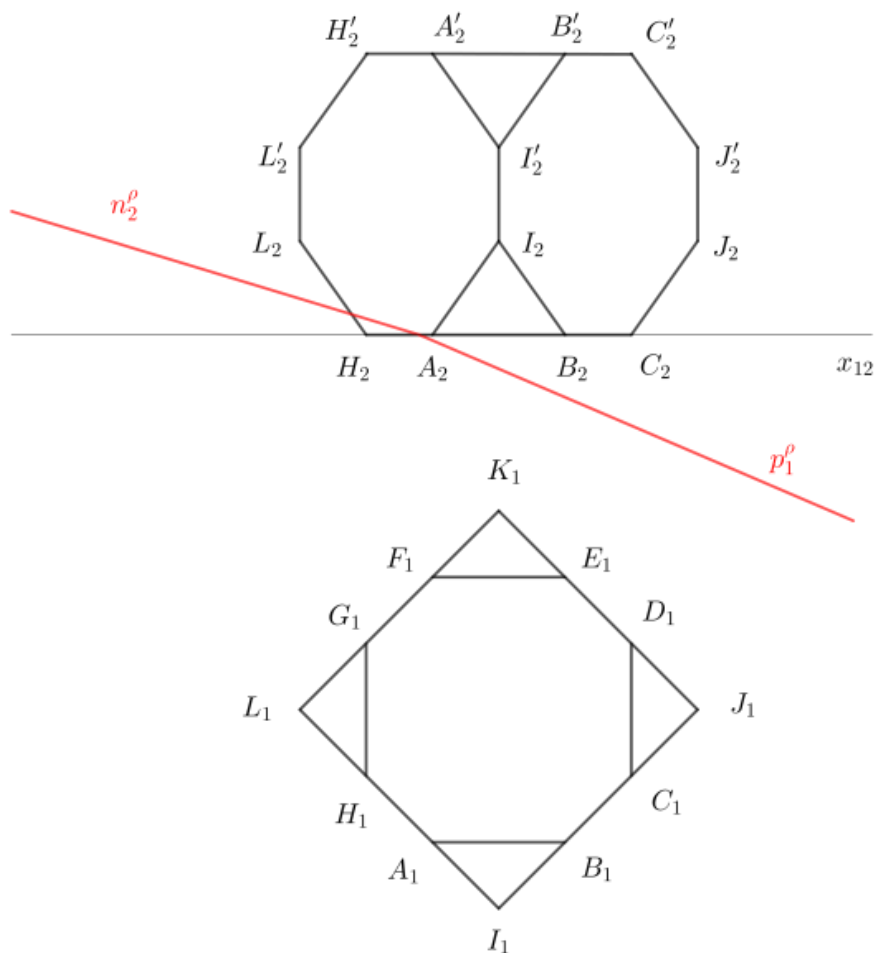
V kótovaném promítání je dána rovina α stopou $p_1^\alpha = \leftrightarrow MN$ a hlavní přímkou h_1^α , na níž leží bod W . V této rovině leží úsečka OQ , která je úhlopříčkou spodní podstavy krychle $OPQRO'P'Q'R'$. Tuto krychli osekejte tak, aby z ní vznikla komolá krychle $ABCDEFGHIJKLA'B'C'D'E'F'G'H'I'J'K'L'$ a tou následně ved'te řez rovinou ρ , která je určena stopou $p_1^\rho = \leftrightarrow M'N'$, a hlavní přímkou h_1^ρ incidentní s bodem W' . Souřadnice bodů: $M = [0; 0; 0]$, $N = [9; 7,5; 0]$, $W = [9; 0; 10]$, $O = [7,5; 3,3; 4]$, $Q = [4; -3; 8,5]$, $M' = [-13,3; 0; 0]$, $N' = [-11,1; 8; 0]$, $W' = [-4,6; 0; 5]$.



Obr. 6. 1. 4. 1: Řez komolé krychle rovinou ρ v kótovaném promítání.

6.1.4.2 Řez komolé krychle v Mongeově promítání

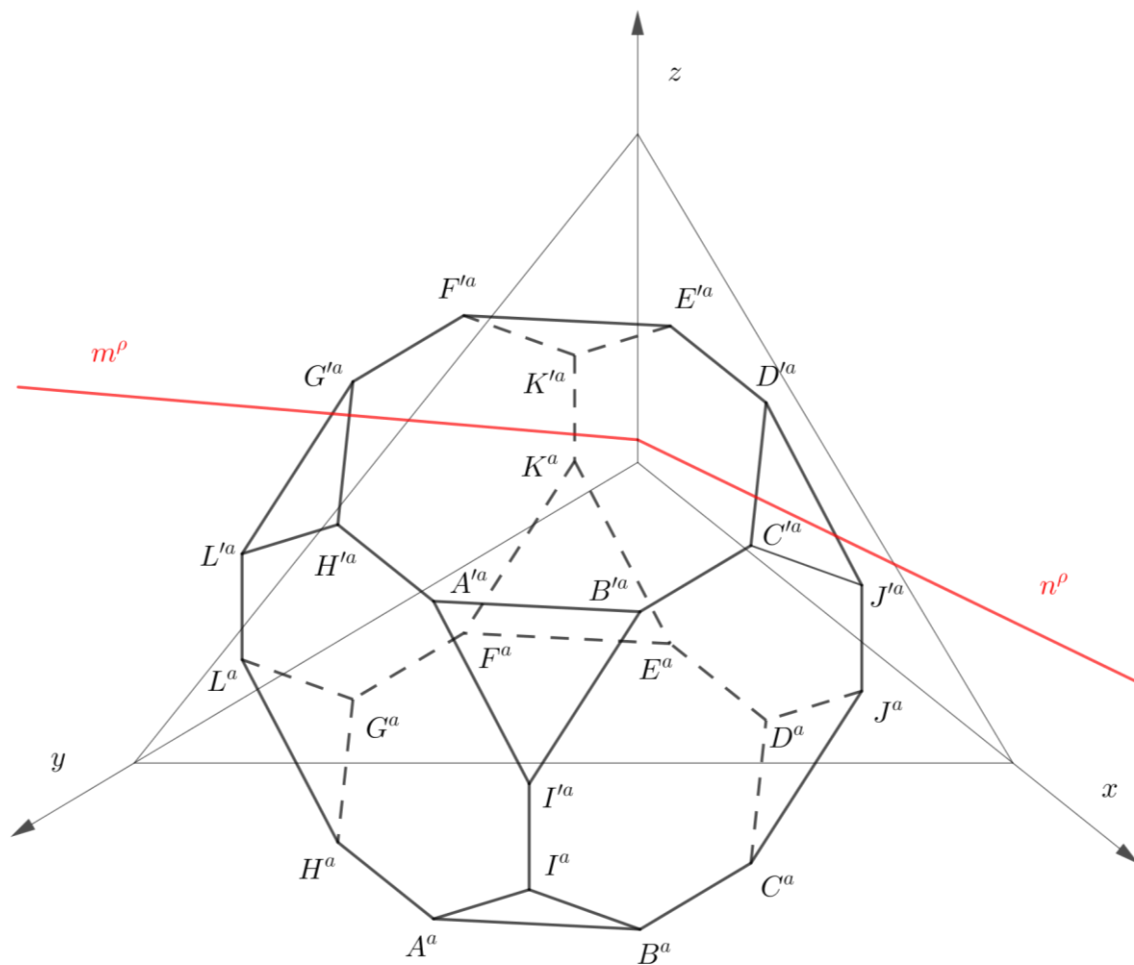
V Mongeově promítání sestrojte řez komolé krychle $ABCDEF GHIJKLA'B'C'D'E'F'G'H'I'J'K'L'$ s podstavou $ABCDEF GH$ v půdorysně π rovinou ρ , je-li dána úhlopříčka OQ podstavy původní neosekané krychle $OPQRO'P'Q'R'$, ležící rovněž v rovině π . Souřadnice bodů: $O = [0; 12,2; 0]$, $Q = [0; 3,8; 0]$; $\rho = (-1,7; 0,7; -0,5)$.



Obr. 6. 1. 4. 2: Řez komolé krychle rovinou ρ v Mongeově promítání.

6.1.4.3 Řez komolé krychle v axonometrii

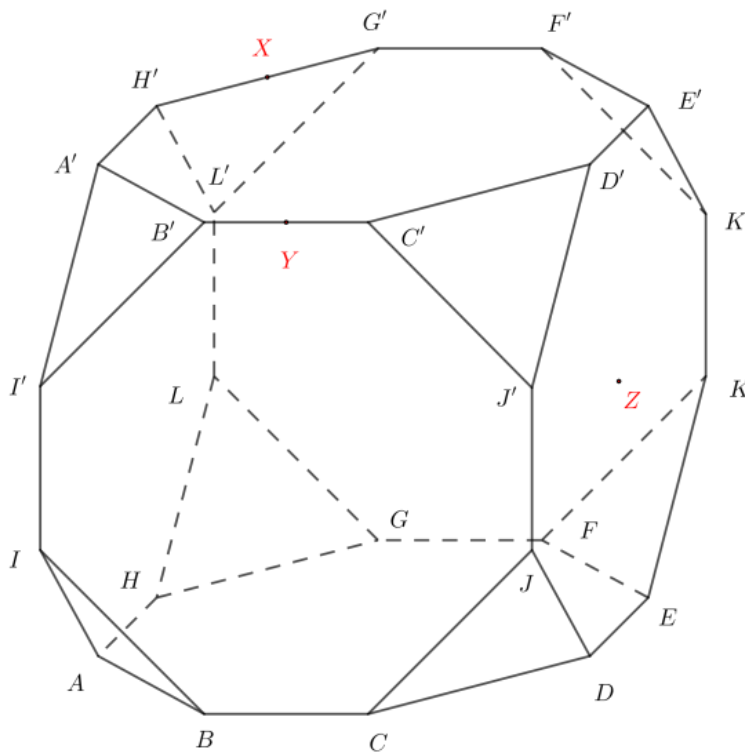
V axonometrii ($|XY| = 12$, $|YZ| = 11$, $|XZ| = 10$) sestrojte řez komolé krychle $ABCDEFGHIJKLA'B'C'D'E'F'G'H'I'J'K'L'$ s podstavou $ABCDEFGH$ v půdorysně π rovinou ρ , je-li dána úhlopříčka OQ podstavy původní neosekané krychle $OPQRO'P'Q'R'$ ležící rovněž v rovině π . Souřadnice bodů: $O = [7; 8; 0]$, $Q = [1; 2; 0]$; $\rho = (-1,5; -0,6; 0,4)$.



Obr. 6. 1. 4. 3: Řez komolé krychle rovinou ρ v axonometrii.

6.1.4.4 Řez komolé krychle ve volném rovnoběžném promítání

Ve volném rovnoběžném promítání sestrojte řez komolé krychle $ABCDEF GHIJKLA'B'C'D'E'F'G'H'I'J'K'L'$ s podstavou $ABCDEF GH$ ve vodorovné rovině rovinou $\rho = \leftrightarrow XYZ$, je-li délka hrany podstavy původní neosekané krychle $OPQRO'P'Q'R'$ ležící rovněž v rovině kolmé k nárysně rovna 6 cm. Bod X je střed hrany $G'H'$, bod Y je střed hrany EF a bod Z je středem stěny $JDEKK'E'D'J'$.



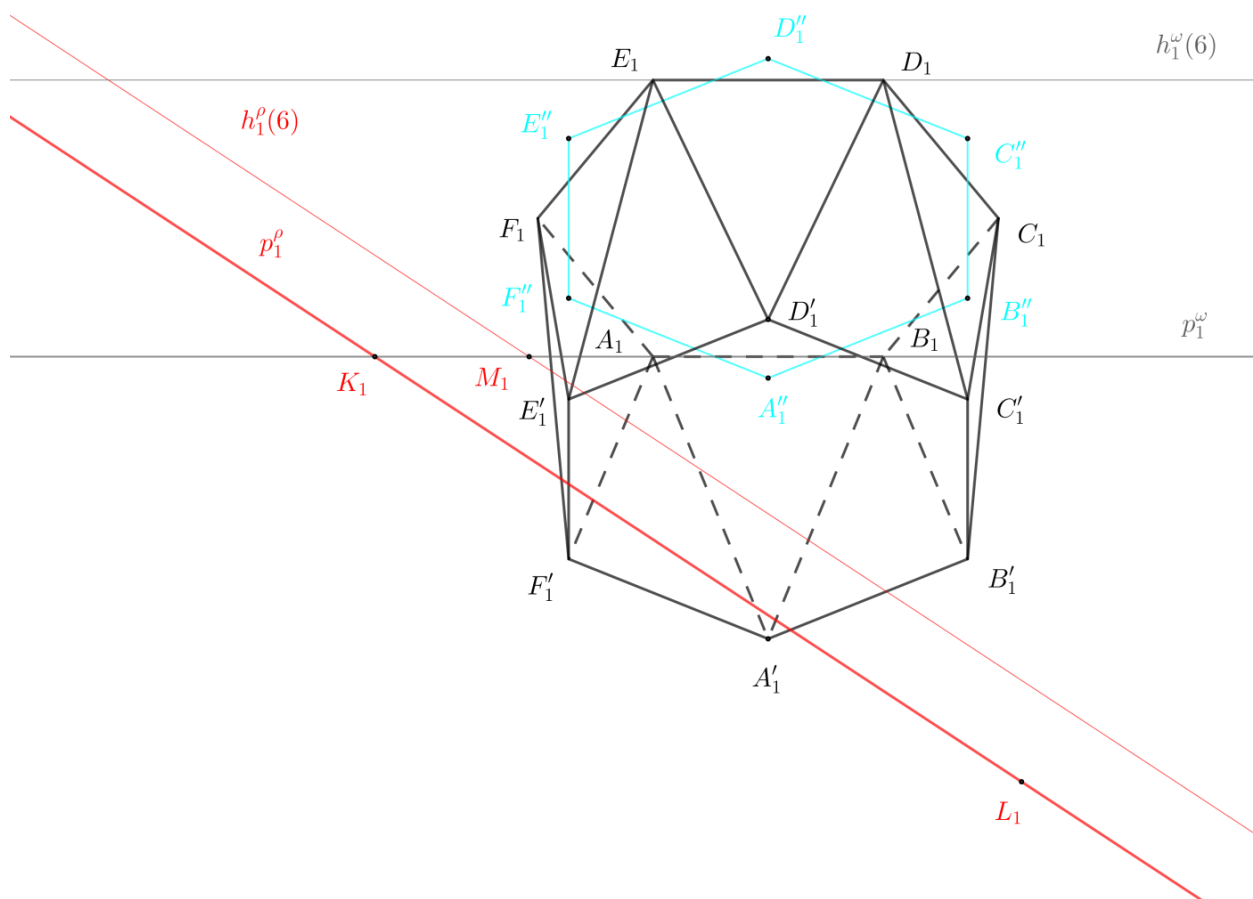
Obr. 6. 1. 4. 4: Řez komolé krychle rovinou XYZ ve volném rovnoběžném promítání.

6.1.5 Řez antihranolu

6.1.5.1 Řez antihranolu v kótovaném promítání

V kótovaném promítání je dána rovina ω a úsečka AB , která leží v rovině ω . Stopa roviny ω je definována $p_1^\omega = \leftrightarrow AB$ a hlavní přímka h_1^ω roviny ω bodem E , kde $A = [0; 0; 0]$, $B = [5; 0; 0]$, $E = [0; -6; 6]$.

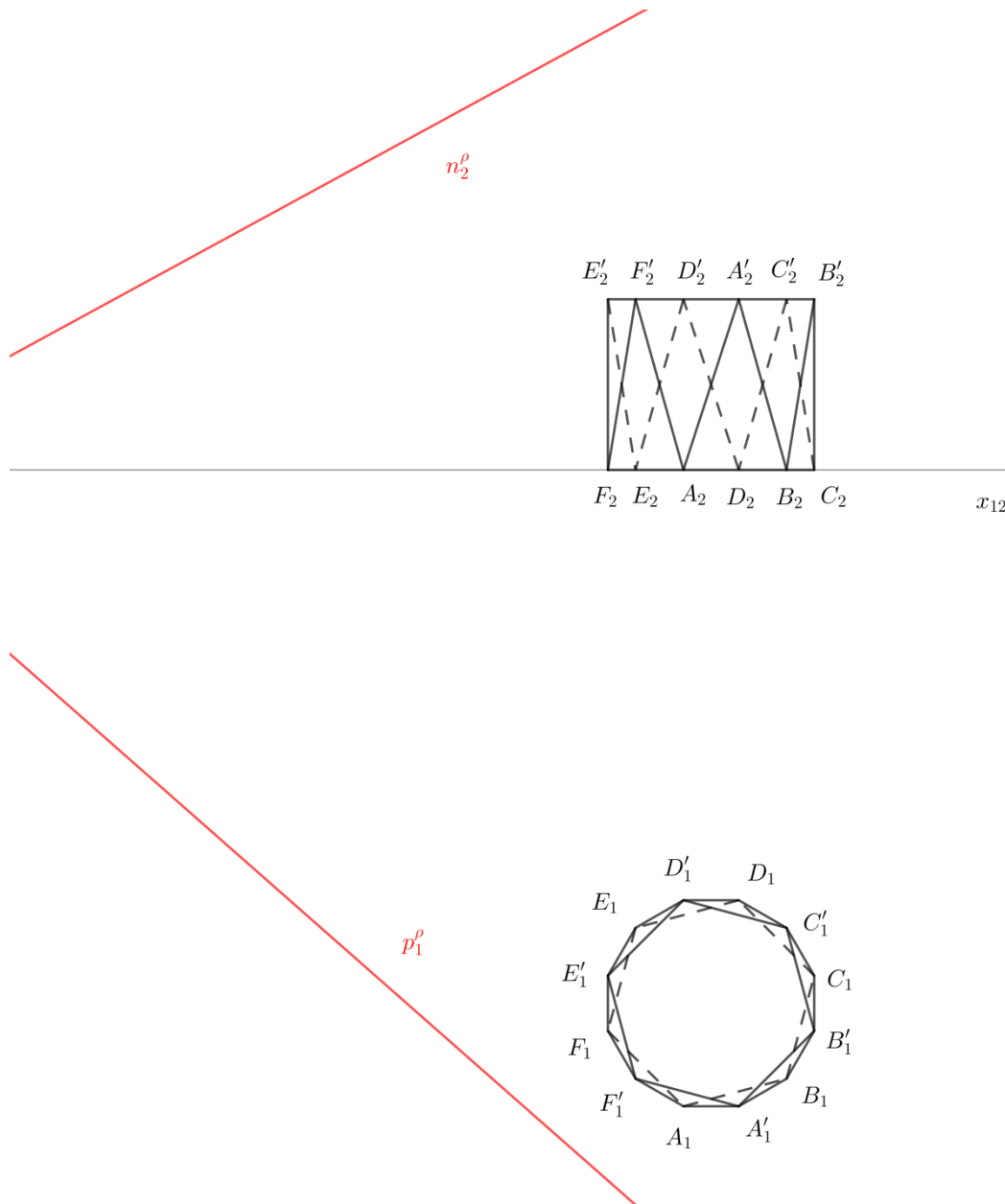
Sestrojte antihranol $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$ s podstavou ve tvaru pravidelného šestiúhelníku, ležící v ω , jehož horní podstava je oproti spodní podstavě pootočena o 30° kladným směrem. Vzdálenost středů obou podstav $|SS'| = 8$ j. Poté sestrojte řez tělesa rovinou ρ , která je určena stopou $p_1^\rho = \leftrightarrow KL$ a hlavní přímkou h_1^ρ , na níž leží bod M ($K = [6; 0; 0]$, $L = [8; 9,2; 0]$, $M = [2,7; 0; 6]$).



Obr. 6. 1. 5. 1: Řez antihranolu rovinou ρ v kótovaném promítání.

6.1.5.2 Řez antihranolu v Mongeově promítání

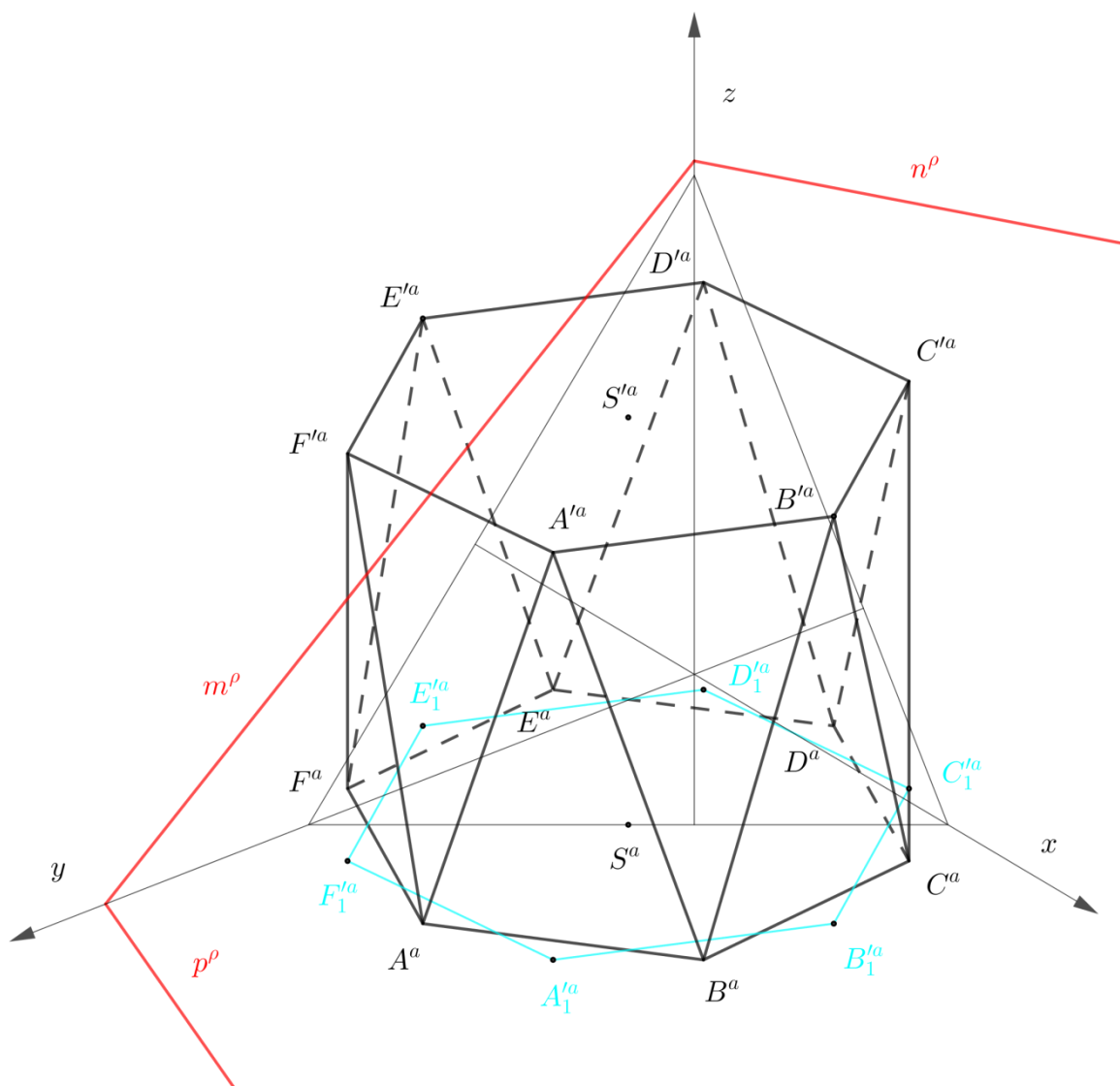
V Mongeově promítání sestrojte antihranol $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ s podstavou ve tvaru pravidelného šestiúhelníku, ležící v púdorysně π . Horní podstava tělesa je oproti spodní podstavě potočena o 30° kladným směrem. Vzdálenost středů obou podstav $|SS'| = 8$ j. Následně sestrojte řez tělesa rovinou $\rho = (-41,3; 36,4; 22,5)$. Souřadnice bodů: $A = [0; 29,8; 0]$, $B = [4,8; 28,5; 0]$, $A' = [2,6; 29,8; 8]$.



Obr. 6. 1. 5. 2: Řez antihranolu rovinou ρ v Mongeově promítání.

6.1.5.3 Řez antihranolu v axonometrii

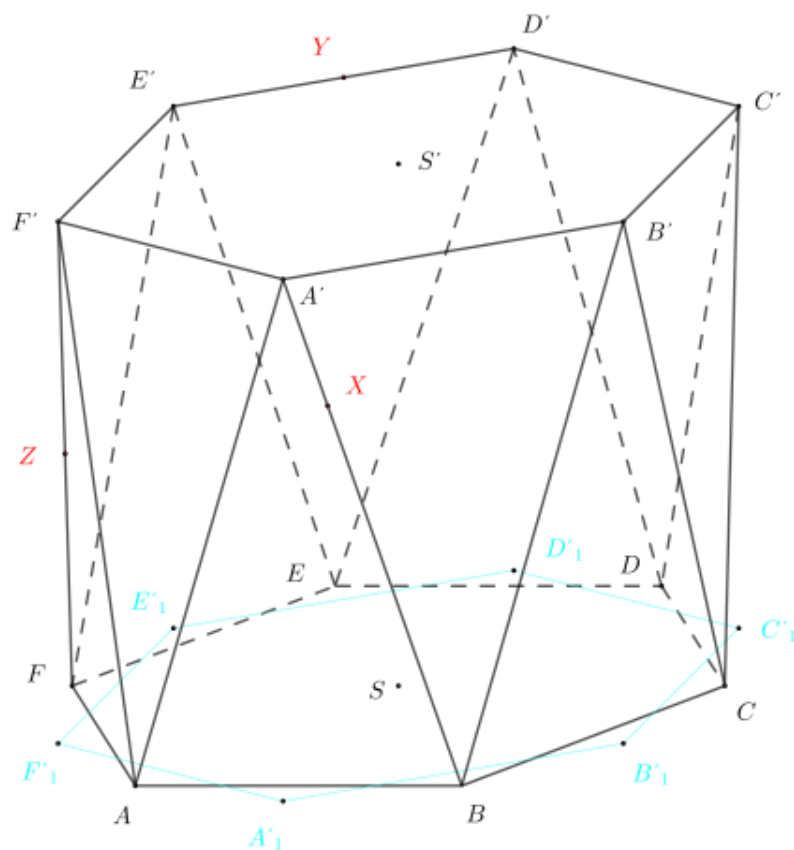
V axonometrii ($|XY| = 11$, $|YZ| = 13$, $|XZ| = 12$) sestrojte antihranol $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$ s podstavou ve tvaru pravidelného šestiúhelníku, ležící v půdorysně π . Horní podstava tělesa je oproti spodní podstavě pootočena o 30° kladným směrem. Vzdálenost středů obou podstav $|SS'| = 8$ j. Poté sestrojte řez tělesa rovinou $\rho = (-35; 13; 10, 1)$. Souřadnice bodů: $A = [4; 9,2; 0]$, $B = [8; 6,3; 0]$, $A' = [6,4; 8,3; 8]$.



Obr. 6. 1. 5. 3: Řez antihranolu rovinou ρ v axonometrii.

6.1.5.4 Řez antihranolu ve volném rovnoběžném promítání

Ve volném rovnoběžném promítání sestrojte antihranol $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$ s podstavou ve tvaru pravidelného šestiúhelníku, ležící ve vodorovné rovině. Horní podstava tělesa je oproti spodní podstavě potočena o 30° kladným směrem. Hrana AB je v průčelné poloze, $|AB| = 5$ cm. Vzdálenost středů obou podstav $|SS'| = 8$ cm. Poté sestrojte řez tělesa rovinou $\rho = \leftrightarrow XYZ$, kde $|A'X| = \frac{1}{4} |A'B'|$, bod Y je střed hrany $E'D'$ a bod Z je středem hrany FF' .

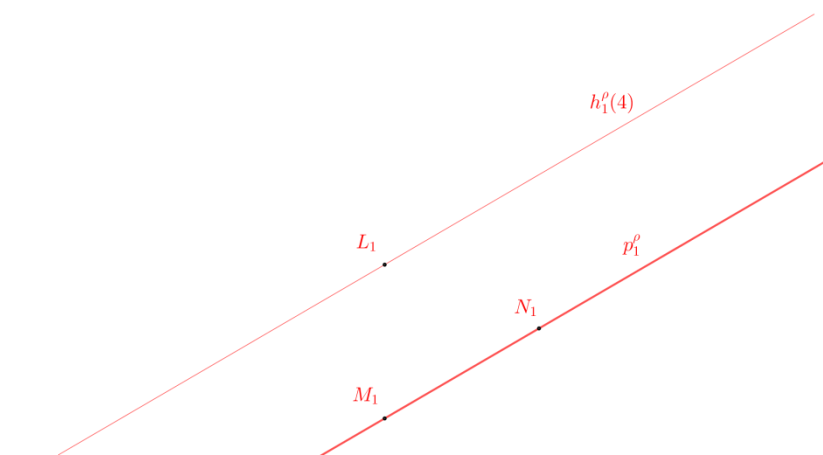
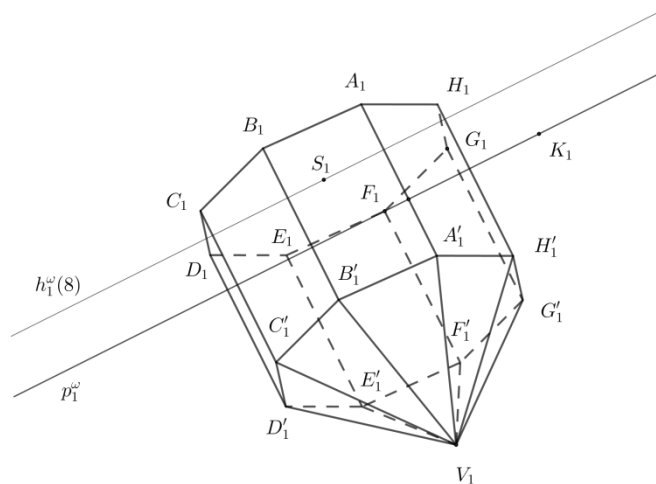


Obr. 6. 1. 5. 4: Řez antihranolu rovinou XYZ ve volném rovnoběžném promítání.

6.1.6 Řez sjednocení těles

6.1.6.1 Řez sjednocení těles v kótovaném promítání

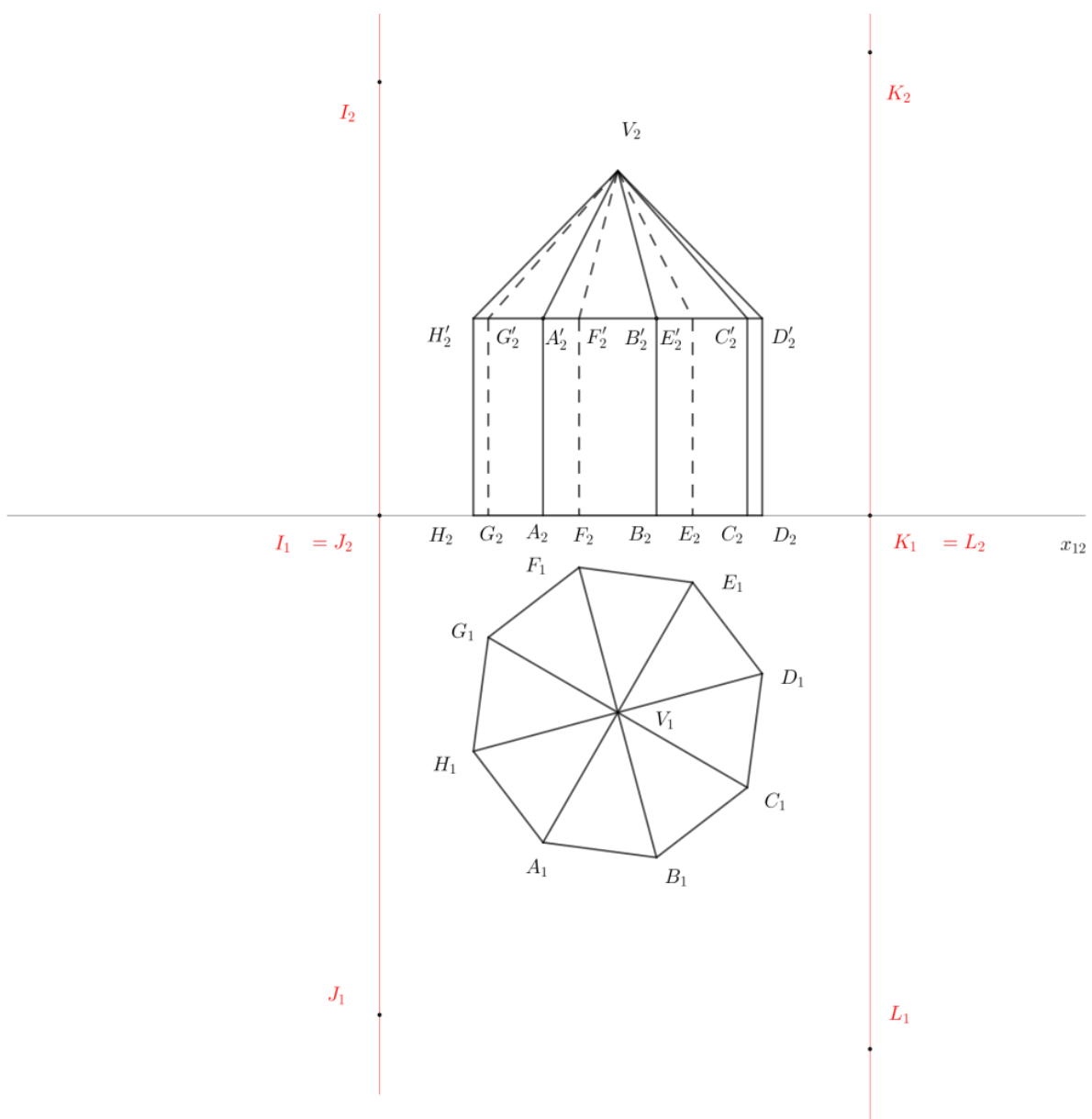
V kótovaném promítání sestrojte těleso, které vznikne sjednocením pravidelného osmibokého hranolu $ABCDEF GHA'B'C'D'E'F'G'H'$ s podstavou $ABCDEF GH$ v rovině ω a pravidelného osmibokého jehlanu $A'B'C'D'E'F'G'H'V$. Rovina ω je určena stopou $p_1^\omega = \leftrightarrow FK$ a bodem S , kde S je střed podstavy hranolu a bod F je vrchol osmiúhelníku podstavy. Výška hranolu $v_h = 12$ j a výška jehlanu $v_j = 9$ j. Poté sestrojte řez tělesa rovinou ρ , jíž definuje stopa $p_1^\rho = \leftrightarrow MN$ a bod L . Souřadnice bodů: $F = [0; 0; 0]$, $K = [10; -5; 0]$, $S = [-3,9; -2; 8]$, $M = [0; 50,5; 0]$, $N = [10; 44,7; 0]$, $L = [0; 40,5; 4]$.



Obr. 6. 1. 6. 1: Řez sjednocení těles rovinou ρ v kótovaném promítání.

6.1.6.2 Řez sjednocení těles v Mongeově promítání

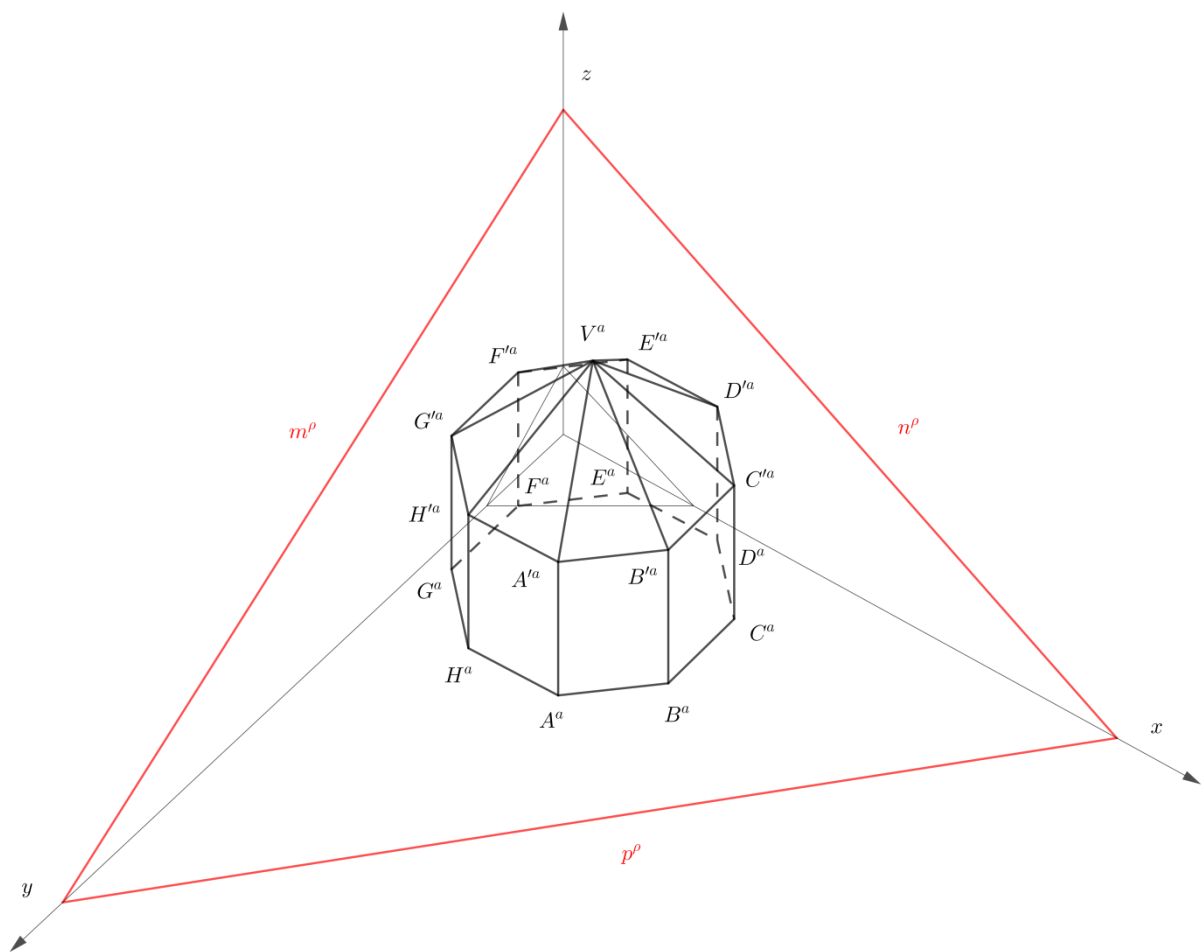
V Mongeově promítání sestrojte těleso, které vznikne sjednocením pravidelného osmibokého hranolu $ABCDEFGHA'B'C'D'E'F'G'H'$ s podstavou $ABCDEFGH$ v půdorysně π a pravidelného osmibokého jehlanu $A'B'C'D'E'F'G'H'V$. Podstava hranolu je určena body A a B , výška hranolu $v_h = 12$ j a jehlanu $v_j = 9$ j. Poté sestrojte řez tělesa rovinou ρ , kterou definují dvě přímky IJ a KL . Souřadnice bodů: $A = [0; 19,9; 0]$, $B = [6,9; 20,8; 0]$, $I = [-10; 0; 26,4]$, $J = [-10; 30,4; 0]$, $K = [20; 0; 28,2]$, $L = [20; 32,5; 0]$.



Obr. 6. 1. 6. 2: Řez sjednocení těles rovinou ρ v Mongeově promítání.

6.1.6.3 Řez sjednocení těles v axonometrii

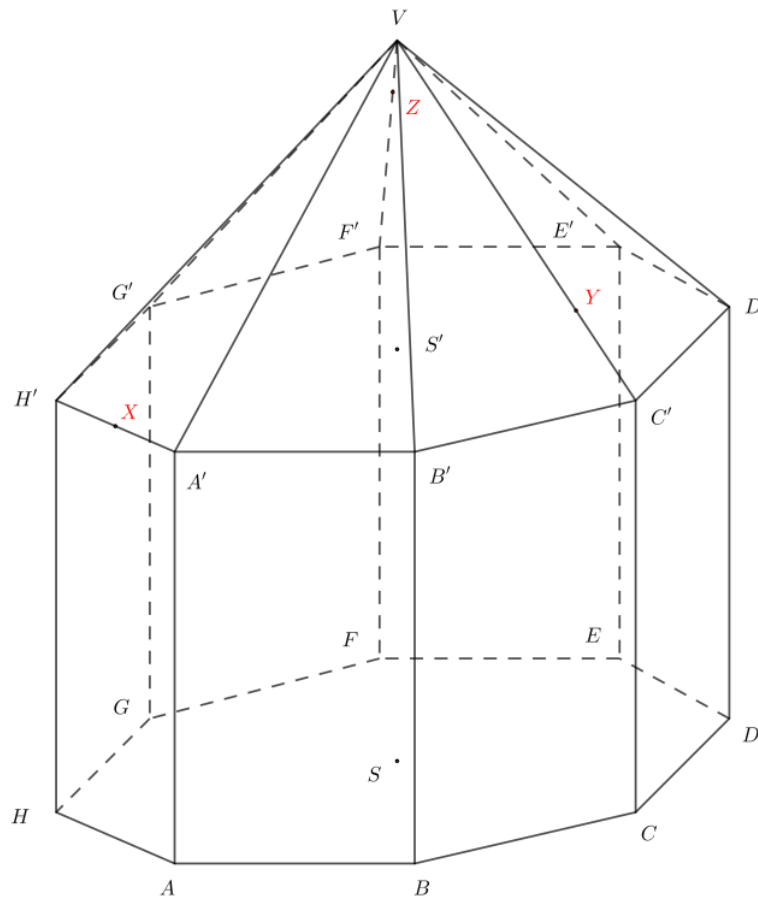
V axonometrii ($|XY| = 11$, $|YZ| = 10$, $|XZ| = 9$) sestrojte těleso, které je sjednocením pravidelného osmibokého hranolu $ABCDEF GHA'B'C'D'E'F'G'H'$ s podstavou $ABCDEF GH$ v půdorysně π a pravidelného osmibokého jehlanu $A'B'C'D'E'F'G'H'V$. Podstava hranolu je určena body A a B , výška hranolu $v_h = 12$ j a výška jehlanu $v_j = 9$ j. Poté sestrojte řez tělesa rovinou $\rho = (43,8; 51,7; 29,2)$. Souřadnice bodů: $A = [13,7; 18,4; 0]$, $B = [18,5; 13,3; 0]$.



Obr. 6. 1. 6. 3: Řez sjednocení těles rovinou ρ v axonometrii.

6.1.6.4 Řez sjednocení těles ve volném rovnoběžném promítání

Ve volném rovnoběžném promítání sestrojte těleso, které je sjednocením pravidelného osmibokého hranolu $ABCDEFGHA'B'C'D'E'F'G'H'$ s podstavou $ABCDEFGH$ ležící ve vodorovné rovině a pravidelného osmibokého jehlanu $A'B'C'D'E'F'G'H'V$. Podstava hranolu je určena hranou AB v průčelné poloze, $|AB| = 7$ cm. Výška hranolu $v_h = 12$ cm a výška jehlanu $v_j = 9$ cm. Poté sestrojte řez tělesa rovinou $\rho \leftrightarrow XYZ$, kde X je střed hrany $A'H'$, $|YC'| = \frac{1}{4}|C'V|$ a $|ZV| = \frac{1}{4}|F'V|$.



Obr. 6. 1. 6. 4: Řez sjednocení těles rovinou XYZ ve volném rovnoběžném promítání.

7 Řešení úloh

7.1 Řešení nekonstrukčních úloh

Řešení úlohy A: Počet rovin souměrnosti platonských těles

Čtyřstěn: 6 rovin souměrnosti.

Krychle, pravidelný osmistěn: 9 rovin souměrnosti.

Pravidelný dvanáctistěn, pravidelný dvacetistěn: 15 rovin souměrnosti.

Řešení úlohy B: Rozpad platonských těles

Čtyřstěn: 24 shodných dílů.

Krychle, pravidelný osmistěn: 48 shodných dílů.

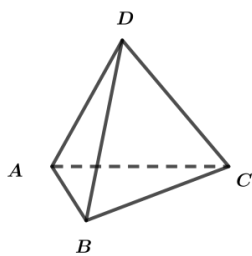
Pravidelný dvanáctistěn, pravidelný dvacetistěn: 120 shodných dílů.

Např.: Pravidelný dvanáctistěn se řezy vedenými všemi rovinami souměrnosti dvanáctistěnu rozpadne na dvanáct pětibokých jehlanů, jejichž vrcholem je střed souměrnosti dvanáctistěnu. Zároveň se každý z těchto jehlanů rozpadne na deset dílů (každá podstava takového jehlanu má tvar pravidelného pětiúhelníku, ten má pět os souměrnosti, podle kterých se podstava rozdělí na deset shodných dílů). Je tedy zřejmé, že se dvanáctistěn rozpadne na sto dvacet shodných dílů, což koresponduje s počtem prvků grupy zákrytových pohybů tohoto tělesa.

Řešení úlohy C: Grupy zákrytových pohybů platonských těles

Řešení úlohy C(1): Grupa zákrytových pohybů čtyřstěnu

Tetraedr je pravidelný trojboký jehlan, jehož podstavu, stejně jako stěny, tvoří rovnostranné trojúhelníky. Je to tedy čtyřstěn se čtyřmi vrcholy a šesti hranami. Na rozdíl od ostatních platonských těles, nenajdeme u tetraedru střed symetrie.

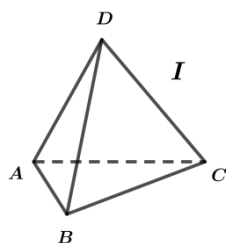


Obr. 7. 1. 1: Výchozí poloha tetraedru $ABCD$.

Z výchozí polohy čtyřstěnu $ABCD$ (viz obr. 7. 1. 1) se do výsledné zákrytové polohy dostaneme užitím následujících shodností:

Přímé shodnosti:

1) Identita I

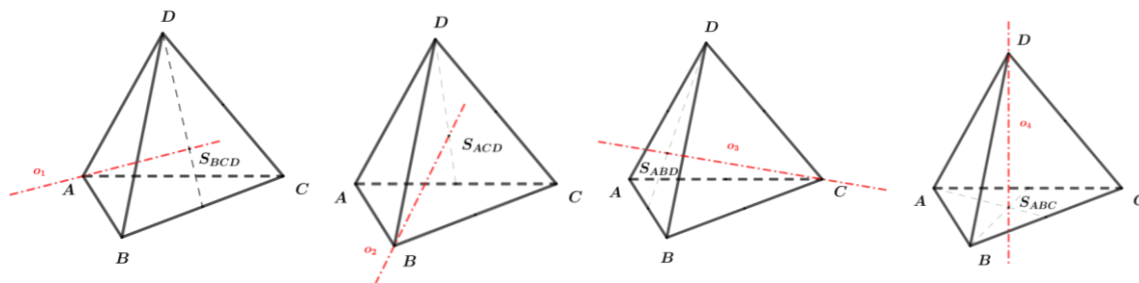


Obr. 7. 1. 2: Čtyřstěn $ABCD$ po identickém zobrazení.

2) Rotace R_x

Zákrytové polohy tetraedru $ABCD$ obdržíme rotacemi okolo dvou druhů os:

a) Trojčetné osy: Každá tato osa prochází vrcholem čtyřstěnu a středem protější stěny, která je k ose kolmá. Rotují tři vrcholy čtyřstěnu neležící na ose rotace o úhel 120° či 240° .



Obr. 7. 1. 3: Čtyři trojčetné osy čtyřstěnu $ABCD$.³³

³³ Značkou S_{ABC} rozumíme střed (těžiště, ortocentrum) rovnostranného trojúhelníku ABC .

Tyto čtyři osy skýtají celkem osm možností otočení:

$$R_1: (o_1 = AS_{BCD}; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_5: (o_3 = CS_{ABD}; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_2: (o_1 = AS_{BCD}; \alpha = 240^\circ),$$

$$R_6: (o_3 = CS_{ABD}; \alpha = 240^\circ),$$

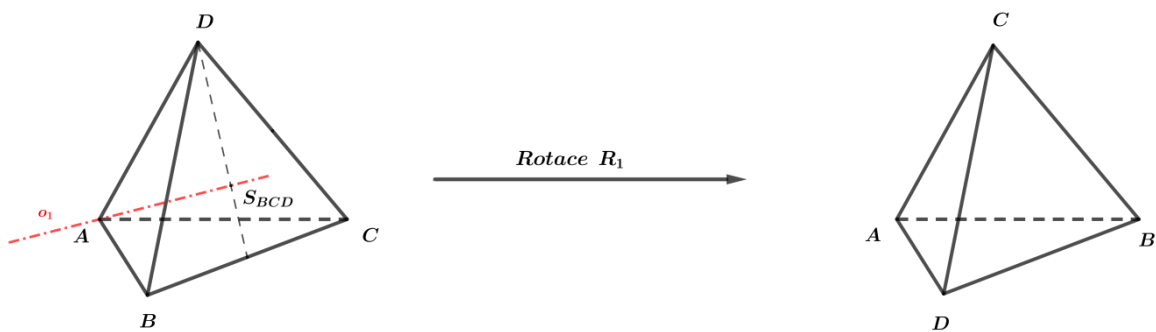
$$R_3: (o_2 = BS_{ACD}; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_7: (o_4 = DS_{ABC}; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_4: (o_2 = BS_{ACD}; \alpha = 240^\circ),$$

$$R_8: (o_4 = DS_{ABC}; \alpha = 240^\circ).$$

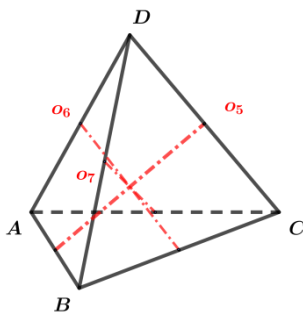
Např.: Rotace R_1 je určena osou $o_1 = AS_{BCD}$, kde S_{BCD} je střed rovnostranného trojúhelníku BCD , a velikostí úhlu rotace $\alpha = 120^\circ$ (viz obr. 7. 1. 4).



Obr. 7. 1. 4: Zákrytová poloha tetraedru $ABCD$ po provedení rotace $R_1: (o_1 = AS_{BCD}; \alpha = 120^\circ)$ z pohledu vektoru $\overrightarrow{S_{BCD}A}$.

b) Dvoučetné osy

Všechny čtyři vrcholy tetraedru se otočí o úhel 180° okolo osy procházející středy mimoběžných hran.



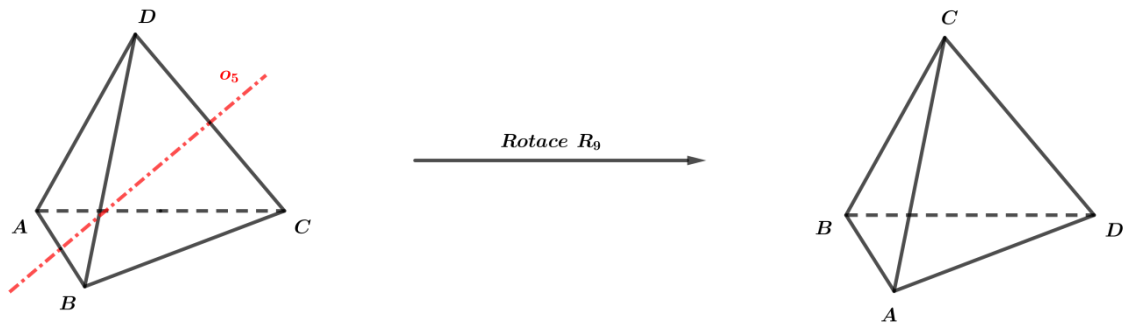
Obr. 7. 1. 5: Tři dvoučetné osy čtyřstěnu $ABCD$.

Existují tři dvoučetné osy v čtyřstěnu, tudíž i rotace jsou tři:

$$R_9: (o_5 = S_{AB}S_{CD}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{10}: (o_6 = S_{BC}S_{AD}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{11}: (o_7 = S_{AC}S_{BD}; \alpha = 180^\circ).$$



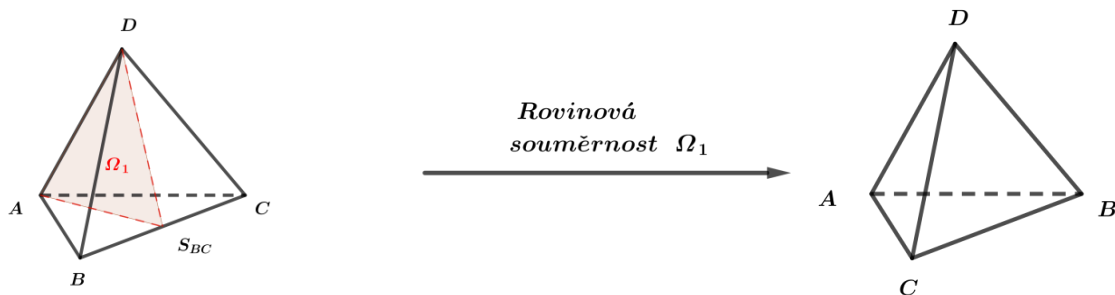
Obr. 7. 1. 6: Zákrytová poloha tetraedru $ABCD$ po provedení rotace R_9 : ($o_5 = S_{AB}S_{CD}$; $\alpha = 180^\circ$).

Nepřímé shodnosti:

1) Rovinové souměrnosti Ω_x

Každou rovinu souměrnosti Ω_x určuje jedna hrana tetraedru a střed další hrany k ní kolmé. Z počtu hran tetraedru je zřejmé, že takových rovinových souměrností nalezneme šest:

$$\Omega_1 = ADS_{BC}, \Omega_2 = DCS_{AB}, \Omega_3 = BDS_{AC}, \Omega_4 = ACS_{BD}, \Omega_5 = BCS_{AD}, \Omega_6 = ABS_{CD}.$$



Obr. 7. 1. 7: Zákrytová poloha tetraedru $ABCD$ po provedení rovinové souměrnosti $\Omega_1 = ADS_{BC}$, kde S_{BC} je středem hrany BC .

2) Shodnosti složené z rotace a rovinové souměrnosti $Z_x = R_x \Omega_x$

Jednotlivé polohy tetraedru $ABCD$ jsou odvozené ze základní polohy složením dvou zákrytových pohybů, totiž rovinové souměrnosti a rotace. Rozeznáváme šest zákrytových pohybů vzniklých složením rotace a rovinové souměrnosti:

$Z_1 = \Omega_1 R_9$, kde $\Omega_1 = ADS_{BC}$ a poté R_9 : ($o_5 = S_{AB}S_{CD}$; $\alpha = 180^\circ$).

$Z_2 = \Omega_4 R_{10}$, kde $\Omega_4 = ACS_{BD}$ a R_{10} : ($o_6 = S_{BC}S_{AD}$; $\alpha = 180^\circ$).

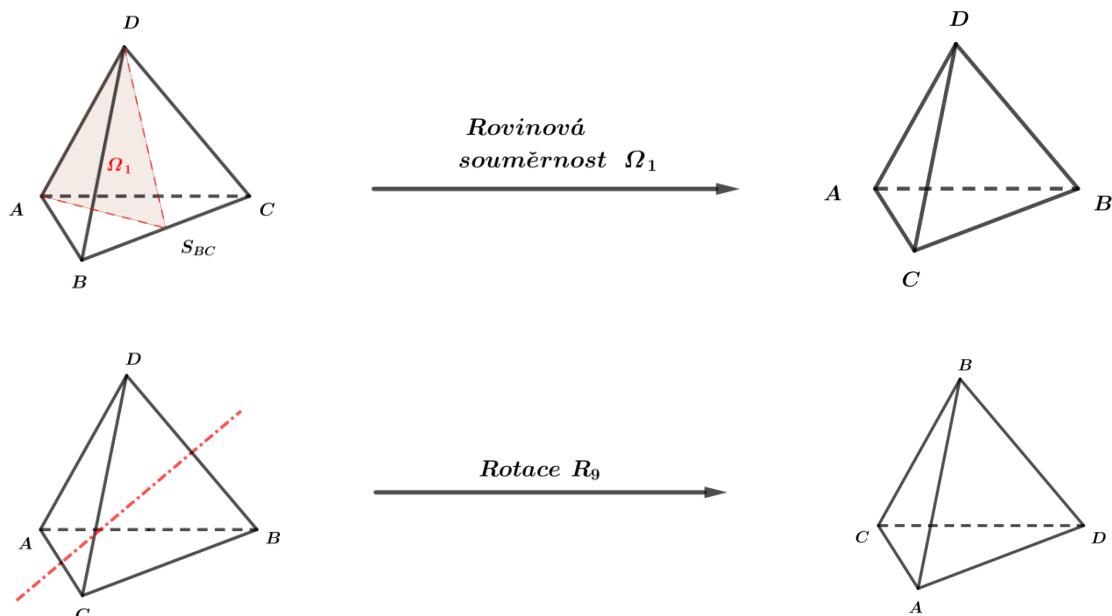
$Z_3 = \Omega_3 R_{10}$, kde $\Omega_3 = BDS_{AC}$ a poté rotaci R_{10} : ($o_6 = S_{BC}S_{AD}$; $\alpha = 180^\circ$).

$Z_4 = R_9 \Omega_5$, kde R_9 : ($o_5 = S_{AB}S_{CD}$; $\alpha = 180^\circ$) a poté $\Omega_5 = BCS_{AD}$.

$Z_5 = \Omega_2 R_{11}$, kde $\Omega_2 = DCS_{AB}$ a poté R_{11} : ($o_7 = S_{AC}S_{BD}$; $\alpha = 180^\circ$).

$Z_6 = R_{10} \Omega_6$, kde R_{10} : ($o_6 = S_{BC}S_{AD}$; $\alpha = 180^\circ$) a poté $\Omega_6 = ABS_{CD}$.

Např. zákrytový pohyb $Z_1 = \Omega_1 R_9$ vznikne tak, že nejprve tetraedr zobrazíme v rovinné souměrnosti $\Omega_1 = ADS_{BC}$ a poté jej otočíme v rotaci R_9 : ($o_5 = S_{AB}S_{CD}$; $\alpha = 180^\circ$), viz obr. 7. 1. 8.



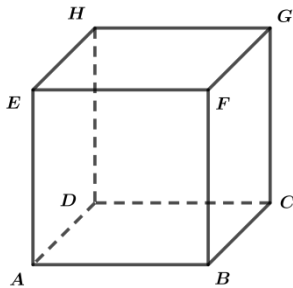
Obr. 7. 1. 8: Postup skládání zákrytového pohybu $Z_1 = \Omega_1 R_9$.

Výše uvedené dokazuje, že grupa zákrytových pohybů tetraedru G_t má 24 prvků, tzn. je řádu 24 ($|G_t| = 24$).

Řešení úlohy C(2): Grupa zákrytových pohybů krychle

Krychle (hexaedr) je pravidelný šestistěn, jehož podstava a stěny mají tvar čtverce. Dále je krychle středově symetrické těleso s osmi vrcholy a dvanácti hranami.

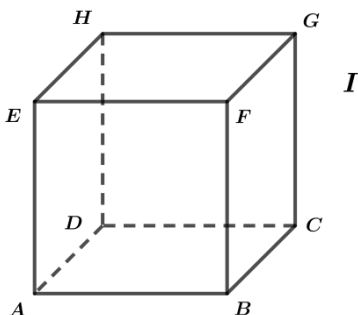
Z výchozí polohy krychle $ABCDEFGH$ (viz obr. 7. 1. 9) se do výsledné polohy dostaneme užitím následujících shodností:



Obr. 7. 1. 9: Krychle $ABCDEFGH$ v původní poloze.

Přímé shodnosti:

1) Identita I

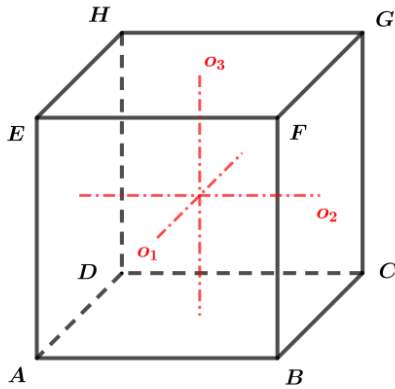


Obr. 7. 1. 10: Krychle $ABCDEFGH$ po identickém zobrazení.

2) Rotace R_x

Pro obdržení zákrytových poloh krychle $ABCDEFGH$ vzešlých z otočení můžeme použít následující rotační osy:

a) Tři čtyřčetné osy: Každá tato osa je spojnicí středů dvou protějších stěn.



Obr. 7. 1. 11: Krychle $ABCDEFGH$ se třemi čtyřčetnými osami o_1, o_2, o_3 .

Rotační zákrytový pohyb okolo jedné každé této osy můžeme provést o úhel 90° , 180° a 270° . Takto docílíme devíti způsobů zákrytového pohybu:

$$R_1: (o_1 = S_{ABFE}S_{DCGH}; \alpha = 90^\circ),^{34}$$

$$R_2: (o_1 = S_{ABFE}S_{DCGH}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_3: (o_1 = S_{ABFE}S_{DCGH}; \alpha = 270^\circ),$$

$$R_4: (o_2 = S_{BCGF}S_{ADHE}; \alpha = 90^\circ),$$

$$R_5: (o_2 = S_{BCGF}S_{ADHE}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_6: (o_2 = S_{BCGF}S_{ADHE}; \alpha = 270^\circ),$$

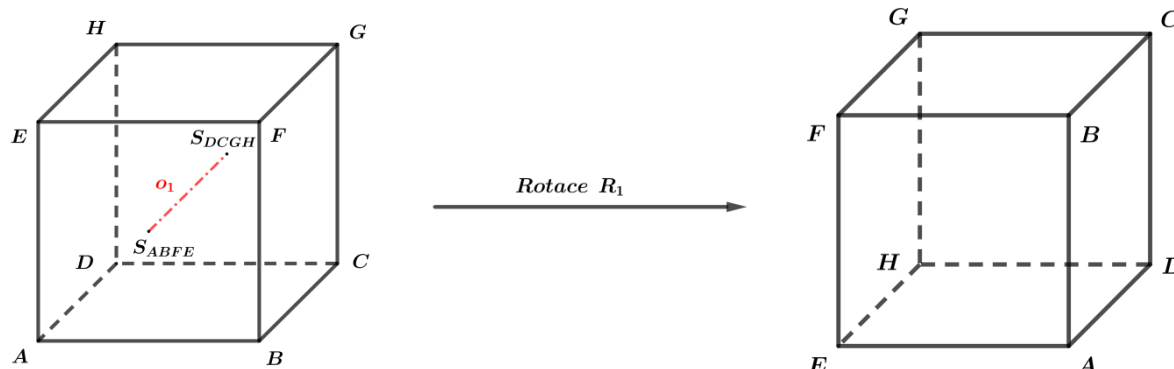
$$R_7: (o_3 = S_{ABCD}S_{EFGH}; \alpha = 90^\circ),$$

$$R_8: (o_3 = S_{ABCD}S_{EFGH}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_9: (o_3 = S_{ABCD}S_{EFGH}; \alpha = 270^\circ).$$

³⁴ Značkou S_{ABFE} rozumíme střed stěny $ABFE$.

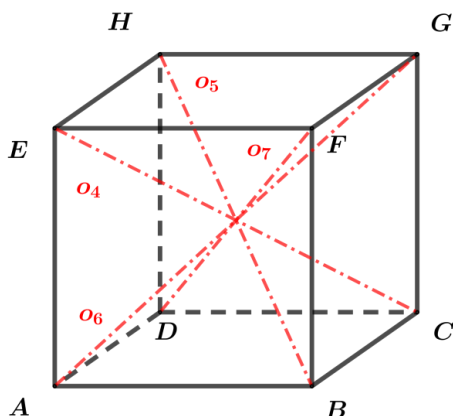
Např. rotace R_1 je určena osou $o_1 = S_{ABFE}S_{DCGH}$ a velikostí úhlu $\alpha = 90^\circ$ (viz obr. 7. 1. 12).



Obr. 7. 1. 12: Zákrytový pohyb krychle $ABCDEFGH$ vzniklý rotací

$R_1: (o_1 = S_{ABFE}S_{DCGH}; \alpha = 90^\circ)$ z pohledu vektoru $\overrightarrow{S_{ABFE}S_{DCGH}}$.

b) Čtyři trojčetné osy: Každá z os je tělesovou úhlopříčkou krychle (viz obr. 7. 1. 13).



Obr. 7. 1. 13: Krychle $ABCDEFGH$ se čtyřmi trojčetnými osami o_4, o_5, o_6, o_7 .

Každá tato osa nabízí dva druhy rotace, a to o úhel 120° či 240° . Celkový počet takto vzniklých rotací je osm.

$$R_{10}: (o_4 = CE; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_{14}: (o_6 = AG; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_{11}: (o_4 = CE; \alpha = 240^\circ),$$

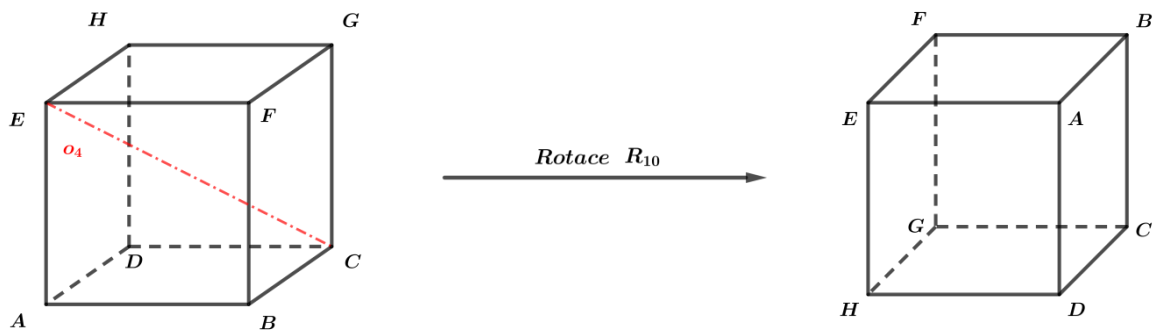
$$R_{15}: (o_6 = AG; \alpha = 240^\circ),$$

$$R_{12}: (o_5 = BH; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_{16}: (o_7 = DF; \alpha = 120^\circ),$$

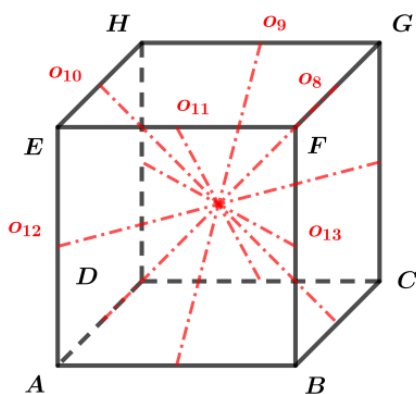
$$R_{13}: (o_5 = BH; \alpha = 240^\circ),$$

$$R_{17}: (o_7 = DF; \alpha = 240^\circ).$$



Obr. 7. 1. 14: Výsledný rotační zákrytový pohyb R_{10} krychle $ABCDEFGH$ okolo trojčetné osy $o_4 = CE$ o úhel $\alpha = 120^\circ$ z pohledu vektoru \overrightarrow{EC} .

a) Šest dvoučetných os: Tyto osy procházejí středy dvou rovnoběžných hran neležících ve stejné stěně.



Obr. 7. 1. 15: Krychle $ABCDEFGH$ se šesti dvoučetnými osami $o_8, o_9, o_{10}, o_{11}, o_{12}, o_{13}$.

Pro vznik zákrytové polohy je možné provést otočení okolo každé z těchto os o 180° . Získáváme takto šest možností zákrytu:

$$R_{18}: (o_8 = S_{FG}S_{AD}; \alpha = 180^\circ),$$

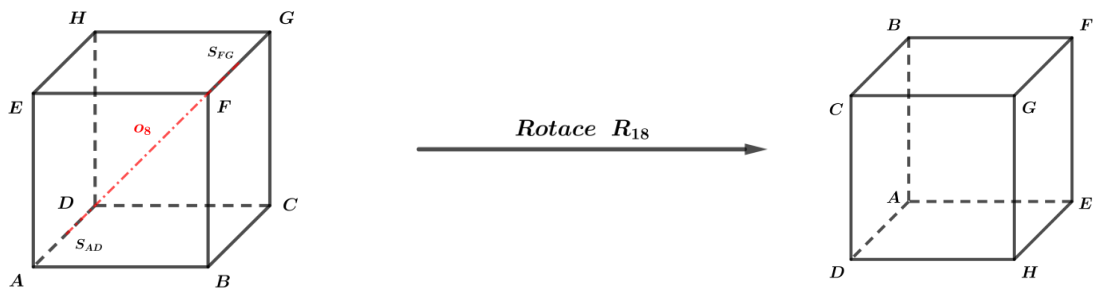
$$R_{21}: (o_{11} = S_{EF}S_{DC}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{19}: (o_9 = S_{GH}S_{AB}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{22}: (o_{12} = S_{AE}S_{CG}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{20}: (o_{10} = S_{EH}S_{BC}; \alpha = 180^\circ),$$

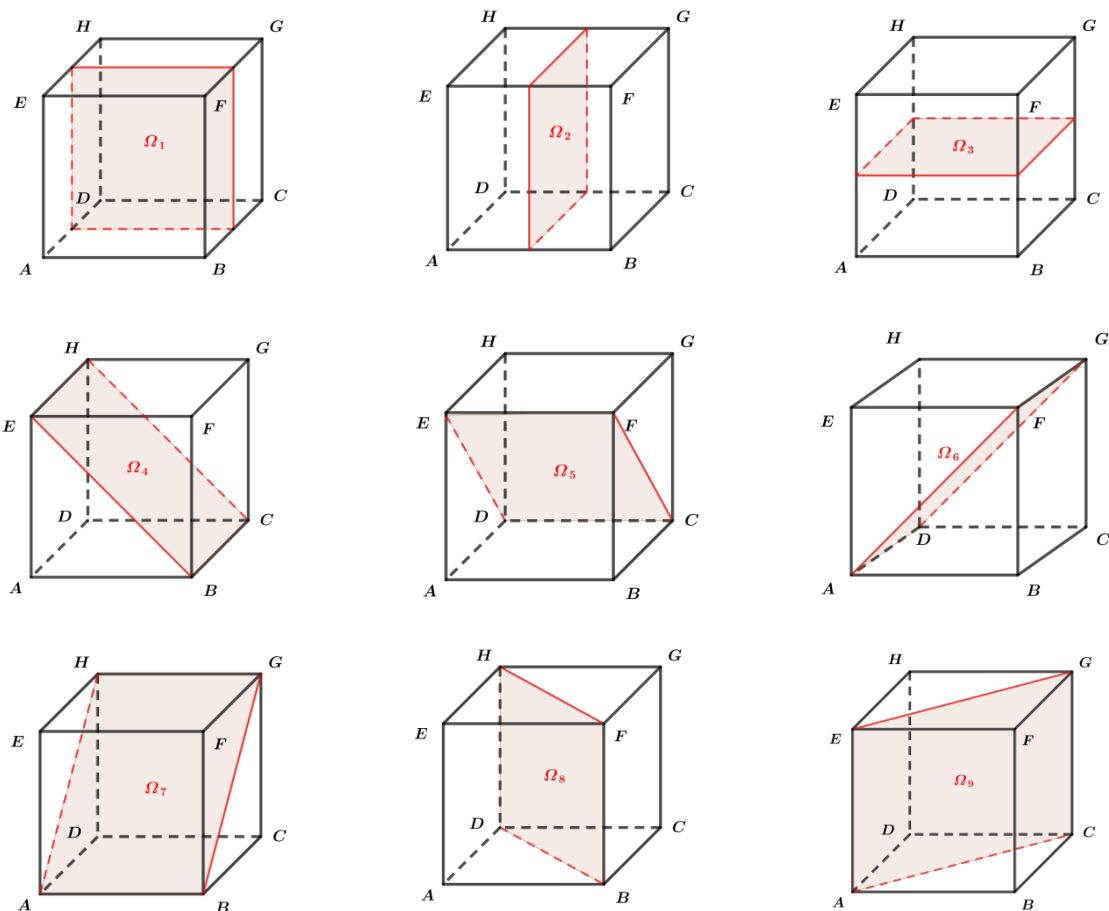
$$R_{23}: (o_{13} = S_{BF}S_{DH}; \alpha = 180^\circ).$$



Obr. 7. 1. 16: Zákrytová poloha krychle $ABCDEFGH$ po provedení rotace R_{18} okolo dvoučetné osy $o_8 = S_{FG}S_{AD}$ o úhel $\alpha = 180^\circ$.

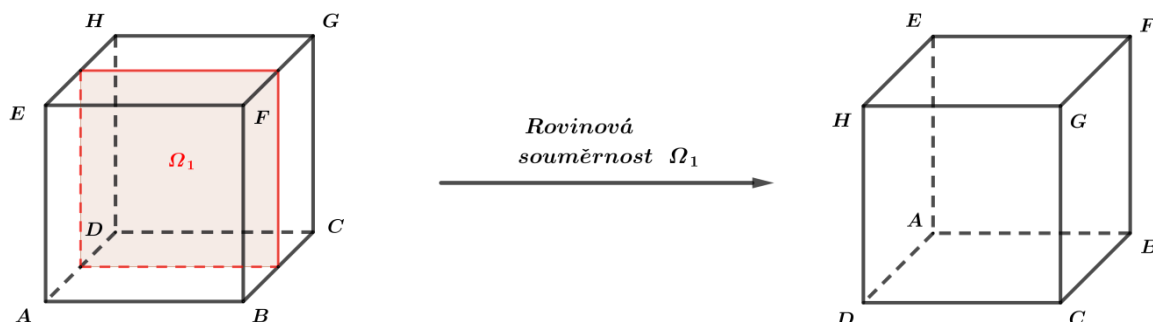
Nepřímé shodnosti:

1) Rovinové souměrnosti Ω_x : Hexaedr má devět různých rovin symetrie (viz obr. 7. 1. 17).



Obr. 7. 1. 17: Devět různých rovin symetrie Ω_x krychle $ABCDEFGH$.

Provedením jedné každé rovinové souměrnosti Ω_x získáme devět zákrytových poloh krychle.



Obr. 7. 1. 18: Výsledná zákrytová poloha krychle $ABCDEFGH$ po zobrazení v rovinové souměrnosti Ω_1 .

2) Shodnosti složené:

Středová souměrnost $S_x(S)$, kde bod S je středem krychle $ABCDEFGH$, vznikne složením rotace R_x kolem čtyřčetné nebo dvoučetné osy a rovinové souměrnosti Ω_x , tedy $S_x = R_x \Omega_x$. Aby vznikla nová zákrytová poloha, musí být rovina Ω_x k ose kolmá.

Složených zobrazení, ve kterých uplatníme rotaci okolo čtyřčetné osy, je devět:

$$S_1 = R_1 \Omega_1, \text{ kde } R_1: (o_1 = S_{ABFE} S_{DCGH}; \alpha = 90^\circ) \text{ a poté } \Omega_1 \perp o_1.$$

$$S_2 = R_2 \Omega_1, \text{ kde } R_2: (o_1 = S_{ABFE} S_{DCGH}; \alpha = 180^\circ) \text{ a poté } \Omega_1 \perp o_1.$$

$$S_3 = R_3 \Omega_1, \text{ kde } R_3: (o_1 = S_{ABFE} S_{DCGH}; \alpha = 270^\circ) \text{ a poté } \Omega_1 \perp o_1.$$

$$S_4 = R_4 \Omega_2, \text{ kde } R_4: (o_2 = S_{BCGF} S_{ADHE}; \alpha = 90^\circ) \text{ a poté } \Omega_2 \perp o_2.$$

$$S_5 = R_5 \Omega_2, \text{ kde } R_5: (o_2 = S_{BCGF} S_{ADHE}; \alpha = 180^\circ) \text{ a poté } \Omega_2 \perp o_2.$$

$$S_6 = R_6 \Omega_2, \text{ kde } R_6: (o_2 = S_{BCGF} S_{ADHE}; \alpha = 270^\circ) \text{ a poté } \Omega_2 \perp o_2.$$

$$S_7 = R_7 \Omega_3, \text{ kde } R_7: (o_3 = S_{ABCD} S_{EFGH}; \alpha = 90^\circ) \text{ a poté } \Omega_3 \perp o_3.$$

$$S_8 = R_8 \Omega_3, \text{ kde } R_8: (o_3 = S_{ABCD} S_{EFGH}; \alpha = 180^\circ) \text{ a poté } \Omega_3 \perp o_3.$$

$$S_9 = R_9 \Omega_3, \text{ kde } R_9: (o_3 = S_{ABCD} S_{EFGH}; \alpha = 270^\circ) \text{ a poté } \Omega_3 \perp o_3.$$

Složených zobrazení vzešlých z rotací okolo dvoučetné osy je šest:

$$S_{10} = R_{18}\Omega_4, \text{ kde } R_{18}: (o_8 = S_{FG}S_{AD}; \alpha = 180^\circ) \text{ a poté } \Omega_4 \perp o_8.$$

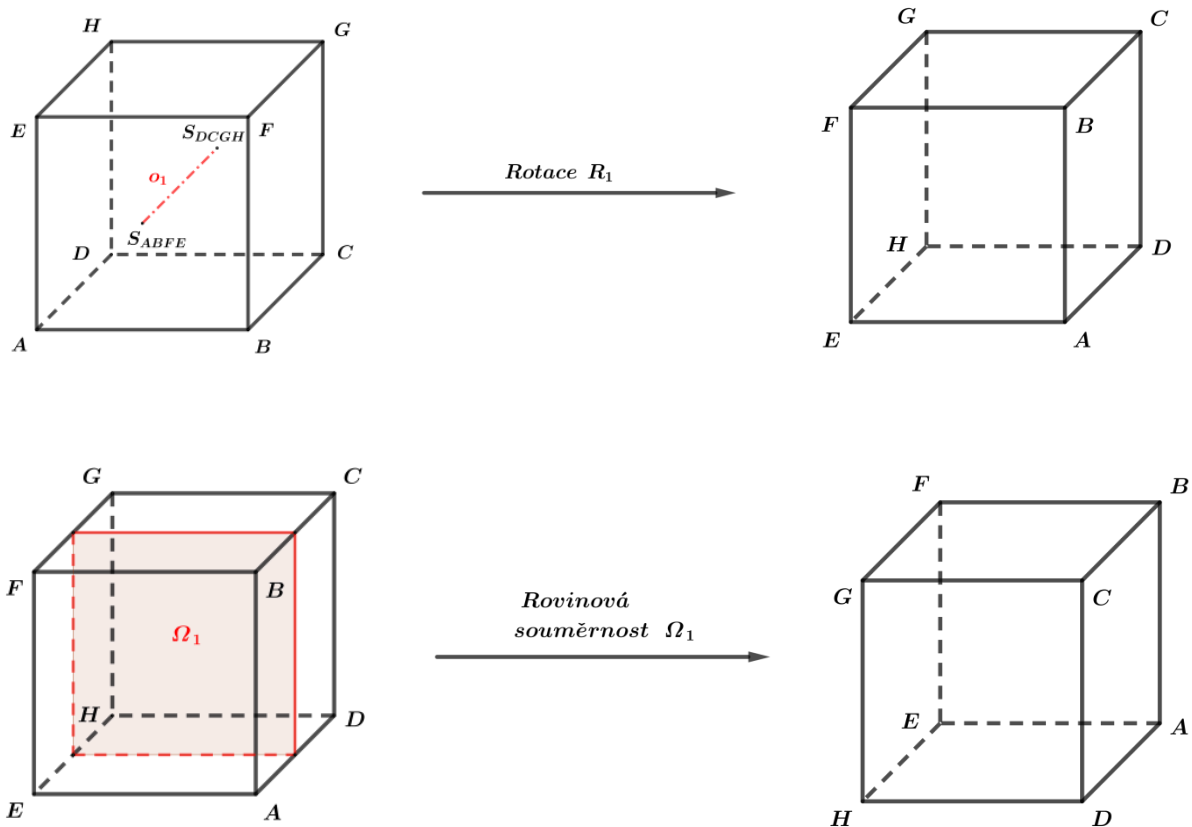
$$S_{11} = R_{19}\Omega_5, \text{ kde } R_{19}: (o_9 = S_{GH}S_{AB}; \alpha = 180^\circ) \text{ a poté } \Omega_5 \perp o_9.$$

$$S_{12} = R_{20}\Omega_6, \text{ kde } R_{20}: (o_{10} = S_{EH}S_{BC}; \alpha = 180^\circ) \text{ a poté } \Omega_6 \perp o_{10}.$$

$$S_{13} = R_{21}\Omega_7, \text{ kde } R_{21}: (o_{11} = S_{EF}S_{DC}; \alpha = 180^\circ) \text{ a poté } \Omega_7 \perp o_{11}.$$

$$S_{14} = R_{22}\Omega_8, \text{ kde } R_{22}: (o_{12} = S_{AE}S_{CG}; \alpha = 180^\circ) \text{ a poté } \Omega_8 \perp o_{12}.$$

$$S_{15} = R_{23}\Omega_9, \text{ kde } R_{23}: (o_{13} = S_{BF}S_{DH}; \alpha = 180^\circ) \text{ a poté } \Omega_9 \perp o_{13}.$$



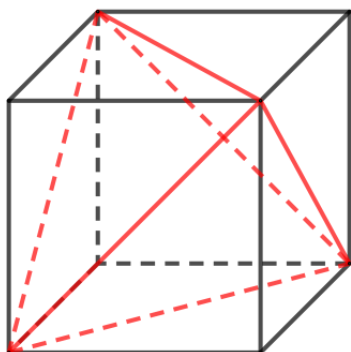
Obr. 7. 1. 19: Postup skládání zákrytového pohybu $S_1 = R_1\Omega_1$, kde

$$R_1: (o_1 = S_{ABFE}S_{DCGH}; \alpha = 90^\circ) \text{ z pohledu vektoru } \overrightarrow{S_{ABFE}S_{DCGH}}.$$

Středovou symetrií vznikne patnáct zákrytových poloh krychle $ABCDEFGH$.

Z výše uvedeného je zřejmé, že grupa zákrytových pohybů hexaedru má 48 prvků.

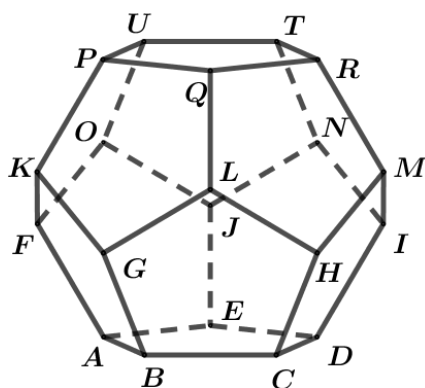
Pozn.: Zvolíme-li v krychli nerovnoběžné stěnové úhlopříčky v protilehlých stěnách, lze v nich vidět dvě mimoběžné hrany pravidelného čtyřstěnu (viz obr. 7. 1. 20). Z toho vyplývá, že grupa zákrytových pohybů čtyřstěnu je podgrupou zákrytových pohybů krychle. Každé shodné zobrazení, které lze najít v tomto čtyřstěnu, zachovává i jemu opsanou krychli. Tento vztah však neplatí obráceně, protože rotace o úhel 90° čtyřstěn nezachovávají.



Obr. 7. 1. 20: Krychle s úhlopříčkami tvořícími hrany čtyřstěnu.

Řešení úlohy C(3): Grupa zákrytových pohybů dvanáctistěnu

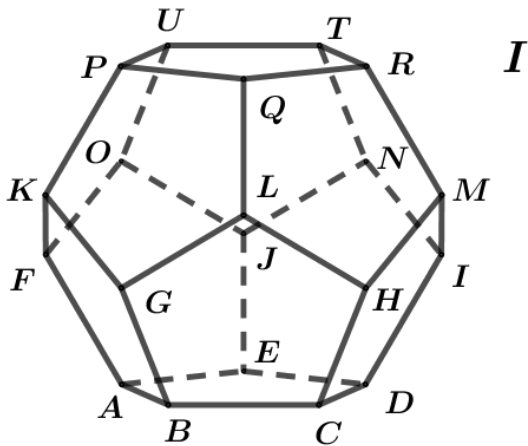
Dvanáctistěnem neboli dodekaedrem nazýváme mnohostěn, který obsahuje dvanáct stěn ve tvaru pravidelného pětiúhelníku. Má dvacet vrcholů a třicet hran. Abychom mohli provádět zákrytové pohyby dodekaedru, musíme použít následující shodnosti:



Obr. 7. 1. 21: Dvanáctistěn *ABCDEFGHIJKLMNQPRTU* v původní poloze.

Přímé shodnosti:

1) Identita I



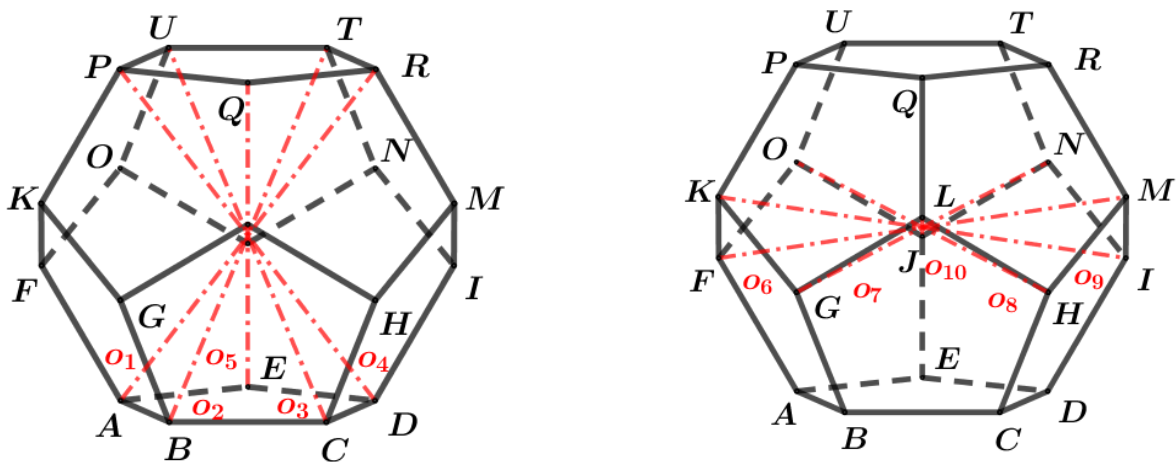
Obr. 7. 1. 22: Dvanáctistěn $ABCDEFGHIJKLMNQPRTU$ v identickém zobrazení.

2) Rotace R_x

Zákrytové polohy dodekaedru $ABCDEFGHIJKLMNQPRTU$ můžeme vytvořit rotacemi okolo dvoučetných, trojčetných a pětičetných os:

a) Deset trojčetných os

Každá z těchto os je spojnicí dvou protějších vrcholů dodekaedru.

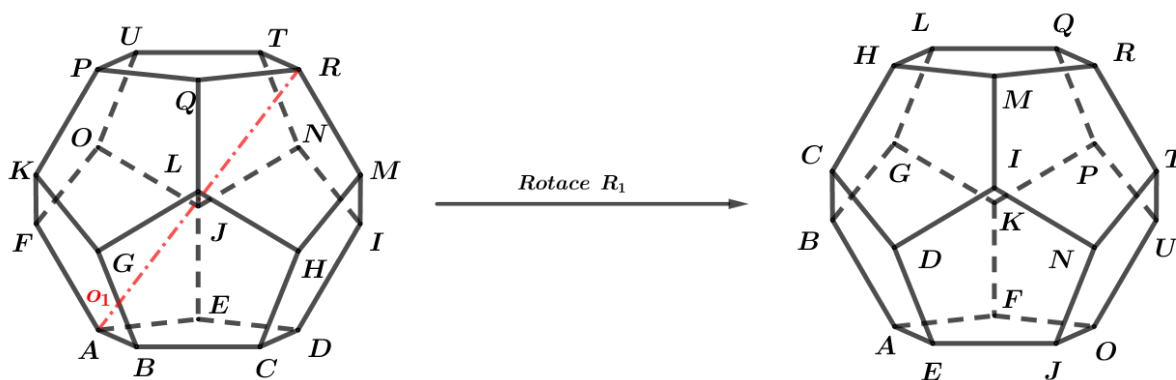


Obr. 7. 1. 23: Deset trojčetných os $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8, O_9, O_{10}$ dvanáctistěnu $ABCDEFGHIJKLMNQPRTU$.

Rotační zákrytový pohyb okolo jedné každé této osy můžeme provést o úhel 108° , či 216° . Získáme tak dvacet možností zákrytu:

- | | |
|---|--|
| $R_1: (o_1 = AR; \alpha = 108^\circ),$ | $R_{11}: (o_6 = FM; \alpha = 108^\circ),$ |
| $R_2: (o_1 = AR; \alpha = 216^\circ),$ | $R_{12}: (o_6 = FM; \alpha = 216^\circ),$ |
| $R_3: (o_2 = BT; \alpha = 108^\circ),$ | $R_{13}: (o_7 = GN; \alpha = 108^\circ),$ |
| $R_4: (o_2 = BT; \alpha = 216^\circ),$ | $R_{14}: (o_7 = GN; \alpha = 216^\circ),$ |
| $R_5: (o_3 = CU; \alpha = 108^\circ),$ | $R_{15}: (o_8 = HO; \alpha = 108^\circ),$ |
| $R_6: (o_3 = CU; \alpha = 216^\circ),$ | $R_{16}: (o_8 = HO; \alpha = 216^\circ),$ |
| $R_7: (o_4 = DP; \alpha = 108^\circ),$ | $R_{17}: (o_9 = IK; \alpha = 108^\circ),$ |
| $R_8: (o_4 = DP; \alpha = 216^\circ),$ | $R_{18}: (o_9 = IK; \alpha = 216^\circ),$ |
| $R_9: (o_5 = EQ; \alpha = 108^\circ),$ | $R_{19}: (o_{10} = JL; \alpha = 108^\circ),$ |
| $R_{10}: (o_5 = EQ; \alpha = 216^\circ),$ | $R_{20}: (o_{10} = JL; \alpha = 216^\circ).$ |

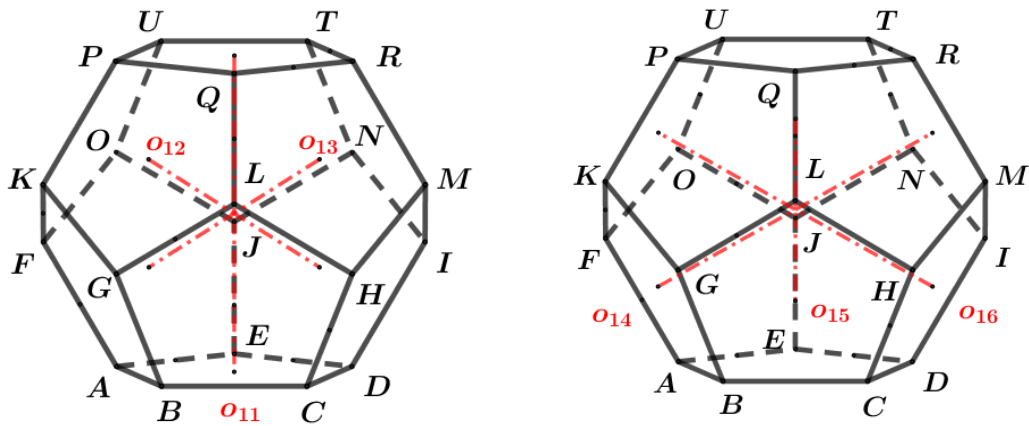
Např.: Rotace R_1 je určena osou $o_1 = AR$ a velikostí úhlu $\alpha = 108^\circ$ (viz obr. 7. 1. 24).



Obr. 7. 1. 24: Zákrytový pohyb dvacetistěnu $ABCDEFGHIJKLMNQPRTU$ vzniklý rotací $R_1: (o_1 = AR; \alpha = 108^\circ)$ z pohledu vektoru \overrightarrow{AR} .

b) Šest pětičetných os

Každá z os prochází středy dvou protějších rovnoběžných stěn dodekaedru. Je zřejmé, že prochází i středem samotného dvanáctistěnu.



Obr. 7. 1. 25: Šest pětičetných os o_{11} , o_{12} , o_{13} , o_{14} , o_{15} , o_{16} dvanáctistěnu $ABCDEFGHIJKLMNPOQR TU$.

Chceme-li provést zákrytovou polohu dodekaedru rotací okolo pětičetné osy, je třeba otočit dvanáctistěn okolo ní o úhel 72° , 144° , 216° , či 288° . Počet takovýchto rotací je 24:

$$R_{21}: (o_{11} = S_{ABCDE}S_{PQRTU}; \alpha = 72^\circ),^{35}$$

$$R_{22}: (o_{11} = S_{ABCDE}S_{PQRTU}; \alpha = 144^\circ),$$

$$R_{23}: (o_{11} = S_{ABCDE}S_{PQRTU}; \alpha = 216^\circ),$$

$$R_{24}: (o_{11} = S_{ABCDE}S_{PQRTU}; \alpha = 288^\circ),$$

$$R_{25}: (o_{12} = S_{KGLQP}S_{EDINJ}; \alpha = 72^\circ),$$

$$R_{26}: (o_{12} = S_{KGLQP}S_{EDINJ}; \alpha = 144^\circ),$$

$$R_{27}: (o_{12} = S_{KGLQP}S_{EDINJ}; \alpha = 216^\circ),$$

$$R_{28}: (o_{12} = S_{KGLQP}S_{EDINJ}; \alpha = 288^\circ),$$

$$R_{29}: (o_{13} = S_{AEJOF}S_{LHMRQ}; \alpha = 72^\circ),$$

$$R_{30}: (o_{13} = S_{AEJOF}S_{LHMRQ}; \alpha = 144^\circ),$$

$$R_{31}: (o_{13} = S_{AEJOF}S_{LHMRQ}; \alpha = 216^\circ),$$

$$R_{32}: (o_{13} = S_{AEJOF}S_{LHMRQ}; \alpha = 288^\circ),$$

$$R_{33}: (o_{14} = S_{ABGKF}S_{NIMRT}; \alpha = 72^\circ),$$

$$R_{34}: (o_{14} = S_{ABGKF}S_{NIMRT}; \alpha = 144^\circ),$$

$$R_{35}: (o_{14} = S_{ABGKF}S_{NIMRT}; \alpha = 216^\circ),$$

$$R_{36}: (o_{14} = S_{ABGKF}S_{NIMRT}; \alpha = 288^\circ),$$

$$R_{37}: (o_{15} = S_{BCHLG}S_{OJNTU}; \alpha = 72^\circ),$$

$$R_{38}: (o_{15} = S_{BCHLG}S_{OJNTU}; \alpha = 144^\circ),$$

$$R_{39}: (o_{15} = S_{BCHLG}S_{OJNTU}; \alpha = 216^\circ),$$

$$R_{40}: (o_{15} = S_{BCHLG}S_{OJNTU}; \alpha = 288^\circ),$$

$$R_{41}: (o_{16} = S_{CDIMH}S_{KFOUP}; \alpha = 72^\circ),$$

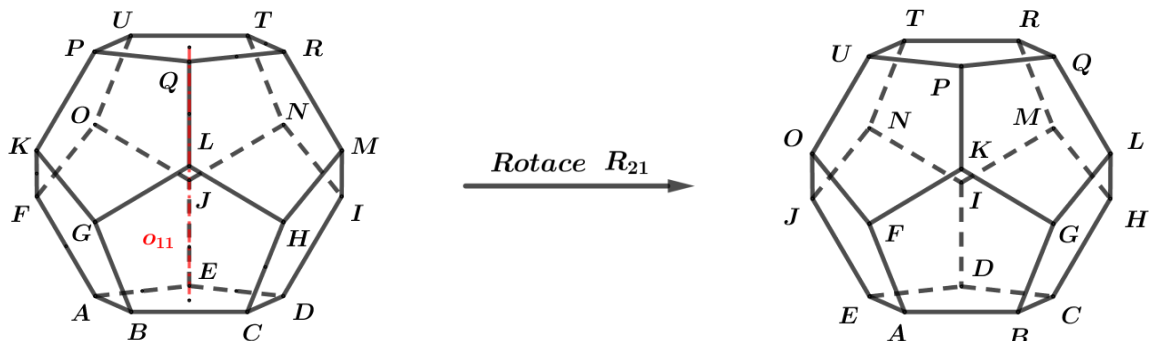
$$R_{42}: (o_{16} = S_{CDIMH}S_{KFOUP}; \alpha = 144^\circ),$$

$$R_{43}: (o_{16} = S_{CDIMH}S_{KFOUP}; \alpha = 216^\circ),$$

$$R_{44}: (o_{16} = S_{CDIMH}S_{KFOUP}; \alpha = 288^\circ).$$

³⁵ Značkou S_{ABCDE} rozumíme střed stěny $ABCDE$.

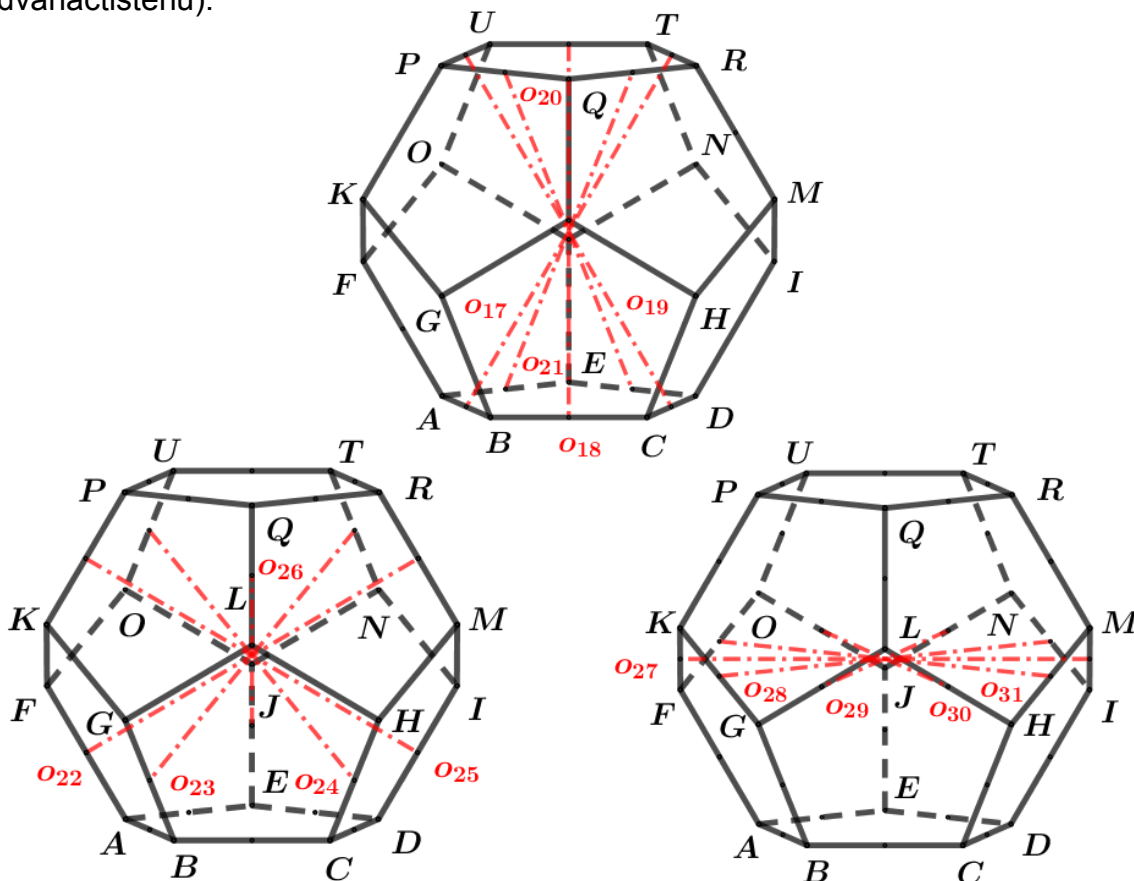
Např.: Rotace R_{21} je určena osou $o_{11} = S_{ABCDE}S_{PQRTU}$ a velikostí úhlu $\alpha = 72^\circ$.



Obr. 7. 1. 26: Zákrytové polohy dvanáctistěnu $ABCDEFGHIJKLMNQPRTU$ po provedení rotace o 72° okolo pětičetné osy o_{11} z pohledu vektoru $\overrightarrow{S_{PQRTU}S_{ABCDE}}$.

a) Patnáct dvoučetných os

Tyto osy procházejí středy dvou rovnoběžných hran (i středem samotného dvanáctistěnu).



Obr. 7. 1. 27: Patnáct dvoučetných os $o_{17}, o_{18}, o_{19}, o_{20}, o_{21}, o_{22}, o_{23}, o_{24}, o_{25}, o_{26}, o_{27}, o_{28}, o_{29}, o_{30}, o_{31}$ dvanáctistěnu $ABCDEFGHIJKLMNQPRTU$.

Otočením dodekaedru okolo každé z těchto os o 180° získáme patnáct zákrytových poloh:

$$R_{45}: (o_{17} = S_{AB}S_{RT}, \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{53}: (o_{25} = S_{DI}S_{KP}, \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{46}: (o_{18} = S_{BC}S_{TU}, \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{54}: (o_{26} = S_{EJ}S_{LQ}, \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{47}: (o_{19} = S_{CD}S_{PU}, \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{55}: (o_{27} = S_{FK}S_{IM}, \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{48}: (o_{20} = S_{DE}S_{PQ}, \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{56}: (o_{28} = S_{GK}S_{IN}, \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{49}: (o_{21} = S_{AE}S_{QR}, \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{57}: (o_{29} = S_{GL}S_{JN}, \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{50}: (o_{22} = S_{AF}S_{MR}, \alpha = 180^\circ),$$

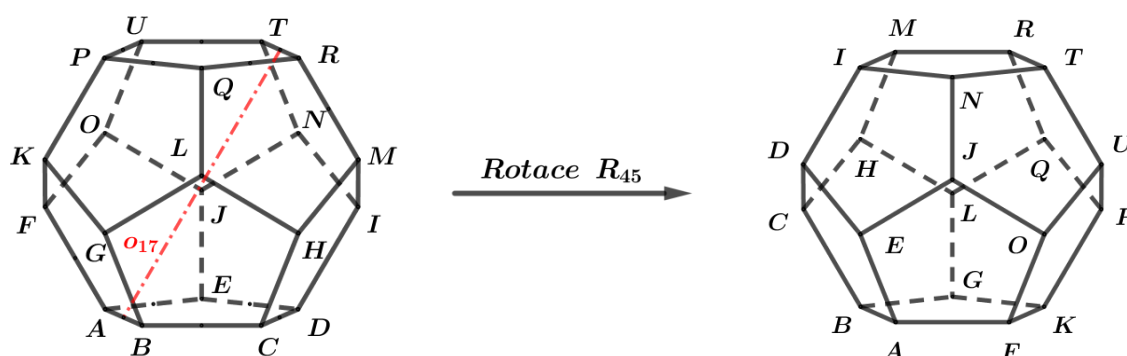
$$R_{58}: (o_{30} = S_{HL}S_{JO}, \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{51}: (o_{23} = S_{BG}S_{NT}, \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{59}: (o_{31} = S_{HM}S_{FO}, \alpha = 180^\circ).$$

$$R_{52}: (o_{24} = S_{CH}S_{OU}, \alpha = 180^\circ),$$

Např.: Rotace R_{45} je určena osou $o_{17} = S_{AB}S_{RT}$ a velikostí úhlu $\alpha = 180^\circ$.

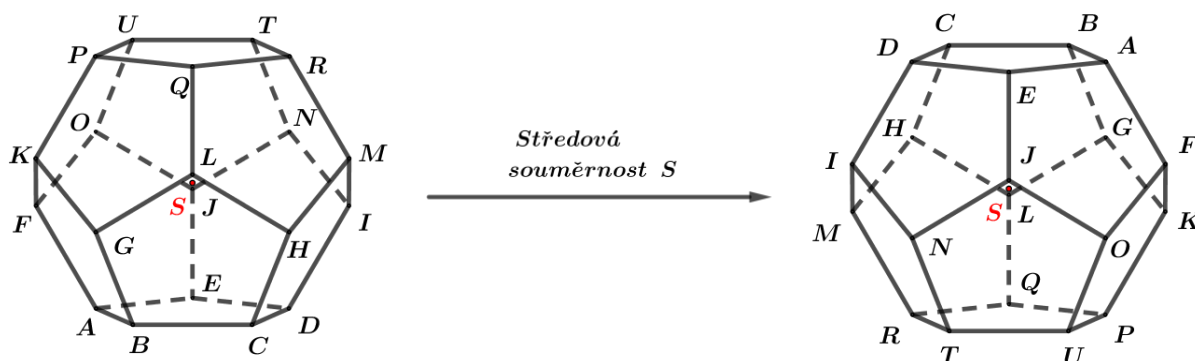


Obr. 7. 1. 28: Zákrytová poloha dvanáctistěnu $ABCDEFGHIJKLMNQPRTU$ po provedení rotace R_{45} okolo dvoučetné osy $o_{17} = S_{AB}S_{RT}$ o úhel $\alpha = 180^\circ$.

Nepřímé shodnosti:

Každou nepřímou symetrii získáme složením středové souměrnosti S (S), kde bod S je středem souměrnosti dvanáctistěnu $ABCDEFGHIJKLMNQPRTU$, s libovolnou výše uvedenou rotací. Celkem tedy získáme šedesát nepřímých shodností.

Např.: Středová souměrnost S se středem souměrnosti ve středu S dvanáctistěnu $ABCDEFGHIJKLMNQPRTU$.

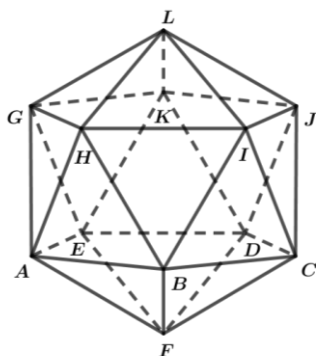


Obr. 7. 1. 29: Výsledný zákryt dvanáctistěnu $ABCDEFGHIJKLMNQPRTU$ po zobrazení ve středové souměrnosti S .

Z výše uvedeného je zřejmé, že grupa zákrytových pohybů dodekaedru má sto dvacet prvků.

Řešení úlohy C(4): Grupa zákrytových pohybů dvacetistěnu

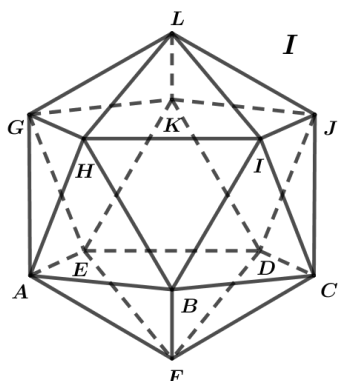
Jak již bylo uvedeno výše, dvacetistěn a dvanáctistěn jsou tělesa duální. Proto má ikosaedr stejný počet prvků grupy zákrytových pohybů jako dodekaedr. Povrch ikosaedru se skládá z dvaceti stěn, dvanácti vrcholů a třiceti hran. Z výchozí polohy dvacetistěnu získáme další zákrytové polohy pomocí následujících shodností:



Obr. 7. 1. 30: Dvacetistěn $ABCDEFGHIJKL$ v původní poloze.

Přímé shodnosti:

1) Identita I

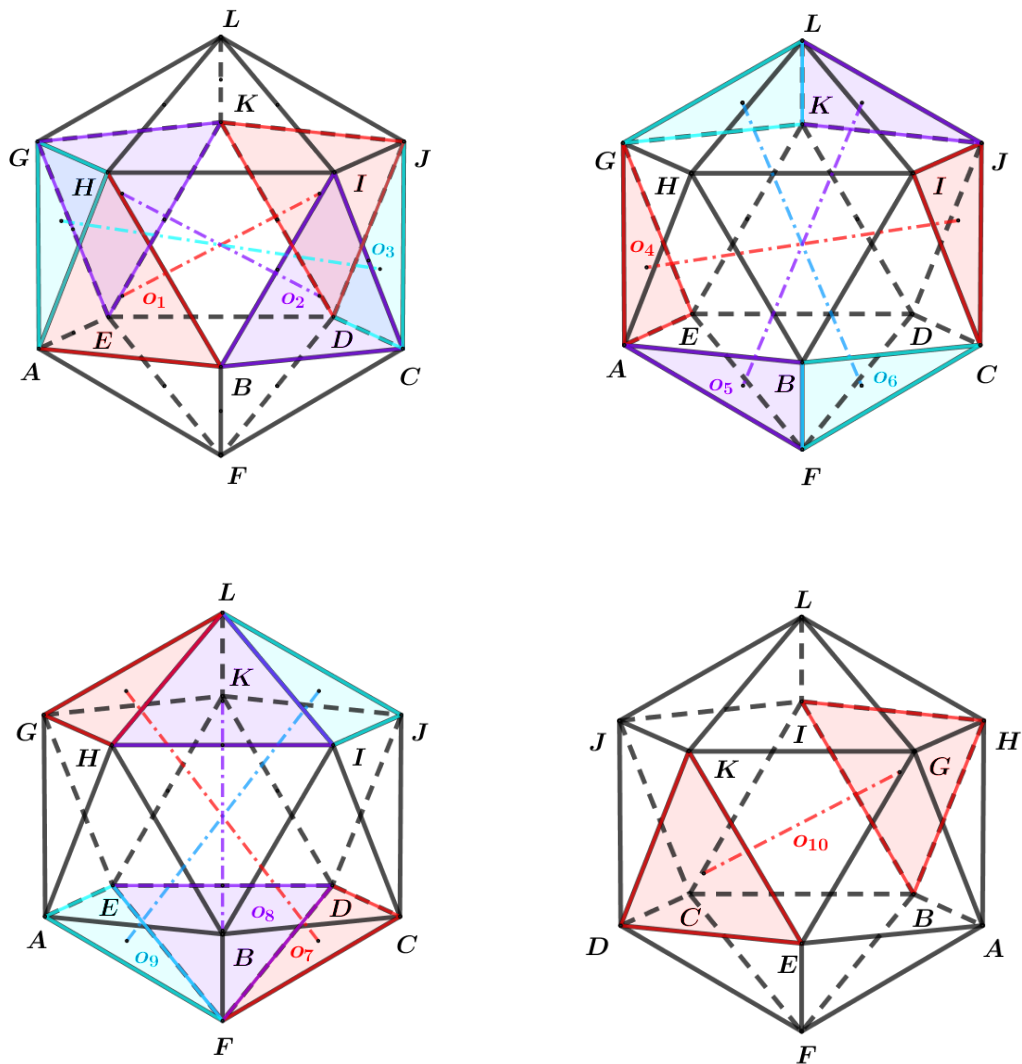


Obr. 7. 1. 31: Dvacetistěn $ABCDEFGHIJKL$ v identickém zobrazení.

2) Rotace R_x

Zákrytové polohy ikosaedru $ABCDEFGHIJKL$ můžeme vytvořit rotacemi okolo dvou druhů os:

a) deset trojčetných os: Každá osa je kolmá k jedné dvojici rovnoběžných stěn ikosaedru a prochází jejich středy (zároveň i středem samotného dvacetistěnu).



Obr. 7. 1. 32: Dvacetistěn $ABCDEFGHIJKL$ s deseti trojčetnými osami $o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6, o_7, o_8, o_9, o_{10}$.

Rotací okolo jedné každé této osy o úhel 120° či 240° můžeme získat dvacet možností zákrytu:

$$R_1: (o_1 = S_{ABH}S_{DJK}; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_2: (o_1 = S_{ABH}S_{DJK}; \alpha = 240^\circ),$$

$$R_3: (o_2 = S_{BCI}S_{EGK}; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_4: (o_2 = S_{BCI}S_{EGK}; \alpha = 240^\circ),$$

$$R_5: (o_3 = S_{CDJ}S_{AGH}; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_6: (o_3 = S_{CDJ}S_{AGH}; \alpha = 240^\circ),$$

$$R_7: (o_4 = S_{AEG}S_{CIJ}; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_8: (o_4 = S_{AEG}S_{CIJ}; \alpha = 240^\circ),$$

$$R_9: (o_5 = S_{ABF}S_{JKL}; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_{10}: (o_5 = S_{ABF}S_{JKL}; \alpha = 240^\circ),$$

$$R_{11}: (o_6 = S_{BCF}S_{GKL}; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_{12}: (o_6 = S_{BCF}S_{GKL}; \alpha = 240^\circ),$$

$$R_{13}: (o_7 = S_{CDF}S_{GHL}; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_{17}: (o_9 = S_{AEF}S_{IJL}; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_{14}: (o_7 = S_{CDF}S_{GHL}; \alpha = 240^\circ),$$

$$R_{18}: (o_9 = S_{AEF}S_{IJL}; \alpha = 240^\circ),$$

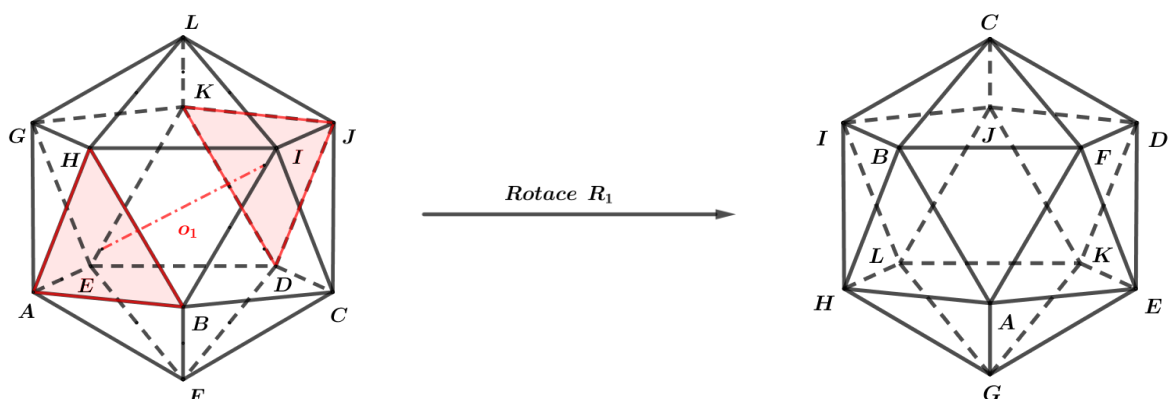
$$R_{15}: (o_8 = S_{DEF}S_{HIL}; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_{19}: (o_{10} = S_{DEK}S_{BHI}; \alpha = 120^\circ),$$

$$R_{16}: (o_8 = S_{DEF}S_{HIL}; \alpha = 240^\circ),$$

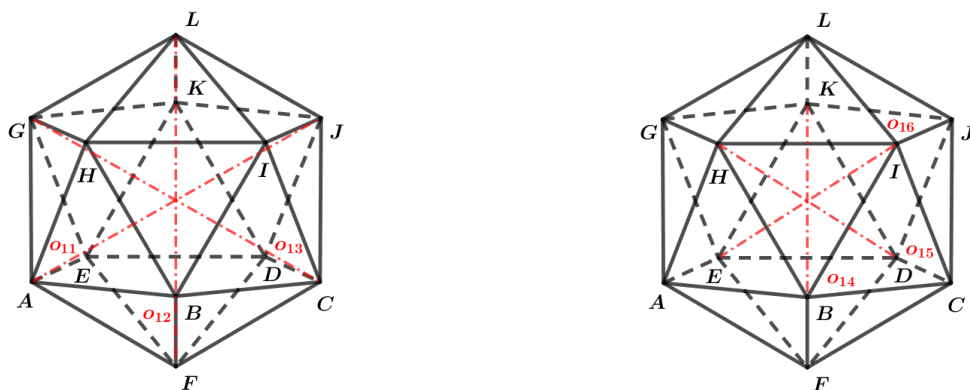
$$R_{20}: (o_{10} = S_{DEK}S_{BHI}; \alpha = 240^\circ).$$

Např.: Rotace R_1 je určena osou $o_1 = S_{ABH}S_{DJK}$ a velikostí úhlu $\alpha = 120^\circ$.



Obr. 7. 1. 33: Zákrytový pohyb dvacetistěnu $ABCDEFGHIJKL$ vzniklý rotací $R_1: (o_1 = S_{ABH}S_{DJK}; \alpha = 120^\circ)$ z pohledu vektoru $\overrightarrow{S_{ABH}S_{DJK}}$.

b) Šest pětičetných os: Každá z os prochází dvěma protějšími vrcholy ikosaedru. Je zřejmé, že na nich leží i střed samotného dvacetistěnu.

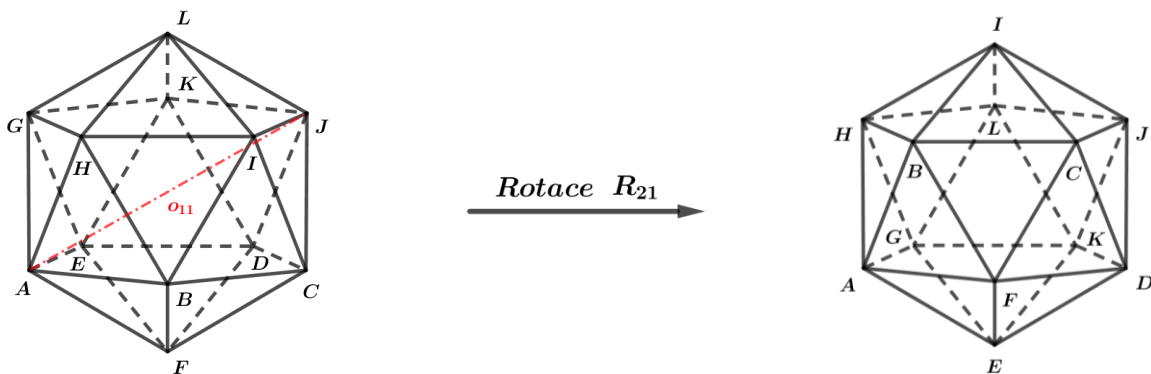


Obr. 7. 1. 34: Dvacetistěny $ABCDEFGHIJKL$ s šesti pětičetnými osami $o_{11}, o_{12}, o_{13}, o_{14}, o_{15}, o_{16}$.

K získání zákrytové polohy ikosaedru za použití rotace kolem pětičetné osy, je třeba otočit dvacetistěn okolo ní o úhel 72° , 144° , 216° , či 288° . Počet takovýchto rotací je dvacet čtyři:

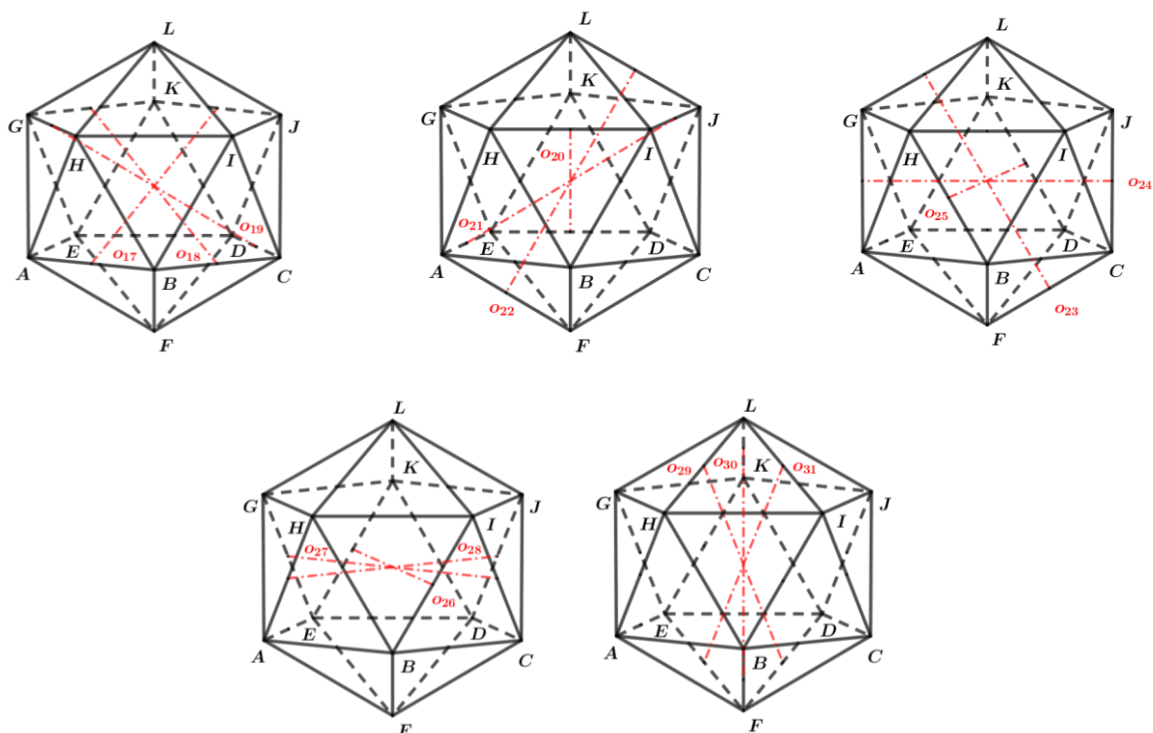
- | | |
|--|--|
| R_{21} : ($o_{11} = AJ$; $\alpha = 72^\circ$), | R_{33} : ($o_{14} = BK$; $\alpha = 72^\circ$), |
| R_{22} : ($o_{11} = AJ$; $\alpha = 144^\circ$), | R_{34} : ($o_{14} = BK$; $\alpha = 144^\circ$), |
| R_{23} : ($o_{11} = AJ$; $\alpha = 216^\circ$), | R_{35} : ($o_{14} = BK$; $\alpha = 216^\circ$), |
| R_{24} : ($o_{11} = AJ$; $\alpha = 288^\circ$), | R_{36} : ($o_{14} = BK$; $\alpha = 288^\circ$), |
| R_{25} : ($o_{12} = FL$; $\alpha = 72^\circ$), | R_{37} : ($o_{15} = DH$; $\alpha = 72^\circ$), |
| R_{26} : ($o_{12} = FL$; $\alpha = 144^\circ$), | R_{38} : ($o_{15} = DH$; $\alpha = 144^\circ$), |
| R_{27} : ($o_{12} = FL$; $\alpha = 216^\circ$), | R_{39} : ($o_{15} = DH$; $\alpha = 216^\circ$), |
| R_{28} : ($o_{12} = FL$; $\alpha = 288^\circ$), | R_{40} : ($o_{15} = DH$; $\alpha = 288^\circ$), |
| R_{29} : ($o_{13} = CG$; $\alpha = 72^\circ$), | R_{41} : ($o_{16} = EI$; $\alpha = 72^\circ$), |
| R_{30} : ($o_{13} = CG$; $\alpha = 144^\circ$), | R_{42} : ($o_{16} = EI$; $\alpha = 144^\circ$), |
| R_{31} : ($o_{13} = CG$; $\alpha = 216^\circ$), | R_{43} : ($o_{16} = EI$; $\alpha = 216^\circ$), |
| R_{32} : ($o_{13} = CG$; $\alpha = 288^\circ$), | R_{44} : ($o_{16} = EI$; $\alpha = 288^\circ$). |

Např.: Rotace R_{21} je určena osou $o_{11} = AJ$ a velikostí úhlu $\alpha = 72^\circ$.



Obr. 7. 1. 35: Zákrytové polohy dvacetistěnu $ABCDEFGHIJKL$ po provedení rotace o 72° okolo pětičetné osy $o_{11} = AJ$ z pohledu vektoru \vec{AJ} .

a) Patnácti dvoučetných os: Tyto osy procházejí středy dvou protějších, rovnoběžných hran. Taktéž i středem samotného dvacetistěnu.



Obr. 7. 1. 36: Dvacetistěn $ABCDEFGHIJKL$ s patnácti dvoučetnými osami o_{17} , o_{18} , o_{19} , o_{20} , o_{21} , o_{22} , o_{23} , o_{24} , o_{25} , o_{26} , o_{27} , o_{28} , o_{29} , o_{30} , o_{31} .

Otočením ikosaedru okolo každé z těchto os o 180° získáme patnáct zákrytových poloh.

$$R_{45}: (o_{17} = S_{AB}S_{JK}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{53}: (o_{25} = S_{BH}S_{DK}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{46}: (o_{18} = S_{BC}S_{GK}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{54}: (o_{26} = S_{BI}S_{EK}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{47}: (o_{19} = S_{CD}S_{GH}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{55}: (o_{27} = S_{CI}S_{EG}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{48}: (o_{20} = S_{ED}S_{HI}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{56}: (o_{28} = S_{DJ}S_{AH}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{49}: (o_{21} = S_{AE}S_{IJ}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{57}: (o_{29} = S_{HL}S_{DF}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{50}: (o_{22} = S_{AF}S_{JL}; \alpha = 180^\circ),$$

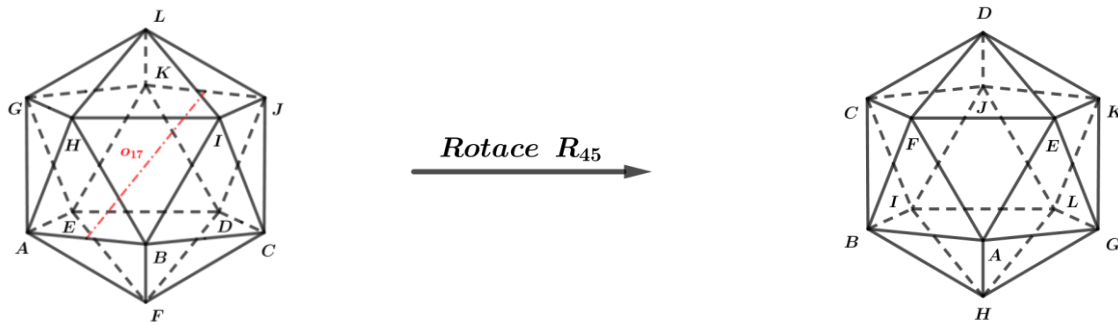
$$R_{58}: (o_{30} = S_{KL}S_{BF}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{51}: (o_{23} = S_{CF}S_{GL}; \alpha = 180^\circ),$$

$$R_{59}: (o_{31} = S_{IL}S_{EF}; \alpha = 180^\circ).$$

$$R_{52}: (o_{24} = S_{CJ}S_{AG}; \alpha = 180^\circ),$$

Např.: Rotace R_{45} je určena osou $o_{17} = S_{AB}S_{JK}$ a velikostí úhlu $\alpha = 180^\circ$.

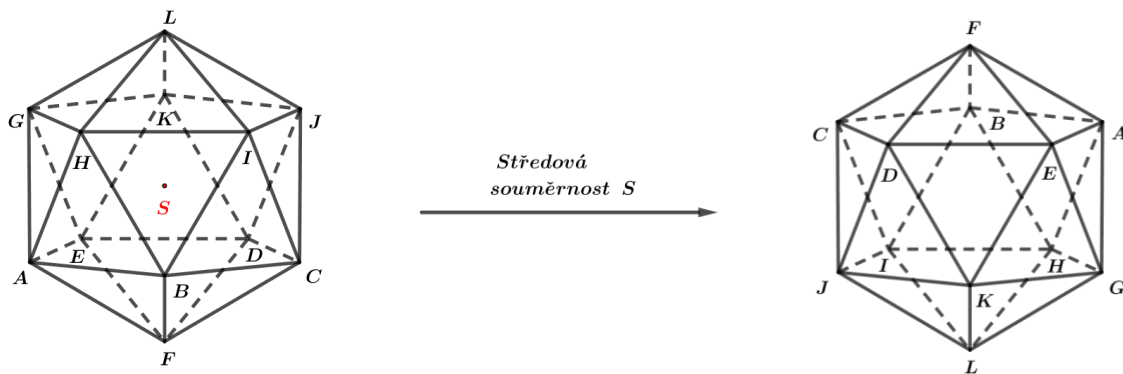


Obr. 7. 1. 37: Zákrytová poloha dvacetistěnu $ABCDEFGHIJKL$ po provedení rotace R_{45} okolo dvoučetné osy $o_{17} = S_{AB}S_{JK}$ o úhel $\alpha = 180^\circ$.

Nepřímé shodnosti:

Složením středové souměrnosti S (S), kde bod S je středem souměrnosti dvacetistěnu $ABCDEFGHIJKL$, s libovolnou výše uvedenou rotací získáme šedesát nepřímých symetrií.

Např.: Středová souměrnost S se středem souměrnosti ve středu S dvacetistěnu $ABCDEFGHIJKL$.



Obr. 7. 1. 38: Výsledný zákryt dvacetistěnu $ABCDEFGHIJKL$ po zobrazení ve středové souměrnosti S .

Z výše uvedeného je zřejmé, že grupa zákrytových pohybů ikosaedru má stejný počet prvků jako grupa zákrytových pohybů dodekaedru, tj. sto dvacet prvků. Tato rovnost prvků vychází ze skutečnosti, že tělesa jsou duální.

7.2 Řešení konstrukčních úloh

Konstrukce řezů těles je založena na vyhledání průsečnice roviny stěny a roviny řezu. Postupné vyhledávání těchto průsečnic na jednotlivých stěnách je možné zrychlit tím, že je zkonstruujeme pouze v každé druhé stěně a ve zbývajících stěnách doplníme strany řezného mnohoúhelníku podle axiomu 1. U hranolů a těles z nich odvozených, je možné využít ke konstrukci řezu osové afinity, u jehlanů a z nich vzešlých těles pak středové kolineace.

7.2.1 Řešení: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu

7.2.1.1 Řešení: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu v kótovaném promítání

V kótovaném promítání konstruujeme průsečnice r^x rovin X , ve kterých leží stěna jehlanu, a roviny řezu ρ . Průsečíky průsečnice r^x a hran zvolené stěny jehlanu jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

1) Řez v podstavě $ABCDEF$:

$$\text{úsečka } UR; p_1^\rho(0) \cap A_1B_1C_1D_1E_1F_1 = U_1R_1$$

2) Řez ve stěně FAV :

a. rovina α ; $\alpha = \leftrightarrow FAV$, najdeme její stopu $p_1^\alpha(0)$ a hlavní přímku $h_1^\alpha(4)$

b. průsečnice r^α ; $\alpha \cap \rho = r^\alpha$; $r^\alpha = \leftrightarrow P^\alpha H^\alpha$,

$$\text{kde } P^\alpha \in p_1^\alpha(0) \cap p_1^\rho(0), H \in h_1^\alpha(4) \cap h_1^\rho(4)$$

c. úsečka XT ; $r^\alpha \cap \triangle FAV = XT$

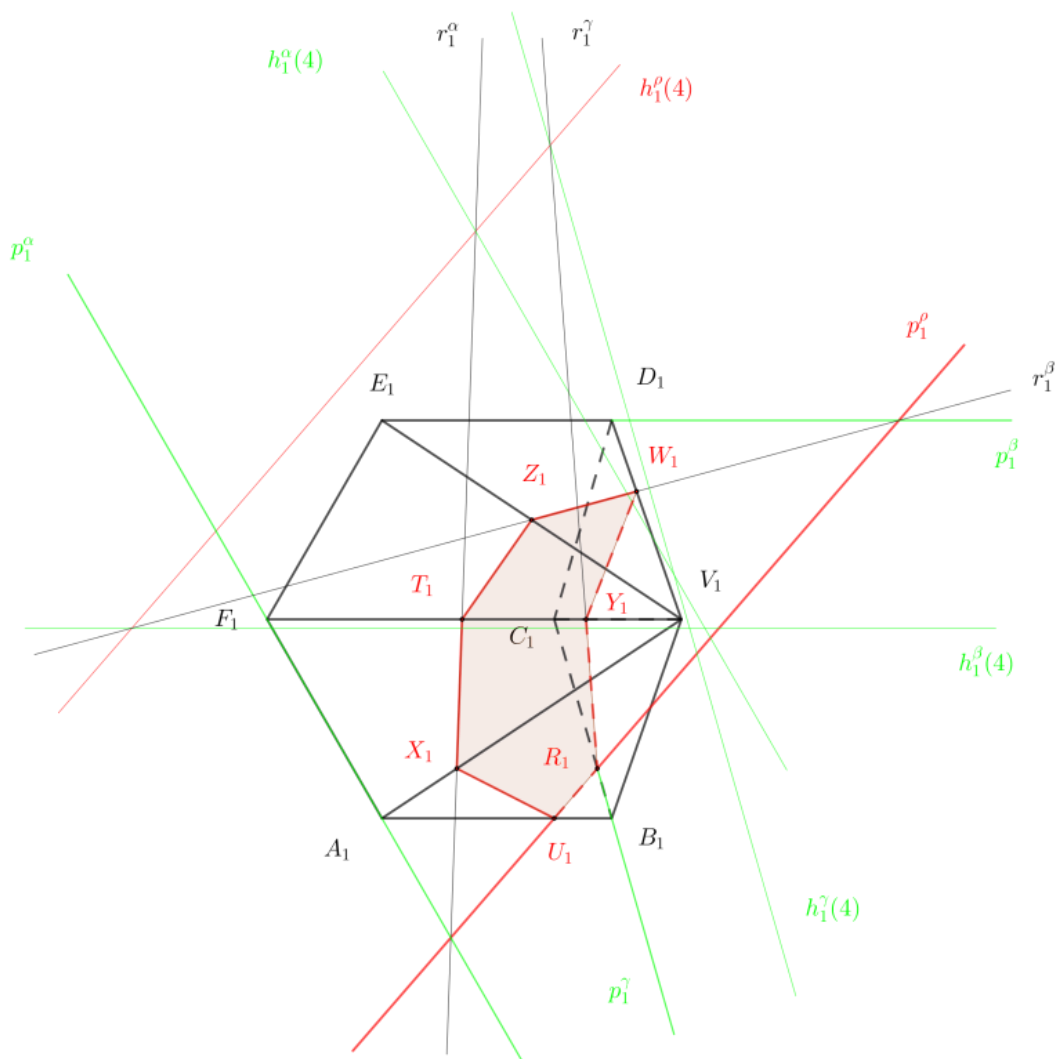
3) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně EDV : $\triangle EDV \cap \rho = ZW$;

ve stěně CBV : $\triangle CBV \cap \rho = YR$

(V obr. 7. 2. 1. 1 je řez ve stěně EDV konstruován pomocí roviny β ; úsečka ZW je průnikem této stěny a průsečnice r^β rovin β a ρ . Ke konstrukci řezu ve stěně CBV byla použita rovina γ ; úsečka YR je průnikem této stěny a průsečnice r^γ rovin γ a ρ)

4) Řezem je sedmiúhelník $UXTZWYR$.



Obr. 7. 2. 1. 1: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu rovinou ρ v kótovaném promítání.

7.2.1.2 Řešení: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu v Mongeově promítání

V Mongeově promítání konstruujeme průsečnice r^x roviny řezu ρ a jednotlivých stěn kosého jehlanu. Určíme stopy roviny X , ve které leží zvolená stěna jehlanu, a najdeme její průsečnici s rovinou ρ . Průsečíky průsečnice r^x a hran zvolené stěny jehlanu jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

1) Řez v podstavě $ABCDEF$:

úsečka UR ; $p_1^{\rho} \cap A_1B_1C_1D_1E_1F_1 = U_1R_1$ (úsečku UR určíme v půdorysu)

2) Řez ve stěně FAV :

a. rovina α ; $\alpha \leftrightarrow FAV$

b. průsečnice r^{α} ; $\alpha \cap \rho = r^{\alpha}$

c. úsečka XT ; $r^{\alpha} \cap \triangle FAV = XT$

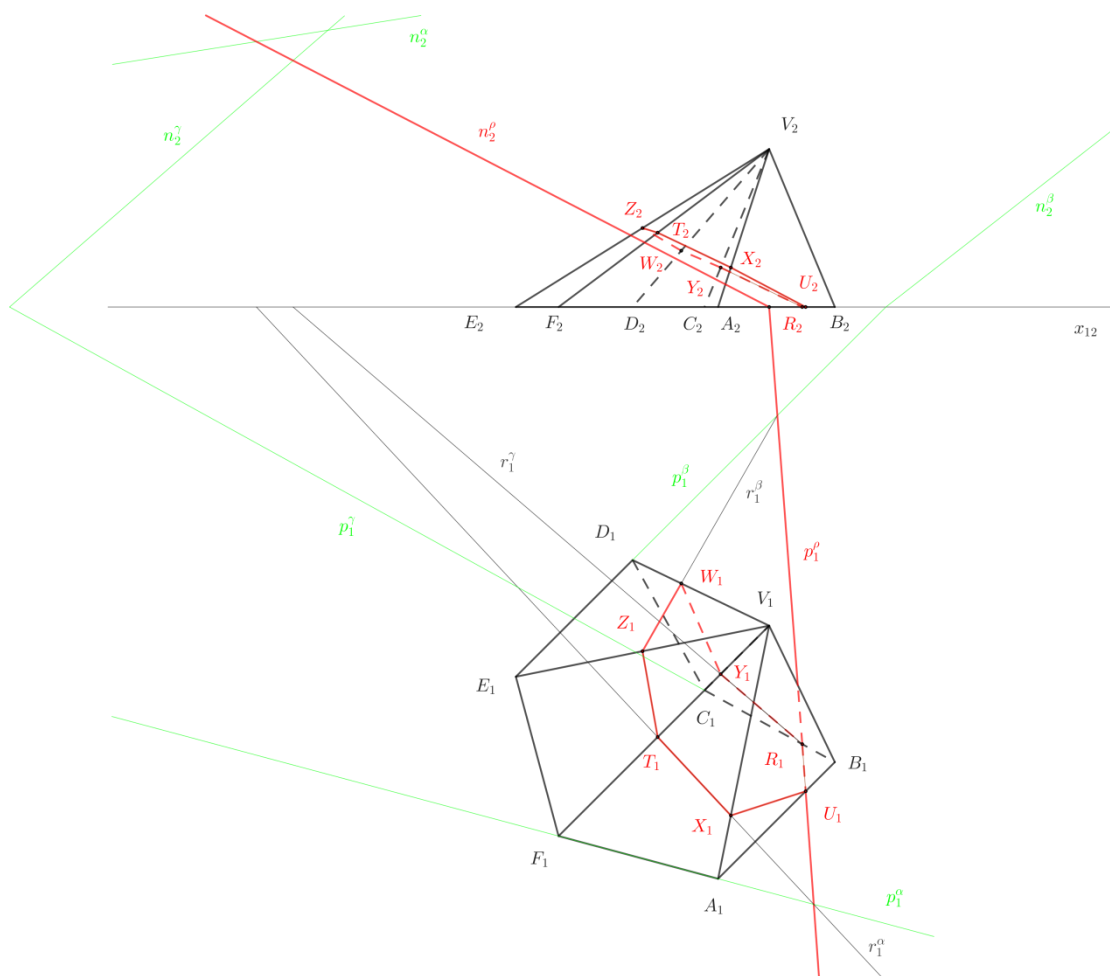
3) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně EDV : $\triangle EDV \cap \rho = ZW$;

ve stěně BCV : $\triangle BCV \cap \rho = YR$

(V obr. 7. 2. 1. 2 je řez ve stěně EDV konstruován pomocí roviny β ; úsečka ZW je průnikem této stěny a průsečnice r^{β} rovin β a ρ . Ke konstrukci řezu ve stěně BCV byla použita rovina γ ; úsečka YR je průnikem této stěny a průsečnice r^{γ} rovin γ a ρ)

4) Půdorysem řezu je sedmiúhelník $U_1X_1T_1Z_1W_1Y_1R_1$, nárysem řezu je sedmiúhelník $U_2X_2T_2Z_2W_2Y_2R_2$.



Obr. 7. 2. 1. 2: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu rovinou ρ v Mongeově promítání.

7.2.1.3 Řešení: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu v axonometrii

V axonometrii hledáme průsečnice r^x roviny řezu ρ s jednotlivými stěnami jehlanu. Určíme potřebné stopy (alespoň dvě) roviny X , ve které leží zvolená stěna jehlanu, a najdeme její průsečnici r^x s rovinou ρ . Průsečíky průsečnice r^x a hran zvolené stěny jehlanu jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

1) Řez v podstavě $ABCDEF$:

úsečka UR ; $p^\rho \cap ABCDEF = UR$

2) Řez ve stěně ABV :

a. rovina α ; $\alpha = \leftrightarrow ABV$

b. průsečnice r^α ; $\alpha \cap \rho = r^\alpha$

c. úsečka UX ; $r^\alpha \cap \triangle ABV = UX$

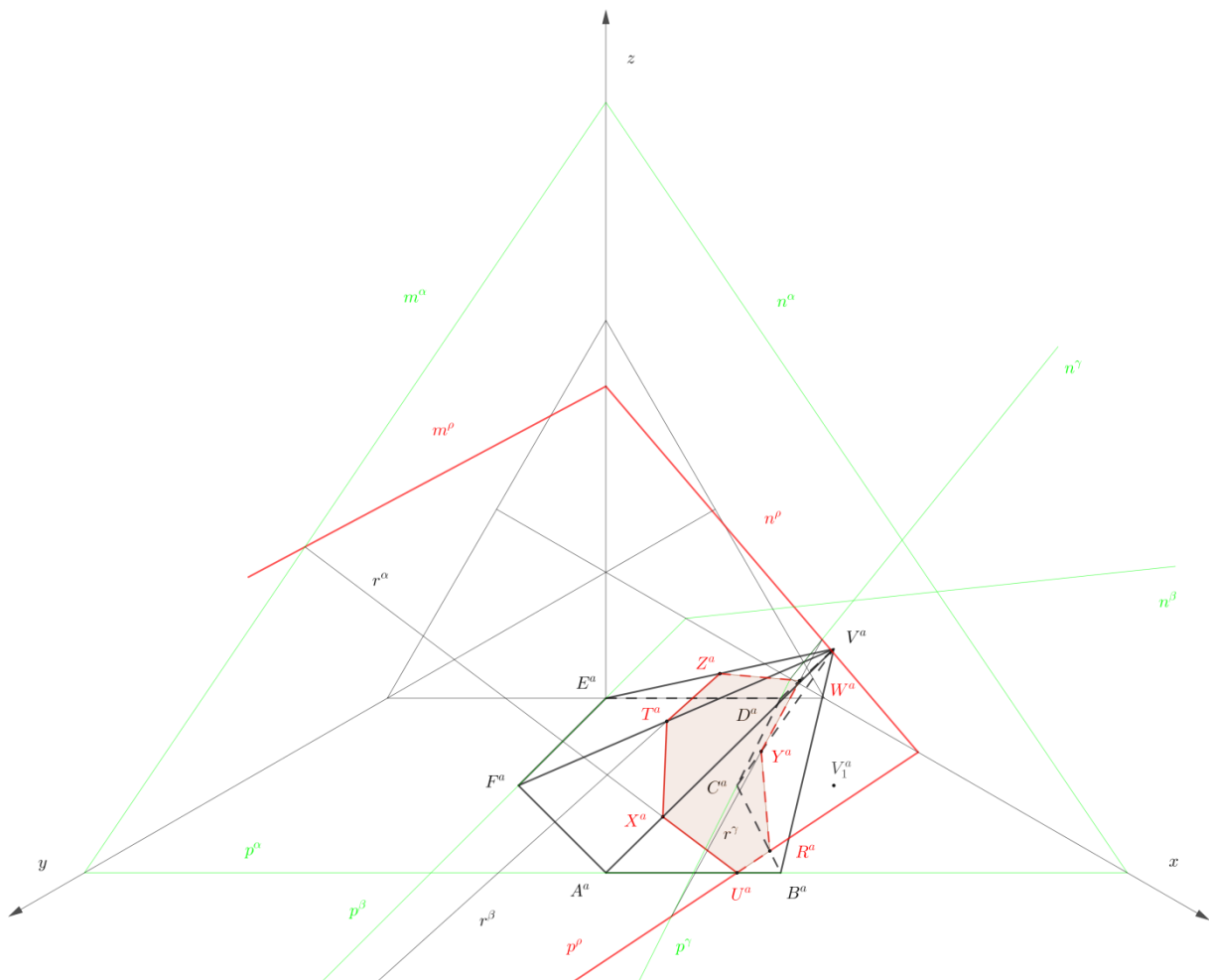
3) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně EFV : $\triangle EFV \cap \rho = TZ$;

ve stěně CDV : $\triangle CDV \cap \rho = YW$

(V obr. 7. 2. 1. 3 je řez ve stěně EFV konstruován pomocí roviny β ; úsečka TZ je průnikem této stěny a průsečnice r^β rovin β a ρ . Ke konstrukci řezu ve stěně CDV byla použita rovina γ ; úsečka YW je průnikem této stěny a průsečnice r^γ rovin γ a ρ)

4) Řezem je sedmiúhelník $UXTZWYR$.

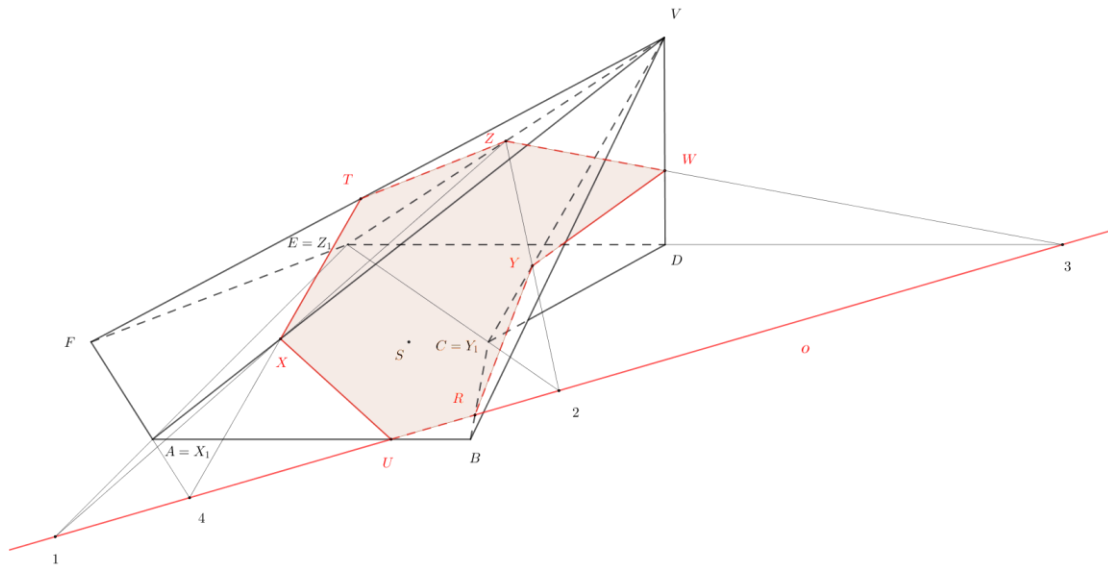


Obr. 7. 2. 1. 3: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu rovinou ρ v axonometrii.

7.2.1.4 Řešení: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu ve volném rovnoběžném promítání

Při řešení úlohy ve volném rovnoběžném promítání nejprve najdeme osu kolineace o mezi rovinami XYZ a podstavou kosého jehlanu (vycházíme z předpokladu, že přímky odpovídající si ve středové kolineaci se protínají na ose kolineace). Poté konstruujeme průsečnice roviny řezu ρ s jednotlivými stěnami jehlanu. Průsečíky průsečnice a hran zvolené stěny jehlanu jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

- 1) Osa kolineace o , ve středové kolineaci $S = (V; o)$ mezi rovinami ABC a XYZ , kde bod V je středem kolineace a přímka o osou kolineace:
 - a. body X_1, Y_1, Z_1 ; po řadě průměty bodů X, Y, Z v kolineaci S
 - b. body $1, 2$; $1 \in \leftrightarrow X_1Z_1 \cap \leftrightarrow XZ$; $2 \in \leftrightarrow Y_1Z_1 \cap \leftrightarrow YZ$ (v obr. 7. 2. 1. 4 jsou čísla 1 a 2 označeny samodružné body přímek $\leftrightarrow YZ, \leftrightarrow XZ$)
 - c. osa o ; $o = \leftrightarrow 12$
- 2) Řez v podstavě $ABCDEF$:
úsečka UR ; $o \cap \text{podstava } ABCDEF = UR$
- 3) Řez ve stěně ABV :
úsečka UX ; body U a X leží v rovině řezu ρ , tudíž v ní leží i úsečka UX
- 4) Řez ve stěně EDV :
 - a. bod 3 ; $3 \in \leftrightarrow ED \cap o$ (v obr. 7. 2. 1. 4 je bod 3 samodružným bodem, náleží tedy rovině řezu ρ a zároveň rovině, v níž leží stěna EDV . Leží-li tedy body 3 a Z v rovině řezu ρ , pak – dle axiomu 1 – v ní leží i přímka $3Z$)
 - b. úsečka WZ ; $\leftrightarrow 3Z \cap \triangle EDV = WZ$
- 5) Analogicky postupujeme i ve stěně FAV :
úsečka TX je průnikem stěny FAV a roviny ρ
- 6) Řezem je sedmiúhelník $UXTZWYR$.



Obr. 7. 2. 1. 4: Řez kosého nekonvexního šestibokého jehlanu rovinou XYZ ve volném rovnoběžném promítání.

7.2.2 Řešení: Dva řezy kosého pětibokého hranolu

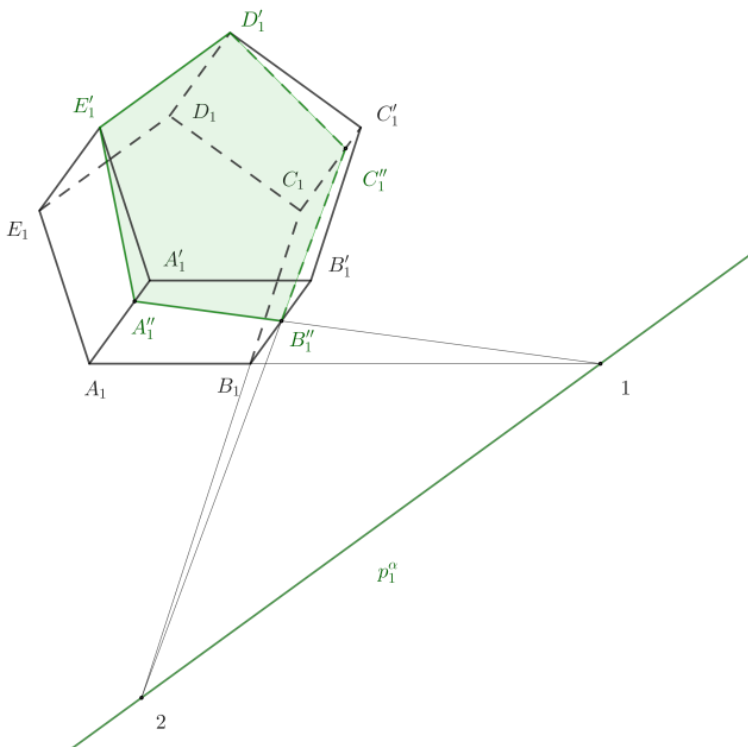
7.2.2.1 Řešení: Dva řezy kosého pětibokého hranolu v kótovaném promítání

V kótovaném promítání nejprve provedeme (i) řez kosého hranolu $ABCDEA'B'C'D'E'$ rovinou $\alpha = \leftrightarrow E'D'A''$. Využijeme k tomu šikmou osovou afinitu směru AA'' mezi rovinami π a α s půdorysnou stopou p_1^α jako osou afinity. Takto vznikne řez tvaru pětiúhelníku $A''B''C''D'E'$. Následně přistoupíme k řešení úlohy (ii), tedy konstrukci řezu seříznutého pětibokého kosého hranolu $ABCDEA''B''C''D'E'$ rovinou ρ . Najdeme průsečík zvolené hrany seříznutého hranolu a roviny řezu ρ pomocí krycí přímky. Tento průsečík využijeme při hledání průsečnice roviny řezu ρ se stěnou seříznutého hranolu, v níž leží nalezený průsečík. Opět přitom využijeme šikmou osovou afinitu směru AA'' mezi rovinami π a ρ . Analogicky postupujeme i dalších stěnách hranolu. Průsečíky průsečnice a hran zvolené stěny hranolu jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

(i) Řez pětibokého kosého hranolu $ABCDEA'B'C'D'E'$ rovinou $\alpha = \leftrightarrow E'D'A''$:

- 1) Rovina α ; $\alpha = \leftrightarrow E'D'A''$
- 2) Řez ve stěně $ABA'B'$ (v osové afinitě $O = (p_1^\alpha; AA'')$ mezi rovinami π a α , kde stopa p_1^α je osa afinity a přímka AA'' směr afinity):

- a. bod 1; $1 \in \leftrightarrow A_1B_1 \cap p_1^\alpha(0)$ (v obr. 7. 2. 2. 1(i) je bod 1 samodružným bodem, náleží tedy rovině řezu α a zároveň rovině, v níž leží stěna $ABA'B'$. Leží-li tedy body 1 a A'' v rovině řezu α , pak – dle axiomu 1 – v ní leží i přímka $1A''$)
- b. úsečka $A''B''$; $\leftrightarrow 1A'' \cap \text{stěna } ABA'B' = A''B''$
- 3) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:
ve stěně $BCB'C'$ je řezem úsečka $B''C''$;
ve stěně $CDC'D'$ zase úsečka $C''D''$
- 4) Řezem je pětiúhelník $A''B''C''D''E''$.



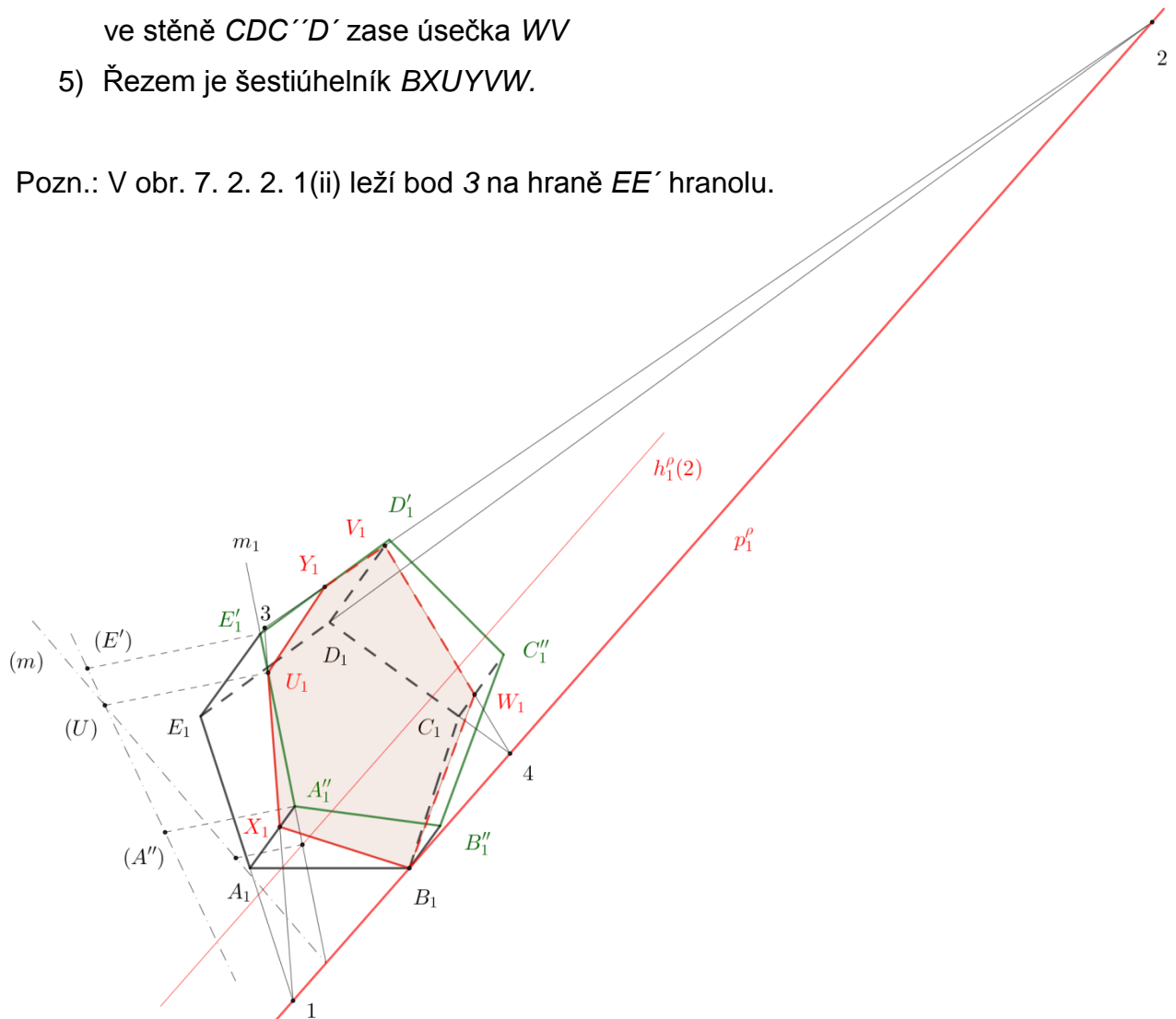
Obr. 7. 2. 2. 1(i): Řez kosého pětibokého hranolu rovinou $E'D'A''$ v kótovaném promítání.

(ii) Řez seříznutého pětibokého kosého hranolu $ABCDEA''B''C''D''E''$ rovinou ρ :

- 1) Bod B ; $B_1 \in p_1^\rho(0)$
- 2) Průsečík U hrany $E'A''$ tělesa s rovinou ρ (pomocí krycí přímky m):
 - a. krycí přímka m ; $m \subset \rho$; $m_1 = E_1'A_1''$
 - b. zjištění kót bodů E' , A''
 - c. přímky (m) , $(E'A'')$; (m) je sklopená přímka m a $(E'A'')$ je sklopená přímka $E'A''$

- d. bod U ; bod (U) najdeme ve sklopení tak, že $(U) \in (m) \cap \leftrightarrow (E'A'')$.
 Poté jej ze sklopení převedeme zpět na hranu $E'A''$, tedy $U_1 \in E'A''_1$
- 3) Řez ve stěně $EAE'A''$ (v osové afinitě $O = (p_1^o; AA'')$ mezi rovinami π a ρ , kde stopa p_1^o je osa afinity a přímka AA'' směr afinity):
- bod 1 ; $1 \in \leftrightarrow E_1A_1 \cap p_1^o$ (v obr. 7. 2. 2. 1(ii) je bod 1 samodružným bodem, náleží tedy rovině řezu ρ a zároveň rovině, v níž leží stěna $EAE'A''$. Leží-li tedy body 1 a U v rovině řezu ρ , pak – dle axiomu 1 – v ní leží i přímka $1U$)
 - úsečka UX ; $\leftrightarrow 1U \cap$ stěna $EAE'A'' = UX$
- 4) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:
 ve stěně $EDE'D'$ je řezem úsečka YV ;
 ve stěně $CDC''D'$ zase úsečka WV
- 5) Řezem je šestiúhelník $BXUYVW$.

Pozn.: V obr. 7. 2. 2. 1(ii) leží bod 3 na hraně EE' hranolu.



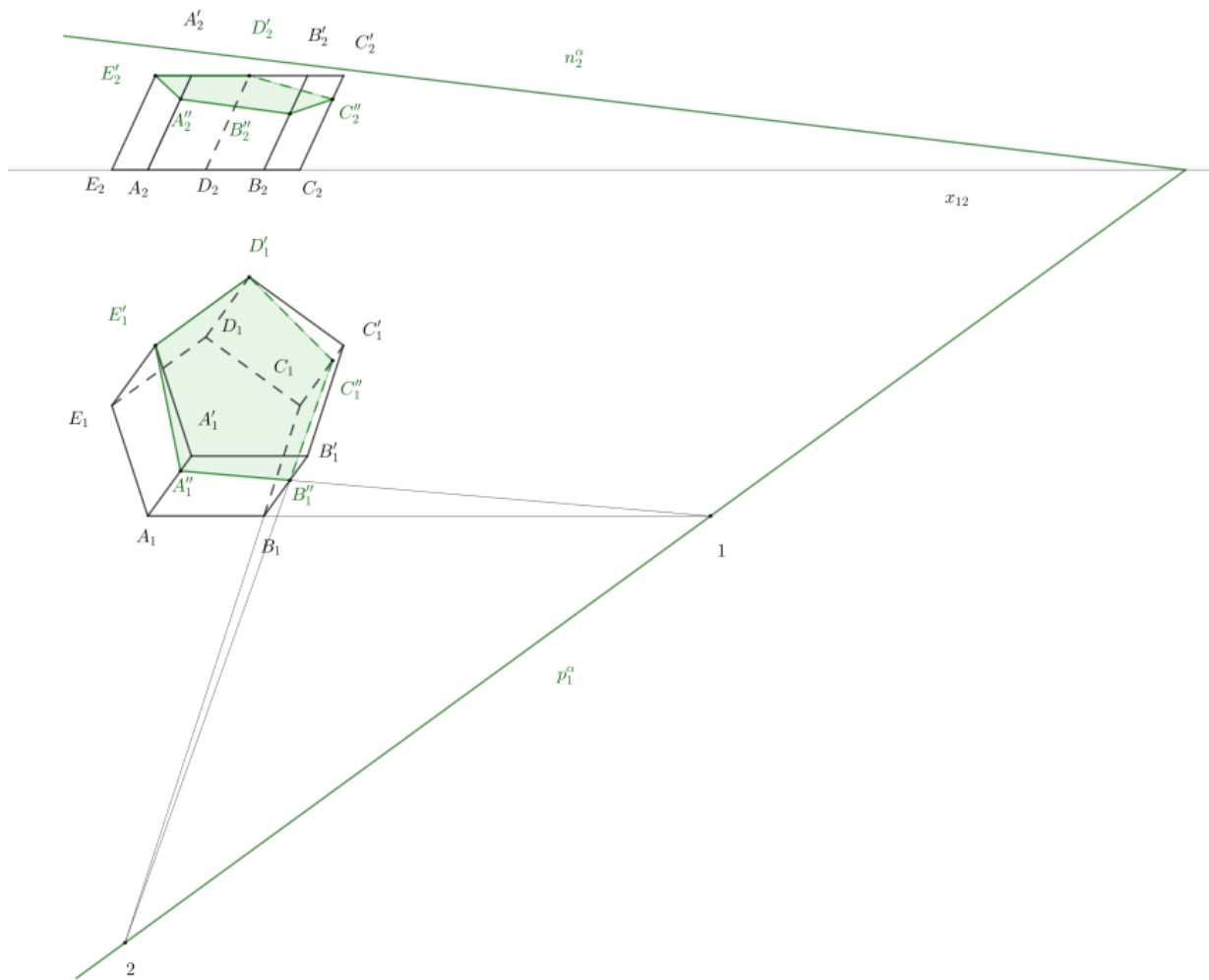
Obr. 7. 2. 2. 1(ii): Řez seřiznutého kosého pětibokého hranolu rovinou ρ v kótovaném promítání.

7.2.2.2 Řešení: Dva řezy kosého pětibokého hranolu v Mongeově promítání

V Mongeově promítání vedeme (i) řez kosého hranolu $ABCDEA'B'C'D'E'$ rovinou $\alpha = \leftrightarrow E'D'A''$, přičemž využijeme šikmou osovou afinitu směru AA'' mezi rovinami π a α s půdorysnou stopou p_1^α jako osou afinity. Takto vznikne řez tvaru pětiúhelníku $A''B''C''D'E'$. Následně (ii) vedeme řez seříznutého pětibokého kosého hranolu $ABCDEA''B''C''D'E'$ rovinou ρ . Najdeme průsečík zvolené hrany seříznutého hranolu a roviny řezu ρ proložením hrany pomocnou rovinou. Další strany řezu hledáme pomocí osové afinity, přičemž začneme konstruovat stranu řezu v té stěně tělesa, v níž leží tento průsečík. Takto najdeme všechny strany mnohoúhelníku, tvořícího řez tělesa.

(i) Řez pětibokého kosého hranolu $ABCDEA'B'C'D'E'$ rovinou $\alpha = \leftrightarrow E'D'A''$:

- 1) Rovina α ; $\alpha = \leftrightarrow E'D'A''$
- 2) Řez ve stěně $ABA'B'$ (v osové afinitě $O = (p_1^\alpha; AA'')$ mezi rovinami π a α , kde stopa p_1^α je osa afinity a přímka AA'' směr afinity):
 - a. bod 1 ; $1 \in \leftrightarrow A_1B_1 \cap p_1^\alpha$ (v obr. 7. 2. 2. 2(i) je bod 1 samodružným bodem, náleží tedy rovině řezu α a zároveň rovině, v níž leží stěna $ABA'B'$. Leží-li tedy body 1 a A'' v rovině řezu α , pak – dle axiomu 1 – v ní leží i přímka $1A''$)
 - b. úsečka $A''B''$; $\leftrightarrow 1A'' \cap ABA'B' = A''B''$
- 3) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:
ve stěně $BCB'C'$ je řezem úsečka $B''C''$;
ve stěně $CDC'D'$ zase úsečka $C''D'$
- 4) Řezem je pětiúhelník $A''B''C''D'E'$.



Obr. 7. 2. 2. 2(i): Řez kosého pětibokého hranolu rovinou $E'D'A''$ v Mongeově promítání.

(ii) Řez seřiznutého pětibokého kosého hranolu $ABCDEA''B''C''D'E'$ rovinou ρ :

- 1) Bod B ; $B \in \rho$
- 2) Průsečík X hrany AA'' tělesa s rovinou ρ (pomocí proložení přímky AA'' rovinou λ):
 - a. rovina λ ; $\lambda \perp \pi$; $AA'' \subset \lambda$
 - b. průsečnice r^λ ; $\lambda \cap \rho = r^\lambda$
 - c. bod X ; $X \in AA'' \cap r^\lambda$
- 3) Řez ve stěně $EAE'A''$ (v osové afinitě $O = (p_1^\rho; XA)$ mezi rovinami π a ρ , kde stopa p_1^ρ je osa afinity a přímka AA'' směr afinity):
 - a. bod 1 ; $1 \in \Leftrightarrow E_1A_1 \cap p_1^\rho$ (v obr. 7. 2. 2. 2(ii) je bod 1 samodružným bodem, náleží tedy rovině řezu ρ a zároveň rovině, v níž leží stěna

$EAE'A''$. Leží-li tedy body 1 a X v rovině řezu ρ , pak – dle axiomu 1 – v ní leží i přímka 1X)

b. úsečka UX; $\leftrightarrow 1X \cap$ stěna $EAE'A'' = UX$

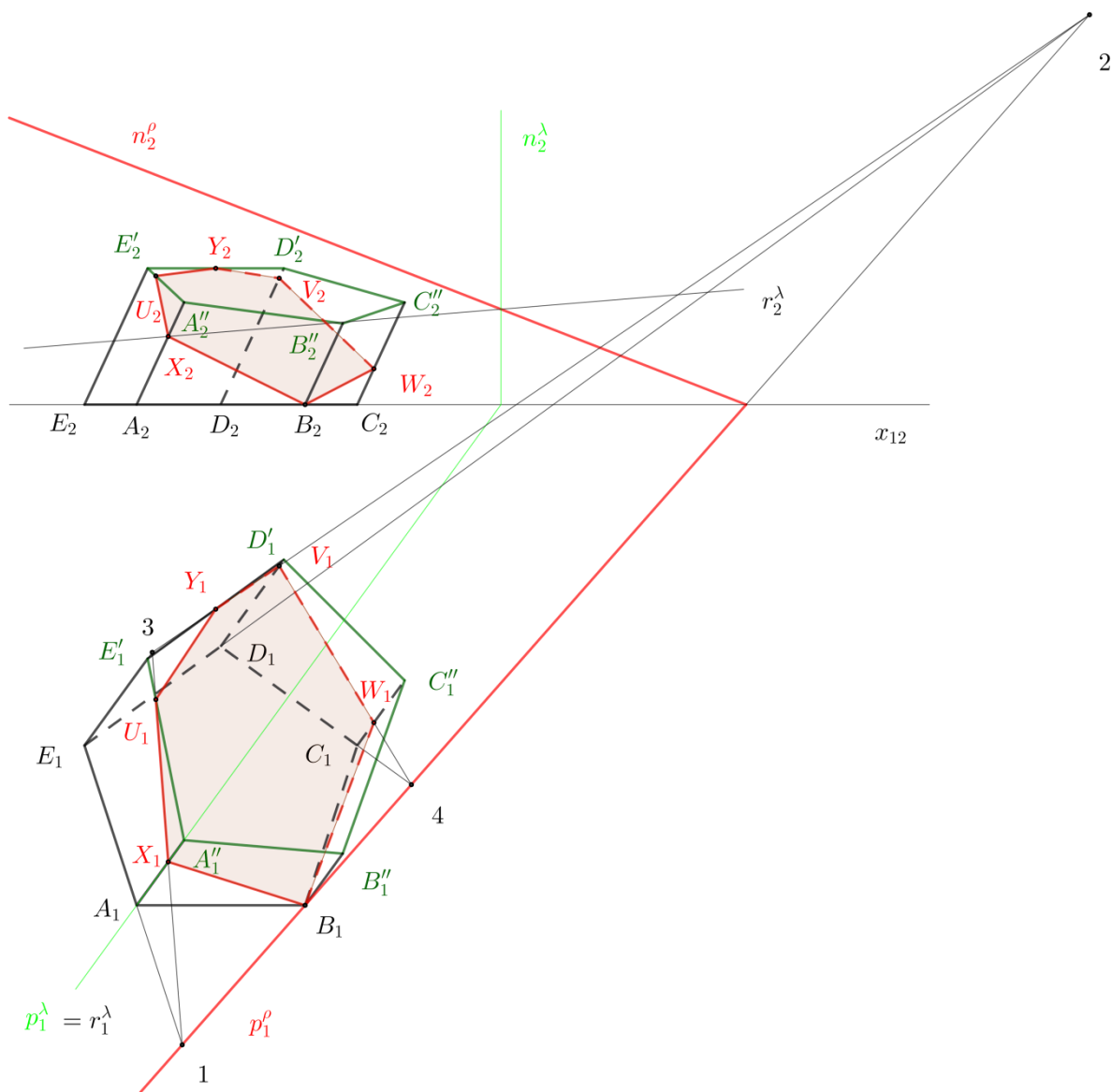
4) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně $EDE'D'$ je řezem úsečka YV;

ve stěně $CDC''D'$ zase úsečka VW

5) Řezem je šestiúhelník BXUYVW.

Pozn.: V obr. 7. 2. 2. 2(ii) leží bod 3 na hraně EE' hranolu.



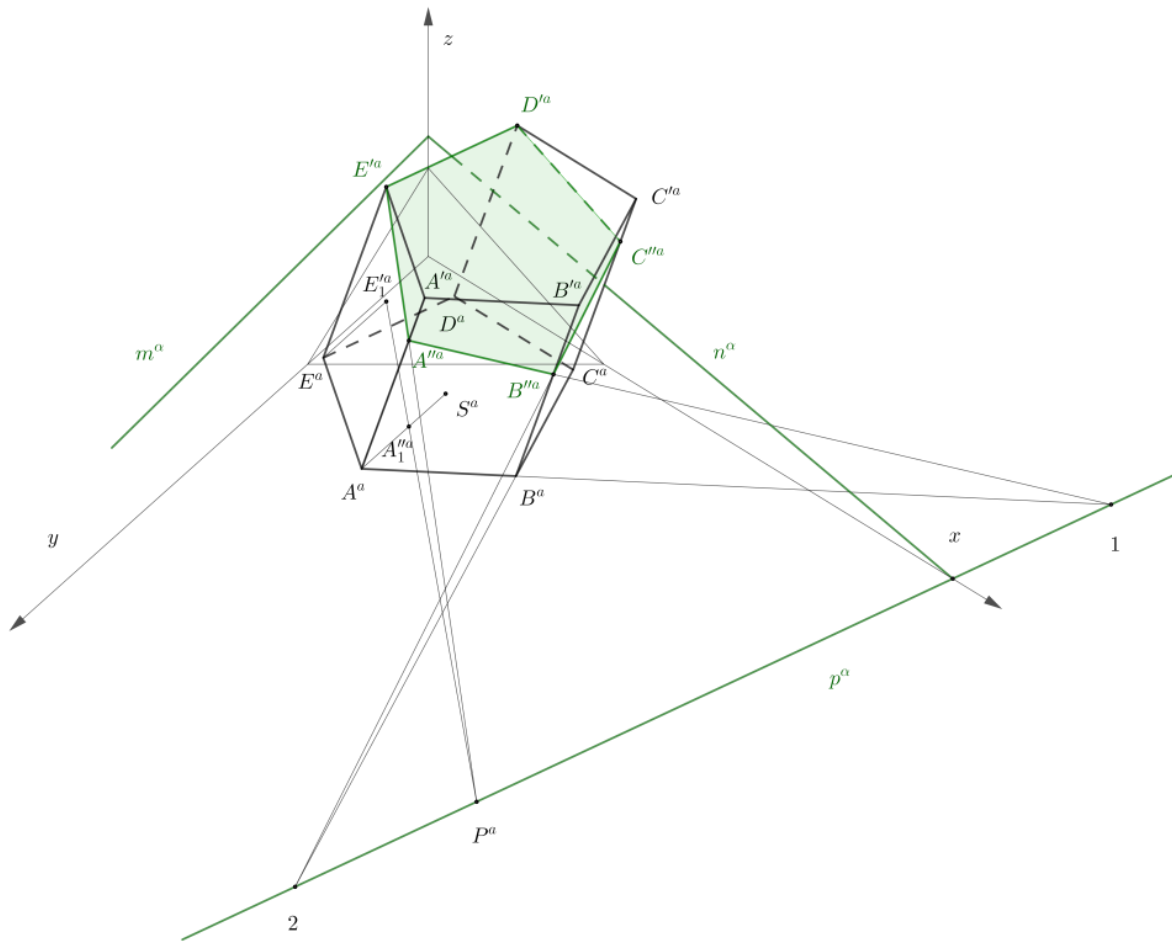
Obr. 7. 2. 2. 2(ii): Řez seříznutého kosého pětibokého hranolu rovinou ρ v Mongeově promítání.

7.2.2.3 Řešení: Dva řezy kosého pětibokého hranolu v axonometrii

V axonometrii vedeme (i) řez kosého hranolu $ABCDEA'B'C'D'E'$ rovinou $\alpha = \leftrightarrow E'D'A''$, využijeme k tomu šikmou osovou afinitu směru AA'' mezi rovinami π a α s půdorysnou stopou p^α jako osou afinity. Takto vznikne pětiúhelník $A''B''C''D'E'$, který je hledaným řezem tělesa. Pak přistoupíme (ii) ke konstrukci řezu seříznutého pětibokého kosého hranolu $ABCDEA''B''C''D'E'$ rovinou ρ . Najdeme průsečík zvolené hrany seříznutého hranolu a roviny řezu ρ tak, že hranou proložíme pomocnou rovinu. Následně hledáme průsečíky průsečnic roviny řezu ρ s jednotlivými stěnami seříznutého hranolu, kdy opět využijeme šikmou osovou afinitu směru AA'' mezi rovinami π a ρ . Průsečíky průsečnice a hran zvolené stěny hranolu jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

(i) Řez pětibokého kosého hranolu $ABCDEA'B'C'D'E'$ rovinou $\alpha = \leftrightarrow E'D'A''$:

- 1) Rovina α ; $\alpha = \leftrightarrow E'D'A''$
- 2) Řez ve stěně $ABA'B'$ (v osové afinitě $O = (p^\alpha; AA'')$ mezi rovinami α a π , kde stopa p^α je osa afinity a přímka AA'' směr afinity):
 - a. bod 1 ; $1 \in \leftrightarrow AB \cap p^\alpha$ (v obr. 7. 2. 2. 3(i) je bod 1 samodružným bodem, náleží tedy rovině řezu α a zároveň rovině, v níž leží stěna $ABA'B'$. Leží-li tedy body 1 a A'' v rovině řezu α , pak – dle axiomu 1 – v ní leží i přímka $1A''$)
 - b. úsečka $A''B''$; $\leftrightarrow 1A'' \cap$ stěna $ABA'B' = A''B''$
- 3) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:
ve stěně $BCB'C'$ je řezem úsečka $B''C''$;
ve stěně $CDC'D'$ zase úsečka $C''D'$
- 4) Řezem je pětiúhelník $A''B''C''D'E'$.



Obr. 7. 2. 2. 3(i): Řez kosého pětibokého hranolu rovinou $E'D'A''$ v axonometrii.

(ii) Řez seříznutého pětibokého kosého hranolu $ABCDEA''B''C''D''E'$ rovinou ρ :

- 1) Bod B ; $B \in \rho$
- 2) Průsečík U hrany $E'A''$ tělesa s rovinou ρ (pomocí proložení přímky $E'A''$ rovinou λ):
 - a. rovina λ ; $\lambda \perp \pi$; $E'A'' \subset \lambda$
 - b. průsečnice r_λ ; $\lambda \cap \rho = r_\lambda$
 - c. bod U ; $U \in E'A'' \cap r_\lambda$
- 3) Řez ve stěně $EAE'A''$ (v osové afinitě $O = (p^\rho; AA'')$ mezi rovinami π a ρ , kde stopa p^ρ je osa afinity a přímka AA'' směr afinity):
 - a. bod 1 ; $1 \in \leftrightarrow EA \cap p^\rho$ (v obr. 7. 2. 2. 3(ii) je bod 1 samodružným bodem, náleží tedy rovině řezu ρ a zároveň rovině, v níž leží stěna

$EAE'A''$. Leží-li tedy body 1 a U v rovině řezu ρ , pak – dle axiomu 1 – v ní leží i přímka $1U$)

b. úsečka UX ; $\leftrightarrow 1U \cap$ stěna $EAE'A'' = UX$

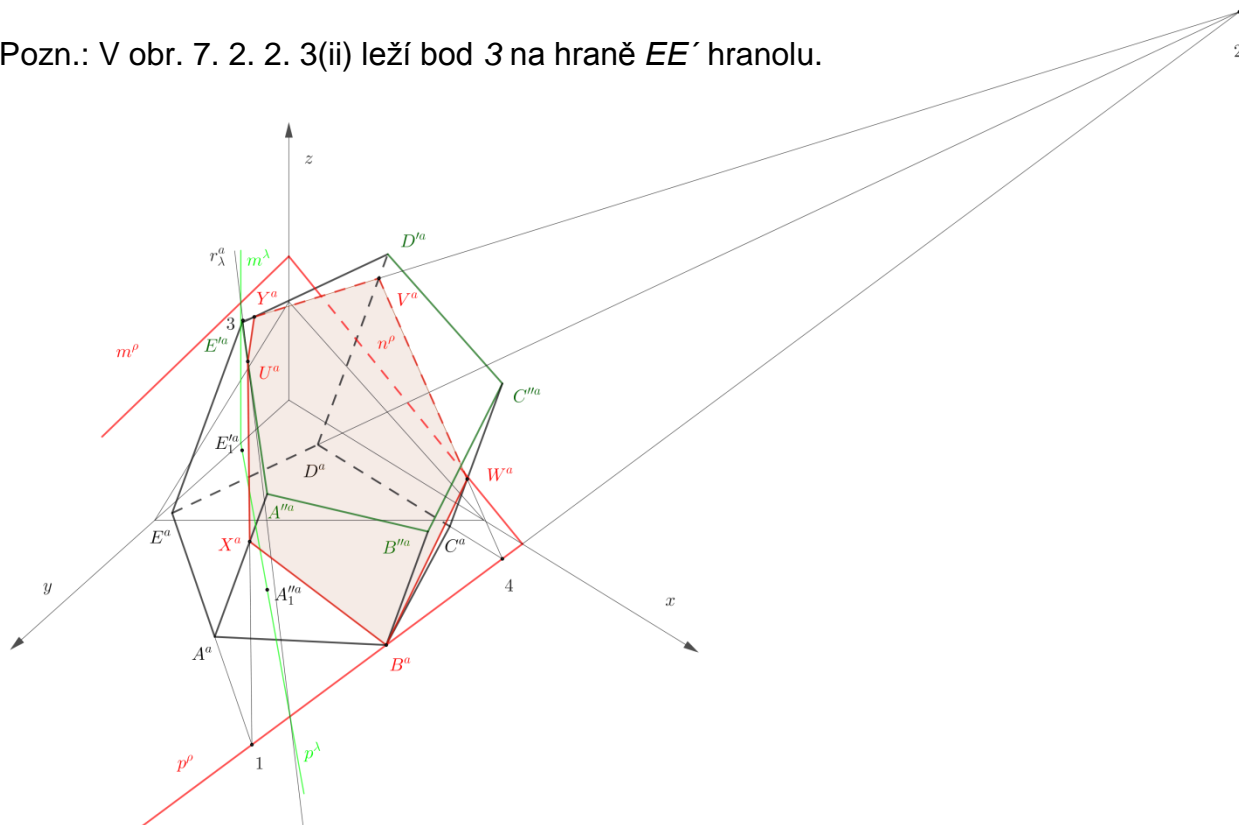
4) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně $EDE'D'$ je řezem úsečka YV ;

ve stěně $CDC''D'$ zase úsečka VW

5) Řezem je šestiúhelník $BXUYVW$.

Pozn.: V obr. 7. 2. 2. 3(ii) leží bod 3 na hraně EE' hranolu.



Obr. 7. 2. 2. 3(ii): Řez seříznutého kosého pětibokého hranolu rovinou ρ v axonometrii.

7.2.2.4 Řešení: Dva řezy kosého pětibokého hranolu ve volném rovnoběžném promítání

Ve volném rovnoběžném promítání (i) provedeme řez kosého hranolu $ABCDEA'B'C'D'E'$ rovinou $\alpha = \leftrightarrow E'D'A''$, kdy využijeme šikmou osovou afinitu směru AA'' mezi rovinami ABC a α (osu afinity nalezneme, vyjdeme-li z předpokladu, že přímky odpovídající si v afinitě se protínají na ose afinity). Takto vznikne pětiúhelník $A''B''C''D'E'$, který je hledaným řezem tělesa. Pak přistoupíme k úloze

(ii) vést řez seříznutého pětibokého kosého hranolu $ABCDEA''B''C''D'E'$ rovinou XYZ . Konstrukci budeme opět provádět v šikmé osově afinitě směru AA'' , jejíž osu najdeme pomocí v afinitě si odpovídajících přímek. Hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa jsou průsečíky průsečnic roviny řezu XYZ s jednotlivými stěnami seříznutého hranolu.

(i) Řez pětibokého kosého hranolu $ABCDEA'B'C'D'E'$ rovinou $\alpha = \leftrightarrow E'D'A''$:

1) Osa afinity o , v osově afinitě $O = (o; AA')$ mezi rovinami ABC a α , kde přímka o je osa afinity a přímka AA'' směr afinity:

a. body $1, 2$; $1 \in \leftrightarrow E'A'' \cap \leftrightarrow EA$; $2 \in \leftrightarrow D'A'' \cap \leftrightarrow DA$

(v obr. 7. 2. 2. 4(i) jsou čísla 1 a 2 označeny samodružné body přímek $\leftrightarrow E'A''$, $\leftrightarrow D'A''$)

b. osa o ; $o = \leftrightarrow 12$

2) Řez ve stěně $DCD'C'$:

a. bod 3 ; $3 \in \leftrightarrow DC \cap o$ (v obr. 7. 2. 2. 4(i) je bod 3 samodružným bodem, náleží tedy rovině řezu α a zároveň rovině, v níž leží stěna $DCD'C'$. Leží-li tedy body 3 a D' v rovině řezu α , pak – dle axiomu 1 – v ní leží i přímka $3D'$)

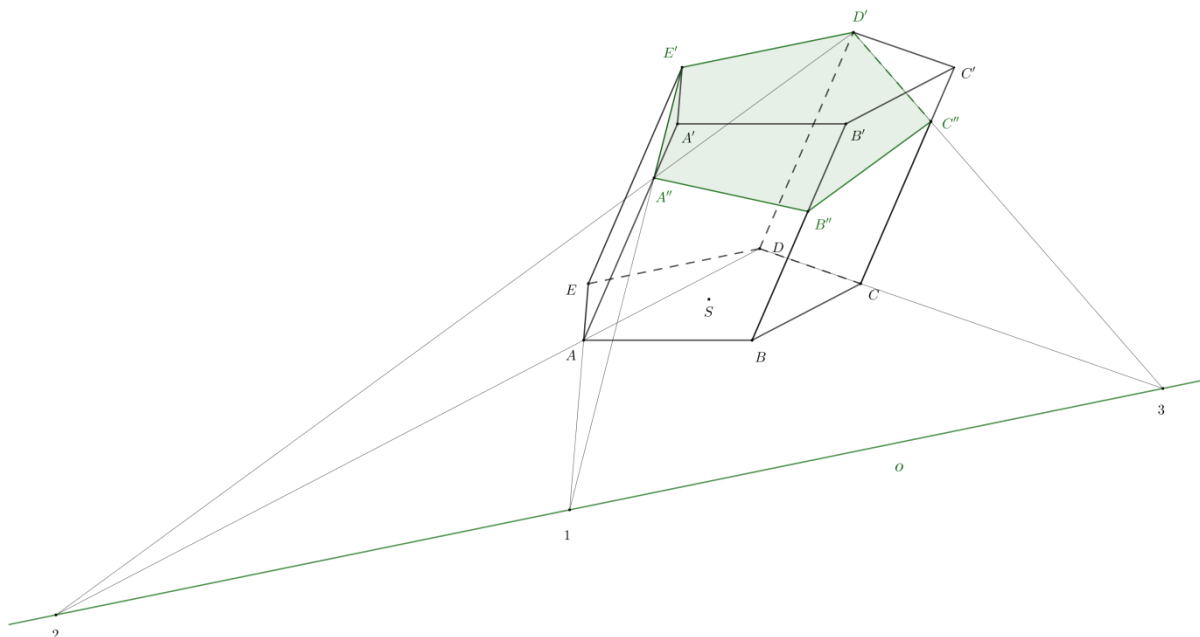
b. Úsečka $D'C''$; $\leftrightarrow 3D' \cap$ stěna $DCD'C' = D'C''$

3) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně $BCB'C'$ je řezem úsečka $B''C''$;

ve stěně $ABA'B'$ zase úsečka $A''B''$

4) Řezem je pětiúhelník $A''B''C''D'E'$.



Obr. 7. 2. 2. 4(i): Řez kosého pětibokého hranolu rovinou $E'D'A''$ ve volném rovnoběžném promítání.

(ii) Řez seříznutého pětibokého kosého hranolu $ABCDEA''B''C''D'E'$ rovinou XYZ :

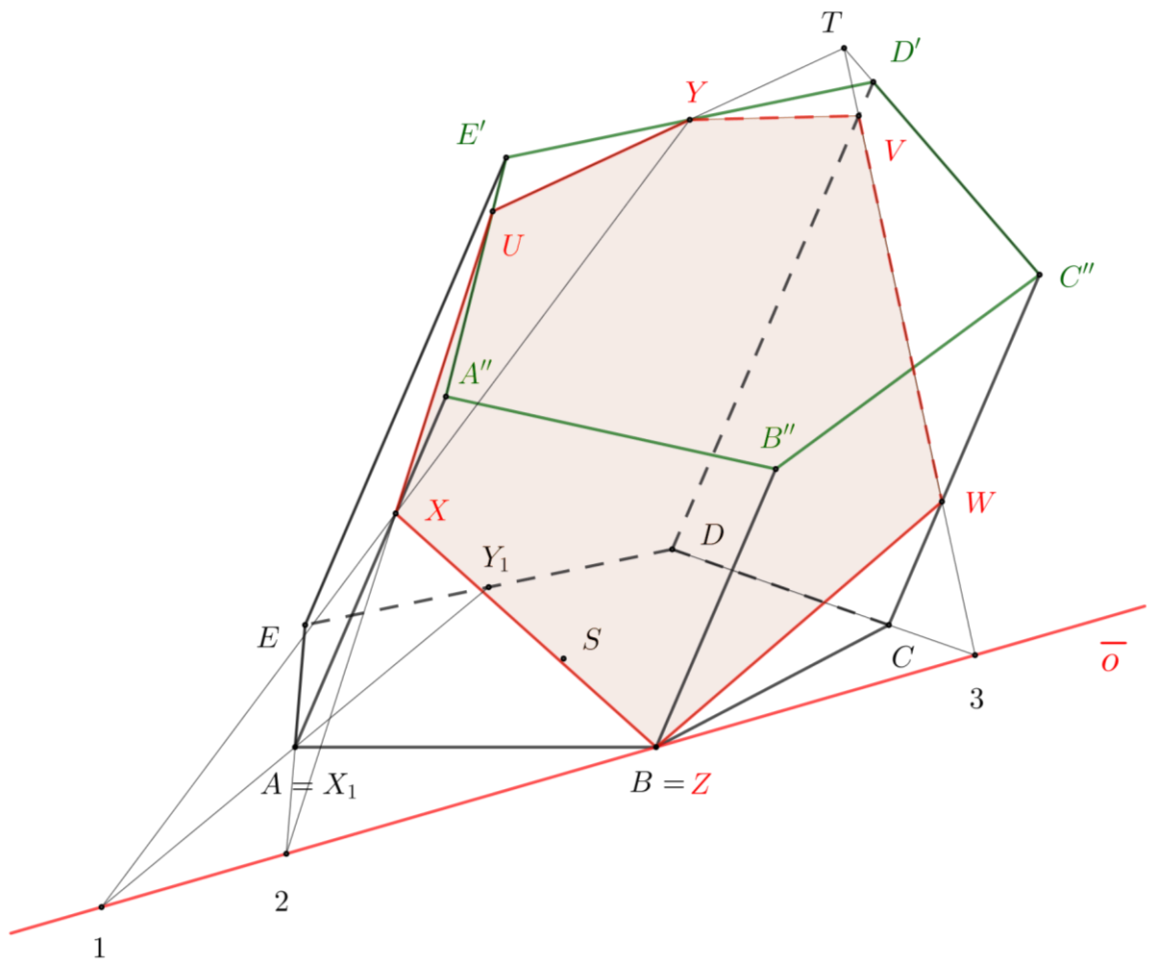
- 1) Osa afinity o , v osově afinitě $O = (\bar{o}; AA')$ mezi rovinami ABC a XYZ , kde přímka \bar{o} je osa afinity a přímka AA' směr afinity):
 - a. body X_1, Y_1 ; po řadě průměty bodů X, Y v osově afinitě O ($Z = B$ je samodružný bod)
 - b. bod 1 ; $1 \in \leftrightarrow X_1Y_1 \cap \leftrightarrow XY$ (v obr. 7. 2. 2. 4(ii) je číslem 1 označen průsečík přímky XY a jejího afinního obrazu $\leftrightarrow X_1Y_1$)
 - c. osa \bar{o} ; $\bar{o} = \leftrightarrow 1Z$
- 2) Řez ve stěně $EAE'A''$:
 - a. bod 2 ; $2 \in \leftrightarrow EA \cap \bar{o}$ (v obr. 7. 2. 2. 4(ii) je bod 2 samodružným bodem, náleží tedy rovině řezu XYZ a zároveň rovině, v níž leží stěna $EAE'A''$. Leží-li tedy body 2 a X v rovině řezu XYZ , pak – dle axiomu 1 – v ní leží i přímka $2X$)
 - b. úsečka XU ; $\leftrightarrow 2X \cap$ stěna $EAE'A'' = XU$
- 3) Řez ve stěně $A''B''C''D'E'$:

úsečka UY ; body U a Y leží v rovině řezu XYZ , proto – dle axiomu 1 – v ní leží i úsečka UY
- 4) Řez ve stěně $DCD'C''$:
 - a. bod T ; $T \in \leftrightarrow UY \cap \leftrightarrow D'C''$ (přímky UY i $D'C''$ leží v rovině $E'D'C''$)

b. bod 3; $3 \in \leftrightarrow DC \cap \delta$ (v obr. 7. 2. 2. 4(ii) je bod 3 samodružným bodem, náleží tedy rovině řezu XYZ a zároveň rovině, v níž leží stěna $DCD'C''$. Leží-li tedy body 3 a T v rovině řezu XYZ , pak – dle axiomu 1 – v ní leží i přímka $3T$)

c. úsečka VW ; $\leftrightarrow 3T \cap \text{stěna } DCD'C'' = VW$

5) Řezem je šestiúhelník $BXUYVW$.



Obr. 7. 2. 2. 4(ii): Řez seříznutého kosého pětibokého hranolu rovinou XYZ ve volném rovnoběžném promítání.

7.2.3 Řešení: Řez pravidelného osmistěnu

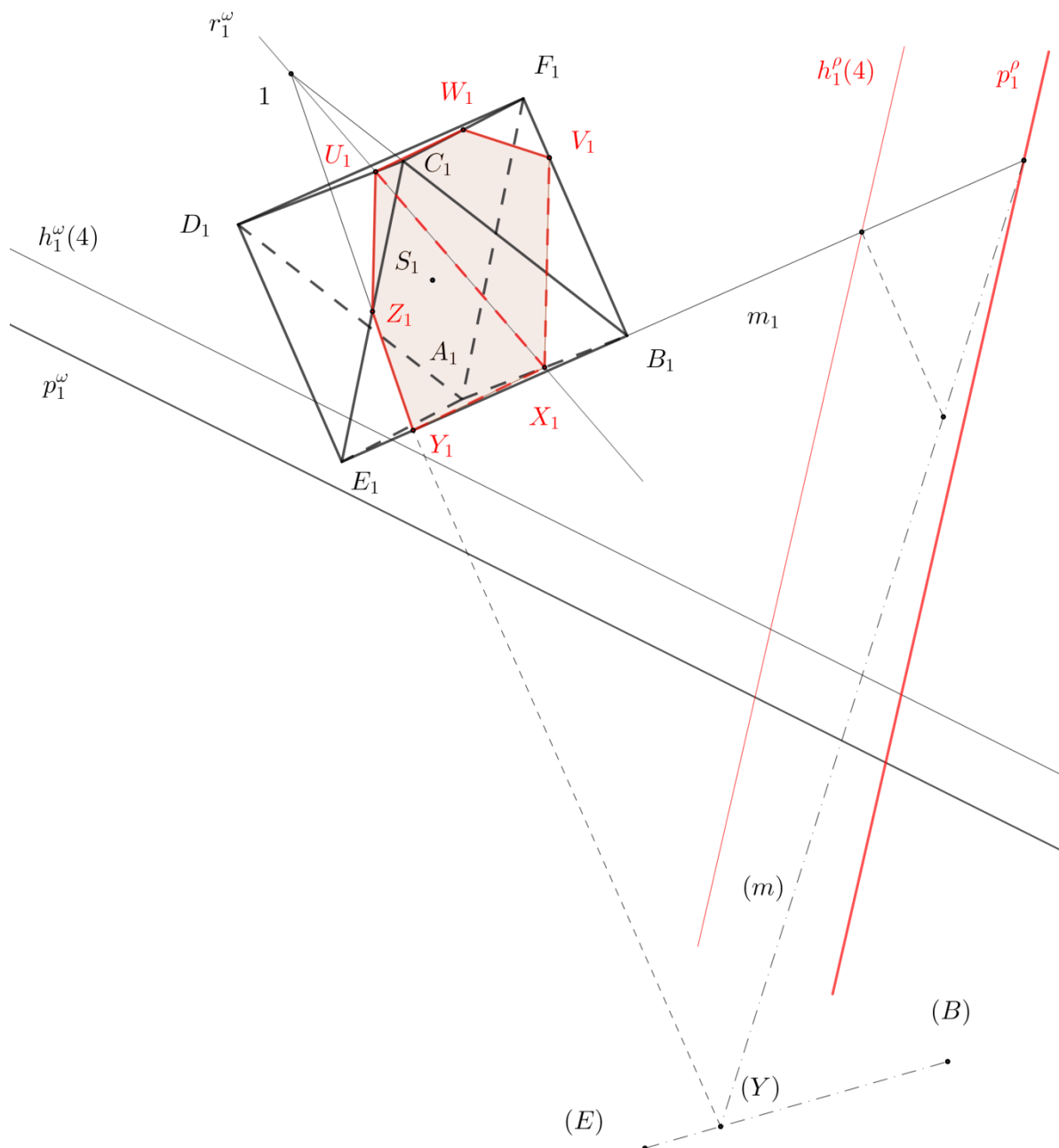
7.2.3.1 Řešení: Řez pravidelného osmistěnu v kótovaném promítání

V kótovaném promítání nejprve najdeme průsečnici r^ω roviny řezu ρ s rovinou $\omega = \leftrightarrow ABC$. Průnikem obvodu čtverce $ABCD$ a této průsečnice jsou dva vrcholy řezného mnohoúhelníku. Poté hledáme průsečík roviny řezu ρ a vybrané hrany osmistěnu, neležící v rovině ω . Získáme tak další vrchol řezného mnohoúhelníku a tím i stranu řezu ve stěně, v níž zvolená hrana leží. Na základě rovnoběžnosti protilehlých stěn osmistěnu získáme další stranu řezného mnohoúhelníku v protilehlé stěně osmistěnu. Dále řešíme průnik roviny řezu ρ s rovinou, v níž leží další stěna osmistěnu. Takto získáme všechny vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

- 1) Průnik rovin ω a ρ :
 - a. průsečnice r^ω ; $\rho \cap \omega = r^\omega$
 - b. body U, R ; $r^\omega \cap \text{čtverec } ABCD = \{X, U\}$
- 2) Průsečík Y hrany EB tělesa s rovinou ρ (pomocí krycí přímky m):
 - a. krycí přímka m ; $m \subset \rho$; $m_1 = E_1B_1$
 - b. přímky (m) , (EB) ; (m) je sklopená přímka m , (EB) je sklopená přímka EB
 - c. bod Y ; bod (Y) najdeme ve sklopení tak, že $(Y) \in (m) \cap \leftrightarrow(EB)$. Poté jej ze sklopení převedeme zpět na hranu EB , tedy $Y_1 \in E_1B_1$
- 3) Řez ve stěně ABE :

úsečka XY ; (body X a Y leží v rovině řezu ρ , tudíž – dle axiomu 1 – i úsečka XY leží v rovině řezu ρ)
- 4) Řez ve stěně DCF :

úsečka UV ; jelikož rovina ABE je rovnoběžná s rovinou DCF , pak – dle axiomu 2 – je úsečka XY rovnoběžná s úsečkou UV
- 5) Řez ve stěně BCE :
 - a. bod 1 ; $1 \in \leftrightarrow BC \cap r^\omega$ (útvary B, C, r^ω leží v rovině ω)
 - b. úsečka YZ ; $\leftrightarrow 1Y \cap \triangle BCE = YZ$ (Bod 1 leží na přímce BC , leží tudíž i v rovině EBC . Bod Y patří hraně EB . Vidíme, že oba body leží v rovině EBC , proto i úsečka $1Y$ leží v této rovině)
- 6) Řezem je šestiúhelník $XYZUVW$.



Obr. 7. 2. 3. 1: Řez pravidelného osmistěnu rovinou ρ v kótovaném promítání.

7.2.3.2 Řešení: Řez pravidelného osmistěnu v Mongeově promítání

V Mongeově promítání snadno najdeme průsečíky půdorysné stopy p_1^ρ roviny řezu ρ s osmistěnem $ABCDEF$, protože je zřejmé, že – stejně jako půdorysná stopa – leží v půdorysně π i čtverec $ABCD$, na jehož obvodu se nachází hledané průsečíky stopy a tělesa. Jelikož je rovina ρ kolmá k průmětně π , vidíme ihned půdorysy vrcholů

mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa v průsečících hran osmistěnu s půdorysnou stopou p_1^ρ .

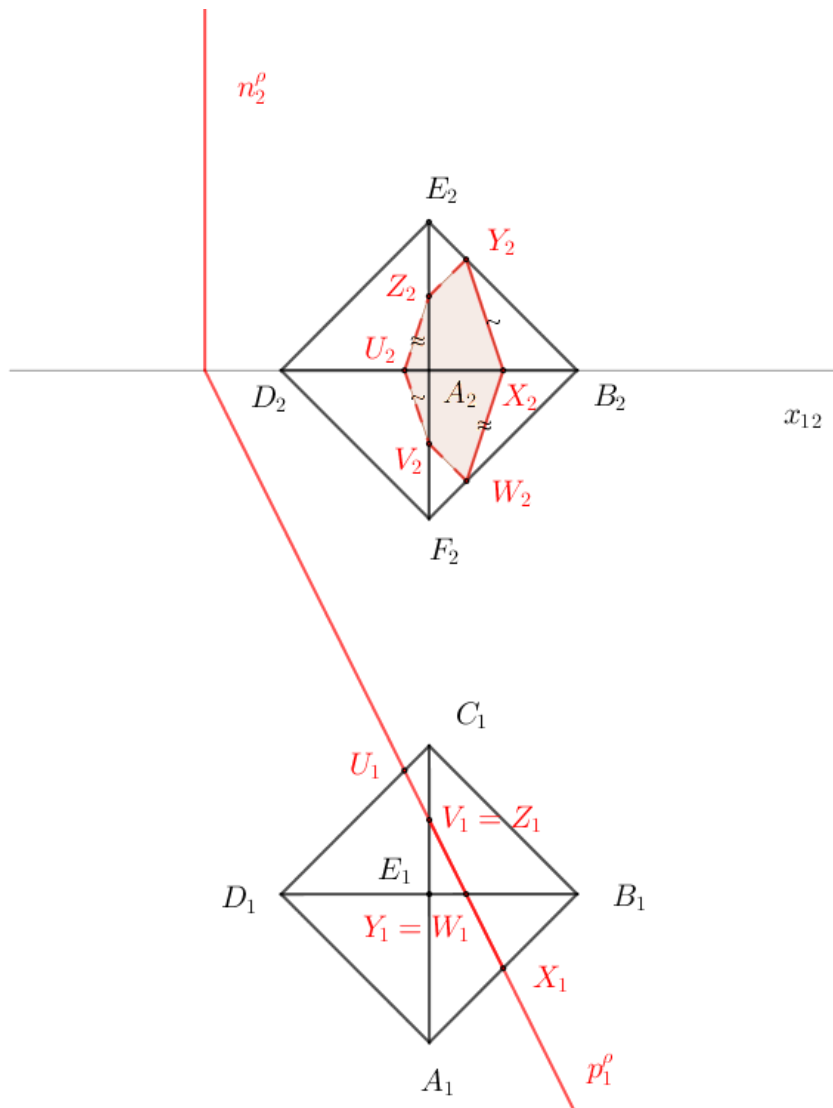
1) Průsečík stopy p_1^ρ a osmistěnu $ABDCEF$:

bodů X, U ; čtverec $A_1B_1C_1D_1 \cap p_1^\rho = \{X_1, U_1\}$

2) Řez v ostatních stěnách osmistěnu:

Jelikož $\rho \perp \pi$, leží půdorysy průsečíků hran EC, EB, FC a FB osmistěnu s rovinou řezu ρ na půdorysné stopě p_1^ρ . Protože splývají půdorysy hran EC, FC a EB, FB , budou splývat i půdorysy průsečíků V, Z a Y, W těchto hran s rovinou řezu ρ (tedy $V_1 = Z_1$ a $Y_1 = W_1$).

3) Řezem je šestiúhelník $XYZUVW$ (v půdorysu se však zobrazí jako úsečka U_1X_1)



Obr. 7. 2. 3. 2: Řez pravidelného osmistěnu rovinou ρ v Mongeově promítání.

7.2.3.3 Řešení: Řez pravidelného osmistěnu v axonometrii

V axonometrii nejprve najdeme průsečíky půdorysné stopy p^o roviny řezu ρ s osmistěnem $ABCDEF$ (průsečíky jsou průnikem čtverce $ABCD$ a stopy p^o). Poté zkonstruujeme průsečík libovolné hrany neležící v půdorysně s rovinou ρ (konstrukce pomocí krycí přímky) a následně hledáme průsečnice roviny řezu ρ s jednotlivými stěnami osmistěnu, přičemž využijeme rovnoběžnosti protilehlých stěn osmistěnu. Průsečíky průsečnice a hran zvolené stěny osmistěnu jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

1) Průsečík stopy p^o a osmistěnu $ABDCEF$:

body X, U ; čtverec $ABCD \cap p^o = \{X, U\}$

2) Řez ve stěně DCE : konstruujeme průsečík Z hrany EC tělesa s rovinou ρ (pomocí krycí přímky m):

a. krycí přímka m ; $m \subset \rho$; $m^a = E^a C^a$ (jelikož $\rho \perp \pi$, pak $m_1^a = p^o$)

b. bod Z ; ($Z_1^a \in m_1^a \cap E_1^a C_1^a$; $Z^a \in E^a C^a$)

c. úsečka UZ (poněvadž body U a Z leží v rovině řezu ρ , pak – dle axiomu 1 – v ní leží i úsečka UZ)

3) Řez ve stěně ABF :

úsečka XV ; jelikož rovina DCE je rovnoběžná s rovinou ABF ,

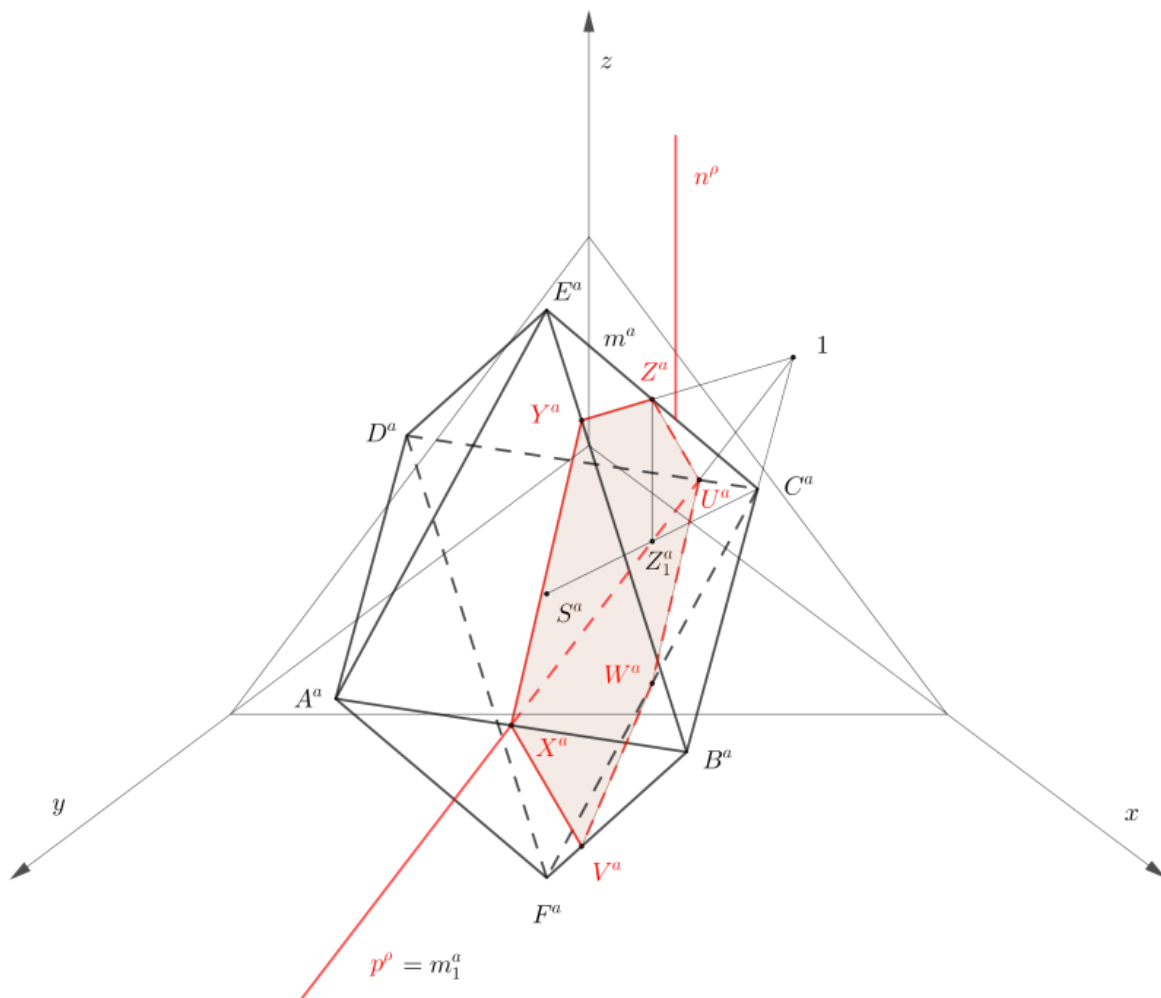
pak – dle axiomu 2 – je úsečka XV rovnoběžná s úsečkou ZU

4) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně ABE je řezem úsečka XY ; jelikož rovina ABE je rovnoběžná s rovinou

DCF , pak – dle axiomu 2 – je úsečka XY rovnoběžná s úsečkou UW

5) Řezem je šestiúhelník $XYZUWV$.



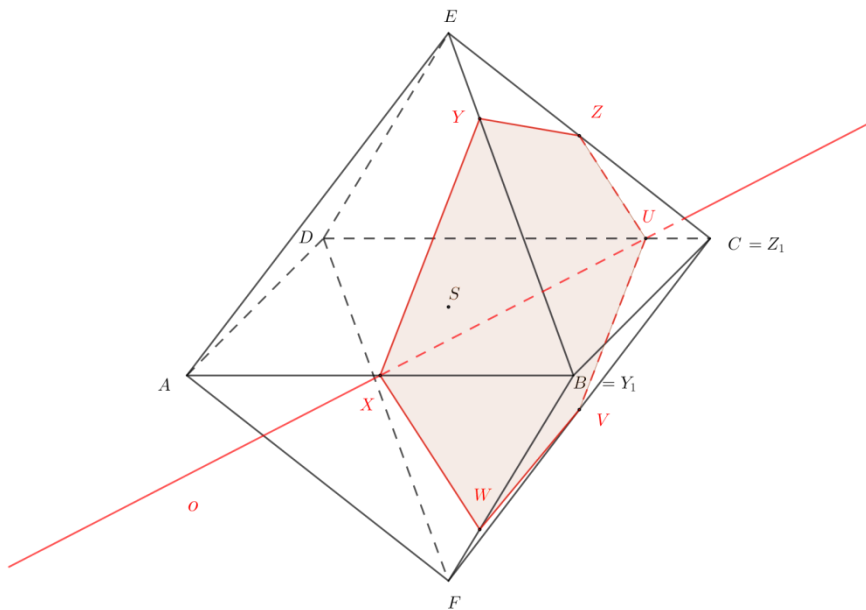
Obr. 7. 2. 3. 3: Řez pravidelného osmistěnu rovinou ρ v axonometrii.

7.2.3.4 Řešení: Řez pravidelného osmistěnu ve volném rovnoběžném promítání

Ve volném rovnoběžném promítání nejprve najdeme osu středové kolineace o mezi rovinami XYZ a ABC (vycházíme z předpokladu, že přímky odpovídající si v kolineaci se protínají na ose kolineace). Poté konstruujeme strany řezného mnohoúhelníku v jednotlivých stěnách osmistěnu, přičemž využíváme rovnoběžnosti protilehlých stěn osmistěnu.

- 1) Osa kolineace o , ve středové kolineaci $S = (E; o)$ mezi rovinami ABC a XYZ , kde bod E je středem kolineace a přímka o osou kolineace:

- a. body Y_1, Z_1 ; po řadě průměty bodů Y, Z v kolineaci S (bod X je samodružný, tedy $X = X_1$).
 - b. bod 1 ; $1 \in \leftrightarrow Y_1 Z_1 \cap \leftrightarrow YZ$ (v obr. 7. 2. 3. 4 je číslem 1 označen průsečík přímky YZ a jejího afinního obrazu $\leftrightarrow Y_1 Z_1$)
 - c. osa o ; $o = \leftrightarrow 1X$.
- 2) Průsečík osy kolineace o a osmistěnu $ABCDEF$:
body X, U ; čtverec $ABCD \cap o = \{X, U\}$
 - 3) Řez ve stěně DCE :
úsečka UZ ; body U a Z leží v rovině řezu ρ , tudíž – dle axiomu 1 – v ní leží i úsečka UZ
 - 4) Analogicky postupujeme i ve stěnách BCE a ABE :
ve stěně BCE je řezem úsečka ZY ;
ve stěně ABE je řezem úsečka YX
 - 5) Řez ve stěně ABF :
úsečka XW ; jelikož rovina ABF je rovnoběžná s rovinou DCE , pak – dle axiomu 2 – je úsečka XW rovnoběžná s úsečkou ZU
 - 6) Analogicky postupujeme i ve stěně DCF :
úsečka UV ; jelikož rovina DCF je rovnoběžná s rovinou ABE , pak – dle axiomu 2 – je úsečka UV rovnoběžná s úsečkou YX
 - 7) Řezem je šestiúhelník $XYZUVW$.



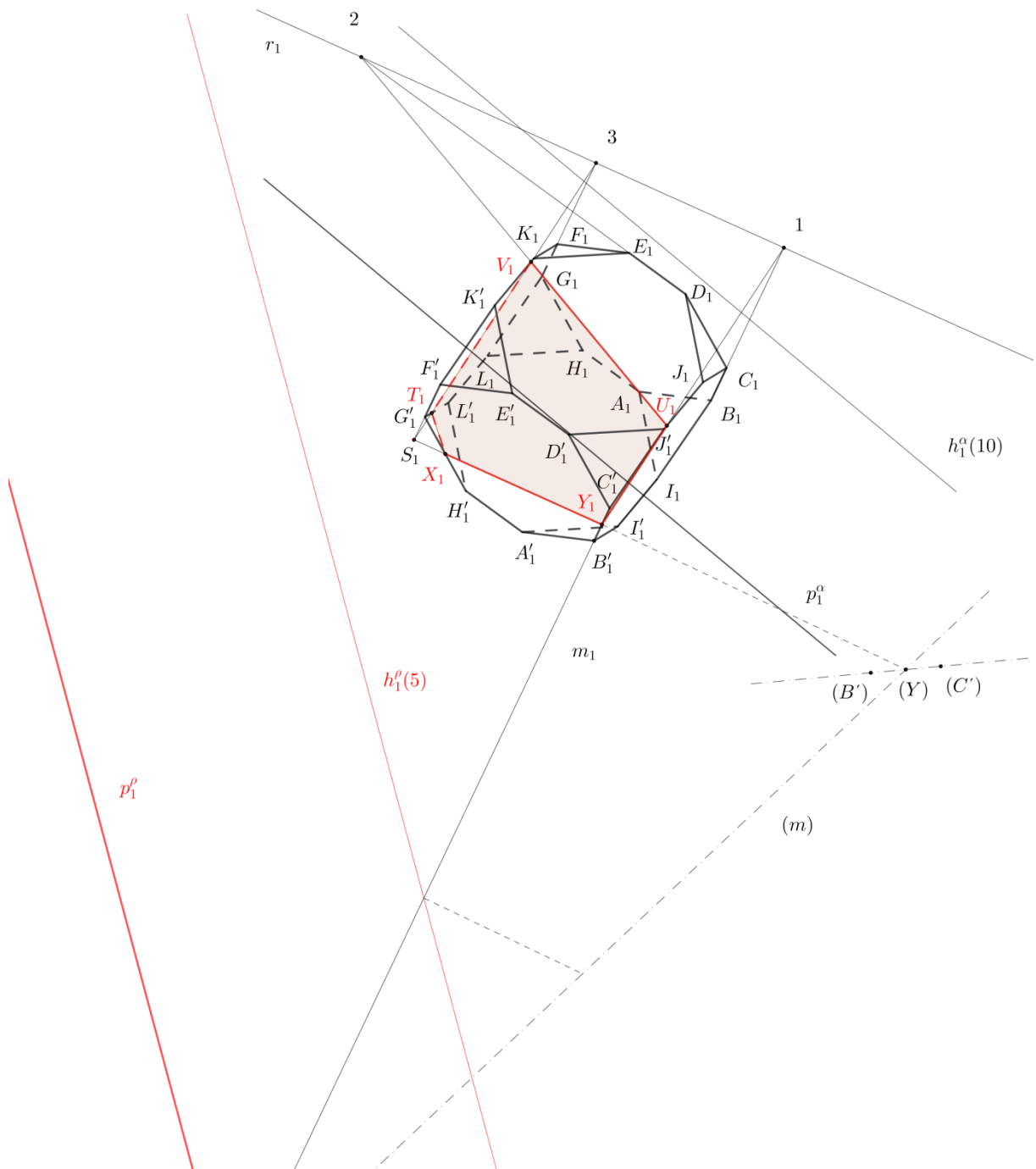
Obr. 7. 2. 3. 4: Řez pravidelného osmistěnu rovinou XYZ ve volném rovnoběžném promítání.

7.2.4 Řešení: Řez komolé krychle

7.2.4.1 Řešení: Řez komolé krychle v kótovaném promítání

V kótovaném promítání najdeme průsečnici r roviny podstavy α komolé krychle a roviny řezu ρ a poté sestrojíme průsečík zvolené hrany tělesa a roviny řezu ρ . Dále postupujeme pomocí osové afinity mezi rovinami ρ a α ve směru AA' , s průsečnicí r jako osou afinity (vycházíme z předpokladu, že přímky odpovídající si v osové afinitě se protínají na ose afinity). Poté konstruujeme průsečnice roviny řezu ρ s jednotlivými stěnami komolé krychle. Průsečíky průsečnice a hran zvolené stěny komolé krychle jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

- 1) Průsečnice r rovin ρ a α :
průsečnice $r, \rho \cap \alpha = r$
- 2) Průsečík Y hrany $B'C'$ tělesa s rovinou ρ (pomocí krycí přímky m):
 - a. krycí přímka $m; m \subset \rho; m_1 = B_1'C_1'$
 - b. zjištění kót bodů B', C'
 - c. přímky $(m), (B'C')$; (m) je sklopená přímka $m, (B'C')$ je sklopená přímka $B'C'$
 - d. bod Y ; bod (Y) najdeme ve sklopení tak, že $(Y) \in (m) \cap \leftrightarrow (B'C')$. Poté jej ze sklopení převedeme zpět na hranu $B'C'$, tedy $Y_1 \in B_1'C_1'$
- 3) Řez ve stěně $IBCJJ'C'B'I'$ (v osové afinitě $O = (r; AA')$ mezi rovinami α a ρ , kde r je osa afinity a AA' udává směr):
 - a. bod $1; 1 \in \leftrightarrow BC \cap r$ (v obr. 7. 2. 4. 1 je bod 1 samodružným bodem, náleží tedy rovině řezu ρ a zároveň rovině, v níž leží stěna $IBCJJ'C'B'I'$. Leží-li tedy body Y a 1 v rovině řezu ρ , pak – dle axiomu 1 – v ní leží i přímka $1Y$)
 - b. úsečka $UY; \leftrightarrow 1Y \cap \text{stěna } IBCJJ'C'B'I' = UY$
- 4) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách komolé krychle:
ve stěně $JDEKK'E'D'J'$ je řezem úsečka UV ;
ve stěně $KFGLL'G'F'K'$ zase úsečka VT ;
ve stěně $G'H'L'$ získáme úsečku TX ;
v horní podstavě $A'B'C'D'E'F'G'H'$ úsečku XY
- 5) Řezem je pětiúhelník $UVTXY$.



Obr. 7. 2. 4. 1: Řez komolé krychle rovinou p v kótovaném promítání.

7.2.4.2 Řešení: Řez komolé krychle v Mongeově promítání

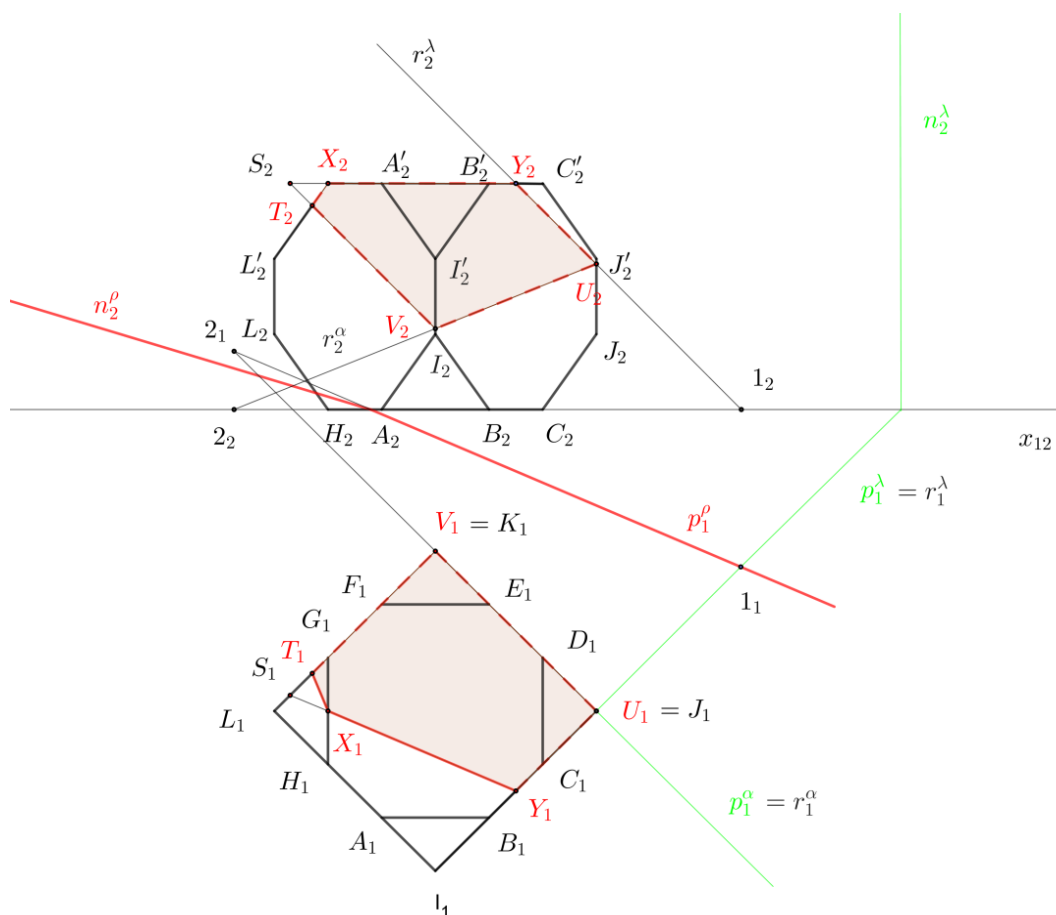
V Mongeově promítání najdeme průsečík zvolené hrany komolé krychle a roviny řezu ρ . Poté hledáme průsečnice r^x roviny řezu ρ s jednotlivými stěnami komolé krychle a to tak, že určíme půdorysnou stopu roviny X (ve které leží stěna incidentní s již dříve nalezeným bodem řezu) a najdeme průsečík této stopy p_1^X s půdorysnou stopou roviny řezu p_1^ρ . Průsečík těchto dvou stop a již nalezený bod řezu tělesa určují přímku, jejímž průnikem se stěnou komolé krychle získáme první stranu mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa. Dále postupujeme analogicky v hledání řezu v sousední stěně (vystačíme si tak jen s půdorysnou stopou stěny).

- 1) Průsečík Y hrany $B'C'$ tělesa s rovinou ρ (pomocí proložení přímky $B'C'$ rovinou λ):
 - a. rovina λ ; $\lambda \perp \pi$ (půdorysně promítací rovina přímky $B'C'$)
 - b. průsečnice r^λ ; $\lambda \cap \rho = r^\lambda$
 - c. bod Y ; $Y \in B'C' \cap r^\lambda$
- 2) Řez ve stěně $IBCJJ'C'B'I'$ (stěna $IBCJJ'C'B'I'$ leží v λ):
 - a. průsečnice r^λ ; $\lambda \cap \rho = r^\lambda$ (bod $1 = [1_1; 1_2]$ je půdorysným stopníkem průsečnice r^λ rovin λ a ρ)
 - b. úsečka UY ; $r^\lambda \cap$ stěna $IBCJJ'C'B'I' = UY$ (body Y, U určíme z nárysu)
- 3) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně $JDEKK'E'D'J'$ je řezem úsečka UV ;
(v obr. 7. 2. 4. 2 je řez ve stěně $JDEKK'E'D'J'$ konstruován pomocí roviny α ; úsečka UV je průnikem této stěny a průsečnice r^α rovin α a ρ , bodem $2 = [2_1, 2_2]$ je označen půdorysný stopník průsečnice r^α)

ve stěně $LGFKK'F'G'L'$ je řezem úsečka VT
- 4) Bod S ; $S \in \leftrightarrow VT \cap \leftrightarrow A'B'C'$
- 5) Řez v horní podstavě $A'B'C'D'E'F'G'H'$:

úsečka XY ; $\leftrightarrow SY \cap$ stěna $A'B'C'D'E'F'G'H' = XY$
- 6) Řezem je pětiúhelník $UVTXY$.



Obr. 7. 2. 4. 2: Řez komolé krychle rovinou ρ v Mongeově promítání.

7.2.4.3 Řešení: Řez komolé krychle v axonometrii

V axonometrii najdeme průsečík zvolené hrany komolé krychle a roviny řezu ρ . Poté hledáme průsečnice roviny řezu ρ s jednotlivými stěnami komolé krychle a to tak, že určíme půdorysnou stopu roviny (ve které leží stěna incidentní s již dříve nalezeným bodem řezu) a najdeme průsečík půdorysné stopy ρ^x této roviny s půdorysnou stopou roviny řezu ρ^o . Průsečík těchto dvou stop a již nalezený bod řezu tělesa určují přímku, jejímž průnikem se stěnou komolé krychle získáme první stranu mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa. Dále postupujeme analogicky v hledání řezu v sousední stěně (vystačíme si tak jen s půdorysnou stopou stěny).

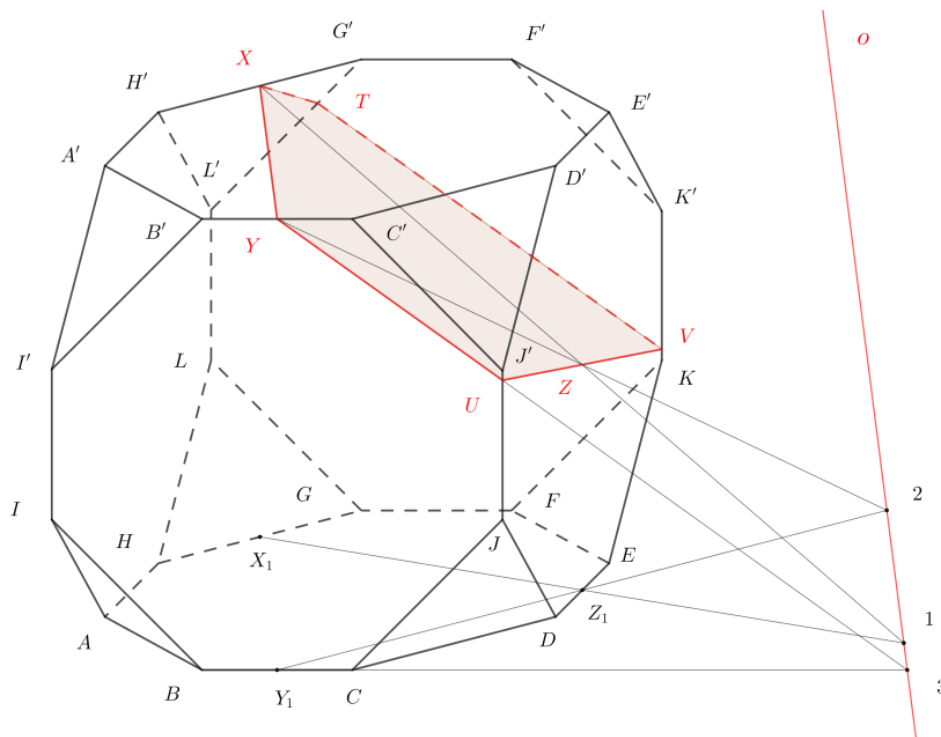
- 1) Průsečík Y hrany $B'C'$ tělesa s rovinou ρ (pomocí proložení přímky $B'C'$ rovinou λ):

- a. rovina λ ; $\lambda \perp \pi$; $B'C' \subset \lambda$

7.2.4.4 Řešení: Řez komolé krychle ve volném rovnoběžném promítání

Ve volném rovnoběžném promítání nejprve najdeme osu o osově afinity mezi rovinami XYZ a rovinou spodní podstavy komolé krychle, kde směr afinity je určen přímkou AA' (vycházíme z předpokladu, že přímky odpovídající si v osově afinitě se protínají na ose afinity). Poté konstruujeme průsečnice roviny řezu ρ s jednotlivými stěnami komolé krychle. Průsečíky průsečnice a hran zvolené stěny komolé krychle jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

- 1) Osa afinity o , v osově afinitě $O = (o; AA')$ mezi rovinami ABC a XYZ , kde přímka o je osa afinity a přímka AA' určuje směr afinity:
 - a. body X_1, Y_1, Z_1 ; po řadě pravoúhlé průměty bodů X, Y, Z v osově afinitě
 - b. body $1, 2$; $1 \in \leftrightarrow X_1Z_1 \cap \leftrightarrow XZ$; $2 \in \leftrightarrow Y_1Z_1 \cap \leftrightarrow YZ$ (v obr. 7. 2. 4. 4. jsou čísla $1, 2$ označeny samodružné body přímek XZ a YZ)
 - c. osa o ; $o = \leftrightarrow 12$
- 2) Řez ve stěně $IBCJJ'C'B'I'$:
 - a. bod 3 ; $3 \in \leftrightarrow BC \cap o$ (v obr. 7. 2. 4. 4 je bod 3 samodružným bodem, náleží tedy rovině řezu ρ a zároveň rovině, v níž leží stěna $IBCJJ'C'B'I'$. Leží-li tedy body Y a 3 v rovině řezu ρ , pak – dle axiomu 1 – v ní leží i přímka $3Y$)
 - b. úsečka UY ; $\leftrightarrow 3Y \cap$ stěna $IBCJJ'C'B'I' = UY$
- 3) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:
ve stěně $JDEKK'E'D'J'$ je řezem úsečka UV ;
ve stěně $LGFKK'F'G'L'$ zase úsečka VT
- 4) Řez v horní podstavě $A'B'C'D'E'F'G'H'$:
úsečka XY ; stěna $A'B'C'D'E'F'G'H'$ je rovnoběžná se stěnou $ABCDEFGH$, dle axiomu 2 je tedy úsečka XY rovnoběžná s osou afinity o
- 5) Řezem ve stěně $G'H'L'$ je úsečka XT
- 6) Řezem je šestiúhelník $XYUVT$.



Obr. 7. 2. 4. 4: Řez kolemá krychle rovinou XYZ ve volném rovnoběžném promítání.

7.2.5 Řešení: Řez antihranolu

7.2.5.1 Řešení: Řez antihranolu v kótovaném promítání

V kótovaném promítání můžeme hledat průsečík libovolné hrany antihranolu s rovinou řezu ρ a poté řešit průnik roviny řezu ρ s rovinami, ve kterých leží stěny antihranolu. Nebo podle obr. 7. 2. 5. 1 začít přímo konstruovat průsečnice r^x rovin X , ve kterých leží stěna antihranolu, a roviny řezu ρ (postup je možné urychlit tím, že ke konstrukci průniku s rovinou ρ vybereme pouze každou druhou stěnu tělesa a ve zbývajících doplníme stranu řezného mnohoúhelníku podle axiomu 1). Průsečíky průsečnice r^x a hran zvolené stěny antihranolu jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

1) Řez ve stěně ABA' :

a. rovina α ; $\alpha = \leftrightarrow ABA'$, určíme její stopu $p_1^\alpha(0)$ a hlavní přímku $h_1^\alpha(6)$

b. průsečnice r^α ; $\alpha \cap \rho = r^\alpha$; $r^\alpha = \leftrightarrow P^\alpha H^\alpha$,

kde $P^\alpha = p_1^\alpha(0) \cap p_1^\rho(0)$, $H^\alpha = h_1^\alpha(6) \cap h_1^\rho(6)$

c. úsečka UX ; $r^\alpha \cap \triangle ABA' = UX$

2) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně FAF' : $\triangle FAF' \cap \rho = ZR$;

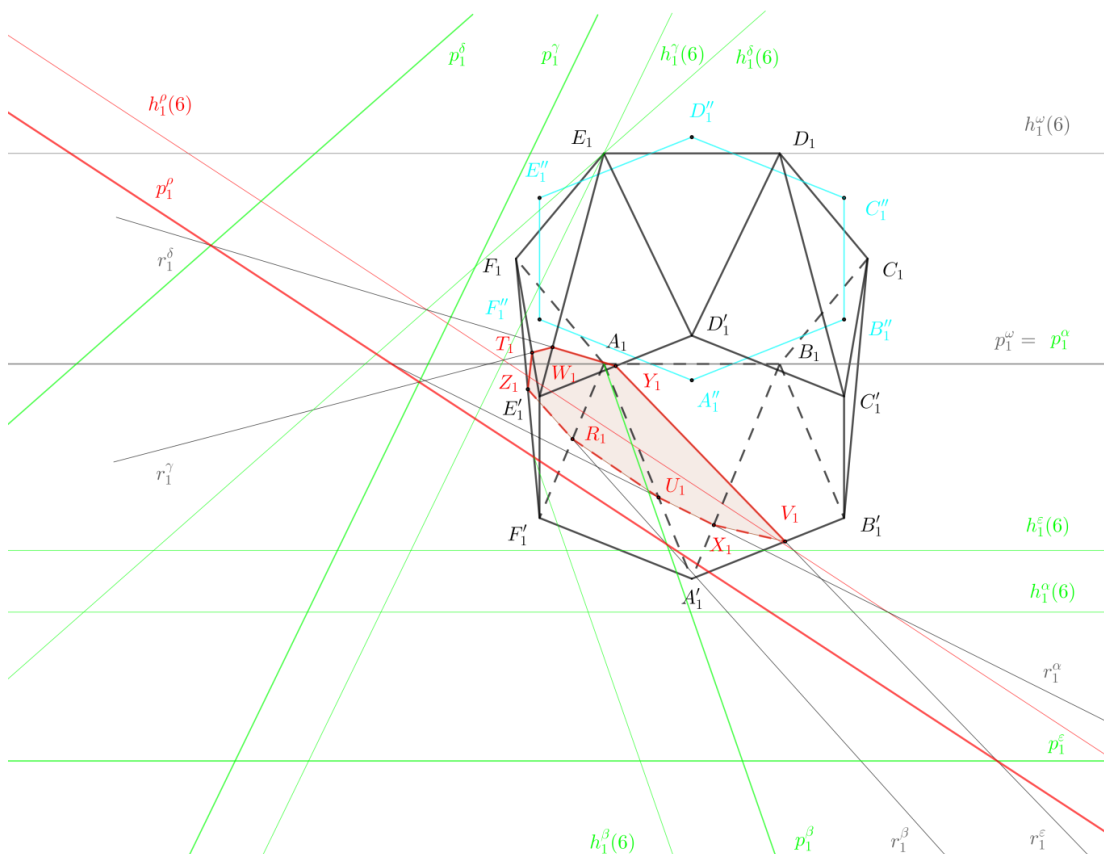
ve stěně FEE' : $\triangle FEE' \cap \rho = TW$;

ve stěně $EE'D'$: $\triangle EE'D' \cap \rho = WY$;

v horní podstavě $A'B'C'D'E'F'$ je řezem úsečka YV

(V obr. 7. 2. 5. 1 je řez ve stěně FAF' konstruován pomocí roviny β ; úsečka ZR je průnikem této stěny a průsečnice r^β rovin β a ρ . Ve stěně FEE' je řez vytvořen pomocí roviny γ ; úsečka TW je průnikem této stěny a průsečnice r^γ rovin γ a ρ . Ke konstrukci řezu ve stěně $EE'D'$ byla použita rovina δ ; úsečka WY je průnikem této stěny a průsečnice r^δ rovin δ a ρ . Řez v horní podstavě $A'B'C'D'E'F'$ je v obrázku vytvořen pomocí roviny ε ; úsečka YV je průnikem této stěny a průsečnice r^ε rovin ε a ρ .)

3) Řezem je osmiúhelník $YVXURZTW$.



Obr. 7. 2. 5. 1: Řez antihranolu rovinou ρ v kótovaném promítání.

7.2.5.2 Řešení: Řez antihranolu v Mongeově promítání

Mongeově promítání nejprve najdeme průsečík libovolné hrany antihranolu s rovinou řezu ρ (hranu proložíme vhodnou rovinou λ , nejlépe promítací) a poté konstruujeme průsečnice q^x roviny řezu ρ s jednotlivými stěnami antihranolu. Určíme stopy roviny X , ve které leží zvolená stěna antihranolu, a najdeme její průsečnici s rovinou ρ . Průsečíky průsečnice q^x a hran zvolené stěny antihranolu jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

1) Průsečík U hrany AA' tělesa s rovinou ρ (pomocí proložení přímky AA' rovinou λ):

a. rovina λ ; $\lambda \perp v$ (λ je nárysně promítací rovina přímky AA')

b. průsečnice r ; $\lambda \cap \rho = r$

c. bod U ; $U \in AA' \cap r$ (bod U určíme v půdorysu)

2) Řez ve stěně ABA' :

a. rovina α ; $\alpha = \leftrightarrow ABA'$

b. průsečnice q^α ; $\alpha \cap \rho = q^\alpha$ (v obr. 7. 2. 5. 2 je bodem 1 označen první průmět půdorysného stopníku průsečnice q^α).

c. úsečka UX ; $q^\alpha \cap \triangle ABA' = UX$

3) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně $F'A'A$: $\triangle F'A'A \cap \rho = RU$;

ve stěně AFF' : $\triangle AFF' \cap \rho = ZR$;

ve stěně $FE'F'$: $\triangle FE'F' \cap \rho = TZ$;

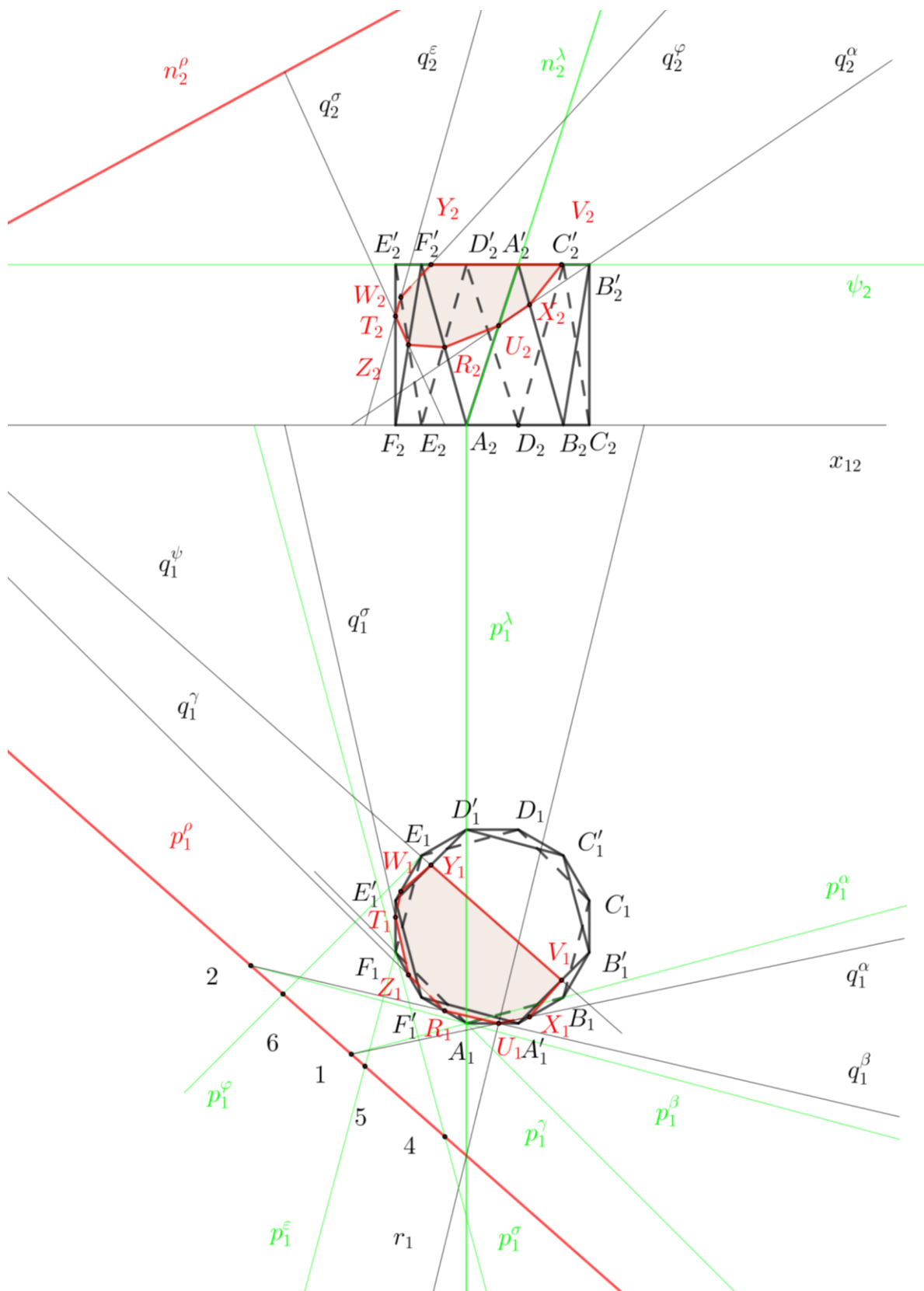
ve stěně $E'EF$: $\triangle E'EF \cap \rho = WT$;

ve stěně $EE'D'$: $\triangle EE'D' \cap \rho = YW$;

v horní podstavě $A'B'C'D'E'F'$ je řezem úsečka YV

(V obr. 7. 2. 5. 2 je řez ve stěně $F'A'A$ konstruován pomocí roviny β ; úsečka RU je průnikem této stěny a průsečnice q^β rovin β a ρ . Ke konstrukci řezu ve stěně AFF' byla užitá rovina γ ; úsečka ZR je průnikem této stěny a průsečnice q^γ rovin γ a ρ . Řez ve stěně $FE'F'$ je v obrázku vytvořen pomocí roviny δ ; úsečka TZ je průnikem této stěny a průsečnice q^δ rovin δ a ρ . Rovina ε je incidentní s rovinou stěny $E'EF$, rovina φ s rovinou stěny $EE'D'$ a konečně rovina ψ byla použita ke konstrukci řezu v horní podstavě $A'B'C'D'E'F'$ daného antihranolu).

4) Řezem je osmiúhelník $YVXURZTW$.



Obr. 7. 2. 5. 2: Řez antihranolu rovinou ρ v Mongeově promítání.

7.2.5.3 Řešení: Řez antihranolu v axonometrii

V axonometrii vyhledáme průsečík libovolné hrany antihranolu s rovinou řezu ρ (konstrukce pomocí krycí přímky) a poté konstruujeme průsečnice r^x roviny řezu ρ s rovinami X , v nichž leží jednotlivé stěny antihranolu. Průsečíky průsečnice r^x a hran zvolené stěny antihranolu jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

1) Průsečík U hrany AA' tělesa s rovinou ρ (pomocí krycí přímky m):

a. krycí přímka m ; $m \subset \rho$;

$m_1^a = A_1^a A'^a$, (na m_1^a leží půdorysy stopníků $P_1^1 M_1^1$ krycí přímky m)

$m^a = \leftrightarrow P^1 M^1$, axonometrický průmět krycí přímky m

b. bod U ; $U^a \in m^a \cap A^a A'^a$

2) Řez ve stěně ABA' :

a. rovina α ; $\alpha = \leftrightarrow ABA'$

b. průsečnice r_α ; $\alpha \cap \rho = r_\alpha$ (v obr. 7. 2. 5. 3 je $r_\alpha = \leftrightarrow P^2 M^2$).

c. úsečka UX ; $r_\alpha \cap \triangle ABA' = UX$

3) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně $BA'B'$: $\triangle BA'B' \cap \rho = XV$;

v horní podstavě $A'B'C'D'E'F'$: $\square A'B'C'D'E'F' \cap \rho = VY$;

ve stěně $EE'D'$: $\triangle EE'D' \cap \rho = YW$;

ve stěně $E'EF$: $\triangle E'EF \cap \rho = WT$;

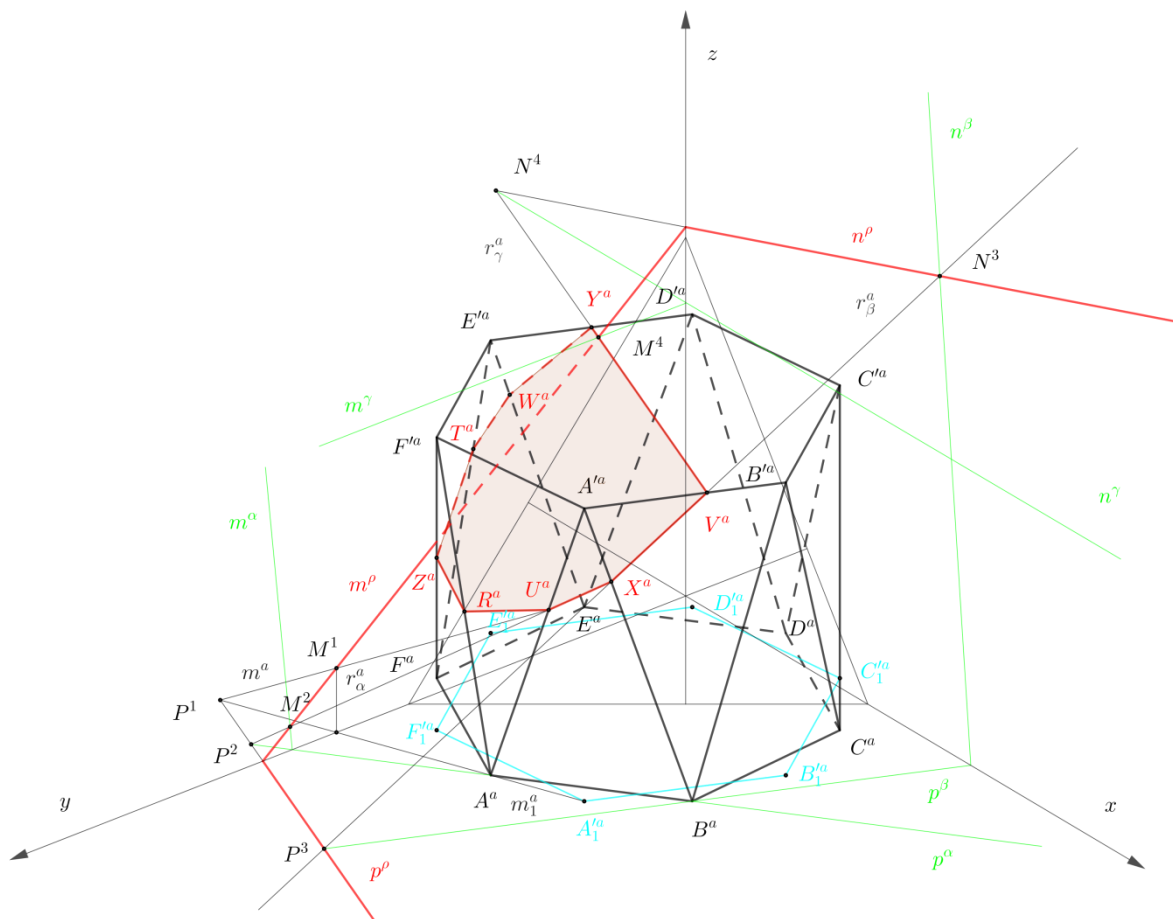
ve stěně $FE'F'$: $\triangle FE'F' \cap \rho = TZ$;

ve stěně AFF' : $\triangle AFF' \cap \rho = ZR$;

(V obr. 7. 2. 5. 3 je řez ve stěně $BA'B'$ konstruován pomocí roviny β ; úsečka XV je průnikem této stěny a průsečnice r_β rovin β a ρ . Řez v horní podstavě $A'B'C'D'E'F'$ je v obrázku vytvořen pomocí roviny γ ; úsečka VY je průnikem této stěny a průsečnice r_γ rovin γ a ρ).

Pozn.: Jelikož podstavy antihranolu jsou rovnoběžné, musí být dle axiomu 2 i strana řezu VY rovnoběžná se stopou ρ^o

4) Řezem je osmiúhelník $YVXURZTW$.



Obr. 7. 2. 5. 3: Řez antihranolu rovinou ρ v axonometrii.

7.2.5.4 Řešení: Řez antihranolu ve volném rovnoběžném promítání

Ve volném rovnoběžném promítání nejprve najdeme osu o osově afinity mezi rovinami XYZ a rovinou spodní podstavy antihranolu, kde směr afinity určuje přímka SS' (vycházíme z předpokladu, že přímky odpovídající si v osově afinitě se protínají na ose afinity). Poté konstruujeme průsečnice roviny řezu ρ s jednotlivými stěnami antihranolu. Průsečíky průsečnice a hran zvolené stěny antihranolu jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

- 1) Osa afinity o , v osově afinitě $O = (o; SS')$ mezi rovinami ABC a XYZ , kde přímka o je osou afinity a přímka SS' určuje směr afinity:
 - a. body X_1, Y_1, Z_1 ; po řadě pravouhlé průměty bodů X, Y, Z v osově afinitě O .
 - b. body $1, 2$; $1 \in \leftrightarrow Y_1Z_1 \cap \leftrightarrow YZ$; $2 \in \leftrightarrow X_1Z_1 \cap \leftrightarrow XZ$

(v obr. 7. 2. 5. 4 jsou čísla 1, 2 označeny samodružné body přímek YZ a XZ).

c. osa o ; $o = \leftrightarrow 12$

2) Řez ve stěně ABA' :

a. bod 3; $3 \in \leftrightarrow AB \cap o$ (v obr. 7. 2. 5. 4 je bod 3 samodružným bodem, náleží tedy rovině řezu ρ a zároveň rovině, v níž leží stěna ABA' . Leží-li tedy body X a 3 v rovině řezu ρ , pak – dle axiomu 1 – v ní leží i přímka $3X$).

b. úsečka UX ; $\leftrightarrow 3X \cap \triangle ABA' = UX$.

3) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně $BA'B'$: $\triangle BA'B' \cap \rho = XV$ (přímka $4B$ je rovnoběžná s hranou $A'B'$)

v horní podstavě $A'B'C'D'E'F'$: $\hexagon A'B'C'D'E'F' \cap \rho = VY$

(jelikož podstavy antihranolu jsou rovnoběžné, tudíž – dle axiomu 2 – leží-li v rovině spodní podstavy osa afinity o , úsečka VY , která leží v horní podstavě, musí být s osou afinity o rovnoběžná);

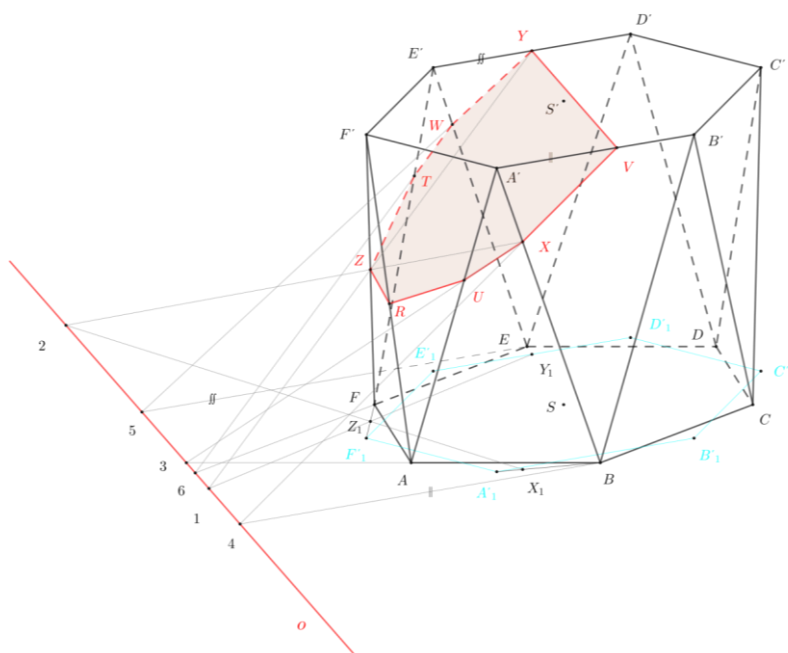
ve stěně $EE'D'$: $\triangle EE'D' \cap \rho = YW$;

ve stěně $E'EF$: $\triangle E'EF \cap \rho = WT$;

ve stěně $FE'F'$: $\triangle FE'F' \cap \rho = TZ$;

ve stěně AFF' : $\triangle AFF' \cap \rho = ZR$;

4) Řezem je osmiúhelník $YVXURZTW$.



Obr. 7. 2. 5. 4: Řez antihranolu rovinou XYZ ve volném rovnoběžném promítání.

7.2.6 Řešení: Řez sjednocení těles

7.2.6.1 Řešení: Řez sjednocení těles v kótovaném promítání

V kótovaném promítání začneme přímo konstruovat průsečnice r^x rovin X , ve kterých leží stěna tělesa, a roviny řezu ρ (postup je zde urychlen tím, že ke konstrukci průsečnice roviny ρ byla vybrána pouze každá druhá stěna tělesa a zbývající strany řezného mnohoúhelníku byly doplněny podle axiomu 1). Průsečíky průsečnice r^x a hran zvolené stěny tělesa jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

1) Řez ve stěně $C'B'V$:

a. rovina α ; $\alpha = \leftrightarrow C'B'V$,

b. průsečnice r^α ; $\alpha \cap \rho = r^\alpha$; $r^\alpha = \leftrightarrow P^\alpha H^\alpha$,

kde $P^\alpha = p_1^\alpha(0) \cap p_1^\rho(0)$, $H^\alpha = h_1^\alpha(4) \cap h_1^\rho(4)$

c. úsečka OY ; $r^\alpha \cap \triangle C'B'V = OY$

2) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně $D'E'V$: $\triangle D'E'V \cap \rho = PQ$;

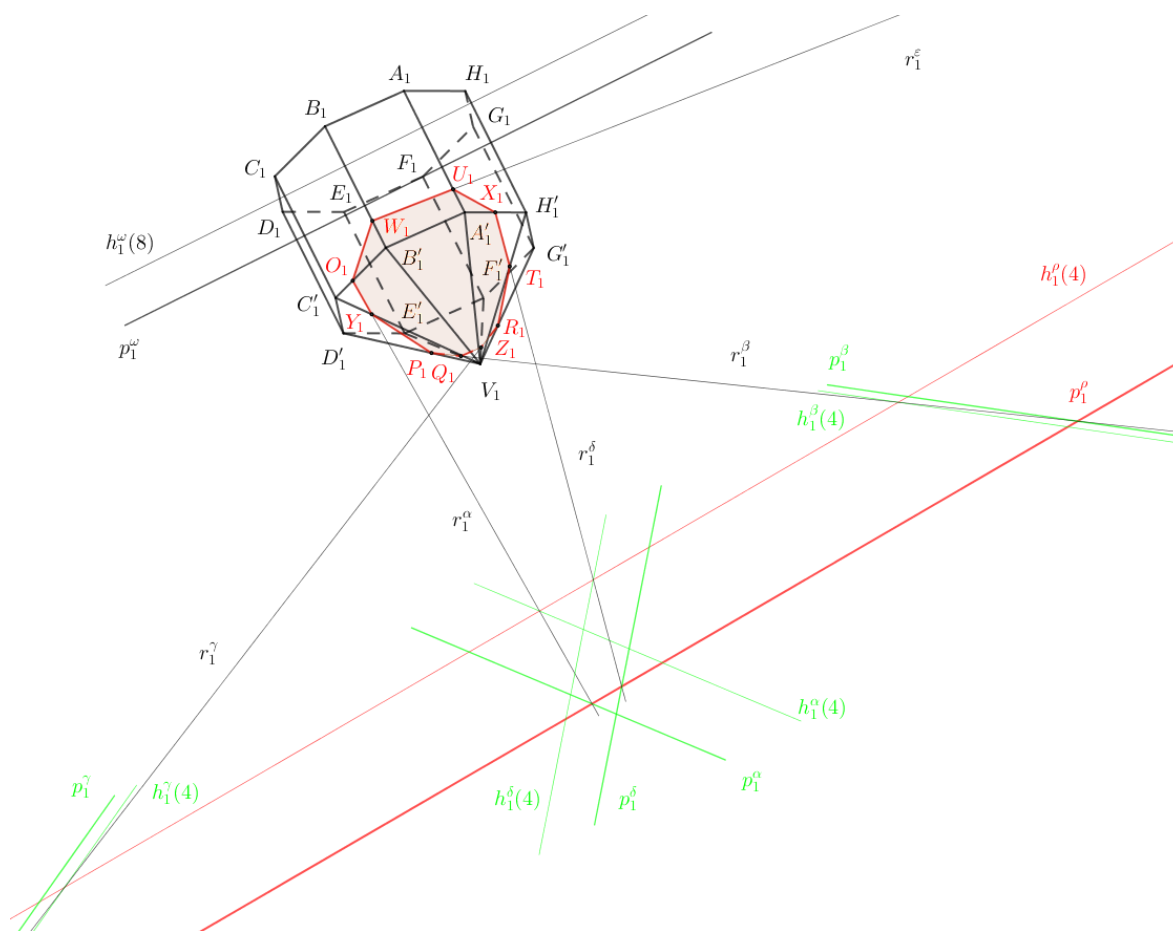
ve stěně $F'G'V$: $\triangle F'G'V \cap \rho = ZR$;

ve stěně $A'H'V$: $\triangle A'H'V \cap \rho = TX$;

v boční stěně $ABA'B'$ hranolu je řezem úsečka UW

(Rovina β v obr. 7. 2. 6. 1 je incidentní s rovinou stěny $D'E'V$, rovina γ zase s rovinou stěny $F'G'V$. Ke konstrukci řezu ve stěně $A'H'V$ byla použita rovina δ a konečně pro vyhotovení řezu ve stěně $ABA'B'$ zase rovina ϵ).

3) Řezem je desetiúhelník $XUWOYPQZRT$.



Obr. 7. 2. 6. 1: Řez sjednocení těles rovinou ρ v kótovaném promítání.

7.2.6.2 Řešení: Řez sjednocení těles v Mongeově promítání

V Mongeově promítání konstruujeme průsečnice r^x roviny řezu ρ s jednotlivými stěnami tělesa. Určíme stopy roviny X , ve které leží zvolená stěna tělesa, a najdeme její průsečnici s rovinou ρ (postup je zde urychlen tím, že ke konstrukci průsečnice roviny X s rovinou ρ byla vybrána pouze každá druhá stěna tělesa a zbývající strany řezného mnohoúhelníku byly doplněny podle axiomu 1). Průsečíky průsečnice r^x a hran zvolené stěny tělesa jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

1) Řez ve stěně $A'H'V = \alpha$:

- a. rovina α ; $\alpha = \leftrightarrow A'H'V$ (Pozn: přímka $A'H'$ je rovnoběžná s průmětnou π , je tedy hlavní přímkou první osnovy roviny α . Hledaná půdorysná stopa p_1^α roviny α tedy bude s $A_1'H_1'$ rovnoběžná).

b. průsečnice r^α ; $\alpha \cap \rho = r^\alpha$

c. úsečka XT; $r^\alpha \cap \triangle A'H'V = XT$

2) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně $G'F'V$: $\triangle F'G'V \cap \rho = ZR$;

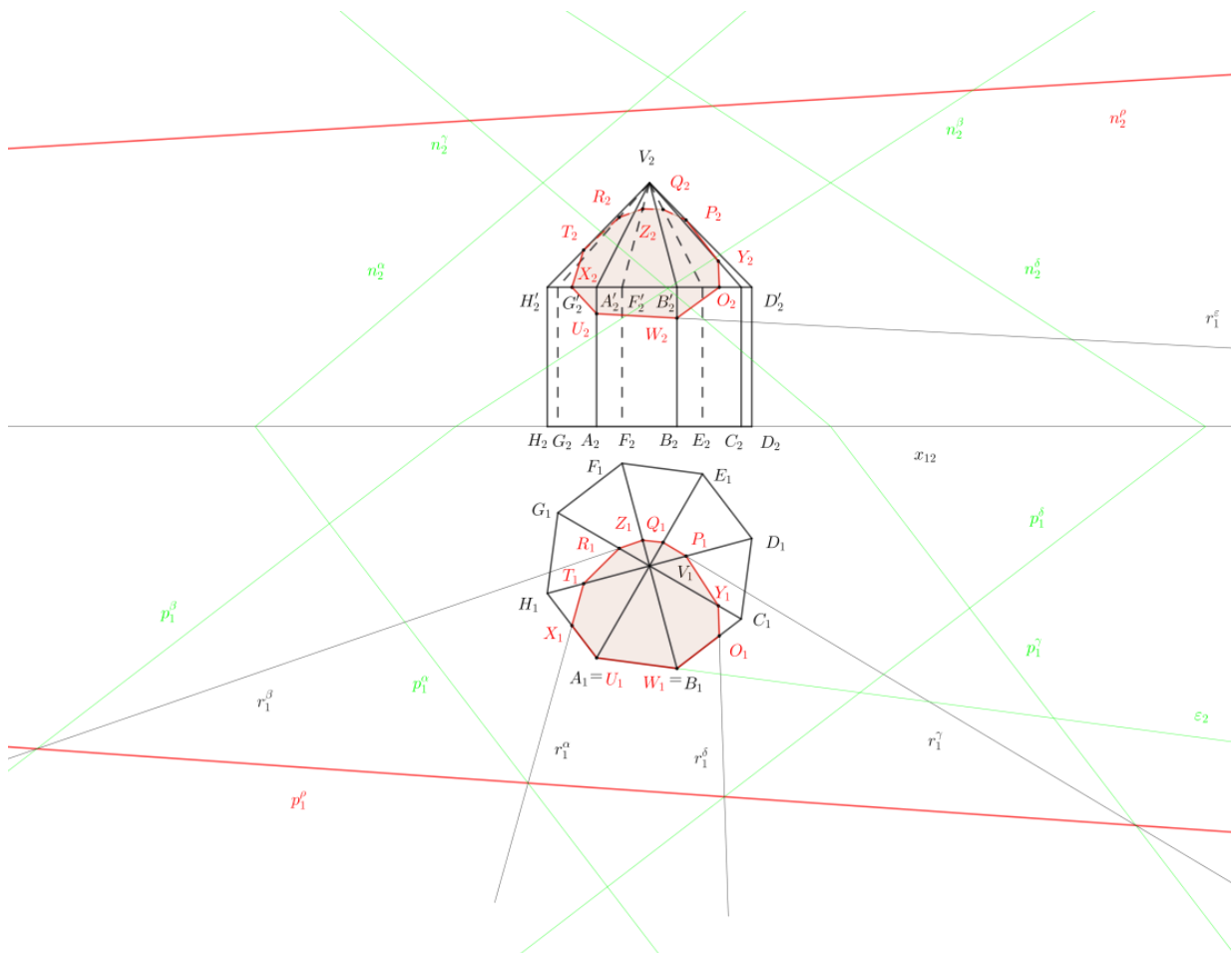
ve stěně $D'E'V$: $\triangle D'E'V \cap \rho = PQ$;

ve stěně $B'C'V$: $\triangle B'C'V \cap \rho = YO$;

v boční stěně $ABA'B'$ hranolu je řezem úsečka UW

(Rovina β v obr. 7. 2. 6. 2 je incidentní s rovinou stěny $F'G'V$, rovina γ zase s rovinou stěny $D'E'V$. Ke konstrukci řezu ve stěně $B'C'V$ byla využita rovina δ a konečně pro vyhotovení řezu ve stěně $ABA'B'$ zase rovina ε)

3) Řezem je desetiúhelník $XUWOYPQZRT$.



Obr. 7. 2. 6. 2: Řez sjednocení těles rovinou ρ v Mongeově promítání.

7.2.6.3 Řešení: Řez sjednocení těles v axonometrii

V axonometrii začneme konstruovat průsečnice r^x roviny řezu ρ s rovinami X , ve kterých leží jednotlivé stěny tělesa. Určíme potřebné stopy (alespoň dvě) roviny X , ve které leží zvolená stěna tělesa, a najdeme její průsečnici s rovinou ρ pomocí dvou stopníků. (postup je zde urychlen tím, že ke konstrukci průsečnice roviny X s rovinou ρ byla vybrána pouze každá druhá stěna tělesa a zbývající strany řezného mnohoúhelníku byly doplněny podle axiomu 1). Průsečíky průsečnice r^x a hran zvolené stěny tělesa jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

1) Řez ve stěně $A'H'V$:

a. rovina α ; $\alpha = \leftrightarrow A'H'V$

b. průsečnice r^α ; $\alpha \cap \rho = r^\alpha$

c. úsečka XT ; $r^\alpha \cap \triangle A'H'V = XT$

2) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně $G'F'V$: $\triangle F'G'V \cap \rho = ZR$;

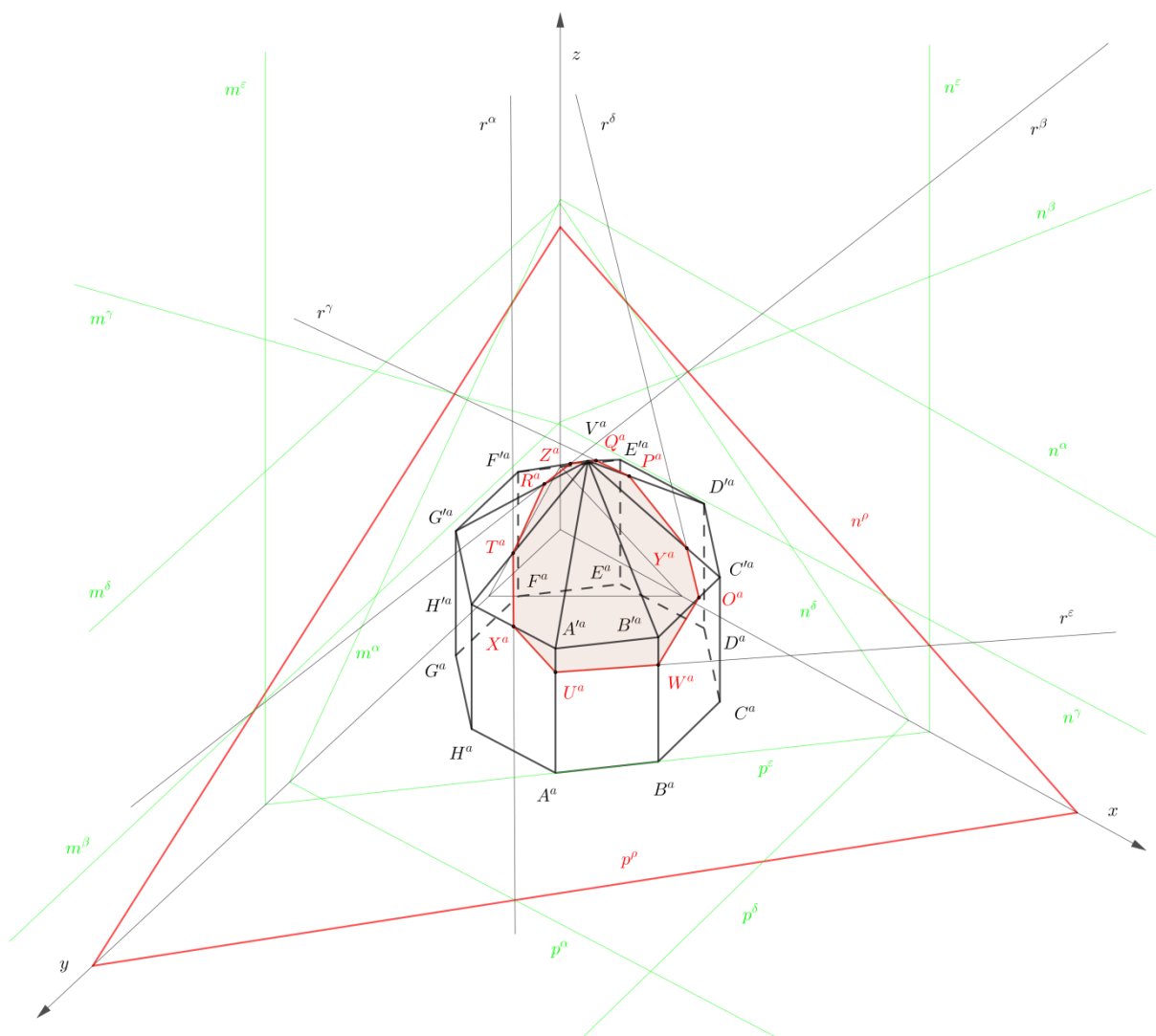
ve stěně $D'E'V$: $\triangle D'E'V \cap \rho = PQ$;

ve stěně $B'C'V$: $\triangle B'C'V \cap \rho = YO$;

v boční stěně $ABA'B'$ hranolu je řezem úsečka UW

(Rovina β v obr. 7. 2. 6. 3 je incidentní s rovinou stěny $F'G'V$, rovina γ zase s rovinou stěny $D'E'V$. Ke konstrukci řezu ve stěně $B'C'V$ byla použita rovina δ a konečně pro vyhotovení řezu ve stěně $ABA'B'$ zase rovina ϵ)

3) Řezem je desetiúhelník $XUWOYPQZRT$.



Obr. 7. 2. 6. 3: Řez sjednocení těles rovinou ρ v axonometrii.

7.2.6.4 Řešení: Řez sjednocení těles ve volném rovnoběžném promítání

Ve volném rovnoběžném promítání nejprve najdeme osu o středové kolineace mezi rovinami XYZ a rovinou podstavy jehlanu, který tvoří horní část sjednocení těles (vycházíme z předpokladu, že odpovídající si přímky se protínají na ose kolineace). Poté konstruujeme průsečnice roviny řezu ρ s jednotlivými stěnami jehlanu. Takto získáme průsečíky roviny řezu ρ s jednotlivými hranami jehlanu, tudíž obdržíme i body řezu na společných hranách jehlanu a hranolu. Dále najdeme osu \bar{o} osově afinity mezi rovinami XYZ a rovinou spodní podstavy hranolu. Průsečíky všech

průsečnic a hran zvolených stěn celého složeného tělesa jsou hledanými vrcholy mnohoúhelníku tvořícího řez tělesa.

- 1) Osa kolineace o , ve středové kolineaci $S = (V; o)$ mezi rovinami $A'B'C'$ a XYZ , kde bod V je středem kolineace a přímka o je osou středové kolineace S :
 - a. body Y_1, Z_1 ; po řadě průměty bodů Y, Z do roviny podstavy jehlanu v kolineaci S (bod X je samodružný, tedy $X = X_1$)
 - b. bod 1 ; $1 \in \leftrightarrow Y_1Z_1 \cap \leftrightarrow YZ$ (v obr. 7. 2. 6. 4 je číslem 1 označen průsečík přímky YZ a jejího afinního obrazu $\leftrightarrow Y_1Z_1$)
 - c. osa o ; $o = \leftrightarrow 1X$.
- 2) Řez ve stěně $B'C'V$:
 - a. bod O ; $o \cap A'B' = O$
 - b. Úsečka OY (dle axiomu 1)
- 3) Řez ve stěně $C'D'V$:
 - a. bod 2 ; $2 \in \leftrightarrow C'D' \cap o$ (v obr. 7. 2. 6. 4 je bod 2 samodružným bodem, náleží tedy rovině řezu ρ a zároveň rovině, v níž leží stěna $C'D'V$. Leží-li tedy body Y a 2 v rovině řezu ρ , pak dle axiomu 1 v ní leží i přímka $2Y$)
 - b. úsečka YP ; $\leftrightarrow 2Y \cap \triangle C'D'V = YP$
- 4) Analogicky postupujeme i v dalších stěnách:

ve stěně $E'D'V$: $\triangle E'D'V \cap \rho = PQ$;

ve stěně $F'G'V$: $\triangle F'G'V \cap \rho = ZR$;

ve stěně $G'H'V$: $\triangle G'H'V \cap \rho = RT$;
- 5) Osa afinity \bar{o} , v osové afinitě $O = (\bar{o}; SS')$ mezi rovinami ABC a XYZ , kde přímka \bar{o} je osa afinity a přímka SS' směr afinity:
 - a. body X'_1, Y'_1, Z'_1, O'_1 ; po řadě pravoúhlé průměty bodů X, Y, Z, O do roviny spodní podstavy hranolu
 - b. body $6', 7'$; $6' \in \leftrightarrow Y_1O_1 \cap \leftrightarrow YO$; $7' \in \leftrightarrow X_1Z_1 \cap \leftrightarrow XZ$; (v obr. 7. 2. 6. 4 jsou čísla $6', 7'$ označeny samodružné body přímek YO a XZ)
 - c. osa \bar{o} ; $\bar{o} = \leftrightarrow 6'7'$.
- 6) Řez ve stěně $HAH'A'$:
 - a. bod $8'$; $8' \in \leftrightarrow HA \cap \bar{o}$ (v obr. 7. 2. 6. 4 je bod $8'$ samodružným bodem, náleží tedy rovině řezu ρ a zároveň rovině, v níž leží stěna $HAH'A'$).

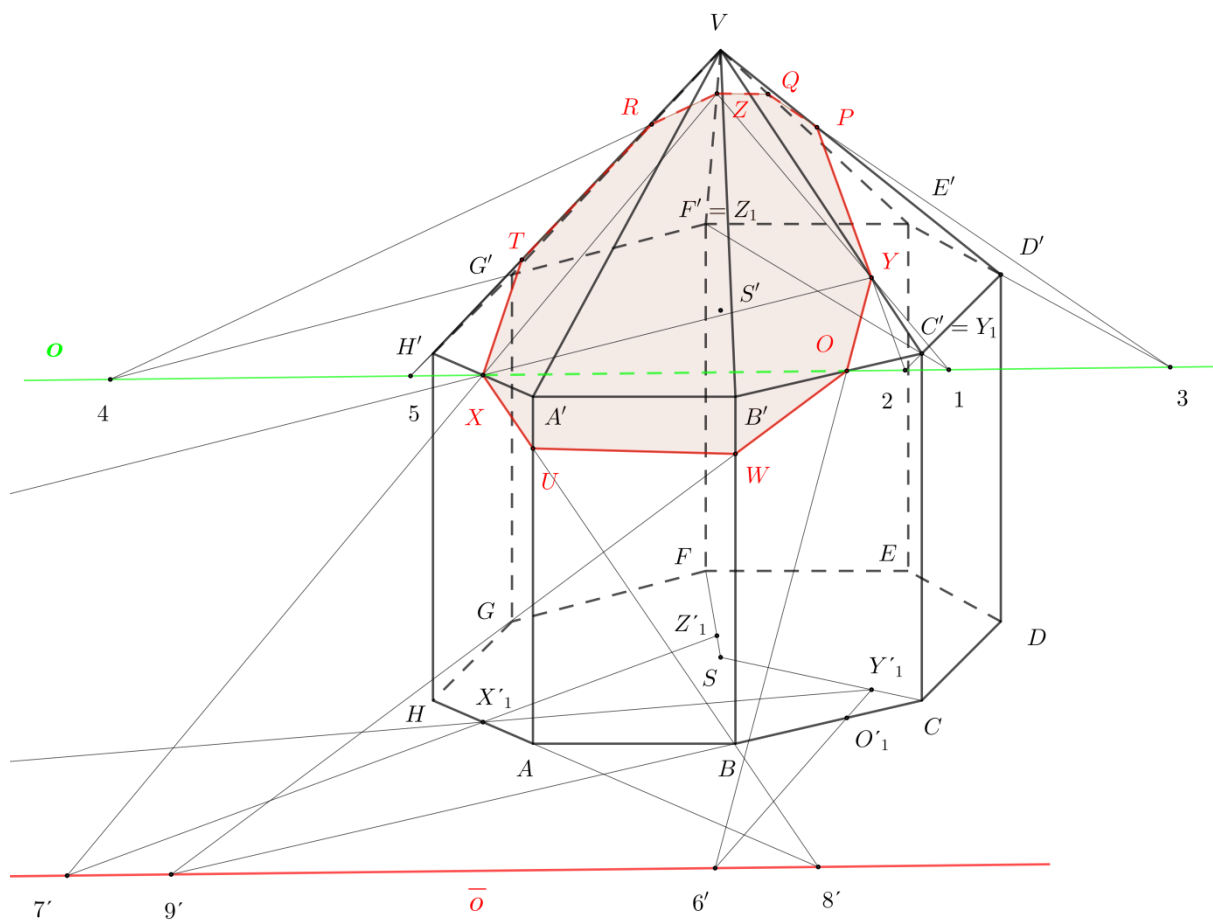
Leží-li tedy body X a $8'$ v rovině řezu ρ , pak dle axiomu 1 v ní leží i přímka $8'X$.

b. úsečka XU ; $\leftrightarrow 8'X \cap$ stěna $HAH'A' = XU$

7) Analogicky postupujeme i ve stěně $BCB'C'$:

úsečka WO ; stěna $BCB'C' \cap \rho = WO$ (viz bod $9'$ v obr. 7. 2. 6. 4)

8) Řezem je desetiúhelník $XUWOYPQZRT$.



Obr. 7. 2. 6. 4: Řez sjednocení těles rovinou XYZ ve volném rovnoběžném promítání.

Seznam užitých symbolů a značek

A, B, \dots	bod A, B, \dots
a, b, \dots	přímka a, b, \dots
$\leftrightarrow AB$	přímka určená body A, B
$\mapsto AB$	polopřímka s počátkem A a vnitřním bodem B
AB	úsečka s krajními body A, B
O_{AB}	osa úsečky AB
$\sphericalangle AVB$	konvexní úhel AVB s vrcholem V a rameny v polopřímkách VA, VB
$\leftrightarrow ABC$	rovina určená body A, B, C
$\triangle ABC$	trojúhelník ABC (trojúhelník s vrcholy A, B, C)
$AB\dots H$	mnohoúhelník s vrcholy $A, B, \dots H$
r	poloměr kružnice
$k(S; r)$	kružnice k se středem S a poloměrem r
$A \in p$	bod A leží na přímce p
$p \subset \rho$	přímka p leží v rovině ρ
$A \in \leftrightarrow KLM$	bod A leží v rovině KLM
$A = B$	bod A splývá, resp. je totožný s bodem B
$a = b$	přímka a splývá s přímkou b
$a \parallel b$	přímka a je rovnoběžná s přímkou b
$P \in a \cap b, a \cap b = \{P\}$	průsečík P různoběžek a, b
$\alpha \cap \beta = p$	průsečnice p rovin α, β
$a \perp b$	přímka a je kolmá k přímce b
$ AB $	délka úsečky s krajními body A, B
$ \sphericalangle AVB $	velikost konvexního úhlu AVB
Z	zobrazení
I	identické zobrazení
R	otočení
Ω	rovinová souměrnost
S	středová souměrnost
$Z_2 Z_1$	zobrazení složené ze zobrazení Z_1 a Z_2 v tomto pořadí
π	první průmětna, půdorysna
A_1	první průmět bodu A , půdorys bodu A

a_1	první průmět přímky a , půdorys přímky a
P^a	půdorysný stopník přímky a
N^a	nárysný stopník přímky a
M^a	bokorysný stopník přímky a
p^α	půdorysná stopa roviny α
n^α	nárysná stopa roviny α
m^α	bokorysná stopa roviny α
$p \Rightarrow q$	p implikuje q , z p plyne q

V. Závěr

Cílem této diplomové práce bylo vypracovat sbírku úloh z deskriptivní geometrie pro nadané. Sbíрка by měla sloužit jako doplňkový materiál k prohloubení znalostí učiva deskriptivní geometrie, k rozvinutí prostorového vnímání a pečlivosti studentů, jakož i k uvědomění si vztahů mezi geometrií a dalšími obory. Sbíрка je složena z části teoretické a praktické, které se obsahově částečně překrývají a doplňují. Jak látka v teoretickém oddílu, tak náročnost konstrukčních i nekonstrukčních úloh v praktické části práce, překračují standardy učiva deskriptivní geometrie na středních školách. Smyslem vyšší náročnosti úloh, resp. hlubších informací, je poskytnout materiál pro rozvíjení nadaných studentů, kteří jsou schopni absorbovat větší penzum znalostí a využít tento potenciál k hlubšímu rozvinutí jejich schopností a vědomostí. Sbíрка je určena především pro studenty středních škol (zejména gymnázií a technicky zaměřených škol) k jejich vlastnímu rozvíjení, pedagogům deskriptivní geometrie k přípravě individuálních učebních plánů pro nadané studenty, resp. specializovaných seminářů v maturitních ročnících a v neposlední řadě též vysokoškolským studentům v prvních ročnících přírodovědeckých a technických fakult.

VI. Seznam použité literatury

Armstrong, Thomas. *Každý je na něco chytrý: jak odhalit a rozvíjet různé druhy inteligence*. Praha: Portál, 2011.

Audrlický, Martin. *Konvexní pravidelné a polopravidelné mnohostěny*. Středoškolská odborná činnost, Hradec Králové: Biskupské gymnázium Bohuslava Balbína, 2015.

Borzíková, Žofia. *Řezy mnohostěnů*. Bakalářská práce, Praha: Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, 2017.

Dohnalová, Eva. *Platónská a archimédovská tělesa a jejich vlastnosti ve výuce matematiky na středních školách*. Diplomová práce, Praha: Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, 2016.

Doležalová, Jitka. *Polopravidelné rovinné grafy*. Diplomová práce, Olomouc: Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, 2010.

Doubrava, Jan. *Platónská tělesa v Geogebře*. Diplomová práce, Olomouc: Univerzita Palackého, Pedagogická fakulta, 2019.

Gajdůková, Lucie. *Shodná zobrazení v prostoru*. Bakalářská práce, Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2007.

Harant, Michal, Oldřich Lanta, Menšík Miroslav, a Alois Urban. *Deskriptivní geometrie pro II. a III. ročník*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965.

Havigerová, Jana Marie. *Vyhledávání nadaných dětí v předškolním věku*. Praha: Grada, 2014.

Helm, Jan. *Využití internetu při výuce mnohostěnů na střední škole*. Diplomová práce, Praha: Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, 2011.

Horák, Stanislav. *Mnohostěny*. Praha: Mladá fronta, 1970.

Horáková, Lucie. *Grupy symetrií*. Bakalářská práce, Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2006.

Hříbková, Lenka. *Nadání a nadaní. Pedagogicko-psychologické přístupy, modely, výtkumy a jejich vztah ke školské praxi*. Praha: Grada Publishing, a.s., 2009.

- Jurášková, Jana, přel. Jana Juřicová, Leona Jelínková. *Základy pedagogiky nadaných*. Praha: Institut pedagogicko-psychologického poradenství ČR, 2006.
- Koutná, Barbora. *Platónova tělesa*. Středoškolská odborná činnost, Olomouc: Obchodní akademie, 2008.
- Krsová, Michaela. *Interaktivní učebnice deskriptivní geometrie*. Diplomová práce, Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2011.
- Kuřina, František. „Shodná zobrazení v prostoru.“ *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, vol. 11, No. 1, 1966: 1 - 13.
- Laznibatová, Jolana. *Nadané dieťa, jeho vývin, vzdelávanie a podporovanie*. Bratislava: Iris, 2007.
- Machačíková, Ivana. *Mezipředmětové vazby ve vyučování matematice a chemii na středních školách: využití matematiky ve středoškolské chemii*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2019.
- Medek, Václav, a Ondrej, přel. Ladislav Drs Šedivý. *Deskriptivní geometrie pro gymnázia*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987.
- Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, *Koncepce podpory rozvoje nadání a péče o nadané na období let 2014–2020*, msmt.cz, 9. září 2014 <https://www.msmt.cz/mladez/talentovana-mladez> (přístup získán 1. června 2020).
- Molnár, Josef a kol. *Geometrická představivost*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, 2014.
- Molnár, Josef. *Planimetrie, Matematika pro střední odborné školy*. Praha: Prometheus, 2011.
- Molnár, Josef. *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, 2009.
- Molnár, Josef, Kobza, Jiří. *Extremální a kombinatorické úlohy z geometrie*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990.
- Mönks, Franz J., Ypenburg, Irene H., přel. Jan Šmarda. *Nadané dítě*. Praha: Grada Publishing, a. s., 2002.

Moravcová, Vlasta. „Deskriptivní geometrie na internetu.“ *Sborník 5. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2011. 240 - 250.

Morávková, Blanka. *Úlohy s prostorovými tělesy v Mongeově zobrazovací metodě*. Diplomová práce, Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2006.

Pajerová, Nikola. *Cvičebnice Mongeova promítání*. Diplomová práce, Praha: Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, 2016.

Pekař, Vojtěch. *Pravidelná a polopravidelná tělesa ve vyšších dimenzích*. Praha: Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, 2012.

Polák, Josef, Bohdan Zelinka. *Názvy a značky školské matematiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988.

Pomykalová, Eva. *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. Praha: Prometheus, 2010.

Protešová, Marie. *Řešené příklady v kótovaném promítání*. Bakalářská práce, Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, 2009.

Rieger, Ladislav. *O grupách a svazech*. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952.

Sutton, Daud, přel. Helen Nyklová. *Platónská a Archimedovská tělesa*. Praha: Dokořán, 2011.

Škrabánková, Jana. *Talent. Is It Really a Gift?* Ostrava: Univerzita Ostrava, Pedagogická fakulta, 2014.

Škrabánková, Jana, Trna Josef, kol. *Nadaní žáci a jejich učitelé v českých školách: zaměřeno na přírodovědu a matematiku*. Brno: Paido, Masarykova univerzita, 2013.

Šmíd, Radek. *Platónská tělesa*. Bakalářská práce, Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012.

Voráčková, Šárka. *Atlas geometrie: geometrie krásná a užitečná*. Praha: Academia, 2012.

Vyhláška Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy č. 27/2016 Sb., *Vyhláška o vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami a žáků nadaných*, ve znění platném ke dni 1. 6. 2020

Zákon 561/2004 Sb., *Zákon o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání*, ve znění platném ke dni 1. 6. 2020.

Internetové zdroje využité v obrázcích a tabulkách

Obr. 1. 1: Keplerův model vesmíru, tzv. Keplerův pohár: Kepler, Johannes.
www.converter.cz. <http://www.converter.cz/fyzici/kepler.htm> (přístup získán 1. červen 2020).

Obr. 1. 6: Krystal sfaleritu ZnS ve tvaru čtyřstěnu: Vávra, Václav. *mineraly.sci.cz*.
http://mineraly.sci.muni.cz/sulfidy/tetraedit_103.jpg (přístup získán 1. červen 2020).

Obr. 1. 6: Zelený krystal fluoritu CaF_2 ve tvaru krychle: *www.malachit-obchod.cz*.
https://cdn.myshoptet.com/usr/www.malachit-obchod.cz/user/shop/detail_alt_1/459_fluorit-krystal-1ks--1-5-2cm-.jpg?5e738d45 (přístup získán 1. červen 2020).

Obr. 1. 6: Krystal magnetitu Fe_3O_4 ve tvaru osmistěnu: *www.malachit-obchod.cz*.
https://cdn.myshoptet.com/usr/www.malachit-obchod.cz/user/shop/detail_alt_1/1404_magnetit-krystal--1ks.jpg?5e738d76 (přístup získán 1. červen 2020).

Obr. 1. 6: Krystal kupritu Cu_2O ve tvaru osmistěnu: *www.wikipedia.org*.
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/27/Cuprite-ww12b.jpg> (přístup získán 1. červen 2020).

Obr. 1. 6: Krystal soli kamenné $NaCl$ ve tvaru krychle: *www.wikipedia.org*.
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7c/Selpologne.jpg> (přístup získán 1. červen 2020).

Obr. 1. 7: Virus dětské obrny: *www.cdc.gov*. https://www.cdc.gov/polio/what-is-polio/images/polio_virus.jpg (přístup získán 1. červen 2020).

Obr. 1. 7: Mřížovka: *www.biolib.cz*. <https://www.biolib.cz/IMG/GAL/BIG/49207.jpg>
(přístup získán 1. červen 2020).

Obr. 1. 7: Virus HIV: *lidovky.cz*.
https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fwww.lidovky.cz%2Frelax%2Fzdravi%2Faidis-epidemie-20-i-21-stoleti-otazky-a-odpovedi.A110601_113737_In-zdravi_glu&psig=AOvVaw0co4EUKyID2niZD5mlxPcV&ust=1589614893601000&source=images&cd=vfe&ved=0CAIQjRxqFwoTC (přístup získán 1. červen 2020).

Obr. 1. 7 : Herpes virus: *helix.northwestern.edu*.
<https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fhelix.northwestern.edu%2Farticle%2Fname%25E2%2580%2599s-virus-herpes-virus-agent-001-cunning-invader&psig=AOvVaw2cehAa58udxoGX4YjKDfkw&ust=1589614931009000&source=images&cd=vfe&ved=0CAIQjRxqFwoTCJiwzKKvtek> (přístup získán 1. červen 2020).

Obr. 1. 8: Molekula boru B_{12} : *www.vesmir.cz*.
https://vesmir.cz/images/gallery/archiv/2008/11/chemie-podivnych-tvaru/page/2008_748_01.jpg (přístup získán 1. červen 2020).

Obr. 3. 2: Molekula fullerenu C_{60} : *www.awarelaxcentrum.cz*.
<https://www.google.com/url?sa=i&url=http%3A%2F%2Fwww.awarelaxcentrum.cz%2Ffullereny&psig=AOvVaw0c6haLQQelHlvHnioqgFI3&ust=1589614035056000&source=images&cd=vfe&ved=0CAIQjRxqFwoTCNCBvvKrtkCFQAAAAAdAAAAABAN>
(přístup získán 1. červen 2020).

Obr. 3. 2: Kopací míč: *www.expresspromo.cz*.
<https://www.expresspromo.cz/gallery/products/middle/11340.jpg> (přístup získán 1. červen 2020).

Obr. 3. 2: Interiér synagogy v poušti Negev: Hutter, Henry. *www.zvihecker.com*.
http://www.zvihecker.com/fileadmin/img/mod_list/negv_07.jpg (přístup získán 1. červen 2020).

Obr. 3. 2: Synagoga v izraelské poušti Negev: *www.zvihecker.com*.
http://www.zvihecker.com/projects/synagogue_in_the_negev_desert-42.html?lng=1
(přístup získán 1. červen 2020).

Tabulka 1. 1: Základní charakteristika pěti platonských těles: *slideplayer.com*.
<https://slideplayer.com/slide/8534860/> (přístup získán 1. červen 2020).

Tabulka 3. 1: Přehled archimedovských těles: *slideplayer.com*.
<https://slideplayer.cz/slide/2610260/> (přístup získán 1. červen 2020).

Tabulka 4. 1: Přehled charakteristik deltatopů: *slideplayer.com*.
<https://slideplayer.cz/slide/2916494/> (přístup získán 1. červen 2020).

Tabulka 5. 1: Přehled hranolů a antihranolů. *slideplayer.com*.
<https://slideplayer.cz/slide/2610260/> (přístup získán 1. červen 2020).